UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

APRENDIZAGEM DA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU POR ALUNOS DO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

Campo Grande - MS
2010

FLORISVALDO DE OLIVEIRA ROCHA

APRENDIZAGEM DA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU POR ALUNOS DO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Educação Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Professora Doutora Marilena Bittar.

Campo Grande – MS
2010

FLORISVALDO DE OLIVEIRA ROCHA

APRENDIZAGEM DA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU POR ALUNOS DO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Educação Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Aprovado em 02 de setembro de 2010

BANCA EXAMINADORA

____

Profª. Drª. Marilena Bittar - UFMS
1º Examinador/ Presidente

____

Profª. Drª. Leny Rodrigues Martins Teixeira - UNESP
2º Examinador

____

Profª. Drª. Suely Scherer - UFMS
3º Examinador

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho:
aos meus pais, Aristides e Ida;
à minha esposa Graciela.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos:

- a Deus, pela saúde para realizar este trabalho;
- à minha família, pelo apoio;
- aos meu colegas de mestrado, pelos momentos agradáveis de estudo;
- aos professores, por terem compartilhado os conhecimentos necessários à construção deste trabalho;
- à professora Marilena Bittar, por aceitar a orientação deste trabalho com muita paciência e sabedoria.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo analisar como ocorre a aprendizagem da resolução de sistemas de equações do 1º grau pelo método da substituição por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, a partir de situações problemas, em ambiente papel e lápis e com o *software Aplusix*. Este trabalho foi organizado de acordo com as quatro fases da metodologia de pesquisa Engenharia Didática. Foi criada uma sequência didática dividida em quatro blocos de atividades concernentes ao estudo de sistemas de equações no Ensino Fundamental. Utilizamos como referencial teórico a teoria das situações didáticas e, dessa forma, as atividades foram elaboradas visando à aparição de momentos *adidáticos*. As atividades foram propostas com o objetivo de que as estratégias mobilizadas pelos alunos os levassem a construir o conhecimento em resolver sistemas de equações do 1º grau pelo método da substituição. Para a constituição de um meio *adidático* utilizamos papel e lápis em algumas sessões e o *software Aplusix* em outras por este oferecer retroações importantes para o desenvolvimento do trabalho dos alunos. O desenvolvimento experimental foi realizado com um grupo de dez alunos do 8º ano do Ensino Fundamental na sala de tecnologia de uma escola pública do município de Nova Alvorada do Sul/MS. A análise dos dados coletados apontou que houve aprendizagem do conhecimento, haja vista que as atividades foram resolvidas de forma autônoma pelos alunos. A análise das observações das gravações em videocassete[1] mostrou que as retroações oferecidas pelo *Aplusix* contribuíram para as reflexões dos alunos sobre as operações efetuadas, isso fez com que a frequência dos erros detectados no teste diagnóstico diminuísse na medida em que os sujeitos foram progredindo na realização da sequência didática.

PALAVRAS-CHAVE: Sistemas de Equações do 1º Grau; Situações *Adidáticas*; Engenharia Didática; *Software Aplusix*.

[1] Ferramenta do *software Aplusix* que permite rever todos os passos dados pelo aluno durante a resolução das atividades.

ABSTRACT

This study aimed to examine how learning takes place in solving systems of equations of first degree by the substitution method by students in the 8th Grade of Elementary School, from problem situations, in an ambience of paper and pencil and with the *Aplusix software* . This work was organized according to the four phases of the research methodology *Didactics Engineering*. It created a didactic sequence divided into four blocks of activities concerning the study of systems of equations in elementary school. We use as a theoretical reference the theory of didactic situations and thus, the activities were developed aiming at the appearance of *adidaticos* moments. The activities were proposed in order that the strategies used by students took them to build knowledge in solving systems of equations of a degree by the substitution method. For the constitution of a *adidatico* environment we used paper and pencil in some sessions and the *Aplusix software* in others for this one can offers important feedbacks for the development of students' work. The experimental development was carried out with a group of ten students in the 8th grade of an elementary school technology room in a public school in Nova Alvorada do Sul / MS. The data analysis showed that there was learning of knowledge, considering that the activities were resolved independently by students. Analysis of observations of the videotape[2] recordings showed that the feedbacks provided by Aplusix contributed to the students' reflections on the operations performed, this has meant that the frequency of errors detected in diagnostic testing decreased in the same way that the individuals were progressing in achieving the didactic sequence.

KEY-WORDS: Systems of Equations of the 1st Degree; Didactic Situations; Didactic Engineering; Aplusix Software.

---

[2] Aplusix software tool that allows you to review the steps taken by the student while solving activities.

LISTA DE PROTOCOLOS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998) um dos objetivos do Ensino Fundamental se refere à capacidade do aluno questionar a realidade por meio da formulação de problemas, bem como sua resolução utilizando o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade da análise crítica, a seleção de procedimentos de resolução e as corretas adequações desses procedimentos.

Refletindo sobre o objetivo citado no parágrafo anterior, percebemos a importância da resolução de problemas no cotidiano do aluno. Por outro lado, pesquisas têm mostrado que são muitas as dificuldades dos alunos com relação ao aprendizado da Álgebra (BONADIMAN, 2007; BURIGATO, 2007; CARDIA, 2007; CHRISTO, 2007; SCHAPPO e PONTE-FILHO, 2003; VASCONCELOS, 1998; FREIRE, CABRAL e CASTRO-FILHO, 2004; VALENZUELA, 2007). Algumas dessas pesquisas tiveram como parâmetros os dados coletados pelo Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – SAEB.

De acordo com os PCN (BRASIL, 1998, p. 115), "o estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas". Contudo, a ênfase dada pelos professores a esse ensino não garante bom aproveitamento dos alunos no trabalho com esse conceito. Isso se evidencia, segundo os PCN, tanto nas pesquisas em Educação Matemática como nas avaliações do SAEB. Os resultados publicados pelo SAEB, por exemplo, apontam que em várias regiões do País itens referentes à Álgebra, poucas vezes atingem 40% de acerto. Consequentemente, segundo os PCN (BRASIL, 1998, p.116):

> Isso faz com que os professores procurem aumentar ainda mais o tempo dedicado a este assunto, propondo em suas aulas, na maioria das vezes, apenas a repetição mecânica de mais exercícios. Essa solução, além de ser ineficiente, provoca grave prejuízo no trabalho com outros temas da Matemática, também fundamentais, como os conteúdos referentes à Geometria.

De acordo com Valenzuela (2007), a pesquisa de (MIGUEL, FIORENTINI & MIORIM, 1992) já comunicava o que estamos dizendo: a maioria dos professores ainda prefere trabalhar a Álgebra de forma mecânica e dissociada de qualquer significação social e lógica, priorizando mais a resolução de equações, manipulação de regras e de expressões.

Refletindo a respeito das dificuldades de aprendizagem da Álgebra, percebemos que vivenciamos os dois lados dessa situação: como aluno, desde os primeiros contatos com esse conceito até a academia, e como professor de matemática desde o ano 2000. Como aluno, muitas eram as indagações a respeito de o porquê aprender Álgebra; por que ficar fazendo cálculos com letras misturadas com números? Como professor, procurava seguir a metodologia utilizada pelos mestres: aulas expositivas e resolução de exercícios de fixação. Ensinava o conceito matemático e posteriormente aplicava como ferramenta para resolver problemas, diferentemente do que orientam os PCN (1998).

Diante das angústias com relação ao ensino e a aprendizagem da Álgebra e após leitura de pesquisas, de documentos oficiais e de estudos de teóricos franceses (ARTIGUE, 1988; BROUSSEAU, 1986 e DOUADY, 1986), percebemos que diferentemente da nossa prática de ensino, o professor deve proporcionar ao aluno condições para que este possa construir seu conhecimento. Segundo Freitas (2007), o professor deve evitar adiantar resultados gerais envolvendo conteúdos. Ele deve estimular os alunos a chegarem aos resultados e sempre que possível deve simular um ambiente científico de pesquisa que proporcione aos aprendizes viverem momentos de investigação. Para isso, deve apresentar a seus alunos problemas carregados de intenções de ensino. Esses problemas devem envolver conhecimentos que o aluno tem e os que vai construir.

Após as leituras das pesquisas citadas, dos documentos oficiais e tendo refletido sobre os procedimentos de ensino e aprendizagem da Matemática acerca de como se constrói o conhecimento algébrico, bem como de nossa prática docente, resolvemos pesquisar a aprendizagem de um conceito algébrico nos moldes da teoria construtivista. Apresentamos nesse trabalho uma investigação a respeito do aprendizado de sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas. Nossa proposta é investigar se o aluno, com base em conhecimentos já adquiridos, é capaz de construir conhecimentos sobre resolução de sistemas de equações do 1º grau e de resolver situações-problema envolvendo este conceito.

A seguir apresentamos a justificativa de termos escolhido esse objeto matemático citado.

Como professor de Matemática e Física trabalhando no Ensino Médio, buscamos em nossa prática docente algum conceito que nos causasse certa estranheza com relação ao seu aprendizado em séries anteriores às que estava lecionando. Segundo Giofaldoni e Moroz (2006), o pesquisador precisa estar imerso no cotidiano que causou a inquietação ou, pelo menos, observando os fatos que, de alguma forma motivou a investigação. Em conformidade com as ideias das autoras, acreditamos que o professor em regência por estar em contato direto com o aprendiz tem a oportunidade de observar alguns fatos que condicionam a progressão da aprendizagem do aluno em sua vida estudantil. Isso permite que em seu cotidiano reflita se os procedimentos de ensino e aprendizagem adotados em sua prática são eficazes.

Por estar em contato direto com o aluno, o professor se depara com diversas situações que o levam a refletir sobre o ensino e a aprendizagem de algum conceito. Contudo, tanto nas aulas de Matemática quanto nas aulas de Física, um conceito matemático, sistema de equações, nos chamou a atenção quanto à dificuldade encontrada, pelo menos pelos sujeitos que eram nossos alunos no Ensino Médio. Por vários momentos da aula resgatamos um conhecimento que nessa fase deveria fazer parte dos saberes adquiridos por esses alunos. Todo ano quando tínhamos que introduzir algum conteúdo matemático que exigia o conhecimento de sistemas de equações, poucos se lembravam que tinham visto no Ensino Fundamental. Questionados sobre a ausência de conhecimento do assunto, uns diziam não lembrar, outros diziam nunca terem visto. Esse fato nos causava certa curiosidade; poderia ser um bom objeto de pesquisa.

Para esclarecer nossa estranheza quanto a esse conceito, apresentamos um exemplo: trata-se do método de encontrar a matriz inversa de uma matriz quadrada 2x2, quando estamos trabalhando com a teoria das matrizes no 2º ano do Ensino Médio. Neste caso, um recurso geralmente utilizado é multiplicarmos a matriz dada por uma matriz genérica, candidata a inversa, e igualamos a expressão à matriz identidade 2x2. Se antes não for feito um trabalho de revisão de resolução de sistema de equações, a dificuldade pode ser maior, haja vista que o recurso algébrico mencionado é utilizado como ferramenta matemática para encontrar a matriz inversa. Estamos dizendo isso porque, ao fazer a multiplicação da matriz dada pela candidata a inversa surgirão dois sistemas de equações do 1º grau para serem resolvidos. É nesse momento que surgem as dúvidas quanto à resolução desses sistemas. Dúvidas que precisam ser sanadas para que se possa dar continuidade à aula.

Para dar embasamento ao que dissemos e levantar algumas questões quanto ao aprendizado desse conteúdo por esses alunos durante o Ensino Fundamental, localizamos nos documentos oficiais orientações para aplicação desse conceito no Ensino Médio.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio – PCNEM (2006, p. 77), “as posições relativas entre reta e círculo devem ser interpretadas sob o ponto de vista algébrico, o que significa discutir a resolução de sistemas de equações”. Como vemos, o documento oficial recomenda a utilização desse conceito como ferramenta de discussão de conteúdos no Ensino Médio. Diante disso, por que alguns alunos não sabem aplicar um conhecimento que aprenderam no Ensino Fundamental para trabalharem conceitos aprendidos no Ensino Médio, uma vez que os PCNEM (2006) orientam que deve ser utilizada a resolução de sistemas na interpretação das posições relativas entre reta e círculo? Por que não se faz ligação entre o que se aprendeu sobre sistemas no Ensino Fundamental com o que se vai aprender no Ensino Médio na medida em que se deve utilizar esse conhecimento como ferramenta?

Quando dizemos que geralmente não há uma relação entre o que o aluno aprendeu e o que vai aprender, estamos colocando nosso ponto de vista diante de nossa experiência como professor. Entretanto os próprios PCNEM não orientam o professor a fazer ligação do assunto que o aluno está prestes a aprender com o que aprendeu nos anos anteriores. Acreditamos que isso ocorre devido ao fato de que esse conceito já deve fazer parte do rol de conhecimentos que o aluno do Ensino Médio tem que foram aditados durante sua passagem pelo Ensino Fundamental.

Nosso desafio nessa proposta é investigar se alunos, acostumados ao que Freitas (2007) chamou de aprendizagem formal, quando a compreensão verdadeira da Matemática é substituída pela memorização, pelas técnicas e pelos processos de automatismo, aprendem um conteúdo matemático por meio da adaptação dos conhecimentos já adquiridos. Diante deste modelo, no qual o aluno está acostumado a perguntar ao professor e obter de imediato a resposta sem que ao menos seja levado a fazer reflexões, sentimos a necessidade de buscar referências para a realização dessa investigação. Desta forma, encontramos na Teoria das Situações Didáticas e na Engenharia Didática, sustentação teórica e metodológica para refletirmos sobre nosso objeto de pesquisa, no caso, a **aprendizagem da resolução de sistemas de equações do 1º grau pelo método da substituição por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental em ambiente papel e lápis e o *software Aplusix***.

QUESTÕES NORTEADORAS

Tendo em vista a escolha do objeto de pesquisa, bem como alguns fatos que nos motivaram a realizar este trabalho, definimos algumas questões para que possamos refletir sobre os principais pontos que queremos atingir, as quais chamamos de questões norteadoras da pesquisa.

- Como se dá a aprendizagem da resolução de sistemas de equações do 1º grau, bem como a resolução de problemas envolvendo esse conceito, por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental diante de situações *adidática*s?
- Como o aluno interpreta um enunciado, identifica as incógnitas, monta o sistema de equações e articula as estratégias de resolução?
- Os conhecimentos já adquiridos por esses alunos são suficientes para que possam construir o novo saber?
- Como superar as dificuldades apontadas pelas pesquisas com relação à aprendizagem da Álgebra e as que podem surgir durante a experimentação?

Refletindo sobre a problemática desta pesquisa a qual se refere à construção do conhecimento da resolução de sistemas de equações do 1º grau e, tendo em vista que os sujeitos desta investigação estão acostumados a apenas repetir o que o professor recita em sala de aula, temos como a seguinte questão principal de investigação: como se dá a aprendizagem da resolução de sistemas de equações do 1º grau pelo método da substituição, bem como a resolução de problemas envolvendo esse conceito, por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental diante de situações *adidática*s, em ambiente papel e lápis e com *software Aplusix*?

OBJETIVOS DA PESQUISA

A partir da delimitação das questões de pesquisa passamos então a definir os objetivos deste trabalho.

O **objetivo principal** dessa pesquisa é analisar como ocorre a aprendizagem da resolução de sistemas de equações do 1º grau pelo método da substituição por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, a partir de situações problemas, em ambiente papel e lápis e com *software Aplusix*.

Para atingir nosso objetivo geral, elencamos três **objetivos específicos**:

- Analisar como ocorre a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica na resolução de problemas envolvendo sistemas de equações do 1º grau;
- Identificar e analisar as dificuldades dos alunos na resolução de sistemas de equações do 1º grau;
- Identificar situações que desafiam o aluno à elaboração de procedimentos de resolução de sistemas de equações do 1º grau.

No primeiro objetivo vamos analisar como o aluno trabalha problemas escritos em linguagem natural, interpreta o enunciado e identifica as informações que possibilitam a escrita das equações que compõem o sistema, objetivando a construção desse novo conhecimento. Alunos nessa etapa do 8º ano do Ensino Fundamental já tiveram contato com resolução de problemas escritos em linguagem natural por meio da tradução das informações em linguagem matemática, porém, as situações-problema envolviam equações do 1º grau. Para esses alunos a modelagem de situações-problema em sistemas de equações é um conhecimento novo.

No segundo objetivo vamos identificar e analisar as dificuldades dos alunos nesse processo de construção, já que o desafio dessa proposta é de que possam adaptar conhecimentos adquiridos anteriormente para resolver problemas que envolvam novos conceitos, no caso, sistemas de equações do 1º grau. Nosso intuito com essa observação se fundamenta na aprendizagem por meio da superação das dificuldades que podem surgir, uma vez que estratégias erradas são inevitáveis quando se está diante de situações em que o conhecimento adquirido anteriormente rapidamente se mostra insuficiente.

No terceiro objetivo, pretendemos criar situações que podem fazer com que o aluno consiga dispor de estratégias que convirjam em procedimentos de resolução de sistemas de equações, bem como a resolução de problemas contextualizados envolvendo esse conceito. Para isso, vamos estudar e criar uma sequência de aprendizagem na qual as atividades serão propostas de forma que o aluno se aproprie do conhecimento gradativamente, de forma que utilize o conhecimento apropriado em cada etapa da experimentação para construir o saber da etapa seguinte. Desta forma, ao final da última etapa da experimentação espera-se que haja apropriação do conhecimento visado.

Para uma melhor compreensão da evolução deste trabalhado de acordo com a metodologia utilizada, apresentamos, a seguir, uma breve descrição dos capítulos.

No capítulo I, discorremos sobre os referenciais adotados.

No capítulo II, apresentamos um estudo sobre sistemas de equações. Iniciamos com alguns fatos que marcaram a aparição desse conceito na história da matemática; em seguida buscamos nos documentos oficiais as fases do Ensino Fundamental onde são vistos esse conteúdo e como são abordados no livro didático. Ainda neste capítulo, analisamos alguns aspectos que podem influenciar na aprendizagem da Álgebra, inclusive um teste diagnóstico aplicado aos sujeitos desta pesquisa; Por fim, discorremos sobre alguns métodos de resolução de equações do 1º grau e sobre resolução de sistemas de equações do 1º grau.

No capítulo III, são apresentadas as variáveis didáticas e os blocos de atividades que compõem a sequência didática, bem como a análise a *priori*. Optamos, ainda, por apresentar, neste capítulo, a análise a *posteriori* após a análise a *priori* de cada bloco.

Nas considerações finais, nos debruçamos novamente sobre os resultados obtidos para realizarmos algumas reflexões acerca destes resultados e dos objetivos de nossa pesquisa, procurando ainda apontar perspectivas para trabalhos futuros.

CAPÍTULO I - ELEMENTOS TEÓRICOS DA PESQUISA

1.1 Referencial teórico: situações *adidática*s e institucionalização

Para responder à questão de pesquisa precisamos de um referencial teórico que coadune com nossa proposta de trabalho. Para isso, utilizamos a teoria das situações didáticas por permitir a elaboração de situações que possibilitam ao aluno papel ativo na construção de seu conhecimento, de forma que se sinta motivado a buscar a solução do problema proposto. Desta forma, ele procura adaptar o que sabe ao meio organizado pelo professor de tal maneira que, caso consiga, as novas respostas poderão ser consideradas os primeiros frutos do novo conhecimento.

É importante ressaltar que, apesar de o professor ter preparado um meio cheio de intenções didáticas, deverá evitar adiantar respostas que poderão levar à solução do problema proposto, uma vez que o conhecimento deve ser construído pelo aluno. O meio deverá conter situações que favoreçam a reflexão do aluno sobre as mudanças de estratégias de resolução do problema, uma vez que os conhecimentos alcançados não são suficientes para se chegar à solução visada. As situações propostas podem proporcionar ocasiões em que o aluno poderá agir como se fosse um matemático pesquisador na busca da solução do problema. Para isso, é preciso que nesses momentos não haja interferência direta do professor.

Quanto às situações *adidática*s, de acordo com Brousseau (2009, p. 30), existem três tipos de situações:

> [..] aquelas que convocam à tomada de decisões, ou seja, que colocam os alunos em ação, as que permitem formular ideias e colocá-las à prova e, por último, os debates, momento em que o grupo discute estratégias de resolução, avaliando quais opções são mais adequadas.

Entendemos que Brousseau se refere às três fases de uma situação *adidática*:

- **ação**: após aceitar a responsabilidade de resolver o problema o aluno tenta utilizar seus conhecimentos alcançados para resolvê-lo. Cabe ao meio preparado pelo professor as retroações às ações do aluno;
- **formulação**: diante das retroações fornecidas pelo meio, o aluno poderá perceber que seus conhecimentos não são suficientes. Neste momento ele poderá dispor de estratégias em que estão envolvidos conhecimentos já institucionalizados ao longo de sua vida. Mensagens podem ser trocadas com

outros alunos, que poderão aceitar, ajustar ao que estavam pensando, ou refutar;

- **validação**: poderá ocorrer em dois momentos – para comprovar cada passagem das operações envolvidas na resolução do problema e na verificação do resultado final.

Devemos ressaltar que o conhecimento construído deve ganhar o estatuto cognitivo do saber, compete ao professor fazer isso. De acordo com Almouloud (2007, p. 40), "uma vez construído e validado o novo conhecimento vai fazer parte do patrimônio matemático da classe [...]". Brousseau (1986) chamou essa fase de institucionalização.

1.1.1 Constituição do meio adidático

De acordo com Freitas (2008, p. 79) o meio organizado pelo professor "[...] é onde ocorrem as interações do sujeito, é o sistema antagonista no qual ele age". Entendemos que o sistema antagonista o qual o autor se refere é o conjunto de situações que podem levar o aluno a perceber que seus conhecimentos não são suficientes para resolver o problema (desafio) proposto pelo professor. Com efeito, são as retroações fornecidas pelo meio que podem levar o aluno a refletir sobre suas ações e fazer com que haja mudança de estratégia, na tentativa de encontrar o caminho que o conduza à solução do problema.

Levando-se em consideração a teoria das situações didáticas e a sequência que vamos criar, na elaboração das situações, entendemos que é fundamental a constituição de um meio que favoreça a elaboração de situações que possam ser vividas como *adidáticas*. Neste sentido, para a elaboração de um meio *adidático*, propomos a utilização de papel e lápis em algumas sessões e o *software Aplusix* em outras por este oferecer retroações importantes para o desenvolvimento do trabalho dos alunos.

O *software Aplusix* tem como uma de suas principais funcionalidades a possibilidade de oferecer ao aluno maior controle sobre suas ações durante a resolução de um problema e isso é possível graças às retroações que o *software* oferece. De acordo com Bittar e Chaachoua (2004, p. 3),

> [...] a exploração desse tipo de ferramenta constitui uma importante aliada na busca de alternativas de ensino que visam uma aprendizagem significativa dos conceitos, atribuindo ao aluno papel ativo no processo de aprendizagem.

Em *Aplusix* (2009), encontramos quatro os modos de operação:

Aprendizagem: durante a resolução da atividade o aluno tem retroações sobre a validade de uma passagem para outra e também de seu fim. O *software* valida por meio de símbolos se a equivalência está ou não correta entre uma linha de resolução e outra. Veja um exemplo abaixo:

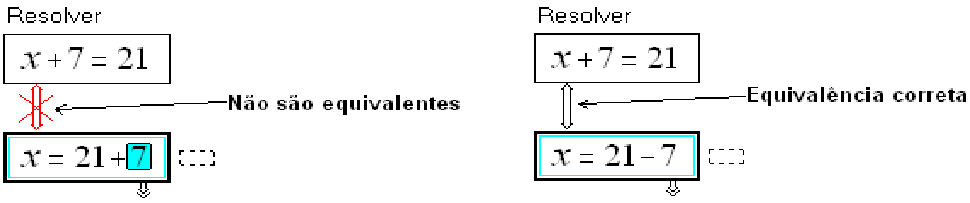


Figura 1: comparação de validação do *Aplusix* de equivalência e não equivalência entre duas etapas consecutivas

Nesse modo o professor poderá optar por três casos de verificação:

- sem verificação – nesse caso o aluno resolve a atividade como se estivesse fazendo com papel e lápis, ou seja, sem nenhuma verificação se sua resolução está correta.

- verificação a pedido – nesse caso cabe ao aluno pedir ao *software* que verifique se seu trabalho está correto. Isso pode ser feito várias vezes durante a resolução de uma atividade ou apenas no final.

- verificação permanente – nesse caso o *software* faz automaticamente a verificação do trabalho a cada etapa. A versão que vamos utilizar permite que se passe de uma linha para outra, porém, a cada não equivalência o *software* assinala com um xis vermelho, como no exemplo da figura 6. Apesar de o *software* permitir que isso seja feito, deve-se lembrar que no término da atividade ele indicará que a resposta não é a esperada. Nesse caso, deve-se voltar ao ponto onde não há equivalência e procurar descobrir o que está errado.

Teste: nesse modo de operação o aluno não tem retroações. O *software* permite que o professor estabeleça um tempo para resolução de uma lista de atividades. Esse tempo é regressivo e pode-se escolhê-lo entre 15, 20, 30, 40, 50 ou 60 segundos. Cabe ao professor estimar o melhor tempo para a avaliação de seus alunos.

Autocorreção: esse recurso permite que o aluno corrija as atividades que estão erradas.

Observação: qualquer atividade realizada pode ser observada posteriormente pelo professor ou pelo próprio aluno. Para o aluno só está disponível a sua resolução, para o professor estão disponíveis as resoluções de todos os alunos da classe a que está vinculado. Uma ferramenta interessante que o *software* oferece nesse modo de operação é o videocassete. Esse recurso é responsável por gravar todos os passos na resolução das atividades propostas, com isso, o professor ou o pesquisador tem acesso, em parte, ao que o aluno estava pensando em cada passagem correta ou não.

É importante lembrar que não é nosso interesse apresentar todos os comandos do *software*, porém, basicamente, durante a experimentação, utilizamos os modos de operação: aprendizagem e observação. No modo aprendizagem optamos em configurar o *software* com verificação permanente para que as retroações ocorram a cada ação mal sucedida pelo aluno, privilegiando, assim, sua reflexão a respeito da descoberta do caminho correto. É conveniente salientarmos que quando dizemos "ação mal sucedida" estamos nos referindo ao que se espera de uma filosofia da aprendizagem construtivista: o sujeito aprende adaptando-se a um meio que é fator de dificuldades, contradições e desequilíbrios. Numa reflexão mais pontual, para um aluno que ainda não conhece um determinado conceito é apropriado que ocorram erros em suas primeiras ações para chegar à solução do problema proposto.

1.2 Referencial metodológico: fases da engenharia didática

Para estruturar as etapas desta pesquisa, utilizamos a metodologia de pesquisa Engenharia Didática apresentada por Artigue (1988). Trata-se de uma metodologia criada para estruturar pesquisas envolvendo ensino e aprendizagem em sala de aula. Essa metodologia divide a pesquisa em quatro fases distintas, porém, relacionadas: análises preliminares, análise a *priori*, experimentação e análise a *posteriori*.

Na primeira fase, nas análises preliminares, o pesquisador seleciona o assunto, define e formula o problema da pesquisa, reúne a documentação sobre o assunto-problema a ser investigado e revisa a literatura envolvendo o objeto matemático. Nessa fase fizemos um estudo da gênese histórica de sistemas lineares, bem como suas manifestações antigas e contemporâneas; fizemos um estudo, de acordo com algumas pesquisas, sobre resolução de equações do 1º grau com o objetivo de vermos como se dá a abordagem desse assunto no Ensino Fundamental, uma vez que esse conceito é um dos pré-requisitos na aprendizagem da resolução de sistemas por métodos exclusivamente algébricos; discutimos os métodos de resolução de sistemas contemplados nos livros didáticos do Ensino Fundamental: substituição e adição; Analisamos os documentos oficiais (PCN, 1998 e PNLD, 2008) e livros didáticos; fizemos um levantamento das dificuldades e erros de conceitos algébricos cometidos por alunos na faixa etária dos sujeitos que farão parte desta investigação, bem como das dificuldades de conversão entre a linguagem natural e algébrica.

Procurando sermos mais pontuais no que se refere às dificuldades dos alunos que irão compor o grupo de sujeitos desta pesquisa, aplicamos e analisamos um teste diagnóstico contendo alguns conceitos algébricos que consideramos como alguns dos pré-requisitos para aprendizagem da resolução de sistemas de equações. Apesar das dificuldades e erros apresentados pelos sujeitos das pesquisas analisadas, o referido teste, além de corroborar o que os pesquisadores tinham diagnosticado, serviu-nos também para diagnosticar, pelo menos parcialmente, os conhecimentos matemáticos dos pesquisados desta investigação. É oportuno relatarmos que aproveitamos os resultados do teste diagnóstico para escolher os sujeitos que participaram da experimentação, haja vista que a maioria apresentou dificuldades na resolução das atividades propostas no teste.

Na segunda fase, na análise a *priori*, o pesquisador, com base nos estudos da etapa anterior, cria e analisa um instrumento de investigação (sequência didática), bem como levanta hipóteses sobre o ensino e a aprendizagem do assunto investigado. É nesta fase que o professor (pesquisador) prepara e organiza o meio para que haja retroações nas primeiras ações dos alunos (sujeitos). Para isso devem-se escolher adequadamente as variáveis didáticas. De acordo com Almouloud (2007), a mudança dos valores das variáveis didáticas é que vão permitir o surgimento das retroações e provocarem modificações nas estratégias. Nesta pesquisa, foram escolhidas as atividades da sequência didática e as dividimos em quatro blocos. Justificamos e discutimos as variáveis didáticas e fizemos a análise a *priori* das atividades que serão propostas.

Antes de falarmos sobre a terceira fase da engenharia, vamos apresentar os sujeitos desta pesquisa. Nosso grupo de sujeitos é composto por dez alunos de uma turma de 8º ano do ensino fundamental de uma escola estadual no Município de Nova Alvorada do Sul – MS. Essa turma tem 20 alunos que estudam no turno matutino.

Trabalhamos com esses alunos em horário paralelo às aulas de matemática, uma vez que alguns não tinham disponibilidade para vir à escola no período vespertino. Diante disso, durante o tempo em que duraram as aulas de experimentação, em comum acordo, o professor regente da sala revisou a geometria vista nos anos anteriores com os alunos que não iam para sala de tecnologia. Desta forma, não houve prejuízo com relação à perda de conteúdo, uma vez que a geometria trabalhada pelo professor na sala de aula já tinha sido vista pelos alunos da experimentação. Após o término da experimentação, os sujeitos se juntaram aos outros alunos da turma e os conceitos vistos na sala de tecnologia foram trabalhados pelo professor no restante do ano letivo.

A escolha dos sujeitos se deu por meio da aplicação de um teste diagnóstico o qual envolveu todos os alunos da turma citada. Em princípio, não tínhamos a intenção em utilizar esse teste para escolha dos sujeitos, porém, diante dos resultados, resolvemos escolher aqueles que não apresentaram muita dificuldade com os conhecimentos que consideramos um dos pré-requisitos para a aprendizagem da resolução de problemas por meio de recursos algébricos. O motivo dessa escolha se deu pelo fato de não termos tido tempo para fazermos uma recuperação dos conceitos em que os sujeitos apresentaram dificuldades, haja vista que a aprendizagem de conceitos algébricos é demorada.

Na terceira fase, na experimentação, o pesquisador sai a campo (sala de aula) com o objetivo de coletar as informações. É nessa fase que ele aplica a sequência didática criada na etapa anterior.

A seguir relatamos como se deu os encontros durante o período da experimentação; os relatos serão breves, uma vez que no capítulo 3 detalhamos os principais fatos que ocorreram na coleta de dados.

No primeiro dia da experimentação optamos em conversar com os sujeitos sobre o que pretendíamos e aproveitamos para familiarizá-los com os comandos do *Aplusix, software* usado na sequência didática. Na ocasião, informamos que naquele dia íamos apenas aprender os comandos do *software* e aproveitamos para escolher as duplas. Como eram dez alunos, formaram-se cinco duplas. O computador que cada dupla utilizou pela primeira vez desde a familiarização foi o mesmo durante toda a experimentação. Na familiarização com o *software*, aproveitamos esse recurso para resolver a lista de atividades do teste diagnóstico.

No dia 05 de outubro de 2009 nos reunimos pela segunda vez, porém, nessa ocasião dávamos início, efetivamente, à resolução das atividades do primeiro bloco de atividades. Em um primeiro momento esclarecemos que estavam participando de uma pesquisa científica. Como nesse bloco de atividades tínhamos previsto que seria utilizado apenas papel e lápis, pedimos que tudo que pensassem sobre a resolução, anotassem na folha entregue. De início, eles queriam utilizar o caderno como rascunho e colocar apenas as respostas na folha. Para contornar essa situação, informamos a eles que não utilizassem o caderno e o que nos interessava eram os procedimentos adotados. Mesmo concordando, alguns queriam fazer a lápis para poder apagar os cálculos errados. Neste momento, usamos o mesmo argumento e desta vez eles concordaram em anotar tudo a caneta.

Prevendo que em certos momentos poderiam pedir nossa ajuda por estarem acostumados a isso, esclarecemos que não poderíamos ensiná-los, no entanto, poderiam trabalhar em grupo da seguinte forma: cada dupla se dispunha a resolver a atividade individualmente, e posteriormente, a dupla que chegasse a algum resultado poderia compartilhar com as demais a estratégia utilizada, bem como demais informações relacionadas.

Para facilitar a identificação das duplas durante as análises das atividades e para preservar o anonimato usaremos siglas como RP, GN, LC, AA e JY, sendo que os caracteres de cada par representam a primeira letra do nome da cada sujeito. É importante salientar que não escolhemos as duplas, apenas deixamos que se formassem, de acordo com a afinidade em sala de aula. No entanto, deixamos claro que enquanto durasse a experimentação os pares não poderiam mudar.

Durante a experimentação gravamos, com consentimento, diálogos das duplas. Neste caso, na transcrição dos diálogos identificaremos cada sujeito envolvido pela primeira letra do nome. Quando estivermos com a palavra usaremos a letra F.

Quanto à organização do tempo, não nos preocupamos em dividir a sequência em sessões. Houve aula de dois tempos em que conseguimos fazer no máximo quatro atividades, em outras, fizemos apenas uma atividade. Para fazer a atividade 3, do bloco 2, por exemplo, foram utilizadas uma aula e metade de outra pelo fato de não conseguirem interpretar e traduzir para linguagem algébrica a informação "Carlinhos tem o dobro de figurinhas de Celso". Diante disso, devido à variação de atividade por aula não estabelecemos a quantidade de sessões. Entretanto, estabelecemos final de novembro como prazo máximo para aplicar a experimentação, mesmo porque, o professor da turma nos deu esse tempo, uma vez que precisava do restante do ano letivo para ensinar sistemas para os alunos que não participaram da experimentação.

Apesar de ter existido alguns feriados durante o período de aplicação da sequência, bem como outros motivos de atraso tais como, reuniões, conselhos de classe, professora da Sala de Tecnologia que ficou doente e reuniões do colegiado, conseguimos coletar todas as informações.

No dia 23 de novembro de 2009 terminamos a última atividade do quarto bloco. Quando iniciamos a experimentação esses alunos não tinham conhecimento desse conceito, quando terminamos, eles conseguiam resolver com certa facilidade os problemas propostos por meio da escrita e resolução de sistemas de equações.

Quanto à utilização do *software*, no bloco 1 utilizamos apenas papel e lápis, uma vez que objetivávamos, além de sentirem a necessidade do uso de um recurso algébrico para resolver problemas, que distinguissem as informações embutidas no enunciado do problema, as quais em situações posteriores norteariam a escrita das equações. Neste caso não víamos a necessidade do uso do *software*. Nos blocos 2 e 3, utilizamos tanto papel e lápis quanto o *software*. Poderíamos ter utilizado apenas o *software*, porém, sentimos a necessidade de também usar papel e lápis com o objetivo de que o aprendizado construído tenha efeito nesse recurso, haja vista que, na maioria das vezes, em seu cotidiano o aluno só utiliza papel e lápis. Outro motivo de utilizarmos também papel e lápis se deve ao fato de termos um registro escrito das ações dos alunos. No bloco 4 utilizamos apenas o *Aplusix*.

Na quarta fase, na análise a *posteriori*, o pesquisador analisa as informações, comparando os resultados obtidos às hipóteses levantadas na segunda fase. Desta forma, após a experimentação, juntamos todos os registros escritos nas folhas entregues, gravações de áudio e as resoluções gravadas por meio da ferramenta videocassete do *Aplusix* e analisamos os dados coletados, comparando-os às hipóteses levantadas na fase anterior.

Após termos discorrido sobre os referenciais adotados, no próximo capítulo apresentamos um estudo sobre sistemas de equações o qual inclui: alguns fatos que ocasionaram aparição deste conceito na história da Matemática, fases do Ensino Fundamental onde são aplicados sistemas de equações; a abordagem do livro didático; aspectos que influenciam na aprendizagem da Álgebra; resolução de equações do 1º grau e resolução de sistemas de equações do 1º grau.

CAPÍTULO II – SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU NO ENSINO FUNDAMENTAL

2.1 Surgimento de sistemas de equações na histórica da Matemática

Segundo Eves (1997), na história da Matemática ocidental antiga foram poucas aparições de sistemas de equações lineares. De acordo com o autor esse assunto mereceu maior atenção no oriente. Os chineses representavam os sistemas de equações lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambus sobre quadrados de um tabuleiro. Foi desta forma que esses matemáticos descobriram o método de resolução por eliminação que consiste em zerar coeficientes utilizando-se de operações elementares.

Segundo Luccas (2004, p. 44), "os matemáticos indianos realizaram importantes trabalhos relacionados principalmente à produção algébrica, dentre eles destacamos o trabalho desenvolvido por Brahmagupta".

De acordo com Luccas (2004), citando Lintz (1988), Brahamagupta (598 – 668) matemático indiano criou um método de resolução de equações simultâneas. Trata-se de um método que podemos chamar de *Método da Eliminação sucessiva de incógnitas*.

> A resolução de sistemas do 1º grau já era conhecida há algum tempo; no entanto, quando se tratava de equação do 1º grau com várias incógnitas, a solução não era tão comum assim, o que dá relevância ao método produzido por Brahmagupta para sistemas desse último tipo. Tal método consistia basicamente na eliminação sucessiva das várias incógnitas. Vejamos o exemplo fornecido por Lintz para entendermos melhor o processo adotado por Brahmagupta:
>
> $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \tag{3}$$
>
> Isolando a incógnita x1 por meio da simplificação de termos, temos:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2x_2 - 3x_3 \\ x_1 = 2 - x_2 + 4x_3 \\ x_1 = \dfrac{-x_2 - x_3}{2} \end{cases} \quad (4)$$

Sabendo que as incógnitas x1, x2 e x3 possuem o mesmo valor para todas as equações, por comparação, igualamos a primeira com a segunda equação, e posteriormente a primeira com a terceira:

$$\begin{cases} 1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 - x_2 + 4x_3 \\ 1 + 2x_2 - 3x_3 = \dfrac{-x_2 - x_3}{2} \end{cases} \quad (5)$$

Como se pode notar, a incógnita x1 foi eliminada. Repetindo tal procedimento com as equações resultantes de (5), é possível eliminar a incógnita x2, restando apenas uma única incógnita, da qual obtém-se o valor, acompanhe:

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{1 + 7x_3}{3} \\ x_2 = \dfrac{5x_3 - 2}{5} \end{cases} \quad (6)$$

$$\frac{1 + 7x_3}{3} = \frac{5x_3 - 2}{5} \Rightarrow x_3 = -\frac{11}{20} \quad (7)$$

Uma vez obtido o valor de uma incógnita, por substituição, obtém-se o valor das outras,

$$x_2 = -\frac{19}{20} \quad \text{e} \quad x_1 = \frac{3}{4} \quad (8)$$

É importante ressaltar que não há uma ordem a ser seguida para encontrar o valor de cada incógnita, isto é, pode-se iniciar a resolução do sistema eliminando qualquer incógnita. (LUCCAS *apud* LINTZ, 1988, p. 45)

De acordo com Luccas (2004), apesar de registros tão remotos, só em 1683 Takakazu Seki Kowa (1642 – 1708), considerado o maior matemático japonês do século XVII, envolvido com a resolução de um problema geométrico, deparou-se com sistemas de equações lineares. Ao aplicar uma série de cálculos e operações percebeu que era possível encontrar uma generalização simplificada independente das incógnitas desse sistema. Dez anos depois o matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) empenhado em mostrar a versatilidade da utilização de sua notação numérica em relação à álgebra chega à mesma generalização de Kowa. De acordo com a autora, apesar de esses matemáticos terem publicado essas descobertas praticamente em uma mesma época, ambos alcançaram a mesma generalização, porém, por caminhos e objetivos diferentes.

Segundo Luccas (2004), os estudos de Kowa e Leibniz conduziram ao método utilizado atualmente para calcular determinantes. Alguns anos depois, aproximadamente em 1729, o matemático escocês Colin Maclaurin (1698 – 1746) descobre, por meio do método da eliminação das incógnitas, uma maneira de resolver sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas. De acordo com a autora, esse método ficou conhecido como a Regra de Cramer pelo fato do matemático suíço Gabriel Cramer (1704 – 1752), dois anos depois, ter chegado também à mesma regra ao trabalhar com um sistema de cinco equações e cinco incógnitas. Em 1764 o matemático Étiènne Bézout (1730 – 1783) em uma de suas publicações enuncia o mesmo processo de resolver sistemas de equações de Maclaurin e Cramer. De acordo com a autora, a contribuição que Bézout deixou à evolução desse método é a demonstração da condição necessária para que um sistema tenha solução.

De acordo com a autora, o estudo dos determinantes sempre esteve estritamente relacionado ao dos sistemas lineares. Contudo, em meados do século XVIII os franceses Alexandre - Théophile Vandermonde (1735 – 1796) e Pierre Simon Laplace (1749 - 1827) estabeleceram a independência desse conceito matemático ao realizarem estudos desconectados dos sistemas de equações.

Segundo Luccas (2004), o alemão Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855) sistematizou uma técnica de resolução de sistemas denominada *Método da Eliminação*. Esse método consiste em transformar o sistema dado em um sistema equivalente mais simples. O novo sistema, resultante da transformação do sistema dado, se apresenta na forma como conhecemos atualmente, forma escalonada.

Para ilustrar como se apresenta um sistema na forma escalonada, vamos colocar o exemplo apresentado por Luccas (2004, p. 47)[3].

> [...] vamos recorrer a uma situação que nos conduza a um sistema de equação linear, analisando-o em seguida:

[3] Não é nossa intenção, ao colocarmos esse exemplo, explicar como se escalona um sistema, porém, caso o leitor esteja interessado, aconselhamos procurar no texto fonte.

> Um vendedor tem em sua loja cem automóveis de três tipos: simples, de luxo e executivo. A soma do número de carros de luxo com o dobro do número de carros executivos é 40; o triplo do número de carros executivos dá 30. Quantos carros há de cada tipo? (BONGIOVANNI et al, 1993, p. 253).
>
> Ao transcrevermos a situação proposta para a linguagem matemática, vamos utilizar a letra S para nos referirmos aos automóveis simples, L os automóveis de luxo e E os automóveis executivos. Podemos verificar que a disposição dos elementos apresenta a seguinte forma:
>
> $$\begin{cases} S & +L & +E & = & 100 \\ & L & +2E & = & 40 \\ & & 3E & = & 30 \end{cases}$$
>
> Transcrito o problema, é possível observar que a disposição das equações apresenta-se na forma de "escada", ou melhor, na forma escalonada, veja:
>
> $$\begin{array}{cccccc} S & +L & +E & = & 100 & (i) \\ & L & +2E & = & 40 & (ii) \\ & & 3E & = & 30 & (iii) \end{array}$$
>
> No que diz respeito à solução desse sistema, ao resolver (iii) encontra-se o valor de E; substituindo este valor em (ii) chega-se ao resultado de L; e por meio da substituição do valor de E e L em (i), encontra-se o valor de S.

Apesar de termos colocado neste trabalho apenas alguns fatos, a história da Matemática nos mostra que ao longo do tempo foram vários as descobertas de métodos de resolução de sistemas. Dentre estes destacamos os métodos de resolução de sistemas de equações descobertos por Brahamagupta e Gauss. Uma vez que, de acordo com Luccas (2004), esses métodos podem ser comparados aos métodos da substituição e da adição, respectivamente.

Após um rápido olhar sobre a evolução da resolução de sistemas através da história da Matemática, passamos, então, ao estudo dos PCN (1998) com o objetivo de localizarmos o objeto matemático de acordo com as orientações deste documento oficial.

2.2 Organização e distribuição dos conteúdos de Matemática na Educação Básica

Os PCN (1998) orientam a distribuição dos conteúdos de Matemática para Ensino Fundamental em quatro blocos: o bloco Números e Operações faz parte dos campos da Aritmética e da Álgebra, o bloco Espaço e Forma está no campo da Geometria; o bloco

Grandezas e Medidas interliga os campos da Aritmética, Álgebra, Geometria e outros campos do conhecimento; o bloco Tratamento da Informação integra o campo da Estatística, Probabilidade e Combinatória.

O ensino de sistema de equações do 1º grau, por fazer parte da Álgebra, está relacionado ao bloco Números e Operações.

Na transição das séries iniciais para as séries finais do Ensino Fundamental, na passagem do 5º para o 6º ano, o aluno se depara com situações diferentes daquelas que faziam parte de seu cotidiano escolar, embora, segundo os PCN, nas séries iniciais o aluno já possa desenvolver algum aspecto algébrico.

No 7º ano, fase em que é iniciada efetivamente a Álgebra em sua vida estudantil, o aluno descobre que são possíveis operações com letras no lugar de números. De acordo com os PCN (1998, p. 68),

> Devido à complexidade que caracteriza os conceitos e procedimentos algébricos não é desejável que [...] se desenvolva um trabalho visando ao aprofundamento das operações com expressões algébricas e equações. É suficiente nesse ciclo que os alunos compreendam a noção de variável e reconheçam a expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas.

No 8º ano inicia-se a fase de amadurecimento dos conceitos algébricos. Com isso, o aluno começa a se apropriar, de acordo com os PCN, de conceitos como o de variável e de função; da representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; formulação e representação de problemas por meio de equações e o conhecimento das regras para resolução de equações. Nessa fase o aluno, após trabalhar com equações do 1º grau e resolução de problemas envolvendo esse tipo de equação, trabalha inequações e resolução de sistemas de equações do 1º grau.

Pelo que sugerem os PCN, sistema de equações do 1º grau é introduzido no 8º ano do Ensino Fundamental, porém, de acordo com uma pesquisa que fizemos nos livros didáticos (ANDRINI, 2008; CAVALCANTE, 2007; CENTURIÓN, 2007; DANTE, 2007; GUELI, 2005), a maioria traz, juntamente com o ensino de equações do 1º grau, no 7º ano, equações do 1º grau com duas incógnitas de forma introdutória a sistemas dessa natureza, mas em algumas coleções, sistema de equações de 1º grau são introduzidos no capítulo de equações. Acreditamos que essa introdução objetiva os primeiros contatos do aluno com esse conceito, bem como a familiarização a equações com mais de uma incógnita. Com isso, o aluno é preparado gradativamente para compreensão de se obter simultaneamente o valor de duas incógnitas, conforme sugere o guia do PNLD (2007).

Em se tratando do enfoque dado pelos livros didáticos, recorremos ao levantamento feito por Valenzuela (2007). Dentre os 23 livros didáticos de Matemática aprovados na avaliação do PNLD (2005), 13% trabalham sistema de equações de 1º grau na 6ª série (7º ano); 26% trabalham esse conceito na 6ª e 7ª séries (7º e 8º anos) e 53% trabalham esse conceito na 7ª série (8º ano). Como vimos, a maior frequência de aparição desse conceito ocorre nos livros do 8º ano do Ensino Fundamental.

No oitavo ano, em um primeiro momento, alguns autores como (ANDRINI, 2008; CAVALCANTE, 2007; CENTURIÓN, 2007; DANTE, 2007; GUELI, 2005), introduzem sistema de equações de 1º grau propondo uma situação-problema. Nesse caso, a modelagem é utilizada apenas com objetivo de apresentação desse conceito ao aluno.

Fizemos um recorte de um exemplo tirado do livro de Dante (2007, p.128). Nesse livro o autor introduz sistema de equações de 1º grau no 8º ano do Ensino Fundamental por meio de uma situação-problema: "Num quintal há galinhas e coelhos. Há 7 cabeças e 22 pés. Quantas são as galinhas? E os coelhos?".

O problema é proposto a três alunos imaginários, os quais estão ilustrados no livro, Mário, Paula e Carlos. Mário chega à solução aplicando a maneira que o autor chamou de tentativa e erro. Paula utilizou a maneira que o autor chamou de tabela organizada, colocando os valores em uma tabela de cinco colunas: na primeira coluna ela coloca os possíveis valores correspondentes à quantidade de galinhas; na segunda coluna ela coloca os valores correspondentes à quantidade de coelhos; na terceira, mesmo que repetido, ela coloca o total de cabeças; na quarta coluna ela coloca o número de pés e na última coluna ela assinala com "não" as linhas que não satisfazem a segunda informação e com "sim" a linha que satisfaz a segunda informação. No livro está destacada a linha dos valores que satisfazem as informações do problema. Carlos algebriza a situação e resolve o problema montando um sistema de equações.

No último parágrafo da página o autor comenta que esse conceito já foi estudado na 6ª série (7º ano) e que na 7ª série (8º ano) será aprofundado.

A maioria dos autores introduz sistemas de equações do 1º grau aplicando uma situação-problema. Porém, de acordo com o guia do PNLD (2008), algumas coleções apresentam a discussão geométrica dos sistemas de equações ao justificarem que a solução encontrada é o par de valores que representam as coordenadas cartesianas do ponto de intersecção entre as retas formadas pelas equações. Isto se aplica quando se está trabalhando com um conjunto universo mais denso, no caso, o conjunto dos números reais.

Segundo uma rápida análise dos livros didáticos citados, após a resolução de um problema não se promove a verificação da validade dos valores encontrados. Nesses casos, vê-se que as orientações curriculares não são seguidas, pois, de acordo com os PCN (1998), após a resolução de situações-problema por meio de um sistema de equações de 1º grau é recomendável que seja feita uma confrontação entre as raízes encontradas e a situação proposta.

Com relação aos métodos de resolução de sistemas, de acordo com Valenzuela (2007), são oito os métodos identificados em livros didáticos dos quais os professores aplicam nas aulas: substituição, adição, comparação, redução, tentativas, transposição, modelagem e gráfica. Em nossa prática docente, pelo fato de não termos tempo necessário, durante o ano letivo, para trabalhar todos os métodos citados, aplicamos apenas os métodos da substituição e adição. Nesta pesquisa, optamos em criar uma sequência de aprendizagem visando apenas trabalhar o método da substituição, haja vista que o trabalho com outros métodos ocasionaria a disponibilidade de maior tempo para coleta de dados.

2.3 Aspectos que podem influenciar nas dificuldades dos alunos em álgebra

Em nossa experiência docente percebemos que a passagem da Aritmética para a Álgebra não é uma tarefa fácil, tanto para o professor como para o aluno. Os alunos que fizem parte de nossa pesquisa estão em um nível em que essa passagem já foi realizada, entretanto, para entender um pouco a forma como isso ocorre, fomos atrás de alguns trabalhos que nos dessem respaldo com relação a esse assunto. Com isso, descrevemos dificuldades e erros que frequentemente ocorrem na resolução de problemas envolvendo cálculos algébricos. Esse estudo é de grande utilidade na estruturação e análise a *priori* da sequência didática. Embasados nessas informações, propomos atividades e questões objetivando atingir, além dos conhecimentos novos, êxito nas operações consideradas pré-requisitos para conquista desse novo saber.

Segundo Booth (1995), uma das maneiras de tentar descobrir o que torna a Álgebra tão difícil é identificar os tipos de erros cometidos pelos alunos e investigar seus motivos. Entrevistas com alunos que fizeram parte da pesquisa “Strategies and Errors in Secondary Mathematics” (SESM) realizada no Reino Unido de 1980 a 1983 revelaram que crianças de oitava à décima série que estudavam Álgebra no contexto de um programa de matemática integrado desde a sétima série apresentavam dificuldades semelhantes em todas as séries. As respostas dadas à entrevista indicaram que muitos dos erros encontrados poderiam ter origem nas concepções dos alunos sobre os seguintes aspectos:

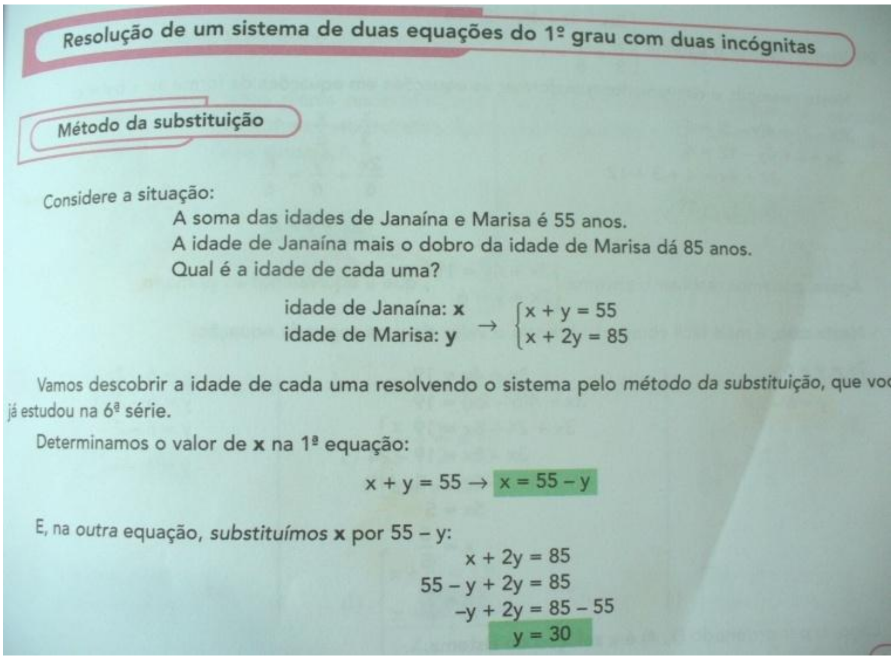
- o foco da atividade algébrica e natureza das “respostas”;
- notações e convenções em álgebra;
- letras e variáveis;
- como os alunos entendem a Aritmética;
- As convenções aritméticas mal compreendidas.

Vamos discutir, a seguir, cada um destes itens.

2.3.1 O foco da atividade algébrica e a natureza das “respostas”

Em Aritmética, segundo Booth (1995), o objetivo da atividade é encontrar valores numéricos particulares. Entretanto, na Álgebra, o objetivo é o de estabelecer procedimentos e relações e expressá-los de uma forma geral. A razão pela qual se estabelecem essas afirmações gerais é a de usá-las como procedimento para resolver problemas e, então, achar respostas numéricas. Contudo, seu objetivo imediato é o estabelecimento, a expressão e a manipulação da própria expressão geral. Segundo a autora, muitos alunos não percebem isso e pensam que a resposta sempre tem que ser dada numericamente.

Em nosso entendimento, isso revela que alunos apresentam dificuldades em dar respostas representadas por expressões que contêm letras. É difícil para o aluno entender que, em certas situações, um valor desconhecido pode ser representado por uma expressão algébrica, conforme mostra a pesquisa de Booth. Trazendo isso para nosso trabalho e como resolução de sistemas envolve vários conceitos algébricos, inclusive considerar uma expressão como um valor único, principalmente quando o método de resolução escolhido é o da substituição, percebemos que essas dificuldades podem aparecer na experimentação, já que resolução de sistemas exige manipulações algébricas. Vamos ilustrar o que estamos dizendo com um exemplo extraído de um livro didático (DANTE, 2007, p. 133).



Resolução de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas

Método da substituição

Considere a situação:

A soma das idades de Janaína e Marisa é 55 anos.
A idade de Janaína mais o dobro da idade de Marisa dá 85 anos.
Qual é a idade de cada uma?

idade de Janaína: **x**
idade de Marisa: **y**

$$\rightarrow \begin{cases} x + y = 55 \\ x + 2y = 85 \end{cases}$$

Vamos descobrir a idade de cada uma resolvendo o sistema pelo *método da substituição*, que você já estudou na 6ª série.

Determinamos o valor de **x** na 1ª equação:

$$x + y = 55 \rightarrow \boxed{x = 55 - y}$$

E, na *outra* equação, *substituímos* **x** por 55 – y:

$$x + 2y = 85$$
$$55 - y + 2y = 85$$
$$-y + 2y = 85 - 55$$
$$\boxed{y = 30}$$

Figura 2: exemplo de resolução de sistema de equações pelo método da substituição.

Refletindo a respeito, percebemos que a dificuldade de se considerar a expressão 55 – y como sendo o valor de x poderá causar erros, uma vez que a resolução de sistemas pelo método da substituição, na maioria dos casos, recai na necessidade de se considerar uma expressão como sendo um valor dado.

2.3.2 Notações e convenções em álgebra

Um segundo aspecto a ser levado em consideração é a dificuldade em interpretar símbolos, principalmente o operatório de adição e subtração. Segundo Booth (1995), isso ocorre com a dificuldade dos alunos em interpretar expressões como *2a + 5y*, nesse caso, o símbolo operatório de adição tem, para os alunos, a função de ajuntamento dos termos, resultando daí *7ay* como resposta. De acordo com a autora, talvez isso seja explicado pelo fato de terem aprendido na aritmética a justaposição de termos para indicar adição, nas frações mistas, por exemplo, ($2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$), e também pelo fato de terem trabalhado valor posicional (4 dezenas + 3 unidades = 43).

Outra dificuldade com relação aos símbolos apresentada na pesquisa é a utilização do símbolo "igual" para escrita de uma resposta algébrica. Kieran (1981) verificou que crianças de doze a quatorze anos de idade consideram o sinal de igual (=) um símbolo que é sempre usado para preceder respostas numéricas.

Alguns alunos dessa pesquisa apresentavam dificuldade em interpretar respostas como: $2x + 3y$, $3a + 8b$, etc, no caso, a resposta final de uma atividade algébrica desse tipo. Segundo Kieran (1995), expressões do tipo $x + 3$ ou $2y + z$ são consideradas no mesmo sentido de, por exemplo, $5 + 3$ ou 2.7 + 8, visto que x, y e z são considerados números. De acordo com Kieran (1995, p. 104) "na aritmética, um símbolo de adição entre dois números sempre indica que as duas parcelas devem ser somadas como 5 + 3 = ?. Mas seu significado em álgebra nem sempre é esse". Se analisarmos a equação $2x + 5 = 13$, o símbolo de adição não significa que 2 e 5 possam ser somados, a menos que se saiba o valor numérico de $2x$.

Quanto ao símbolo de igualdade, a pesquisa nos mostrou que em geral os alunos na faixa etária mencionada consideraram esse *signo* apenas para escrever a resposta de uma operação e não como indicador de uma relação.

A modelagem de problemas envolvendo sistemas de equações tem como um dos pré-requisitos a experiência de trabalhar com igualdade entre expressões abertas ou não, de igualar expressões algébricas abertas a valores numéricos, traduzindo informações escritas em linguagem natural para equações. Segundo Booth (1995), talvez um dos motivos de o aluno considerar o símbolo de igualdade apenas para indicar respostas prontas seja o uso do verbo "dar" na terceira pessoa do singular ao se chegar à solução de uma atividade. Por exemplo: "2 mais 3 dá 5" ao invés de "2 mais 3 é igual a 5". No mesmo parágrafo a autora termina dizendo que se fosse trabalhado na aritmética, expressões da forma 5 = 2 + 3, bem como 1+ 4 = 2 + 3, etc. talvez a compreensão desse símbolo em álgebra fosse melhor.

2.3.3 Letras e variáveis

Um terceiro aspecto que deve ser levado em consideração, segundo Booth (1995), é o uso correto das letras. Em aritmética também aparecem letras, porém, de maneira diferente da álgebra. Geralmente a letra aparece como unidade de medida de alguma grandeza; por exemplo: 3m (três metros), 6A (seis ampères), etc. Em álgebra, de acordo com Nogueira (1996), as letras são utilizadas para representar: valores numéricos desconhecidos (incógnitas) os quais serão encontrados por meio da resolução de equações, variáveis que podem assumir qualquer valor dentro de um domínio de validade e em uma representação geral de uma representação particular, por exemplo, a equação x + a = b representando equações do tipo x + 130 = 400. Esse último aspecto Nogueira chamou de indeterminadas ou indeterminação.

Segundo Booth (1995), citando Kuchemann (1981), esse aspecto é um dos mais importantes da álgebra. Ainda que as crianças saibam interpretar letras como representação de números, existe a tendência de se considerar que as letras representam valores específicos. Para a autora, talvez isso ocorra pelo fato de que na aritmética os símbolos que representam quantidades sempre assumem valores únicos. Portanto, a criança tende a tratar esses novos símbolos como faziam para representar quantidades.

2.3.4 Como os alunos entendem a Aritmética

Um quarto aspecto citado por Booth (1995), relevante para nosso trabalho, se refere à influência que a compreensão dos procedimentos aritméticos pode causar na aprendizagem da álgebra. De acordo com a autora, a álgebra não é isolada da aritmética. Na verdade a álgebra, em certos aspectos, pode ser considerada como a aritmética generalizada. Segundo Booth (1995, p. 33), "[...] Para compreender a generalização das relações e procedimentos aritméticos é preciso primeiro que tais relações e procedimentos sejam apreendidos dentro do contexto aritmético". O desempenho do aluno em álgebra pode ser afetado caso os procedimentos aritméticos não sejam reconhecidos, ou se tiverem concepções erradas a respeito de relações e procedimentos aritméticos.

O conhecimento de procedimentos aritméticos é um dos pré-requisitos na modelagem de problemas envolvendo sistemas de equações de 1º grau. Consideramos, entre outras, a capacidade de generalizar situações que *a priori* são tratadas aritmeticamente como sendo a essência da passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica. Para ilustrar o que estamos dizendo, podemos apresentar como exemplo, a seguinte situação, colocada aqui de forma geral: descobrir dois números que satisfazem duas informações. Em um primeiro momento pensa-se em pares de valores, aleatórios, que podem satisfazer simultaneamente as duas informações; posteriormente, as informações são colocadas de forma que seja criada a necessidade de se obter algum dispositivo algébrico como ferramenta matemática para se chegar à solução do problema.

2.3.5 As convenções aritméticas mal compreendidas

Um quinto aspecto que, segundo Booth (1995), poderia ter certa influência nos erros em álgebra cometidos pelos alunos é o uso incorreto dos parênteses. Para Booth (1995, p.33), “as crianças geralmente não usam parênteses porque acham que a sequência escrita de operações determina a ordem em que os cálculos devem ser efetuados”. De acordo com a autora, se não for bem trabalhada a utilização de parênteses em certos cálculos aritméticos, a criança poderá apresentar dificuldades quando for trabalhar com cálculos algébricos.

Refletindo sobre o aspecto apresentado, recorremos a exemplos de resolução de sistemas de equações cuja estratégia para se chegar à solução pode ser a do método da substituição. Por exemplo, um sistema constituído pelas equações $x + 2y = 12$ *e* $3x – y = 1$. Um recurso seria colocar o x da primeira equação em função de y (isolá-lo no primeiro membro: $x = 12 – 2y$). De acordo com Booth (1995), um erro que poderia surgir, seria a não colocação dos parênteses ao substituir a expressão equivalente no x da segunda equação (3.12 – 2y – y = 1), isso ocasionaria um erro que acarretaria em uma falsa solução, já que o valor de y encontrado seria 35/3 ao invés de 35/7 = 5, resultado da colocação correta dos parênteses (3.(12 – 2y) – y = 1). Por outro lado, caso seja colocado parênteses onde se deve colocar, por alguma sintaxe algébrica, um erro que também podemos elencar é o da distributiva incorreta. Segundo Demana e Leitzel (1995, p. 71), “o uso correto dos parênteses é outro aspecto técnico da parte essencial em álgebra, [...] A expressão correta 3(x + 2) é igual a 3x + 2?”. De acordo com os autores esse é um erro comum de alunos que se iniciam em álgebra.

Booth (1995), ao concluir suas análises sobre os aspectos que podem influenciar nos erros de aprendizagem da álgebra, sugere que se deve questionar o que o professor pode fazer para ajudar os alunos a evitar e corrigir esses erros. De acordo com a autora, cabe aos professores e pesquisadores fazerem um levantamento contínuo que envolve o aprendizado da matemática, acompanhado de uma análise dos erros cometidos, bem como dos fatores que podem ser causadores desses erros.

2.4 Álgebra como Aritmética generalizada

Após uma breve análise das concepções de autores sobre alguns erros cometidos por alunos da mesma faixa etária do grupo que participará dessa investigação, focamos nossos olhares em pesquisas cujos objetivos eram apresentar concepções entre instruções enunciadas e expressões literais, bem como dos erros e dificuldades acerca da tradução envolvida.

Usiskin (1995, p. 13), ao descrever a Álgebra como Aritmética generalizada ressalta que em um nível mais avançado essa concepção pode ser de grande utilidade quando se consideram as variáveis como generalizações de modelos. “Muitas vezes encontramos relações entre números que desejamos descrever matematicamente, e as variáveis são instrumentos utilíssimos dessa descrição”. De acordo com o autor, dentro dessa concepção, as instruções – chave para o aluno são traduzir e generalizar.

Lochhead e Mestre (1995) ao analisarem algumas pesquisas, descobriram que muitos alunos parecem ter dificuldades para resolver determinados problemas algébricos considerados simples. A maior dificuldade descrita pelos autores se refere à tradução da linguagem natural para a linguagem matemática em que se tenha que relacionar duas variáveis e escrever a equação que expressa essa relação. De acordo com os autores 37% dos alunos do curso de engenharia escreveram erradamente a equação correspondente à seguinte situação:

> Escreva uma equação usando as variáveis A e P para representar a seguinte afirmação: Há seis vezes mais alunos do que professores nesta universidade. Use A para indicar o número de alunos e P para indicar o número de professores. (LOCHHEAD e MESTRE, 1995, p. 145)

Segundo Lochhead e Mestre (1995), durante entrevista com esses alunos, percebeu-se que as dificuldades apresentadas não eram de interpretação errada do problema, pelo fato de nenhum deles ter dito que havia mais professores que alunos, a fonte dos erros está no entendimento equivocado quanto à escrita da equação. Dois terços dos alunos que erraram escolheram a resposta $6A = P$, em que se verifica a troca das variáveis.

Em outro problema semelhante, a taxa de erro foi ainda maior, 73% dos alunos. Nesse caso a questão foi enunciada da seguinte forma:

> Escreva uma equação usando as variáveis Q e T para representar a seguinte afirmação: “Na confeitaria da Mindy, para cada quatro pessoas que pedem queijada, cinco pedem torta de maçã.” Use Q para indicar o número de queijadas e T para representar o número de tortas de maçã. (LOCHHEAD e MESTRE, 1995, p. 146)

Os alunos que erraram, escreveram como resposta 4Q = 5T. Erro semelhante ao da questão anterior. De acordo com os autores, esses alunos mostraram tendência em associar a ordem das palavras da esquerda para direita. Segundo os autores, os alunos do grupo pesquisado faziam graduação em matemática, ciências e engenharia em universidades muito conceituadas do país.

Segundo Lochhead e Mestre (1995, p. 148), “embora essas concepções erradas tenham sido observadas primeiro entre alunos de faculdades, agora há indícios de que são muito difundidas, abrangendo pessoas de todas as idades e nacionalidades”.

Analisando os trabalhos desses autores em que erros de escrita das equações ocorrem com pessoas que de certa forma têm habilidades em equacionar situações escritas em linguagem corrente, percebemos que não devemos cobrar tanto de uma criança em fase de aprendizagem da Álgebra. Porém, esses são erros que professores de matemática e pesquisadores devem ficar atentos para que em um futuro próximo isso não ocorra com tanta frequência. Segundo Booth (1984), uma análise dos erros cometidos pelos alunos, bem como de suas causas, poderá nos proporcionar instrumentos muito úteis para seleção de meios adequados que auxiliarão as crianças a melhorar sua compreensão da matemática.

2.5 Resolução de equações: como um dos pré-requisitos para resolução algébrica de sistemas

Diante do que propomos neste trabalho, entendemos que a resolução de sistemas está diretamente ligada à resolução de equações quando os métodos envolvidos são algébricos. Diante disso, propomos ainda neste capítulo um estudo sobre métodos e dificuldades na resolução de equações, com o objetivo de buscar a essência desse conceito, uma vez que, de acordo com Freitas (2002), existe uma forte influência da mecanização de técnicas de resolução de equações. Segundo o autor, isso se deve ao fato da mecanização de técnicas estar associada ao excesso de utilização de frases como: “isolar o x”, “passar e trocar o sinal”, etc.

Na progressão dos conteúdos em álgebra, equações do 1º grau é um conhecimento necessário para se aprender a resolução de sistemas de equações. O aprendiz que tem bom aproveitamento em equações pode não ter dificuldades em aprender sistemas, principalmente quando se trata de um conhecimento que o próprio aluno deve construir. Entre o conjunto de conhecimentos em jogo colocados pelo professor/pesquisador estão os que o aluno já tem, tanto matemático quanto os adquiridos em sua experiência de vida. Entendemos que conhecendo melhor como são abordadas as formas de resolução de equações do 1º grau, poderemos articular melhor as atividades que farão parte da sequência didática dessa pesquisa.

Durante nossa vida escolar, bem como a acadêmica, percebemos a resolução de equações como uma poderosa ferramenta para resolver problemas. Estamos tão habituados que em certos momentos chamamos de “xis” determinado valor que podemos encontrar com um simples cálculo mental. O sujeito que tem facilidade em equacionar problemas e resolvê-los, pode não ter dificuldade em encontrar a solução de problemas, digamos, mais “complicados”.

Vejamos alguns exemplos:

01 – *qual o número cujo produto por 4 é igual a 36?*

02 – *qual o número cujo produto por 4 é igual a 18?*

03 – *a soma de um número com 5 é igual 13, qual é esse número?*

04 – *a soma de um número com seu triplo é igual a 28, qual é esse número?*

Percebe-se no primeiro exemplo que basta ter conhecimento de múltiplos de quatro para dar a resposta correta. Entretanto, no segundo exemplo a resposta não é tão imediata, visto que, 18 não é múltiplo de quatro. No terceiro exemplo, acreditamos que a resposta seria imediata, pelo fato da noção de contagem que o sujeito possa ter, ou seja, de cinco quanto falta para 13. Para uma criança menos experiente, a utilização dos dedos das mãos para se chegar ao resultado seria uma boa estratégia. No entanto, no quarto exemplo a resposta não seria tão imediata, pelo fato de o número desconhecido estar adicionado ao seu triplo.

À medida que o nível de complexidade do problema vai sendo aumentado, cria-se a necessidade da utilização de uma ferramenta algébrica para se chegar à solução do problema. Os exemplos que colocamos poderiam ter sido resolvidos aritmeticamente, uns mais imediatos, outros nem tanto. Porém, quando se tem facilidade em traduzir problemas escritos em linguagem corrente para equações, cria-se o hábito de "equacionar". Isso poderá facilitar a alcance do resultado desejado.

Os exemplos citados podem ser equacionados da seguinte forma:

01 – $4x = 36$

02 – $4x = 18$

03 – $x + 5 = 13$

04 – $x + 3x = 28$

De acordo com Lins e Gimenez (2006), o estudo da resolução de equações evoluiu desde aproximadamente 1700 a.C. com o desenvolvimento de regras eficientes, embora não se tenha desenvolvido nenhuma notação para representar tais regras de maneira geral. Esse momento histórico foi classificado como o da álgebra *retórica* (apenas palavras). Após 2000 anos, o grego Diofanto (250 d.C.) estabelece uma forma mais reduzida de se escrever equações. Esse momento histórico foi considerado como o da álgebra *sincopada* (alguma notação especial por meio de palavras abreviadas). Aproximadamente 1400 anos depois o francês Vieta (1500 d.C.) introduz o cálculo com letras representando quantidades ou grandezas geométricas. Segundo Lins e Gimenez (2006, p. 91), "cálculo esse que tem suas regras próprias, compatíveis, é claro, com as noções usuais da aritmética e geometria". Esse momento histórico ficou conhecido como o da fase *simbólica* da álgebra.

Ao refletirmos a respeito da importância histórica da álgebra, percebemos que foram vários os esforços dos matemáticos para chegar ao que conhecemos atualmente sobre esse assunto. Pesquisas[4] nesse campo mostram que há dificuldade do aprendiz durante sua vida estudantil em assimilar determinados conceitos dentro da álgebra, particularmente a resolução de equações. Por entendermos que resolução de equações do 1º grau é um conhecimento inicial para posterior aprendizagem na resolução de inequações, sistemas de equações e equações do 2º grau, nós estudamos, embasados em pesquisas, alguns métodos que têm como objetivo a aprendizagem de resolução de equações do 1º grau. De acordo com o estudo que fizemos, os autores sugerem que a aprendizagem de resolução de equações deve ser construída de forma que haja uma melhor compreensão pelos alunos e que essa construção passe por algumas etapas as quais comentaremos no próximo tópico. Posteriormente, apresentaremos, de acordo com livros didáticos, os métodos de resolução de sistemas de equações utilizados pelos professores do Ensino Fundamental.

Segundo Bernard e Cohen (1995), há várias maneiras de calcular a raiz de uma equação do 1º grau, entre as quais se destacam: (1) gerar e avaliar, (2) esconder, (3) desfazer e (4) equações equivalentes.

2.5.1 O método de gerar e avaliar

De acordo com Bernard e Cohen (1995), neste método, para resolver equações básicas, pensa-se em vários valores para serem testados. Os autores destacam ainda que logo no início esse método de gerar números mentalmente pode parecer aleatório, entretanto, talvez isso não ocorra por muito tempo. Alunos no início da adolescência já têm noção de que sempre existe um número entre dois números dados. Deste modo, dificilmente esses alunos continuariam tentando valores ao acaso.

Para ilustrar esse método de resolução, os autores colocam a resolução da equação $29 - 4x = 3$ e comentam que após gerar e testar alguns valores amostrais, por exemplo, 5 e 1, obtém-se 9 e 25, respectivamente, em vez de 3, como deve ser. Alguns alunos podem decidir que a melhor opção é o 5, pelo fato de estar mais próximo do 3. Um segundo passo seria identificar qual a melhor direção a ser tomada; gerar valores maiores que 5 ou valores menores que 5. Se testarem o 4, obterão 13 em vez de 3, perceberão que a raiz é maior que 5.

[4] Pesquisas relatadas ao longo do texto

Assim, desenrola-se um processo de geração de valores até que se atinja o número que satisfaz a equação.

2.5.2 O método de esconder

Essa maneira de resolver é exemplificada pelos autores com doze equações entre as quais, cinco podem ser resolvidas pelo método gerar e avaliar. Também sugerem que as demais equações podem ser apresentadas aos alunos com o objetivo de que haja a necessidade da mudança de procedimento, com a justificativa de que dificilmente o professor deixaria o aluno por muito tempo no estágio de tentativas ao acaso.

Esse método consiste em esconder a incógnita e pensar no valor desconhecido que satisfaz a operação envolvida. Por exemplo, para resolver a equação $14 – x = 8$ esconde-se o x e pensa-se: “quatorze menos qual número dá oito como resultado?” Após a resposta esperada, 6, os alunos são levados a concordar que essa equação poderia ter sido resolvida pelo método gerar e avaliar. Aproveitando a discussão, os autores sugerem que se estenda a escrita dessa equação, colocando-a na forma $16 – (14 – x) = 8$. Em um primeiro momento, pede-se aos alunos que verifiquem se é possível resolver essa nova equação pelo método de esconder. Para isso, tenta-se mostrar aos alunos ou fazer com que eles percebam que, se x varia, a expressão $14 – x$ também varia. Diante disso, essa expressão pode ser tratada como uma incógnita. Conforme os autores, isso seria interessante para se quebrar o estereótipo de que uma incógnita é uma letra única e que uma expressão contendo uma variável também pode ser tratada como variável. Além disso, desfaz-se a impressão de que esse método só pode ser aplicado uma vez.

Quanto à resolução da equação, esconde-se a expressão $14 – x$ e indaga-se: “dezesseis menos qual número dá oito como resultado?” Após a resposta esperada sugere-se que o aprendiz escreva a equação $14 – x = 8$ como um segundo passo, haja vista que a expressão que foi escondida é igual a oito.

$$16 – (14 – x) = 8$$

$$14 – x = 8$$

$$x = 6$$

Segundo os autores, assim como o método de gerar e avaliar, o método de esconder também é limitado. Com um pouco de experiência, o aluno resolve equações do tipo $x + 8$

$= 17$, $3 + 3x = 9$ com certa facilidade, entretanto, equações do tipo $3x + 2(5 – x) =7$ e $10 – 4x = 7 – 2x$, provavelmente não. Como esse método tem certas limitações, outros devem ser buscados.

2.5.3 O método de desfazer

Segundo Bernard e Cohen (1995, p. 116), esse método “baseia-se nas noções de inversos operacionais e na reversibilidade de um processo envolvendo um ou mais passos invertíveis”. Trata-se de “desfazer” seguindo a ordem inversa das operações até que se chegue ao valor da incógnita. Vamos ilustrar esse método por do exemplo apresentado pelos autores.

O desafio é encontrar a solução da equação $\frac{7(2x-3)-5}{10} = 3$. Orientam-se os alunos a relacionarem e registrarem, a partir do x, as operações envolvidas na ordem em que aparecem para se achar o valor do primeiro membro; o resultado 3 decorre da afirmação de igualdade.

Comece com x -> (mult. por 2) -> (subt. 3) -> (mult. por 7) -> (subt. 5) - > (div. por 10) -> 3.

Percebe-se que o número 3 é o resultado da última operação (divisão por 10). Deste modo, podemos desfazer as operações do fim para o início até que se obtenha *x*.

3 -> (mult. por 10) [30] -> (some 5) [35] -> (div. por 7) [5] -> (some 3) [8] -> (div. por 2) [4]. Assim, verifica-se que a raiz da equação é o número 4.

2.5.4 A Conceituação de equações equivalentes

De acordo com Bernard e Cohen (1995), os métodos discutidos até aqui são interessantes no sentido em que se visa o entendimento da resolução de equações, bem como da obtenção das soluções. Todavia, esses métodos são limitados na medida em que se avança para níveis mais elevados. Limitados no sentido em que para se resolver alguns tipos de equações os cálculos se tornam muito custosos. De acordo com os autores, depois que esses conceitos são construídos pode-se trabalhar com as operações de equilíbrio. Trata-se de somar ou subtrair, multiplicar ou dividir, conforme a necessidade, valores nos dois membros da equação com intenção de reduzi-la a uma equação equivalente. De acordo com os autores, esse recurso torna-se interessante desde que seja feito no início um trabalho de compreensão do equilíbrio implícito na formulação de uma equação. Analogias com a balança de pratos e gangorra[5] podem ser utilizadas para esse fim.

Segundo Bernard e Cohen (1995), para que os alunos entendam esse método deve-se também fazer um trabalho de reconhecimento de equações equivalentes, pelo fato de que se deve mostrar que o conjunto solução se preserva. Uma maneira de fazer isso é por meio de atividades de múltipla escolha em que, em um primeiro momento, uma equação e sua solução são dadas. Posteriormente, cinco equações são apresentadas, pede-se para que os alunos circulem as que não são equivalentes à equação dada. Em um segundo momento, uma equação e sua solução são dadas e outras cinco são apresentadas. Nesse caso, pede-se que os alunos circulem a única que não é equivalente à equação dada. Por último, segundo os autores, para reforçar as propriedades relacionadas às operações de equilíbrio e a equivalência entre equações, deve-se apresentar várias equações dispostas aleatoriamente no caderno e pedir para os alunos agruparem as que são equivalentes, de modo que todas que estão num mesmo grupo sejam equivalentes. Nos dois primeiros casos a verificação de equivalência se dá com a substituição da solução dada nas cinco equações apresentadas. Se a igualdade for mantida após a substituição, a equação será equivalente a equação dada. No terceiro caso, deve-se resolver uma das equações e substituir o valor encontrado nas outras equações até que sejam formados os grupos.

Vamos ilustrar um exemplo proposto pelos autores. Resolver a equação $2x - 3 = 11$ usando as operações de equilíbrio. O objetivo é descobrir o valor de x que satisfaz essa equação. Primeiramente deve-se eliminar o -3 do primeiro membro. Para isso, basta somar 3 aos dois membros da equação. Deste modo, segundo os autores, a operação “subtrair 3” pode ser riscada da lista quando se simplifica a equação, obtendo $2x = 14$. Nesta última divide-se os dois membros da equação por 2. De acordo com os autores, dependendo do nível de capacidade dos alunos, e para incentivar o desenvolvimento de uma noção mais sofisticada dos números, podem-se multiplicar os dois membros da equação por 1/2. De qualquer forma, a solução da equação é $x = 7$.

Vimos com esse estudo que os métodos de resolução comentados pelos autores contemplam uma melhor compreensão do significado da solução de equações. Porém, o método de resolução contemplada com maior frequência nos livros didáticos é o da operação de equilíbrio. No entanto, de acordo com Freitas (2002), esse método é rapidamente

[5] Balança de pratos e gangorra são alguns recursos que os livros didáticos apresentam para justificar o equilíbrio implícito em uma equação. Quando se adiciona um número em um dos membros da equação, o mesmo número deve ser somado no outro membro para que seja mantida a igualdade; o mesmo ocorre com a multiplicação.

transformado no método da transposição de termos. Trata-se de transpor todos os termos independentes da incógnita para o segundo membro e os termos dependentes da incógnita para o primeiro membro. A cada troca de membro deve-se inverter a operação a qual o termo transposto está ligado aos demais. Apesar de gerar erros na troca de membro, em termos de praticidade esta técnica se apresenta bastante eficiente, porém, de acordo com Bernard e Cohen (1995), antes, pelo menos para alunos iniciantes desse assunto, deve-se fazer um trabalho de compreensão do significado de equilíbrio, adjacente ao significado de equação.

Pelo que aconselham os autores, deve-se lembrar que é essencial a construção do conhecimento em resolver equações. Em um primeiro momento deve-se entender a essência do objeto e posteriormente quando for utilizá-lo como ferramenta na resolução de problemas, pode-se dispor de um método de resolução que possibilite maior praticidade na busca da solução.

De acordo com Freitas (2002), grande parte dos alunos entra no 1º ano do Ensino Médio sem um conhecimento aprofundado sobre resolução de equações do 1º grau. Geralmente resolvem essas equações utilizando apenas o método da transposição. Segundo Freitas (2002, p. 5), "este método pode ser eficiente quando utilizado com significado, ou seja, com clareza à validade dos procedimentos que transformam as equações em outras equivalentes". Esse procedimento, se aplicado mecanicamente, sem o devido entendimento de equações equivalentes pode levar o aluno a cometer certos erros como, por exemplo, efetuar a transposição de um termo sem alterar o sinal da operação ou alterar indevidamente o sinal do coeficiente sem que seja feita a transposição. De acordo com o autor, estudos mostram que, em geral, os estudantes aprendem a resolver equações de forma mecânica, usando um algoritmo que consiste em "muda de lado – muda sinal" sem o menor entendimento do significado de se fazer isso.

Analisando os livros didáticos percebemos que os autores privilegiam o que os pesquisadores sugerem: em um primeiro momento ensina-se como resolver equações simples por tentativas; em um segundo momento explora-se a ideia de equilíbrio, fazendo-se analogia à balança de pratos; posteriormente ensina-se a resolver equações por meio das operações de equilíbrio. Vemos com isso que os livros didáticos podem introduzir equações do 1º grau de forma a permitir que o aluno entenda seu significado, entretanto, por que os estudantes resolvem equações sem compreender seu significado, como indicam as pesquisas (FREITAS, 2002; BERNARD e COHEN, 1995; BOOTH, 1995)? Como professor de Matemática e Física no Ensino Médio, confirmamos isso no dia-a-dia dos nossos alunos. Porém, também percebemos que nessa etapa, resolver equações do 1º grau é um recurso utilizado para se chegar ao resultado desejado em relação a algum conceito aprendido. Por exemplo:

Uma partícula se desloca em movimento retilíneo uniforme de acordo com a função horária ***s = -9 + 3t****, sendo:* ***t****, em segundos, o instante em que a partícula passará pela posição* ***s****, em metros, em uma trajetória. Com base nessas informações, calcule o instante em que a partícula passará pela posição* ***57m.***

Vê-se que a atividade apresentada é um exercício de Física aplicado no 1º ano do Ensino Médio e que para resolvê-lo o estudante poderá lançar mão do conhecimento em resolver equações do 1º grau ao substituir *s* por 57. Diante disso, vemos que o professor de Física não precisa resolver a equação resultante, passo a passo, pelo simples motivo que, teoricamente, o estudante nesse nível já sabe resolver equações dessa natureza. Entretanto, percebemos como professor da disciplina, que durante a resolução os alunos utilizam o método de transposição dos termos. Com isso, alguns erros, como apontam as pesquisas, surgem, entre eles, mudança de membro sem a devida troca do sinal da operação.

Na atividade apresentada deve-se substituir ***s*** por ***57*** e resolver a equação ***57 = -9 + 3t.*** Colocamos esse exemplo criado por nós em uma aula de física, aplicado no 1º ano do Ensino Médio para relatar nossa angústia quando percebemos os erros cometidos por alunos que teoricamente têm certa experiência em resolver equações do 1º grau. Diante disso, antes de passarmos ao objeto matemático desta pesquisa, vamos expor aqui alguns erros cometidos por alunos do 1º do Ensino Médio investigados por Freitas (2002). Aditamos esses resultados ao nosso trabalho objetivando com isso reflexões acerca dos erros cometidos por alunos com maior experiência que os sujeitos de nossa pesquisa.

Tendo em vista a frequência de aparição, Freitas (2002) elencou seis tipos de erros cometidos durante a resolução de equações, divididos conforme as seguintes categorias:

1ª – alteração do sinal do coeficiente na divisão do termo independente pelo coeficiente de x;

$$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{-a}$$

2ª – transformação de $ax = b$ em $x = b - a$;

3ª – trocar a posição do coeficiente de x pela do termo independente na divisão;

$$ax = b \Rightarrow x = \frac{a}{b}$$

4ª – efetuar a transposição de termos independentes sem alterar o sinal;

$$ax + b = c \Rightarrow ax = b + c$$

5ª – efetuar a transposição de termos em x sem alterar o sinal;

$$ax = bx + c \Rightarrow ax + bx = c$$

6ª – o zero como um complicador em equações em que é solução, e nas equações sem solução;

$$ax = 0 \quad ou\ 0x = b,\ (b \neq 0)$$

Em sua pesquisa, Freitas (2002) verificou as dificuldades apresentadas na resolução de equações do 1º grau por alunos do Ensino Médio surgem de conceitos mal compreendidos durante a fase de aprendizagem desse conhecimento. O autor relata em seu trabalho que grande parte dos alunos inicia o Ensino Médio com *déficit* de aprendizagem desse conceito. Isso poderá gerar dificuldades em utilizar o conhecimento de resolver equações como ferramenta para a devida apropriação de conhecimentos subsequentes. Talvez isso ocorra pelo fato de não se fazer um trabalho de construção desse conhecimento, assim como expõe Bernard e Cohen (1995) em sua pesquisa.

Após termos discutido algumas pesquisas relacionadas à Álgebra, métodos de resolução de equações, erros e dificuldades relacionadas, passamos então a um olhar mais pontual dos sujeitos que vão fazer parte desta pesquisa. A seguir apresentamos a análise do teste diagnóstico o qual nos auxiliou tanto na escolha dos sujeitos que participaram da experimentação quanto nas previsões dos erros e dificuldades que poderiam ocorrer.

2.6 Teste diagnóstico com os sujeitos da pesquisa

Foi realizado um teste diagnóstico que teve por objetivo realizar um breve levantamento dos conhecimentos algébricos dos sujeitos que participaram desta pesquisa, uma vez que ainda não conhecemos esses alunos.

As pesquisas apontam as dificuldades que alunos nessa faixa etária apresentam, entretanto, precisamos identificar os conhecimentos desses alunos, uma vez que isso se faz necessário para escolha das atividades propostas na sequência didática. Segundo Freitas (2007), cabe ao professor a escolha de um bom problema, que deve ser compatível com o nível de conhecimento do aluno. Para isso, “só o professor pode realizar essa tarefa, que é essencialmente uma questão técnica, pois é ele quem tem as condições de conhecer os alunos e a realidade de sala de aula”(*ibid*, p.94). Refletindo sobre o que disse o pesquisador, resolvemos aplicar uma lista de atividades, que chamamos de teste diagnóstico, com o objetivo de analisarmos os conhecimentos matemáticos aprendidos por esses alunos, para ajustar nossa sequência didática aos resultados apresentados.

Em um primeiro momento, colocamos atividades a serem escritas em forma de expressões algébricas, de acordo com a sintaxe do enunciado envolvendo um número desconhecido. Objetiva-se com isso verificar como estão os conhecimentos da tradução de informações escritas em linguagem natural em expressões algébricas com uma variável.

Em um segundo momento, colocamos atividades a serem escritas em forma de expressões algébricas, de acordo com a sintaxe do enunciado envolvendo dois números desconhecidos. Objetiva-se com isso verificar como estão os conhecimentos da tradução de informações escritas em linguagem natural em expressões algébricas com mais de uma variável.

Em um terceiro momento, colocamos duas equações do 1º grau para serem resolvidas. Objetiva-se com isso verificar, pelo menos em parte, como estão os conhecimentos em resolver equações desse tipo.

Por fim, em um quarto momento, apresentamos três situações-problema escritas em linguagem natural. O objetivo é verificar se os sujeitos conseguem utilizar a montagem de equações para encontrar as soluções dos problemas propostos, uma vez que esse conhecimento já foi aprendido por eles, de acordo com o ano escolar em que se encontram.

A seguir apresentamos a lista de atividades correspondente ao teste diagnóstico.

2.6.1 Lista de atividades do teste diagnóstico

Se chamarmos um número qualquer de x, apesar de não sabermos quem realmente é esse número, podemos brincar com ele escrevendo várias expressões algébricas em função desse número. Por exemplo:

O dobro de x é igual a 2x.

A metade de x é igual a $\frac{x}{2}$.

A soma do quíntuplo de x com sete é igual a 5x + 7.

Agora faça você, considere o número x, traduza as informações para linguagem algébrica escrevendo a expressão correspondente:

A1 - O triplo do número:
A2 - A terça parte do número:
A3 - A soma do número com cinco:
A4 - A diferença entre esse número e cinco:
A5 - Dois terços desse número:
A6 - Dois terços desse número mais sete:
A7 - O produto desse número por 10:
A8 - A soma de dois terços desse número com sete:
A9 - A terça parte da soma desse número com 20:

Agora vamos fazer o seguinte: além do número desconhecido x, vamos considerar outro número e representá-lo por y. O jogo agora é traduzir as informações para linguagem algébrica escrevendo a expressão correspondente:

A10 - A soma desses números:
A11 - O dobro de x mais o triplo de y:
A12 - A soma da terça parte de x com a metade de y:
A13 - A soma do dobro de x com y é igual a 15:
A14 - y é igual ao triplo de x:

Nas questões anteriores você apenas escreveu as expressões, não calculou nada, nessa atividade propomos que resolva as equações.

A15 - $3x - 4 = 5$
A16 - $12 + 5x = 1 + 3x$

Nessa atividade vamos interpretar os problemas, traduzir as informações para linguagem matemática e resolver a equação.

A17 - A soma de um número com sete é igual dezoito. Qual é esse número?
A18 - A diferença entre um número e dois é igual a seis. Monte e resolva a equação correspondente para descobrir qual é o numero desconhecido.
A19 - O triplo de um número menos dois é igual a esse número mais doze. Monte e resolva a equação correspondente para encontrar o número desconhecido.

Apresentamos inicialmente três exemplos com intuito de mostrar o que o aluno deveria fazer diante dos problemas propostos. As atividades foram escolhidas de acordo com os conhecimentos que os alunos deveriam dispor até o momento. Queríamos sondar se esses conhecimentos seriam suficientes para aprender sistemas de equações do 1º grau por meio de uma proposta de aprendizagem diferente da que esses alunos estão acostumados. A diferença a qual estamos nos referindo se fundamenta na Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Brousseau (1986), especificamente nas situações *adidáticas*.

Como não é nosso objetivo analisar atividade por atividade dessa lista, pois nosso foco é outro, sintetizamos os resultados em um quadro da seguinte forma: na primeira coluna o número da atividade; na segunda coluna a quantidade de alunos que acertaram a atividade; na terceira coluna o número de alunos que erraram a atividade; na quarta coluna o número de alunos que não fizeram a atividade. Nos anexos colocamos o quadro completo com uma quinta coluna em que estão os resultados apresentados pelos alunos que participaram do teste diagnóstico.

ATIVIDADE	CERTA	ERRADA	NÃO FEZ	ATIVIDADE	CERTA	ERRADA	NÃO FEZ
01	15	5	0	11	11	8	1
02	6	11	3	12	0	11	9
03	4	15	1	13	0	15	5
04	0	11	9	14	7	6	7
05	2	14	4	15	5	9	6
06	2	14	4	16	5	9	6
07	4	11	5	17	9	6	5
08	1	13	6	18	0	10	10
09	0	13	7	19	1	10	9
10	6	13	1				

Quadro 1: resultados do teste diagnóstico

2.6.2 Análise do teste diagnóstico

Diante dos resultados apresentados, vimos que a maior parte, 73,4%, dos alunos apresenta dificuldade na tradução das informações escritas em linguagem natural para linguagem algébrica. No entanto, se por um lado apenas em quatro atividades (A4, A9, A12, A13 e A18) não houve acerto, por outro lado, das outras quinze, pelo menos um aluno acertou cada atividade.

A maioria dos erros ocorreu na passagem da linguagem natural para a linguagem matemática em situações em que envolviam frações na escrita das expressões. Isso se verifica nas atividades A2, A5, A8, A9, e A12. Diante disso, percebe-se a viabilidade de se trabalhar com números inteiros, haja vista que não se dispõe de tempo hábil para uma recuperação desses conceitos. Com isso passamos, então, apenas às atividades que não recaiam em expressões com frações.

Com o objetivo de verificarmos como esses alunos interpretam e modelam situações com duas variáveis, na segunda parte dessa lista colocamos as atividades A10, A11 e A12. Nas atividades A10 e A11 os resultados nos chamaram a atenção. A atividade A10 em princípio parecia mais fácil que a A11 pelo fato de ser uma soma entre dois valores, enquanto essa última propõe uma soma de dobros e triplos dos valores enunciados. No entanto, vê-se que houve mais acertos na A11 do que na A10; 11 acertos da A11 e 6 acertos da A10. Isso talvez se deva pelo fato de os enunciados serem diferentes no seguinte sentido: na segunda atividade citada aparecem as letras “x” e “y” correspondentes aos valores desconhecidos e a instrução de adição “mais” no meio das informações, enquanto na primeira não aparecem essas letras, além disso, a instrução de adição “soma” para esses alunos pode ter sentido de resultado.

Nas atividades A13 e A14, além do trabalho com duas variáveis, objetivamos a verificação do uso do símbolo de igualdade. Na atividade A13, apesar de não ter tido acertos, houve várias respostas “$2xy = 15$”, isso mostra que realmente os alunos costumam juntar os termos de uma expressão, porém, vê-se que, diante de uma situação semelhante, esse resultado poderá convergir em uma das equações de um sistema, do tipo $2x + y = 15$. O que mostra que é possível criar situações que levam à montagem de sistemas de equações do 1º grau. Na atividade A14 verifica-se uma boa frequência de acertos, apesar de a mesma quantidade de alunos ter desistido de fazê-la. Entre os resultados errados, $x = 3x$ e $3xy$ nos chamaram a atenção. No primeiro, vê-se que o aluno sabe trabalhar com o símbolo de igualdade, porém, ou trocou y por x ou não soube o que fazer com outro tipo de letra, pelo motivo de a maioria das vezes ter trabalhado com x. No segundo, vê-se que o aluno não sabe trabalhar com o símbolo de igualdade.

Na terceira parte da lista colocamos duas equações com o objetivo de verificarmos os métodos utilizados na resolução. Vemos que o método utilizado foi o da transposição de termos, não houve nenhuma tentativa de resolução por algum método diferenciado, porém, alguns fizeram cálculos completamente desprovidos de sintaxe algébrica. As duas atividades, em comparação com a quantidade de erros e desistências de resolução, tiveram baixa frequência de acertos.

Na quarta e última parte da lista colocamos três problemas para serem resolvidos utilizando-se equações do 1º grau. Entre os resultados corretos da atividade A17, todos chegaram à solução por tentativa ao acaso, mesmo que orientados para que as atividades fossem resolvidas algebricamente em cada enunciado. Na atividade A18[6] não houve acerto, porém, vê-se que a metade tentou fazer e a outra metade deixou em branco. Entre os resultados errados, um nos chamou a atenção; o aluno escreveu a equação, mas colocou a operação de adição onde deveria colocar subtração. Talvez isso tenha ocorrido porque confundiu a operação ou não compreendeu o termo “a diferença”.

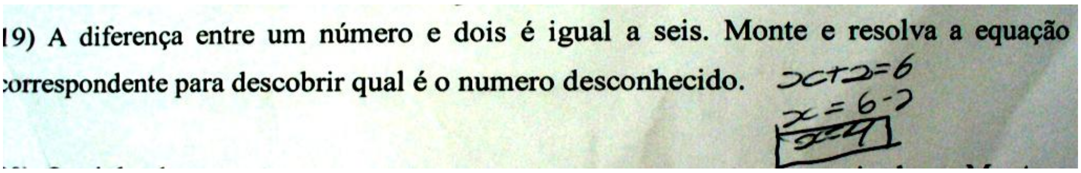
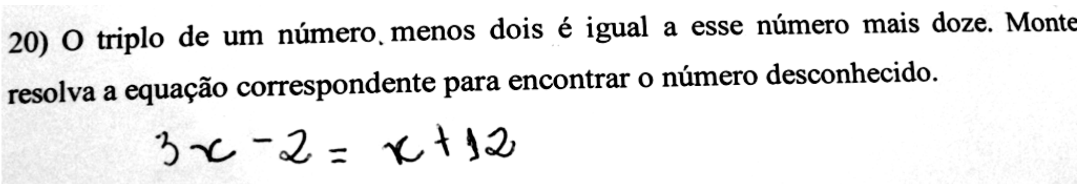

19) A diferença entre um número e dois é igual a seis. Monte e resolva a equação correspondente para descobrir qual é o numero desconhecido. $x+2=6$ $x=6-2$ $\boxed{x=4}$

Figura 3: resolução da atividade A18 do teste diagnóstico

Diante disso, observa-se que, mesmo que tenha errado a tradução para linguagem algébrica, a resolução da equação está correta, o aluno transpôs o termo dois para o segundo membro da equação trocando corretamente seu sinal.

Na atividade A19, apenas um aluno acertou a resposta. Não sabemos se ele fez por tentativa ou “chutou” o valor, uma vez que ele apenas assinalou o número correspondente à resposta correta. Outro resultado nos chamou a atenção nessa atividade: um aluno Escreveu corretamente a equação conforme a sintaxe das informações, porém não a resolveu.


20) O triplo de um número, menos dois é igual a esse número mais doze. Monte resolva a equação correspondente para encontrar o número desconhecido.

$3x-2=x+12$

Figura 4: resolução da atividade A19 do teste diagnóstico.

Ao analisarmos as outras atividades, percebemos que esse aluno acertou: A1, A3, A10, A11 e a A14. Não conseguiu resolver as equações das atividades A15 e A16. Vemos que esse aluno apresenta facilidade para algebrizar algumas situações escritas em linguagem natural, porém, tem dificuldade para resolver equações.

Concluímos com a análise dos resultados deste teste diagnóstico que esses alunos apresentam dificuldade com conhecimentos básicos em Álgebra. As dificuldades se manifestaram tanto na tradução das linguagens natural e algébrica quanto na resolução das equações. Em muitos casos percebemos que faltou algum meio que validasse ou apresentasse

[6] Os números das atividades não correspondem aos das figuras pelo fato de termos desconsiderado uma das primeiras atividades da lista após ter aplicado o teste.

retroações nas passagens erradas, haja vista que não se percebe reflexões por parte dos alunos quanto às resoluções. Em certos casos observamos grande discrepância do resultado final com o enunciado da atividade. A atividade 10, por exemplo, se referia a escrita da expressão algébrica cujo enunciado solicitava para escrever a soma de dois números desconhecidos representados por x e y. Entre os vários resultados apresentados, $y+y=y^2$ nos chamou a atenção, por apresentar pelo menos dois erros: erro de interpretação, haja vista que o próprio enunciado sugeria que os números desconhecidos fossem representados por x e y; operação errada, uma vez que a soma se apresenta como se fosse o produto ao colocarem o expoente.

Ao analisarmos os resultados apresentados nesse teste, percebemos que um mesmo aluno é capaz de desenvolver corretamente uma atividade considerada mais difícil em comparação às outras que não conseguira fazer. Para exemplificar podemos considerar os resultados do aluno que conseguiu escrever a equação da atividade A19. Ele traduziu as informações em forma de equação corretamente, porém não conseguiu calcular o valor de x que satisfaz o enunciado do problema proposto. Esse mesmo aluno não conseguiu resolver as equações das atividades A15 e A16, acertou a A17 por tentativa e a A18 deixou sem resolver.

Diante do que verificamos com esse teste diagnóstico e levando-se em consideração as pesquisas estudadas, criamos uma sequência de aprendizagem na qual os resultados apresentados embasaram nossas previsões de erros na análise a *priori* das atividades. Embora tenhamos detectado vários erros nas resoluções das atividades do teste diagnóstico, acreditamos que, diante de um meio que possibilita reflexões aos alunos, a frequência desses erros diminui à medida que vão sendo contornados.

No próximo item deste capítulo discutiremos um pouco os métodos de resolução de sistemas propostos nos livros didáticos os quais são ensinados com maior frequência pelos professores.

2.7 Resolução de sistemas de equações do 1º grau

Após termos fechado o estudo das dificuldades e erros na aprendizagem da Álgebra com a análise do teste diagnóstico, passamos então ao estudo do objeto matemático desta pesquisa de acordo com os livros didáticos. Antes disso, porém, vamos apresentar alguns conceitos que consideramos pré-requisitos: sistemas equivalentes, tipos de sistemas com relação ao número de soluções e significado da solução de um sistema de equações.

2.7.1 Sistemas equivalentes

De acordo com Iezzi (1997), dois sistemas lineares S_1 e S_2 são equivalentes se suas soluções forem iguais. Com base na definição do autor, Valenzuela (2007) justifica que o reconhecimento de sistemas equivalentes é a ideia fundamental no processo de resolução, pelo fato de que podemos substituir um sistema por outro sem a alteração do conjunto solução. Em nossa experiência, acreditamos que a possibilidade de utilizarmos o princípio aditivo e multiplicativo é um importante recurso algébrico na resolução de sistemas de equações, pelo fato de podermos manipular[7] as equações do sistema obtendo-se um novo sistema, equivalente ao sistema original, e que pode ser resolvido com maior facilidade.

Vamos ilustrar o que estamos dizendo com um exemplo de Dante (2007, p.135). Nesse exemplo o autor apresenta um sistema da forma $\begin{cases} \dfrac{x+y}{4} - \dfrac{x-y}{3} = 10 \\ \dfrac{x+y}{8} + \dfrac{x-y}{6} = 5 \end{cases}$. De acordo com o autor, esse é um sistema que precisa ser preparado para ser resolvido. Para isso, precisamos transformá-lo em um sistema equivalente cuja estrutura seja de fácil compreensão para o aluno. Uma primeira providência seria transformar cada uma das equações em uma equação da forma ax + by = c:

Primeiramente eliminamos os denominadores. Na primeira equação o menor múltiplo comum, diferente de zero, de 4 e 3 é o número 12, se multiplicarmos os membros dessa equação por esse valor, teremos uma equação equivalente 3(x+y) - 4(x-y) = 120. Na segunda equação, o menor múltiplo comum diferente de zero de 8 e 6 é o 24. Se multiplicarmos os membros dessa equação obtemos 3(x+y) + 4(x-y) = 120. Se aplicarmos a distributiva e reduzirmos os termos semelhantes, obteremos as seguintes equações: -x + 7y = 120 e 7x – y = 120.

Assim como em outros, nesse exemplo, o autor não comenta que ao realizar essas operações para transformar o sistema dado no sistema $\begin{cases} -x + 7y = 120 \\ 7x - y = 120 \end{cases}$ o aluno terá encontrado um sistema equivalente cuja solução é a mesma. Apesar de não termos resolvido o sistema, pois vamos comentar os métodos de resolução posteriormente, podemos afirmar que as soluções são iguais.

[7] Manipular no sentido de alterarmos a estrutura do sistema.

2.7.2 Tipos de sistemas de equações do 1º grau quanto ao número de soluções

De acordo com Dante (2007), a solução de um sistema de equações com duas incógnitas é o conjunto dos pares ordenados cujos valores satisfazem simultaneamente suas equações. Com efeito, se um par ordenado[8] for solução das duas equações será solução do sistema formado por essas equações.

Quanto ao número de soluções, de acordo com o autor, um sistema de equações de 1º grau pode ter: uma única solução, nesse caso, o sistema é considerado possível e determinado (SPD); infinitas soluções, nesse caso, o sistema é considerado possível e indeterminado (SPI) e não ter soluções, nesse caso, o sistema é considerado impossível (SI).

Alguns autores de livros didáticos fazem analogia com a geometria analítica ao apresentarem os tipos de sistemas de equações quanto à discussão do número de soluções. Dante (2007, p. 140) apresenta uma situação problema utilizando o método gráfico para resolver o sistema gerado. Nessa situação o autor constrói uma tabela para cada equação do sistema $\begin{cases} x + y = 24 \\ y = 3x \end{cases}$, dá valores para uma variável e substitui na equação para encontrar o valor correspondente da outra variável. Esboça o plano cartesiano e marca os pontos correspondentes aos pares ordenados encontrados em cada tabela. Traça duas retas e dá ênfase ao ponto de intersecção, dizendo que "o par ordenado (6,18) é, portanto, a solução do sistema (seu ponto é comum às duas retas)". Na página seguinte reforça dizendo que o sistema $\begin{cases} x + y = 24 \\ y = 3x \end{cases}$ é possível e determinado.

Para sistemas impossíveis o autor propõe a análise do sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$, procedendo da mesma forma: constrói duas tabelas correspondentes às duas equações, esboça o plano cartesiano, marca os pontos correspondentes aos pares ordenados e traça as retas. Assim, Dante (2007, p. 141) termina dizendo "quando o sistema é impossível, as retas que representam cada uma das equações são distintas e paralelas (não têm ponto comum)".

Para sistemas possíveis e indeterminados o autor propõe a análise do sistema $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$, também da mesma forma: constrói duas tabelas correspondentes às duas

---

[8] O termo "par ordenado" usado neste texto, de acordo com Dante (2007) se refere à solução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.

equações, esboça o plano cartesiano, marca os pontos correspondentes aos pares ordenados e traça as retas. Nessa situação o autor verifica que ao traçar as retas, essas coincidem em todos os seus pontos e termina dizendo: "quando um sistema é indeterminado, as retas que representam cada uma das equações são coincidentes".

Passamos, então, aos métodos de resolução de sistemas apresentados pelos autores de livros didáticos.

2.7.3 Resolução de sistemas de equações do 1º grau pelo método da substituição

Para apresentar esse método, analisamos inicialmente alguns livros didáticos (ÁLVARO ANDRINI, 2008; CAVALCANTE, 2007; CENTURIÓN, 2007; DANTE, 2007; GUELI, 2005) para vermos como esses autores discorrem sobre o mesmo. A partir deste estudo verificamos que o primeiro passo a ser dado na resolução de um sistema pelo método da substituição é escrevê-lo na forma canônica. Reduzir um sistema na forma canônica é escrever um sistema equivalente ao primeiro da forma $\begin{cases} a'x & + & b'y & = & c' \\ a''x & + & b''y & = & c'' \end{cases}$ onde a, b e c são números racionais. Se o sistema já estiver na forma canônica, passa-se ao próximo passo. Segundo passo, isolar uma das incógnitas em uma das equações. Terceiro passo, substituir a expressão igual à incógnita na outra equação e obter uma equação com uma incógnita. Quarto passo, resolver a equação para obter o valor da incógnita. Por fim, no quinto passo, substituir o valor da incógnita em qualquer equação do sistema, resolver e encontrar o valor da outra incógnita.

Uma dificuldade que talvez possa ocorrer com relação à resolução de sistemas utilizando-se o *Aplusix* é que o *software* não permite que a estrutura do sistema seja desfeita, assim como geralmente fazemos quando resolvemos utilizando papel e lápis. Nesse caso, deve-se, durante a resolução, mantê-la. Veja na figura a seguir a resolução de um sistema pelo método da substituição utilizando o *Aplusix*. No segundo quadro isolamos o x, escrevendo-o em função de y. No terceiro quadro substituímos o x da primeira equação pela expressão equivalente. Do quarto quadro em diante prosseguimos com a resolução, sempre mantendo a estrutura do sistema.

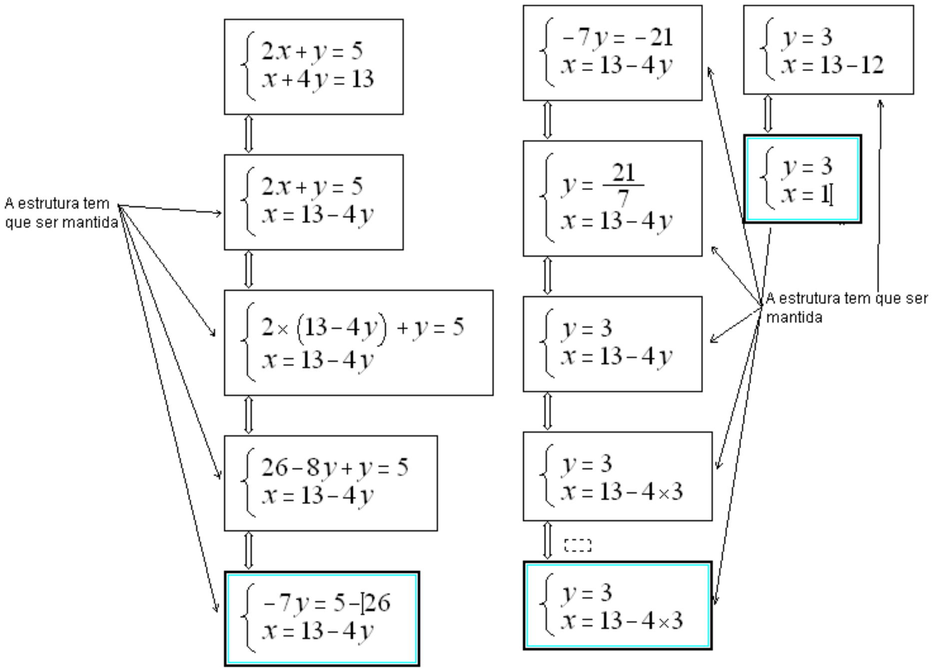


Figura 5: exemplo de resolução de sistema pelo método da substituição utilizando-se o *Aplusix*.

Nesse caso prevemos, durante a institucionalização, fazermos uma comparação entre a resolução papel – lápis e o *software Aplusix* para que não haja dúvidas quando as atividades forem feitas utilizando-se os dois recursos.

No próximo capítulo apresentamos a sequência didática, a análise a *priori* das atividades de cada bloco e a análise a *posteriori* dos dados coletados.

CAPÍTULO III – Sequência didática: descrição e análise dos dados

Nessa fase, de acordo com Almouloud (2007, p. 174), o pesquisador, orientado pelas análises preliminares e "com a finalidade de responder à(s) questão(ões) e validar as hipóteses levantadas [...]" , constrói e analisa uma sequência didática para ser aplicada na experimentação e coleta de dados. Para isso, devem-se eleger as variáveis didáticas, também chamadas de variáveis de comando, por terem a incumbência de controlarem as ações dos pesquisados em situações *adidáticas* e provocarem as mudanças desejadas em relação ao aprendizado do objeto matemático em jogo. Nessa etapa deve-se prever o comportamento dos pesquisados; prever possíveis estratégias de resolução das atividades envolvidas; verificar se as situações criadas podem ser vividas como *adidáticas* em alguns momentos; analisar as possíveis dificuldades de aprendizagem. De acordo com Machado (2007), na análise a *priori* se permite uma parte de previsão e outra de descrição.

Nesta etapa apresentamos como estruturamos nossa sequência didática, bem como a estratégia de evolução da aprendizagem da resolução de sistemas de equações do 1º grau de acordo com a TSD.

Quanto à análise dos dados coletados, esta é fase da engenharia didática em que o pesquisador se debruça sobre as informações coletadas e as analisa de acordo com as análises a *priori*, tendo em vista as hipóteses, bem como os objetivos da pesquisa e as questões levantadas.

Para facilitar as análises dos dados, optamos em colocar a análise a *posteriori* seguida da análise a *priori* de cada bloco.

3.1 Estudo das variáveis didáticas

De acordo com Machado (2008, p. 241), na fase da análise a *priori* "[...] o pesquisador orientado pelas análises preliminares delimita certo número de variáveis pertinentes do sistema sobre o qual o ensino pode atuar [...]". As variáveis citadas são os valores da situação que compõem o meio didático pensado pelo professor para que o sujeito possa mudar de estratégia de resolução, uma vez que perceba que seus conhecimentos não são suficientes. Neste caso, as variáveis estão intrinsecamente ligadas ao objeto matemático às quais nomeamos de: tipo do enunciado, tamanho do coeficiente independente e coeficientes das incógnitas.

3.1.1 Variável 1: tipo do enunciado

Os valores dessa variável são as diferentes formas como são enunciadas as informações dos problemas; uma mesma informação pode ser apresentada de várias maneiras. Por exemplo: “a diferença entre dois números é igual a cinco”; essa afirmação pode ser apresentada de outra forma “um número menos o outro é igual a cinco” ou, “subtraindo-se um número de outro obtemos cinco”. Vimos que conforme mudamos a maneira como é enunciada, a mesma informação pode gerar diferentes interpretações. Isso foi comprovado na pesquisa de Lochhead e Mestre (1995): foram propostas algumas informações em que os alunos tinham que equacioná-las e, segundo os autores, os alunos escreviam as equações obedecendo à ordem em que eram enunciadas as informações.

3.1.2 Variável 2: tamanho do coeficiente independente

Os valores dessa variável são os números representados pelos termos independentes z nas equações do tipo $ax + by = z$ que constituem cada sistema, onde, a e b são números inteiros. A mudança dessa variável poderá fazer com que se disponibilizem outras estratégias na resolução das atividades, uma vez que é possível chegar à solução apenas por meio de tentativas ao acaso. Por exemplo: na equação $x + y = z$, a mudança do termo z para valores grandes, no sentido quantitativo, poderá fazer com que a resolução por tentativa se torne muito custosa, consequentemente isso poderá forçar o aluno a passar para outro tipo de estratégia. Também optamos por trabalhar com essa variável para evitar que resultados sejam imediatos e favoreçam à falta de espírito de investigação.

3.1.3 Variável 3: coeficientes das incógnitas

Equações do tipo $x + y = b$ têm coeficientes de x e y iguais a 1, trata-se de uma soma de dois números sendo igualada a um número b inteiro. Nesse caso, acredita-se que se os valores de b forem razoavelmente pequenos, no sentido quantitativo, facilitam a resolução por tentativas ao acaso. Entretanto, em problemas em que se têm coeficientes das incógnitas diferentes de 1, a resolução por tentativa é mais difícil, podendo causar uma mudança de estratégia de resolução. Por exemplo: o problema para encontrar a quantidade de carros e motos estacionados em uma garagem tem implícito na informação que enuncia, à quantidade de rodas, os coeficientes 2 e 4. Nesse sentido, se x e y são o número de motos e carros, respectivamente, a equação $2x + 4y = b$, sendo b um número inteiro positivo correspondente à quantidade de rodas, tornaria a resolução por tentativa mais trabalhosa, uma vez que a soma não seria diretamente entre a quantidade de motos e a quantidade de carros, porém, uma soma de múltiplos de 2 e de 4.

Após apresentarmos as variáveis didáticas, passamos à análise da sequência didática.

3.2 Apresentação dos blocos de atividades da sequência

Refletindo sobre a proposição de situações que possam ser vividas como *adidáticas*, construímos a sequência de aprendizagem de tal forma que o aluno em um primeiro momento saiba extrair as informações do problema; em um segundo momento saiba transformar essas informações em equações com duas incógnitas, bem como em sistema; em um terceiro momento aprenda a resolver sistemas de equações; em um quarto e último momento consiga resolver problemas utilizando sistemas. Para isso, agrupamos as atividades criadas em quatro blocos.

A seguir apresentamos um quadro síntese dos blocos no qual organizamos o tipo de atividade, os objetivos correspondentes e as variáveis didáticas envolvidas:

Bloco	Atividade	Objetivo da atividade	Variável didática
01	Seis problemas que podem ser resolvidos por meio da escrita e resolução de sistemas de equações do 1º grau.	-Identificar as informações contidas no enunciado de forma que se o problema fosse resolvido por sistemas, elas norteariam a elaboração das equações; -Sentir a necessidade de ter um recurso algébrico para resolver os problemas.	- Tipo do enunciado - Tamanho do coeficiente independente - Coeficientes das incógnitas.
02	Cinco atividades de escrita de sistemas de equações do 1º grau.	- Aprender a escrever sistemas de equações com base nos conhecimentos adquiridos no bloco anterior	- Tipo do enunciado - Coeficientes das incógnitas.
03	Onze atividades de resolução de sistemas de equações do 1º grau.	- Levar o aluno a construir a aprendizagem da resolução de sistemas de equações pelo método da substituição	- Tipo do enunciado - Tamanho do coeficiente independente - Coeficientes das incógnitas.
04	Seis problemas contextualizados para serem resolvidos por meio da escrita e resolução de sistemas de equações do 1º grau.	- Aprender a resolver problemas utilizando sistemas de equações de 1º grau.	Tipo do enunciado Tipo do coeficiente independente Coeficientes das incógnitas.

Quadro 2: síntese da sequência didática

O primeiro bloco contém problemas que podem ser resolvidos utilizando-se sistemas de equações. Entretanto, pelo fato de esses alunos ainda não terem visto esse assunto, queremos analisar as estratégias que podem surgir e levá-los a distinguir as informações do problema que quando resolvido por meio da montagem de um sistema possibilita a escrita correta das duas equações que o constitui. Isso será de grande utilidade na montagem do sistema pelo fato de que a sintaxe de cada equação de um sistema está diretamente ligada à informação no enunciado.

O primeiro objetivo dessas atividades é de que possam identificar as duas informações contidas no enunciado. Acreditamos que, se o aluno for capaz de distingui-las, poderá, quando for resolver um problema utilizando sistema, escrever as equações geradas pela tradução do enunciado com maior facilidade, uma vez que a sintaxe de cada equação se encontra embutida em cada informação do enunciado.

O segundo objetivo dessas atividades é de que o aluno possa sentir a necessidade de criar estratégias de resolução que venham a incidir em estratégias algébricas. Por prevermos que inicialmente as estratégias contempladas sejam por tentativas ao acaso e por tentativas de pares de números naturais, propomos problemas cujos enunciados apresentam informações cujas operações e coeficientes implícitos. Neste caso, cabe ao aluno interpretar o enunciado do problema corretamente e mobilizar estratégias algébricas na tentativa de encontrar a solução. Com isso, à medida que o aluno vai evoluindo em sua aprendizagem, atividades com números cada vez maiores, no sentido quantitativo, bem como coeficientes de diferentes multiplicidades vão sendo propostas. Isso poderá fazer com que o aluno desista de prosseguir na busca da solução ou procure articular novas estratégias de resolução que podem recair na montagem de expressões algébricas. Quanto à possível desistência do aluno, devemos ficar atentos a isso e procurar incentivá-lo a buscar outras formas de resolução, sempre tomando o cuidado de não adiantar resultados e de não dar dicas. Quanto à segunda possibilidade, a partir do momento em que o aluno manifesta a necessidade de uma forma algébrica de resolução das atividades, pode-se, então, apresentar-lhes o significado de sistema de equações, como é representado e o fato de que cada equação representa uma informação contida no enunciado. Desta forma, pode-se passar ao próximo bloco de atividades.

No segundo bloco de atividades objetivamos a aprendizagem da escrita de sistemas de equações. Espera-se que nesse bloco o aluno já saiba distinguir as informações que podem ser traduzidas em equações. Para isso, são propostos problemas escritos em linguagem natural com o objetivo de levar o aluno a escrever o sistema resultante da tradução das informações para linguagem matemática. Deste modo, podemos dizer que o resultado de cada atividade deste bloco é o sistema escrito.

Neste bloco, é apresentado ao o aluno o que é um sistema de equações e como se escreve esse dispositivo algébrico, porém, sem ensinar como montar. Portanto, o conhecimento novo para esses alunos, que levamos em consideração, é saber traduzir problemas escritos em linguagem natural para a linguagem algébrica, no caso, para sistemas de equações do 1º grau. O próximo passo é a aprendizagem da resolução desse novo conceito.

No terceiro bloco de atividades objetiva-se a aprendizagem da resolução de sistemas de equações do 1º grau pelo método da substituição. São propostas atividades de tal forma que a variável "tipo do enunciado" possa levar o aluno a encontrar a solução pelo método citado. As situações-problema são apresentadas em forma de sistemas de equações para serem resolvidos.

Antes de propormos essas atividades, institucionalizamos o significado de solução de sistema. Deve-se lembrar que esses alunos já trabalharam com resolução de equações do 1º grau. Portanto, solução de equação do 1º grau não é conhecimento novo para eles. Entretanto, o significado de solução de sistema de equações é novo e deve ser institucionalizado, pois, nosso objetivo nesse bloco é que os alunos consigam chegar à solução por meio da resolução. Portanto, precisam compreender o que estão calculando.

É conveniente lembrarmos que não se trata da aplicação de uma definição anteriormente dada e sim da construção de um conceito matemático. A situação-problema se manifesta no desafio em encontrar a solução, pois, de acordo com os PCN (1998, p. 41), “só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada”. Nestas situações o problema se manifesta nas questões: como resolver o sistema? Qual o procedimento?

Após a conclusão dessas três etapas, é chegada a hora de utilizar os conhecimentos construídos nos blocos anteriores na aprendizagem da resolução de problemas escritos em linguagem natural. Para isso, no quarto bloco, são propostas atividades de diferentes contextos.

Depois de termos apresentado as ideias gerais dos blocos de atividades que constituem nossa sequência de aprendizagem, bem como a justificativa de termos optado por essa configuração, passamos à análise a *priori* das atividades seguida da análise dos resultados de cada bloco.

3.3 Bloco 1: análise a *priori* das atividades

Propomos nesse bloco problemas cujo desafio é encontrar um par de valores que satisfazem ao mesmo tempo duas informações. Pela análise que fizemos nos documentos oficiais e livros didáticos, o aluno até essa etapa trabalhava com problemas que envolvia resolução de equações do 1º grau com uma incógnita. Portanto, trabalhar com problemas que tenha que encontrar dois valores que satisfazem duas informações é um conhecimento novo.

Apesar de esperarmos que as atividades sejam feitas com base no descrito por Valenzuela (2007) como método da tentativa, talvez, pelo fato de o aluno já ter trabalhado resolução de problemas envolvendo equações na série anterior, estratégias algébricas, que serão descritas a seguir, podem surgir.

Atividade 1

Nessa atividade o desafio é encontrar dois números cuja soma é igual a 17 e a diferença entre esses números seja igual a 5.

a) Escreva as informações do problema que você vai usar para encontrar os números procurados;
b) Resolva o problema e descreva como fez para encontrar os números procurados;
c) Verifique se esse par de números é realmente a solução do problema e descreva como fez a verificação.

Baseada em uma questão do livro didático[9], nessa atividade a variável didática "tipo do enunciado" assume o valor da forma como foram enunciadas as informações.

Espera-se que sejam identificadas as duas informações do problema: a soma dos números é igual a dezessete e a diferença entre eles é igual a cinco. Para isso deve-se tentar encontrar os valores por meio das possíveis estratégias.

Tentativa ao acaso

Tomar ao acaso dois números cuja soma seja 17 e verificar se a diferença entre eles é igual 5. Ou pegar dois números cuja diferença seja 5 e verificar se a soma é igual a 17.

Essa estratégia é possível pelo fato de os alunos, segundo Freitas (2002), geralmente utilizarem métodos que tiveram resultados favoráveis na aritmética que lhes são familiares.

Tentando pares de números naturais

Considerar todos os pares de números naturais cuja soma seja igual a 17 e verificar qual desses pares satisfaz a segunda condição imposta.

Esse é um dos métodos utilizados por Dante (2007, p. 128) ao apresentar a resolução de um problema. Nesse exemplo o autor não escreveu os pares, entretanto, ele monta uma tabela cujas duas primeiras colunas estão todos os possíveis valores naturais. A solução está na linha que apresenta os valores que satisfazem ao mesmo tempo as duas condições.

Operações aleatórias com os valores do problema

Pesquisas (BARUK, 1985; LOPES et al., 1994) têm mostrado que em certas situações as crianças costumam fazer cálculos com os dados do problema conforme aparecem no enunciado, sem a preocupação inicial de se interpretar as informações. Diante disso, uma estratégia possível de ocorrer é a de se fazer cálculos com os valores que figuram no enunciado, de forma que se lance mão de operações cujos resultados são novamente operados até que se chegue ao resultado esperado. Em um primeiro momento, espera-se que sejam somados ou subtraídos os números que aparecem no enunciado do problema. É claro que operações aleatórias não garantem que se consigam os valores esperados, porém, desde que se saiba que os valores procurados satisfazem simultaneamente as duas informações, pode-se "forçar" os resultados obtidos com a operação inicial até chegar ao primeiro valor.

[9] Dante (2007, p. 123)

Para essa atividade um recurso seria somar os valores envolvidos, no caso, 17 + 5 = 22. O valor resultante da soma não é um dos números procurados, porém, entre os cálculos que se pode fazer com esse número, na tentativa de se chegar a um dos valores, seria dividi-lo por dois. Em posse desse valor, resultado da divisão por dois, pode-se verificar que esse número e o natural que falta para 17 satisfazem as duas informações do enunciado; 11 + 6 = 17 e 11 – 6 = 5.

Outro recurso seria subtrair os valores envolvidos, no caso, 17 – 5 = 12. Da mesma forma, dividindo-se esse valor por dois, o resultado é um dos números procurados. O outro valor é o número que falta para 17.

Vemos que por meio de cálculos com os valores que aparecem no enunciado é possível chegar ao resultado esperado, mas será que sempre é possível dividir por dois? Porque dividir por dois da certo nesses casos? Vamos justificar matematicamente isso.

Para mostrar matematicamente vamos escrever um sistema do tipo $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$, sendo *a* e *b* números racionais. Para soma de *a* com *b*, temos $a + b = 2x$, o que resulta em $x = \frac{a+b}{2}$. Para diferença de *a* por *b*, temos $a - b = y - (-y) = 2y$, o que resulta em $y = \frac{a-b}{2}$. Portanto, vemos que se for somado ou subtraído os valores que aparecem no enunciado do problema, posteriormente dividido por dois a soma ou a diferença, o valor encontrado é um dos números procurados.

Algebricamente, utilizando equações do 1º grau

Se chamar um número de x o outro número é o valor que falta para 17, ou seja, 17 – x; na primeira condição. Na segunda condição a equação resultante seria x – (17 – x) = 5. Ao resolver essa equação, encontra-se o valor de um dos números. Posteriormente, ao substituir o número encontrado no lugar de x na expressão 17 – x, o segundo número será encontrado.

Essa estratégia é possível pelo fato de já ter sido trabalhado equações do 1º grau para resolver problemas no ano anterior. Entretanto, pesquisas apontam (BOOTH, 1995) que o aluno tem dificuldade em considerar que uma expressão algébrica pode representar um valor. Essa pesquisa, entre outras, também verifica a dificuldade em agrupar valores por meio de parênteses.

Atividade 2

Encontre dois números cuja soma é igual a 70 e a diferença entre eles igual a 28. a) Escreva as informações do problema que você vai usar para encontrar os números procurados; b) Resolva o problema e descreva como fez para encontrar os números procurados; c) verifique se esse par de números é realmente a solução do problema e descreva como você fez a verificação.

Esta atividade é semelhante à anterior, porém, ao mexermos com a variável "tamanho do coeficiente independente", a resolução por tentativa ao acaso pode não ser uma boa estratégia, pelo fato de que possa levar a uma quantidade maior de tentativas. Entretanto, pelo fato de termos identificado no teste diagnóstico dificuldades de se dispor de outras formas de resolução dos problemas propostos, talvez haja insistência em resolver a atividade por tentativas. Porém devemos levar em consideração outras formas de resolução.

Tentativas ao acaso

Tomar ao acaso dois números cuja soma seja igual a 70 e verificar se a diferença deles satisfaz a segunda informação, ou seja, que a soma dê 28 ou tomar dois números cuja diferença seja igual a 28 e verificar se a soma desses valores é igual a 70.

Tentando pares de números naturais

Fazer uma relação de todos os números naturais cuja soma seja igual a 70. Verificar e escrever qual dos pares satisfaz a segunda informação.

Algebricamente, utilizando equações do 1º grau

Se chamar um número de x o outro número é o valor que falta para 70, ou seja, $70 - x$; na primeira informação. Na segunda informação a equação resultante seria $x - (70 - x) = 28$. Ao resolver essa equação, encontra-se o valor de um dos números. Posteriormente, ao substituir o número encontrado no lugar de x na expressão $70 - x$, o segundo número será encontrado.

Operações aleatórias com os valores do problema

Somar 70 com 28 e dividir o resultado por 2. O valor resultante dessas operações, como já mostrado, é um dos números procurados, o outro é o módulo da diferença entre 70 e o resultado (49) da operação anterior.

Outra opção seria subtrair 70 de 28 e dividir o resultado por 2. O valor resultante dessas operações é um dos números. O outro valor é o módulo da diferença entre 70 e o resultado (42) da operação anterior.

Atividade 3

Encontre dois números cuja soma é igual a 11 e a diferença entre o dobro de um número e o triplo do outro número seja igual a 2. a) Escreva as informações do problema que você vai usar para encontrar os números procurados; b) Resolva o problema e descreva como fez para encontrar os números procurados; c) Verifique se esse par de números é realmente a solução do problema e descreva como você fez a verificação.

Essa atividade coloca em jogo as variáveis didáticas "tipo do coeficiente independente", "coeficientes das incógnitas" e "tipo do enunciado".

Quanto a primeira variável, apesar de termos diminuído, em se tratando de quantidade, os termos independentes de 70 para 11 e 28 para 2, optamos por colocar nesta atividade, múltiplos dos termos na segunda informação (segunda equação). Isso poderá fazer com que haja a necessidade de mudanças de estratégias.

Quanto a segunda variável didática, a primeira informação tem explícita a soma entre dois números, neste caso, em um primeiro momento, poderá favorecer a resolução por tentativas. Entretanto, na segunda informação, embora o enunciado traga explícito que se trata de uma diferença entre dois números, pelo fato de esses números serem dobro e triplo dos valores procurados, a resolução por tentativa poderá ocasionar dificuldades e mudança de estratégia.

Quanto a terceira variável, esta assume o valor da forma como enunciado está proposto, haja vista que as operações de adição e subtração não aparecem entre os termos. A primeira informação, por exemplo, não se refere que "um número mais o outro é igual a 11". De certa forma esse tipo de enunciado poderia instruir o aluno na resolução da atividade por trazer a operação entre os números na escrita. Por outro lado, a forma como a primeira informação está enunciada poderá fazer com que o aluno reflita sobre as operações utilizadas.

Tentativas ao acaso

Como jogamos com as variáveis didáticas citadas, as estratégias por tentativas poderão aparecer com maior frequência.

Resolver por tentativas significa tomar ao acaso dois números cuja soma seja 11 e verificar se a diferença entre o dobro do primeiro valor e o triplo do segundo valor é igual a dois, pensar em dois números cuja diferença entre o dobro de um e o triplo do outro seja igual a dois e verificar se a soma entre esses números é igual a 11.

Vemos que nesse caso, pode existir a dificuldade de se pensar em múltiplos como dobro e triplo. A mesma dificuldade poderá ocorrer na próxima estratégia. Isso se justifica pelo fato de, na segunda informação, ter-se que pensar no dobro e triplo dos valores escolhidos que satisfazem a primeira informação. Por exemplo: se pensar em 9 e 2, valores esses cuja soma é igual a 11, ou seja, satisfazem a primeira informação. Diferentemente da atividade anterior, não se pode subtrair diretamente 2 de 9. Deve-se subtrair 6 de 18.

Tentando pares de números naturais

Também poderão ocorrer tentativas mais organizadas, como: considerar todos os pares de números naturais cuja soma seja igual a 11 e verificar qual desses pares satisfaz a segunda condição imposta. Nesse caso as condições para a segunda informação são as mesmas da estratégia anterior.

Algebricamente, utilizando equações do 1º grau

Embora os sujeitos desta pesquisa tenham apresentado dificuldade em traduzir informações escritas em linguagem natural para escrita algébrica, devemos levar em consideração algumas estratégias envolvendo a escrita e resolução de equações, haja vista que esse conhecimento faz parte dos saberes adquiridos por alunos na faixa etária envolvida.

Se chamar de x o primeiro número, o segundo número é o valor que falta para 11, ou seja, $11 - x$, na primeira condição. Na segunda condição a equação resultante será $2x - 3(11 - x) = 2$.

Nessa estratégia podem ocorrer dificuldades parecidas com aquelas das estratégias algébricas utilizadas nas atividades anteriores, contudo, a dificuldade se refere aos conceitos de dobro e triplo. Na primeira parcela no primeiro membro da equação resultante pode ocorrer a dificuldade em representar o dobro de um número que ainda não é conhecido. Na segunda parcela a dificuldade poderia ser maior pelo fato de se enxergar como escrever o triplo de um número representado por uma expressão $(11 - x)$. Pesquisas (Booth, 1995) mostram que geralmente o aluno tem dificuldade em reconhecer uma expressão algébrica como a representação de um valor desconhecido.

Atividade 4

A soma das idades de Paulo e João é igual a 22 anos. A diferença entre a idade de Paulo e a idade de João é igual a 8 anos. Sabendo-se que Paulo é mais velho, qual a idade de João e de Paulo? a) Escreva as informações do problema que você vai usar para encontrar os números procurados; b) Resolva o problema e descreva como fez para encontrar os números procurados; c) Verifique se esse par de números é realmente a solução do problema e descreva como você fez a verificação. d) Pense um pouco, será que existe outra maneira de encontrar os números procurados?

Essa atividade coloca em jogo a variável didática “tipo do enunciado”. Se pensarmos na resolução por meio de sistemas, essa atividade se assemelha à atividade 1, porém, como um dos objetivos deste bloco é de que se consiga identificar as informações que futuramente poderão ser úteis na escrita das equações que compõem um sistema, procuramos colocar atividades com contextos diferentes com a intenção de diversificarmos as situações-problema propostas.

Tentativas ao acaso e por pares de números naturais

Embora esta atividade apresente um contexto diferente daquele das atividades anteriores no sentido em que os valores procurados são idades, como dito, ela se assemelha à atividade 1 deste bloco, pois, envolve a soma e a diferença entre os valores procurados. Neste caso, espera-se que as estratégias de resolução persistam. Entre estas devem ocorrer tentativas ao acaso: tomar dois números naturais ao acaso cuja soma seja igual a 22 e verificar se a diferença entre o maior valor e menor valor é igual a 8. Tentando pares de números naturais: considerar todos os pares de números naturais cuja soma seja igual a 22 e verificar qual desses pares satisfaz a segunda condição.

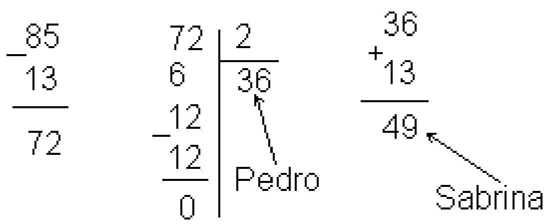
Operações aleatórias com os valores do problema

Nas atividades anteriores prevemos que poderá ocorrer a estratégia de efetuar cálculos com os valores que aparecem no enunciado. No caso desta atividade uma estratégia que poderá ocorrer é a de igualar as idades da seguinte forma: em um primeiro momento, poder-se-ia encontrar a idade do mais novo, consequentemente à idade do mais velho, se supor que ambos têm a mesma idade. Neste caso, a idade do mais velho diminui 8 anos. A soma das idades passa de 22 para 14 anos, pois, se houver a redução de uma das parcelas a soma também se reduz (princípio aditivo). Se ambos tivessem a mesma idade e a soma 14 anos, os dois teriam 7 anos. Voltando à condição real, como Paulo é oito anos mais velho, Paulo tem

15 anos. Analogamente, se fosse aumentada a idade do mais novo em oito anos, de forma que ambos tivessem a mesma idade, a soma das idades seria (22+8) 30 anos, ambos teriam 15 anos, mas como João é oito anos mais novo, logo João tem 7 anos.

A estratégia que acabamos de comentar foi inspirada em um exemplo encontrado no livro do Dante (2007, p. 132) de 6ª série. No livro o autor chama de "resolver sem usar equação". O enunciado é apresentado da seguinte maneira: "*Pedro e Sabrina têm, juntos, 85 figurinhas, mas Sabrina tem 13 a mais do que Pedro. Quantas figurinhas tem cada um dos dois?*"

Resolução encontrada no livro:



Colocamos esse exemplo para justificar que é possível a aparição da estratégia listada anteriormente. No livro o autor não justifica porque dividiu por dois a diferença entre 85 e 13, porém, podemos perceber que essa resolução se assemelha à que chamamos nesse trabalho de operações aleatórias com os valores que aparecem no problema. Fizemos a justificativa matematicamente por meio de sistemas de equações.

Algebricamente, utilizando equações do 1º grau

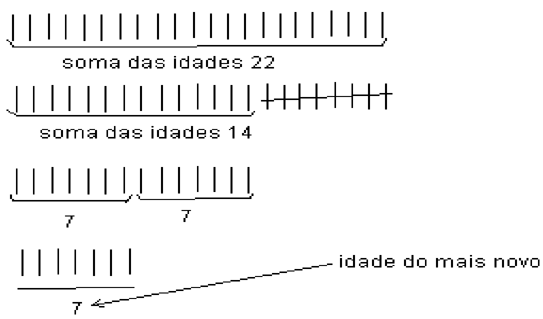
Uma estratégia que também devemos levar em consideração é a algébrica, da seguinte forma: se chamar de x a idade de João, na soma das idades, deve-se escrever a equação $(x + 8) + x = 22$, em que a expressão $x + 8$ representa a idade do mais velho. Resolvendo-se esta equação, encontra-se o valor de x igual a 7, que corresponde o número da idade de João. Para encontrar a idade de Paulo basta acrescentar 8 anos na idade de João.

Como dissemos nas atividades anteriores, a dificuldade é a de se enxergar que a expressão $x + 8$ equivale à idade do mais velho, contudo, a dificuldade de colocar a expressão entre parênteses não seria problema nessa estratégia, pelo fato de não ser preciso. Por outro lado, se chamar de x a idade de Paulo, a idade de João é igual a $x – 8$ anos. Sabe-se que a soma das idades é igual a 22 anos, então, isso pode ser representado pela equação $x + (x – 8) = 22$ que tem como resultado o $x = 15$, correspondente à idade de Paulo. Logo, a idade de João é igual sete anos, por ser oito anos mais novo.

Um recurso que se pode lançar mão nesse tipo de problema é a resolução por meio de desenhos (figuras). A criança poderá abdicar de utilizar conhecimentos matemáticos e montar esquemas de forma que as unidades são representadas por “risquinhos”, “pontinhos”, “bolinhas”, “quadradinhos” ou a figura que mais lhe convir. Segundo Câmara (2008), trata-se da prática de uma matemática fortemente contextualizada, praticamente uma matemática pessoal de cada cidadão. O autor expõe que certas situações-problema podem ser resolvidas por pessoas que nunca frequentaram uma sala de aula, basta que tenham noção de contagem.

Utilizando figuras

Desenha-se 22 riscos em fila. Desconsidera-se quantos riscos for a diferença entre as idades (8 anos) objetivando fazer com que ambos tenham a mesma idade do mais novo. Como a nova soma é 14, ambos têm 7 anos em comum. Assim a idade do mais novo é 7 anos e a do mais velho 15 anos.



Atividade 5

Marcos e seu pai André têm juntos 102 anos de idade. Sabendo-se que o pai é 32 anos mais velho, encontre a idade de cada um e responda os itens abaixo:

a) Como você compreende a informação: “têm juntos 102 anos de idade”?
b) Como você compreende a informação “o pai é 32 anos mais velho”?
c) O que você fez para encontrar as idades pedidas?
d) Será que as idades que você encontrou estão corretas? Elas satisfazem as informações do problema?
e) Tem como resolver esse problema de outra maneira?

Essa atividade coloca em jogo as variáveis didáticas “tipo do enunciado” e “tamanho do coeficiente independente”. Quanto à primeira variável, apesar de essa atividade apresentar um contexto semelhante à atividade anterior, verifica-se que a forma como foram enunciadas a soma das idades e os valores das mesmas é diferente. Nessa atividade a soma das idades está implícita na informação “têm juntos 102 anos de idade” e a diferença entre as idades está implícita na informação “o pai é 32 anos mais velho”. Objetiva-se que o sujeito perceba por meio dessas informações as operações implícitas entre os valores (as idades) os quais serão descobertos por meio de estratégias de resolução. Quanto à segunda variável, aumentamos a soma das idades com o objetivo de que haja maior dificuldade de se obter os valores correspondentes às idades utilizando-se apenas tentativas ao acaso ou pares de números naturais.

A essa altura não podemos perder de vista que são dois os objetivos deste bloco quanto ao aprendizado do aluno: identificar as informações contidas no enunciado que poderão gerar as equações do sistema e sentir a necessidade de estratégias algébricas para resolver atividades desse tipo. Espera-se que, por meio das retroações que podem ocorrer nesta atividade, surjam estratégias algébricas. Entretanto, diante das dificuldades para traduzir informações escritas em linguagem natural para linguagem algébrica constatadas no teste diagnóstico, pelo menos em primeiro momento, estratégias aritméticas devem persistir.

Operações aleatórias com os valores do problema

Além das tentativas ao acaso, operações aleatórias com os valores do problema podem surgir, uma vez que as operações envolvidas estão implícitas no enunciado. Neste caso, uma hipótese, caso for utilizada essa estratégia, será somar 102 com 32 e dividir o resultado por 2 (134/2 = 67), este valor corresponde à idade do pai. A idade de Marcos corresponde ao módulo da diferença entre 102 e 67 ou ao módulo da diferença entre 67 e 32. Outra opção seria subtrair 102 de 32 e dividir o resultado por 2 (70/2 = 35), este valor corresponde à idade de Marcos. A idade do pai corresponde ao módulo da diferença entre 102 e 35 ou a soma de 35 com 32.

Algebricamente, utilizando equações do 1º grau

Uma estratégia possível de ocorrer é a algébrica, uma vez que alunos na faixa etária em que estamos investigando já aprenderam a utilizar equações do 1º grau para resolver problemas. Caso ocorra essa hipótese, pode-se considerar x como a idade de Marcos, então, pode-se considerar a idade de André é igual a $x + 32$. Como a soma das idades é igual a 102 anos, então, a equação correspondente a essa informação é $x + 32 + x = 102$. O que resulta em $x = 35$. Como x é a idade de Marcos, então, André tem 67 anos, pois é 32 anos mais velho.

Se considerar x como a idade de André, a idade de Marcos é igual a $x – 32$. Como a soma das idades é igual a 102 anos, então, a equação correspondente a essa informação é $x + x – 32 = 102$. O que resulta em $x = 67$. Como x é a idade de André, então, Marcos tem 35 anos, pois é 32 anos mais novo.

Vemos que nos dois casos dessa estratégia tem-se que considerar uma expressão literal como a idade de um dos personagens. Como dissemos nas estratégias anteriores isso poderá caracterizar dificuldade, porém, é interessante lembrar que esse conhecimento não é novo para alunos de 8º ano.

Talvez ocorra dificuldade na interpretação das informações do problema. A primeira informação “Marcos e seu pai André têm juntos 102 anos de idade” traz implícito que a idade de Marcos mais a idade de André é igual a 102 anos ou que a soma das idades de Marcos e André é igual a 102 anos. A segunda informação “o pai é 32 anos mais velho” traz implícito que a idade de André é igual à idade de Marcos mais 32 anos ou a idade de Marcos é igual à idade de André menos 32 anos ou, pode-se considerar também, que a idade de André menos a idade de Marcos é igual a 32 anos. Como dissemos, talvez ocorra dificuldade na interpretação das informações com relação às operações e ao uso do sinal de igualdade. Segundo Booth (1995), o aluno tem dificuldade em usar o sinal de igualdade indicando relação entre expressões literais ou entre expressões literais e valores numéricos.

Acredita-se também ocorrer erro de estratégia se, em um primeiro momento, subtrair 32 de 102. Nesse caso, pode-se pensar que 70, o resultado dessa diferença, é a idade do pai e 32 a idade do filho. A verificação da soma dos valores encontrados poderá reforçar nossa hipótese pelo fato de seu resultado ser 102.

Caso seja utilizada estratégia algébrica, além das dificuldades mencionadas, pode ser que ocorram erros na resolução das equações resultantes da tradução das informações para linguagem matemática. Haja vista que a maioria (64,28%) dos alunos envolvidos apresentou no teste diagnóstico dificuldades para resolver as equações propostas. Além disso, seis alunos (30%) não tentaram resolver.

Atividade 6

Num quintal há galinhas e coelhos. Há 7 cabeças e 22 pés. Quantas são as galinhas? Quantos são os coelhos? a) Quantos pés têm cada espécie? b) Agora vamos calcular quantos animais de cada espécie tem no quintal. Não se esqueça de anotar tudo que você fez para encontrar a solução. c) Verifique se o resultado encontrado satisfaz as informações do problema. d) Tem como resolver esse problema de outra maneira?

Nesta atividade estão envolvidas as variáveis didáticas “tipo do enunciado” e “coeficientes das incógnitas”. O valor da primeira variável corresponde à forma como foram enunciadas as informações. A informação “há 7 cabeças e 22 pés” tem implícita que a soma do total de galinhas com o total de coelhos é igual a 7 animais e que a soma do total de pés de galinhas com o total de pés de coelho é igual a 22 pés. Além dessas informações deve-se ficar atento à quantidade de pés que cada espécie possui. Diante disso, o valor da segunda variável corresponde à multiplicidade do total de pés de cada espécie.

Assim como ocorreu nas atividades anteriores, espera-se que as estratégias de resolução por tentativas sejam utilizadas, uma vez que o coeficiente independente da primeira informação seja pequeno, no sentido quantitativo, podendo proporcionar ao sujeito pensar em poucas hipóteses, tais como: 3 galinhas e 4 coelhos, 4 galinhas e 3 coelhos , e outras, tal que a primeira informação seja satisfeita. Pelo fato de a segunda informação ter uma soma implícita entre o produto do número de galinhas por dois e o produto do número de coelhos por quatro, poderá ocorrer dificuldade na interpretação. Entretanto, devemos levar em consideração que podem surgir outras estratégias, entre as quais podemos destacar o uso de figuras.

Utilizando figuras

Nesta estratégia, deve-se desenhar "bolinhas" ou qualquer figura que represente os animais. Como todos os animais têm pelo menos dois pés. Para facilitar, desenha-se dois riscos em cada "bolinha", representando os pés. Ao contar os riscos percebe-se 14 pés. Como são 22 pés ao todo e como não tem animal com três pés, continua-se a contagem a partir do 15 desenhando-se em cada "bolinha" mais dois riscos até atingir o total de 22. Por fim, basta agrupar as figuras com quatro riscos e as figuras com dois riscos.

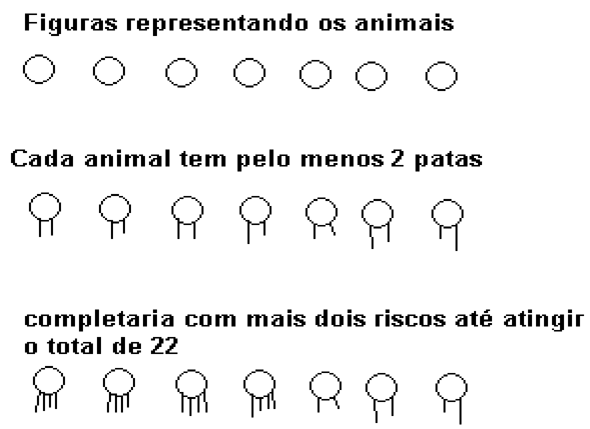


Figura 6: resolução utilizando-se figuras na atividade 6 do bloco 1

Após o agrupamento de quatro em quatro e três em três, verifica-se que são quatro coelhos e três galinhas.

Algebricamente, utilizando equações do 1º grau

Embora no teste diagnóstico tenham ocorrido dificuldades na utilização de recursos algébricos na resolução das equações propostas, devemos considerar as estratégias algébricas que podem surgir. Neste caso, se chamar de x a quantidade de galinhas, então, a quantidade de coelhos é $7 - x$. Como o total de pés é 22, então, $2x + 4(7 - x) = 22$. Ao resolver essa equação, encontra-se a quantidade de galinhas igual a 3. Com isso, a quantidade de coelhos é $7 - 3 = 4$.

Caso chame de x a quantidade de coelhos, então, a quantidade de galinhas é $7 - x$. Como o total de pés é 22, então, $4x + 2(7 - x) = 22$. Ao resolver essa equação encontra-se $x = 4$, quantidade de coelhos. Logo, o número de galinhas é $7 - 4 = 3$.

As dificuldades previstas para essa estratégia são: escrever a expressão $7 - x$ para representar o número de galinhas ou o número de coelhos, escrever as expressões $2x$ e $4(7 - x)$ para representar o número de pés de galinha e o número de pés de coelho, respectivamente, utilizar parênteses para agrupar a expressão $7 - x$ na soma, aplicar a propriedade distributiva e resolver as equações.

Quanto aos erros verificados por Freitas (2002), podemos destacar as transposições erradas dos termos de um membro para outro.

Com relação à institucionalização, devemos fazê-la ao término da última atividade do bloco. Nesse momento didático deve-se comentar as atividades do bloco e explicar o que deve ser atingido com elas, no caso, a identificação das informações do enunciado.

Quanto à necessidade de se dispor de estratégias algébricas, a institucionalização é feita no início do segundo bloco pelo fato de que esse conjunto de atividades tem como objetivo a montagem de sistemas. A institucionalização deve ocorrer quando for explicado que problemas escritos em linguagem corrente podem ser traduzidos para linguagem algébrica.

É preciso lembrar que não objetivamos a resolução das atividades propostas neste grupo. Objetivamos que os alunos aprendam a distinguir as informações que estão imbricadas no enunciado do problema por acreditarmos que o domínio desse conhecimento facilitará o uso correto das operações envolvidas na escrita das equações. Para atingir esse objetivo colocamos em jogo a variável didática “tipo do enunciado”.

A seguir apresentamos a descrição e a análise dos dados coletados na aplicação das atividades do bloco 1. Para apresentação desta análise disponibilizamos alguns excertos e protocolos com objetivo de confirmar as observações levantadas

3.3.1- Bloco 1: experimentação e análise a *posteriori*

Iniciamos as atividades deste bloco no dia 05 de outubro de 2009 utilizando apenas papel e lápis. Como nesse primeiro momento da experimentação nossa intenção era a de apresentarmos problemas escritos em linguagem natural para serem resolvidos da forma que fosse possível, utilizamos apenas o instrumento mencionado.

Tínhamos como objetivo para esse bloco de atividades que o aluno conseguisse distinguir as informações do problema; informações essas que, se o problema fosse resolvido utilizando-se sistemas, norteariam a escrita das equações. Prevendo que as estratégias utilizadas só contemplassem resoluções aritméticas onde valores são dados ao acaso até que se chegasse ao resultado, propusemos atividades diversificadas de tal forma que as variáveis didáticas pudessem levá-los a dispor de estratégias algébricas ou pelo menos sentissem a necessidade disso.

Para a análise dos dados coletados, sistematizamos os resultados em uma tabela com o objetivo de termos uma visão geral, porém ampla da produção de cada dupla.

	RP	GN	LC	AA	JY
A1	Solução por tentativa ao acaso. Identificaram as informações do problema	Solução por tentativa de pares naturais. Identificaram as informações do problema	Solução por tentativa ao acaso. Identificaram as informações do problema	Montaram uma equação, mas resolveram por tentativa. Identificaram as informações do problema	Solução por tentativa ao acaso. Identificaram as informações do problema
A2	Solução por tentativa ao acaso. Identificaram as informações do problema	Solução por tentativa ao acaso. Identificaram as informações do problema	Solução por tentativa ao acaso. Identificaram as informações do problema	Solução por tentativa ao acaso. Identificaram as informações do problema	Não conseguiram encontrar a solução. Não conseguiram Identificar as informações
A3	Solução por tentativa ao acaso. Identificaram as informações. Escreveram duas equações correspondentes às informações	Solução por tentativa ao acaso. Identificaram as informações. Escreveram duas equações correspondentes às informações	Solução por tentativa ao acaso. Identificaram as informações. Não esboçaram tentativas algébricas	Solução por tentativa ao acaso. Identificaram as informações. Não esboçaram tentativas algébricas	Não conseguiram encontrar a solução
A4	Solução por tentativa ao acaso. Identificaram as informações. Escreveram duas equações correspondentes às informações	Solução por tentativa ao acaso. Identificaram as informações. Escreveram duas equações correspondentes às informações	Solução por tentativa ao acaso. Identificaram as informações. Escreveram duas equações correspondentes às informações	Solução por tentativa ao acaso. Identificaram as informações. Não esboçaram tentativas algébricas	Solução por tentativa ao acaso. Identificaram as informações. Não esboçaram tentativas algébricas
A5	Não conseguiram encontrar a solução. Não conseguiram Identificar as informações. Subtraíram 102 de 32 e concluíram que o pai tem 70 anos e o filho 32 anos.	Não conseguiram encontrar a solução. Não conseguiram Identificar as informações. Subtraíram 102 de 32 e concluíram que o pai tem 70 anos e o filho 32 anos	Não conseguiram encontrar a solução. Não conseguiram Identificar as informações. Subtraíram 102 de 32 e concluíram que o pai tem 70 anos e o filho 32 anos	Não conseguiram encontrar a solução. Não conseguiram Identificar as informações. Subtraíram 102 de 32 e concluíram que o pai tem 70 anos e o filho 32 anos	Não conseguiram encontrar a solução. Não conseguiram Identificar as informações.
A6	Solução por tentativa. Identificaram as informações.	Solução por tentativa. Identificaram as informações.	Solução por tentativa. Identificaram as informações.	Solução por tentativa. Identificaram as informações.	Solução por tentativa. Identificaram as informações.

Quadro 3: síntese dos resultados do bloco 1

Em relação às atividades desse bloco supomos que fossem utilizadas tanto estratégias aritméticas quanto algébricas e por esquemas organizados por meio de figuras.

Quanto às estratégias algébricas, estas não ocorreram, pelo menos para encontrar a solução do problema. Contudo, observamos que depois de terem encontrado a solução por meio de tentativas ao acaso, alguns montaram uma estrutura algébrica, porém, utilizando a solução.

Quanto às estratégias aritméticas, previmos na análise a *priori* que seriam utilizadas tentativas ao acaso, tentativas de pares de números naturais e operações com os valores do problema. As operações com os valores do problema não ocorreram, entretanto, as tentativas ao acaso figuraram com maior frequência. Eles realizaram operações de somar e subtrair no verso da folha até chegar à resposta correta.

A maioria resolveu as atividades por tentativas ao acaso, porém a dupla GN foi mais organizada ao colocar em uma coluna as operações com valores que satisfazem a primeira informação e em outra coluna as operações que satisfazem a segunda informação. Esse fato pode ser percebido na atividade 1: "... encontrar dois números cuja soma é igual a 17 e a diferença entre esses números seja igual 5." A dupla GN organizou os cálculos da seguinte forma:

15 + 2 = 17	17 – 12 = 5
13 + 4 = 17	10 – 5 = 5
10 + 7 = 17	15 – 10 = 5
9 + 8 = 17	13 – 8 = 5
11 + 6 = 17	11 – 6 = 5

Percebe-se que as meninas que compõem essa dupla fixaram os termos 17 e 5 e testaram, linha a linha, valores cuja soma e diferença dão respectivamente os números mencionados até que se chegou a um resultado comum 11 e 6. Apesar de considerarmos essa estratégia como sendo por tentativa ao acaso, a forma como fizeram não foi prevista na análise a *priori*. Tínhamos previsto que: pensava-se em dois valores cuja soma é igual a 17 e testava-se se a diferença entre eles é igual a 5, ou seja pensa-se na soma e imediatamente verificava-se a diferença até que se encontre os números que satisfazem as duas informações do problema.

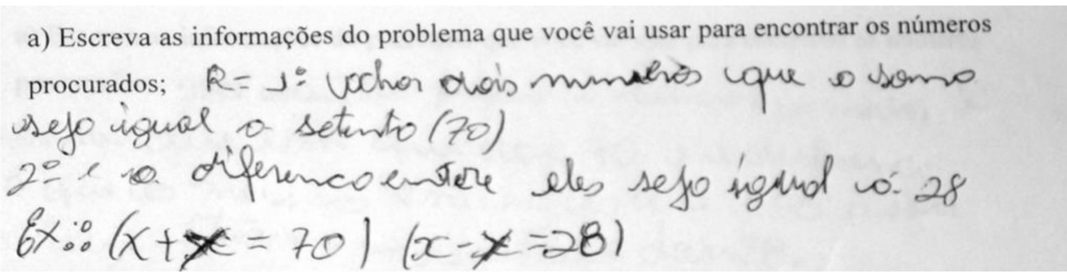
Nenhuma das seis atividades foi resolvida de outra forma. Entretanto, diante das dificuldades impostas pelas variáveis didáticas "coeficientes das incógnitas" e "tipo do coeficiente independente", alguns alunos tentaram resolver algebricamente. Em alguns casos montaram satisfatoriamente as equações, porém, não sabiam o que fazer com as expressões com duas incógnitas. A dupla RP ao ser questionada se existe outra forma de resolver o problema da atividade 2 "encontre dois números cuja a soma é igual a 70 e a diferença entre eles é igual a 28", em princípio, disse que não, entretanto, após alguns minutos esperando que as outras duplas encontrassem a resposta, para nossa surpresa, quando voltamos à mesa de

RP, percebemos que tinham escrito as equações: x + x = 70 e x – x = 28. Ao tentar resolvê-las, buscando chegar ao resultado já conhecido, percebemos que ficaram frustrados por não saberem o que fazer. Para evitar a desistência precoce e prolongar o momento *adidático*, estabelecemos um diálogo com a dupla sempre procurando evitar dar dicas.

> F: O que é isso que vocês escreveram?
> RP: Sei lá, professor, acho que é uma equação...
> F: Mas são duas equações. O que esses x representam?
> RP: Ah! São os números procurados... Hum! Não estou entendendo mais nada, já encontramos a resposta, vai dar 49 e 21. O senhor... (pausa) está complicando muito.
> F: Calma, meninos, quem sabe vocês estão no caminho certo. Só não estou entendendo uma coisa. Se x representa os números procurados vocês estão dizendo que eles são iguais. Analisem a segunda equação, quanto é x menos x?
> RP: Hum! É verdade, as letras não podem ser iguais, porque senão não satisfaz a segunda informação, porque tem que dar 28 e não zero.

A partir desse diálogo procuramos saber o que as outras duplas estavam fazendo e vimos que alguns ainda não tinham encontrado a resposta. Nesse momento, pedimos que promovessem discussões entre as duplas. Aliás, isso já tinha sido combinado no primeiro dia, porém, isso só ocorria quando havia um pedido nosso. Em alguns momentos sentimos que havia disputa entre as duplas. Para contornar essa situação em favor do bom andamento de nossa experiência, propusemos que, quem resolvesse primeiro poderia explicar como fez para os demais.

Voltando ao caso da dupla RP, após alguns minutos de discussão, retornamos para verificar o que tinham feito com as equações. Com isso, percebemos que o diálogo promovido foi proveitoso ao verificarmos que tinham refletido sobre o que estavam fazendo de errado. Errado no sentido em que estavam associando números diferentes a uma mesma letra. A reflexão da dupla fez com que as equações fossem escritas de forma correta, ao substituir o x pelo y. Desta forma a dupla RP mostrou que estava ciente que valores diferentes não podem ser representados por letras iguais. O protocolo a seguir confirma o que estamos dizendo.


a) Escreva as informações do problema que você vai usar para encontrar os números procurados; R= 1º: Achar dois números que a soma seja igual a setenta (70)
2º: e a diferença entre eles seja igual a: 28
Ex:: (x + ~~x~~ = 70) (x - ~~x~~ = 28)

Protocolo 1: observação da resolução no papel e lápis da atividade 2 do bloco 1

Embora a dupla RP não tenha manifestado a necessidade de resolver o problema utilizando estratégia algébrica, a estrutura que ela escreveu mostra que é possível a aprendizagem da resolução de sistemas de equações. É oportuno salientarmos que a escrita da estrutura citada só ocorreu depois de os sujeitos terem sido questionados se existia outra forma de resolver o problema. Isso, talvez, se deve ao fato de esses alunos já terem, teoricamente, vivido, no ano anterior, situações em que utilizavam a escrita de equações do 1º grau com uma incógnita para resolver problemas contextualizados. Isso explica o porquê de eles, em um primeiro momento, terem colocado só “x” nas expressões cujo conjunto das mesmas, posteriormente, se assemelhou a um sistema.

Na atividade 3 a dupla RP, assim como as outras, resolveu por tentativas, porém, ao analisarmos a folha que nos foi entregue vimos que tinha um esboço da resolução de um sistema pelo método da adição. Eles montaram duas equações $x + y = 11$ e $x - y = 2$. Pensamos que estavam tentando resolver pelo método comentado, pelo fato de terem colocado uma sobre a outra, assim como fazemos quando escrevemos um sistema, e riscado os y com sinais opostos. Devolvemos a folha para eles e perguntamos:

> F: O que vocês estavam pensando com essas equações?
> RP: Que equações, professor?
> F: Ué! Essas aqui. (apontamos com o dedo na folha)
> RP: É que o x e o y de cima representa a soma e o x e o y de baixo representa a diferença.
> F: Achei que estavam tentando resolver as equações porque embaixo aparece os valores procurados.
> RP: Não. É que o x de cima é o 7. O y de cima é 4. A soma é 11, então, o x de baixo só pode ser 14 e o y de baixo o 12. A diferença é 2. Então ta certo.

Nesse momento entendemos que se tratava apenas de um esquema onde, na primeira equação x e y representam os números procurados e na segunda x representava o dobro e y o triplo, ou seja, $x = 2x$ e $y = 3y$.

> F: Mas como o x pode representar dois números diferentes ao mesmo tempo? O y também, como pode representar dois números diferentes?
> RP: Ah! Professor. O senhor ta complicando, de novo!
> F: Mas na outra atividade vocês descobriram onde estava o erro.
> RP: É verdade, ta estranho isso aqui (um menino sussurra para o outro).
> F: Olha, novamente vocês podem estar no caminho certo. Os valores estão corretos, porém, esse esquema que montaram não está de acordo com o que o enunciado está informando, pensem um pouco mais.

Minutos após essa conversa eles entregaram a folha com um esquema de resolução parecido com o que tinham feito, porém este tinha as equações escritas de maneira correta. Ao recolher as folhas das outras duplas percebemos que algumas traziam resolução semelhante à de RP. A dupla RP deve ter compartilhado o resultado encontrado com as outras duplas.

Acreditamos que a essa altura já se tinha alguma ideia de que se precisa de um recurso algébrico para resolver esse tipo de problema, à medida que os enunciados foram sendo modificados. Mesmo sem ainda conhecer como se escreve e o que é, implicitamente a dupla RP Escreveu uma estrutura semelhante a de um sistema de equações e a resolveu por tentativas.

Apesar da mudança de contexto, a atividade 4 “a soma das idades de Paulo e João é igual a 22 anos. A diferença entre a idade de Paulo e a idade de João é igual a 8 anos [...]” não apresentou nenhuma dificuldade para encontrarem sua solução. Nas folhas que nos foram devolvidas encontramos algumas operações onde valores eram testados até que se chegasse à solução. A dupla RP, tal como fez na atividade anterior, escreveu duas equações de acordo com as informações do enunciado do problema, embora não tivesse resolvido, colocou a resposta como se estivesse resolvido ($x = 15$ e $y = 7$). Eles encontraram esses valores com poucas tentativas. Prevendo que encontrassem a solução com facilidade por tentativa, colocamos na folha a seguinte pergunta: “será que existe outra maneira de encontrar os números procurados?”. Para nossa surpresa, a dupla AA, posteriormente seguida pelas duplas GN, LC e JY, tenta utilizar a definição da soma dos ângulos internos de um triângulo. Os alunos desenharam um triângulo com os valores x, 15 e 7 no lugar dos ângulos. Posteriormente fizeram alguns cálculos que não levava a nenhum resultado. Acreditamos que isso se deve ao fato de esses alunos terem tido contato com esse conteúdo antes da experimentação. Dessa vez não os questionamos a respeito do que estavam pensando já que isso poderia gerar perda de tempo, uma vez que estavam utilizando um resultado já sabido, no caso os valores encontrados por tentativa, para encontrar os próprios valores. Diante disso, após promovermos um pequeno debate a respeito do que o problema pedia e o que eles encontraram, passamos à próxima atividade.

A atividade 5 “Marcos e seu pai André têm juntos 102 anos de idade. Sabendo-se que o pai é 32 anos mais velho, encontre a idade de cada um e responda os itens abaixo”, assim como na atividade anterior, não demandou muito tempo. Em poucos minutos as duplas devolveram as folhas com a resposta. Entretanto, tal como foi previsto na análise a *priori*, houve um entendimento errado do enunciado. Eles subtraíram 102 de 32 e aceitaram como resposta 70 anos para André e 32 anos para Marcos. Procuramos nos registros de áudio em que as alunas da dupla GN discutem o que estavam pensando sobre a forma utilizada.

> G: acho que Marcos tem 32 anos e André tem 70 anos...
> N: por que eles têm essas idades, como você sabe?
> G: a soma das idades é 102 anos, 32 + 70 dá 102, nê!

> N: mas e a outra informação? Ta dizendo que o pai é 32 anos mais velho, você não está vendo?
> G: então, 102 – 32 da 70.

Percebemos pelo excerto que as alunas conseguiram compreender o significado da frase "têm juntos 102 anos de idade", entretanto, talvez tenham pensado que a idade do filho fosse 32 anos, uma vez que procuraram descobrir a quantidade que faltava para 102. Quando a aluna N questionou a aluna G sobre a outra informação, G justificou erradamente que 102 – 32 = 70. Elas não refletiram sobre os resultados encontrados, uma vez que a informação "o pai é 32 anos mais velho" tem implícito que a diferença entre a idade do pai e a idade do filho é 32 anos, ou a idade do filho mais 32 anos é igual a idade do pai. Talvez, se na realização dessa atividade tivéssemos promovido uma discussão sobre os resultados encontrados, esse equívoco não teria ocorrido. Entretanto, embora não tivessem encontrado a resposta correta, podemos perceber que estavam conseguindo distinguir as informações imbricadas no enunciado quando a aluna G informa à colega que a soma das idades é igual a 102 anos. Também podemos perceber isso na resposta da aluna G à pergunta de N "mas e a outra informação?". Apesar de G ter confundido, ela sabia que 32 anos é a diferença de idade entre pai e filho.

O enunciado da atividade 6 é "num quintal há galinhas e coelhos. Há 7 cabeças e 22 pés. Quantas são as galinhas? Quantos são os coelhos?". Foi utilizada quase toda aula nessa atividade e, a quantidade de cada espécie foi encontrada por tentativa. Em um primeiro momento a dupla RP pensou em três coelhos e quatro galinhas. Ao verificarem a segunda informação constataram que para essa quantidade de animais o número de pés seria 20. Em um segundo momento pensou-se em cinco coelhos e duas galinhas o que também não satisfez a segunda informação, pois, nesse caso, seriam vinte e quatro pés; 20 dos coelhos e 4 das galinhas. Na terceira tentativa a dupla conseguiu chegar à resposta correta ao verificar que quatro coelhos e três galinhas têm 22 pés. Acreditamos que a facilidade em resolver essa atividade se deve ao fato da primeira informação apresentar a quantidade de animais pequena. Com poucas tentativas chegou-se aos valores 4 e 3 para coelhos e galinhas, respectivamente. Na análise a *priori* previmos que seriam utilizadas estratégias algébricas e por figuras. Isso não ocorreu talvez pelo fato de terem encontrado o resultado por tentativa com certa facilidade. Assim como nas atividades anteriores alguns esboçaram resolução algébrica, porém como sabiam a resposta, isso os desmotivou a tentar de outra forma.

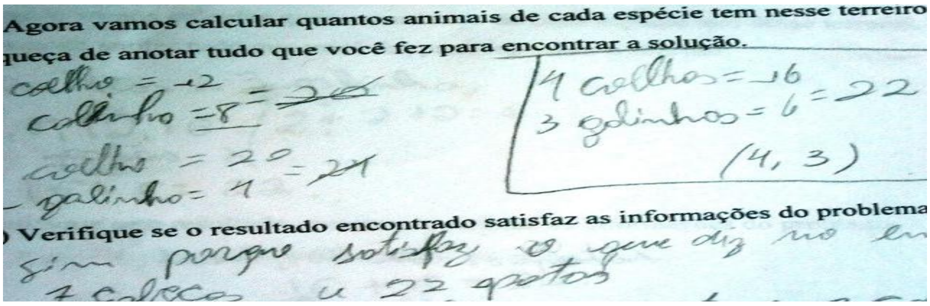
Quando criamos as atividades desse bloco, pensamos em um grupo de alunos que devido ao nível de escolaridade em que se encontravam, poderia surgir alguma estratégia algébrica, haja vista que, teoricamente, eles já tenham se deparado com situações que envolvia a escrita de expressões algébricas. Na análise a *priori* previmos isso, entretanto, o conhecimento que utilizaram efetivamente foi o aritmético. Em certos momentos houve algum esboço da montagem de equações, porém, mesmo escrevendo corretamente as expressões algébricas viu-se que não souberam o que fazer com elas.

O primeiro objetivo desse bloco, distinguir as informações no enunciado do problema, foi atingido. Apesar de terem resolvido aritmeticamente por tentativa ao acaso, percebe-se que a correta obtenção dos valores justifica o aprendizado. Isso se evidencia na própria resolução, pois, as tentativas registradas mostram que os sujeitos sabiam o que estavam procurando. Pode-se pegar como exemplo a atividade 6 “num quintal há galinhas e coelhos. Há 7 cabeças e 22 pés. Quantas são as galinhas? Quantos são os coelhos?”. Percebemos que os alunos souberam identificar que a soma do número de galinhas com o número de coelhos é igual a sete animais na frase “há 7 cabeças”. Na análise a *priori* previmos que teriam dificuldade para identificar a segunda informação pelo fato de ter que se lembrar de multiplicar por dois o número de pés de galinhas e por quatro o número de pés de coelhos. Isso não ocorreu. A partir do momento em que um par de valores cuja soma é igual sete era lembrado, imediatamente esses números eram testados visando à satisfação da segunda informação. Antes, porém, o número procurado o qual poderia ser a quantidade de galinhas era multiplicado por dois e o número procurado o qual poderia ser a quantidade de coelhos era multiplicado por quatro. Caso a soma não desse 22, pegava-se outro par de valores. Isso se verifica na transcrição da gravação do diálogo entre os alunos da dupla RP.

> R: Acho que deve ser 3 coelhos e 4 galinhas.
> P: Como você sabe?
> R: Porque 3 com 4 dá 7.
> P: Mas tem que ter 22 pés, você não tá vendo a segunda informação? Mas agora é só verificar.
> R: Como?
> P: Ué! Se são 3 coelhos então são 12 pés porque coelhos têm quatro pés. Se são 4 galinhas então são 8 pés porque galinhas têm duas pés. Aí 12 com 8 dá 20 pés. Hum! Quantos pés tem que dar?
> R: vinte e duas
> P: Então vamos tentar 5 coelhos e 2 galinhas.

Percebemos no excerto que a dupla identificou as duas informações do enunciado; o aluno P complementa com a frase “[...] você não tá vendo a segunda informação?”. Podemos identificar que, em um primeiro momento, houve uma ação acompanhada de um início de formulação.

O aluno R identificou a soma implícita na informação “há 7 cabeças”, porém, o par de valores não levou à solução, pois, coube ao aluno P buscar a validação dos números pensados pelo aluno R. Salientamos que, embora tenham resolvido por tentativa ao acaso, eles estavam conseguindo identificar as informações do problema. O protocolo a seguir corrobora o que estamos dizendo.

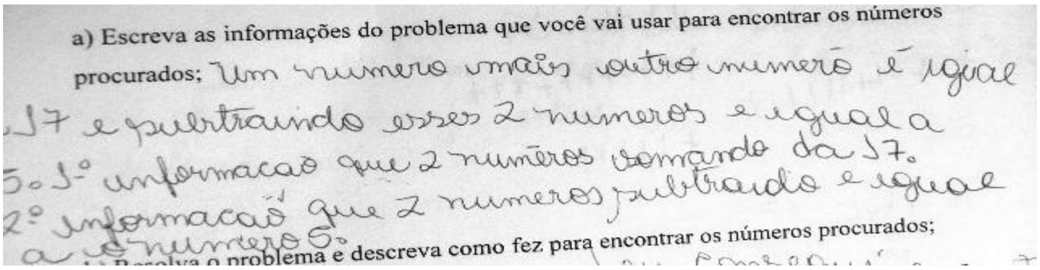

Agora vamos calcular quantos animais de cada espécie tem nesse terreiro
queça de anotar tudo que você fez para encontrar a solução.
coelho = 12
colinho = 8 = ~~20~~
coelho = 20
galinho = 1 = 21
4 coelhos = 16
3 galinhos = 6 = 22
(4, 3)
Verifique se o resultado encontrado satisfaz as informações do problema
sim porque satisfaz o que diz no
7 cabeças e 22 patas

Protocolo 2: resolução da atividade 6 do bloco 1 pela dupla RP

As tentativas só cessaram quando a segunda informação foi satisfeita. Percebe-se que foram poucas tentativas para se conseguir a resposta correta. Talvez tenhamos subestimado esses alunos ao colocarmos um valor tão pequeno para o número de animais. Entretanto, nossa intenção ao propormos essas atividades não era o resultado da resolução propriamente dito e sim a construção do conhecimento em interpretar as informações do problema; conhecimento esse a ser utilizado na resolução das atividades dos blocos 2 e 4.

Embora em poucos momentos tivéssemos que interferir quando sentimos que estavam estagnados por não conseguirem a solução, houve vários momentos *adidáticos*. Podemos voltar ao excerto da resolução da atividade 6 quando o aluno R, em um primeiro momento, informou que tinha encontrado a solução do problema, ao conjecturar que eram 3 galinhas e 4 coelhos pelo fato de estes valores satisfazerem a primeira informação. Identificamos que as ações ocorreram a partir do momento em que assumiram a responsabilidade de resolver o problema, no sentido em que não foram feitas perguntas como: “como é que faz professor?” e “você vai explicar?”. Analisando as resoluções, observamos que em alguns momentos podem ter ocorrido formulações seguidas de validações. Na atividade 6 os diálogos mostraram que embora estivessem resolvendo por tentativas, o aluno P buscou verificar a solução proposta pelo aluno R e para isso ele procura respeitar a sintaxe da segunda informação. Vemos que o aluno P aceita os valores, porém, verifica se satisfazem a segunda informação. A validação ocorre efetivamente quando a segunda informação é finalmente satisfeita. Como dissemos, embora estivessem resolvendo por tentativa, vemos pelos diálogos que sabiam o que estavam procurando, no caso, a solução do problema.

Ao término da aplicação das atividades desse bloco fizemos a institucionalização. Em um primeiro momento foram discutidas as respostas escritas na folha que lhes foram entregue. O protocolo da atividade 1 retirado da folha de respostas das alunas da dupla LC ilustra bem o que estamos dizendo.



a) Escreva as informações do problema que você vai usar para encontrar os números procurados; Um numero mais outro numero é igual 17 e subtraindo esses 2 numeros e igual a 5. 1º informacao que 2 numeros somando da 17. 2º informacao que 2 numeros subtraido e igual a numero 5.

b) Resolva o problema e descreva como fez para encontrar os números procurados;

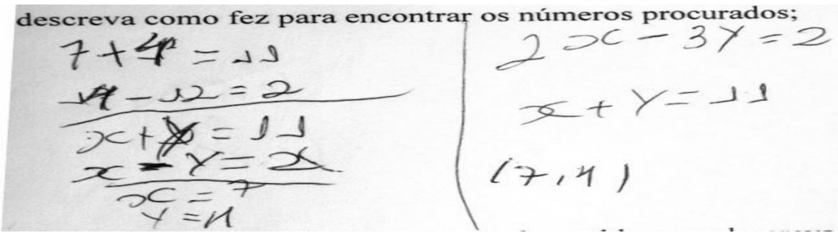
Protocolo 3: registro escrito da dupla LC sobre as informações da atividade 1 do bloco 1

Apesar de terem dificuldade de expressar por meio da escrita o que queriam dizer, elas deixaram claro, durante as discussões, que as informações extraídas do enunciado as levou a encontrar a solução do problema. Podemos perceber no protocolo que as alunas além de identificar as informações, as ordenaram. Os debates sobre as respostas apresentadas nas folhas proporcionaram uma melhor reflexão quanto ao que estavam pensando no instante em que mostramos a importância de separar as informações. Deixamos claro que para resolver certos tipos de problemas, primeiramente precisávamos detectar no enunciado as frases que nos nortearia a utilizar as operações corretas. Aproveitamos para trabalhar a atividade 5 “Marcos e seu pai André têm juntos 102 anos de idade. Sabendo-se que o pai é 32 mais velho, encontre a idade de cada um”, pois, a interpretação errada das informações geraram uma resolução errada. Chamamos a atenção que todos entenderam a frase “[...] têm juntos 102 anos de idade.”. Porém, não entenderam a frase “[...] o pai é 32 anos mais velho,”. Explicamos que essa era a segunda informação. Que poderia ter sido interpretada da seguinte forma: “a idade do pai menos a idade do filho é igual a 32 anos” ou “a idade do pai é igual a idade do filho mais 32 anos” ou “ a idade do filho é igual a idade do pai menos 32 anos”. Nesse momento fomos à lousa e escrevemos todas essas interpretações.

O segundo objetivo desse bloco de atividades que teve como foco levá-los a sentirem a necessidade de resolver as atividades por meio de algum recurso algébrico não foi atingido completamente. Isso se deve, talvez pela falta de atividades que tivessem um grau maior de dificuldade, uma vez que com poucas tentativas eles conseguiram encontrar a resposta. Faltou para esse bloco valores para as variáveis didáticas que levassem a atingir essa meta. Talvez se tivéssemos aumentado o valor da variável “tamanho do coeficiente independente”, bem como situações em que a variável “coeficiente da incógnita” figurasse nas duas informações, estratégias algébricas poderiam ter, pelo menos, espontaneamente sido esboçadas.

De um modo geral, apesar da necessidade de se dispor de um recurso algébrico para resolver as atividades, à medida que foram questionados se há outra forma de resolver, alguns apresentaram expressões algébricas bem interessantes. Expressões essas que se bem trabalhadas no segundo bloco poderá facilitar na montagem dos sistemas diante da correta interpretação das informações.

A seguir apresentamos como exemplo um protocolo extraído da resolução da atividade 3 da dupla RP o qual poderá confirmar o que estamos falando.



Protocolo 4: resolução da atividade 3 do bloco 1 pela dupla RP

Assim como comentamos anteriormente, inicialmente a dupla não considerou o dobro de x e o triplo de y na segunda informação. Porém, após devolvermos a folha eles perceberam o erro e escreveram uma expressão parecida com o sistema cujas equações satisfazem as informações da atividade.

Na institucionalização citada procuramos chamar-lhes a atenção quanto à necessidade de em certas situações lançarem mão de recursos algébricos. Recursos esses que poderão fazer com que o sujeito consiga por meio da tradução do enunciado de um problema escrever equações de acordo com a sintaxe das informações imbricadas no enunciado. Na institucionalização chamamos-lhes a atenção quanto a identificação das informações no enunciado do problema, porém, apenas comentamos e relembramos que tinham aprendido no ano anterior a resolver situações-problema por meio da escrita e resolução de equações do 1º grau. Desta forma, comentamos apenas alguns casos que envolvem a escrita de equações do 1º grau, objetivando com isso, não prejudicar o trabalho no próximo bloco.

3.4 Bloco 2: análise a *priori* das atividades

Objetiva-se com as atividades deste bloco a aprendizagem da escrita de sistemas de equações por meio da tradução das informações escritas em linguagem materna para linguagem algébrica, porém, sem resolvê-los.

Em um primeiro momento, colocamos duas atividades, de contexto algébrico, as quais o aluno possa escrever, separadamente, apenas as equações.

Em um segundo momento, institucionalizamos o significado de sistema para que o aluno possa visualizar como é estruturado este conceito. Devemos explicar ao leitor o porquê de termos optado em apresentar ao aluno o que é um sistema de equações se nossa intenção é a de que surjam situações *adidáticas*. Para isso, devemos mostrar-lhes onde deverão chegar. Ou seja, devemos apresentar-lhes a forma como representamos sistemas de equações. Devemos salientar que o conhecimento novo em jogo neste bloco de atividades é escrever sistemas de equações do 1º grau.

Em um terceiro momento, propomos uma atividade de contexto social, na qual o aluno deverá montar a primeira equação no item “a”, a segunda equação no item “b” e no item “c” escrever o sistema formado pelas equações dos itens anteriores. Em um quarto momento, a atividade proposta, também de contexto social, trata a modelagem dessa situação por um sistema de duas equações.

As primeiras atividades deste bloco sugerem que sejam escritas as equações que vão constituir o sistema, porém, as atividades seguintes são propostas de modo que o próprio aluno perceba que deve traduzir as informações em forma de sistemas de equações.

Neste bloco *priori*zamos que as atividades sejam resolvidas no *software Aplusix*. Entretanto, papel e lápis também devem ser utilizados, uma vez que o uso desses recursos como registro, juntamente com as gravações dos discursos facilita as análises dos resultados obtidos.

Espera-se, nesse momento, que o aluno tenha o conhecimento adquirido no bloco anterior e que, devido ao nível em que se encontra, seja capaz de modelar situações envolvendo equações do 1º grau, conteúdo que foi ensinado no ano anterior.

Atividade 1

Dados dois números quaisquer, chame um de x e o outro de y. Em seguida, traduza as informações abaixo, sobre esses dois números, para linguagem matemática:

a) a soma desses dois números é igual a 15;
b) a diferença entre esses dois números é igual a 3.

Nesta atividade a variável didática “tipo do enunciado” assume o valor da forma como enunciamos a atividade. Objetiva-se que sejam escritas as equações, porém, sem menção a sistemas.

O próprio enunciado sugere que o aluno chame de x uma incógnita e y a outra. Logo, uma provável maneira de escrever as equações pode ser: no item “a” escrever a soma dos números representados pelas letras citadas, igualando a expressão a 15 e no item “b” escrever a diferença entre os números representados por x e y, igualando a expressão a 3. $x + y = 15$ é a equação esperada no item “a” e $x – y = 3$ é a equação esperada para o item “b”.

As dificuldades que podem surgir, verificadas na pesquisa de Booth (1995), estão relacionadas às operações com letras e uso de sinal de igualdade. Quanto a equacionar situações-problema escritas em linguagem natural, Lochhead e Mestre (1995) verificaram essa dificuldade. Diante disso, as atividades devem ser propostas de forma que o pensamento algébrico seja construído gradativamente.

As possíveis ações erradas dos alunos serão seguidas de retroações do *Aplusix*, uma vez que o *software* está configurado para retroagir a cada passo dado durante a resolução. Espera-se que haja reflexões do sujeito, quando isso ocorrer, para que possa pensar em uma estratégia que o leve à correta escrita das equações. De acordo com Brousseau (2009), o processo de construção do conhecimento deve considerar os erros, pois, se o estudante não comete erro, não poderá saber se a forma como imaginou a resolução não funciona ou funciona.

Atividade 2

Dados dois números x e y, escreva as equações do 1º grau com duas incógnitas correspondentes às seguintes situações:
a) o dobro de x mais o triplo de y é igual a 21; b) o quádruplo de x menos y é igual a 7.

Nesta atividade estão envolvidas as variáveis didáticas “tipo do enunciado” e “coeficientes das incógnitas”. A primeira variável assume o valor da forma como enunciamos a atividade. Inspirada no livro didático ao propor situações em que sejam trabalhadas em um primeiro momento equações com duas variáveis. A segunda variável assume o valor correspondente à multiplicidade dobro e triplo, no item “a” e quádruplo no item “b”.

No item “a” o aluno deverá representar o dobro de x por 2x e o triplo de y por 3y e depois, escrever a soma dos termos e igualar a 21 ($2x + 3y = 21$). No item “b”, o aluno deverá representar o quádruplo de x por 4x. Depois, escrever a subtração dos termos e igualar a 7 ($4x – y = 7$).

As dificuldades que podem surgir estão relacionadas às operações com letras, uso correto do sinal de igualdade e equacionamento das informações enunciadas. Quanto aos coeficientes das incógnitas, em nossa experiência docente percebemos que quando pedimos ao aluno o dobro, o triplo, a metade, ou o quádruplo de um número dado, geralmente tem-se a resposta correta, uma vez que a resposta corresponde a um número, resultado de uma multiplicação ou divisão. Quando o número é representado por uma letra, isso não é tão fácil para o aluno imaginar e escrever. Por exemplo: quando se pede o triplo de 4, quase que de imediato a pessoa questionada responde 12, talvez a única dificuldade seja lembrar quanto é três vezes quatro. Entretanto, quando se pede o triplo de x, talvez a pessoa rebata com outra pergunta: quanto vale x?

Segundo Booth (1995), algumas dificuldades de aprendizagem da Álgebra podem ter origem na aprendizagem da Aritmética. Talvez isso ocorra pelo fato de o professor, por exemplo, ter apresentado o valor 12 ao pedir o triplo de quatro, quando poderia ter trabalho uma etapa intermediária (3x4) visando à escrita genérica desse conceito.

No teste diagnóstico as atividades 11 e 13 são semelhantes a esta atividade no sentido em que se referem à multiplicidade dos termos das expressões. Porém, a maioria (57,9%) dos alunos que responderam acertou a atividade 11, que consistia em escrever a expressão algébrica correspondente à informação "o dobro de x mais o triplo de y". Entretanto, não houve nenhum acerto dos que responderam a atividade 13, que consistia em escrever a expressão correspondente à informação "a soma do dobro de x com y é igual a 15". Vemos que as dificuldades estão relacionadas à forma como foi enunciada a atividade 13, uma vez que a operação de adição se apresentava de maneira diferente à da atividade 11. Outro fator que pode ter causado os erros se deve ao fato da atividade 13 estar se referindo a uma equação. De acordo com Booth (1995), alunos nessa faixa etária têm dificuldade em trabalhar com igualdade entre expressões. Estas dificuldades podem se manifestar nas ações dos alunos durante as resoluções, entretanto, o *Aplusix* como constituinte do meio *adidático*, ao fornecer retroações, poderá fazer com que a frequência dos tipos de erros citados diminua ao longo da experimentação. Com isso, as dificuldades deverão se restringir aos conceitos novos para esses alunos. Neste caso, as variáveis didáticas deverão cumprir seu papel, favorecendo a mudança de estratégia.

Institucionalização do conceito

Objetivamos com essa apresentação a familiarização do aluno com o conceito e com a forma de escrita de sistema de equações, uma vez que nosso objetivo nesse bloco é a aprendizagem da tradução das informações em forma de sistemas e não a forma como os representamos.

Sistema de equações de 1º grau é um conjunto formado por duas equações do 1º grau. São várias as formas de representação de um sistema, a mais usual é a que colocamos as equações em duas linhas paralelas precedendo do símbolo "chave". Veja os dois sistemas representados abaixo:
$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x + y = 6 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$

Após a apresentação da forma como se devem escrever os dispositivos algébricos visados neste bloco, passamos, então, às atividades cujo objetivo é a escrita correta dos sistemas de equações do 1º grau que correspondem à tradução das informações apresentadas em linguagem natural para linguagem matemática.

Atividade 3

Carlinhos e Celso têm juntos 201 figurinhas. Carlinhos tem o dobro de figurinhas de Celso. Com base nessas informações, responda os itens abaixo:
a) se você chamar de x a quantidade de figurinhas de Carlinhos e y a quantidade de figurinhas de Celso, como poderia escrever uma equação do 1º grau com duas incógnitas que representa a primeira informação? b) como poderia escrever uma equação do 1º grau com duas incógnitas que representa a segunda afirmação? c) como você poderia escrever um sistema de equações que representa as duas afirmações?

Estão em jogo nesta atividade as variáveis didáticas "tipo do enunciado" e "coeficientes das incógnitas". A primeira variável assume o valor da forma como são enunciadas as informações e a segunda assume o valor dobro de y na segunda informação.

No item "a" para escrever a equação, deve-se igualar a soma de x com y a 201, pois, os dois meninos têm 201 figurinhas (x + y = 201). No item "b", igualar x ao produto de dois por y, pois, Carlinhos tem o dobro de figurinha de Celso (x = 2y). No item "c", escrever o sistema, colocando na primeira linha a primeira equação e na segunda linha a segunda equação ($\begin{cases} x + y = 201 \\ x = 2y \end{cases}$).

Entre os erros e dificuldades que podem surgir, destacamos: somar duas letras e juntá-las como se fosse um produto (xy = 201); achar que dobro é quatro vezes ou achar que o dobro de y é y mais dois (x = y + 2); devida a ordem das instruções da segunda informação "Carlinhos tem o dobro de figurinhas de Celso", escrever a segunda equação 2x = y ou y = 2x.

A previsão desses erros se justifica pelos resultados apresentados na resolução da atividade 14 do teste diagnóstico, o qual enunciava: "y é igual ao triplo de x". Os referidos erros estão transcritos no quadro a seguir:

3y 3x	*3y.3x = 9xy*	*3y + 3x*	*3xy*	*x = 3x*

Vemos que, apesar da diferença de contexto, a segunda informação da atividade 3 deste bloco se assemelha à atividade 14 do teste diagnóstico na escrita das equações. Acreditamos que a dificuldade da passagem da linguagem natural para linguagem algébrica da atividade 3 seja maior; a atividade 14 apresenta uma ordem explícita das instruções, isto está implícito na atividade 3.

Por favorecer a autonomia do sujeito, espera-se que as retroações do *Aplusix* façam com que possíveis dificuldades ocorram, na maioria, apenas na ultrapassagem das turbulências entre o conhecimento antigo e o conhecimento novo.

Atividade 4

A soma das idades de Paulo e João é igual a 22 anos. A diferença entre a idade de Paulo e a idade de João é igual a 8 anos.
a) identifique as informações no problema, escreva as equações e monte um sistema correspondente; b) é possível verificar se o sistema montado corresponde às informações do problema? Explique por escrito

Nesta atividade a variável didática “tipo do enunciado” assume o valor da forma como foram colocadas as informações. Ao invés de colocar “a idade de Paulo mais a idade de João” e “a idade de Paulo menos a idade de João”, sugerindo assim a ordem das instruções contidas nas informações, colocou-se “a soma das...” e “a diferença entre...”, objetivando-se com isso a aprendizagem na interpretação das frases que irão gerar as equações.

A estratégia de escrita do sistema está diretamente ligada à correta interpretação das frases do enunciado que irão gerar as equações. Apesar de não terem sido sugeridas as letras que irão representar as idades dos personagens, deve-se considerar como a idade de Paulo a letra x e a idade de João a letra y, uma vez que nas atividades anteriores isso vem sendo feito. Diante disso, deve-se compreender que a primeira informação, representada pela soma das idades, deve ser escrita da seguinte forma: x + y = 22. A segunda informação, representada pela diferença das idades, deve ser escrita da seguinte forma, sem que haja troca das letras: x – y = 8. Nestas condições, o sistema resultante deve ser representado por $\begin{cases} x + y = 22 \\ x - y = 8 \end{cases}$.

As dificuldades e erros que podem surgir estão relacionadas à escrita das equações, uma vez que esses sujeitos apresentaram dificuldades em traduzir informações para linguagem matemática no teste diagnóstico. Entretanto, pelo fato de a tradução das duas informações em forma de equações serem uma soma “direta” e uma diferença “direta”, no sentido em que os coeficientes de x e y são iguais a 1, acreditamos que não haja persistência nas dificuldades.

Atividade 5

Uma fábrica produz carrinhos de bebê e triciclos. Hoje produziram 11 unidades e para montá-las usaram 40 rodas. a) identifique as informações no problema e monte um sistema de equações; b) como você sabe se o sistema está correto?

Nesta atividade a variável didática “tipo do enunciado” assume o valor da forma como colocamos as informações. Deve-se ficar atento ao fato de que existe uma soma implícita na informação “hoje produziram 11 unidades”, bem como na informação “usaram 40 rodas”. A segunda informação, no entanto, tem implícito que se deve considerar uma soma de um múltiplo de quatro com um múltiplo de três, uma vez que carrinho de bebê tem quatro rodas e triciclo tem três. Diante disso, a variável “coeficientes das incógnitas” assume o valor quádruplo e triplo, respectivamente.

Outro diferencial dessa atividade em relação às outras deste bloco com relação à primeira variável se deve ao fato de não termos sugerido as letras das incógnitas, no caso, caberá ao aluno essa escolha.

Caso as incógnitas sejam nomeadas como sendo x e y o número de carrinhos e o número de triciclos, respectivamente, a montagem do sistema deverá ser feita da seguinte maneira: Para montar a primeira equação deve-se escrever a soma de x e y e igualar a expressão a 11, pois, foram produzidas 11 unidades entre carrinhos e triciclos. A equação esperada é x + y = 11. Para escrever a segunda equação deve-se levar em consideração que cada carrinho tem 4 rodas e cada triciclo tem 3 rodas, então, o número total de rodas de carrinho é representado por 4x e o número total de rodas de triciclo é representado por 3y. O total de rodas entre carrinhos e triciclos é 4x + 3y. Como são 40 rodas, a equação esperada é 4x + 3y = 40. Ao unir as duas informações, representadas pelas equações, o sistema esperado deverá ser $\begin{cases} x + y = 11 \\ 4x + 3y = 40 \end{cases}$.

A literatura (BOOTH,1995; LOCHHEAD e MESTRE, 1995) aponta erros e dificuldades com relação às operações com letras e com sinal de igualdade, bem como equacionar informações escritas em linguagem natural. Entre os erros que podem ocorrer durante a resolução dessa atividade estão:

- xy = 11 ou 2xy = 11 que poderá gerar uma equação xy = 11/2

- 7xy = 40 que poderá gerar um resultado como xy = 40/7

- esquecer as características que estamos considerando nesta atividade; cada carrinho tem quatro rodas e cada triciclo tem três rodinhas. Isso poderá fazer com que a segunda equação seja escrita de forma errada (x + y = 40).

Quanto à última dificuldade listada acima, deve-se utilizar o conhecimento adquirido em sua experiência de vida para lembrar as características de cada objeto envolvido em apoio aos conceitos matemáticos aprendidos na escola.

A seguir apresentamos a descrição e a análise dos dados coletados na aplicação das atividades do bloco 2. Para apresentação desta análise disponibilizamos alguns excertos e protocolos com objetivo de confirmar as observações levantadas.

3.4.1 Bloco 2: experimentação e análise a *posteriori*

Iniciamos as atividades desse bloco no dia 19 de outubro utilizando papel e lápis e o *software Aplusix*. Nossa intenção nesse segundo momento da experimentação foi a de apresentar problemas escritos em linguagem natural para que fossem escritos os sistemas de equações de acordo com as informações apresentadas nos enunciados.

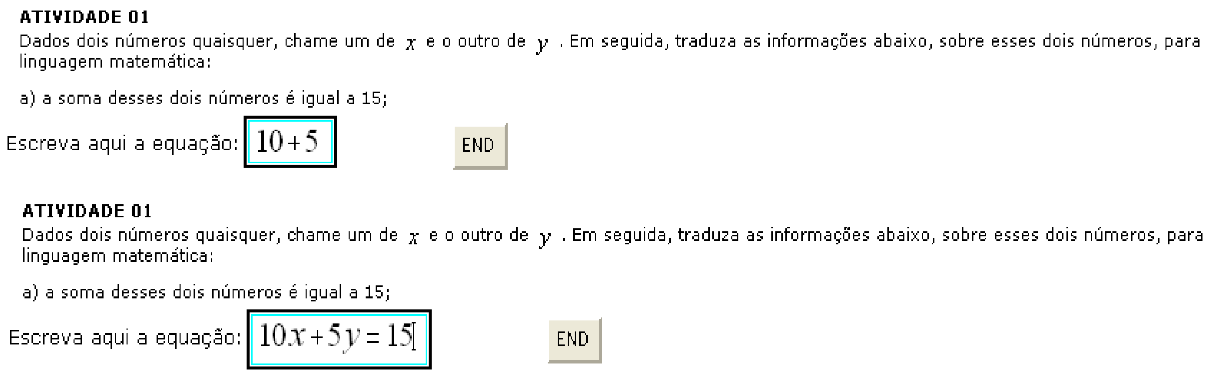
A seguir apresentamos o quadro síntese dos resultados obtidos pelos sujeitos neste bloco, com o objetivo de termos uma visão resumida, porém, ampla da evolução de cada dupla.

	RP	**GN**	**LC**	**AA**	**JY**
A1	Escreveu as equações	Escreveu as equações	Escreveu as equações	Escreveu as equações	Escreveu as equações
A2	Escreveu as equações	Escreveu as equações	Escreveu as equações	Escreveu as equações	Escreveu as equações com auxílio das outras duplas
A3	Escreveu o sistema depois de várias tentativas	Escreveu o sistema após a formulação da dupla RP	Desistiu da resolução, porém aceitou os resultados das outras duplas	Escreveu o sistema após a formulação da dupla RP	Desistiu de fazer a atividade
A4	Escreveu o sistema	Escreveu o sistema	Escreveu o sistema após os outros	Escreveu o sistema	Escreveu o sistema após os outros
A5	Escreveu o sistema depois de várias tentativas	Escreveu o sistema após a formulação da dupla RP	Escreveu o sistema após a formulação da dupla RP	Escreveu o sistema após a formulação da dupla RP	Escreveu o sistema com auxílio das outras duplas

Quadro 4: síntese dos resultados do bloco 2

Inicialmente propomos duas atividades objetivando-se que fossem escritas duas equações do 1º grau com duas incógnitas. Na análise *a priori* não previmos nenhuma dificuldade, já que tinha sido feito um trabalho com escrita de equações de duas incógnitas durante a familiarização com o *Aplusix* quando aproveitamos para resolver a lista do teste diagnóstico.

A atividade 1 tratava da escrita de duas equações com coeficientes das incógnitas iguais a 1; uma envolvia a soma de dois números desconhecidos e a outra a diferença entre esses mesmos números: $x + y = 15$ e $x - y = 3$. A dupla RP chegou à escrita correta das equações com poucas ações, porém, em um primeiro momento, a dupla AA tentou colocar números cuja soma é igual a 15 na primeira equação. Os valores pensados foram 10 e 5. Ao tentar validar o *software* retroagiu com uma mensagem dizendo que era esperada uma expressão com variáveis x e y. Nesse momento a dupla colocou as variáveis pedidas, entretanto, acompanhadas dos mesmos números $10x + 5y = 15$. Novamente o *software* retroagiu informando que essa não era a expressão esperada. Após mais algumas tentativas a dupla chegou à expressão e também escreveu corretamente a segunda equação. No protocolo a seguir colocamos as duas ações erradas da dupla AA.



Protocolo 5: observação em videocassete da atividade 1 pela dupla AA

Analisando a resolução dessa atividade por meio da ferramenta videocassete do *software* verificamos que as retroações contribuíram para que houvesse reflexões por parte dos alunos sem que, no entanto, estivéssemos que interferir, diante da recusa em prosseguir com a resolução. Os erros citados, não previstos na análise a *priori*, talvez tenham ocorrido pelo fato de que o aluno esteve, no bloco anterior, diante de situações em que a solução era um par de valores numéricos. Podemos perceber que, em um primeiro momento, pensou-se que se tratava da mesma situação. Em um segundo momento, diante das retroações impostas pelo meio *adidático*, composto pelo *software*, a dupla percebeu que se tratava da escrita de uma expressão algébrica, entretanto, insistiu no emprego dos números que pensava serem os valores de x e y. Dessa vez ele colocou as incógnitas x e y acompanhadas dos números 10 e 15.

O fato citado no parágrafo anterior nos leva a refletir sobre as situações *adidáticas*, porém, de uma forma mais geral. Para resolver a atividade proposta, em princípio a dupla tentou utilizar um conhecimento que tinha, no entanto, diante das retroações do meio, ela percebeu que seus conhecimentos não eram suficientes. Diante disso, a dupla buscou se adaptar às novas situações e conseguiu escrever a equação que causou os erros e utilizou esse novo conhecimento para escrever a segunda equação. A segunda equação foi escrita sem maiores dificuldade.

A atividade 2 foi realizada com um pouco mais de dificuldade, uma vez que o conhecimento de dobro, triplo e quádruplo estavam presentes nas informações propostas. Nessa atividade, assim como na anterior, foi sugerido que os números desconhecidos fossem representados por x e y. Para que houvesse compreensão de que o tipo de sistema que estamos visando é composto por duas equações do 1º grau, dividimos a atividade em dois itens os quais os resultados esperados eram as equações: $2x + 3y = 21$ e $4x – y = 7$.

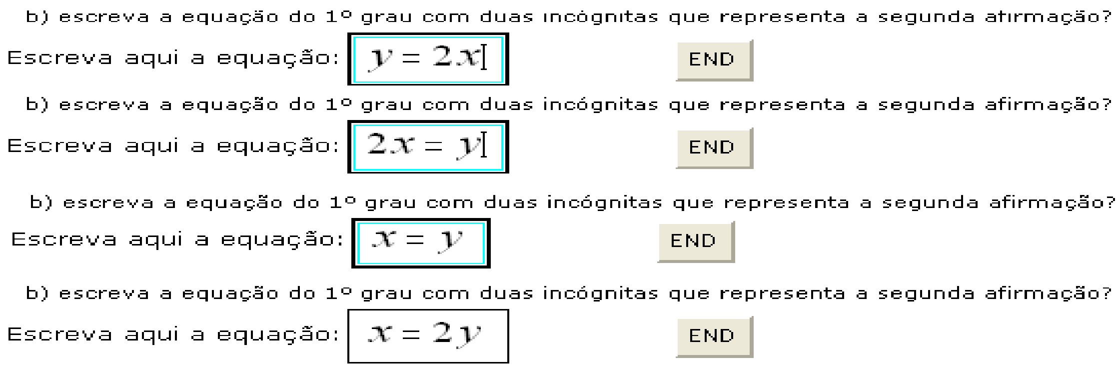
Nos momentos de ação os alunos, como previsto na análise a *priori*, tentaram escrever a primeira equação sem colocar os coeficientes ($x + y = 21$), porém, diante das retroações do *software*, eles apagavam a equação escrita e tentavam novamente, até que o aluno R, em um momento de formulação, lembrou o conceito de dobro e triplo.

> R: é só a gente colocar 2 e 3 junto com as letras.
> G: como assim?
> R: a primeira informação ta dizendo dobro de x e triplo de y, ta aqui, ó! Então, acho que vai ficar dois vezes x mais três vezes y igual a 21

Embora em alguns momentos da transcrição do diálogo tivemos que tentar adivinhar o que estavam dizendo, pois, o áudio coletado estava muito ruim, podemos perceber que o aluno R compartilhou com os colegas o que tinha formulado sobre a escrita da primeira equação. A formulação se deu no momento em que ele conjectura que basta colocar os coeficientes de x e y, isso se verifica na primeira linha do excerto. Na terceira linha do excerto podemos perceber a validação quando o aluno R digita e fala em voz alta o que tinha formulado. Apesar de, em princípio, terem confundido quádruplo com dobro, eles escreveram a segunda equação sem nenhuma dificuldade, uma vez que os erros cometidos para escrever a primeira, tinham sido superados.

Como tinha sido previsto na análise a *priori*, ao término das duas primeiras atividades deste bloco, institucionalizamos o conceito de sistemas de equações do 1º grau e aproveitamos para que escrevessem os sistemas correspondentes às equações encontradas.

Na atividade 3, no entanto, apesar de a maioria das dificuldades previstas na análise a *priori* não ter ocorrido, houve a necessidade de se dispor de mais tempo. Foi utilizada uma aula e metade de outra só para essa atividade. Trata-se de uma atividade com três itens a, b e c. O primeiro item consistia em escrever a equação correspondente à informação "Carlinhos e Celso têm juntos 201 figurinhas"; o segundo item consistia em escrever a equação correspondente à informação "Carlinhos tem o dobro de figurinhas de Celso"; no terceiro item eles tinham que escrever o sistema correspondente às equações dos itens anteriores. Todas as duplas escreveram rapidamente a equação do primeiro item cujo resultado esperado é x + y = 201. Porém, uma das dificuldades previstas na análise a *priori* surgiu ao tentarem encontrar a equação corresponde à segunda informação. Foram várias tentativas. Os erros cometidos, conforme a sequência de tentativas apresentada no protocolo a seguir, estão relacionados à interpretação da instrução que gera a equação x = 2y. Sendo que x representa à quantidade de figurinhas de Carlinhos e y a quantidade de figurinhas de Celso.



Protocolo 6: observação em videocassete de algumas tentativas da dupla RP para escrever a segunda equação da atividade 3

Percebe-se pelo protocolo que a dupla insistiu na equação y = 2x. Em um primeiro momento pensou-se que o número dois acompanhava o x. Posteriormente pensou-se que mudando a ordem da escrita a equação estaria correta. Em algumas ocasiões tivemos que promover discussões para que refletissem sobre o que estaria errado, porém, procurando preservar os momentos *adidáticos.*

> F: O que diz a segunda informação?
> AA: Que Carlinhos tem o dobro de figurinhas de Celso.
> F: Quem é Carlinhos e quem é Celso? (as letras x e y)
> LN: x é a quantidade de figurinhas de Carlinhos e y a quantidade de Celso.
> F: Então, por que vocês estão escrevendo y = 2x e o programa não está aceitando?

> LN: Ué, professor! Se Carlinhos tem o dobro então ele tem duas vezes xis.
> F: Será que está certa a equação que vocês estão escrevendo?
> RP: Acho que não, o computador (retroação do *software*) ta dizendo que ta errado.

Procurando evitar que a situação bloqueasse ou que ficassem digitando aleatoriamente expressões que a qualquer momento poderia ser a correta pela simples troca do x pelo y de posição na equação y = 2x ocasionando a validação pelo *Aplusix*, pedimos a eles para minimizarem a tela do *software* e escreverem na folha que entregamos.

> F: Vamos fazer o seguinte, pensem comigo: vamos supor que Celso tem 10 figurinhas, então, quantas figurinhas tem Carlinhos?
> AA: Carlinhos tem 20 figurinhas porque ele tem o dobro e o dobro de 10 é 20.
> F: Boa, meninas. Então 20 é igual a quantas vezes o 10?
> AA: Duas, nê professor.
> F: Pensem bem, 20 é igual a duas vezes 10. Vinte é a quantidade de figurinhas de Carlinhos e dez a quantidade de figurinhas de Celso. Nós supomos isso, não foi?
> LN: Mas professor, com número é fácil, e com letras, como fica?
> F: Pensem bem o que discutimos e tentem escrever a equação.
> RP: No papel, professor?
> F: Sim.

Por vários momentos tivemos que interagir com eles, porém, sempre procurando evitar adiantar resultados que os levassem à resposta correta. Mesmo com o diálogo acima eles não estavam conseguindo interpretar as instruções da segunda informação. Para terminar essa atividade era preciso que conseguissem escrever a equação do item b, pois, o sistema constituído pelas duas equações é o resultado esperado.

Devido à demora para conseguirem escrever a segunda equação e pelo fato de a aula estar chegando ao fim pensamos em revelar a resposta desse item para que pudessem escrever o sistema. Entretanto, não foi preciso, a dupla RP chegou à equação desejada, uma vez que trocou a expressão y = 2x por x = 2y. Antes de voltarem ao *Aplusix*, perguntamos se a equação estava correta.

> R: tá sim, porque, se o y é 10, dois vezes dez é 20, então x vale 20, que é o dobro de 10. Ta errado professor?
> F: escrevam a equação no *Aplusix*

Embora na justificativa tenham sido utilizados números no lugar de x e y, podemos perceber que houve a validação da formulação proposta pelo aluno R. A formulação também se deu no momento em que o aluno compartilha com seu parceiro de dupla, bem como com os outros alunos na sala. Depois de terem discutido sobre a validade da equação escrita, voltaram ao *Aplusix* e tiveram acesso à validação do *software*. Isso se verifica na última linha do protocolo 6.

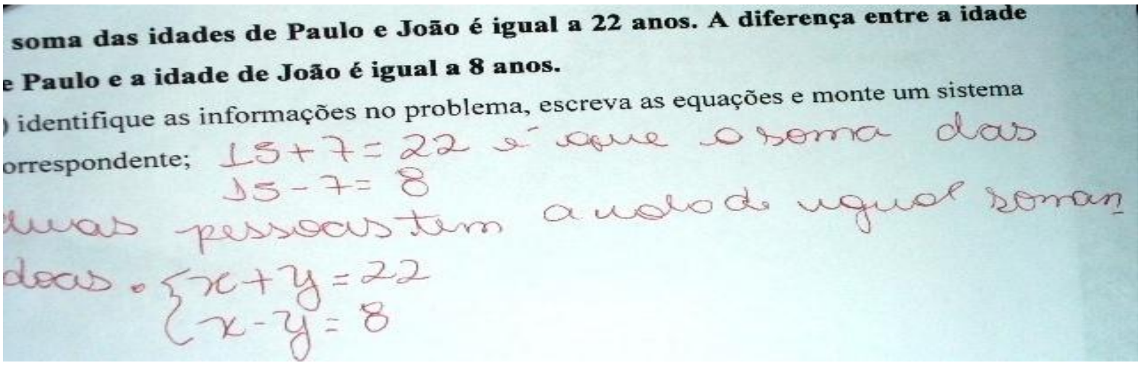
Diante da dificuldade apresentada pelos alunos em interpretar e traduzir para linguagem algébrica a segunda informação da atividade 3 resolvemos fazer a institucionalização de situações semelhantes a essa. Para isso, colocamos na lousa três situações as quais discutimos como seriam escritas as equações. As situações eram: “Carlinhos tem o triplo de figurinhas de Celso”, “Carlinhos tem o quíntuplo de figurinhas de Celso” e “Carlinhos tem quatro vezes mais figurinhas que Celso”. Durante as discussões todos opinaram corretamente como escrever as equações.

A atividade 4 cujo enunciado é “A soma das idades de Paulo e João é igual a 22 anos. A diferença entre a idade de Paulo e a idade de João é igual a 8 anos” a qual consistia em escrever o sistema de equações correspondente às informações. Apesar de termos cometido o erro de não termos deixado claro quem é o mais velho, tanto na folha entregue como no *Aplusix*, eles tomaram como mais velho o Paulo, talvez isso se deva à ordem de aparição dos personagens do problema, pois nas frases as quais pode-se distinguir as informações que geram as equações, primeiramente aparece o nome de Paulo.

Nesta atividade os alunos não tiveram dificuldade em reconhecer que se tratava de uma soma de valores desconhecidos sendo igualada a um total correspondente, haja vista que nas três primeiras atividades deste bloco foi trabalhada a escrita de equação com duas incógnitas e escrita de sistemas formados por esse tipo de equação. Rapidamente foi considerado x como a idade de Paulo e y a idade de João e escreveram o sistema $\begin{cases} x+y=22 \\ x-y=8 \end{cases}$, como previsto na análise a *priori*.

Apesar de não terem tido dificuldades para realizar essa atividade, um fato não previsto na análise a *priori* que nos chamou a atenção foi a forma como a dupla AA apresentou sua resolução na folha. Embora, pelas gravações do videocassete do *Aplusix*, o sistema tenha sido escrito da forma como as outras duplas escreveram.

Antes de escrever o sistema a dupla AA primeiramente encontrou os valores que satisfazem as informações do problema. Colocaram no lugar de x e y seus valores 15 e 7 e posteriormente logo em seguida escreveu o sistema, conforme o protocolo a seguir.


soma das idades de Paulo e João é igual a 22 anos. A diferença entre a idade
e Paulo e a idade de João é igual a 8 anos.
) identifique as informações no problema, escreva as equações e monte um sistema
orrespondente; 15+7=22 é que a soma das
15-7=8
duas pessoas tem a idade igual somando
duas. $\begin{cases} x+y=22 \\ x-y=8 \end{cases}$

Protocolo 7: resolução da atividade 4 do bloco 2 pela dupla AA

Embora a dupla tenha colocado uma justificativa escrita, preferimos abrir um diálogo e como as outras duplas já tinham entregado suas folhas, pedimos que todos prestassem atenção.

> F: Meninas, por que primeiramente vocês encontraram os valores e depois escreveram o sistema?
> AA: É porque fica mais fácil assim. Foi como o senhor fez na outra atividade, (elas se referiam a atividade 3) primeiro colocou valores e depois escreveu o sistema.
> F: Mas eu tinha feito aquilo para vocês enxergarem a escrita correta da equação. Além disso, os valores que coloquei como exemplo não era solução do problema. Como encontraram esses valores?
> AA: Que valores, professor?
> F: Quinze e sete
> AA: Tava na cara. Foi direto, pensamos em dois números que a soma da 22, depois subtraímos, deu 8. Deu direto.
> F: Mas não precisava ter feito isso. A atividade consiste em escrever o sistema, só isso. Se fosse uma situação um pouco mais difícil vocês iam perder tempo em ficar tentando achar valores para depois escrever o sistema.

É oportuno dizermos que na última linha do excerto não tínhamos a intenção de desestimular o aluno a utilizar sua intuição, seu pensamento lógico, na resolução de problemas. Apenas aconselhamos que em situações mais complexas, seria inviável tentar encontrar a solução de um problema e depois utilizá-la para montar uma expressão algébrica cuja solução é a mesma.

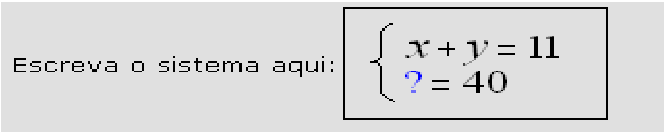
Durante a conversa percebemos que a dupla escreveu uma estrutura aritmética conforme as instruções das operações: soma dos valores igual a 22 e diferença dos valores igual a 8. As operações foram montadas em duas linhas. Apoiadas pela estrutura aritmética elas escreveram o sistema, substituindo-se os valores correspondentes por x e y. Percebe-se pelo diálogo que a dupla incorporou a ajuda dada na atividade anterior. Talvez tenha sido um erro termos dado essa ajuda na atividade 3, uma vez que AA considerou isso como uma regra para escrever sistemas.

A atividade 5 cujo enunciado é "Uma fábrica produz carrinhos de bebê e triciclos. Hoje produziram 11 unidades e para montá-las usaram 40 rodas" que teve por objetivo a montagem de um sistema de equações que satisfaz as informações "produziram 11 unidades entre carrinhos e triciclos" e "usaram 40 rodas". Na análise a *priori* previmos que o aluno teria que nomear as incógnitas como x para carrinhos de bebê e y para triciclos, escrever a primeira equação correspondente à primeira informação ($x + y = 11$), escrever a segunda equação correspondente à segunda informação ($4x + 3y = 40$). De fato, todos adotaram as letras citadas como representantes das quantidades de carrinhos e triciclos.

Assim que abriram a atividade no *software* e pegaram a folha, cada dupla assumiu a responsabilidade de encontrar o sistema. Como dissemos na análise do bloco anterior, eles agiam como se estivessem em uma competição a qual ganha quem chega primeiro. No caso, quem encontra o sistema primeiro. Após darem início à resolução, percebemos que a maioria tentava rascunhar equações na folha para posteriormente testar no *Aplusix*. No entanto, as duplas LC e GN, apesar da instrução para apenas escreverem o sistema, primeiramente tentaram encontrar a quantidade de carrinhos e de triciclos para posteriormente escreverem o sistema, assim como fez a dupla AA na atividade anterior. Dessa vez deixamos à vontade, uma vez que, devido ao grau de dificuldade dessa atividade, poderia desprender muito tempo e reforçar o que tínhamos dito na atividade anterior. De fato, percebemos que não foram muitas as tentativas em encontrar os valores para depois escrever o sistema, logo as duplas LC e GN se juntaram às outras e começaram a tentar escrever as equações correspondentes às informações apresentadas no enunciado.

Como foi previsto na análise a *priori*, a essa altura as dificuldades relacionadas a operações com letras e com o sinal de igualdade já não eram tão constantes. Ocorriam, entretanto, não havia muita persistência, principalmente quando se utilizava o *software*, uma vez que suas retroações desestimulavam ações incorretas. A dificuldade maior ainda estava relacionada à conversão de instruções escritas na linguagem corrente em expressões algébricas, no caso, em sistemas de equações. Como tinha sido previsto na análise a *priori*, inicialmente, não se utilizou o conhecimento das características especiais desses objetos: quantidade de rodas de carrinhos de bebe e quantidade de rodas de triciclos. Conhecimento, aliás, que levava à escrita dos coeficientes das incógnitas, neste caso implícitos nas informações do problema.

Analisando a resolução gravada no videocassete do *Aplusix* percebemos que rapidamente eles interpretaram corretamente que a informação “hoje produziram 11 unidades” se tratava da soma do número de carrinhos com o número de triciclos e que esses números devem ser representados pelas letras x e y, respectivamente. Percebemos que o trabalho com a variável didática “tipo do enunciado” surtiu efeito, eles conseguiram enxergar as operações correspondentes implícitas nos enunciados. Também já sabiam estruturar um sistema; assim que escreveram a primeira equação (x + y = 11) colocaram o símbolo chave utilizado para representar esse conceito algébrico. Entretanto, faltava escrever a segunda equação. O protocolo a seguir mostra que a dupla RP escreveu corretamente a primeira equação, porém, ainda não sabia o que colocar no primeiro membro da segunda equação, o mesmo ocorria com as outras duplas, uma vez que as ideias eram compartilhadas.



Protocolo 8: observação em videocassete da montagem do sistema da atividade 5 do bloco 2 pela dupla RP

Foi previsto que ocorreriam alguns erros do tipo xy = 11 e 2xy = 11. De fato, em observação à gravação do videocassete do *Aplusix* verificamos isso, entretanto, diante das retroações do *software*, os alunos perceberam os erros comentados e logo escreveram a equação, conforme apresentado no protocolo anterior.

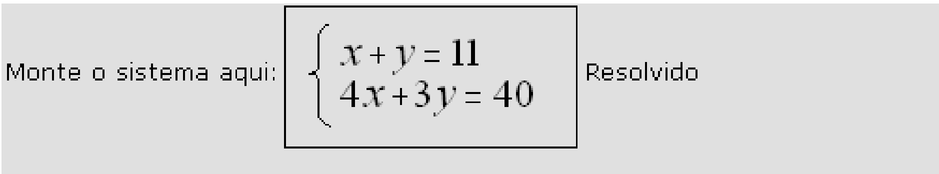
Para escrita da segunda equação podemos perceber que a dupla RP utilizou conhecimentos adquiridos, inclusive os obtidos nessa experimentação, tais como escrevê-la se colocar os correspondentes coeficientes, 4 e 3; eles não conseguiam interpretar que a expressão da segunda equação é a soma de um múltiplo de quatro com um múltiplo de três. Por um bom tempo a turma ficou estagnada nessa atividade. Quando percebemos que já estavam entediados por não conseguirem encontrar a equação, abrimos uma discussão.

> F: Por que vocês não estão conseguindo escrever a segunda equação?
> JY: Professor, a gente soma, subtrai e não dá certo.
> LC: Estamos cansadas, tentamos de tudo, mas nada dá certo.
> F: O que vocês fizeram?
> F: Bom, a primeira equação está correta. Esquece ela, um pouco. Se concentrem na segunda equação. Lembrem-se, a primeira informação se refere à quantidade de carrinhos de bebê e triciclos. A segunda informação se refere à quantidade de rodas utilizadas para fabricar esses carrinhos e triciclos.
> RP: Ah! Acho que sei. É igual o das galinhas e coelhos.

Em princípio, após termos feito o comentário, pensamos que estivéssemos dado dica, porém, o que dissemos estava escrito no enunciado da atividade. Talvez eles não tivessem prestado atenção na informação “[...] usaram 40 rodas”.

Assim que comentamos que a segunda informação se referia à quantidade de rodas, a dupla RP se lembrou de uma atividade que tinha feito no primeiro bloco. As outras duplas ainda não tinham entendido, porém, acreditávamos que a conversa já tinha sido suficiente, uma vez que, se a dupla RP realmente entendeu, em instantes chegaria à equação pretendida e assim que o *software* validasse como correto o sistema escrito, ela compartilharia com as outras duplas. De fato, isso ocorreu, RP tinha conseguido escrever o sistema e posteriormente as outras duplas também tinham conseguido, devido às informações compartilhadas.

No protocolo a seguir, colocamos a gravação do videocassete o qual apresenta o sistema escrito, após alguns erros de escrita da segunda equação. Erros irrelevantes, uma vez que em um primeiro momento colocaram 2 como a quantidade de rodas do triciclo. As retroações do *software* fizeram com que os erros fossem logo corrigidos.



Protocolo 9: observação em videocassete da solução da atividade 5 do bloco 2

Após a resolução da última atividade 5, aproveitamos para institucionalizar essa atividade e comentar o que estávamos querendo atingir com esse bloco. Também colocamos na lousa o enunciado "Num quintal há galinhas e coelhos. Há 7 cabeças e 22 pés" dado no primeiro bloco o qual a dupla RP lembrou durante a resolução da atividade 5. Pedimos para um dos alunos ir à lousa e escrever o sistema correspondente àquelas informações. Imediatamente a aluna G da dupla GN se dispôs a isso. Nesse momento deixamos que discutissem. Embora Freitas (2008, p. 103) tenha dito que na institucionalização "[...] deve ocorrer uma socialização, professores e alunos dialogam sobre conhecimentos matemáticos historicamente construídos relativos ao problema abordado", preferimos nos ausentar por um instante da discussão, uma vez que tínhamos como objetivo verificar se houve aprendizado. Respostas novas poderiam nos fornecer um *feedback* do alcance do nosso objetivo nesse bloco.

Quando nos ausentamos da discussão, nos afastamos fisicamente também. Ficamos em um canto isolado, porém, prestando atenção no que estavam discutindo. Para nossa surpresa, eles procuraram separar as informações, como tinham visto no bloco 1. Discutiram sobre a multiplicidade dos coeficientes das incógnitas para montar a segunda equação e escreveram o sistema corretamente. Percebemos que a validação ou confirmação da resposta escrita foi feita por eles na lousa, sem as retroações do *software*. Isso se deu com a releitura do enunciado e a comparação com o sistema montado. Após a aluna G ter escrito corretamente o sistema, nos dirigimos à lousa e fizemos um comentário final com relação aos erros cometidos na escrita dos sistemas das atividades 4 e 5.

Durante a experimentação procuramos respeitar tudo que tínhamos descrito e previsto na análise a *priori*. Entretanto, como estávamos trabalhando com situações de aprendizagem, surgiram circunstâncias que não tínhamos previsto como essa que narramos no parágrafo anterior. De acordo com Almouloud (2007, p. 175) "é imprescindível uma fase de familiarização, na qual o professor deve propor outras situações cujo objetivo é consolidar os novos conhecimentos". Entendemos que a familiarização a qual o autor se refere possibilita a efetivação dos conhecimentos construídos; possibilita ao sujeito aplicar o conhecimento em outras situações, porém envolvendo os mesmos conceitos. Diante disso, durante a experimentação sentimos a necessidade de propor uma lista de atividades semelhantes às que trabalhamos no bloco para os alunos fazerem extraclasse. Por motivos alheios à nossa vontade, por uma semana não teve aula na escola. Temendo que isso fosse prejudicar o bom andamento das atividades do terceiro bloco, haja vista que os alunos se mostraram empenhados na resolução das atividades, resolvemos propor a lista mencionada.

Como dissemos isso não estava previsto em nossa análise a *priori*, porém, a partir do terceiro bloco tomamos como regra a ser seguida. Assim que fizerem determinada quantidade de atividade, de uma semana para outra propomos exercícios semelhantes aos das atividades realizadas.

3.5 Bloco 3: análise a *priori* das atividades

Neste bloco, em um primeiro momento, será institucionalizado o significado da solução de um sistema de equações do 1º grau. Posteriormente, por meio das atividades, incentivamos o aluno a encontrar os valores que satisfazem as equações do sistema. Para isso, propomos alguns sistemas possíveis e determinados, os quais vão tendo seus níveis de dificuldade aumentados na medida em que se vai evoluindo no aprendizado da resolução de sistemas. Com isso, o sujeito deverá perceber a viabilidade de um recurso algébrico para resolver problemas. Para isso, destacamos as variáveis "tipo do coeficiente independente" e "coeficientes das incógnitas".

Por outro lado, caso não sintam a necessidade de lançar mão de algum recurso algébrico, colocamos em jogo a variável "tipo do enunciado". Primeiramente, com o objetivo de fazer-lhes perceber que, se tiver acesso ao valor de uma das incógnitas, basta substituir esse valor na outra equação para encontrar o valor da outra incógnita. Para isso, serão propostos dois sistemas com uma das equações do tipo x = k e y = k ($k \in \mathbb{Z}$). Com isso, deve-se perceber que a expressão obtida é uma equação do 1º grau com uma incógnita a qual sabem resolver. A partir disso, serão propostos sistemas com uma das equações do tipo ax=b ou ay=b (a, b $\in \mathbb{Z}$, sendo a $\neq$ 0). Objetiva-se com isso que o sujeito perceba que ao resolver uma pequena equação, a situação se tornará semelhante à anterior. Posteriormente, serão propostos sistemas com uma das equações do tipo y = ax e x = ay (a $\in \mathbb{Z}$), objetivando-se com isso que perceba que ao substituir a expressão correspondente na segunda equação, surgirá outra com uma incógnita a qual sabe resolver.

Por fim, serão propostos sistemas completos (na forma canônica) objetivando-se que o sujeito perceba que ao isolar uma incógnita no primeiro membro de uma das equações, poderá substituir a expressão correspondente na segunda equação e encontrar um dos valores da solução. Desta forma, ao substituir esse valor em qualquer uma das equações, encontrará o segundo número da solução.

Como neste bloco estão envolvidas apenas atividades de resolução de sistemas já montados, entende-se como tipo do enunciado a forma como serão propostos os sistemas.

Embora as gravações em videocassete do *Aplusix* e as gravações em áudio tivessem sido priorizadas na análise dos dados coletados, neste bloco as resoluções no papel se fizeram necessárias, uma vez que num contexto fora da sala de tecnologia o sujeito não dispõe do *software* para resolver problemas envolvendo sistemas. Diante disso, para que o conhecimento construído não se efetivasse somente por meio de uma ferramenta tecnológica, no caso, o *Aplusix*, optamos em realizar os dois últimos blocos utilizando também papel e lápis.

Disponibilizamos no quadro a seguir as onze atividades deste bloco para serem aplicadas no *Aplusix*. Optamos em apresentar as atividades deste bloco da forma como foram editadas no *software* para que o leitor tenha acesso, em parte, àquilo que o sujeito teve quando abriu cada atividade na tela do computador.

ATIVIDADE 01 Resolva o sistema aqui: $\begin{cases} x-y=66 \\ x+y=160 \end{cases}$ END	**ATIVIDADE 07** Resolva o sistema aqui: $\begin{cases} y=2x \\ 7x-y=25 \end{cases}$ END
ATIVIDADE 02 Resolva aqui o sistema: $\begin{cases} 2x+y=11 \\ y=5 \end{cases}$ END	**ATIVIDADE 08** Resolva o sistema aqui: $\begin{cases} x+y=13 \\ x-2y=1 \end{cases}$ END
ATIVIDADE 03 Resolva o sistema aqui: $\begin{cases} x=15 \\ x+3y=24 \end{cases}$ END	**ATIVIDADE 09** Resolva o sistema aqui: $\begin{cases} x-3y=0 \\ 2x-5y=2 \end{cases}$ END
ATIVIDADE 04 Resolva o sistema aqui: $\begin{cases} 2x=46 \\ 7x-y=12 \end{cases}$ END	**ATIVIDADE 10** Resolva o sistema aqui: $\begin{cases} 2x+y=9 \\ 3x-y=26 \end{cases}$ END
ATIVIDADE 05 Resolva o sistema aqui: $\begin{cases} x+3y=29 \\ 5y=35 \end{cases}$ END	**ATIVIDADE 11** Resolva o sistema: $\begin{cases} -2x+y=15 \\ 3x-11y=6 \end{cases}$ END
ATIVIDADE 06 Resolva o sistema aqui: $\begin{cases} x+y=20 \\ x=3y \end{cases}$ END	

Quadro 5: atividades do bloco 3 que serão aplicadas no *Aplusix*

Institucionalização da solução de um sistema de equações do 1º grau

Embora no primeiro bloco de atividades tenha sido feito um trabalho em que o aluno tenha buscado a solução de situações-problema que consistia em dois valores, assim como fizemos no bloco anterior, neste bloco optamos em apresentar-lhes o significado de solução de sistemas de equações. É importante lembrar que diferentemente da solução de uma equação do 1º grau a qual apresenta um único valor, a solução de um sistema possível e determinado é constituída por dois valores. Isso deve ser apresentado tomando-se o cuidado em não dar dicas de resolução, uma vez que o objetivo deste bloco é a aprendizagem da resolução de sistemas de equações.

A solução de um sistema é um par de valores que satisfazem suas equações. Ou seja, são os valores que quando substituídos no lugar de x e y, por exemplo, satisfazem as duas equações do sistema. Vejam o exemplo:
A solução do sistema $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ é o par de valores x = 2 e y = 5, pois, se substituirmos o x pelo 2 e o y pelo 5 nas duas equações e fizermos os cálculos, os resultados serão 9 e 1. Isso significa que esse par de números satisfaz as duas equações do sistema. Copie esse sistema na folha e substitua x e y por seus respectivos valores, faça os cálculos e verifique você mesmo.
Neste quadro mostramos o significado algébrico da solução de um sistema de equações. Porém, diante de um sistema dado como calcular sua solução? Como encontrar os dois números que satisfazem simultaneamente as duas equações de um sistema dado?
Nas atividades seguintes propomos alguns sistemas para você encontrar suas soluções. Não esqueça, o jogo é procurar e encontrar o par de números que satisfaz as duas equações do sistema. Resolver um sistema significa calcular o par de valores que compõem sua solução. Lembre-se que você pode utilizar tudo que aprendeu de matemática até agora, inclusive equações do 1º grau.

Passamos então a apresentação e análise a *priori* das atividades deste bloco.

As atividades apresentadas em cada quadro a seguir foram copiadas aqui das folhas que foram entregues aos alunos. As instruções nos itens a, b e c se referem a registros na folha. Após a resolução de cada atividade no *software*, pedimos que fizessem também na folha, com o objetivo que o aluno também aprenda a resolver sistemas utilizando papel e lápis.

Atividade 1

Resolva o sistema:
$$\begin{cases} x - y = 66 \\ x + y = 160 \end{cases}$$
a) o que você fez para encontrar os valores de x e y;
b) os valores que você encontrou satisfazem as duas equações do sistema?

Nesta atividade a variável didática “tipo do coeficiente independente” assume os valores 160 e 66. Objetivam-se com essa variável, retroações referentes às tentativas ao acaso. As retroações referidas se manifestam diante do excesso de tentativas, caso não se consiga os valores que satisfazem as equações do sistema em poucas tentativas. Diante disso, espera-se que novas estratégias sejam articuladas.

Pelo fato de os coeficientes de y serem iguais em módulo, porém, de sinais contrários, uma possível estratégia seria somar as equações visando em um primeiro momento eliminar essa incógnita para que se possa encontrar o valor de x por meio da resolução da equação 2x = 226. Diante disso, pode-se obter o valor de x = 113 e, como foram trabalhadas no bloco 1 situações envolvendo respostas constituídas por dois valores, bem como a institucionalização do significado de solução de sistema de equações do 1º grau neste bloco 3, deve-se sentir a necessidade de substituir esse número no sistema original visando encontrar o segundo valor.

As dificuldades que podem surgir estão relacionadas às possibilidades de se ter a ideia de somar as equações do sistema com intenção de fazer com que surja uma equação com apenas uma incógnita. Implicitamente o método da adição estaria sendo utilizado, porém, em atividades com sistemas que não apresentam incógnitas com coeficientes opostos não seriam tão imediatas.

Outras dificuldades estariam relacionadas às concepções algébricas mal compreendidas como afirmam as pesquisas (BOOTH, 1995) e erros de resolução de equações constatados no teste diagnóstico.

Uma **segunda estratégia** que pode ser usada é a de isolar o x no primeiro membro da primeira equação como se y fosse um número conhecido (x = 66 + y). Substituindo-se o x pela expressão (66 + y) na outra equação obtém-se uma equação do primeiro grau 66 + y + y = 160 cuja solução é y = 47. Como dissemos na estratégia anterior, substituindo-se esse valor em qualquer equação do sistema tem-se o valor de x ao resolver a equação do 1º grau resultante.

As dificuldades que podem ocorrer nessa estratégia foram: considerar uma expressão literal como um número, no caso 66 + y; utilizar o sinal de igualdade para fazer isso; substituir essa expressão na outra equação e lembrar-se de substituir o primeiro número encontrado em uma das equações do sistema para encontrar o segundo valor.

Uma **terceira estratégia** talvez menos provável, porém, é uma possibilidade que se deve levar em consideração. Pode-se fazer com que as expressões do 1º membro das equações do sistema fiquem iguais, ou seja, fazendo-se com que x - y se transforme em x + y ou vice-versa. Para isso, basta aplicar o princípio aditivo somando-se 2y nos dois membros da equação x – y = 66 (x – y + 2y = 66 + 2y). Desta forma a equação equivalente pode ser escrita da seguinte forma: x + y = 66 + 2y. Como as equações do novo sistema equivalente $\begin{cases} x + y = 160 \\ x + y = 66 + 2y \end{cases}$ têm membros correspondentes iguais, pode-se trocar x + y da primeira equação por 66 + 2y ou substituir x + y da segunda equação por 160. Vê-se que nos dois casos obtém-se a equação 66 + 2y = 160 cuja solução é y = 47. Substituindo-se esse valor em qualquer uma das equações do sistema original obtém-se o valor de x ao resolver a equação resultante.

As dificuldades que podem surgir se referem a:

- ter a ideia de que a expressão x – y pode ser transformada na expressão x + y;

- lembrar do princípio aditivo e perceber que se deve somar 2y nos dois membros da primeira equação do sistema;

- fazer as substituições correspondentes para se chegar aos valores procurados.

De acordo com pesquisas apresentadas nesse trabalho, estudantes nesse nível de escolaridade podem cometer alguns erros algébricos, entre eles:

- somar os termos da expressão x + y = 2xy ou x + y = xy, bem como escrever 66 + 2y = 68y;

- na resolução das equações do 1º grau por transposição esquecer-se de trocar o sinal do termo transposto.

Atividade 2

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ y = 5 \end{cases}$$

a) o que diferencia este sistema dos anteriores?
b) é possível encontrar o valor de uma das incógnitas sem que se façam cálculos?
c) o que você fez para encontrar o par de valores que satisfaz o sistema.

Nessa atividade a variável didática "tipo do enunciado" assume o valor na forma como o sistema é apresentado; o sistema é proposto de forma que na segunda equação o valor da incógnita y seja dado. Objetiva-se com isso a percepção de que, ao se saber o valor de uma das incógnitas, basta que se substitua o y da outra equação em uma das equações do sistema para se obter o valor de x.

Talvez em um primeiro momento tentem resolver o sistema por tentativa, porém, logo se deve perceber que essa estratégia não é viável, diante do fato de que, em um primeiro momento, as atividades serão feitas no *Aplusix*. Ao tentar substituir as letras por números o *software* retroagirá, pois essas atividades foram editadas para serem resolvidas algebricamente. Em um segundo momento, quando for resolver usando papel e lápis, alguma estratégia de resolução já deverá ter sido utilizada; basta que seja feita uma adaptação para o recurso citado.

Como na segunda equação o valor de y é igual a 5, basta que se substitua esse valor na primeira equação (2x + 5 = 11). Ao resolvê-la, chega-se ao valor de x igual a 3.

De acordo com os resultados apresentados no teste diagnóstico, as dificuldades e erros que podem surgir utilizando-se essa estratégia estão relacionados às concepções algébricas mal compreendidas nos anos anteriores, como:

- escrever os termos da expressão 2x + y como 2xy ou 3xy;

- não perceber a multiplicação implícita entre 2 e x na primeira equação;

- não conseguir resolver a equação 2x + 5 = 11, uma vez que alguns alunos erraram a resolução das equações propostas no teste diagnóstico.

Deve-se lembrar que cabem às retroações do *Aplusix* apenas avisar que a ação está incorreta. O *software* não aponta o caminho correto, ele apenas faz com que haja uma reflexão sobre cada passagem da resolução. Cabe ao aluno adaptar seus conhecimentos às novas situações e tentar chegar ao resultado esperado.

Atividade 3

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x = 15 \\ x + 3y = 24 \end{cases}$$

a) é possível encontrar o valor de uma das incógnitas sem que se façam cálculos?
b) escreva na folha o que você fez para encontrar o par de valores que satisfaz o sistema.

Assim como na anterior, nessa atividade a variável didática “tipo do enunciado” assume o valor da forma como o sistema será proposto. No caso, sabe-se o valor da incógnita *x* é 15. Objetiva-se com isso que o sujeito perceba que se souber o valor de uma das incógnitas, basta substituí-lo na outra equação para obter o valor do outro número desconhecido. A obtenção desse segundo valor será feita pela resolução de uma equação do 1º grau que surgirá após a referida substituição.

Ao se perceber que o valor do x é o número quinze basta substituí-lo na outra equação. Essa ação fará com que surja uma equação com uma incógnita (15 + 3y = 24). Ao resolvê-la chega-se ao valor de y igual 3.

Assim como na atividade anterior, as dificuldades e erros que podem surgir com o uso dessa estratégia estão relacionados às concepções mal construídas nos anos anteriores. Porém, pelos resultados apresentados no teste diagnóstico a substituição do x pelo15 na segunda equação poderá apresentar dificuldade de transposição e de soma indevida de termos não semelhantes como, por exemplo, na equação 15 + 3y = 24 somar 15 com 3 do y (18y = 24).

De acordo com Freitas (2002), na resolução de equações do 1º grau podem ocorrer os seguintes erros: transpor o termo 15 para o segundo membro da equação sem a devida troca de sinal; transpor o coeficiente de y para o segundo membro da equação, porém, somando ou subtraindo; alterar o sinal do coeficiente na divisão do temo independente pelo coeficiente de y na equação 3y = 9 ($y = \frac{9}{-3}$).

A cada ação errada, o *Aplusix* informa que não há equivalência entre as passagens da resolução. As retroações do *software* podem fazer com que haja constantes reflexões pelo sujeito na medida em que os erros vão ocorrendo.

Atividade 4

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} \quad\;\; 2y = 46 \\ 7x - y = 12 \end{cases}$$

a) o que diferencia este sistema dos anteriores?
b) qual das incógnitas é possível obter seu valor sem muitos cálculos? Por quê?
c) encontre a solução do sistema e verifique se o par de valores encontrados satisfaz as duas equações.

Nesta atividade a variável didática "coeficientes das incógnitas" assume os valores 0 e 2 na primeira equação, 7 e -1 na segunda equação. A variável "tamanho do coeficiente independente" assume os valores 46 e 12. A variável "tipo do enunciado" assume o valor da forma como o sistema é apresentado; o sistema é proposto de forma que na primeira equação o valor de y pode ser calculado com a resolução de uma equação do 1º grau (2y = 46). Objetiva-se com isso a percepção de que diferentemente das atividades 2 e 3, o valor de uma das incógnitas não está explícito. Como dissemos, é preciso que se resolva uma equação para que essa situação recaia na situação anterior.

Como nesta atividade não tem explícito o valor de uma das incógnitas, uma estratégia seria resolver a equação 2y = 46 para obter o valor de y = 23. Essa ação fará com que essa atividade recaia na situação anterior. Portanto, ao substituir o valor de y na equação 7x – y = 12, temos 7x – 23 = 12. Resolvendo-a, obtém-se x = 5.

As dificuldades e erros que podem ocorrer nessa atividade estão relacionados às concepções algébricas mal compreendidas por alunos nessa faixa etária. Dentre elas destacamos:

- não trocar o sinal na transposição do termo -23 na resolução da equação 7x – 23 = 12 (FREITAS, 2002);

- subtração indevida dos termos da equação 7x – y = 12 (BOOTH (1995);

- transposição do coeficiente do termo 7x como soma ou diferença (FREITAS, 2002).

Uma estratégia mal sucedida que talvez ocorra seria considerar y igual a 46. Essa hipótese é pertinente pelo motivo de terem feito isso nas atividades dois e três, porém com o valor declarado da incógnita.

Atividade 5

Resolva o sistema: $\begin{cases} x + 3y = 29 \\ 5y = 35 \end{cases}$ a) o que diferencia este sistema dos anteriores? b) qual das incógnitas é possível obter seu valor sem muitos cálculos? Por quê? c) encontre a solução do sistema e verifique se o par de valores encontrados satisfaz as duas equações.

Nesta atividade a variável "coeficientes das incógnitas" assume o valor três do y da primeira equação e cinco do y da segunda equação. Essa atividade assemelha-se à anterior, porém vê-se que ao substituir o y da primeira equação, deve-se lembrar de multiplicá-lo por três. Com isso, a variável "tipo do anunciado" assume o valor da forma como o sistema está proposto. O sistema é colocado de forma que na segunda equação o valor de y pode ser calculado com a resolução de uma equação do 1º grau (5y = 35).

Assim como na atividade anterior, uma possível estratégia de resolução do sistema será resolver a equação 5y = 35 para obter o valor de y = 7. Substituir o valor de y na segunda equação x + 3y = 29, obtendo x + 3.7 = 29. Multiplicar três por sete e resolvê-la. Com a correta resolução dessa equação obtém-se x = 8. Acredita-se que seja utilizada essa estratégia por, a essa altura, apresentarem alguma experiência em resolverem sistemas desse tipo.

As dificuldades que podem surgir estão relacionadas às dificuldades na resolução de equações do 1º grau, bem como da substituição do valor obtido na outra equação, pois, nesse caso, deve-se lembrar de multiplicá-lo por 3.

Entre os erros que podem surgir destacamos:

- a transposição de termos de um membro para outro sem a devida troca de sinal (FREITAS, 2002);

- transpor o coeficiente dependente da incógnita somando ou subtraindo (FREITAS, 2002).

Atividade 6

Resolva o sistema: $\begin{cases} x + y = 20 \\ x = 3y \end{cases}$ a) resolver uma equação com duas incógnitas é difícil, porém, se conseguirmos fazer com que uma equação do sistema tenha apenas uma incógnita, podemos encontrar seu valor e depois o valor da outra. É possível fazer isso? Como? c) se conseguiu encontrar os valores de x e y, como sabe se estão corretos? Explique.

Nessa atividade a variável “tipo do enunciado” assume o valor da forma como o sistema se apresenta; x está em função de y na segunda equação. Objetiva-se com isso, que o sujeito perceba que ao colocar uma das incógnitas em função da outra em uma das equações, fará com que surja uma equação do 1º grau com uma incógnita quando for substituir a expressão obtida na outra equação.

Deve-se perceber que a segunda equação do sistema apresenta o x isolado no primeiro membro. Nesse caso, essa incógnita na primeira equação deve ser substituída pela expressão 3y, objetivando-se com isso uma equação com uma incógnita 3y + y = 20. Resolvendo-se essa equação, obtém-se o valor de y = 5. Substituindo-se esse valor em y de qualquer uma das equações do sistema (x = 3.5 ou x + 5 = 20), obtém-se o valor de x = 15. Outra possibilidade de resolução seria isolar o x da primeira equação no primeiro membro (x = 20 –y) e substituir a expressão correspondente no x da segunda equação. Ao resolver a equação 20 – y = 3y, encontrará o valor de y = 5. Neste caso, o valor de x será encontrado após a substituição de y por 5 na primeira equação.

Talvez possa surgir a dificuldade em se ter a ideia de substituir a expressão correspondente em seu lugar na outra equação. Isso se deve ao fato de que, segundo Booth(1995), o aluno tem dificuldade em considerar uma expressão algébrica como um valor numérico.

Atividade 7

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} y = 2x \\ 7x - y = 25 \end{cases}$$

a) anote tudo que você fez para resolver o sistema.
b) como saber se os valores encontrados estão corretos? Escreva sua resposta.

Essa atividade se assemelha à anterior, porém vê-se que nesse caso o y está em função do x e isso ocorre na primeira linha do sistema. Com isso, damos destaque à variável “tipo do enunciado”. Nessa atividade jogamos com essa variável objetivando que se perceba que tanto x como y pode ser colocado em função um do outro, isso pode ocorrer em qualquer uma das equações. Porém, pela forma do sistema, acredita-se que uma possível estratégia de resolução seria aproveitar o fato de que uma das incógnitas está isolada no primeiro membro da equação a qual faz parte. Nesse caso, vê-se que y = 2x. Ao substituir a expressão 2x em y da segunda equação, obtêm-se a equação7x -2x = 25 cujo resultado é x = 5. Substituindo-se esse valor no x de qualquer uma das equações, encontra-se o valor de y = 10.

Além da dificuldade comentada na atividade anterior, pode ser que ocorra substituição errada. Substituir o x ao invés do y. Essa hipótese se deve ao fato de que na atividade anterior isso tenha ocorrido, ou seja, o x foi substituído pela expressão correspondente. Caso ocorra a hipótese de resolução citada, o erro que poderá surgir na resolução da equação 7x – 2x = 25 é, após a realizar a operação 7x – 2x:

- transpor o coeficiente 5 subtraindo ou somando (x = 25 – 5 ou x = 25 + 5);

- transpor o coeficiente 5 trocando-o de posição com o 25 ($x = \frac{5}{25}$);

- transpor o coeficiente 5 corretamente, porém, acrescentando sinal negativo ($x = \frac{25}{-5}$).

Os erros citados se referem às dificuldades de aprendizagem da álgebra apontadas nas pesquisas, bem como no teste diagnóstico. É conveniente lembrar que durante essas ações o *Aplusix* retroagirá informando que estão erradas, porém, não apontará a forma correta. Caberá ao aluno refletir sobre suas ações e tentar buscar a correção dos passos equivocados.

Atividade 8

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

a) é possível considerar uma das letras como sendo um número conhecido em uma das equações do sistema e tentar resolvê-la da forma como conhece?
b) escreva aqui o que você fez para encontrar o par de números.
c) como saber se esses números satisfazem as duas equações do sistema?

Nesta atividade destacamos a terceira variável “tipo do enunciado” por apresentar um sistema na forma canônica com todos os termos das equações não nulos. Na primeira atividade desse bloco colocamos um sistema semelhante a esse, porém, com objetivos diferentes. Na primeira atividade objetivava-se o primeiro contato do aluno com a resolução de sistemas. Da segunda até essa atividade fomos colocando sistemas de forma que a aprendizagem fosse sendo construída gradativamente até que se chegasse a um método de resolução, no caso, o método da substituição. Com isso, a variável didática mencionada assume o valor da forma como o sistema se apresenta.

Diferentemente dos sistemas das atividades anteriores, esse sistema não apresenta o valor de uma das incógnitas declarado, bem como uma das incógnitas isolada no primeiro membro de uma das equações do sistema. Um desafio será levá-los a fazer isso, ou seja, isolar uma das incógnitas com a intenção de substituir a expressão resultante na outra equação.

O conhecimento que tinham em resolver equações até o início dessa investigação, de acordo com o teste diagnóstico, se restringia a resolução por transposição de termos da seguinte forma: "números com x devem ficar no primeiro membro e números sem x devem ficar no segundo membro. Ao passar um número de um membro para outro é só trocar seu sinal"[10]. Vemos, com isso, que pela experiência deles apenas os números sem letra ficam no segundo membro da equação. Para contornar esse entrave propusemos que seja considerada uma das incógnitas do sistema como sendo um número conhecido com o objetivo de que o aluno perceba que em certos momentos pode-se considerar uma letra como sendo a representante de um número desconhecido a qual posteriormente pode-se obter seu valor.

Caso seja isolado o x no primeiro membro da primeira equação e que o y seja transposto para o segundo membro como se fosse um número conhecido ($x = 13 - y$), eles poderão descobrir que, fazendo isso, o sistema se tornará semelhante aos das atividades 6 e 7. Em um primeiro momento pode-se ficar sem saber o que fazer, porém, percebe-se que o x da segunda equação pode ser substituído pela expressão equivalente ($13 - y$). Essa ação resulta em uma equação do 1º grau $13 - y - 2y = 1$, que equivale a $13 - 3y = 1$, que por sua vez tem solução $y = 4$. Substituindo-se esse valor no lugar do y de qualquer uma das equações do sistema, obtém-se novamente uma equação do 1º grau: $x + 4 = 13$ ou $x - 2.4 = 1$ as quais têm solução $x = 9$.

Entre as dificuldades que podem ocorrer nessa estratégia, destacam-se:

- considerar o y como sendo um número conhecido;
- considerar a expressão $13 - y$ como sendo o valor de x;
- enxergar que é possível trocar x pela expressão $13 - y$ na outra equação do sistema.

Entre os erros que podem ocorrer nessa estratégia, destacam-se:

- transpor o y para o segundo membro sem trocar sinal;
- somar, subtrair ou juntar os termos 13 e o y: 12y ou 14y ou -13y;
- substituir o x da segunda equação pela equação $x = 13 - x$, resultando em uma equação com duas incógnitas e três membros ($x = 13 - y - 2y = 1$);
- errar na soma de $-y$ com $-2y$: $+ 3y$;
- na resolução das equações resultantes, transporem termos de um membro para outro sem a troca dos sinais.

Outras possibilidades seriam isolar o y no primeiro membro da primeira equação ou isolar o x no primeiro membro da segunda equação e proceder como na forma citada no

[10] Resposta de um aluno durante a realização do teste diagnóstico à pergunta: como você resolve uma equação do 1º grau?

parágrafo anterior. Também existe a possibilidade de que seja isolado o y no primeiro membro da segunda equação, porém, neste caso, a dificuldade seria maior, uma vez que o coeficiente 2 deverá dividir a expressão x – 1. Isso poderia ocasionar erros tanto na transposição do número mencionado quanto na substituição da expressão no y da segunda equação.

Atividade 9

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x - 5y = 2 \end{cases}$$

Nesta atividade destacamos as variáveis didáticas "coeficientes das incógnitas" e "tipo do enunciado". Quanto à primeira, não sugerimos qual incógnita pode ser isolada, porém, deixamos o x da primeira equação com multiplicidade 1. Objetiva-se com isso que se saiba discernir qual a escolha mais prática ao se resolver um sistema pelo método da substituição, haja vista que qualquer outra escolha na resolução desse sistema pelo método mencionado ocasionaria em ter que dividir a expressão do segundo membro pelo coeficiente da incógnita. Objetivam-se também com o uso desta variável, retroações quando o aluno for substituir a expressão 0+3y no lugar do x da outra equação; é possível que desconsiderem o fato de que zero é o elemento neutro da adição e mantenham a expressão 0+3y. Quanto às retroações citadas, visa-se com isso o uso correto de parênteses em futuras situações semelhantes, uma vez que, durante a substituição, surja a expressão $2.0 + 3y - 5y = 2$, sendo que a substituição correta deve ser: 2.3y – 5y = 2 ou 2.(0+3y) – 5y = 2.

Quanto a segunda variável, esta assume o valor da forma como o sistema está proposto. Colocamos o termo independente da primeira equação, a qual se supõe que o x seja escolhido para ser isolado, igual a zero. Objetiva-se com isso que, ao transpor o termo -3y para o segundo membro, a expressão resultante seja um monômio, com isso, os conhecimentos adquiridos para resolver os sistemas das atividades 7 e 8 são utilizados. O próximo passo será propor um sistema cuja incógnita escolhida para ser isolada seja equivalente a uma expressão de dois termos.

Pelo fato de já se ter experiência em resolver sistemas os quais apresentam uma equação da forma y = kx ou x = ky (k inteiro), espera-se que a estratégia de resolução contemplada recaia nas que supomos nas atividades anteriores. Dessa forma, transpondo-se o termo -3y para o segundo membro da primeira equação do sistema obtém-se x = 3y. Substituindo-se a expressão 3y no lugar do x da segunda equação obtém-se 6y – 5y = 2, o que resulta em y = 2. Ao substituir esse valor em qualquer uma das equações do sistema obtém-se x = 6.

As dificuldades que podem surgir estão relacionadas aos erros de resolução de equações apresentados no teste diagnóstico, tais como: ao substituir o x da segunda equação por 3y, repeti-lo (2x3y – 5y = 2); cometer os erros de transposição citados nas atividades anteriores; somar ou subtrair termos que não são semelhantes e; caso escolha um termo que não seja o x da primeira equação, não saiba o que fazer com o coeficiente.

Atividade 10

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 3x - y = 26 \end{cases}$$

Nesta atividade apresentamos um sistema de forma que ao isolar uma das incógnitas, a expressão resultante tenha dois termos. Como dissemos na atividade anterior, espera-se que a incógnita escolhida tenha coeficiente 1, já que nossa intenção, pelo menos nesse momento, não é a de trabalhar com situações que envolvam frações durante a resolução. Nesse caso, ao isolar uma das incógnitas, a equação contemplada se apresentará da seguinte forma: y = ax + b ou x = ay + b (a e b inteiros). Como o sistema proposto apresenta o y das duas equações com coeficiente 1, espera-se que, se mantida nossa hipótese, esses sejam isolados da seguinte forma: y = 9 – 2x e/ou y = -26 + 3x. Nesta atividade a variável didática "coeficiente das incógnitas" se justifica pelas retroações que podem ocorrer por dois motivos: caso seja escolhido o y da primeira equação, quando for substituir a expressão resultante na segunda equação deve-se lembrar de distribuir o sinal negativo; se for escolhido o y da segunda equação, deve-se lembrar de multiplicar ambos os membros por -1 para que seu coeficiente fique positivo. No primeiro caso pode-se lançar mão da colocação dos parênteses e a correta aplicação da propriedade distributiva. No segundo caso, porém, como o número um é o elemento neutro da multiplicação, a multiplicação de ambos os membros da equação por -1 fará com que o coeficiente de y se torne positivo.

Devido ao fato de esse bloco vir mantendo uma linha de construção do processo de aprendizagem da resolução de sistemas, nos quais, em um primeiro momento, deve-se isolar uma das incógnitas em uma das equações, espera-se que a estratégia utilizada seja a do método da substituição. Porém, existem três hipóteses quanto ao uso dessa estratégia: isolar o y da primeira equação e substituir a expressão correspondente na segunda equação; ou, isolar o y da segunda equação e substituir a expressão correspondente na primeira equação; ou, isolar o y nas duas equações e igualar as duas expressões correspondentes.

Embora os coeficientes de y sejam os números simétricos 1 e -1, o que poderia levá-los a somar as equações com a intenção de que surja uma equação com uma incógnita e devido à forma como vem sendo propostas as atividades deste bloco, acredita-se que a resolução se dará por meio do método da substituição. Uma vez que a aprendizagem deste método vem sendo construída neste bloco.

Caso a incógnita escolhida para ser isolada no primeiro membro seja o x, acredita-se que a dificuldade seja maior já que, dependendo da escolha, 2 ou 3 tenha que passar dividindo toda a expressão no segundo membro e isso poderá fazer com que se perca certo tempo, uma vez que pode-se não lembrar de colocar os números citados dividindo toda a expressão resultante.

Os erros que podem surgir estão relacionados à resolução das equações, citados nas atividades anteriores, categorizados por Freitas (2002, p. 46), tais como: transposição de termos sem troca de sinal, transformação de ax = b em x = b – a, alteração do sinal do coeficiente na divisão do termo independente.

Atividade 11

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} -2x + y = 15 \\ 3x - 11y = 6 \end{cases}$$

Seguindo a linha de construção do conhecimento da resolução de sistemas pelo método da substituição, essa atividade tem como destaque, entre as variáveis didáticas elencadas nessa experimentação, a variável "coeficientes das incógnitas". Isso se deve ao fato de que, caso a incógnita escolhida para ser isolada no primeiro membro seja o y da primeira equação, a substituição da expressão correspondente na segunda equação tem que ser feita tomando-se o cuidado em colocar parênteses e aplicar corretamente a propriedade distributiva. Talvez haja certa dificuldade para que se perceba isso, uma vez que, de acordo com Pesquita (2007), alunos nessa faixa etária tendem a esquecer de utilizar parênteses ao simplificarem expressões algébricas e isso se estende a outros casos.

Como dissemos nas atividades anteriores uma provável escolha da incógnita para ser isolada no primeiro membro será à que apresentar coeficiente igual a 1. Caso essa hipótese seja contemplada, deve-se transpor o termo -2x para o segundo membro com a intenção de isolar o y no primeiro membro. Com isso, essa equação passa a ter o seguinte aspecto: y = 2x + 15 ou y = 15 + 2x. Após essa ação o próximo passo será substituir a expressão correspondente no y da segunda equação [3x – 11.(2x + 15) = 6]. Ao aplicar a propriedade distributiva corretamente obtém-se uma equação do 1º grau na incógnita x. Resolvendo-a obtém-se o valor de x igual a - 9. Substituindo-se esse valor em qualquer uma das equações obtém-se y = -3.

A justificativa do uso de apenas essa estratégia se deve ao fato de que nas atividades anteriores já se tenha como escolha a equação que tem uma das incógnitas com coeficiente igual a 1. Vale notar que o uso dessa estratégia não libera o aluno de ações erradas, já que, como dissemos, devem-se colocar parênteses quando for substituir a expressão em seu lugar na segunda equação.

Entre as dificuldades relacionadas aos erros algébricos que poderão ocorrer, relacionamos:

- não colocar parênteses quando for fazer a substituição, isso acarretará retroações do *Aplusix*;

- se coloquem parênteses talvez haja falha no uso correto da distributiva. De acordo com Demana e Leitzel (1995, p. 71), “o uso correto dos parênteses é outro aspecto técnico da parte essencial em álgebra, [...] A expressão correta 3(x + 2) é igual a 3x + 2?”.

Apresentamos a seguir a descrição e a análise dos dados coletados na aplicação das atividades do bloco 3. Para apresentação desta análise disponibilizamos alguns excertos e protocolos com objetivo de confirmar as observações levantadas.

3.5.1 Bloco 3: experimentação e análise a *posteriori*

Como tínhamos previsto na análise a *priori*, antes de propormos as atividades deste bloco, apresentamos o significado da solução de um sistema de equações; mostramos que os dois valores que compõem a solução têm que satisfazer as duas equações simultaneamente. Posteriormente propomos que dado um sistema o desafio será encontrar o par de valores que satisfazem suas equações.

Para termos uma visão geral dos resultados deste bloco, em um primeiro momento sintetizamos as evoluções das duplas no quadro a seguir.

	RP	GN	LC	AA	JY
A1	Tentou resolver apenas por tentativa ao acaso	Tentou resolver apenas por tentativa ao acaso	Tentou resolver apenas por tentativa ao acaso	Tentou resolver apenas por tentativa ao acaso	Tentou resolver apenas por tentativa ao acaso
A2	Percebeu que o valor de y foi dado. Substitui e encontrou o valor de x.	Percebeu que o valor de y foi dado. Substitui e encontrou o valor de x.	Resolveu com ajuda das outras duplas.	Percebeu que o valor de y foi dado. Substitui e encontrou o valor de x.	Resolveu com ajuda das outras duplas.
A3	Resolveu utilizando o que aprendeu na atividade anterior.	Resolveu utilizando o que aprendeu na atividade anterior.	Resolveu utilizando o que aprendeu na atividade anterior.	Resolveu utilizando o que aprendeu na atividade anterior.	Resolver após ajuda das outras duplas
A4	Resolveu após descobrir que primeiramente bastava resolver a equação 2x = 46.	Resolveu após a descoberta da dupla RP.	Resolveu após a descoberta da dupla RP.	Resolveu após a descoberta da dupla RP.	Resolveu após a descoberta da dupla RP.
A5	Resolveu utilizando o que aprendeu na atividade 4.	Resolveu utilizando o que aprendeu na atividade 4.	Resolveu com ajuda das outras duplas.	Resolveu utilizando o que aprendeu na atividade 4.	Resolveu com ajuda das outras duplas
A6	Resolveu após as trocas de ideias entre os membros da dupla e as outras.	Resolveu por meio das trocas de informações.	Resolveu por meio das trocas de informações.	Conseguiu resolver por meio das trocas de informações.	Resolução parcial; não conseguiu chegar a solução
A7	Resolveu utilizando o conhecimento construído na atividade 6.	Resolveu utilizando o conhecimento construído na atividade 6	Resolveu utilizando o conhecimento construído na atividade 6	Resolveu utilizando o conhecimento construído na atividade 6	Resolveu utilizando o conhecimento construído na atividade 6
A8	Resolveu a partir do momento em que as formulações se mostraram mais elaboradas	Resolveu chegar à solução após ter refeito as quatro atividades anteriores.	Resolveu após a dupla GN ter encontrado a solução.	Resolveu após a dupla GN ter encontrado a solução.	Resolveu após a dupla GN ter encontrado a solução.
A9	Conseguiu resolver utilizando a mesma estratégia da atividade anterior.	Conseguiu resolver utilizando a mesma estratégia da atividade anterior	Encontrou a solução após as formulações promovidas pelas duplas GN e AA.	Encontrou a solução após as formulações promovidas pelas duplas GN e AA.	Não conseguiu resolver
A10	Não participou da resolução. Faltou no dia que aplicamos essa atividade.	Resolveu após a dupla AA ter descoberto como tornar o y positivo.	Resolveu com auxílio da dupla GN.	Não conseguiu encontrar a solução.	Resolveu com auxílio da dupla GN.
A11	Resolveu pelo método da substituição depois de várias discussões e formulações.	Resolveu com auxílio das trocas de informações.	Resolveu com auxílio das trocas de informações.	Resolveu com auxílio das trocas de informações.	Resolveu com auxílio das outras duplas encontrou a solução.

Quadro 6: síntese dos resultados do bloco 3

Por meio da observação dos resultados apresentados no quadro, percebemos que a construção do conhecimento a qual convergiu no método da substituição, ocorreu efetivamente a partir da segunda atividade. Como nossa estratégia foi a de propor situações que pudessem ser vividas como *adidáticas*, em vários momentos percebemos as fases de ação e formulação, entretanto, a validação só ocorreu por meio das respostas do *software*. Se o *Aplusix* validava como correta a linha de resolução eles aceitavam e passavam à próxima etapa, mas se, no entanto, o *software* assinalava como operação errada, mudava-se a estratégia até que fosse atingida a validação visada. Para melhor compreensão, passamos, então, à análise das atividades deste bloco.

Embora estivéssemos previsto na análise a *priori* que seriam utilizados para análise dos dados coletados apenas as gravações do *software* e o áudio da aula, na atividade 1, que consistia em resolver o sistema $\begin{cases} x - y = 66 \\ x + y = 160 \end{cases}$, foi utilizado apenas papel e lápis. Isso ocorreu por motivos alheios a nossa vontade, uma vez que no dia em que aplicamos esta atividade a sala de tecnologia da escola estava fechada pela ausência da professora responsável. Pensamos em cancelar a aula, porém, isso poderia atrasar a experimentação, uma vez que tínhamos prazo para o término da coleta de dados. Como nesse dia só tinha uma aula de matemática, a direção da escola providenciou uma sala que estava vazia para que pudéssemos dar continuidade ao trabalho.

Embora o conhecimento envolvido seja novo para esses sujeitos, houve a devolução do problema, eles se dispuseram a encontrar a solução sem a ajuda de um professor, contrariamente às situações habituais quando estão acostumados a terem uma explicação antes da aplicação de exercícios. Apesar de termos colocado os valores dos coeficientes independentes razoavelmente grandes, as primeiras ações se deram por tentativas de valores ao acaso. Tínhamos previsto na análise a *priori* desta atividade que as retroações poderiam surgir diante de um possível excesso de tentativas, porém, nenhuma outra estratégia foi utilizada. Embora os coeficientes de y sejam números opostos, no caso -1 e +1, a previsão de que poderiam somar as duas equações não ocorreu. Como foi dito, nenhuma outra estratégia prevista na análise a *priori* foi disponibilizada para resolução desse sistema, mesmo que tenham sido questionados se havia outra forma de resolver e se os resultados encontrados estavam corretos.

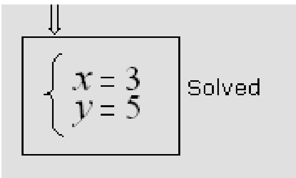
Analisando as situações propostas, percebemos que eles tentaram encontrar a solução por meio de vários cálculos aleatórios com os valores que aparecem no sistema, porém, os valores 113 e 47 que satisfazem as equações do sistema não foram encontrados. Acreditamos que pelo fato de essa atividade não ter sido feita utilizando-se o *software*, uma vez que as retroações impostas pelo meio não os levaram a sentirem a necessidade de outra estratégia. Se por um lado eles não esboçaram a necessidade de disporem de um recurso algébrico para resolver o sistema proposto, por outro lado achamos que pelo fato desta ter sido a primeira atividade de resolução de sistemas, não deveríamos insistir, haja vista que eles poderiam se entediar e abandonar a tarefa. Desta forma, a partir da atividade 2 propomos sistemas de forma que a resolução por meio do método da substituição possa surgir, tendo em vista que queremos atingir o terceiro objetivo desta pesquisa. Isto se justifica por dois motivos não excludentes: tempo - não temos tempo suficiente para propor atividades de forma que surja espontaneamente alguma estratégia de resolução que convirja em um método de resolução; uniformidade – poderiam surgir métodos diferenciados (substituição/adição ou outros), com isso, teríamos que intermediar os comentários que surgiriam quanto ao mais eficiente, pois, cada autor poderia querer defender o seu método; isso poderia fazer com que as situações fugissem do nosso propósito.

Após a primeira atividade deste bloco propomos os próximos sistemas para serem resolvidos por meio do *software*, entretanto, para termos um registro escrito, entregamos uma folha contendo a mesma atividade para ser resolvida utilizando-se papel e lápis; após a resolução no *Aplusix*, eles resolviam também na folha para que houvesse um registro.

A atividade 2 a qual consistia em resolver o sistema $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ \quad\;\; y = 5 \end{cases}$ foi proposta para ser resolvida primeiramente pelo *software*, uma vez que esse recurso não permitia que o dispositivo algébrico fosse resolvido por tentativas ao acaso. A menos que fosse mantida a estrutura do sistema e as letras que correspondem às incógnitas. Em um primeiro momento, ao aceitarem a incumbência de encontrarem a solução, não souberam como resolver por tentativa, uma vez que o sistema não apresentava uma de suas equações da forma x + y = k. Acreditamos que a variável didática "coeficientes das incógnitas", representada pelo valor dois na primeira equação os tenha desmotivados a utilizarem a estratégia citada. Acredita-se também que pelo fato de o sistema estar ilustrado de forma diferente à da atividade anterior tenha contribuído para mudança de estratégia.

Após perceberem que não dava para resolver o sistema por tentativa, tentaram por resolução de equações do primeiro grau. Analisando as gravações em videocassete da resolução da dupla RP percebemos que tentaram transpor o coeficiente de x para o segundo membro (x+y = 11 – 2). Erro não previsto na análise a *priori*, porém, relatado por Freitas (2002) em sua pesquisa. Embora tenham transposto erradamente o coeficiente de x para o segundo membro da primeira equação, percebemos por meio da observação que tentaram utilizar resolução de equações do 1º grau da forma como aprenderam. De acordo com Freitas (2002), esta fase é denominada por Brousseau de situação *adidática* de ação. Nessa fase, o aluno realiza ações mais imediatas, na busca da solução do problema proposto.

Após aproximadamente 20 minutos de tentativas de resolução de uma equação do 1º grau com duas incógnitas a dupla RP percebeu que o valor de y é igual a cinco. A partir desse momento eles chegaram a conclusão que se substituírem esse valor na equação que estavam tentando resolver encontrariam o valor de x por meio da resolução da equação (2x + 5 = 11). De fato, a formulação dessa conjectura foi rapidamente aceita pelas outras duplas, pois o *software* não apresentou nenhuma retroação na substituição mencionada. Ao resolverem a equação 2x + 5 = 11 e confirmarem o fim do exercício, o *software* apresentou como resultado final os valores de x e y, porém, dentro da estrutura de sistemas, conforme mostra o protocolo da observação em videocassete a seguir.



Protocolo 10: observação em videocassete da solução da atividade 2 do bloco 3

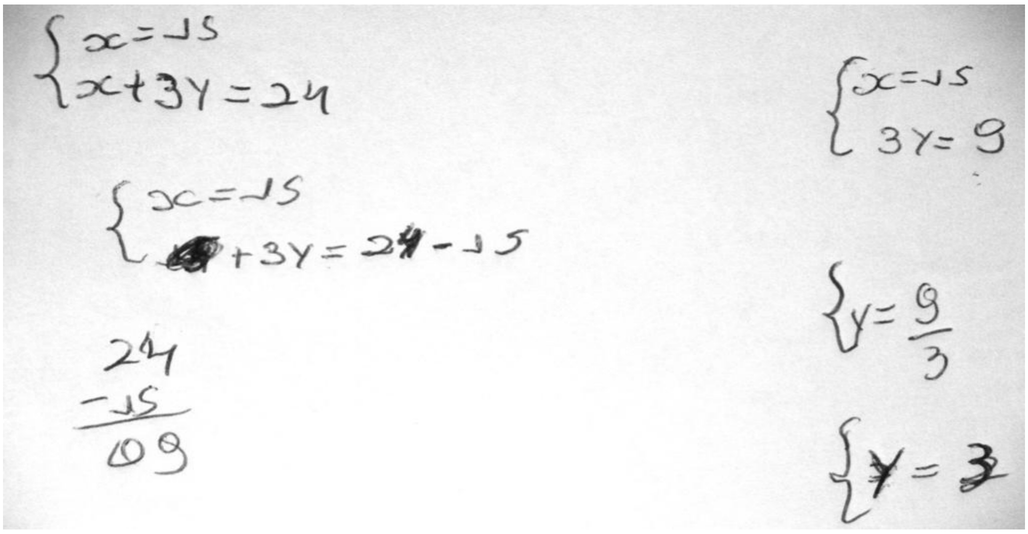
Após encontrarem a solução utilizando o *Aplusix*, pedimos que minimizassem a tela e resolvessem na folha entregue. Tal como foi feito utilizando o *software*, depois de algum tempo entregaram a folha contendo a resolução. Dessa vez não utilizaram tentativas ao acaso, como tinha ocorrido na atividade 1 desse bloco. A partir do instante em que houve a devolução dessa atividade existiram momentos *adidático*s, uma vez que se mostraram empenhados em encontrar a solução. As situações de ação se deram nos momentos em que tentaram resolver o sistema da forma como fazem para resolver equações do 1º grau. As formulações se deram no momento em que a dupla RP percebeu que o valor de y tinha sido dado e que ao substituir esse valor no y da outra equação, bastava resolver a equação resultante para encontrar o valor de x. A validação ocorreu nos momentos em que foram feitas as substituições, bem como na obtenção da solução, uma vez que o *software* não oferecia retroações aos passos dados, embora tenha havido algumas retroações na resolução da equação 2x + 5 = 11, porém, se tratava de erros como o de somar 2x a 5 e transpor o 5 sem a troca de sinal. Como foi previsto na análise a *priori*, as retroações do *Aplusix* fizeram com que houvesse imediata correção da operação incorreta.

Apesar de termos previsto na atividade 3 alguma dificuldade de resolução do sistema $\begin{cases} x = 15 \\ x + 3y = 24 \end{cases}$, o qual se assemelha ao sistema da atividade anterior, no sentido em que apresenta o valor explicito de uma das incógnitas, assim que abriram a atividade logo perceberam que o valor de x tinha sido dado. Substituíram esse valor no x da outra equação e encontraram o valor de y por meio da resolução da equação 15 +3y = 24.

Apesar de termos trocado a incógnita que tem seu valor explícito nesse sistema e mesmo que não tenha ocorrido nossa interferência na sua resolução, consideramos que esta atividade tenha servido apenas como exercício de fixação, uma vez que o conhecimento em resolver sistemas desse tipo tenha sido construído na atividade anterior. Porém, diferentemente da atividade anterior cuja dificuldade maior foi perceber que o valor de uma das incógnitas já era conhecido, como previsto na análise a *priori*, as dificuldades que surgiram estavam relacionadas à resolução de equações do 1º grau com uma incógnita. Em alguns momentos surgiram alguns erros como: somar termos não semelhantes e transpor erradamente um termo de um membro para outro. Entretanto, como na atividade anterior, as retroações do *Aplusix* fizeram com que houvesse correções nas operações indevidas.

Pelo que observamos nas gravações do videocassete do *Aplusix*, as duplas AA e JY, em um primeiro momento, somaram 15 com 3y, passaram 15 para o segundo membro, mas esqueceram de trocar o sinal. Após as retroações do *software*, a dupla AA conseguiu resolver a equação, porém, a dupla JY só conseguiu resolver com a ajuda das duplas RP e GN.

Após a dupla JY ter terminado a resolução, pedimos que minimizassem a tela do computador para resolverem as duas atividades na folha para que pudéssemos ter um registro escrito daquelas situações-problema. É oportuno comentarmos que, embora estivessem utilizando papel e lápis, durante a resolução a estrutura do sistema foi mantida, tal como ocorreu na resolução pelo *software*. O protocolo a seguir ilustra o que estamos comentando.



Protocolo 11: resolução da atividade 3 do bloco 3 no papel

Nos últimos minutos deste encontro, promovemos a institucionalização do conhecimento da resolução desse tipo de sistema com o objetivo de torná-lo operacional para as próximas atividades. Para isso, utilizamos o quadro branco da sala e fizemos algumas considerações com relação à resolução de sistemas propostos nas atividades 2 e 3.

No encontro seguinte, após uma semana de período ocioso, demos sequência à resolução das atividades. Propomos a atividade 4 cujo sistema $\begin{cases} 2y = 46 \\ 7x - y = 12 \end{cases}$ não apresenta o valor de uma das incógnitas declarado, porém, uma pequena equação para ser resolvida. Como fizemos com as atividade 2 e 3, pedimos que resolvessem utilizando primeiramente o *software*. Assim como nas atividades citadas, a devolução ocorreu. Logo que abriram a atividade no *software* entraram em ação. Em um primeiro momento procuraram resolver da forma como aprenderam nas atividades anteriores ao tentarem substituir o y da segunda equação por 46. Diante das retroações do *software*, eles logo perceberam que os conhecimentos adquiridos não eram suficientes para chegarem à solução do sistema; adaptações se mostraram necessárias. Como tínhamos previsto na análise a *priori*, mesmo tendo dificuldade em contornar essa nova situação, eles não tentaram resolver por tentativa ao acaso.

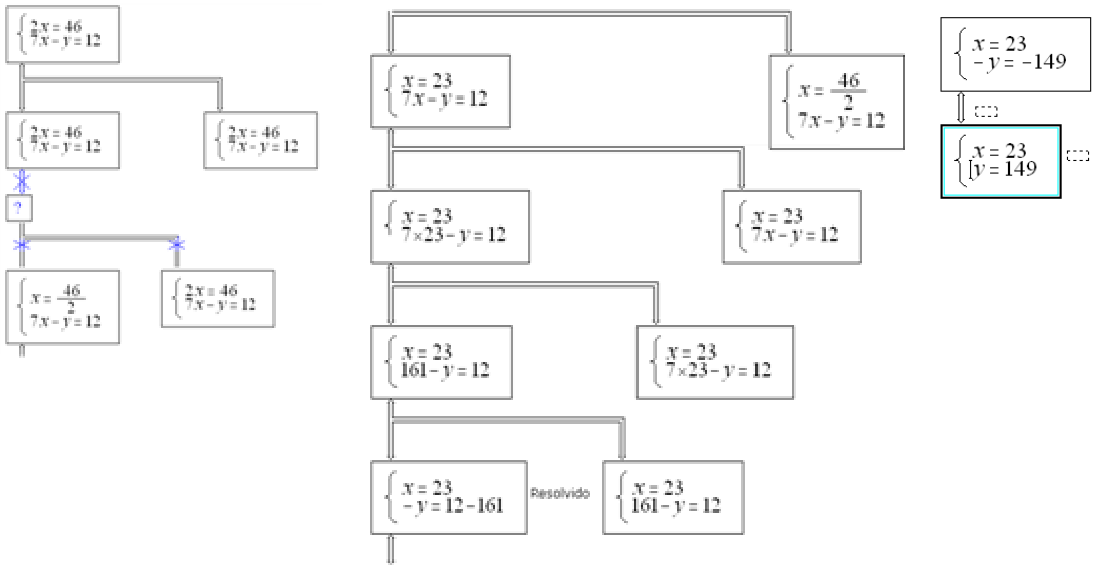
Analisando as gravações em videocassete, percebemos que após algum tempo eles conseguiram encontrar a solução. Porém, antes disso foram várias as ações que não conduziam a uma estratégia ótima. As ações comentadas estão relacionadas às dificuldades em perceber que bastava resolver a equação 2y = 46 para encontrar o valor de y, bem como pelas dificuldades na resolução de equações, constatadas no teste diagnóstico, uma vez que a transposição dos termos era feita de forma incorreta. Diante das retroações, uma vez que o *Aplusix* informava que a passagem entre duas linhas de resolução não apresentava equivalência, os alunos voltavam ao ponto inicial. Durante as tentativas de resolução, percebemos momentos *adidático*s de ação e formulação. Quanto às ações, já discorremos sobre elas no texto, porém podemos perceber por meio da transcrição dos discursos gravados as fases de formulação:

> R: acho que é como no exercício anterior, é só substituir o 46 no y da outra equação.
> P: mas to fazendo isso e o computador (*Aplusix*) ta dizendo que ta errado.
> R: dava certo no exercício anterior, por que não da certo nesse?
> A: mas esse é diferente. Nos que nós fizemos tinha o x e o y com seus valores aparecendo, era só substituir na outra equação que dava certo.
> R: mas nesse aqui também ta aparecendo o valor de y.
> A: mas esse é diferente.

Durante o discurso sentimos que deveríamos intervir pedindo-lhes para compararem esse sistema com os das atividades 02 e 03, porém, como ainda estavam empenhados em descobrir como sair daquela situação inicial, resolvemos não interferir e prolongar o momento *adidático*. Após alguns minutos de discussão a dupla RP formulou que, resolvendo a equação 2x = 46, encontraria o valor de x. Como na atividade anterior, em que o valor de uma das incógnitas era conhecido, a dupla também formulou que o valor de y poderia ser encontrado ao substituir o valor de x na segunda equação. Após compartilharem com as outras duplas essa informação, todos encontraram a solução do sistema. Esse fato pode ser percebido na transcrição a seguir:

> R: acho que o x é 23.
> P: por que 23? Como você sabe? Ah! Dois vezes 23 é 46.
> R: é isso mesmo, vamos substituir pra ver.

Detectamos que a dupla encontrou o valor de x ao perceber que 2x23 = 46, entretanto, ao analisarmos a gravação em videocassete, verificamos que eles resolveram a equação 2x = 46 passando o número 2 dividindo o número 46, como mostra o protocolo a seguir. Pelo discurso, eles poderiam ter substituído a equação citada por x = 23, entretanto resolveram a equação.



Protocolo 12 observação em videocassete da atividade 4 do bloco 3 pela dupla RP

Percebemos que após a resolução da equação 2x = 46 o valor de x torna-se conhecido. Diante disso, o próximo passo foi substituir o valor 23, resultado da resolução, no lugar do x da outra equação, isso se verifica na linha seis. Após a substituição, resolveram a equação 161 – y = 12 e encontraram o valor de y.

Embora nessa resolução só figurem as passagens corretas, é conveniente relatarmos que entre uma linha e outra foram várias as tentativas, que em alguns momentos eram de ações mais imediatas, mais experimentais. Em outros momentos, recorria-se a algum conceito já institucionalizado objetivando-se adaptações às novas situações, uma vez que já se utilizava o termo “substituir”.

Como ocorreu na transição da atividade 2 para a 3, a atividade 5 foi realizada rapidamente pelas duplas, uma vez que eles logo perceberam que o sistema $\begin{cases} x + 3y = 29 \\ 5y = 35 \end{cases}$ apresentava a equação 5y = 35 de fácil resolução. Assim que abriram a atividade na tela do *software* logo resolveram a equação citada, substituíram o valor encontrado no lugar do y da outra equação e encontraram o valor de x. Na substituição, aliás, tínhamos previsto na análise a *priori* que sentiriam dificuldade em perceber a multiplicação implícita entre os termos 3 e y. Isto não ocorreu, assim que encontraram o valor de y, o substituíram na outra equação, multiplicaram por três e a resolveram com facilidade.

Após a resolução dessas atividades, pedimos para desligar o monitor do computador e entregamos folhas contendo as mesmas atividades para serem resolvidas com o objetivo de termos um registro escrito. Embora não estivessem copiando da tela do computador, rapidamente resolveram as atividades propostas. É conveniente comentarmos que diferentemente do que fazemos quando resolvemos sistemas utilizando papel e lápis, assim como fizeram com o uso do *Aplusix*, eles mantiveram a estrutura do sistema. Acreditamos que isso deve ter ocorrido uma pelo fato de que o *software* não permite que seja diferente.

No final desse encontro, institucionalizamos o que foi visto sobre resolução de sistemas e passamos uma lista de exercícios contendo sistemas semelhantes aos que foram trabalhados nas atividades desse bloco, cujo objetivo é a efetivação do conhecimento institucionalizado para que possa ser utilizados

A sexta atividade que consiste em resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 20 \\ x = 3y \end{cases}$ foi proposta com o seguinte comentário: "resolver uma equação com duas incógnitas é difícil, porém, se conseguirmos fazer com que uma equação do sistema tenha apenas uma incógnita, podemos encontrar seu valor e depois o valor da outra. É possível fazer isso?". Consideramos que o comentário citado contribuiu para a resolução, porém, não serviu como "dica", pelo fato de ele não ter orientado os passos para fazer com que uma equação do sistema tenha apenas uma incógnita.

Analisando a gravação em videocassete do *software* percebemos que foram várias as tentativas de encontrar a forma correta de resolução. Diante disso, formulações começaram a surgir:

> A: acho que é só substituir o três no lugar do x na outra equação.
> L: já tentei isso, mas não deu certo.
> A: vamos substituir o y por 3.
> L: por que o y por 3?
> A: porque o y da equação de baixo ta junto com o três
> L: mas não ta dando certo.

Percebemos no excerto do diálogo de LN que nas primeiras tentativas eles procuraram resolver como nas atividades 2 e 3: ora substituir o x pelo três, ora substituir y pelo três. A primeira hipótese se deve ao fato do x estar isolado na segunda equação, porém, na segunda hipótese, eles achavam que o y deveria ser substituído pelo três por estarem juntos na segunda equação. Como tínhamos previsto na análise a *priori*, eles sentiram certa dificuldade em perceber que substituindo o x da primeira equação pela expressão 3y surgiria uma equação com uma incógnita, talvez pelo fato de ainda não aceitarem uma expressão como um valor numérico (BOOTH, 1995).

Embora as ações incorretas não os tivessem entediados por sentirem frustrados com as tentativas que não levaram à solução, procuramos não interferir, uma vez que o êxito na resolução das atividades anteriores tinha ascendido o espírito investigativo desses alunos. Isso se vê no excerto a seguir:

> R: acho que é só resolver a equação x = 3y, como a gente fez nas últimas atividades, lembra?
> P: mas aquelas atividades eram diferentes. Nessa a equação tem duas letras, naquelas só tinha uma para encontrar.

Neste momento sentimos que a qualquer momento a dupla chegaria à conclusão que bastaria substituir a expressão 3y no lugar do x da outra equação, diante disso, preferimos apenas observar as trocas de informações entre o grupo de alunos. A transcrição do diálogo com os momentos de formulações que levaram à substituição prevista na análise a *priori*.

> R: vamos dar valores para y até achar a solução.
> P: assim não, demora muito. Acho que sei.
> R: como?
> P: vamos substituir o 3y no lugar do x da outra equação.
> R: mas assim não vai dar certo, já fizemos um monte de substituição e não deu certo.
> P: você não ta vendo que o x vale 3y

Podemos perceber pela transcrição da fala do aluno P que ele formulou a substituição do x pelo 3y na quarta linha do excerto em um momento e depois, na sexta linha do excerto, defendeu a ideia ao dizer “[...] x vale 3y”. As outras duplas aceitaram a formulação proposta pela dupla RP e verificaram no *software* se estava correta. O comentário da aluna L da dupla LC nos mostra isso.

> L: aqui também deu certo. Agora é só resolver essa equação para encontrar o y e depois o x, como fizemos semana passada (se referia às atividades 2 e 3).

Durante a formulação observamos que, quando a dupla RP percebeu a igualdade entre x e 3y, houve uma concordância de todos, entretanto, a validação só ocorreu após terem substituído x por 3y na outra equação utilizando o *Aplusix*. Isso se verifica na fala da aluna L “aqui também deu certo”.

Percebemos que ao fazerem isso o *software* validou a operação, uma vez que apontou a equivalência entre as linhas de resolução. Após a substituição a dupla logo percebeu que resolvendo a equação 3y + y = 20, encontrariam o valor de y. De fato, resolveram a equação, encontraram o valor de y e substituíram na equação x = 3y e encontraram o valor de x. Logo essas informações foram compartilhadas com as outras duplas que posteriormente também encontraram a solução do sistema.

Como fizemos nas atividades anteriores, pedimos que desligassem o monitor do computador e resolverem a mesma atividade só que utilizando papel e lápis. Apenas a dupla JY não conseguiu resolver o sistema por meio desse recurso, as outras duplas conseguiram. Essa dupla, aliás, também não conseguiu encontrar a solução do sistema utilizando o *software*, verificamos isso ao analisarmos todas as gravações do videocassete.

Semelhante a atividade anterior, a atividade 7 cujo sistema $\begin{cases} y = 2x \\ 7x - y = 25 \end{cases}$ apresenta a primeira equação y = 2x com o objetivo de que o aluno perceba e substitua a expressão 2x no lugar do y da segunda equação. Como já tinham percebido na atividade anterior que a expressão equivalente pode substituir o x na outra equação, o que acarreta a aparição de uma equação com uma incógnita, nesta atividade eles não sentiram dificuldade, uma vez que o y está isolado no primeiro membro em função do x. Rapidamente eles perceberam que substituindo a expressão 2x no lugar do y da equação 7x – y = 25 (7x – 2x = 25) encontrariam o valor de x. De fato, isso foi percebido pela maioria das duplas. As duplas JY e LC sentiram certa dificuldade, pois, por algum tempo ficaram estagnadas esperando alguém encontrar a forma de fazer. Sentimos isso desde as primeiras atividades deste bloco, porém, achamos melhor não interferir, uma vez que, durante as discussões do grupo, estavam proporcionando que essas duplas se apropriassem das ideias e em alguns momentos colaboravam com sugestões. Isso se mostrava mais frutífero que uma explicação direta nossa. Caso não houvesse aproveitamento dessas duplas nas discussões, teríamos que entrar em cena, porém isso não foi necessário.

Tínhamos previsto na análise a *priori* que poderia ocorrer substituição do x ao invés do y, uma vez que na atividade anterior o foi substituído. Entretanto isso não aconteceu. Diante do que tinha construído na atividade anterior, esse erro não ocorreu.

A atividade 8 a qual apresenta uma situação nova cujo desafio é a resolução do sistema $\begin{cases} x + y = 13 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$. Nova no sentido em que o sistema proposto se apresenta na forma canônica. Ao abrirem a atividade eles se depararam com um sistema diferente dos apresentados nas atividades anteriores, porém, tinha-se a possibilidade de fazer com essa situação recaísse nas anteriores, uma vez que, em um primeiro momento, eram levados a refletir sobre a questão escrita na folha entregue: "o que acontece se você considerar o y como um número conhecido em uma das equações do sistema e tentar resolvê-la da forma como conhece?". Logo que abriram a atividade e leram a pergunta na folha, aceitaram a situação proposta (devolução) e entraram em ação. Percebemos pela transcrição a seguir a fase *adidática* de ação.

> R: acho que é só substituir o 13 no x da equação de baixo.
> P: mas por que no x? Não da pra saber se o 13 é x ou y.
> P: não ta dando certo, acho que não é assim.
> R: to achando que esse sistema é igual o do exercício anterior para resolver.
> P: professor esse aqui não da para resolver

Percebe-se pela transcrição da conversa entre os alunos a tentativa de se utilizar os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores, mas as retroações do *Aplusix* os impedia de continuar com a ideia inicial. Em certo momento um dos membros da dupla ameaçou abandonar a atividade, dizendo que não sabia e que estava muito difícil. Por alguns momentos de tentativas improdutivas percebemos que estavam ficando frustrados por não conseguirem encontrar a forma correta de resolver este sistema. Desta vez tivemos que interferir:

> F: o que está acontecendo, por que não estão conseguindo resolver o sistema?
> P: ah! Professor esse ta muito difícil, acho que não vamos conseguir.
> F: pessoal deem uma lida na pergunta junto com a atividade e prestem atenção no sistema.

Procuramos evitar dar informações sobre o conhecimento visado como pede a teoria das situações didáticas. Nesse caso nossa interação foi inevitável pelo fato de que começaram a ficar frustrados por não conseguirem enxergar um caminho correto, uma vez que o sistema não apresentava uma das incógnitas isoladas. Diante disso, procuramos apenas fazer com que lessem a questão na folha e analisassem o sistema proposto, tanto na folha como na tela do computador, com o objetivo de que refletissem sobre a atividade.

Como vinha ocorrendo, a dupla RP na maioria das vezes conseguia chegar ao resultado antes das outras duplas. O aluno P conjecturou corretamente que se passasse o y da primeira equação para o segundo membro, o x ficaria isolado. De fato, ao fazer isso a dupla logo percebeu que a expressão resultante poderia substituir o x na outra equação, assim como faziam nas atividades anteriores. Por perceber que essa dupla sempre estava encontrando o resultado e repassando as informações as outras, desta vez tomamos a decisão em pedir que eles não repassassem o que tinham descoberto. Fizemos isso objetivando que as outras duplas também descobrissem, uma vez que algumas não estavam tomando a iniciativa em resolver as atividades. As duplas mencionadas esperavam alguém formular uma ideia para utilizarem as informações e resolverem a atividade.

Como a dupla RP escolheu o x da primeira equação para ser isolado, isso acarretou em uma substituição simples, no sentido em que não houve a necessidade de colocar parênteses e aplicar a propriedade distributiva, não tiveram dificuldade em resolver o sistema. Durante e depois de a dupla RP ter encontrado a solução do sistema, pedimos para não passar informações para as outras duplas.

Enquanto os alunos da dupla RP jogavam no computador, voltamos nossa atenção às outras duplas. Nesse momento procuramos incitar a dupla GN.

> F: por que vocês não estão tentando?
> G: professor não estamos conseguindo.
> F: vocês conseguiram resolver os outros sistemas?
> N: claro que sim.
> F: mas não foram vocês que fizeram as atividades anteriores,
> G: claro que foi, o senhor não viu?
> F: vi os meninos passando as informações para vocês.
> G: mas não tem nada a ver nós conseguimos.
> F: se fossem vocês teriam conseguido essa atividade também.
> F: os meninos (a dupla RP) conseguiram porque foram eles que fizeram sem a ajuda de ninguém.
> F: vamos fazer o seguinte, então, vou mostrar para vocês que se tivessem feito as outras atividades sozinhas, conseguiriam fazer essa também.
> F: Refaçam as quatro atividades anteriores desse bloco, mas prestem bastante atenção no que estão fazendo.
> G: mas professor, fazer tudo de novo, vai demorar muito.
> F: demora não, rapidinho vocês fazem, mas prestem atenção no que estão fazendo.

Neste momento tomamos essa decisão não prevista na análise a *priori*. Para nossa surpresa, GN e as outras duplas aceitaram a sugestão e refizeram as atividades citadas. Quando chegaram à atividade 8, em poucos minutos conseguiram resolvê-la. A aluna G da dupla GN comemorou como um jogador que acabara de fazer um gol. Nesse momento percebemos que o conhecimento se torna efetivo na medida em que é construído. Talvez esse não tenha sido o motivo de elas terem conseguido resolver o sistema da atividade 8, porém nos momentos anteriores os meninos da dupla RP adiantavam os resultados, fazendo com que as outras duplas não refletissem sobre os caminhos tomados. Diante disso, elas não tinham construído efetivamente os conhecimentos aditados nas atividades anteriores. Desta vez elas prestaram atenção no que estavam fazendo e isso as ajudou na resolução desta atividade.

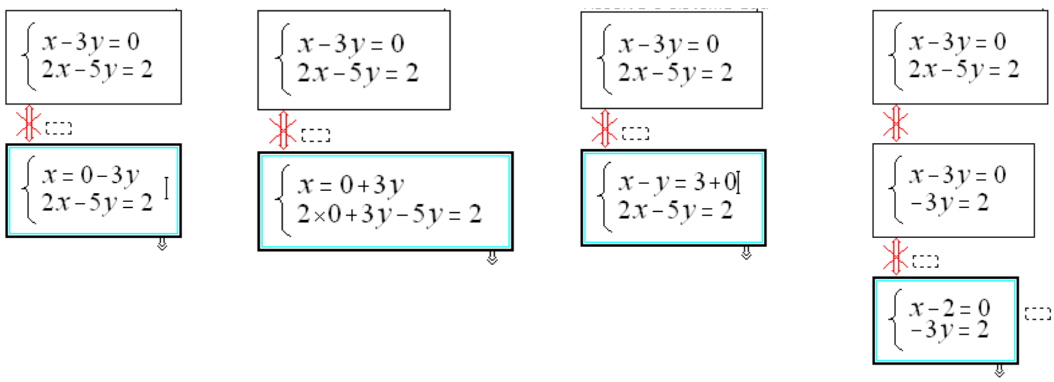
Como faltavam alguns minutos para terminar a aula, aproveitamos para institucionalizar os conhecimentos adquiridos nas atividades 6, 7 e 8. Aproveitamos também para comentar o episódio da última atividade.

A atividade 9 que apresenta o sistema $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x - 5y = 2 \end{cases}$ para ser resolvido utilizando-se o método de resolução que vem sendo recriado ao longo deste bloco de atividades. Recriado no sentido que esse método já existe na noosfera acerca da Matemática, porém, para esses sujeitos será a construção de um novo conceito, no caso, um método para resolução de sistemas do 1º grau.

Como na atividade anterior os alunos conseguiram contornar uma situação que era a resolução de um sistema semelhante a esse, no sentido em que os dois sistemas estão na forma canônica e que é possível isolar uma das incógnitas no primeiro membro sem que seja necessário transpor seu coeficiente para o segundo membro dividindo a expressão resultante. Nesta atividade não sugerimos qual das incógnitas deve ser isolada; deixamos para que o aluno fizesse a escolha. Objetivamos com esta atividade que o aluno saiba qual a melhor escolha.

Assim que abriram a atividade na tela do computador, eles aceitaram resolver o sistema. Embora tenha encontrado certa dificuldade a dupla RP conseguiu em pouco tempo resolver o sistema. Isso se deve ao fato de terem utilizado a estratégia da resolução da atividade anterior. Porém, pelo fato de termos jogado com a variável didática "coeficientes das incógnitas" com o objetivo de que surgissem retroações nas substituições, uma vez que, em situações futuras, se tenha que multiplicar o coeficiente da incógnita substituída pela expressão equivalente, as outras duplas encontraram certa dificuldade para resolver este sistema, haja vista que os erros estavam relacionados às dificuldades de aprendizagem da álgebra, previstos na análise a *priori*.

Como previsto na análise a *priori*, as primeiras ações se deram pelas tentativas improdutivas da substituição da expressão 0 + 3y na segunda equação. Verificamos isso nas gravações em videocassete da resolução da dupla GN.



Protocolo 13: observação em videocassete da atividade 9 do bloco 3 pela dupla GN

Em um primeiro momento o termo -3y foi transposto para o segundo membro sem a devida troca do sinal. Diante das retroações do *software* eles corrigiram o sinal e, como previsto na análise a *priori*, não consideraram o zero como elemento neutro da adição, mantendo-o na soma com o termo 3y. Isso fez com que houvesse erro na substituição da expressão 0 + 3y no x da segunda equação, uma vez que o *software* assinalou como equivalência errada o resultado dessa ação. Após essa tentativa verifica-se que transpuseram erradamente o coeficiente de y da primeira equação para o segundo membro. Pelo que vemos na quarta coluna do protocolo eles subtraíram os termos 2x e 5y o que pode ter acarretado na expressão -3y = 2. Também vemos que após isso eles substituíram o número dois no lugar da expressão -3y, porém, sem a correta mudança de sinal, uma vez que o sinal de subtração acompanhou a expressão. Diante disso, as retroações do *Aplusix* contribuíram para que as estratégias adotadas fossem repensadas e isso se verifica no excerto do diálogo dos membros dessa dupla transcrito a seguir:

> G: acho que estamos fazendo errado, o computador não está aceitando.
> N: mas na atividade anterior conseguimos mesmo que o professor tenha feito a gente fazer de novo as outras atividades.
> N: você lembra como fizemos?
> G: sim, nós deixamos o x sozinho no primeiro membro, depois substituímos o resultado (a expressão equivalente) no outro x.
> N: mas nós fizemos isso e não deu certo (elas estavam se referindo à substituição errada de 0 + 3y na outra equação).
> G: o que ta atrapalhando é esse zero, por que não tiramos ele?
> N: será que pode?
> G: zero não vale nada mesmo.

Percebemos que após algumas ações que não levaram à solução do sistema a aluna G conjecturou que se tirasse o zero da expressão poderia ter êxito na resolução. Apesar de ela ter falado em tirar o zero por apenas pensar que esse número não tem valor algum, implicitamente a aluna considerou o fato de ele ser o elemento neutro da adição. Acreditamos que no instante citado essas alunas estavam vivendo a segunda fase de uma situação *adidática*, a fase da formulação. Após a formulação, as alunas tiraram o zero da expressão 0 + 3y na expectativa que desse certo. Isso fez elas perceberem que o sistema $\begin{cases} x = 3y \\ 2x - 5y = 2 \end{cases}$ se tornou semelhante aos sistemas das atividades 4 e 5 o que as levou a fazerem corretamente a substituição da expressão 3y no x da equação 2x -5y = 2. Embora tenham ocorrido algumas dificuldades de resolução da equação 6y - 5y =2, previstas na análise a *priori*, tais como: substituir o x, mas mantê-lo na expressão (2x3y – 5y = 2 ou 6xy – 5y = 2) e, ao invés de subtrair 5y de 6y, passar o -5y para o segundo membro, a dupla encontrou a solução do sistema. Talvez pelo fato de a dupla GN vir comentando em voz alta as formulações que resultaram na resolução do sistema, as duplas AA e LC também apresentaram em suas resoluções os mesmos procedimentos tomados por GN. A dupla JY, no entanto, não conseguiu chegar à solução.

Quanto à dupla JY, tentamos incentivá-la a terminar a atividade com a justificativa de que as outras duplas tinham conseguido, e que também conseguiria, porém, não quis continuar.

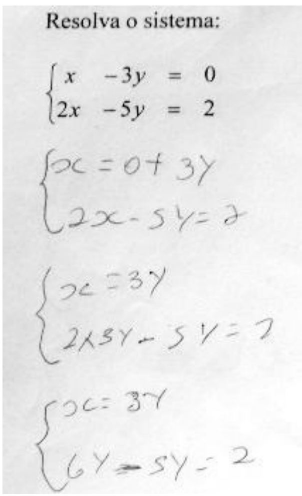
Como vinha ocorrendo na resolução das atividades com o uso do *software*, a fase de validação se deu no momento em que o *Aplusix* não apresentou retroação às operações oriundas das formulações. Isso se verifica no momento em que a dupla GN substitui a expressão 3y no x da outra equação. Depois de várias tentativas infrutíferas a dupla constata que a substituição está correta, uma vez que o *software* não retroage a essa operação.

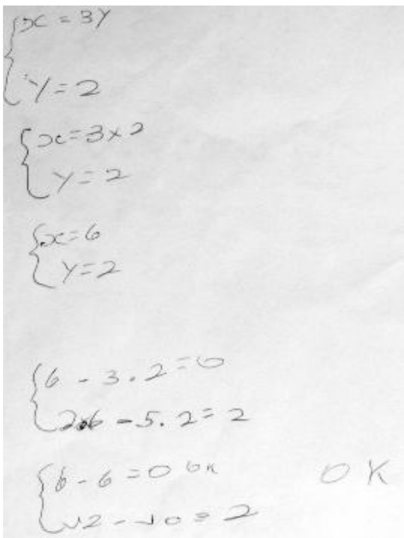
Vemos que a validação ocorreu por meio de um *feedback* do *software*; em um primeiro momento os alunos têm ações experimentais, depois formulam ideias sobre essas ações e quando chegam ao resultado, para ter certeza que está correto, procuram testar no *software*, pois , não tinham certeza se estava correto.

Após terem feito a atividade no *Aplusix* entregamos as atividades 7, 8 e 9 para serem resolvidas utilizando-se papel e lápis. Objetivamos com isso que os conhecimentos construídos utilizando-se o *software* também sejam efetivados no papel e lápis, tendo em vista que são ambientes diferentes. Ao recolhermos as folhas percebemos que, exceto a dupla JY, a resolução das outras estava correta.

A dupla RP sempre se destacava na resolução das atividades. Desta vez não foi diferente, por não terem à disposição a validação do *Aplusix*, no final da resolução eles verificaram a solução encontrada ao substituírem as incógnitas pelos respectivos valores. Embora já se soubesse a solução, oriunda da resolução no *software*, houve uma confirmação por parte dessa dupla dos valores encontrados.

Outro aspecto que se deve levar em consideração se refere ao fato de eles terem mantido a estrutura do sistema do início ao fim da resolução, diferentemente da forma como resolvemos esse dispositivo algébrico, tanto pelo método da substituição como pelo método da adição. O protocolo a seguir corrobora esse fato.





Protocolo 14: resolução da atividade 9 pela dupla RP no papel e lápis

Vemos pelo protocolo que mesmo após a substituição do termo 3y no x da outra equação, a estrutura do sistema é mantida. Esse tipo de resolução se deve à influência do *Aplusix*, uma vez que parte das atividades foi resolvida no *software* mencionado. Para nossa surpresa, na penúltima e última linha eles verificaram por meio da substituição dos valores encontrados no sistema original e assinalaram com um “ok” que o par de valores satisfaz as equações do sistema.

A décima atividade deste bloco teve como objetivo a resolução do sistema $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 3x - y = 26 \end{cases}$. Analisando a gravação do videocassete do *Aplusix* a resolução da dupla AA, percebemos que foram várias as tentativas. Inicialmente elas isolaram o y da primeira equação; na analise a *priori* previmos que se fosse escolhido o y da primeira equação eles teriam dificuldade para fazer a substituição, uma vez que haveria a necessidade da colocação de parênteses, entretanto, a dupla observada isolou o termo 3x no primeiro membro da segunda equação. Isso fez o y ficar positivo.

Desta forma, o sistema equivalente passou a ter a seguinte característica: $\begin{cases} y = 9 - 2x \\ 3x = 26 + y \end{cases}$. Pensamos que elas iam substituir a expressão 9 - 2x no lugar do y da segunda equação, uma vez que isso vinha sendo feito nas atividades anteriores, porém essa hipótese não ocorreu, foram várias as tentativas. Em vários momentos voltaram o sistema à sua forma inicial e retomavam as tentativas. Procuramos todas as gravações em videocassete dessa dupla e não encontramos a que apresentava a solução do sistema.

Se por um lado a dupla AA não encontrou a solução por meio da estratégia citada, por outro lado ela formulou a ideia de passar o termo –y da segunda equação para o segundo membro. Isso fez com o termo transposto se tornasse positivo, facilitando assim, a substituição da expressão equivalente no y da primeira equação pelas outras duplas. Isso se deve ao fato de a dupla autora da formulação citada ter compartilhado essa ideia com as outras duplas.

A dupla GN, por exemplo, não estava conseguindo fazer a substituição e a partir da formulação da dupla AA, obteve êxito. Quando o *software* validou a substituição mencionada, elas perceberam que é possível encontrar o valor de x na equação 3x = 26 + 9 – 2x. Depois que encontraram o valor de x = 7, substituíram esse número na equação y = 9 - 2x e encontraram o valor de y = -5.

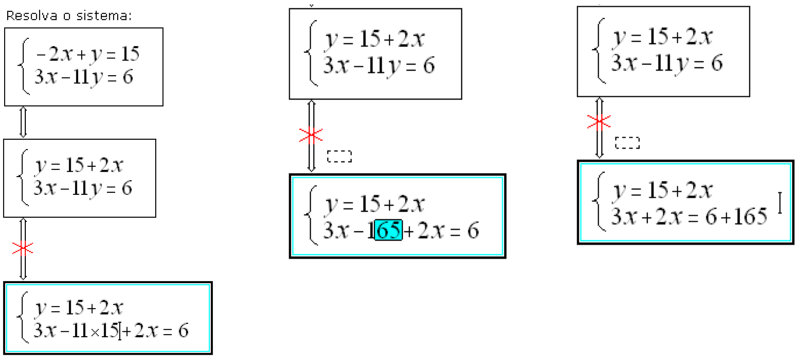
Analisando as gravações em videocassete da resolução do sistema, podemos perceber que alguns erros previstos na análise a *priori* surgiram, entretanto, com menos frequência. Na resolução da equação 3x = 26 + 9 – 2x, em um primeiro momento, a dupla GN transpôs o termo -2x para o primeiro membro sem a troca de sinal, porém, diante da retroação do *software,* o sinal foi trocado. Outro erro que nos chamou a atenção e que sempre vem ocorrendo o qual foi rapidamente corrigido pelo aluno diante da retroação do *Aplusix* foi o erro categorizado por Freitas (2002) como "transformação de ax = b em x = b – a". Percebemos esse erro na resolução da equação 5x = 35, equivalente da equação 3x = 26 + 9 – 2x. Na observação em videocassete percebemos que a dupla GN, por alguns momentos, persistiu na transposição do coeficiente 5 para o segundo membro de forma incorreta: x = 35 – 5 e x = 35 + 5. Como dissemos, as retroações do *software* contribuíram para que houvesse reflexões no sentido em que o aluno percebia que estava realizando operações incorretas.

Na atividade anterior propomos uma situação em que a resolução do sistema poderia ser realizada por meio da colocação de parênteses caso fosse escolhido y da primeira equação para ser isolado, uma vez que o coeficiente do mesmo termo da segunda equação é diferente de 1. Como observamos, a dupla AA encontrou uma forma, não prevista na análise a *priori*, de contornar essa situação, ao passar o termo –y para o segundo membro da segunda equação.

Na décima primeira e última atividade deste bloco propomos o sistema $\begin{cases} -2x + y = 15 \\ 3x - 11y = 6 \end{cases}$ com o objetivo de que seja utilizado parênteses na resolução por meio do método da substituição; isso se faz necessário, tendo em vista que em situações como essa poderão ocorrer quando forem resolver problemas utilizando esse recurso algébrico.

Refletindo sobre o fato de esta situação ser ou não de aprendizagem, haja vista que, por um lado esses sujeitos a esta altura já sabem resolver diversos tipos de sistemas pelo método da substituição, o que seria novo nesta atividade? Por outro lado, situações envolvendo a necessidade do uso de parênteses ainda não foram aplicadas efetivamente. Nas duas últimas atividades colocamos sistemas que poderiam levá-los a dispor do uso de parênteses, entretanto isso não ocorreu. Diante disso, podemos considerar esta como uma situação diferenciada das outras, tendo em vista que na melhor das hipóteses a incógnita escolhida a ser isolada seria o y da segunda equação, porém nesse caso o coeficiente 11 teria que dividir toda a expressão -6 + 3x, o que seria mais difícil de ocorrer. Esta hipótese, aliás, seria uma próxima situação a ser colocada, porém, por motivo de tempo de execução da experimentação ficamos satisfeitos com o que conseguimos até o momento. É importante ressaltarmos que situações em que se devem associar termos de uma expressão com o uso de parênteses, teoricamente não são novas para esses alunos; nos anos anteriores eles já trabalharam com isso. Entretanto, para situações envolvendo resolução de sistemas eles ainda não aprenderam.

Como ocorreu nas outras atividades eles aceitaram a responsabilidade de encontrar a solução do sistema. Assim que aceitaram a situação, entraram em ação e como tínhamos previsto o y foi o escolhido para ser isolado. Também como tínhamos previsto, eles disponibilizaram os conhecimentos construídos, assim que isolaram o y no primeiro membro tentaram substituir a expressão equivalente (15 + 2x) no lugar do y da segunda equação sem a correta colocação dos parênteses. Isso fez com que houvesse um desequilíbrio no sistema cognitivo desses alunos, uma vez que perceberam que seus conhecimentos já não eram suficientes para resolver o sistema. Isto se verifica no protocolo a seguir.



Protocolo 15: observação em videocassete da resolução da atividade 11 do bloco 3 pela dupla RP

Pode-se perceber que as primeiras ações se deram com as tentativas de resolver o sistema da forma vinham fazendo nas atividades anteriores. Isso se justifica pelo fato de estarem tentando encontrar a solução utilizando conhecimentos construídos, ao tentarem substituir a expressão resultante do isolamento do y na primeira equação. Essas ações também fizeram com que surgissem as primeiras retroações do *Aplusix*.

Após várias tentativas improdutivas percebemos certo desânimo por não conseguirem chegar à solução do sistema, porém, observamos um princípio de formulação quando o aluno R lembrou do uso dos parênteses quando se tem um produto de números inteiros dos quais alguns são negativos, diante disso, preferimos apenas observar as discussões. Isso se verifica na transcrição dos diálogos a seguir:

P: por que não está dando certo quando substituímos a expressão no y da outra equação?
R: sei lá! Estamos fazendo tudo certinho.
P: mas o que está errado?
R: deve ser porque não colocamos parênteses. Lembra que a professora no ano passado pedia para colocar parênteses quando tinha uma multiplicação de números com sinais?

Embora o aluno R tenha tido a ideia de colocar parênteses apenas por se lembrar que na multiplicação de números inteiros negativos deve-se fazer isso quando o sinal de multiplicação estiver junto ao sinal negativo, como mostra o protocolo a seguir, consideramos que houve um princípio de formulação.

$$\begin{cases} y = 15 + 2x \\ 3x - 11 \times (-15)] + 2x = 6 \end{cases}$$

Protocolo 16: continuação da observação da resolução da atividade 11

Isto se justifica pelo fato de o aluno R ter se lembrado da importância do uso de parênteses em algumas operações matemáticas. Diante disso, o uso de parênteses para indicar o produto de expressões com mais de um termo poderia ser lembrado. De fato, após várias tentativas que não levaram à solução do sistema proposto e formulações cujas validações não confirmaram êxito, observamos na gravação de áudio o diálogo entre os sujeitos da dupla RP.

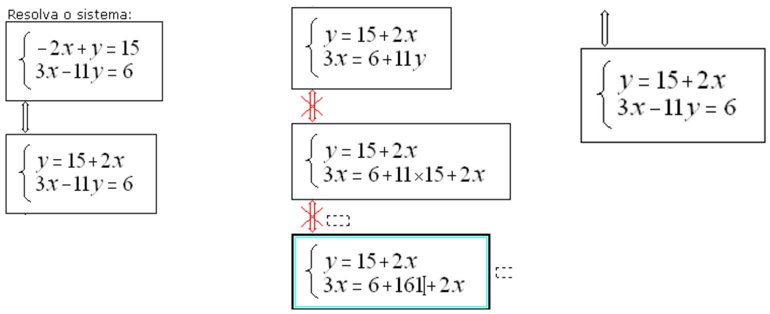
> P: por que as substituições não estão dando certo? Toda hora o computador diz que está errado.
> R: vamos pensar naquelas atividades que tinha que ver as informações do problema e montar o sistema, lembra? (ele estava se referindo às atividades do bloco 2)
> P: mas como assim?
> R: temos que descobrir dois números que duas vezes o primeiro mais o segundo é igual a quinze e depois, três vezes o primeiro número menos onze vezes o segundo número é igual a 6.
> P: não estou entendo nada, o que tem a ver com a resolução?
> R: tem que quando isolamos o y sem número (ele estava se referindo ao coeficiente implícito) no primeiro membro, ele vale a expressão 15 + 2x que tem que ser colocada no lugar do outro y.
> P: acho que sei, é só multiplicar -11 por 13x, aí nós escrevemos o -11 com parênteses (ele formulou que a expressão seria (-11).13x).
> R: mas nós já pensamos isso só que sem parênteses. Tenta aí, vamos ver.
> P: não deu certo.
> R: é porque o y é igual a expressão 15 + 2x, o -11 multiplica toda essa expressão.

Em um primeiro momento não entendemos porque o aluno R se reportou às atividades do segundo bloco, ele não deixou claro. Posteriormente percebemos que estava tentando organizar as ideias de acordo com a estruturação do sistema; ele estava tentando entender como o sistema foi montado. Observamos pelo diálogo dos meninos que as formulações começavam, mesmo que erradas, a convergir para uma estratégia correta. Vemos isso na última frase transcrita "é porque o y é igual a expressão 15 + 2x, o -11 multiplica toda essa expressão". A dupla RP começava a perceber que o -11 multiplica toda a expressão 15 + 2x, só faltava eles lembrarem que matematicamente a representação da frase “multiplica toda a expressão” é dada por meio da colocação de parênteses ou pelo menos por meio da aplicação da propriedade distributiva que consiste na multiplicação de todos os termos de uma expressão que representa um dos fatores do produto envolvido.

Após alguns momentos de discussões o aluno P, depois de receber uma informação da aluna G, formulou uma hipótese quanto ao fato de acharem que o termo -11y estava dificultando a substituição correta da expressão 15 + 2x.

> G: você lembra que na atividade anterior a gente não estava conseguindo, aí as meninas (AA) tiveram a ideia de passar o y para o segundo membro para ficar positivo, lembra?
> P: acho que não estamos conseguindo substituir por causa deste sinal de menos junto com o 11. Vamos fazer como fizemos na outra atividade e passar esse -11y para o outro membro, quem sabe da certo.
> R: sim, mas será que vai dar certo? [...] vamos tentar.

Percebemos pelo excerto que, embora os momentos *adidático*s estivessem resistindo às dificuldades da resolução desta atividade, os alunos ainda se mantinham empenhados em descobrir a solução do sistema. Quanto à hipótese levantada pelo aluno P, podemos perceber no protocolo a seguir que não foi validada pelo *software*. Entretanto, serviu para que pudessem refletir sobre os passos tomados.



Protocolo 17: formulação da dupla RP sobre a resolução da atividade 11

Percebemos pelo protocolo que a estratégia de apenas transpor o termo -11y para o segundo membro logo se mostrou improdutiva. Embora o termo citado tivesse ficado positivo deixando a impressão de que os levaria à solução do sistema, isso logo se mostrou insuficiente pelo fato de não terem colocado os parentes, uma vez que para a substituição visada, a aplicação da propriedade distributiva, implicitamente se mostrava necessária.

Para evitar que não ficassem entediados e desistissem da resolução, promovemos um diálogo entre as duplas.

> F: pessoal o que está acontecendo? Não estão conseguindo? Ainda falta meia hora para terminar a aula, querem ajuda?
> R: não, professor! Estamos quase encontrando a solução. Deixa a gente tentar mais.

> AA: nós queremos ajuda do professor sim, seus metidos!
> LC: nós também, ta muito difícil.
> F: pessoal a ajuda que posso dar seria fazer-lhes perguntas, talvez ajude.
> F: parece-me que R e P tiveram algumas ideias legais. Vocês podem nos dizer o que pensaram?
> R: Professor, nós tivemos as mesmas ideias que os outros (ele estava se referindo às outras duplas).
> P: só que teve uma hora que pensamos em colocar parênteses no -11, só que não deu certo, o programa disse que estava errado. Depois, achamos que o menos do 11y estava atrapalhando, aí, passamos a expressão -11y para o segundo membro para fazer ele ficar positivo, também não deu certo.
> G: eu acho que deve ser igual do ano passado quando a professora ensinou a gente aquelas equações doidas que tinha x + 1, x – 1, 2x + 1, [..]. A gente tinha que colocar parênteses e aplicar a regra do "chuveirinho".

Quanto à regra do chuveirinho comentada pela aluna G, procuramos saber do que se trata, pois não conhecíamos esse termo. Trata-se da propriedade distributiva; a professora utilizava essa estratégia, parecida com macetes de cursinhos pré-vestibulares, como recurso para fazer com que seus alunos entendessem a propriedade citada.

É importante comentarmos a recusa de algumas duplas em aceitar nossa ajuda. Isso mostra que estavam comprometidos em descobrir pelos seus próprios esforços a solução do sistema, haja vista que isso vinha acontecendo nas atividades anteriores. Outro fato que podemos levar em consideração no diálogo que talvez pode tê-los levado a encontrar a solução, está ligado à lembrança da aluna G. Ela se reportou a conhecimentos adquiridos no ano anterior, isso talvez tenha proporcionado novas ideias aos alunos R e P, uma vez que tinham sido os primeiros a pensar em utilizar parênteses.

Após o diálogo, verificamos por meio da ferramenta videocassete que as duplas RP, GN e AA colocaram parênteses corretamente delimitando a expressão 15 + 2x como um fator do produto -11.(15 + 2x). Entretanto, no instante em que houve a validação do *Aplusix* como correta, outra dificuldade surgiu, eles não se lembravam de aplicar a propriedade distributiva, uma vez que, ora não multiplicavam todos os termos do fator correspondente à expressão, ora se esqueciam de colocar o sinal negativo procedente do fator 11. Essas ações mal sucedidas após a substituição logo foram superadas fazendo com que finalmente chegassem à solução do problema.

A partir do instante em que encontraram a resposta os momentos deixaram de ser vividos como *adidático*s pelo fato de sentirmos a necessidade de oficializarmos esse conhecimento, tendo em vista que isso se faz necessário após consolidada a construção de um conhecimento por indivíduos que ainda estão em fase de aprendizagem. Durante a institucionalização chamamos-lhes a atenção quanto à importância do uso dos parênteses em situações como essa. Como vínhamos fazendo, colocamos um sistema do mesmo tipo na lousa e resolvemos junto com eles. Também aproveitamos para resolver o sistema da atividade anterior e mostramos-lhes que, embora tenham conseguido resolver sem o uso de parênteses, em outras situações, lançar mão desse recurso poderá fazer com que consigam resolver sistemas mais complexos.

Pela falta de tempo, pois, o encontro estava chegando ao fim, preferimos não pedir que fizessem a atividade utilizando papel e lápis. Preferimos entregar-lhes uma lista com dez sistemas para serem resolvidos em casa. Objetivamos com isso o treino do uso do método da substituição em situações como as das últimas atividades deste bloco. Todos entregaram a lista com os exercícios resolvidos.

O objetivo deste bloco: "articular estratégias que recaiam em métodos algébricos de resolução de sistemas de equações" foi atingido, de um modo geral, com o êxito da resolução das atividades propostas, haja vista que todas foram resolvidas sem auxílio direto do professor. Durante os encontros, pelo menos uma dupla conseguiu chegar à solução sem auxílio, posteriormente, após as formulações e trocas de informações, todos conseguiam encontrar o par de valores que constituíam a solução do sistema proposto.

Entendemos que o campo algébrico envolvendo esse conceito é muito amplo; não podemos dizer que houve aprendizagem da resolução de sistemas, porém, levando-se em consideração as dificuldades de aprendizagem da Álgebra apresentadas pelos sujeitos no teste diagnóstico, percebemos que houve evolução, pois, a partir da segunda atividade todos os sistemas foram resolvidos por pelo menos uma dupla do grupo.

3.6 Bloco 4: análise a *priori* das atividades

Objetiva-se com as atividades deste bloco a aprendizagem da resolução de problemas escritos em linguagem natural utilizando-se sistemas de equações do 1º grau como estratégia algébrica.

Espera-se que nesse momento o grupo de sujeitos saiba: distinguir as informações do enunciado, informações essas que, de acordo com a sintaxe das frases produzem a correta escrita das equações do sistema; escrever o sistema de acordo com as informações; resolver sistemas de equações do tipo que trabalhamos pelo método da substituição. Diante disso, pelo fato de já se ter passado pelas fases anteriores, neste bloco queremos investigar se o aluno consegue modelar e resolver problemas que podem ser resolvidos algebricamente. Desta forma, optamos por dispensar papel e lápis e utilizar somente o *Aplusix* na resolução das atividades. Isso se justifica pelo fato de não querermos um nível de dificuldade muito grande por não termos tempo suficiente para realizar um trabalho mais específico da passagem da linguagem natural para linguagem algébrica, uma vez que no teste diagnóstico os sujeitos desta pesquisa apresentaram dificuldades para realizar a passagem mencionada. Neste caso, o aluno poderia errar não por não conseguir passar para linguagem algébrica, mas por ter dificuldade com o enunciado. Por esse motivo propomos atividades com as quais o aluno está familiarizado, seja em termos de linguagem, seja em termos de resolução do sistema. E para observar se eles conseguem passar para a álgebra, optamos por usar o *Aplusix* e formular problemas cuja solução somente será aceita pelo *software* se o aluno traduzir as informações escritas em linguagem natural em forma de sistemas.

Atividades

1- Nessa atividade o desafio é encontrar dois números cuja soma é igual a 17 e a diferença entre esses números seja igual a 5.

2- Encontre dois números cuja soma é igual a 11 e a diferença entre o dobro de um número e o triplo do outro número seja igual a 2.

3- A soma das idades de Paulo e João é igual a 22 anos. A diferença entre a idade de Paulo e a idade de João é igual a 8 anos. Sabendo-se que Paulo é mais velho, qual a idade de João e de Paulo?

4- Num quintal há galinhas e coelhos. Há 17 cabeças e 44 pés. Quantas são as galinhas? Quantos são os coelhos?

5- Carlinhos e Celso têm juntos 201 figurinhas. Carlinhos tem o dobro de figurinhas de Celso. Com base nessas informações, quantas figurinhas tem Carlinhos e quantas tem Celso?

6- Uma fábrica produz carrinhos de bebê e triciclos. Hoje produziram 11 unidades e para montá-las usaram 40 rodas. Quantos carrinhos e quantos triciclos foram produzidos nessa fábrica hoje?

Optamos em colocar seis atividades dos blocos 1 e 2 com o objetivo de analisarmos como vão resolvê-las, já que desta vez poderão lançar mão desse novo conhecimento: resolução de problemas por meio de sistemas de equações do 1º grau. Diante disso, espera-se que para chegar à solução de cada atividade o sujeito distinga as informações, monte o sistema, resolva-o e analise o resultado encontrado.

Prevemos que inicialmente a estratégia utilizada seja por tentativa ao acaso ou por tentativa de pares de números naturais, porém, como essas atividades estão programadas para serem realizadas apenas no *Aplusix*, espera-se que as retroações do *software* os façam disporem de métodos algébricos.

É importante comentarmos que a intenção com essas atividades não é de condicionar o aluno a resolver problemas utilizando exclusivamente recursos algébricos. É claro que situações como a da atividade 1 deste bloco, talvez, podem ser resolvidas com maior facilidade por tentativas ao acaso, uma vez que o enunciado do problema deixa claro que se trata de uma soma de dois números e uma diferença entre esses mesmos números. Entretanto, situações como a da atividade 6 podem não ser tão imediatas. Neste caso, se o sujeito dispõe de outros recursos para chegar à solução, as chances de transpor situações cada vez mais complexas seriam maiores, levando-se em consideração que a construção do conhecimento se dá gradativamente começando-se por problemas mais simples, como essa primeira atividade, passando-se por problemas mais complexos, como o da atividade 6.

As atividades 1 e 2 são semelhantes pelo fato de seus enunciados se referirem a dois números desconhecidos, porém vê-se que na atividade 2 jogamos com a variável "coeficientes das incógnitas" ao colocarmos dobro e triplo na segunda informação. Talvez a dificuldade seja a correta interpretação que se deve escrever 2x para o dobro de um número e 3y para o triplo do segundo número, pois, de acordo com Booth(1995), alunos nessa faixa etária têm dificuldade em considerar expressões algébricas como números dados.

As atividades 1 e 3 são semelhantes quanto à montagem e resolução do dispositivo algébrico, uma vez que os dois sistemas gerados são do tipo $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$, sendo a e b números naturais. No entanto, enquanto a atividade 1 apresenta a proposta de se encontrar dois números conforme as informações do enunciado, a atividade 3 apresenta um contexto onde se fala em idade e não diretamente de números. Outra diferença entre essas atividades está na forma como as operações foram enunciadas. As atividades 2, 4 e 6, embora apresentam contextos diferentes, seus enunciados se assemelham: a primeira informação se refere a uma soma direta implícita; a segunda informação tem também implícito a soma de múltiplos. Quanto à soma dos múltiplos, na primeira atividade temos dobro e triplo, na quarta atividade temos dobro e quádruplo e na sexta atividade temos quádruplo e triplo. Caberá ao aluno utilizar sua experiência de vida e se lembrar das quantidades implícitas: quantidade de pés de cada espécie de animal envolvido, quantidade de roda de carrinhos de bebe e triciclos, etc.

A atividade 4, diferentemente das outras, apresenta um enunciado mais "enxuto". Em poucas palavras deve-se entender que a soma do número de galinhas com o de coelhos é igual a dezessete animais e que a soma do número de pés de galinhas com o número de pés de coelhos é igual a 44. Essa última informação, aliás, traz implícito que o total de pés é a soma do produto do número de galinhas por dois com o produto do número de coelhos por quatro.

Talvez por esse motivo pode-se cometer, em um primeiro momento, o erro de escrever a expressão da segunda equação igual à da primeira ($\begin{cases} x + y = 17 \\ x + y = 44 \end{cases}$). Caso haja insistência nesse erro, pelo fato da negação do *software* em validar como correta essa ação, deve-se lembrar-lhes que se x + y = 17 representa a quantidade de animais, então x + y não pode ser igual a 44. Como se trata da construção de um conhecimento, acreditamos que não se deve apontar o caminho correto, porém pode-se fazer com que o aluno verifique o motivo da inviabilidade do caminho errado.

Vemos que na atividade 4, assim como nas atividades 2, 5 e 6, a variável didática "coeficientes das incógnitas" se destaca. Porém, apesar disso, a variável "tipo do enunciado" assume o valor da forma como são propostas as informações, levando-se em consideração essas atividades. Na atividade 2 fica explícito que na segunda equação do sistema o primeiro termo é um múltiplo de dois e o segundo um múltiplo de três. No entanto, na atividade 4 as informações não deixam isso claro. Na atividade 2, basta que se tenha conhecimento de múltiplos; nas atividades 4 e 6, no entanto, além desse conhecimento deve-se utilizar a experiência de vida ao se lembrar que os animais em questão têm dois e quatro pés e que carrinhos de bebe têm quatro rodas e triciclos três rodas.

Acreditamos que o maior desafio das atividades deste bloco, seja a escrita dos sistemas, mesmo que tenham construído esse conhecimento nas atividades do segundo bloco. Apesar de termos feito um trabalho de construção dessa aprendizagem, a apropriação do pensamento algébrico não é tão imediata, haja vista que esses alunos apresentaram dificuldades em traduzir informações escritas em linguagem natural para linguagem matemática no teste diagnóstico.

Quanto às estratégias de resolução, espera-se que, como no terceiro bloco foi construída uma linha de resolução que gradualmente convergiu no método por substituição, seja utilizada essa forma de resolução após a correta escrita dos sistemas. Com efeito, depois de escrito o sistema, deve-se isolar uma das incógnitas no primeiro membro de uma das equações, substituir a expressão correspondente no lugar da mesma incógnita na outra equação, resolver a equação resultante para encontrar o valor da outra incógnita. Por fim, substituir esse valor em qualquer uma das equações para encontrar o valor da incógnita que tinha sido isolada.

Quanto à dificuldade na interpretação das informações e escrita dos sistemas, nas atividades 1, 2 e 3 talvez não haja tantas dificuldades, mesmo que a segunda envolva o conhecimento da escrita algébrica de múltiplos de números desconhecidos e a terceira apresente um contexto social em que os valores procurados são números que representam idades.

Na atividade 4, como dissemos anteriormente, pode ser que ocorra a dificuldade em interpretar as informações, uma vez que em apenas uma frase "há 17 cabeças e 44 pés" estão as duas informações que geram as equações do sistema.

Na atividade 5, embora a primeira informação tenha implícito na frase "têm juntos 201 figurinhas" a soma de dois valores inicialmente desconhecidos, acreditamos que a maior dificuldade deverá ocorrer na interpretação da segunda informação. Isso se deve ao fato de a frase "Carlinhos tem o dobro de figurinhas de Celso"; de acordo com Loachhead e Mestre (1995) os alunos costumam interpretar erradamente frases desse tipo. Eles costumam escrever as equações de acordo com a ordem da leitura. Para essa atividade é possível que haja dificuldade em escrever a equação correspondente à segunda informação; a equação esperada é x = 2y, caso x represente a quantidade de figurinhas de Carlinhos e y a quantidade de figurinhas de Celso.

Na atividade 6 as dificuldades que poderão ocorrer estão relacionadas à interpretação e tradução das informações em forma de equações com duas incógnitas, haja vista que a escrita da segunda equação deverá ser feita levando-se em consideração a quantidade de rodas de carrinhos e de triciclos.

Quanto à escrita e resolução dos sistemas, o sistema proveniente da correta tradução das informações da atividade 1 deverá ser $\begin{cases} x + y = 17 \\ x - y = 5 \end{cases}$. Espera-se a resolução por meio do isolamento de uma das incógnitas e a expressão equivalente deverá substituir a mesma incógnita na outra equação. Posteriormente, deve-se substituir o valor encontrado em qualquer uma das equações para que seja encontrado o valor da segunda incógnita.

O enunciado da atividade 2 deve ser traduzido pelo sistema $\begin{cases} x + y = 11 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$. A resolução deste sistema se dará pelo do isolamento de uma das incógnitas da primeira equação e a expressão resultante deverá ser substituída na mesma incógnita da segunda equação. Neste caso, deve-se lembrar de colocar parênteses e aplicar corretamente a propriedade distributiva. Após ter feito isto, deve-se somar os termos semelhantes, resolver a equação e substituir o valor encontrado em qualquer uma das equações do sistema para encontrar o valor da segunda incógnita.

O sistema correspondente à situação da atividade 3 deverá ser $\begin{cases} x + y = 22 \\ x - y = 8 \end{cases}$; sua resolução se dará isolando-se uma das incógnitas no primeiro membro de uma das equações.

A expressão correspondente à incógnita isolada deverá substituir a mesma incógnita na outra equação. Após a redução dos termos semelhantes, deve-se resolver a equação resultante e substituir o valor encontrado em qualquer uma das equações para encontrar o valor da outra incógnita.

O sistema correspondente à situação da atividade 4 deverá ser $\begin{cases} x+y=17 \\ 2x+4y=44 \end{cases}$. A resolução deste sistema poderá ocorrer isolando-se uma das incógnitas da primeira equação. A expressão correspondente à incógnita isolada deverá substituir a mesma incógnita na outra equação. Deve-se lembrar de colocar parênteses e aplicar corretamente a propriedade distributiva. Após a redução dos termos semelhantes, deve-se resolver a equação resultante e substituir o valor encontrado em qualquer uma das equações para encontrar o valor da segunda incógnita.

O sistema correspondente à situação da atividade 5 deverá ser $\begin{cases} x+y=201 \\ x=2y \end{cases}$. A resolução se dará pela substituição da expressão 2y no lugar do x da primeira equação, haja vista que já se tem uma das incógnitas isoladas. Deve-se resolver a equação resultante e substituir o valor encontrado no do y da segunda equação para encontrar o segundo valor.

O sistema correspondente à situação da atividade 4 deverá ser $\begin{cases} x+y=11 \\ 4x+3y=40 \end{cases}$. A resolução se dará pelo isolamento de uma das incógnitas da primeira equação. Deve-se substituir a expressão correspondente à incógnita isolada na mesma incógnita da outra equação. Deve-se lembrar de colocar a expressão entre parênteses, aplicar a distributiva, resolver a equação resultante e substituir em qualquer uma das equações para encontrar o valor da segunda incógnita.

Entre os erros que podem ocorrer, de acordo com Freitas (2002, p. 46), podemos destacar:

- alteração do sinal do coeficiente na divisão do termo independente;
- transformação de ax = b em x = b – a;
- trocar a posição do coeficiente de x pela do termo independente na divisão;
- efetuar a transposição de termos independentes sem alterar o sinal;
- efetuar a transposição de termos em x sem alterar o sinal.

Os erros destacados, de uma forma geral, se referem à resolução das equações, contudo, deve-se lembrar que as retroações do *Aplusix* poderão fazer com que o aluno reflita sobre os passos que estão sendo dados. Como exemplo, podemos simular um destes erros na resolução do sistema da atividade 1:

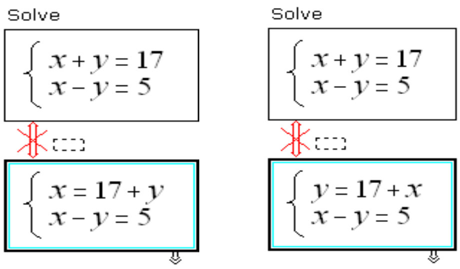


Figura 7: simulação de retroação do *Aplusix* na resolução da atividade1 do bloco 4

Na figura podemos perceber que o *Aplusix* assinalou como não havendo equivalência entre as linhas. Entretanto, embora haja uma indicação de erro, o *software* não mostra o que está errado. Para o aluno, a retroação indica que a operação foi realizada de forma incorreta e deve ser refeita, para isso, deverá descobrir o que está errado.

Como dissemos no início das análises deste bloco, objetiva-se com essas atividades a aprendizagem da resolução de problemas escritos em linguagem natural utilizando-se sistemas de equações do 1º grau como ferramenta algébrica. Embora se espere que, durante a experimentação, as atividades dos blocos anteriores tenham atingido seus objetivos, as atividades deste último bloco serão propostas de forma que o sujeito consiga resolver os problemas utilizando sistemas. Diante disso, espera-se que as situações propostas possam ser vividas como *adidática*s, haja vista que em um primeiro momento, as ações iniciais ocorram por meio de tentativas ao acaso. Essas ações, no entanto, deverão ser refutadas pelo *software*, uma vez que esse recurso tecnológico, nestas atividades, está preparado para só aceitar sistemas de equações, resultantes da tradução das informações em linguagem matemática. A seguir colocamos a simulação da resolução da atividade 1 por tentativa de valores ao acaso.

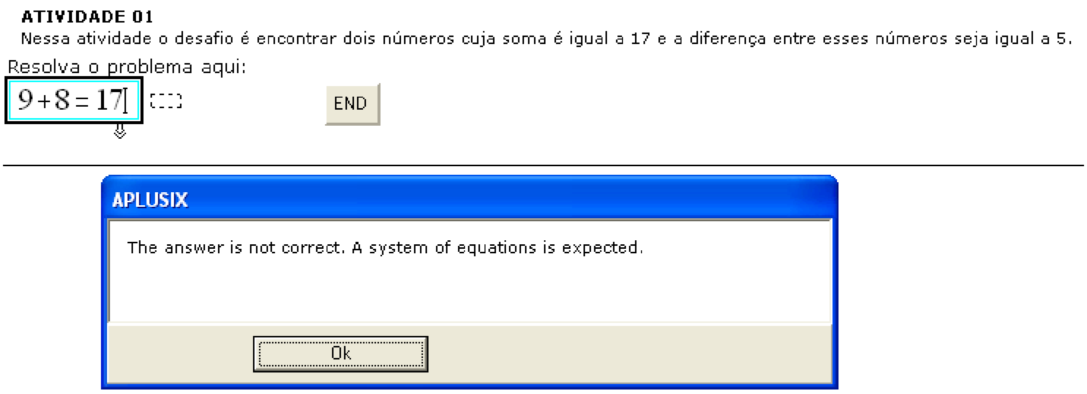


Figura 8: simulação da resolução por tentativa ao acaso da atividade 1 do bloco 4, utilizando o *Aplusix*

Quando o aluno tenta substituir valores que satisfazem a primeira informação, o *software* informa que a “resposta não está correta, espera-se um sistema de equações”. Espera-se que, diante dessa retroação, haja uma reflexão quanto ao uso de uma ferramenta algébrica que auxiliará na resolução, tanto de problemas simples como o da atividade 1, quanto problemas mais complexos como os das atividades 4, 5 e 6 e outros que possam fazer parte do cotidiano do aluno.

Diante disso, espera-se que ocorram formulações a partir do momento em que se tem a ideia de que se deve escrever um sistema cujas equações satisfazem as informações imbricadas no enunciado do problema, bem como a solução é proveniente de sua resolução. Neste caso, os diálogos entre os sujeitos são indispensáveis para que se chegue a um ponto comum em se tratando da forma correta de resolução. Talvez a conjectura que um proponha, possa ser validada ou refutada por outro. Diante disso, as validações deverão ocorrer em dois momentos: na verificação se o sistema está escrito corretamente e na verificação tanto das passagens da resolução quanto na comprovação da solução encontrada.

Apresentamos a seguir a descrição e a análise dos dados coletados na aplicação das atividades do bloco 4. Para apresentação desta análise disponibilizamos alguns excertos dos diálogos e protocolos com objetivo de confirmar as observações levantadas.

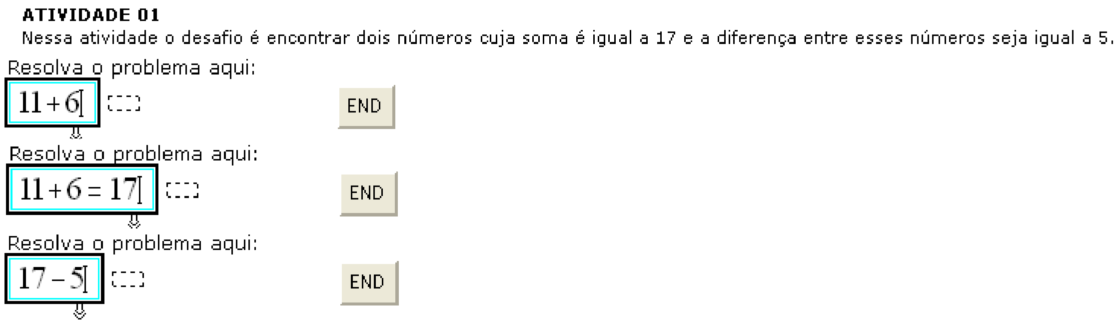
3.6.1 Bloco 4: experimentação e análise a *posteriori*

Como fizemos nos blocos anteriores, primeiramente vamos apresentar um quadro síntese deste bloco com o objetivo de termos uma visão resumida, porém, ampla dos resultados apurados.

<table>
<tr><th></th><th>RP</th><th>GN</th><th>LC</th><th>AA</th><th>JY</th></tr>
<tr><td>A1</td><td colspan="4">Resolveu o problema após fazer várias tentativas ao acaso. Depois do sistema montado eles resolveram pelo método da substituição.</td><td>Resolveu o problema depois que as outras duplas conseguiram montar o sistema</td></tr>
<tr><td>A2</td><td colspan="5">Sentiram um pouco de dificuldade com o uso de parênteses na substituição da expressão, porém, conseguiram escrever o sistema e encontrar a solução do problema.</td></tr>
<tr><td>A3</td><td colspan="5">Não houve maiores dificuldades, rapidamente identificaram as informações, montaram o sistema equivalente, resolveram pelo método da substituição e apresentaram a solução do problema.</td></tr>
<tr><td>A4</td><td colspan="2">Só conseguiu montar o sistema após trocas de informações entre as duplas. Após a montagem o sistema foi resolvido pelo método aprendido no bloco anterior.</td><td>Escreveu o sistema por meio de ajuda dos colegas. Depois de o sistema montado, conseguiu resolvê-lo</td><td colspan="2">Só conseguiu escrever o sistema após trocas de informações entre as duplas. Após a montagem o sistema foi resolvido pelo método aprendido no bloco anterior.</td></tr>
<tr><td>A5</td><td colspan="5">Conseguiram escrever o sistema com facilidade e resolvê-lo, uma vez que a segunda equação, após a montagem, se apresentava da forma x =2y. Isso facilitou a resolução pelo método que tinham aprendido no bloco anterior.</td></tr>
<tr><td>A6</td><td colspan="5">Houve um pouco de dificuldade para interpretar as operações envolvidas, bem como os coeficientes das incógnitas, implícitos no contexto da situação. Porém, após trocas de informações entre as duplas, observamos que em pouco tempo escreveram o sistema. Após a montagem, encontraram a solução do problema por da resolução do sistema pelo método da substituição.</td></tr>
</table>

Quadro 7: síntese dos resultados do bloco 2

Na primeira atividade cujo enunciado é “Nessa atividade o desafio é encontrar dois números cuja soma é igual a 17 e a diferença entre esses números seja igual a 5”, como previmos na análise a *priori*, em um primeiro momento, ao entrarem em ação, os alunos procuraram substituir as incógnitas por números que satisfazem as informações, no entanto, em alguns momentos ficaram sem saber o que fazer. Extraímos um fragmento das tentativas de resolução da dupla GN.



Protocolo 18: observação em videocassete das tentativas de resolução da atividade 01 do bloco 4

Percebemos pela análise do protocolo que, assim como as outras duplas, GN tentou resolver o problema atribuindo valores que satisfazem suas informações. Entretanto, após essas primeiras ações observamos que a dupla RP formulou algumas ideias. Isso se verifica na transcrição do diálogo entre os membros dessa dupla.

> P: acho que não é assim que faz, vamos tentar montar um sistema.
> R: é como naqueles exercícios que tinha que a gente montava um sistema, lembra? (estava se referindo ao bloco 2)
> P: lembro, só que naquele só tinha que montar, nesse aqui tem que encontrar os números.
> R: aí é só resolver como a gente fez na semana passada (estava se referindo ao bloco 3)
> P: é verdade, aí a gente usa o método da substituição. (quando institucionalizamos o bloco anterior, dissemos o nome do método).

A fase de ação ocorreu a partir do momento em que aceitaram resolver o problema, como observamos no protocolo 18. No entanto, só detectamos um princípio da fase de formulação a partir do instante em que o aluno P percebeu e informou aos outros alunos que deve ser escrito um sistema de equações. Isso se verifica na fala: “acho que não é assim que faz, vamos tentar montar um sistema”. Embora o aluno tenha mostrado que não tinha certeza, observamos que houve um princípio de formulação o qual fez com houvesse evolução tanto desta atividade como das outras deste bloco.

Pelo excerto percebemos que, diante das retroações do *software*, eles procuraram outras formas de resolver, porém, se deram conta que poderiam lançar mão da ferramenta algébrica que tinham adquirido; no caso, a tradução das informações em forma de sistema e sua resolução.

Diferentemente das últimas atividades do bloco anterior, desta vez os deixamos à vontade para discutirem. Durante os diálogos observamos que após as primeiras ações começaram a surgir formulações com relação à montagem e resolução do sistema. Isso se verifica na transcrição de fragmentos do diálogo.

> G: acho que é só montar um sistema, então, [...] mas como vamos fazer isso?
> N: a primeira informação está dizendo que têm dois números que a soma dá 17 e a segunda informação está dizendo que a diferença entre eles dá 5.
> P: vamos chamar um de x e o outro de y.
> A: então vamos escrever o sistema assim [...] x – y igual 17 [...] (ela descrevia o que estava fazendo em voz alta)
> P: não é x – y, é x + y igual a 17, x – y é na outra equação, você não leu as informações?

Após as trocas de mensagens entre as duplas, percebemos que conseguiram montar o sistema resultante da tradução das informações. Depois de terem escrito o sistema, algumas duplas encontraram dificuldade em resolvê-lo, porém, logo todos apresentaram a resposta, inclusive a dupla JY que apresentou dificuldades na resolução das atividades dos blocos anteriores.

Nos momentos citados, identificamos que as validações ocorriam depois de cada formulação, uma vez que as ideias eram logo testadas no *Aplusix*. Observando as gravações em videocassete, entendemos que o mecanismo utilizado para validar as ideias formuladas, ora corroborava as operações, ora as refutava por meio das retroações.

Quanto ao momento de validação, que acabamos de comentar, podemos dizer que, desde o início do bloco 2, o aluno utilizava o *Aplusix* para testar as formulações que surgiram, porém, observamos que o aluno R, embora não tenha utilizado argumentos matemáticos, procurou conferir os resultados encontrados. Isso se verifica no excerto a seguir.

> R: é realmente a resposta está certa [...] onze mais seis dá dezessete e onze menos seis dá cinco. Esses números satisfazem as duas informações do problema e também as duas equações do sistema que montamos.

Entre os diálogos um pouco confusos, captados pelo gravador de áudio, conseguimos extrair este pequeno fragmento que mostra o que estamos dizendo, uma vez que isso não vinha acontecendo na resolução das atividades dos blocos anteriores.

Diante disso, para resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 17 \\ x - y = 5 \end{cases}$, resultado da tradução das informações em linguagem matemática, a dupla RP preferiu isolar o x da primeira equação; o que resultou na equação x = 17 – y. Depois, substituíram o x da segunda equação pela expressão corresponde; o que resultou na equação 17 – y –y = 5. Ao resolveram essa equação, encontraram y = 6 e, posteriormente, substituíram esse valor na equação x = 17 – y e entraram x = 11.

Na resolução da equação 17 – 2y = 5, as duplas RP, AA, CL e GN cometeram erros semelhantes, tais como: passar o número 17 para o segundo membro sem trocar o sinal (-2y =

5 + 17), subtrair 17 de 5, mantendo o sinal positivo e trocar o sinal do coeficiente de y sem trocar o sinal do termo -12, uma vez que era preciso multiplicar os membros da equação –y = -6 por -1. Entre os erros cometidos pela dupla JY destacamos o erro de transposição; o coeficiente de y passou para o segundo membro da equação -2y = -12, somando o termo -12 (y = -12 +2). Conforme previmos na análise a *priori*, as retroações do *software* contribuíram para que o aluno corrigisse seus erros e buscasse a forma correta na resolução das equações, oriundas das substituições envolvidas na resolução dos sistemas.

A segunda atividade cujo enunciado é "Encontre dois números cuja soma é igual a 11 e a diferença entre o dobro de um número e o triplo do outro número seja igual a 2". Como previmos na análise a *priori*, em princípio as dificuldades se pontuaram na escrita da segunda equação, porém, conseguiram montar o sistema $\begin{cases} x + y = 11 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$. Também foi previsto na análise a *priori* que a estratégia utilizada seria aplicar o método da substituição, uma vez que esse conhecimento tinha sido construído no bloco anterior. De fato, utilizaram esse método e a incógnita escolhida para ser isolada no primeiro membro foi o x. Houve um pouco de dificuldade para substituir a expressão 11 – y no lugar do x da segunda equação, pela necessidade da colocação de parênteses. Entretanto, as dificuldades observadas se deram por erros da aplicação da propriedade distributiva. Após aplicar a propriedade distributiva, alguns erros previstos na análise a *priori* surgiram. Entretanto, no instante em que uma operação era realizada de forma incorreta, as retroações do *Aplusix* faziam com que fossem corrigidas. Na resolução da equação 22 – 2y – 3y = 2, por exemplo, houve erro de transposição do termo 22 para o segundo membro. Talvez a ordem em que aparecem os termos dessa equação tenha influenciado, em um primeiro momento, a dupla JY a subtrair 2y de 22.

Embora tenham ocorrido erros na resolução das equações, as duplas resolveram o sistema e apresentaram como resposta do problema proposto; 7 para o primeiro número e 4 para o segundo número.

A terceira atividade, cujo enunciado é "A soma das idades de Paulo e João é igual a 22 anos. A diferença entre a idade de Paulo e a idade de João é igual a 8 anos. Sabendo-se que Paulo é mais velho, qual a idade de João e de Paulo?", apesar de apresentar um contexto diferente da primeira atividade, não gerou dificuldades: a escrita do sistema $\begin{cases} x + y = 22 \\ x - y = 8 \end{cases}$ se deu em poucos minutos.

Apesar de não termos sugerido as letras que representam as incógnitas, eles chamaram de x a idade Paulo e y a idade de João. Isso ocorreu em todas as atividades, porém, deixamos claro que geralmente utilizam-se essas letras, todavia, pode-se utilizar qualquer letra que lembre os nomes envolvidos. Para resolver o sistema resultante da tradução das informações praticamente todos isolaram o x da primeira equação, no entanto, a dupla GN isolou a letra citada nas duas equações ($\begin{cases} x = 22 - y \\ x = 8 + y \end{cases}$) e resolveu o sistema. Apesar de não termos previsto esse fato na análise a *priori*, a dupla GN substituiu a expressão 8 + y no x da primeira equação e resolveu a equação 8 + y = 22 – y. Observando a gravação em videocassete, percebemos que, depois de ter encontrado o valor de y = 7, a dupla GN escolheu a primeira equação para substituir o valor de y e encontrar o valor de x = 15.

A quarta atividade que tem como enunciado: “Num quintal há galinhas e coelhos. Há 17 cabeças e 44 pés. Quantas são as galinhas? Quantos são os coelhos?”. Embora os alunos tenham resolvido uma atividade semelhante a esta por tentativas ao acaso no primeiro bloco da sequência, como tínhamos previsto na análise a *priori*, em um primeiro momento, a dificuldade se deu na tradução e montagem do sistema equivalente. Isso se deu pelo fato de que eles não estavam enxergando a soma implícita na informação “há 17 cabeças” e a soma dos múltiplos citados na informação “44 pés”. As tentativas de escrever o sistema se deram até o momento que a aluna G lembrou da quantidade de pés que cada espécie de animal tem. Após a montagem do sistema, em poucos instantes encontraram a solução do problema, ou seja, 12 galinhas e 5 coelhos. Como ocorreu na primeira atividade deste bloco, o aluno R conferiu se os valores estavam corretos; ele mentalmente, porém, sussurrando com o dedo no monitor do computador validava os valores citados.

> R: [...] doze mais cinco dá... dezessete [...] doze vezes dois mais cinco vezes quatro dá vinte mais vinte e quatro que é igual a quarenta e quatro [...]

No dia em que aplicamos esta atividade percebemos que o aluno R discutia com o aluno P, ao mesmo tempo em que apontava para a tela do computador, porém, ao observarmos as gravações de áudio dos diálogos percebemos que ele estava justificando porque os valores encontrados satisfazem as informações do problema proposto. Acreditamos que a essa altura alguns desses alunos já tenham incorporado em seu rol de conhecimentos o conceito de sistema de equações do 1º grau. Assim, quando forem resolver problemas envolvendo sistema utilizando papel e lápis, poderão refletir sobre a solução encontrada. Diante disso, poderão validar o resultado encontrado ou refutá-lo sem ajuda, ou seja, de forma autônoma.

A quinta atividade proposta que tem como enunciado: “Carlinhos e Celso têm juntos 201 figurinhas. Carlinhos tem o dobro de figurinhas de Celso. Com base nessas informações, quantas figurinhas tem Carlinhos e quantas tem Celso?”. Tínhamos previsto na análise a *priori* que os alunos poderiam encontrar dificuldade em montar o sistema equivalente à tradução das informações em forma de equações do 1º grau com duas incógnitas. Isso não ocorreu nesta atividade, embora tivesse existido a dificuldade em escrever a segunda equação quando montaram o sistema no bloco 2. Talvez pelo fato de terem montado o mesmo sistema em outra ocasião, não tenham encontrado dificuldades. Como o sistema encontrado ($\begin{cases} x + y = 201 \\ x = 2y \end{cases}$) é do mesmo tipo dos sistemas das atividades 4 e 5 do terceiro bloco, os quais já apresentavam x em função de y, a resolução ocorreu sem nenhuma dificuldade: eles substituíram a expressão 2y no lugar do x da primeira equação e rapidamente encontraram os dois valores.

A sexta e última atividade da sequência didática tem como enunciado: “Uma fábrica produz carrinhos de bebê e triciclos. Hoje produziram 11 unidades e para montá-las usaram 40 rodas. Quantos carrinhos e quantos triciclos foram produzidos nessa fábrica hoje?”. Essa atividade é semelhante à atividade 4, no sentido em que os coeficientes e as operações se encontram implícitos nas informações embutidas no enunciado do problema.

Como foi previsto na análise a *priori*, as dificuldades ocorreram na interpretação das informações que geram as equações, no entanto, como ocorreu na atividade anterior, alguém deu uma sugestão quanto à escrita correta das equações do sistema, inclusive comparou esta atividade com a anterior.

A aluna G, em um primeiro momento, conjecturou que triciclos têm duas rodas, porém, logo foi corrigida pelos colegas. O fragmento do áudio da conversa que encontramos na gravação dos encontros corrobora o que estamos dizendo.

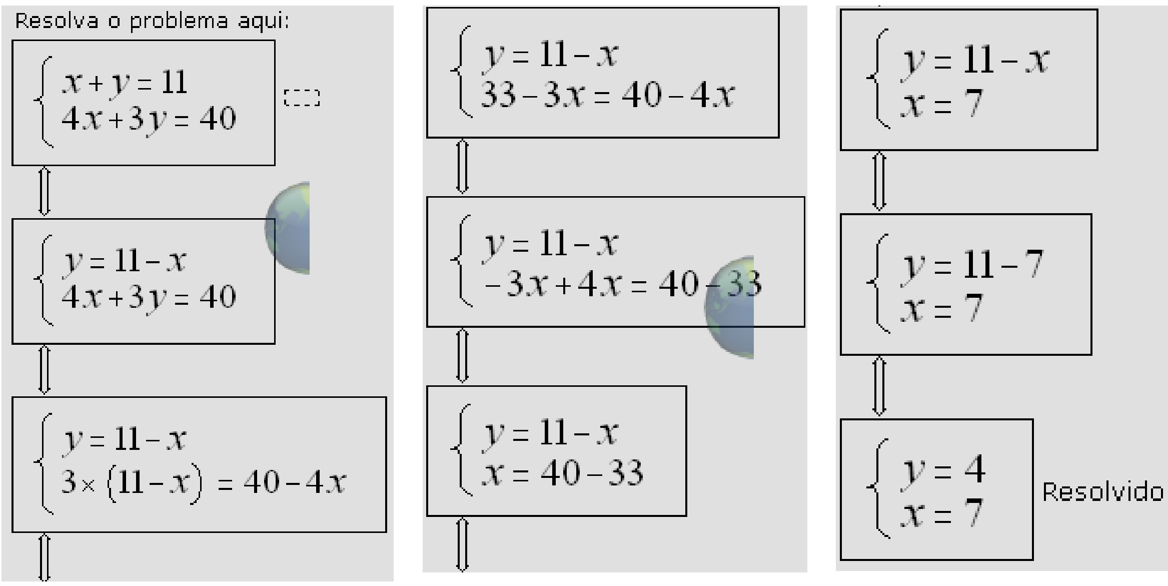
> G: acho que é como no exercício que acabamos de resolver, lembram?
> A: o que você descobriu?
> G: que a segunda equação é 4x + 2y = 40 porque carrinho de bebê tem quatro rodas e triciclo duas [...].
> R: mas que eu saiba triciclo tem três rodas (risos).
> G: é isso aí, então a segunda equação fica assim: 4x + 3y = 40.

Percebemos que, embora a aluna G tenha errado a escrita do coeficiente de y, houve a formulação da escrita da segunda equação. Podemos verificar no excerto que a aluna G formulou que a segunda equação corresponde a 4x + 2y = 40. Embora a retroação tenha partido do aluno R, entendemos que houve apenas uma falta de atenção quanto à quantidade de rodas dos objetos envolvidos. Caso esta retroação não estivesse partido do aluno o *Aplusix* poderia fazer com que houvesse reflexões do grupo de alunos quanto a escrita da segunda equação.

A partir disso a resolução do sistema se deu sem muitas dificuldades. Como tinham aprendido no bloco 3, eles resolveram o sistema pelo método da substituição: isolaram o x no primeiro membro da primeira equação e substituíram a expressão 11 – y no lugar do x da segunda equação. Durante a substituição tomaram o cuidado de colocar a expressão citada entre parênteses e aplicar a distributiva corretamente. Resolveram a equação resultante e encontraram y = 4. Em seguida, substituíram este valor na primeira equação, resolveram-na e encontraram x = 7.

Após o término desta atividade verificamos que, embora o *software* tenha validado a solução encontrada, o aluno R verificou a veracidade dos valores encontrados. Desta vez ele apenas testou os valores na segunda equação.

A seguir disponibilizamos uma observação em videocassete da resolução da última atividade deste bloco pelos alunos da dupla AA.



Protocolo 19: observação em videocassete da resolução da última atividade

O recorte da resolução no protocolo só mostra as passagens validadas pelo *Aplusix*, entretanto, foram várias as tentativas, tanto de escrita do sistema como de sua resolução. O acesso às ações citadas só se dá por meio do *software*. Contudo, podemos observar que o sistema foi escrito como tínhamos previsto. A estratégia de resolução também foi a que eles construíram no bloco anterior; inclusive com o uso correto de parênteses e a propriedade distributiva.

As atividades deste bloco foram realizadas todas em um único encontro. Como na ocasião eram duas aulas geminadas aproveitamos para institucionalizar os conceitos envolvidos neste último bloco. Aproveitamos também para fazer um paralelo do recurso papel e lápis com o ambiente utilizado, o *software Aplusix*.

No término agradecemos a colaboração de todos e sugerimos que eles auxiliassem o professor quando este fosse trabalhar sistemas com o restante da turma em sala de aula.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando nos propusemos a realizar essa investigação, tínhamos como questão de pesquisa: "como se dá a aprendizagem da resolução de sistemas de equações do 1º grau, bem como a resolução de problemas envolvendo esse conceito, por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental diante de situações *adidática*s, em ambiente papel e lápis e com *software Aplusix*? ". Fomos pontuais pelo fato de as situações estudadas estarem fortemente imbricadas em um campo maior que é a aprendizagem de um conceito algébrico. Pontuais no sentido em que o campo conceitual da resolução de sistemas envolve vários conceitos matemáticos, entre os quais podemos destacar outras formas de resolução, sistemas equivalentes, o uso de frações, entre outros que não trabalhamos nessa investigação.

Quanto às formas de resolução, optamos em trabalhar apenas o método da substituição, haja vista que não dispúnhamos do tempo necessário para o estudo de outros métodos. Quando iniciamos a pesquisa, tínhamos a intenção de investigar a aprendizagem da resolução de sistemas abrangendo tanto o método da substituição quanto o método da adição por serem os métodos que figuram com maior frequência nos livros didáticos, conforme afirma-se no Guia do PNLD (2007),

Embora tenhamos implicitamente trabalhado com sistemas equivalentes, não fizemos um trabalho específico quanto a levar o sujeito a se apropriar desse conceito. Implicitamente no sentido em que, quando fazemos alguma alteração em um sistema, o novo sistema será equivalente ao primeiro por ter a mesma solução; de certa forma fazemos isso sem mencionar que estamos trabalhando com sistemas equivalentes. Segundo Valenzuela (2007, p. 12), o reconhecimento de sistemas equivalentes é a ideia fundamental para resolução deste conceito algébrico, entretanto, "na maioria dos casos, os alunos não têm clara essa ideia; eles aprendem a usar uma técnica de resolução de sistema sem compreender seu real significado". Se, em nossa pesquisa, tivesse sido feito um trabalho sobre sistemas equivalentes, isso poderia ter sido aplicado em mais um bloco de atividades, porém esse suposto bloco deveria vir depois do bloco 3, uma vez que neste bloco foi trabalhado a solução de sistemas.

Quanto a não trabalhar com sistemas envolvendo frações, optamos em fazer isso pelo fato de termos estabelecido que os números envolvidos fossem inteiros, na tentativa de fazermos com que as dificuldades se restringissem às operações envolvendo números inteiros.

Embora não tenhamos trabalhado tudo que se pode estudar sobre a resolução de sistemas de equações, podemos dizer que, de certa forma, houve aprendizagem. Pelo menos os conceitos envolvidos nas atividades da sequência foram apropriados pelos sujeitos. Para dizermos isso nos embasamos no fato de que os sujeitos iniciaram as atividades do bloco 1 sem nenhuma noção desse conceito e terminaram resolvendo, sem ajuda, os problemas propostos.

A pretensão inicial deste trabalho foi a de investigar como se dá a aprendizagem de sistemas de equações do 1º grau por meio de uma perspectiva construtivista de acordo com a Teoria das Situações Didáticas. As situações *adidáticas* vividas pelos alunos durante alguns momentos do desenvolvimento da sequência didática foram fundamentais para a elaboração do conhecimento e auxiliaram nosso estudo sobre a aprendizagem dos alunos. Nossa sequência didática foi dividida em quatro blocos.

No primeiro bloco foram propostos problemas que podem ser resolvidos por meio da escrita e resolução de sistemas. Diante do fato de que os sujeitos ainda não sabiam resolver sistemas, analisamos as estratégias de resolução disponibilizadas com o objetivo de verificar se eles distinguiam as informações embutidas no enunciado. Informações essas que, de acordo com a sintaxe das frases, propiciam escrever as equações que constituem o sistema. Com a proposição dessas atividades também tínhamos como objetivo verificar se surgiam algumas estratégias algébricas. Esse segundo objetivo não visava à aprendizagem imediata de procedimentos algébricos para resolver os problemas. Visava apenas investigar se o sujeito iria manifestar a necessidade da escrita de alguma expressão algébrica diante das retroações proporcionadas pelo meio; meio, aliás, acionado pelas diferentes atividades apresentadas.

Embora tivéssemos observado, na análise do teste diagnóstico, que esses alunos apresentaram dificuldades em trabalhar com situações algébricas, devido ao fato de estarem no 8º ano do Ensino Fundamental, na análise a *priori* das atividades do bloco1 previmos que entre esquemas de resolução envolvendo figuras e tentativas ao acaso ocorreriam também estratégias algébricas. No entanto, só ocorreram resoluções por tentativas.

Um ponto que consideramos importante se refere à escolha das variáveis didáticas, talvez tenhamos subestimado os alunos em não termos aumentado ainda mais o tamanho do coeficiente independente, uma vez que eles resolveram apenas por tentativas ao acaso. Neste caso, deveríamos ter explorado mais situações em que as variáveis didáticas tivessem efetivamente “forçado” os alunos a, pelo menos, pensarem em montar alguma estrutura algébrica na tentativa de chegar à solução do problema proposto. Por outro lado, o primeiro objetivo do bloco 2 foi atingido. Na análise a *posteriori* observamos que os sujeitos conseguiram distinguir as informações do problema e isso contribuiu tanto para a escrita dos sistemas das atividades do bloco 2 como na resolução dos problemas das atividades do bloco 4. Inclusive quando estavam tentando resolver os problemas do último bloco, observamos que eles, em um primeiro momento, procuravam distinguir as informações citadas. Diante do que tínhamos como hipótese e pelo que observamos, podemos dizer que o conhecimento apropriado pelos alunos no bloco 1 se deu efetivamente pela correta interpretação do enunciado dos problemas que ocasionava: no bloco 1, terem resolvido todas as atividades, mesmo que utilizando-se apenas estratégias aritméticas; no bloco 2, terem conseguido montar os sistemas e no bloco 4, terem conseguido montar e resolver os problemas propostos.

O segundo bloco de atividades teve como objetivo a aprendizagem da escrita de sistemas de equações diante de situações-problema. Durante a realização das atividades, percebemos que os alunos mobilizaram a experiência construída no primeiro bloco para escrever os sistemas, porém, as dificuldades na passagem da linguagem natural para linguagem algébrica detectadas no teste diagnóstico influenciaram, em um primeiro momento, no andamento do trabalho. No entanto, as variáveis didáticas cumpriram sua função em proporcionar retroações que, por um lado faziam que os sistemas não fossem escritos sem a devida reflexão acerca das corretas traduções das informações; por outro lado, faziam com que houvesse um desequilíbrio no sistema cognitivo do aluno. Isso ocorria ao perceberem que os conhecimentos que tinham não eram suficientes: seria preciso buscar novas estratégias objetivando-se com isso a validação das conjecturas formuladas. As validações ocorriam após a formulação de uma ideia que era testada no *software*. No final da escrita do sistema, embora o *Aplusix* não tivesse apresentado alguma retroação, os alunos só manifestavam que tinham conseguido escrever o sistema após conferirem o resultado clicando no botão “fim do problema”, neste caso, se o sistema estivesse correto, o *software* apresentava a informação “resolvido”.

No terceiro bloco, composto de onze sistemas para serem resolvidos, apesar de os alunos não terem conseguido encontrar a solução, a primeira atividade serviu para que ocorresse o primeiro contato com a resolução de sistemas de equações. Ao término da primeira atividade eles sabiam que estavam diante de situações diferentes das que tinham visto até o momento, no que diz respeito à resolução de equações.

A partir da segunda atividade, os sistemas foram propostos de forma que fosse construída a aprendizagem da resolução de sistemas pelo método da substituição. Neste caso, o meio *adidático* aliado às variáveis didáticas contribuiu para que houvesse aprendizagem da resolução de sistemas pelo método citado, pelo menos os tipos de sistemas propostos no bloco 3. Nesse caso, a variável didática “tipo do enunciado” contribuiu para que houvesse mudança de estratégia e o *software* proporcionou as retroações necessárias, haja vista que as operações cujos resultados não eram equivalentes, eram rapidamente refeitas. Os resultados mostraram que as retroações e as mudanças de estratégia foram essenciais para que houvesse avanço de um nível para outro na resolução das atividades do bloco 3, uma vez que a forma como os sistemas foram propostos contribuiu para que houvesse gradativamente a aprendizagem da resolução pelo método da substituição.

Desta forma, cabe aqui uma reflexão com relação à criação de uma sequência didática que possa possibilitar que um conhecimento seja construído. Para isso podemos fazer uma analogia à edificação de uma casa: primeiro constrói-se o alicerce o qual dará sustentação ao imóvel; depois ergue-se as paredes; depois o telhado; por fim, faz-se o acabamento. Embora seja apenas uma comparação, uma sequência didática deve proporcionar ao sujeito o papel de construtor de sua aprendizagem. Esta construção deve ser feita gradativamente respeitando cada etapa do processo, para isso, os conhecimentos considerados pré-requisitos devem ser o alicerce de o novo saber. As etapas devem ser realizadas de forma que o conhecimento na etapa anterior sirva para que seja construído o conhecimento da etapa posterior e assim sucessivamente. Com efeito, após a institucionalização de uma etapa, esta é aditada aos conhecimentos antigos do sujeito e passam a ser considerados pré-requisitos para a conquista do novo saber na etapa seguinte.

No quarto bloco tínhamos como objetivo investigar se o aluno consegue modelar e resolver problemas algebricamente, para isso, utilizou-se apenas o ambiente *Aplusix*. O *software* contribuiu, em um primeiro momento, para que houvesse a necessidade de se lançar mão da escrita e resolução de sistemas de equações. Posteriormente, a partir da segunda atividade deste bloco, a contribuição do *software* se deu pelas retroações às operações incorretas, haja vista que depois de realizada a primeira atividade eles sabiam que a solução era encontrada por meio da escrita e resolução de um sistema cuja solução satisfaz as informações do problema.

Apesar de termos proposto algumas atividades que foram resolvidas aritmeticamente no primeiro bloco, no quarto bloco elas foram resolvidas algebricamente. Embora as resoluções tenham sido realizadas em ambientes diferentes, acreditamos que o ideal não seria propor os mesmos problemas que os alunos resolveram de forma aritmética, haja vista que não queremos condicioná-los a resolver algebricamente. Achamos que o ideal seria propor mais sessões para poder trabalhar mais tempo e mais conteúdo. Desta forma, poderíamos ter proposto problemas diferentes dos habituais envolvendo tanto a resolução pelo método da substituição quanto pelo método da adição.

Embora tivéssemos objetivado no bloco 3 e no bloco 4 analisar apenas as resoluções das atividades realizadas no *Aplusix*, em alguns momentos, após a resolução no *software*, pedimos que fizessem a mesma atividade utilizando papel e lápis objetivando a adaptação de um ambiente para outro. Para nossa surpresa, a adaptação se deu naturalmente, porém, assim como faziam no *software*, a estrutura do sistema era mantida; no sentido em que, tanto a escrita das equações quanto o uso do símbolo “chave” eram conservados em todas as passagens da resolução. Diante disso, a dificuldade que previmos no capítulo 2 não ocorreu. Tínhamos previsto, também, que seria necessário, durante as primeiras institucionalizações, após terem resolvido as atividades no *Aplusix*, fazermos uma comparação entre a resolução papel – lápis e o *software* para que não houvesse dúvidas quanto à forma de escrita da resolução. Isso também não foi necessário, como dissemos, a adaptação se deu naturalmente.

Refletindo sobre a forma como os alunos se adaptaram naturalmente à resolução de sistemas de equações no papel e lápis, uma vez que a construção deste conhecimento se deu no *Aplusix*, surge aqui uma questão sobre a influência do *software* na redação dos textos algébricos dos alunos: qual a importância de se fazer um trabalho em sala de aula utilizando-se um software que forneça constantes retroações aos erros de escrita das expressões matemáticas, uma vez que, em certas situações, a escrita correta poderá contribuir com a compreensão do conceito envolvido?

Quanto às situações *adidáticas* visadas, foram poucas as vezes que tivemos que interferir na resolução. Quando tivemos que fazer isso, por um lado, procuramos evitar adiantar resultados ou dar dicas que pudessem levar à solução sem a devida reflexão dos caminhos tomados, contrariando a filosofia em que esta pesquisa se embasa. Por outro lado, procuramos, ao invés de uma ajuda direta, incentivar e promover discussões que levassem os alunos a formular ideias e colocá-las à prova.

As observações do áudio gravado durante a experimentação, junto com as observações em videocassete mostraram que os debates entre os alunos favoreceram as fases de formulação. Percebemos que após os momentos de ação, as formulações começavam a surgir quando algum aluno manifestava que poderia resolver o problema utilizando conhecimentos institucionalizados em outra atividade ou conhecimentos antigos destes alunos. As mensagens emitidas por um aluno, em certos momentos, contribuíram para que outro aluno repensasse sua estratégia de resolução. Em certos momentos as ideias formuladas por um aluno não levava à solução do problema, entretanto, favorecia outro aluno.

Apesar de quase não termos detectado momentos em que o aluno verifica como correta a resolução de um problema, observamos que as formulações ocorreram nos momentos de discussões entre os alunos, porém, quando chegavam a uma ideia comum, estas eram testadas no *Aplusix*. Caso houvesse retroação “negativa” da operação testada, eles voltavam ao ponto inicial e procuravam tomar outro caminho. Caso esta retroação indicasse que a operação realizada estava correta, eles passavam ao próximo passo da resolução.

Acreditamos que quando testavam no *Aplusix* as ideias formuladas estavam vivendo o momento de validação, uma vez que só tinham certeza se a operação estava correta quando a verificavam no *software*. Para isso, eles aguardavam a resposta do *software* à operação testada.

Quanto às dificuldades e erros que surgiram ao longo da experimentação. Assim como não se pode aprender efetivamente um conceito algébrico ou qualquer conceito matemático em tão pouco tempo, acreditamos que o mesmo ocorre com as dificuldades. No entanto, as observações em videocassete mostraram que as retroações do *software* contribuíram para que os erros de resolução das equações fossem contornados, haja vista que a cada operação o *Aplusix* avisava se estava certa ou errada. Desta forma as dificuldades oriundas dos erros de resolução foram sendo superadas na medida em que as retroações fornecidas pelo *software* proporcionavam as devidas reflexões dos alunos.

De uma forma geral podemos dizer que o *software*, além de ter proporcionado um ambiente diferenciado de trabalho, suas *retroações* agiram como agentes responsáveis pelo ajustamento de conduta dos sujeitos na resolução das atividades. Ajustamento no sentido em que a maioria dos erros se manifestava em situações as quais o conhecimento envolvido já fazia parte do cotidiano dos sujeitos envolvidos.

Observando os tipos de erros pudemos perceber que a frequência dos mesmos diminuía na medida em que se avançava na resolução da sequência. Também pudemos perceber que os erros que eram superados em uma atividade praticamente não ocorriam na atividade seguinte.

É importante lembrar que o *software* mostrava que a operação estava errada, entretanto, não apontava onde estava o erro. Isso fazia o aluno refletir e procurar onde estava o erro. Diante disso, cabe aqui uma reflexão quanto às retroações do *software* que também pode ser considerada uma questão de pesquisada. No teste diagnóstico os alunos resolveram a lista de atividades, porém, quando analisamos os resultados, percebemos que por falta de validação ou retroação, eles entregaram algumas atividades erradas e outras sem resolver. Entretanto, no dia da familiarização com o *Aplusix* eles conseguiram resolver atividades da lista que antes tinham errado ou tinham deixado sem resolver utilizando este *software*. Observando a gravação em videocassete pudemos perceber que parte dos erros foi corrigida e parte das atividades que tinham deixado de fazer foi resolvida. Isso ocorreu pelo fato de o *software* ter proporcionado ao aluno retroações importantes para que houvesse reflexões quanto à validade das operações, possibilitando-lhe autonomia na resolução do exercício.

As retroações do *software* funcionam como se fossem um professor advertindo o aluno que a operação está errada ou que está correta. Mas o *software* proporciona verificação automática em todas as ações do aluno, neste sentido, como um professor, no ambiente papel e lápis, poderia fornecer constantemente retroações a um grupo de alunos, haja vista que o *Aplusix* as oferece individualmente? Acreditamos ser esta outra pista para novas pesquisas.

Quanto à progressão do conhecimento nos quatro blocos, identificamos que o aprendizado foi sendo efetivado na medida em que os blocos de atividades foram sendo realizados: no bloco 1 os alunos aprenderam a distinguir as informações embutidas no enunciado; no bloco 2 os alunos utilizaram o conhecimento construído no primeiro bloco para escrever os sistemas; no bloco 3 os alunos já conheciam como se estrutura um sistema e que cada valor que compõe a solução tem que satisfazer suas equações; no bloco 4 os alunos mobilizaram conhecimentos construídos nos blocos anteriores para resolver os problemas propostos, escritos em linguagem natural.

Quando analisamos os dados coletados na experimentação, paramos para refletir se houve ou não a aprendizagem da resolução de problemas envolvendo sistemas de equações. Sabemos que é difícil afirmar se houve a aprendizagem, haja vista que não se constrói conceitos algébricos em tão pouco tempo. Além disso, de acordo com Brousseau (1986), só se pode ter certeza que houve uma efetiva aprendizagem quando o sujeito consegue aplicar o novo conhecimento em um contexto fora da sala de aula. Entretanto, como dissemos, não podemos afirmar se houve uma aprendizagem efetiva, aprendizagem essa que possibilita ao sujeito a habilidade de resolver qualquer problema envolvendo sistemas, porém, podemos afirmar que o grupo de sujeitos começou a experimentação sem conhecimento sobre resolução de sistemas e terminou resolvendo todas as atividades. Também podemos afirmar que em nenhum momento eles tiveram ajuda direta do professor ou de qualquer outra pessoa que domina o assunto estudado.

Quando iniciamos esta pesquisa tínhamos como objetivo geral analisar como ocorre a aprendizagem da resolução de sistemas de equações do 1º grau por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, a partir de situações problemas. Podemos dizer que, de acordo com a filosofia empregada por esta investigação que se apoiou nos preceitos da teoria das situações didáticas, em especial nas situações *adidáticas*, a construção do conhecimento se deu em um contexto diferente ao da sala de aula. Diferente no sentido em que esses alunos não tinham vivido a experiência de aprender um conceito matemático em um ambiente diferente ao que estavam acostumados. Também podemos dizer que a diferença se deu pelo fato de estarem acostumados a aguardar que o professor explique o conteúdo, resolva alguns exemplos e aplique exercícios de fixação semelhantes aos que tinha explicado.

Diante disso, com relação à nossa questão de pesquisa, podemos dizer que a aprendizagem da resolução de sistemas de equações do 1º grau, bem como a resolução de problemas envolvendo esse conceito, por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental diante de situações *adidática*s, em ambiente papel e lápis e com *software Aplusix*, se deu por meio de uma sequência didática com atividades que possibilitaram ao aluno construir o conhecimento envolvido gradativamente.

Gradativamente no sentido em que as situações foram apresentadas de forma que o aluno utilizou conhecimentos adquiridos durante sua vida estudantil para conseguir contornar o primeiro nível de o novo saber.

No nosso caso a aprendizagem se deu gradativamente com a resolução de uma sequência de atividades distribuídas em quatro blocos da seguinte forma: problemas contextualizados, objetivando-se a aprendizagem da distinção das informações; problemas contextualizados, objetivando-se a aprendizagem da escrita dos sistemas, ainda sem resolvê-los; sistemas de equações, objetivando-se a aprendizagem da resolução pelo método da substituição; resolução de problemas contextualizados utilizando-se sistemas de equações do 1º grau como ferramenta algébrica.

Embora o *Aplusix* tenha contribuído com a evolução da aprendizagem ao longo da experimentação, percebemos que sem esse *software,* os objetivos também seriam atingidos. Entretanto, ia ser preciso um tempo maior, uma vez que sua contribuição também se deu em seu ambiente o qual não permitia que os erros fossem "mascarados", erros esses, vistos nas pesquisas e no teste diagnóstico. Isso se justifica pelo fato de as dificuldades ficarem restritas à conquista de o novo conhecimento.

Outro fato que percebemos durante a experimentação, que talvez possa contribuir com reflexões a respeito do uso de *softwares* na aprendizagem da matemática, na medida em que as atividades dos blocos foram sendo resolvidas com auxílio do *Aplusix* a frequência de um mesmo tipo de erro foi sendo diminuída. Talvez o uso de um recurso que possibilita retroações a todo instante possa minimizar a aparição de erros de operações matemáticas, erros esses, detectados no teste diagnóstico.

Após termos concluído este trabalho de aproximadamente dois anos, vamos finalizá-lo com as seguintes questões: é possível em um ambiente de sala de aula com cerca de trinta alunos o professor aplicar uma sequência didática contendo situações visando ser vividas como *adidáticas*, haja vista que tais situações propiciam ao aluno ultrapassar os erros e aprender com eles? Como um professor nas condições que colocamos no parágrafo anterior poderia proporcionar constantes retroações individuais sendo que seria humanamente impossível fazer isso?

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

APLUSIX STANDARD. **Manual de Utilização, versão 1.73. França***: MeTAH au laboratoire IMAG-Leibniz, Grenoble*, . http://*Aplusix*.imag.fr, acessado em 07/2009.

ARTIGUE, M.. **Ingénierie didactique**. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, 1988.

BARUK, S. **L' âge du capitaine.** Paris: Seuil, 1985.

BERNARD, J. E. e COHEN, M. P.. **Uma integração dos métodos de resolução de equações numa seqüência evolutiva de aprendizagem**. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. As Idéias da Álgebra. São Paulo: Atual, 1995.

BITTAR**,** M. e CHAACHOUA, H.. ***Aplusix*: um *Software* para o Ensino da Álgebra Elementar**. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM. Recife – PE, 15 a 18 de Julho de 2004.

BOOTH, L. R. **Dificuldades das Crianças que se Iniciam em Álgebra**. In: COXFORD, A.F. & SHULTE, A.P. (org.). As Idéias da Álgebra. São Paulo: Atual, 1995, p. 23-37.

BONADIMAN, A.. **Álgebra no Ensino Fundamental: produzindo significados para operações básicas com expressões algébricas.** Dissertação de mestrado. UFRS. Porto Alegre – RS, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais de 5ª a 8ª. séries - Matemática**. Brasília, 1998.

______. Guia de Livros Didáticos PNLD 2008 – Matemática. Brasília, 2008.

BRASIL**.** INEP/MEC, Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB/2005). **Indicadores Educacionais**. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/saeb>. Acesso em: 01 de junho de 2009.

BROUSSEAU, G.. **Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques**. Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 7.2, 1986.

BURIGATO, S. M. M. da S.. **Estudo de dificuldades na aprendizagem da fatoração nos ambientes: papel e lápis e no *software Aplusix***. Dissertação de Mestrado. UFMS. Campo Grande – MS, 2007.

CHRISTO, D. dos S.. **Introdução da noção de variável em expressões algébricas por meio da resolução de problemas: uma abordagem dinâmica**. Dissertação de mestrado. PUC/SP. São Paulo – SP, 2006.

DANTE, L. R.. **Tudo é Matemática.** Ática: São Paulo, 2007. 6ª. série.

_______. **Tudo é Matemática.** Ática: São Paulo, 2007. 7ª. série.

DEMANA, F.; LEITZEL, J.. **Estabelecendo conceitos fundamentais através da resolução de problemas numéricos**. In: COXFORD, A.F. & SHULTE, A.P. (org.). As Idéias da Álgebra. São Paulo: Atual, 1995.

EVES, H.. **Uma introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FREIRE, R. S.; CABRAL, B. S.; CASTRO-**FILHO**, J. A. **Estratégias e erros utilizados na resolução de problemas algébricos**. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática - VIII Enem, 2004, Recife. Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática – VIII Enem, v. 1. p. 1-15, 2004.

FREITAS, J. M. de. Teoria das Situações Didáticas. In: MACHADO, S. D. A. (Org). **Educação Matemática Uma (nova) Introdução**. 3.ed.rev. São Paulo: Educ, 2008. p. 77-109. (Trilhas)

FREITAS, M. A. de. **Equação do 1º grau: métodos de resolução e análise de erros no Ensino Médio**. Dissertação de Mestrado. PUC. São Paulo – SP, 2007.

GURGEL, T.. **Guy Brousseau: o pai da didática da Matemática**. Revista Nova Escola, São Paulo: Editora Abril, edição 219, p. 28-32, jan/fev, 2009.

KIERAN, C.. **Concepts Associated with Equlity Simbol**. Educational Stydies in Mathematics, 1981.

______. **The Learning and Teaching of School Algebra**. Handbook of Reserarch on Mathematics Teaching and Learning (NCTM – cap. 17º). Université Du Québec: Monteal, 1992.

______. **Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra**. As idéias da álgebra. Org. Arthur F. Coxford e Alberto P. Shulte. N:C:T:M. (1988) Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

LINS, R. C. e GIMENEZ, J.. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas, SP: Papirus, 1997.

LINTZ, R.G.. **História da Matemática. Relatório técnico nº 07/88, parte I**. UEL. Londrina – PR. 1988.

LOCHHEAD, J.; MESTRE, J. P.. **Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas**. In: COXFORD, Arthur F. SHULTE, Albert P. (org.) As idéias da álgebra. São Paulo: Atual, 1995.

LOPES et al**. Resolução de problemas: observações a partir do desempenho dos alunos**. A Educação matemática em Revista - Séries Iniciais. SBEM . Nº 3, 1994.

LUCCAS, S.. **Abordagem histórico-filosófica na Educação Matemática: apresentação de uma proposta pedagógica**. Dissertação de mestrado. UEL/PR. Londrina – PR, 2004.

MACHADO, S. D. A. (Org). Engenharia Didática. In: **Educação Matemática Uma (nova) Introdução**. 3º ed. rev. São Paulo: Educ, 2008. p. 233-246. (Trilhas)

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D. e MIORIM, A.. **Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo?**, Pró-posições, vol. 3, n° 1, Campinas, SP, 1992.

PESQUITA, I. M. P. **Álgebra e Pensamento Algébrico de Alunos do 8.º Ano.** Dissertação de Mestrado. UL. Lisboa/PT, 2007.

RODRIGUES, S.. **Uma análise da aprendizagem de produtos notáveis com auxílio do programa *Aplusix***. Dissertação de Mestrado. PUC. São Paulo – SP, 2008.

SCHAPPO, G. e PONTE-FILHO, M. H. L.. **Erros cometidos por alunos do primeiro e segundo ciclo em problemas de estruturas aditivas e multiplicativas**. Anais do XVI Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste – EPENN, Aracaju, 2003.

USISKIN, Z.. **Concepções sobre a Álgebra da escola Média e Utilizações das Variáveis.** In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. (Org.). As Idéias da Álgebra. São Paulo: Atual, p.9-22,1995.

VASCONCELOS, N. P.; FREIRE, R. S. & CASTRO-FILHO, J. A. **Investigando o desempenho em problemas de estruturas aditivas e multiplicativas**. Anais do XVI Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste – EPENN, Aracaju, 2003.

VALENZUELA, S. T. F.. **O uso de dispositivos didáticos para o estudo de técnicas relativas a sistema de equações lineares no Ensino Fundamental**. Dissertação de Mestrado. UFMS. Campo Grande – MS, 2007.

ANEXOS

ANEXO A – Resultado do teste diagnóstico

ATIV	CERTA	ERRADA	NÃO FEZ	RESPOSTAS APRESENTADAS PELOS ALUNOS
01	15	5	0	$\frac{3}{x}$, 3, $3x$, $x = 3x$, $3x + x$ e x^3
02	6	11	3	$3 - x$ $\frac{x}{3}$, $\frac{x}{3}$, $4x$, x^3, $\frac{x}{2}$, $\frac{3x}{3}$, $3x$ e $\frac{x}{x}$
03	4	15	1	x^5, $5x$, $-x6$, $x + 5$, $+5x$, $-5 + 3 = 5$, $\frac{2}{4} + 5$, $5x + 5$, $6x + 7$, $6x$, 6 e $10 - x$
04	0	11	9	1, $5x$, $x + 5 - 7$, $\frac{5x}{5}$, $-2 + 3 = 5$, $\frac{x}{5}$ e $x = 5$
05	2	14	4	$x^2 + x^2$, $2x + 2x$, $6x$, 2.2, $\frac{x^2}{2} \mid x = 1$, $\frac{2}{3}x$, $\frac{x}{1}$, $2x$, $\frac{2x}{3}$, $\frac{x}{2}$, $6x + 6$, $\frac{x}{9}$ e $\frac{2}{x}$
06	2	14	4	$x^2 = \frac{2}{7}$, $2x + 7$, $6x + 7$, $\frac{x}{2} + 7$, $\frac{x^2}{2} + 7 \mid x = 1$, $\frac{2}{3}x + 7$, $2x + 5$, $9 + 7$ e $\frac{2}{3}x7$
07	4	11	5	$\frac{x}{10}$, $10x$, $-10x$, $5 + 5 = 10x$, $\frac{1}{10}$, *produto é x* e $\frac{10}{x} - \frac{x}{10}$
08	1	13	6	$x^2 + 7$, $4x + 7$, $6x + 7$, $13x$, $\frac{2}{3} = 7$, $\frac{7}{2}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{x^2}{2} + 7$, $\frac{4}{6} + 7$ e $\frac{2}{3} - 7x$
09	0	13	7	$x^3 + 20$, $2x + 40$, $6x + 80$, $\frac{3x}{20}$, $3x + 20$, $\frac{20}{2}$, $\frac{48}{27}$ e $3x + 20 = 23x$
10	6	13	1	xy, $x + y$, $2xy$, $+y$, $x - y = 1$, $\frac{2}{4} + 3x = 15$ e $y + y = y^2$
11	11	8	1	$2x\ 3y$, $2x + 3x$, yyy, $2x.3y = 5xy$, $5x + 3y$ e $x^2 + y^3$
12	0	11	9	$\frac{x}{2y}$, $\frac{3x}{2y}$, $3x + y$, $6x - y = 6xy$, $\frac{2xy}{2}$, $\frac{y}{22}$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2}$ $\frac{xy}{5}$, $3x + \frac{y}{2}$, $x^3 + \frac{y}{2}$, $\frac{2x}{3y}$ e $3x + 3y$
13	0	15	5	*5x 20y, 2x = 15, 2xy = 15, xy = 15, 15xy, 10x + 5y, 2x + 15y, y = 15 – x, 2x . 3y* e *5x 20y*
14	7	6	7	*3y 3x, y = 3x,* $\frac{y}{x}$ *, 3y.3x = 9xy, 3y + 3x, 3xy* e *x = 3x*
15	5	9	6	*3x.3x = 9 – 4 = 5, 3x = 5+ 4 =>x = 9/3 = 3, x = 5, -x =5, 7x-6 = 5x, -1x = 5 => x = 5/1, 3x = 4 -5 => 3x = x = >x =x/3x => x = 3x, 3x – 4 =7 -5 => x = 2* e *x 4/5*
16	5	9	6	*+5x-2x = 3x = 1/3x, 5x – 3x = 1+12 =>2x = 13 => x=13/2x, 5x -3x = 1+12 =>2x =11 => x = 11/2, -17x = 4x, 5x -3x=1+12 =>2x =13 => x = 13/2, 7x = 4x, -6x = 4x => x = -2x, 5x+3x = 1+12 => x =+8x/-13, 12 +5x = 17 -1 => 16 +3x = +9* e *12x 1/x*
17	9	6	5	*x =11/7 = 18, 7 =18, 11, 11+7 =18, número 9* e *9x*
18	0	10	10	*2 = 6, 4, x + 2 = 6 => x = 4, 2.3 = 6, 4/6, 4 + 2 = 6, 5 + 6* e *7x*
19	1	10	9	*2/6, 3 – 2 = +12, 7, 3x -2 = x +12, x – 2 =12 =>x =12 +2 =>x =10, 8 + 4 = 12, 4/3 -2/12 = 3/5, 6.2=12* e *13x*