UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

HENRIQUE OLIVEIRA

DESCOBRINDO AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

SÃO CARLOS
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

HENRIQUE OLIVEIRA

DESCOBRINDO AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Renato José de Moura

São Carlos
2013

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar

O48dr	Oliveira, Henrique. Descobrindo as razões trigonométricas no triângulo retângulo / Henrique Oliveira. -- São Carlos : UFSCar, 2013. 75 f. Dissertação (Mestrado profissional) -- Universidade Federal de São Carlos, 2013. 1. Trigonometria. 2. Triângulo retângulo. 3. GeoGebra (Software de computador). 4. Matemática. I. Título. CDD: 516.24 (20ª)

Banca Examinadora

Prof. Dr. Renato José de Moura
UFSCar

Michelle Ferreira Zanchetta Morgado

Profª. Drª. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
UNESP

Prof. Dr. Paulo Antonio Silvani Caetano
UFSCar

Em especial à minha esposa, que foi o meu alicerce enviado por Deus, a toda minha família, e a todos alunos e professores do PROFMAT.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, pela vida e por toda força necessária para vencer as barreiras encontradas no caminho.

A Mãe Maria por estar sempre intercedendo por nós em todos os momentos de nossa vida, ao Filho e Espírito Santo que sempre nos abençoou.

Dedico este trabalho a minha esposa Thalita, por estar comigo por todo esse tempo e por ser o meu alicerce em minha vida. Agradeço a ela pelos momentos que me incentivava e me motivava para continuar, para levantar a cabeça e não desistir, e falava que eu tinha potencial e por isso que não era para desanimar, e por tantas vezes teve a paciência de entender a minha ausência com ela.

Agradeço aos meus pais, Paulo e Nilza, pela criação que eles me deram, e por me mostrarem que jamais podemos deixar de lutar.

Agradeço em especial ao meu orientador Prof. Dr. Renato José de Moura, pela dedicação e por todos os ensinamentos durante toda esta trajetória. Não posso me esquecer dos "puxões de orelha" que me fizeram evoluir durante a produção desse trabalho.

Agradeço aos coordenadores das escolas onde lecionei neste período, por compreender as ausências na escola e por me apoiarem nos momentos que mais precisei.

Agradeço ao programa PROFMAT por ter fornecido esta oportunidade junto à CAPES que nos proporcionou auxilio durante todo o curso.

Agradeço a todos os alunos da turma por terem contribuído para a conclusão do mesmo, valeu a todos pelas postagens!

Agradeço a todos os professores do programa, pelo apoio e os ensinamentos que levarei sempre comigo.

RESUMO

Uma das consequências importantes da trigonometria é a razão existente entre os lados de triângulos semelhantes. Tal razão aparece com frequência em muitos problemas do cotidiano e podem ser bastante explorados em sala de aula. O objetivo deste trabalho foi explorar as razões trigonométricas no triângulo retângulo. A hipótese de trabalho foi a constatação de que as razões entre os lados são constantes. Para tanto a abordagem foi efetuada de duas maneiras: uma com o auxílio de régua e transferidor e a outra com o software livre de geometria dinâmica chamado Geogebra (). As atividades propostas foram aplicadas em uma sala do 3º ano do Ensino Médio na cidade de Franca, interior de São Paulo e a Engenharia Didática foi utilizada como metodologia de investigação. Em ambas as etapas da aplicação do projeto os resultados esperados foram alcançados com sucesso, porém, na segunda etapa, o uso do software foi um agente motivador da atividade, pois além de facilitar a visualização das construções, proporcionou a obtenção do valor exato da razão. Ao longo da aplicação do projeto diversos outros temas puderam ser explorados, tais como o sistema métrico e o erro nas aproximações. O uso da informática em sala de aula contribuiu para que as aulas ficassem mais dinâmicas e os alunos mais motivados. Espera-se que o material aqui apresentado possa ser útil para outros professores empregarem em suas aulas ou ainda adequá-lo a outros conteúdos. Espera-se também que este trabalho estimule outros docentes a usarem os recursos tecnológicos como ferramentas de apoio ao ensino.

Palavras–chave: Trigonometria, triângulos retângulos, software Geogebra, matemática.

ABSTRACT

One of the important consequences of trigonometry is the ratio that exists between sides of similar triangles. Such reason appears frequently in many everyday problems and can be quite explored in the classroom. The aim of this study was to explore the trigonometric ratio in the right triangle. The working hypothesis was that the ratios between sides are constant. So the approach was carried out in two ways: one using ruler and protractor and the other with the free software of dynamic geometry called Geogebra ( ). The proposed activities were implemented in a classroom of the 3rd year of high school in the city of Franca, São Paulo State and the Didactic Engineering was used as a research methodology. In both steps of the implementation of the project the expected results have been achieved successfully, however, in the second stage, the use of the software was a motivator of the activity, not only facilitating the visualization of buildings, but also providing the exact value of the reason. Throughout the project implementation a number of other themes could be explored, such as the metric system and the error in the approximations. The use of information technology in the classroom contributed so that classes would be more dynamic and the students more motivated. It is hoped that the material presented here may be useful for other teachers employ in their classes or tailor it to other contents. It is expected that this work will stimulate other teachers to use the technological resources as tools to support teaching.

Key words: trigonometry, right triangles, Geogebra software, mathematics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ao analisar o baixo rendimento dos alunos nas diversas avaliações de desempenho em Matemática e o baixo índice de pessoas que procuram cursos de licenciatura, em particular licenciatura em Matemática, percebemos que esta disciplina vem se tornando a matéria menos admirada pelos nossos estudantes, conforme Franciele Tatto e Ivone José Scapin (2004) falando sobre a rejeição pela Matemática

> No convívio com os alunos, percebe-se, empiricamente, o fenômeno da rejeição que ocorre quando se deparam com a disciplina de Matemática. Em todos os níveis de ensino, desde o aluno que ingressa nos primeiros anos, até o ensino superior, encontramos esta rejeição na afirmação que a Matemática é difícil.

Vê-se então que a Matemática é vista como a disciplina mais difícil, inclusive Suely Druck (2005, p.3) comenta

> A Matemática sempre foi vista, pelos alunos e pelo público em geral, como uma disciplina difícil, no entanto, todos nós precisamos dela. Basta um olhar à nossa volta e constataremos que em inúmeras atividades do dia-a-dia não podemos prescindir da Matemática.

Com essa preocupação, como um fator do desinteresse pela matemática e visando motivar os alunos a entender alguns resultados básicos em que eles mesmos possam trabalhar com estas consequências, buscamos desenvolver o projeto Descobrindo as Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo. Para tanto o projeto é dividido em duas partes. A primeira parte é desenvolvida com construção de triângulos retângulos utilizando régua e transferidor. Na segunda parte utilizamos um software matemático possibilitando a interação do conhecimento adquirido na primeira parte com o uso de novas tecnologias de ensino. Tal projeto visa também aprimorar a prática docente, levando o conteúdo de forma significativa aos alunos, possibilitando-os participar de forma efetiva do processo ensino-aprendizagem.

Tendo em vista o enorme crescimento tecnológico da informática e seu uso na área educacional, ressaltamos que tais recursos tecnológicos são propostos nos PCNs, e mais, Borba e Penteado (2001, p. 13) afirmam que

> O acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares o estudante deve poder usufruir de uma educação que no momento atual inclua, no mínimo, uma "alfabetização tecnológica". Tal alfabetização deve ser vista não como um Curso de Informática, mas, sim, como um aprender a ler essa nova mídia. Assim, o computador deve estar inserido em atividades essenciais, tais como aprender a ler, escrever, compreender textos, entender gráficos, contar, desenvolver noções espaciais etc. E, nesse sentido, a informática na escola passa a ser parte da resposta a questões ligadas à cidadania.

Com o auxílio destas ferramentas digitais é possível que o aluno construa seu conhecimento por meio de simulações, construções e conjecturas testando suas hipóteses.

Nesta perspectiva, percebemos que o computador, em particular os softwares educativos, será um auxiliador na sala de aula desde que o educador faça planejamentos das aulas e trace objetivos, pois caso contrário, esta ferramenta será apenas mais um mero objeto sem utilidade em um espaço escolar denominado "Laboratório de Informática". Além disso, é importante salientar que

> "tal inserção requer mudanças na forma como o professor organiza e avalia sua aula, no relacionamento com os alunos e, no caso específico da Matemática, na própria forma como concebem muitos dos conceitos matemáticos" (ZULATTO, 2002, grifo do pesquisador).

O objetivo central está na dinâmica entre aluno-computador e álgebra-geometria, para contribuir positivamente para a construção do conhecimento e entendimento da Matemática. Para isso os mesmos terem a oportunidade de aprender fazendo e consequentemente perceberão que podem utilizar a matemática para solucionar problemas nas diversas áreas do conhecimento.

Outra finalidade do projeto sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo é que os próprios alunos possam verificar que as razões entre os lados de um triângulo retângulo são constantes à medida que se mantém fixo o ângulo interno, ou seja, eles descobrirem na prática as razões trigonométricas usando construções de triângulos semelhantes e as frações equivalentes. Estas construções serão feitas primeiramente com o auxílio de régua e transferidor e em outra etapa usando um software matemático.

A utilização dos softwares é um trabalho interessante tanto para pesquisa quanto para que professores possam ampliar suas práticas pedagógicas com o uso de novas tecnologias no processo de ensino-aprendizagem, conforme apresentado anteriormente com o auxílio do software livre Geogebra ( ), que pode ser adquirido em www.geogebra.com.

Para a aplicação desse projeto, Descobrindo as Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo, será necessário retomarmos com os alunos os conceitos básicos da Geometria Plana, como definições de ponto, reta, plano, semirreta, segmento de reta e de ângulos, a propriedade sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo, além disso, exploraremos com frequência o Teorema de Pitágoras. É importante ressaltar que durante a construção com régua e transferidor há uma grande oportunidade de se retomar, ou iniciar, o conceito de medidas, sistemas métricos, erros e aproximações, algo que muitos alunos necessitam em diferentes segmentos.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1 trazemos um relato da escola, a comunidade em que está inserida, retratamos a realidade dos alunos envolvidos no projeto. Apresentamos uma breve história do professor aplicador e os objetivos do projeto.

No Capítulo 2 abordamos o referencial teórico em que esta dissertação foi embasada, que foi a Engenharia Didática, de Michèle Artigue (1996, p. 193-217). Na segunda etapa descrevemos o desenvolvimento do projeto.

No Capítulo 3 apresentamos uma descrição da aplicação do projeto, os resultados obtidos através de algumas tabelas, o desenrolar durante a aplicação e as dificuldades encontradas pelos alunos em conjunto com os resultados do projeto, bem como os conteúdos que foram necessários retomarmos durante a aplicação do projeto para podermos concluir o mesmo, que foram o sistema métrico, aproximações e erros, conforme exposto acima.

No Capítulo 4 relatamos a conclusão geral do projeto e sugestões para que professores possam aplicar futuramente dentro do seu contexto social.

Finalizamos este trabalho com apêndices contendo as noções primitivas da Geometria Plana, alguns resultados básicos como o Teorema de Pitágoras, demonstração das Razões Trigonométricas, o Sistema Métrico e

Aproximação utilizados no projeto. Trazemos também a lista de atividades propostas a ser entregue aos alunos no início do projeto bem como os passos em que o projeto poderá ser aplicado em outros momentos.

1 BREVE DESCRIÇÃO DA ESCOLA, DOS ALUNOS E DO PROJETO

1.1 Conhecendo melhor a escola

A escola Estadual Professora Maria Cintra Nunes Rocha – Dona Branca está localizada na Rua Ana Maria Boneti número 1461 no Jardim Cambuí, região sudeste da cidade de Franca, no estado de São Paulo. Recebeu esse nome em homenagem a Maria Cintra Nunes Rocha, a Dona Branca, nascida em 1925 em Pedregulho – SP no dia dez de novembro.

Dona Branca fez o ginásio, o Curso Normal para formação de professores primários em Campinas em colégio de freiras. Formou-se nas áreas de Geografia e História. Lecionou no Instituto Estadual de Educação Torquato Caleiro e na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras. O apelido carinhoso Dona Branca veio pela pele alva e olhos claros.

Junto a seu marido, que era professor de Matemática, eram convidados com frequência para proferirem palestras referentes a qualquer assunto em escolas e outros tipos de instituições.

Com toda essa relação com a educação, o Poder Público fez essa homenagem a essa grande mulher, forte, segura e de fibra. Projeto elaborado pelo Deputado Roberto Engler, Lei número 46 de 2004, e foi sancionado pelo Governador Geraldo Alckmin entrando em vigor no dia dez de junho de dois mil e seis.

A escola conta com oito salas de aulas e todas são utilizadas. Além disso, há um Laboratório de Informática com 12 computadores para os alunos, todos com acesso à internet. Nesse laboratório há uma estagiária para manter a organização da sala e para auxiliar o professor junto com os alunos.

Falando em informática, a escola possui um notebook para uso dos professores, um projetor, caixa de som, uma televisão de 29 polegadas, um aparelho de DVD, todos móveis, ou seja, basta o professor agendar e, no dia junto com a coordenadora, eles montam todo o equipamento necessário para a aula.

Já com base nas normas de acessibilidades para alunos, a escola possui um elevador para atender alunos com necessidades especiais devido à existência de escadas e também tem uma quadra de esportes coberta para melhorar as atividades físicas.

Além disso, a escola conta com uma sala de professores, uma sala para as duas coordenadoras, uma atendendo o Ensino Fundamental II e outra para o Ensino Médio, e uma sala para o diretor, tendo cerca de sessenta funcionários, entre professores, inspetores, secretários entre outros.

A escola atende alunos do Ensino Fundamental II e Ensino Médio, nos períodos da manhã, tarde e noite, atendendo cerca de novecentos alunos em todos os períodos. O público atendido pela escola é de região periférica da cidade.

1.2 Conhecendo os alunos envolvidos

Os alunos envolvidos no projeto foram do 3º ano B do Ensino Médio do período noturno, com aulas nas terças das 21h 30 às 23h e nas quintas das 19h às 20h 30. A sala possuía 33 alunos matriculados, porém apenas 28 eram frequentes.

Devido à baixa renda da maioria das famílias, os alunos trabalham durante o dia para poderem complementar a renda familiar. Com isso, muitos alunos acabam chegando atrasados para a primeira aula, mas a direção ciente da situação autoriza a entrada dos mesmos.

Outro fato cotidiano é o cansaço dos alunos devido ao emprego e o horário que chegam à escola. Por trabalharem o dia todo, a maioria dos alunos não fazia a tarefa de casa, mas durante a resolução em sala de aula participavam e tentavam fazer antes de ser colocada na lousa, percebendo a importância dos estudos.

É importante ressaltar que os alunos não possuem o hábito do estudo em casa, indo despreparados para as aulas e avaliações, sendo que muito estudam nos últimos trinta minutos antes das provas, fazendo com que o professor retome os conhecimentos adquiridos em aulas anteriores, principalmente retomando as operações básicas da Matemática.

Mesmo retomando as operações básicas, eles preferem utilizar as calculadoras dos celulares, o que não é proibido, mas sempre incentivamos para que evitem o uso do mesmo, conscientizando a importância do raciocínio nas operações matemáticas, que é um dos conteúdos essenciais para o avanço na disciplina, para obter estimativas e saber analisar, interpretar situações no cotidiano.

1.3 Conhecendo melhor o professor

Comecei a lecionar nessa escola no ano de 2011 como professor efetivo do Estado de São Paulo. Porém comecei a lecionar em 2005, desde o segundo ano da faculdade, como professor eventual, substituto, na rede pública e particular e ainda com aulas particulares.

Conclui o Ensino Médio na Escola Estadual Professor Otávio Martins de Souza em 2003, e no ano seguinte iniciei no ensino superior na Universidade de Franca o curso Licenciatura Plena em Matemática.

Além de gostar, da facilidade de aprendizagem e entendimento nessa disciplina, optei pelo curso de Matemática. Outro fator que contribui pela escolha era por explicar e ter paciência com meus amigos de escola, que inclusive me apoiaram na escolha. Os meus pais assustaram no início, pois não tínhamos nenhum professor na família, mas após a minha escolha eles me apoiaram e incentivaram a todo o momento e agora um primo também está cursando Licenciatura em Matemática.

Inclusive, no meu primeiro ano de faculdade, trabalhava como vendedor de componentes de calçados, e decidi deixar o emprego para começar a dedicar-me ao meu objetivo profissional, ser professor.

Os meus pais me ajudaram e me apoiaram em todos os aspectos, inclusive financeiramente. E foi a partir daí que a minha carreira começou, dando aulas particulares e substituições na rede particular de ensino e depois na pública.

Com muito esforço e dedicação fui aprovado no concurso público de PEB II no Estado de São Paulo em 2007. Como estava recém casado, resolvi não assumir as aulas da rede pública por ter que mudar de cidade. Ao mesmo tempo consegui uma vaga como professor efetivo na escola particular Colégio Monteiro Lobato COC Franca, onde permaneço como professor de Matemática.

Como precisamos estar sempre nos aprimorando e ampliar a visão de professor, em 2009 dei início ao curso de Pedagogia na Universidade de Uberaba concluindo-o em 2010.

Após a conclusão do curso de Pedagogia, estava procurando cursos de especialização na área da Matemática voltada para a sala de aula. De fato comecei uma Pós Graduação pela Universidade Federal Fluminense em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática, curso a distância, no qual conclui no ano de 2012.

E em 2011 fui aprovado para curso de Mestrado pelo programa PROFMAT na Universidade Federal de São Carlos, com aulas aos sábados. Essas aulas foram essenciais para a minha escolha, pois dessa forma pude continuar com o meu trabalho semanal e assim aplicar o conhecimento adquirido pelo programa para os meus alunos.

Nesse momento, comecei a trabalhar com a Matemática com uma visão mais detalhada dos conteúdos, uma dinâmica nova em sala de aula e com o conhecimento mais aprofundado na Matemática.

1.4 Objetivos do projeto

A partir do segundo semestre de 2011 começamos a analisar que os alunos da Escola Estadual Professora Maria Cintra Nunes Rocha estavam com um rendimento baixo nas avaliações, sendo que durante as aulas eles tinham uma boa participação e sempre conseguiam resolver os problemas propostos.

Neste momento percebemos que os alunos não estavam compreendendo o objetivo das fórmulas. Eles não conseguiam guardar e o principal, não sabiam aplicar as fórmulas, pois nem as lembravam.

Na metade do segundo semestre de 2011 e no início de 2012, com base nas avaliações e trabalhos resolvidos pelos alunos dessa turma, começamos a perceber o desinteresse quando utilizávamos o termo de fórmulas, isso fazia com que eles desanimassem nos estudos, e ainda juntava o cansaço do serviço, estava complicado prender a atenção deles.

Nesse momento, estava trabalhando com distância entre dois pontos no Plano Cartesiano, e eles sempre pediam para representar os pontos no plano para depois formar um triângulo retângulo e assim aplicar o Teorema de Pitágoras para calcular a distância entre os pontos. Ou seja, eles compreendiam a parte teórica do conteúdo, porém não conseguiam aceitar uma fórmula. Eles não percebiam que a fórmula era para simplificar várias passagens.

Dessa forma resolvemos trabalhar com eles, no segundo semestre de 2012, com Trigonometria, conteúdo esse que não foi bem explorado no ano anterior pela falta de tempo e pelo falta de estudos. Resolvemos então elaborar um projeto que tinha como objetivo que eles conseguissem verificar que as razões, divisões entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo, são constantes quando os ângulos internos são mantidos fixos, ou seja, que eles descobrissem nas atividades as razões trigonométricas e depois as colocassem em prática.

Os alunos em seu cotidiano se deparam com inúmeras formas de tecnologia e esse contato acontece em diversos ambientes. Isto faz com que muitos deles despertem o interesse para outras atividades adversas daquelas ligadas aos conteúdos curriculares, principalmente nas aulas de matemática. Uma destas tecnologias que tem alterado a participação dos alunos é o constante uso de celulares em sala de aula, o que tem colaborado com uma perda do interesse pela aula. O Promotor de Justiça da Educação Paulo Silvestre Avelar Silva cita, em um artigo publicado em outubro de 2007, que

> “Sobre este aspecto, falaremos do aparelho celular, que reconhecemos ser importante. Segundo alguns pais, é o meio mais eficaz para monitorar a trajetória dos filhos, no entanto, sem orientação de vida de seu uso, tem se constituído motivo de muitas reclamações de dirigentes de estabelecimentos de ensino.
>
> O prejuízo é observado quando os alunos se distraem em sala de aula acessando internet, ouvindo músicas, fazendo e/ou recebendo ligações, enviando torpedos, divertindo-se com jogos, etc. Outro fator preocupante é a cola eletrônica, usada por muitos alunos, que se sentem fortalecidos por burlar a vigilância dos professores, prejudicando toda a finalidade da avaliação. Estas ações muito contribuem para a dispersão do aluno, comprometendo assim as atividades de sala de aula.”

Claro que o professor não pode deixar de lado a lousa, o giz e o caderno como materiais pedagógicos pertinentes. Porém o aluno sente a necessidade de algo que lhe chame a atenção, cabendo ao professor encarar este desafio buscando alternativas para atrair o aluno neste contexto rumo à aprendizagem, pois quando falamos que a aula será de matemática, a primeira coisa que vem nos pensamentos dos alunos são contas e mais contas ou, então, os "velhos" problemas para resolver. É nesse momento que precisamos utilizar novas estratégias matemáticas para incentivar os alunos a participarem das aulas e se motivarem. Em alguns conteúdos de matemática podemos explorar o lúdico para incentivar o aprendizado, em outros recursos computacionais, etc.

O professor deve mostrar diferentes caminhos aos alunos para que eles possam escolher a melhor forma de resolvê-los. Com isso o professor pode aliar esses caminhos com as novas tecnologias, que inclusive vale lembrar que no dia 21 de setembro de 2012, Nilton Kleina publicou no site TECMUNDO que *"o Ministério da Educação investiu R$ 70 milhões em conteúdos digitais gratuitos, como o Portal do Professor – e a ideia agora é fornecer acesso a esses sites para docentes e estudantes."*

É importante salientar também que tendo em vista esse enorme avanço tecnológico, o crescimento da engenharia de softwares e a criação de computadores cada vez mais rápidos, acreditamos que o uso destes computadores e softwares podem contribuir positivamente para o aprendizado dos discentes, pois com ele é possível realizar simulações, pesquisas (via internet), gráficos, modelagem e etc.

Na atualidade, os alunos buscam praticamente todo o seu conhecimento através do computador. Assim o professor deve explorar essa ferramenta e mostrar ao aluno outros objetivos encontrados com a internet e não só simplesmente para fazer uma pesquisa. Inclusive a revista Época publicou um artigo sobre "A geração digital não sabe pesquisar", em novembro de 2011, como se observa

> "Uma pesquisa da Universidade de Charleston, nos Estados Unidos, mostra que a geração digital não sabe pesquisar. Acostumados com a comodidade oferecida por mecanismos de busca como o Google, eles confiam demais na informação fácil oferecida por esses serviços. O estudo mostrou que os estudantes usam sempre os primeiros resultados que aparecem após uma busca, sem se importar com sua procedência."

O computador, e para ser mais exato, os softwares educacionais, abrem as portas para um mundo das novas tecnologias inseridas nos conhecimentos pedagógicos. Fazendo assim com que o aluno perceba que os “estudos escolares” também fazem parte desse novo mundo virtual.

Ressaltamos que tais recursos tecnológicos são propostos nos PCNs, e mais, Borba e Penteado (2001) dizem que a informática precisa ser vista como um direito, e é impossível o professor querer fechar os olhos para essa realidade. O recurso nós temos, precisamos é saber como usar, usufruir desses recursos.

O professor que possui uma formação de informática em sua graduação ou um curso extracurricular sobre o uso das novas tecnologias em sua prática pedagógica, o que acontece em muitos casos, terá uma visão mais ampla sobre como e quando utilizar, pois ele irá apenas modelar o conteúdo com a realidade de sua sala de aula, trazendo consigo toda sua bagagem de conhecimento adquirido nesse tempo.

Como nos anos de 2011 e de 2012 trabalhamos o tempo todo com softwares matemáticos durante o curso para aprimorar a aprendizagem e termos uma visualização mais ampla do conteúdo, resolvemos então elaborar e aplicar este projeto sobre razões trigonométricas com o auxílio do software Geogebra, sendo que antes utilizamos construções de triângulos retângulos com régua e transferidor e na sequência para atingir o auge da compreensão do conteúdo utilizamos os mesmos procedimentos agora com o Geogebra.

A escolha pela utilização do software Geogebra foi devido ao fato de ser um software gratuito, de ser de fácil manuseio e também por estar disponível em diferentes sistemas operacionais, entre eles o Linux e o Windows.

No Capítulo 2 faremos a exposição do projeto e no Capítulo 4 apontamos os passos que um professor poderá aplicar em outros momentos.

2. METODOLOGIA DE PESQUISA

2.1 Referencial Teórico

Em Engenharia Didáctica: Didáctica das Matemática a educadora Michèle Artigue propõe uma metodologia de pesquisa, chamada de Engenharia Didática. Tal metodologia foi desenvolvida na França na década de 80 e foi baseado nesta teoria que este projeto foi desenvolvido.

O trabalho de Michèle Artigue, que se inspirou no trabalho de engenharia, apoia-se em conhecimentos específicos, caracterizando-se por um esquema experimental, ou seja, com base em atividades realizadas dentro da sala de aula, como podemos observar na citação

> [...] como um esquema experimental baseado sobre "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino. (p. 285)

Quando são feitas algumas comparações sobre o saber do conhecimento científico necessário, o profissional precisa ter conhecimento básico e essencial, e procurar solucionar problemas no qual não há uma teoria existente para que ele possa aplicar. Segundo Michèle Artigue (1988):

> Este termo foi "cunhado" para o trabalho didático que é aquele comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apóia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexo que os objetos depurados da ciência e, portanto, a enfrentar praticamente, com todos os meios de que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta. (p. 283)

A Engenharia Didática é como o trabalho de engenharia, todo subdividido em componentes, que transportando para a sala de aula, é o uso das sequências didáticas, utilizado na educação, que é trabalhar um projeto em etapas, passos interligados tornando o aprendizado mais eficaz. Segundo Pais (2001, p. 102):

> Uma Sequência Didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar

> situações de aprendizagem, envolvendo os conhecimentos previstos à pesquisa didática. Essas aulas são denominadas sessões.

Segundo a educadora Michèle Artigue idealizadora dessa metodologia, a Engenharia Didática possui algumas fases, que se constituem nas análises prévias, construção e análise a priori, experimentação, análise a posteriori e validação.

A metodologia é formada por três fases para poder concluir a Engenharia Didática. A primeira, que consiste nas análises prévias, é o levantamento de dados sobre a forma a ser trabalhado, como se pretende atingir o objetivo e qual o caminho a ser seguido.

A segunda fase é a construção e análise a priori, que é a apresentação do projeto aos alunos de uma forma geral, descrevendo passo a passo de como deverá ocorrer o projeto, o tempo, os recursos e o local. O objetivo desta fase é saber claramente a importância dessa situação para o aluno, e prever comportamentos possíveis que poderão ocorrer, sendo desta forma um mediador no processo.

A última fase se constitui da experimentação, que é o momento de se colocar o projeto em prática. Depois temos a análise a posteriori que são os resultados recolhidos na aplicação do projeto e finalizando com a validação, verificando se foi possível atingir as metas do projeto e sugerir modificações para que outra pessoa possa reproduzir esse projeto tendo um êxito igual ou melhor.

De fato, a engenharia didática tem duas funções na Didática da Matemática, no qual pode ser compreendida como um produto resultante de uma análise a priori, quanto a uma produção para o ensino bem explicitado por Douady (1993):

> [...] uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor. (p. 2)

Foi sobre esta metodologia de pesquisa que nos apoiamos para desenvolver esse projeto.

2.2 Descrição do Projeto

Este projeto é destinado a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental ou para alunos do Ensino Médio, em qualquer ano nesse caso. O essencial é que na escola tenha um Laboratório de Informática para a conclusão efetiva do mesmo.

O projeto é dividido em dois momentos. No primeiro momento é utilizado régua e transferidor e no segundo momento é usado o software Geogebra . O software Geogebra (www.geogebra.org) foi escolhido pela facilidade de uso, de ser de plataforma livre e que tem sido amplamente utilizado como recurso adicional em salas de aulas como aponta Rodrigo Dantas de Lucas no seu trabalho Geogebra e Moodle no Ensino de Geometria Analítica

> Por lecionar para futuros professores (licenciandos em Matemática), me senti na obrigação de mostrar aos alunos esta nova modalidade de ensino virtual, incluindo o uso do Geogebra, software de geometria dinâmica que possibilita “visualizar” o espaço sob vários pontos de vista e manipular seus objetos geométricos (pontos, retas e planos) “dinamicamente”, visualizando as mudanças algébricas ocorridas em suas equações ou coordenadas.

Nesse trabalho Rodrigo conseguiu atingir um nível de entendimento com sua turma que nunca foi alcançado em turmas anteriores sem o uso do software. Inclusive, no sítio do Geogebra, diz-se que é um software destinado a professores e alunos de qualquer nível educacional, relacionando aritmética, geometria, álgebra e cálculo em um único software.

No início do projeto devem ser explicadas as características do triângulo retângulo, retomando para isso uma breve introdução à Geometria Plana.

A base necessária para que o aluno possa participar do projeto são as noções primitivas da Geometria Plana, definição de ponto, reta, semirreta, segmento de reta e ângulo. Tais resultados estão apresentados no Apêndice A.

Com essa apresentação da Geometria Plana, vamos à definição de triângulo. Dados três pontos não colineares A, B e C, a reunião dos três segmentos AB, BC e AC, recebe o nome de triângulo, cujos lados são os segmentos AB, BC e AC, e de ângulos internos $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$.

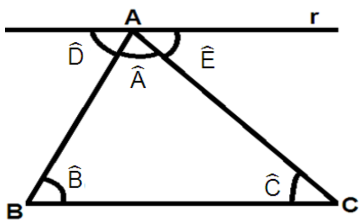
Um triângulo é classificado como triângulo retângulo se, e somente se, um dos ângulos internos forma um ângulo reto. O lado oposto ao ângulo reto de um triângulo retângulo é denominado hipotenusa, e os outros dois lados são denominados catetos. Estes catetos recebem o complemento de oposto ou adjacente em relação a um dos ângulos internos, com exceção ao ângulo reto, do triângulo retângulo.

Em relação aos ângulos internos de qualquer triângulo temos o seguinte

Teorema: A soma dos ângulos internos é sempre igual a dois ângulos retos.

Demonstração: Seja ABC um triângulo de ângulos internos iguais a $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Trace uma reta r paralela a um dos lados, digamos ao lado BC passando pelo ponto A. Desta forma teremos dois ângulos consecutivos ao ângulo $\hat{A}$, que denominamos ângulos $\hat{D}$ e $\hat{E}$, conforme a ilustração a seguir:

Figura 1 Ilustrando a construção da reta r paralela ao lado BC



Logo observamos que a soma entre os ângulos $\hat{A}$, $\hat{D}$ e $\hat{E}$ são iguais a 180º, isto é, $\hat{A} + \hat{D} + \hat{E} = 180º$. Como a reta r é paralela a reta BC, temos que o ângulo $\hat{E}$ é igual ao ângulo $\hat{C}$, assim como os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ também são iguais, e tais ângulos são denominados de ângulos alternos internos. Concluímos dessa forma que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º, ou seja, dois ângulos retos.

No caso de um triângulo retângulo, um dos ângulos é reto, digamos em A, isto é, o ângulo $B\hat{A}C$ é igual a 90º. Com base na soma entre os ângulos internos temos a relação

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 90º + \hat{B} + \hat{C} = 180º.$$

Subtraindo 90º nos dois lados da igualdade encontramos que $\hat{B} + \hat{C} = 90º$, ou seja, os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos complementares devido a sua soma e classificados como ângulos agudos, isto é, ângulos menores que 90º.

Agora, sobre os comprimentos dos lados desse triângulo retângulo, temos um teorema fundamental que é o Teorema de Pitágoras, aplicável em triângulos retângulos, conforme pode ser visto no Apêndice B.

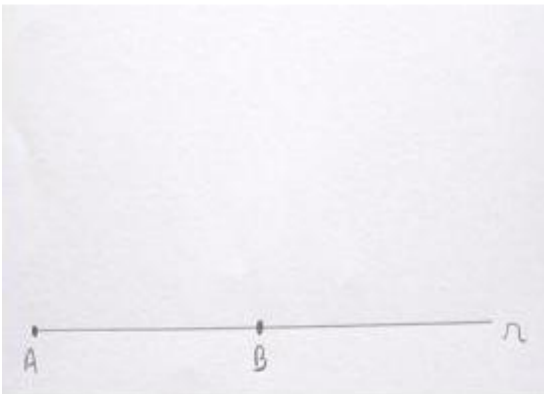
Na sequência descreveremos em duas partes as etapas do projeto. A primeira utilizando-se régua e transferidor e a outra com o auxílio do Geogebra.

2.2.1 Aplicação com régua e transferidor

Chegamos ao momento da construção do triângulo retângulo utilizando régua e o transferidor. O uso do transferidor foi sugerido pelo fato de estarmos trabalhando com alguns ângulos não construtíveis e não temos o objetivo de verificar se o ângulo é construtível ou não. O primeiro passo desta construção é solicitar aos alunos que escolham um ângulo agudo no qual irá construir o seu triângulo retângulo.

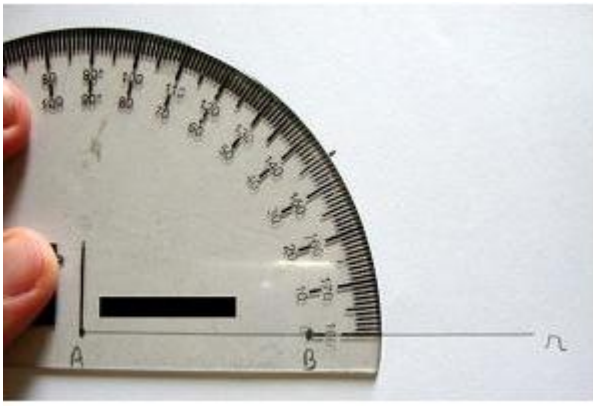
Em seguida façamos um exemplo de como construir um triângulo retângulo usando a régua e o transferidor na lousa. Uma sugestão para essa construção é, primeiro construímos uma semirreta começando no ponto A e passando por um ponto B qualquer dessa semirreta. Denotemos esta semirreta por *r*, conforme a ilustração abaixo.

Figura 2 Construção da semirreta r



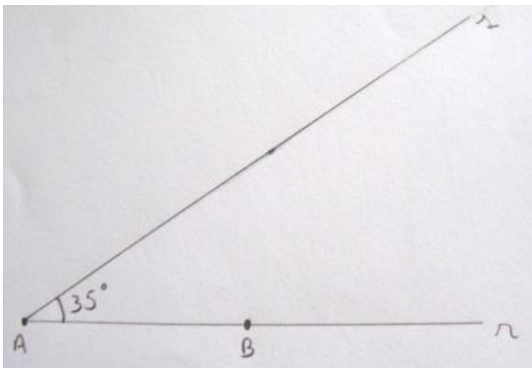
Depois, com o uso do transferidor no ponto A iniciamos a construção do ângulo agudo escolhido. Lembre-se, para a construção de ângulo com transferidor, é necessário colocarmos o centro do transferidor sobre o vértice do ângulo e a linha de fé sobre a semirreta do ângulo. Desta forma, é possível construirmos um ângulo no sentido horário ou no sentido anti-horário, dependendo de onde esteja a semirreta desejada. Lembramos que linha de fé é o segmento de reta do transferidor indicando que o ângulo será medido a partir deste segmento.

Figura 3 Construção do ângulo com transferidor



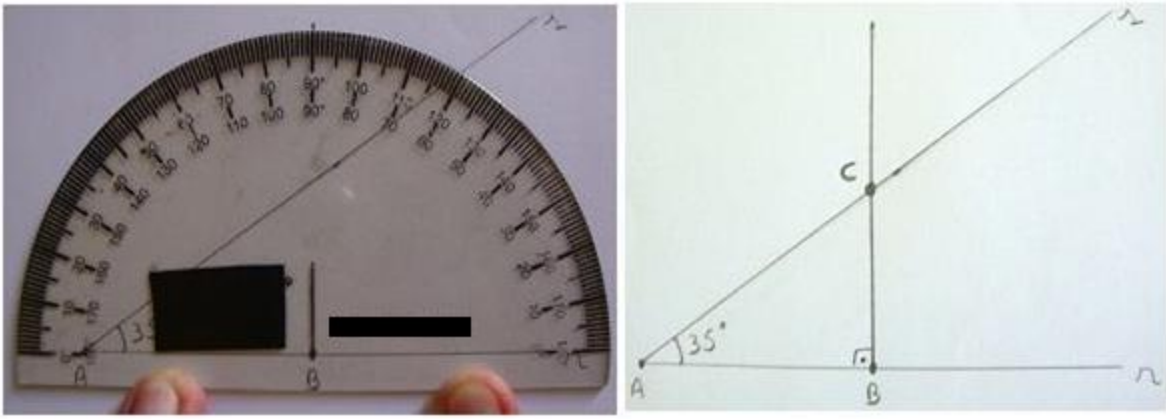
Em seguida, fazemos um ponto ao lado do ângulo solicitado. Retiramos o transferidor e construímos uma semirreta entre o vértice do ângulo ao ponto escolhido. Esta semirreta chamaremos de *s*. Desta forma o ângulo entre as duas semirretas *r* e *s* será o ângulo escolhido. Na ilustração abaixo usamos a construção de um ângulo de 35º. Observamos que o ângulo foi medido no sentido anti-horário, por estarmos começando pela semirreta *r*

Figura 4 Ângulo construído entre as semirretas r e s



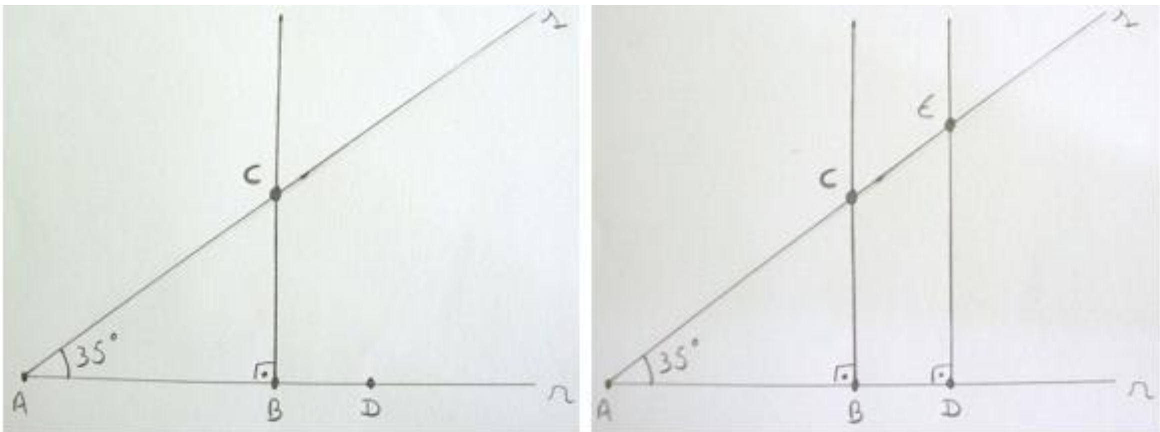
Agora basta construirmos um segmento perpendicular apenas na semi-reta *r*. Usando o transferidor no ponto B da semirreta r, façamos um ângulo reto. Assim a semirreta desse ângulo reto intersecta a semirreta s em um ponto C. Desta forma finalizamos a construção do triângulo retângulo ABC, sendo reto em B. A hipotenusa será o segmento AC, o cateto oposto ao ângulo agudo escolhido o segmento BC e o cateto adjacente o segmento AB.

Figura 5 Construção do ângulo reto e da semirreta perpendicular



Vamos nesse momento fazer outro triângulo retângulo com o mesmo ângulo agudo do anterior. Para facilitar, basta marcarmos um ponto D sobre a semirreta r distinto do B e sobre esse ponto, usando novamente o transferidor, construímos um ângulo reto. A semirreta deste ângulo intersecta a semirreta s em um ponto que chamaremos de E.

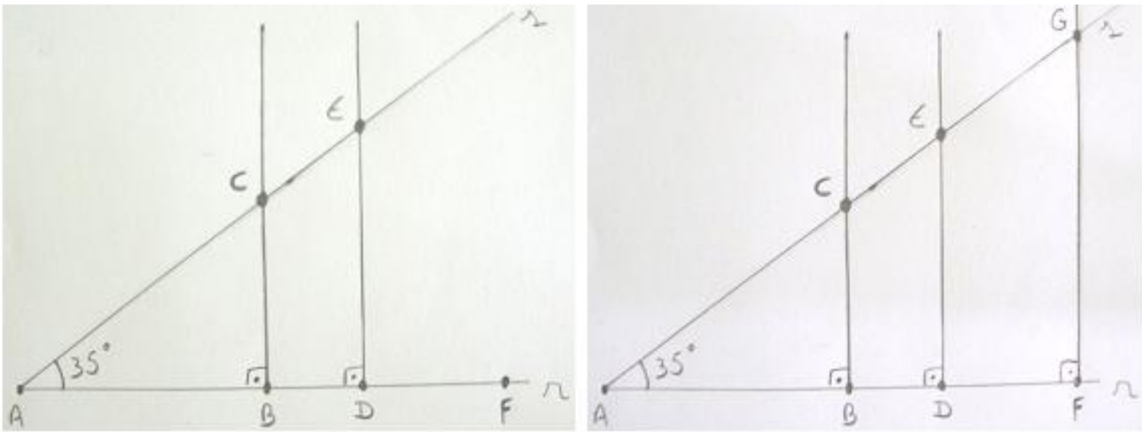
Figura 6 Construção do triângulo retângulo ADE



Finalizamos a construção de mais um triângulo retângulo ADE, sendo reto no ponto D, a hipotenusa será o segmento AE, cateto oposto ao ângulo agudo o segmento DE e cateto adjacente o segmento AD.

Façamos a construção de mais um triângulo retângulo repetindo os passos da construção do triângulo ADE começando agora por um ponto F pertencente à semirreta r que seja distinto dos pontos B e D. Sobre o ponto F elaboramos a construção de um ângulo reto como anteriormente. Esta semirreta intersectará a semirreta em um ponto G, formando um triângulo retângulo AFG, reto em F, sendo o segmento AG a hipotenusa, o segmento FG o cateto oposto ao ângulo agudo e o segmento AF o cateto adjacente.

Figura 7 Construção do triângulo retângulo AFG



Na sequência construímos uma tabela, como o modelo abaixo, e preenchemos com as respectivas medidas dos lados dos triângulos retângulos ABC, ADE e AFG usando uma casa decimal, ou seja, usando os milímetros:

Tabela 1 Comprimentos dos segmentos dos triângulos construídos com régua e transferidor

Triângulo	Comprimentos em centímetros		
	Hipotenusa	Cateto Oposto	Cateto Adjacente
ABC			
ADE			
AFG			

Depois da tabela 1 totalmente preenchida vamos para a última etapa do primeiro momento, que é a confecção de outra tabela constando as razões entre os segmentos em cada triângulo. Veja como deve ser feita essa tabela:

Tabela 2 Razões entre os segmentos com base na tabela 1

Triângulo	Razões entre os lados		
	Cateto oposto e a hipotenusa	Cateto adjacente e hipotenusa	Cateto oposto e o cateto adjacente
ABC			
ADE			
AFG			

Com isso finalizamos o primeiro momento, e nesta etapa, esperamos que o aluno perceba que os valores em cada coluna na tabela 2, sejam valores iguais, ou pelo menos aproximadamente iguais.

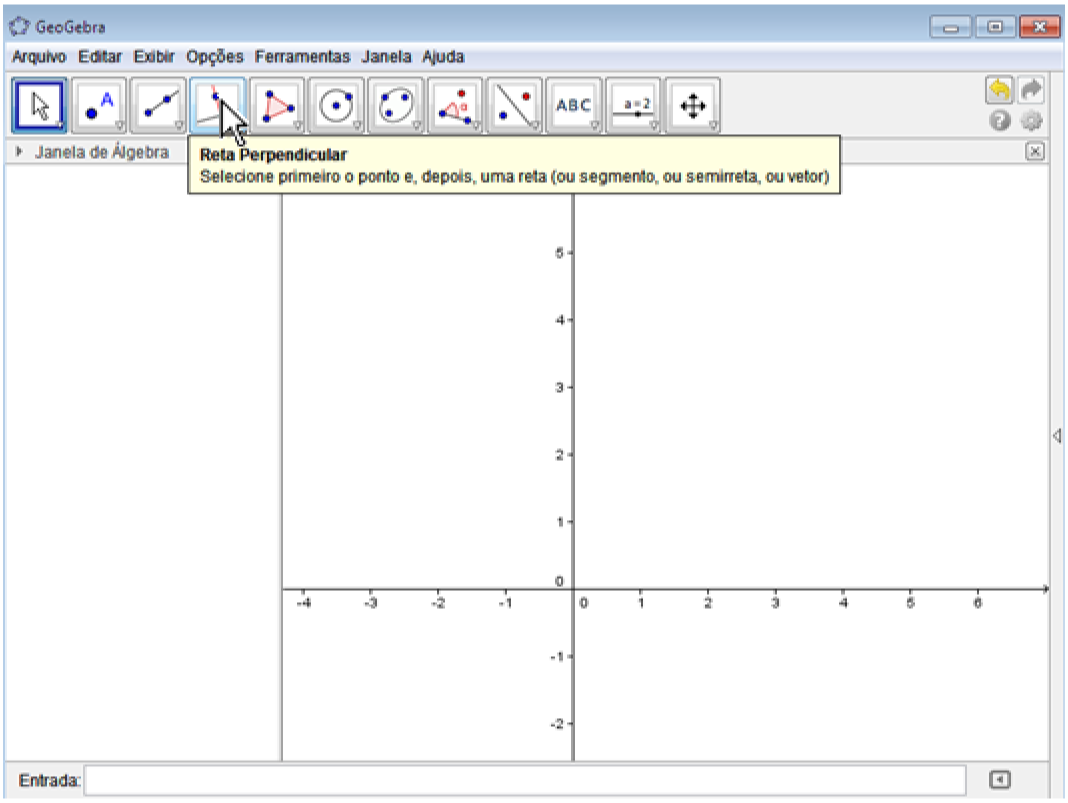
Não se deve preocupar caso as razões não sejam iguais. Na realidade é até interessante que isso ocorra, pois poderemos abordar o tema de aproximações, erros, etc.. Isso possibilitará tratarmos de alguns problemas do cotidiano deles.

Passamos agora para o segundo momento do projeto que será repetir o procedimento da construção de triângulos retângulos, porém usando o software Geogebra.

2.2.2 Aplicação com um software matemático

Uma vez apresentado a primeira parte do projeto, que foi o uso de régua e transferidor, lançamos mão do uso do software Geogebra. Este software tem a vantagem de ser alto explicativo, isto é, ao posicionarmos o mouse sobre algum item é apresentado ao usuário a explicação da função daquela tecla, como podemos ver na figura abaixo

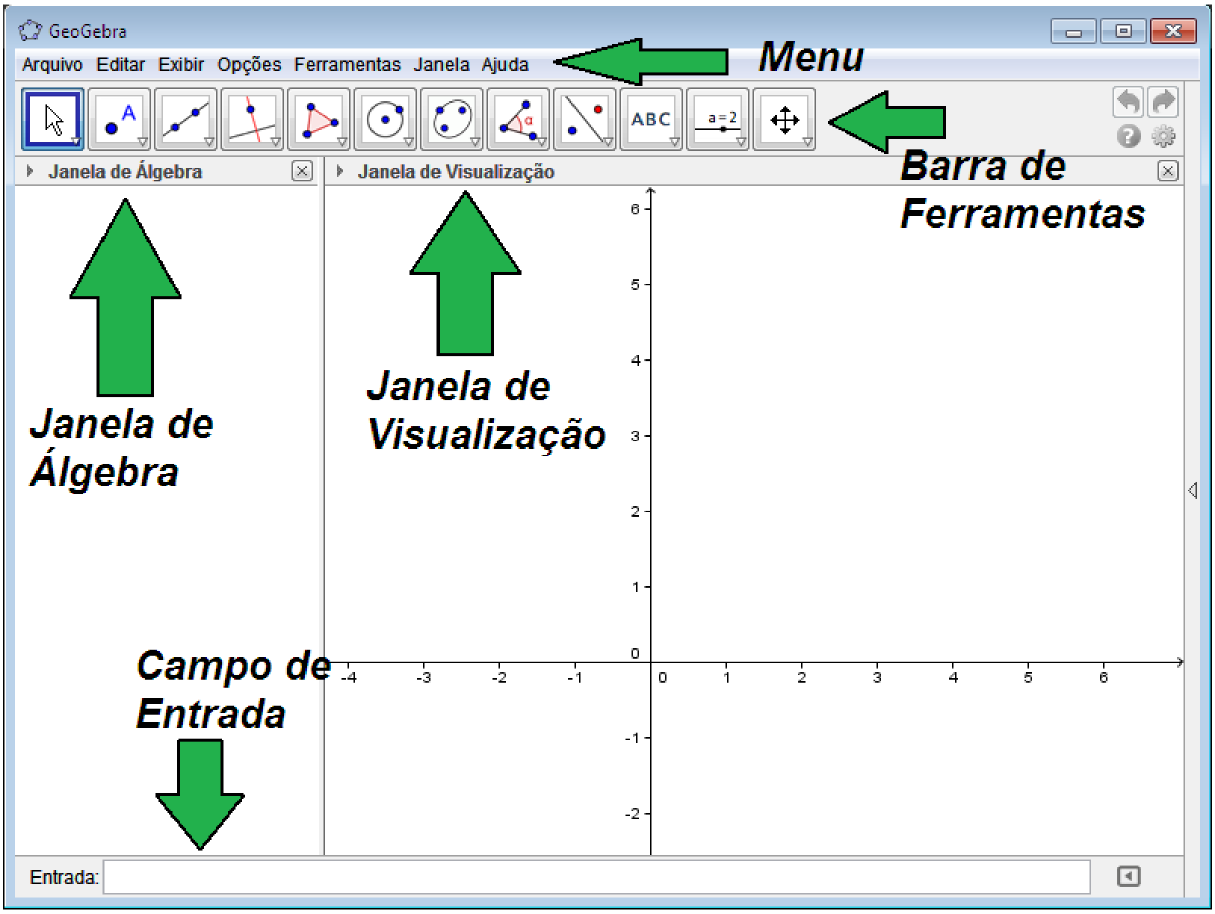
Figura 8 Mouse posicionado sobre o ícone Reta Perpendicular



Frisamos que este projeto pode ser aplicado em qualquer versão do Geogebra. Aqui as imagens do Geogebra e os comandos foram feitos na versão 4.2. Então, começamos esta primeira aula com o Geogebra passando uma explicação da tela inicial e das funções dos itens mais comuns e as que mais usaremos. Deixamos sugestões para que eles explorem, em outro momento, outros comandos e outras funções.

Na tela inicial se encontra cinco campos de trabalho: Menu, Barra de Ferramentas, Janela de Álgebra, Janela de Visualização e o Campo da Entrada (ver figura a seguir). No Menu temos os itens de Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela e Ajuda. Nestes itens é possível encontrarmos comandos como gravar, abrir arquivo, copiar e inserir imagens, exibir ou não as janelas, tamanho da fonte, arredondamento, configurar a Barra de Ferramentas, nova janela, ajuda online ou tutorial entre outros comandos.

Figura 9 Descrição da tela inicial do software Geogebra



Na Barra de Ferramentas encontramos os comandos referentes a geometria, como inserir pontos, retas, circunferências, ângulos, entre outros comandos geométricos. Na Janela de Álgebra se encontra a descrição analítica do objeto geométrico da Janela de Visualização e outra forma de inserir objetos na Janela de Visualização é através do Campo de Entrada, em que os comandos são informados via teclado, isto é, a digitação analítica do objeto.

As funções que mais usaremos serão as construções de retas perpendiculares, ângulos com amplitude fixa, interseção de retas, segmentos de retas e comprimentos de segmentos.

Em um primeiro momento, para ilustrarmos a facilidade de trabalharmos com esse software matemático, sugerimos mostrar como elaborar a construção de quadrados e triângulos equiláteros, com seus respectivos lados e até mesmo área. Caso se tenha tempo podemos solicitar aos alunos que repitam os procedimentos. Desta forma eles vão se familiarizando com os comandos.

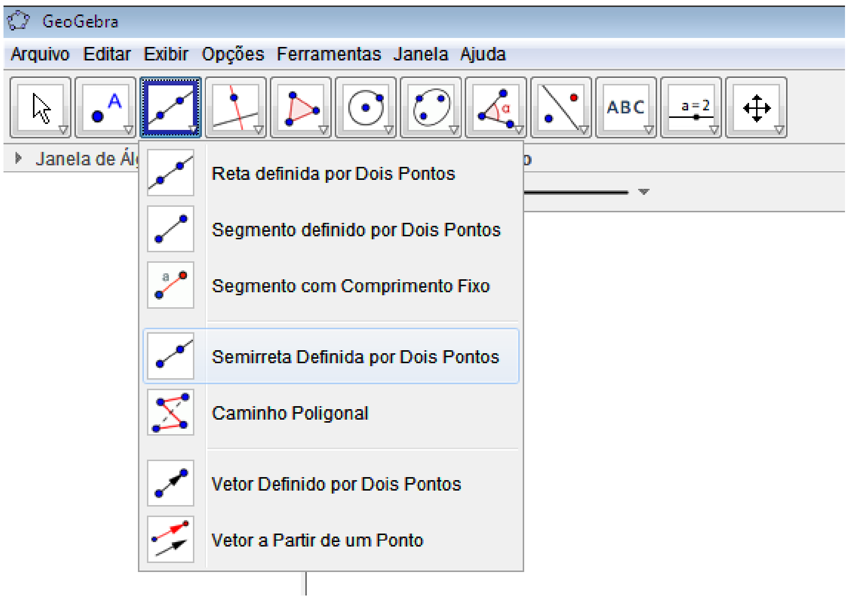
Retomando a construção de triângulos retângulos com auxílio do software, começaremos a usar o Geogebra com os alunos retirando as malhas, deixando apenas o fundo branco. Para isto basta desmarcarmos no lado direito, a Janela de Visualização que aparecerá o ícone sobre exibir ou esconder eixos.

Figura 10 Desmarcar o ícone Exibir ou Esconder Eixos

Vamos trabalhar em um fundo branco, pois pretendemos obter os mesmos resultados que em uma folha de papel e também facilitar a visualização, além disso, iremos repetir os procedimentos que fizemos anteriormente com régua e transferidor, mas desta vez usando os comandos do Geogebra.

O primeiro passo será construirmos uma semirreta que começa em um ponto A e passa por um ponto B qualquer. Para isso devemos ir ao terceiro item da Barra de Ferramentas e clicarmos sobre uma setinha, que fica no canto inferior à direita. Com isso uma lista de funções aparecerá. Clicamos sobre Semirreta Definida por Dois Pontos, conforme podemos ver na imagem abaixo:

Figura 11 Ícone Semirreta definida por dois pontos



Agora basta clicar em dois pontos distintos para representar os pontos A e B, formará uma imagem semelhante à imagem a seguir:

Figura 12 Construção da semirreta AB

Para a construção do ângulo agudo já estabelecido previamente com os alunos, devemos ir ao oitavo ícone da Barra de Ferramentas e selecionarmos o item Ângulo com Amplitude Fixa. Para representar o ângulo, devemos primeiro clicar no ponto B e depois no ponto A, definindo que o ângulo será medido a partir desse segmento. Depois disto aparecerá uma tela para colocarmos o ângulo para construção. Substituímos o ângulo que aparece e digitamos o ângulo que fora escolhido. Deixamos marcado o item Sentido Anti-Horário se o ponto B estiver do lado direito do ponto A, caso contrário deixemos marcado o Sentido Horário.

Figura 13 Ícone Ângulo com Amplitude Fixa

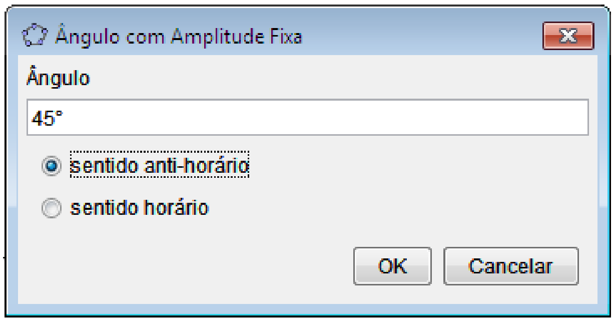


Figura 14 Digitando o ângulo para construção

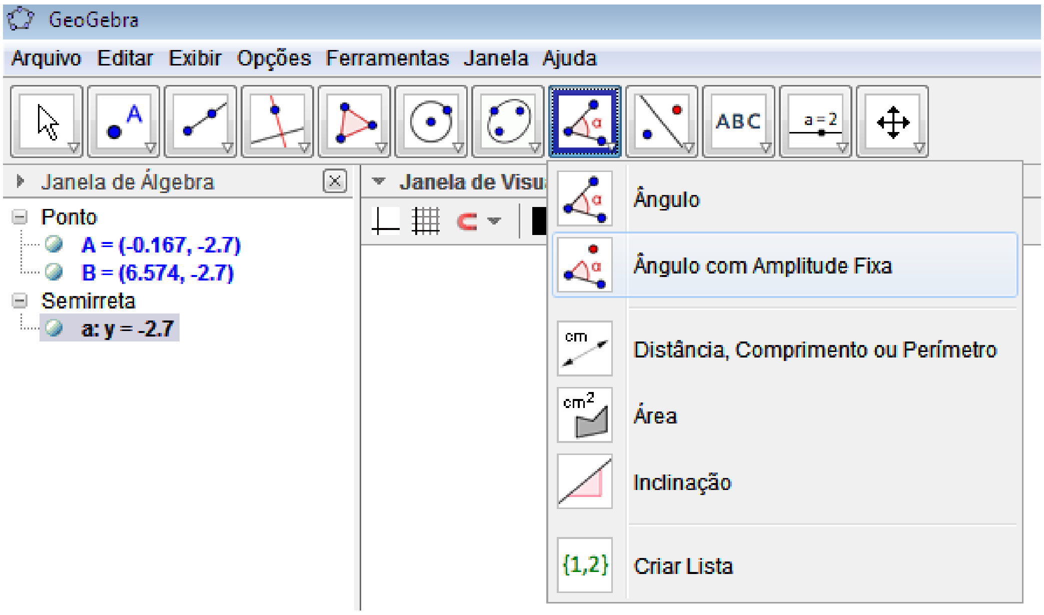
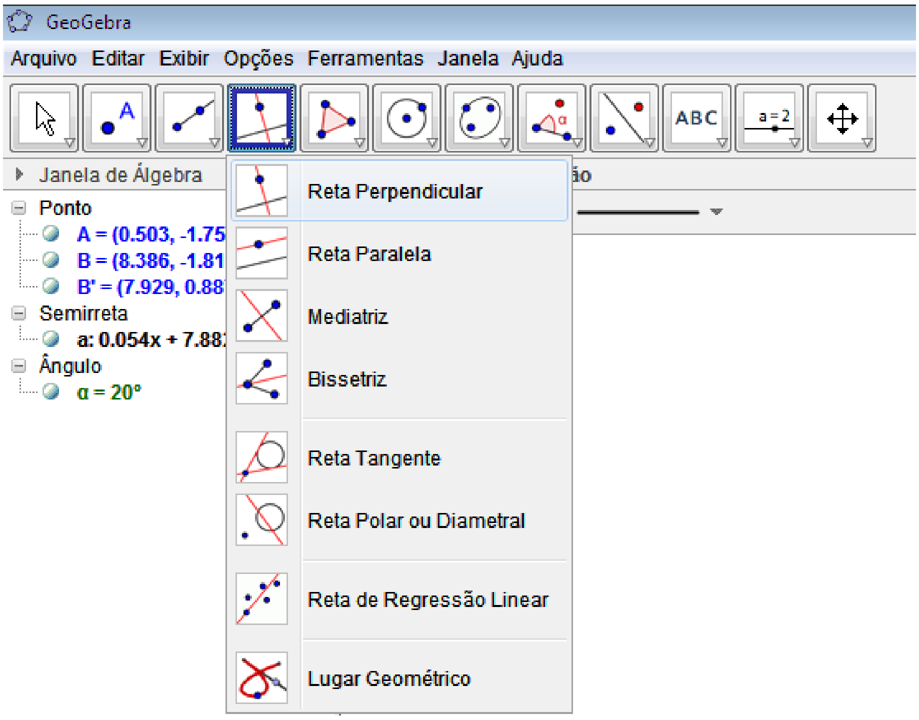


Figura 15 Construção do ângulo agudo

Por enquanto temos duas semirretas começando no ponto A e um ângulo fixo entre as semirretas. Agora vamos fazer uma reta perpendicular à semirreta AB passando no ponto B.

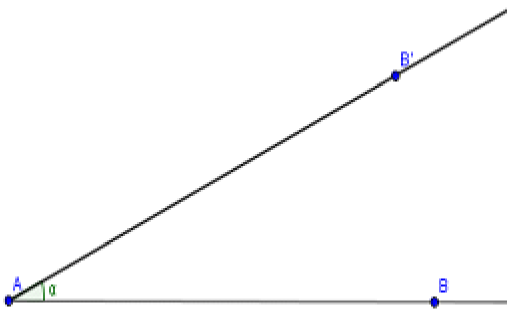
Para isso clicamos no quarto item da Barra de Ferramentas e selecionamos o item Reta Perpendicular. Para criar a reta perpendicular devemos primeiro clicar sobre a semirreta AB e depois no ponto B, construindo desta forma uma semirreta perpendicular a semirreta AB. É neste ponto B que ficará o ângulo reto.

Figura 16 Ícone Reta Perpendicular



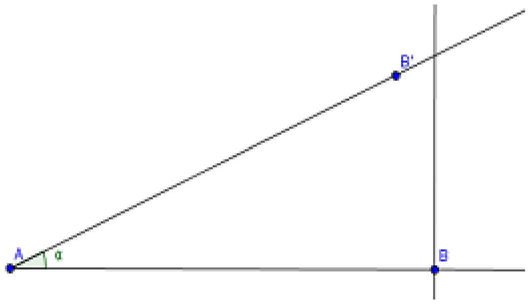
Agora construímos uma semirreta passando por A e por B'. Este B' foi criado no momento em que construímos o ângulo. Para isto selecionamos o item Semirreta Definida por Dois Pontos, conforme a Figura 11.

Figura 17 Construção da semirreta AB'



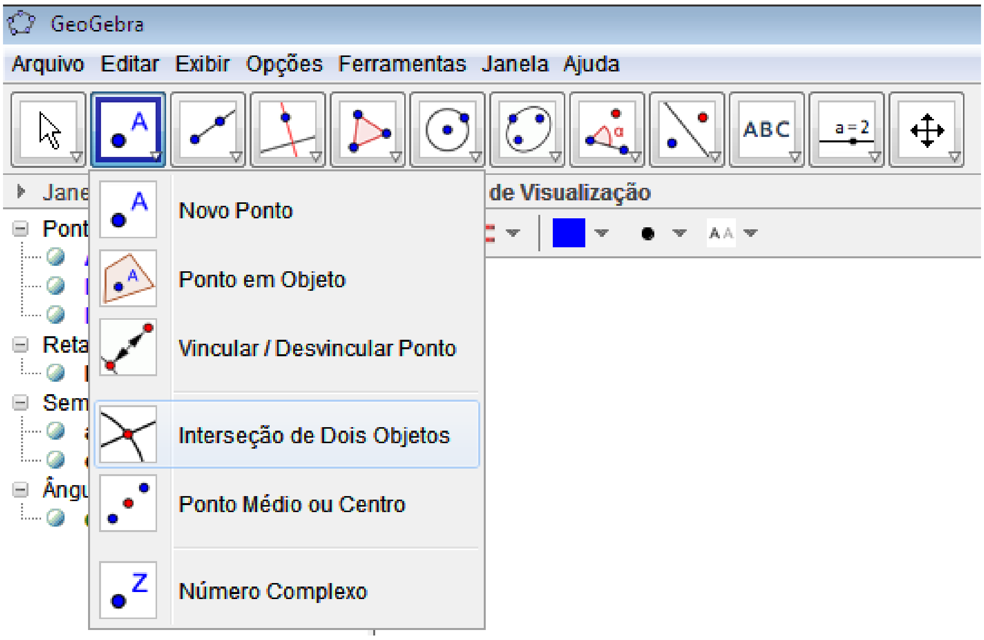
Após a construção da semirreta perpendicular a semirreta AB passando pelo ponto B, teremos uma imagem semelhante a seguinte.

Figura 18 Construção da semirreta perpendicular a semirreta AB



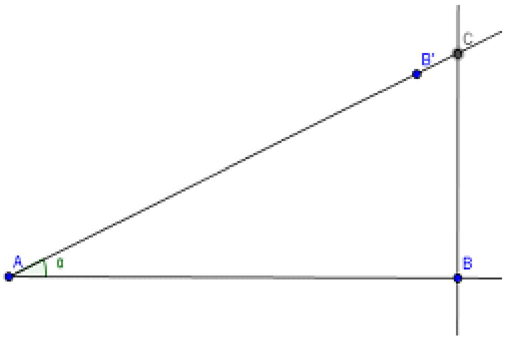
Para finalizarmos a construção do triângulo retângulo, precisamos determinar o ponto de intersecção da reta perpendicular com a semirreta AB’. Para isso clicamos no segundo item da Barra de Ferramentas e selecionamos o item Intersecção de Dois Objetos. Depois clicamos sobre a semirreta AB’ e em seguida na semirreta perpendicular, ou vice-versa, obtendo o ponto de intersecção C.

Figura 19 Ícone Intersecção de Dois Objetos



Surgindo o ponto C acabamos de construir um triângulo retângulo ABC, sendo reto em B, a hipotenusa o segmento AC, o cateto oposto ao ângulo agudo o segmento BC e o segmento AB o cateto adjacente.

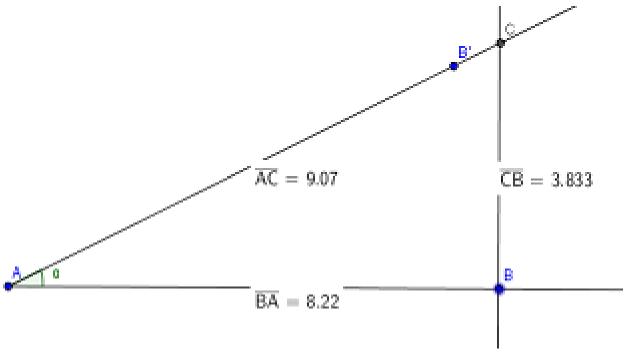
Figura 20 Triângulo retângulo com ângulo reto em B



Para elaborarmos as tabelas iguais do primeiro momento, precisamos determinar os comprimentos deste triângulo, e para isso vamos utilizar um arredondamento de três casas decimais. Para que o Geogebra utilize esse tipo de arredondamento em suas medições, basta irmos ao Menu, clicarmos sobre Opções, depois Arredondamento e selecionarmos 3 Casas Decimais.

Agora para determinarmos os comprimentos dos segmentos basta clicarmos no oitavo item da Barra de Ferramentas, o mesmo utilizado para o ângulo (figura 12), porém selecionamos o item Distância, Comprimento ou Perímetro. Com isso iremos selecionar os pontos de cada segmento. Começamos, por exemplo, pela hipotenusa. Então clicamos nos pontos A e C. Neste momento deverá aparecer o comprimento do segmento, isto é da hipotenusa. Em seguida, agora com o cateto oposto, clicando nos pontos C e B, por último o cateto adjacente, que são os pontos B e A, ou seja, temos definido os valores dos três lados.

Figura 21 Medidas do triângulo ABC



Com isso finalizamos a construção do primeiro triângulo retângulo usando o Geogebra.

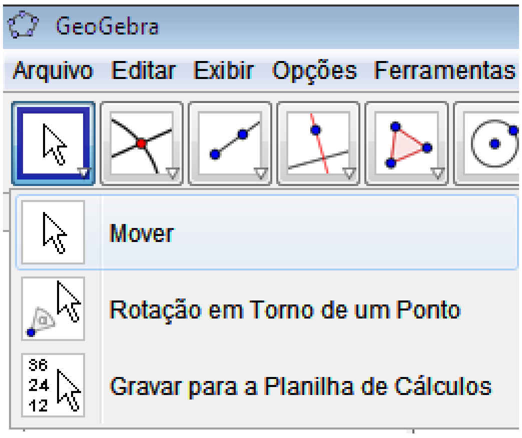
O próximo passo é produzirmos uma tabela semelhante à tabela 1, no qual contém os lados dos triângulos retângulos construídos. Lembramos que precisamos de três triângulos retângulos com o mesmo ângulo agudo. Para tanto primeiro marquemos os comprimentos desse primeiro triângulo retângulo na tabela 3.

Tabela 3 Comprimentos dos segmentos dos triângulos construídos no Geogebra

Triângulo ABC	Comprimentos em centímetros		
	Hipotenusa	Cateto Oposto	Cateto Adjacente
1º			
2º			
3º			

Como precisamos de mais de um triângulo para preenchermos a tabela, deslocamos o ponto B sobre a semirreta para que tenhamos novos triângulos retângulos de lados diferentes dos anteriores, porém, com o ângulo agudo fixo, lembrando que vamos precisar de três triângulos. Para deslocar o ponto B, vá ao primeiro item da Barra de Ferramentas e selecionamos o item Mover, depois arrastamos o ponto B sobre a semirreta para obtermos novos triângulos retângulos, e os comprimentos vão acompanhando essa mudança.

Figura 22 Ícone mover ponto para



Cada vez que movermos o ponto B tem-se um novo triângulo retângulo, para preenchermos a tabela 3. Com isso devemos mover o ponto B duas vezes, obtendo o segundo e o terceiro triângulo retângulo, completando a tabela em questão. Como o ponto B será movido de maneira aleatória, cada aluno terá a oportunidade de encontrar valores diferentes entre outros alunos, para os lados dos triângulos.

Para finalizar essa etapa, vamos à última tabela, que é a tabela contendo as razões entre os lados de cada triângulo retângulo, cujas medidas estarão na tabela anterior, semelhante à tabela 2, porém as razões agora se baseiam na tabela 3. Também utilizamos para essas razões três casas decimais. E para que os alunos não percam muito tempo nessas divisões, e que tenham uma melhor aproximação, aconselhamos aos alunos o uso de calculadoras - um recurso tecnológico adicional neste momento.

Tabela 4 Razões entre os segmentos com base na tabela 3

Triângulo ABC	Razões entre os lados		
	Cateto oposto e a hipotenusa	Cateto adjacente e hipotenusa	Cateto oposto e o cateto adjacente
1º			
2º			
3º			

Depois de todas as construções efetuadas e todas as tabelas preenchidas, vamos para a etapa final do projeto que será o debate entre os alunos e a conclusão.

Nesta etapa questionaremos os alunos sobre a aplicação do projeto. Algumas sugestões para as questões são:

1. Por que na tabela 2 as razões não foram iguais como na tabela 4?
2. Alguém poderia justificar o porquê dessa diferença?
3. Com base nessas razões da tabela 4, se for fornecido o valor da hipotenusa, você conseguiria determinar o valor do cateto oposto e do adjacente?

Depois de responder estas questões e outras que poderão surgir ao longo do questionamento, apresentamos o conteúdo Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo com a justificativa adequada e previamente motivada. Apresentamos no apêndice C estes resultados.

Mostraremos aos alunos as razões trigonométricas no triângulo retângulo, cujas razões recebem o nome de Seno, Cosseno e Tangente, os valores destas razões são constantes, indiferente dos valores entre os lados, desde que o ângulo agudo seja mantido constante. Explicitaremos que Seno de um ângulo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo pela hipotenusa, Cosseno de um ângulo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo pela hipotenusa e a Tangente de um ângulo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo pelo cateto adjacente ao mesmo ângulo.

Depois iremos apresentar uma tabela contendo os valores do seno, cosseno e da tangente de ângulos variando de um a oitenta e nove graus, para ilustrar os valores encontrados que já são conhecidos. A seguir veja a Tabela Trigonométrica, com cinco casas decimais de aproximação.

Tabela 5 Tabela Trigonométrica

Ângulo (graus)	Seno	Cosseno	Tangente
1	0,01745	0,99985	0,01746
2	0,03490	0,99939	0,03492
3	0,05234	0,99863	0,05241
4	0,06976	0,99756	0,06993
5	0,08716	0,99619	0,08749
6	0,10453	0,99452	0,10510
7	0,12187	0,99255	0,12278
8	0,13917	0,99027	0,14054
9	0,15643	0,98769	0,15838
10	0,17365	0,98481	0,17633
11	0,19081	0,98163	0,19438
12	0,20791	0,97815	0,21256
13	0,22495	0,97437	0,23087
14	0,24192	0,97030	0,24933
15	0,25882	0,96593	0,26795
16	0,27564	0,96126	0,28675
17	0,29237	0,95630	0,30573
18	0,30902	0,95106	0,32492
19	0,32557	0,94552	0,34433
20	0,34202	0,93969	0,36397
21	0,35837	0,93358	0,38386
22	0,37461	0,92718	0,40403
23	0,39073	0,92050	0,42447

Ângulo (graus)	Seno	Cosseno	Tangente
45	0,70711	0,70711	1,00000
46	0,71934	0,69466	1,03553
47	0,73135	0,68200	1,07237
48	0,74314	0,66913	1,11061
49	0,75471	0,65606	1,15037
50	0,76604	0,64279	1,19175
51	0,77715	0,62932	1,23490
52	0,78801	0,61566	1,27994
53	0,79864	0,60182	1,32704
54	0,80902	0,58779	1,37638
55	0,81915	0,57358	1,42815
56	0,82904	0,55919	1,48256
57	0,83867	0,54464	1,53986
58	0,84805	0,52992	1,60033
59	0,85717	0,51504	1,66428
60	0,86603	0,50000	1,73205
61	0,87462	0,48481	1,80405
62	0,88295	0,46947	1,88073
63	0,89101	0,45399	1,96261
64	0,89879	0,43837	2,05030
65	0,90631	0,42262	2,14451
66	0,91355	0,40674	2,24604
67	0,92050	0,39073	2,35585

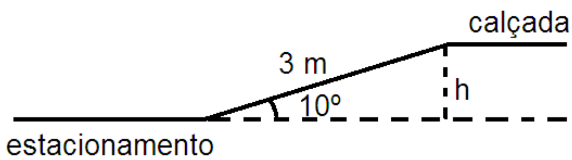
24	0,40674	0,91355	0,44523
25	0,42262	0,90631	0,46631
26	0,43837	0,89879	0,48773
27	0,45399	0,89101	0,50953
28	0,46947	0,88295	0,53171
29	0,48481	0,87462	0,55431
30	0,50000	0,86603	0,57735
31	0,51504	0,85717	0,60086
32	0,52992	0,84805	0,62487
33	0,54464	0,83867	0,64941
34	0,55919	0,82904	0,67451
35	0,57358	0,81915	0,70021
36	0,58779	0,80902	0,72654
37	0,60182	0,79864	0,75355
38	0,61566	0,78801	0,78129
39	0,62932	0,77715	0,80978
40	0,64279	0,76604	0,83910
41	0,65606	0,75471	0,86929
42	0,66913	0,74314	0,90040
43	0,68200	0,73135	0,93252
44	0,69466	0,71934	0,96569

68	0,92718	0,37461	2,47509
69	0,93358	0,35837	2,60509
70	0,93969	0,34202	2,74748
71	0,94552	0,32557	2,90421
72	0,95106	0,30902	3,07768
73	0,95630	0,29237	3,27085
74	0,96126	0,27564	3,48741
75	0,96593	0,25882	3,73205
76	0,97030	0,24192	4,01078
77	0,97437	0,22495	4,33148
78	0,97815	0,20791	4,70463
79	0,98163	0,19081	5,14455
80	0,98481	0,17365	5,67128
81	0,98769	0,15643	6,31375
82	0,99027	0,13917	7,11537
83	0,99255	0,12187	8,14435
84	0,99452	0,10453	9,51436
85	0,99619	0,08716	11,43005
86	0,99756	0,06976	14,30067
87	0,99863	0,05234	19,08114
88	0,99939	0,03490	28,63625
89	0,99985	0,01745	57,28996

Para finalizarmos o projeto, apresentamos algumas questões provendo um ângulo agudo do triângulo retângulo e um lado, para que aluno determine os outros lados. Depois fornecemos todos os lados do triângulo retângulo, e pedimos para o aluno determinar os ângulos agudos do triângulo retângulo fornecido, como sugestão segue duas questões a seguir:

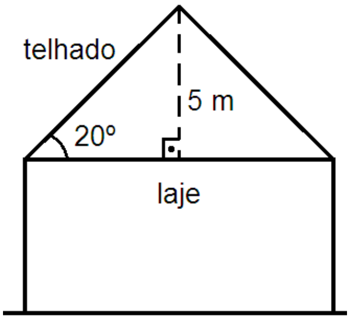
1ª) A rampa do estacionamento da escola possui 3 metros de comprimento e forma um ângulo de 10º com a superfície. Analisando a figura a seguir, determinar a altura entre a calçada e o estacionamento:

Figura 23 Ilustração para o exercício 1, fora de escala



2ª) O telhado de uma residência terá 5 metros de altura para que tenha uma queda suficiente para a água escorrer. Sabendo-se que o telhado forma um ângulo de 25º com a laje da casa, determinar o comprimento de uma queda do telhado e o comprimento total da laje dessa casa:

Figura 24 Ilustração para o exercício 2, imagem fora de escala



A avaliação do projeto deverá ser feita aula por aula, analisando o interesse dos alunos no trabalho com régua e transferidor comparado com a aula do Geogebra. Assim será considerada a compreensão dos alunos referente ao conteúdo, a resolução das questões propostas e os cálculos feitos para responder as últimas questões.

3. APLICAÇÃO E RESULTADOS

Iniciamos o projeto em outubro de 2012. Após expormos aos alunos o tema e a motivação que nos levou a apresentarmos tal proposta, os alunos prontamente aceitaram fazer parte do projeto. Propusemos uma lista de atividades que eles deveriam seguir em algumas aulas. Esta lista se encontra no apêndice E. Algumas observações como assiduidade e participação dos alunos seriam imprescindíveis para o êxito das atividades, pois em cada etapa posterior seria necessário que os alunos realizassem algumas tarefas. Inicialmente havíamos proposto um total de cinco aulas. Entretanto foi necessário acrescentarmos mais uma aula para que os alunos pudessem familiarizar-se com o software Geogebra.

Na primeira aula do projeto realizamos uma revisão sobre as Noções Primitivas da Geometria Plana, os conceitos básicos que são: ponto, reta e plano, depois definirmos segmento de reta, semirreta e ângulo. Esta revisão se encontra no Apêndice A.

Com essas definições demos sequência definindo triângulos. Em seguidas elaboramos perguntas como: O que é um triângulo retângulo? E o que ele tem de essencial? Feitas estas questões, iniciamos os estudos com triângulos retângulos, que é à base do projeto.

A resposta dos alunos à primeira pergunta foi: um triângulo retângulo é uma figura plana com três lados, três ângulos internos sendo que um deles forma um ângulo reto, e eles fizeram uma comparação com o retângulo. O mais importante das respostas era a citação do ângulo reto, pois sem ele seria apenas um triângulo qualquer.

Com base nessas respostas, levantamos um questionamento sobre algum teorema que eles poderiam aplicar em triângulos retângulos. Rapidamente vieram à resposta com o Teorema de Pitágoras. Lembraram deste Teorema pelo fato de termos aplicado para calcular a distância entre dois pontos na Geometria Analítica, conteúdo visto no início do primeiro semestre de 2012. No Apêndice B encontramos a teoria utilizada.

Logo explanamos as características do triângulo retângulo: como no triângulo a soma dos ângulos internos é igual a dois ângulos retos e sendo, no triângulo retângulo um dos ângulos igual a 90º, os outros dois ângulos são o que se denomina complementares, isto é, a soma entre eles é igual a 90º. Ou seja, eles são classificados como ângulos agudos, isto é, menores que 90º. Exploramos também sobre a aplicação do Teorema de Pitágoras, e lembramos alguns conceitos como a hipotenusa ser o lado oposto ao ângulo reto e que cateto pode ser oposto ou adjacente em relação ao ângulo agudo do triângulo retângulo.

Uma vez estabelecido a definição do triângulo retângulo e trabalhado com seus elementos, no próximo passo os alunos escolheram um valor para o ângulo agudo do triângulo retângulo, pois eles iriam construir triângulos retângulos com o valor do ângulo escolhido. Depois de feito a escolha do ângulo, distribuímos réguas, transferidores e folhas em formato A4 para que os alunos realizassem a construção.

Após a entrega do material, começamos a explicar no quadro como construir um triângulo retângulo conhecendo um ângulo interno agudo, cujas etapas se encontram descritos no capítulo 2. Na sequência montamos a primeira tabela do projeto, que contêm os lados dos três triângulos construídos, tudo na folha em formato A4.

Durante a construção os alunos não apresentaram maiores dúvidas. Mas uma dificuldade encontrada pelos alunos foi no momento em que tinham que medir os lados dos triângulos, muitos deles não sabiam qual o valor a ser usado caso as medidas não fossem exatas. Alguns destes alunos não sabiam que o centímetro tem um submúltiplo, o milímetro, que também são representados em réguas. Neste momento eles questionaram sobre a melhor forma de aproximação e se poderiam efetuar estas aproximações. Demos a reposta como afirmativa, mas sugerimos que os alunos usassem pelo menos uma casa de aproximação para obtermos um melhor resultado.

Devido a estas dúvidas retomamos o conteúdo referente ao sistema métrico, falando principalmente das unidades do metro, do centímetro e do milímetro, tirando as dúvidas sobre estas aproximações que deveriam fazer e para facilitar essa explanação, desenhamos uma régua na lousa.

Os alunos conseguiram terminar as construções dos três triângulos retângulos citados acima e o preenchimento da tabela 1 com as medidas dos lados em duas aulas. Com isso na aula seguinte, começariam a fazer e preencher a segunda tabela, referente às razões entre os lados encontrados na primeira tabela.

Para o preenchimento dessa segunda tabela, que é a tabela das razões entre os lados, solicitamos que utilizassem nas aproximações pelo menos duas casas decimais. Para esta etapa permitimos a utilização da calculadora, facilitando o preenchimento. No apêndice F, trazemos algumas imagens das construções dos triângulos retângulos junto com as tabelas 1 e 2.

Assim que os alunos foram terminando de completar a tabela com as razões entre os lados, dois alunos comentaram que as razões em cada coluna estavam bem próximas uma das outras, e que algumas eram iguais. Perguntaram se estava correto. Esta pergunta foi essencial para iniciarmos o segundo momento do projeto, que é o uso do software Geogebra. A resposta que demos ao aluno foi que eles iriam descobrir isso na próxima etapa, pois alguns alunos não tinham observado essas aproximações. Este foi um momento muito importante para o projeto, pois permitiu que pudéssemos explorar o conceito proposto, bem como a importância da aproximação ter o menor erro possível. Cabe aqui observar que o professor pode explorar um pouco mais este conteúdo apresentando problemas envolvendo erros e aproximações e que, em muitos casos, pequenos erros quando propagados podem levar a grandes problemas.

O início da segunda etapa do projeto começou com a seguinte pergunta aos alunos: Como poderíamos construir esses triângulos retângulos e ter uma medida mais precisa? Um aluno respondeu que se tivéssemos o auxílio de um computador teríamos as medidas dos lados dos triângulos mais exatos. É importante frisar que este aluno trabalha na construção civil. Logo ele respondeu com base no seu emprego, se referindo a usar o computador relacionando-se a programas, que o engenheiro mostrava na planta do projeto com as medidas exatas para a construção por meio de impressões ou no próprio computador.

Com isso apresentamos o software Geogebra aos alunos, levando-os a Sala de Informática, mostrando onde fica a Barra de Ferramentas, o Menu, o significado dos ícones, conforme podemos observar no capítulo 2 e deixamos claro que o software é alto explicativo, isto é, ao deixar o mouse sobre o ícone aparece o comentário do funcionamento do mesmo.

Na sequência, com um projetor ligado na sala de Informática, fomos realizando a construção de um quadrado e de um triângulo equilátero. Paralelamente os alunos foram acompanhando os processos nos computadores para se familiarizarem com o Geogebra.

Terminamos essa aula com os alunos conhecendo e trabalhando sozinhos no Geogebra. Na aula seguinte iríamos continuar na Sala de Informática usando esse software para realizarem a construção de triângulos retângulos, de forma mais rápida e precisa.

Neste momento, tinha-se passado dois dias de aulas, sendo aula dupla em cada dia com duração de quarenta e cinco minutos cada aula. No terceiro dia de aula do projeto, iniciamos direto na Sala de Informática, para a construção dos triângulos retângulos propostos no início das atividades. Para esta etapa continuamos usando o projetor no qual fomos construindo um triângulo retângulo no software seguindo os passos, e os alunos foram acompanhando a construção e construindo seus triângulos retângulos usando o valor do ângulo agudo feito na etapa anterior.

Depois que os triângulos foram construídos, eles fizeram duas novas tabelas, uma com os lados dos três triângulos retângulos e a outra com as razões entre os lados observados, conforme as tabelas 3 e 4 do capítulo 2, iguais às tabelas anteriores, porém com os valores encontrados no Geogebra. Outra diferença da primeira tabela é que foi trabalhado com três casas decimais para as mensurações dos lados, tendo uma maior precisão nas medidas dos lados e nas razões. Novamente aconselhamos o uso da calculadora para o preenchimento da segunda tabela que era das razões.

Assim que os alunos foram terminando de preencher a tabela com as razões, foram afirmando que as razões entre os lados em cada coluna são iguais. Todos os alunos chegaram à conclusão principal do projeto, que são as razões entre os lados serem constantes para cada ângulo interno, com isso eles conseguiram de maneira prática entender a relação existente entre estes lados, ou seja, entender de forma objetiva as Razões Trigonométricas, que foi o mote deste projeto.

A seguir apresentamos algumas tabelas elaboradas por alguns alunos que por transcrição dos dados optamos por colocar apenas as iniciais dos nomes dos alunos envolvidos.

Observemos a tabela a seguir com os segmentos dos triângulos retângulos com um ângulo igual a 30º construídos com régua e transferidor pela aluna T:

Tabela 6 Tabela com as medidas encontradas pela aluna T.A.

Triângulo	Hipotenusa	Cateto oposto	Cateto adjacente
ABC	5,2	2,6	4,5
ADE	10,5	5,2	9,1
AFG	12,4	6,1	10,7

Com base nestas medidas e utilizando uma calculadora, a aluna determinou as razões entre os lados, obtendo as aproximações representadas na tabela a seguir:

Tabela 7 Razões entre os segmentos construídos com régua e transferidor pela aluna T.A.

Triângulo	Razões entre os lados		
	Cateto oposto e a hipotenusa	Cateto adjacente e hipotenusa	Cateto oposto e o cateto adjacente
ABC	0,500	0,865	0,577
ADE	0,495	0,866	0,571
AFG	0,491	0,862	0,570

Analisando os resultados encontrados pela aluna T.A., e comparando-os com as razões trigonométricas na tabela 5, no qual seno de 30º é igual a 0,500, cosseno de 30º é 0,866 e tangente de 30º é igual a 0,577, isso com três casas decimais de aproximação, observamos que suas aproximações na mensuração dos lados foi bem exata, devido as diferenças entre as razões encontradas terem sido no máximo nove milésimos.

Com base nestas razões encontradas poderíamos ter concluído o projeto, Bastaria utilizarmos aproximação de uma casa decimal. Desta forma os valores serão iguais aos valores verdadeiros fornecidos pela tabela 5. Procurando obter as razões iguais aos da tabela 5, continuamos o projeto normalmente como segue as orientações no capítulo 2. Vejamos a tabela a seguir com os segmentos mensurados pela aluna T.A., utilizando o software Geogebra programado para medição com três casas decimais:

Tabela 8 Tabela com as medidas encontradas pela aluna T.A. no Geogebra

Triângulo	Hipotenusa	Cateto oposto	Cateto adjacente
1º	10,916	5,458	9,454
2º	14,732	7,366	12,758
3º	21,066	10,533	18,244

Utilizando aproximações com três casas decimais, temos valores mais próximos do real. De fato, as razões encontradas serão os valores corretos. Observe esses valores encontrados pela aluna T.A. com base na tabela 8:

Tabela 9 Razões entre os segmentos construídos no Geogebra pela aluna T.A.

Triângulo ABC	Razões entre os lados		
	Cateto oposto e a hipotenusa	Cateto adjacente e hipotenusa	Cateto oposto e o cateto adjacente
1º	0,500	0,866	0,577
2º	0,500	0,866	0,577
3º	0,500	0,866	0,577

Analisando os resultados da primeira tabela em relação à segunda, ela obteve uma aproximação muito grande em cada coluna, a diferença é de milésimos de uma razão com a outra.

Poucos alunos tiveram as tabelas com as razões entre os lados diferentes umas das outras. Esta diferença estava entre as razões na primeira tabela, no qual eles usaram uma casa de aproximação nas medidas entre os lados, sendo que a maior diferença nas razões chegou a um décimo uma da outra.

Nos casos que isso aconteceu, foi devido à aproximação nas medidas efetuadas. Por exemplo, o aluno M fez um triângulo retângulo com ângulo agudo igual à 20º. Em um de seus triângulos construídos com régua obteve um triângulo retângulo com hipotenusa medindo 13 centímetros, mas o correto seria 12,8 centímetros, e o cateto adjacente ele colocou 12,1 centímetros, mas a medida mais próxima era 11,8 centímetros. Por isso ocorreram diferenças nas razões de até sete centésimos.

Dessa forma apresentamos aos alunos as Razões Trigonométricas, explanando todo o conteúdo sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo, explicando que cada razão recebe um nome que são: o seno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo pela hipotenusa, o cosseno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo pela hipotenusa e a tangente de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo pelo cateto adjacente ao ângulo.

Mostramos também uma tabela com as razões do seno, cosseno e tangente de ângulos variando, de grau a grau, entre um a oitenta e nove graus, no qual coincidiram com os valores encontrados pelos alunos, provando novamente que essas razões são constantes.

O aluno T.H. perguntou por que do nome seno, qual a sua origem? Para responder essa pergunta utilizamos um trecho do livro Meu Professor de Matemática de Elon Lages Lima na página 187, veja o trecho utilizado:

> "... seno vem do latim *sinus*, que significa seio, volta, curva, cavidade (como nas palavras, enseada, sinuosidade). E usou o gráfico da função, o qual é realmente bastante sinuoso, para justificar o nome."
>
> "*Sinus* é a tradução latina da palavra árabe *jaib*, que significa dobra, bolso ou prega de uma vestimenta. Isto não tem nada a ver com o conceito matemático de seno. Trata-se de uma tradução defeituosa, que infelizmente durou até hoje. A palavra árabe adequada, a que deveria ser traduzida era *jiba*, em vez de *jaib*. *Jiba* significa a corda de um arco (de caça ou de guerra). Uma explicação para esse erro é proposto por A. Aaboe ("Epísódios da História Antiga da Matemática", página 139): em árabe, como em hebraico, é freqüente escrevem-se apenas as consoantes das

> palavras, o leitor se encarrega de completar as vogais. Além de "jiba" e "jaib" terem as mesmas consoantes, a primeira dessas palavras era pouco comum pois tinha sido trazida da Índia e pertencia ao idioma sânscrito."

Depois passamos aos alunos os seguintes questionamentos:

1. Por que na primeira etapa as razões não foram constantes?
2. É possível determinarmos o valor do cateto oposto e do adjacente conhecendo o valor do ângulo interno e da hipotenusa?

A resposta dada pelos alunos para a primeira pergunta era que eles não tinham precisão na medida, pois eles aproximavam sempre; Um outro aluno comentou que a própria espessura das retas atrapalhava na medição. Na segunda pergunta um aluno respondeu que tem como encontrar sim, pois ele explicou que usando a tabela das razões trigonométricas, ou encontrando essas razões no Geogebra construindo um triângulo retângulo com o valor do ângulo fornecido, basta montar uma regra de três, uma proporção. Desta forma encontraremos o valor desconhecido.

Com base nestas respostas projetamos dois exercícios para que os alunos resolvessem da forma que desejassem, para finalizarmos o projeto. Um exercício era sobre uma rampa e o outro referente ao telhado de casa, ambos bastavam aplicar as razões trigonométricas. Estes exercícios foram apresentados no final do capítulo 2.

Uma resolução interessante que tivemos nos dois exercícios foi da aluna V que não usou as razões. Ela reproduziu o triângulo retângulo no Geogebra usando as medidas fornecidas do exercício. Com isso os resultados vieram imediatamente, sendo que a única coisa que ela perguntou foi a respeito das unidades de medidas que o Geogebra usava. Imediatamente apresentamos a resposta: O Geogebra usa a mesma unidade, estabelecida inicialmente, em todos os segmentos.

Outros alunos chegaram a construir o triângulo retângulo com o valor do ângulo fornecido e com lados diferentes do enunciado, determinaram a razão necessária no desenho e depois montaram uma proporção chegando ao resultado correto.

4. CONCLUSÃO

Lançamos mão da tradicional aula de lousa, giz e cópia e investimos nos conhecimentos adquiridos neste curso, acerca dos conteúdos e de aplicativos matemáticos, procurando envolver todos os alunos e alcançar a maior porcentagem de participação e melhoramento no ensino aprendizagem.

Com o decorrer do curso, a primeira mudança em sala de aula é que estamos trabalhando mais com as definições dos conteúdos, detalhando melhor, e desta forma aperfeiçoando a escrita matemática, que muitas vezes deixamos de lado. Assim iniciamos uma relação entre teoria e prática nas aulas, mostrando no início das aulas uma parte histórica do conteúdo, que aprendemos neste curso e depois da demonstração do conteúdo, na qual era comentado o conteúdo em questão, ou seja, percebendo como pode ser aplicado e como se aplicaria.

Uma mudança significante nas aulas durante o curso reflete-se à forma de transmitir o conteúdo, procurando agora demonstrar aos alunos qual a origem da fórmula.

Além disso, nas resoluções de exercícios, é proposto um detalhamento de como obtemos o resultado, montando primeiro uma estratégia de resolução e depois na elaboração dos cálculos. Nas correções de avaliações e trabalhos, não enfatizar apenas o resultado final, e sim todo o processo que o aluno teve para chegar àquele resultado. Desta forma é possível detectar e observar em que momento os alunos possuem as dúvidas e podendo retomar o conteúdo não alcançado.

Com base nessas evoluções alcançadas, o projeto foi focalizado em verificação e dedução das razões trigonométricas, no qual foi trabalhoso na segunda etapa do projeto, pelo fato da própria escola não aceitar facilmente aulas usando apenas softwares, programas educativos como o Geogebra, voltados para o ensino da Matemática.

Após o termino do projeto, o alunos voltaram a trabalhar com os conteúdos curriculares e sempre no final da aula eles trabalhavam com questões do

Exame Nacional do Ensino Médio de anos anteriores para revisarem conteúdos. Assim, percebemos que os alunos tinham compreendido o sistema de medidas, pois antes do projeto eles tinham dificuldade em transformar e reconhecer qual a unidade estava sendo trabalhada. Após o projeto, eles entenderam na prática como trabalhar e transformar os valores em uma mesma unidade de medida.

Este trabalho é de um progresso muito grande, pois realizamos uma aula inovadora para estes alunos. Não era uma cópia de texto e nem uma lista de exercícios para resolução, usando um recurso que muitos têm acesso, o computador. Esta nova geração precisa ser compreendida, e a partir daí conseguirmos transmitir o conteúdo desejado tento uma grande participação. A geração de alunos que estamos encontrando nas escolas precisa de algo inovador, uma aula diferenciada, que o próprio aluno seja construtor de sua aprendizagem, que seja a peça importante do processo, e não um mero copista.

Com o avanço da tecnologia, os conteúdos estão disponíveis a qualquer um e de várias formas. Por exemplo pela internet, como as aulas do professor Salman Khan, indiano que se tornou popular entre docentes e discentes pelo mundo após divulgar vídeos na internet com seu método de ensino, que o MEC propõe distribuir os vídeos aos docentes. Mas o aluno não sabe como trabalhar com isso, não vê um objetivo. Cabe aí aos professores a sugestão de trabalhar com novos projetos, algo dinâmico, para que eles possam perceber que a tecnologia é uma grande ferramenta para auxiliar a aprendizagem em sala de aula.

O projeto conseguiu um grande avanço na aula, conseguindo atingir todos os alunos da sala, inclusive os alunos desinteressados. Com o uso do software Geogebra os alunos participaram ativamente do processo ensino aprendizagem. O projeto realizado envolveu a aplicação da teoria com a prática, utilizando a tecnologia.

Estas ferramentas podem auxiliar muito no aprendizado do aluno, facilitando na exemplificação das demonstrações de teoremas e fórmulas, tendo uma visualização melhor da aplicação do conteúdo e podendo realizar simulações do conteúdo com uma maior rapidez.

Depois que mostramos as construções geométricas com o uso do Geogebra, os alunos perceberam a facilidade de se trabalhar com esse software, sendo que todos os recursos usados são representações fiéis ao uso da régua e do transferidor. Eles ficaram animados ao uso do mesmo, pois assim eles ganharam tempo em construções geométricas e puderam trabalhar de várias formas chegando à mesma conclusão.

O auge do projeto foi quando atingimos conclusão do mesmo, mostrando a tabela trigonométrica pronta no qual coincidiu com as razões encontradas por eles. Com isso a aprendizagem do conteúdo se conclui. E eles puderam perceberam que os conteúdos de matemática podem ser aplicados desde com material simples, régua e transferidor, como o uso das novas tecnologias.

Com esta perspectiva, o projeto retrata uma opção diferenciada para a sala de aula, tentando acompanhar o desenvolvimento tecnológico e da sociedade, com o objetivo de tornar as aulas mais significativas, atrativas e animadas.

Precisamos oferecer momentos em que os alunos sejam produtores do conhecimento, com a ideia de melhorar o ensino. Para isto precisamos buscar novos métodos de ensino aprendizagem, elaborar aulas, planejar melhor o conteúdo. Tentando levar aos alunos algo que possa fazê-los se interessar pela aprendizagem.

Uma sugestão para a aplicação desse projeto: o professor pode realizar apenas uma das etapas, ele pode aplicar apenas as construções com o Geogebra ou com régua e transferidor. Se ele optar em usar apenas as construções com régua e transferidor, ele precisa usar duas casas decimais para as aproximações nos lados dos triângulos na primeira tabela para depois conseguir chegar à conclusão das razões serem constantes.

Outra forma a ser trabalhado é com aproximações com uma casa decimal nas razões, assim conseguirá atingir o objetivo do projeto que é chegar nos valores da tabela Trigonométrica.

E para isso ele precisa trabalhar bem com o sistema de medidas, e com o uso da régua, mostrando as unidades e como fazer as aproximações corretas. Outro fator necessário nesse caso é a utilização de lápis nas construções, para atingir uma aproximação mais precisa.

Agora se o professor preferir poderá realizar este projeto usando apenas as construções no Geogebra, usando inclusive novos recursos deste software que façam as razões automáticas no mesmo plano.

Outro conteúdo que o professor pode trabalhar no final deste projeto, é com as Relações Trigonométricas, mostrando nos triângulos as relações que chegamos algebricamente. Como por exemplo, que a tangente é a razão entre o seno com o cosseno ou ainda o Teorema Fundamental da Trigonometria, elaborando uma tabela contendo colunas com os valores de seno, cosseno, com os seus quadrados e uma com a soma de seus quadrados, para poderem concluir o Teorema Fundamental da Trigonometria.

Finalizamos apontando que este projeto é reprodutível e adaptável para outros professores e assuntos, podendo ampliar a parte teórica ou ainda aplicar em outros conteúdos citados acima. A busca por instrumentos que nos possibilite melhorar o conhecimento em sala de aula deve ser sempre almejada. De fato cada conteúdo necessita de determinadas ferramentas de auxílio e abordagens. Mas jamais devemos substituir o conhecimento formal utilizando apenas o lúdico ou o auxílio do computador. Eles devem ser apenas uma ferramenta, um facilitador do processo ensino-aprendizagem.

REFERÊNCIAS

AGÊNCIA ESTADO. **MEC vai distribuir aos professores vídeos da Khan Academy:** Educador americano Salman Khan esteve em Brasília para falar sobre videoaulas que viraram febre na internet. Disponível em: <http://ultimosegundo.ig.com.br/educacao/2013-01-16/mec-vai-distribuir-aos-professores-videos-da-khan-academy.html>. Acesso em: fev. 2013.

ALMOULOUD, Saddo Ag; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. **Engenharia Didática:** características e seus usos em trabalhos apresentados no GT – 19 / ANPEd. Florianópolis: REVEMAT, 2008, v. 3.6, p. 62-77.

ARTIGUE, Michèle. **Engenharia Didática**. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas. Lisboa:** Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p. 193-217.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática.** 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010. 104 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 2)

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Matemática não é problema**, Maio de 2005. 32 p.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental:** introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1998. 174 p.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. **Engenharia didática:** um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. Zetetike, Campinas-UNICAMP, v. 13, n. 23, 2005, p. 85-118.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Geometria Plana. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993. v. 9.

DOUADY, Régine. **A universidade e a didática da matemática:** os IREM na França. Caderno da RPM, v. 1.1, n. 1, 1990.

DUARTE, Alessandra. **Medo da matemática transmitido por adultos e falta de interesse da família agravam péssimas taxas de aprendizagem da disciplina**. Disponível em: < http://oglobo.globo.com/educacao/medo-da-matematica-transmitido-por-adultos-falta-de-interesse-da-familia-agravam-pessimas-taxas-de-aprendizagem-da-disciplina-2867929>. Acesso em: jan. 2013.

ENGLER, Roberto. Projeto de lei nº 46, de 2004. Disponível em: <http://www.al.sp.gov.br/spl/2004/2/Arquivos/502533/3551444_pl46.txt>. Acesso em: jul. 2013.

FERRARI, Bruno. **A geração digital não sabe navegar**. Disponível em: http://revistaepoca.globo.com/ideias/noticia/2011/11/geracao-digital-nao-sabe-navegar.html. Acesso em: fev. 2013.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Geometria Analítica. 4. ed. São Paulo: Atual, 1993. v. 7.

IEZZI. Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Trigonometria. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004. v. 3.

KLEINA, Nilton. **Alunos de escolas públicas terão tablets em 2012:** Aumentar os conteúdos educacionais em meios digitais é o foco do Ministério da Educação. Disponível em: < http://www.tecmundo.com.br/tablet/13018-alunos-de-escolas-publicas-terao-tablets-em-2012.htm>. Acesso em: nov. 2011.

LUCAS, Rodrigo Dantas de. **Geogebra e Moodle no Ensino de Geometria Analítica**. 2009. 82 f. Dissertação (Mestrado Profissional Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos. 2010.

__________. **Meu professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

R7. **Professor fenômeno na internet está entre os cem mais influentes do mundo:** Indiano Salman Khan ficou popular após divulgar na web seu método de ensino. Disponível em: <http://noticias.r7.com/educacao/noticias/professor-fenomeno-na-internet-esta-entre-os-cem-mais-influentes-do-mundo-20120418.html>. Acesso em: fev. 2013.

SILVA, Paulo Silvestre Avelar. **O uso do celular na escola**. Disponível em: http://www.santadoroteia-rs.com.br/37/o-uso-do-celular-na-escola/. Acesso em: fev. 2013.

TATTO, Franciele; SCAPIN, Ivone José. **Matemática:** Por que o nível elevado de rejeição? Revista de Ciências Humanas. F. Westphalen, RS: Editora URI, n. 5, abr 2004. Disponível em:

<http://www.sicoda.fw.uri.br/revistas/cienciashumanas/verartigo.php?cod_art=3&cod_edi=1>. Acesso em: jan. 2013.

ZULATTO, Rúbia Barcelos Amaral. **A Natureza da Aprendizagem Matemática em um Ambiente Online de Formação Continuada de Professores.** 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

http://www.geogebra.org/

APÊNDICE

Neste capítulo apresentamos alguns resultados utilizados ao longo deste trabalho, tais como Noções Primitivas da Geometria Plana, Teorema de Pitágoras, demonstração das Razões Trigonométricas, Sistema Métrico e Aproximações, por última a lista de atividades que propusemos no início do projeto.

Apêndice A – Noções Primitivas da Geometria Plana

A base necessária para que possamos aplicar o projeto são as noções primitivas da Geometria Plana, definição de semirreta, segmento de reta e ângulo.

As noções primitivas são alguns conceitos estabelecidos sem definição, tais como as noções de ponto, reta e plano. De cada um desses entes temos conhecimento intuitivo, decorrente da experiência e da observação. A notação de pontos é feito por letras maiúsculas latinas, as retas são representadas por letras minúsculas também latinas e o plano por letras gregas minúsculas.

Um resultado importante é o Postulado da Determinação da Reta:

"Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles."

Logo chegamos a conclusão que para definirmos uma reta é necessário apenas dois pontos distintos.

Figura 25 Representação de ponto, reta e plano

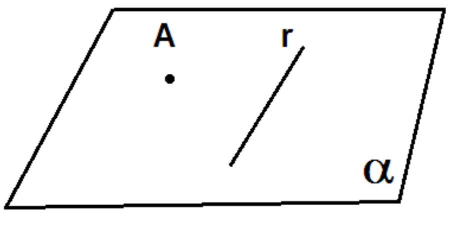
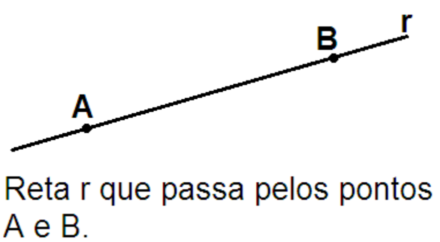
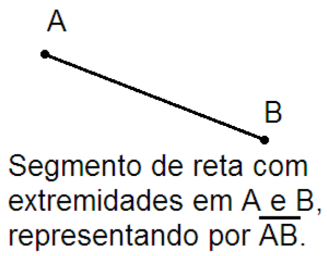


Figura 26 Ilustração do Postulado da Determinação da Reta



Dados pontos A e B sobre uma reta r, o segmento AB é a porção da reta r situada de A a B. Escrevemos $\overline{AB}$ para denotar o comprimento do segmento AB.

Figura 27 Representação de um segmento de reta



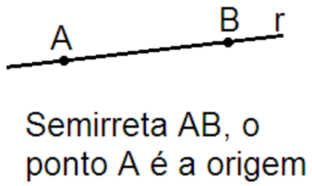
Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do segmento de reta AB com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a semirreta AB. A noção estar entre é uma noção primitiva que obedece aos postulados (ou axiomas) que seguem:

Quaisquer que sejam os pontos A, B e P:

1) Se P está entre A e B, então A, B e P são colineares;
2) Se P está entre A e B, então A, B e P são distintos dois a dois;
3) Se P está entre A e B, então A não está entre P e B nem B está entre A e P;
4) Quaisquer que sejam os pontos A e B, se A é distinto de B, então existe um ponto P que está entre A e B.

Outra definição para semirreta é: dados uma reta r e um ponto A sobre esta reta, este ponto divide a reta r em dois pedaços, quais sejam, determinam duas semirretas de origem A. Escolhendo pontos B e C sobre r, um em cada um de tais pedaços, podemos denotar as semirretas de origem A por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

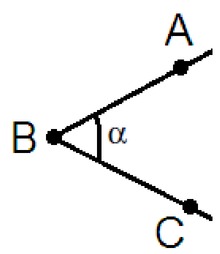
Figura 28 Representação de uma semirreta



Definimos o ângulo como a união de duas semirretas de mesma origem e não colineares. Esta origem é definida com vértice do ângulo. A cada ângulo (par de semirretas) associamos um único número real pertencente ao intervalo de 0 a 180 que é denominado como a medida do ângulo. Este é também um axioma da geometria plana.

Com isso podemos classificar o ângulo como sendo agudo, quando à medida for menor do que 90º, ou ângulo reto quando for igual a 90º, ou em ângulo obtuso, que é o ângulo maior que 90º. O termo perpendicular quer dizer que o ângulo entre duas semirretas é igual a 90º.

Figura 29 Representação de ângulo

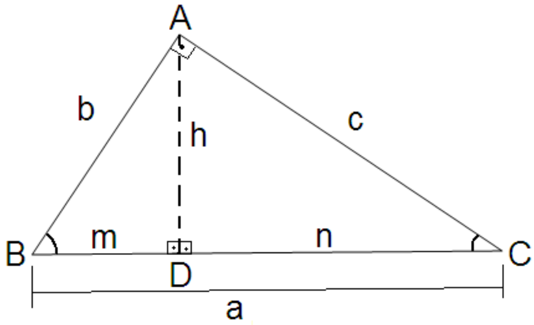


A figura acima representou o ângulo de medida α, no qual as semirretas BA e BC são os lados do ângulo e o ponto B é o seu vértice.

Apêndice B – Teorema de Pitágoras

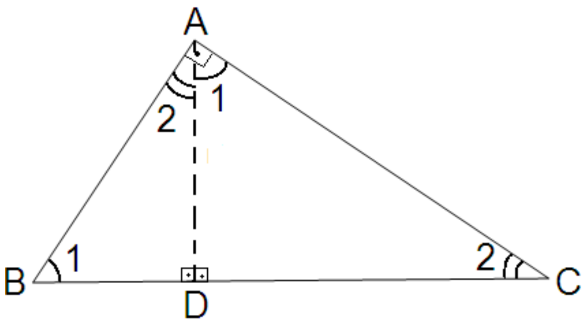
Considerando um triângulo ABC, retângulo em A, e altura $\overline{AD}$ relativa ao lado $\overline{BC}$, vamos caracterizar os elementos desse triângulo com base na figura a seguir temos os segmentos $\overline{BC}$ = a (hipotenusa); $\overline{AC}$ = b (cateto); $\overline{AB}$ = c (cateto), $\overline{AD}$ = h (altura relativa a hipotenusa), $\overline{BD}$ = m (projeção do cateto b), $\overline{CD}$ = n (projeção do cateto c):

Figura 30 Triângulo retângulo com seus elementos



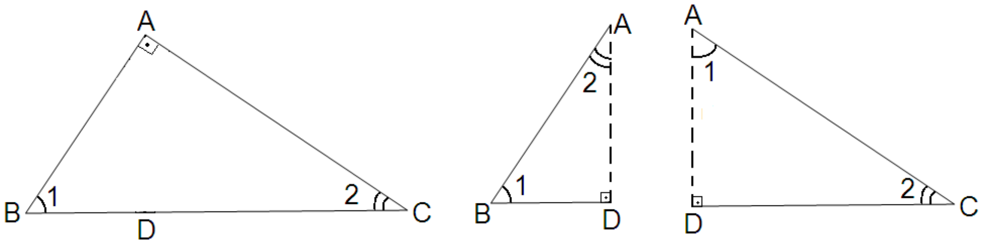
Observamos que os triângulos ADB e CDA são semelhantes devido à congruência dos ângulos indicados na figura abaixo:

Figura 31 Ilustração dos ângulos congruentes no triângulo retângulo



Na qual $\hat{B} = \hat{1}$, pois são complementos de $\hat{C}$ e $\hat{C} = \hat{2}$, pois são complementos de $\hat{B}$, temos que Δ ABC ~ Δ DBA e Δ ABC ~ Δ DAC.

Figura 32 Triângulos semelhantes



Com base nas semelhanças dos triângulos citados acima e com os elementos já caracterizados, temos seis relações das quais observamos as seguintes:

$$\Delta\, ABC \sim \Delta\, DBA \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow c^2 = an$$

$$\Delta\, ABC \sim \Delta\, DAC \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow b^2 = am$$

A seguir enunciamos e apresentamos uma demonstração, baseada nestas relações, de um importante resultado que é o

Teorema de Pitágoras: A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

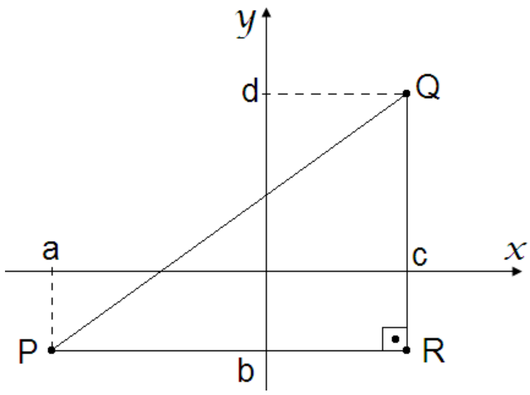
Demonstração: Com base nas relações acima temos $c^2 = na$ e $b^2 = am$. Assim, somando estas relações obtemos que :

$$c^2 + b^2 = an + am \Rightarrow c^2 + b^2 = a.(n + m)$$

Como sabemos que $m + n = a$, então concluímos que $c^2 + b^2 = a^2$.

Podemos aplicar o Teorema de Pitágoras na Geometria Analítica, no qual, os estudos em Geometria Analítica possibilitam uma relação entre a Álgebra e a Geometria. Sejam $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ pontos do plano π dados pelas suas coordenadas em relação ao sistema de eixos ortogonais OXY dado.

Figura 33 Representação dos pontos P, Q e R



Seja o ponto R de coordenadas (c, b), observe a figura acima. Temos que o triângulo PQR é um triângulo retângulo em R, sendo assim, a distância entre os pontos P a Q, que representaremos por d(P, Q), é a medida da hipotenusa do triângulo PQR de catetos PR e QR.

Sendo a distância entre dois pontos de um mesmo eixo medida pelo módulo da diferença de suas coordenadas, temos que os catetos medem respectivamente: $|PR| = |a – c|$ e $|QR| = | b – d|$. Aplicando o Teorema de Pitágoras obtemos:

$$d(P,Q)^2 = |PR|^2 + |QR|^2$$

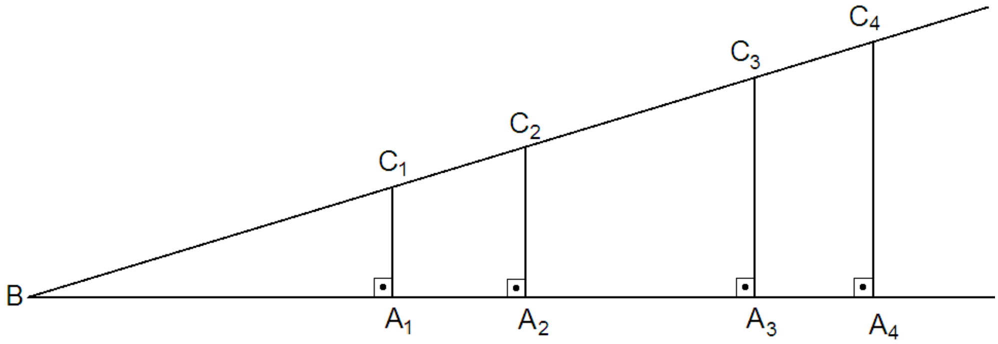
$$d(P,Q)=\sqrt{|PR|^2+|QR|^2}=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

Concluímos que a distância entre os pontos P = (a, b) e Q = (c, d) é a raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças entre as coordenadas correspondentes.

Apêndice C – Demonstração das Razões Trigonométricas

Dado um ângulo agudo $\hat{B}$, vamos marcar sobre um de seus lados os pontos A_1, A_2, A_3, ... e vamos conduzir, por eles, as perpendiculares $\overline{A_1C_1}$, $\overline{A_2C_2}$, $\overline{A_3C_3}$, ..., conforme a figura abaixo:

Figura 34 Ilustração do ângulo B e os pontos A_1, A_2,... e C_1, C_2, ...



Os triângulos BA_1C_1, BA_2C_2, BA_3C_3, etc. são todos triângulos retângulos e semelhantes entre si. Então:

1º) $$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{BC_1}}=\frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{BC_2}}=\frac{\overline{A_3C_3}}{\overline{BC_3}}=\dots$$

Assim, fixando $\hat{B}$, o cateto oposto a $\hat{B}$ e a hipotenusa são diretamente proporcionais.

2º) $$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC_1}}=\frac{\overline{BA_2}}{\overline{BC_2}}=\frac{\overline{BA_3}}{\overline{BC_3}}=\dots$$

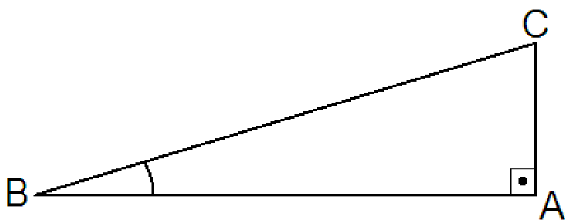
Fixando $\hat{B}$, o cateto adjacente a $\hat{B}$ e a hipotenusa são diretamente proporcionais.

3º) $\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{BA_1}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{BA_2}} = \frac{\overline{A_3C_3}}{\overline{BA_3}} = ...$

Fixando $\hat{B}$, os catetos oposto e adjacente a $\hat{B}$ são diretamente proporcionais.

Verificamos que as relações acima não dependem do tamanho dos triângulos ΔBA_1C_1, ΔBA_2C_2, ΔBA_3C_3, ..., mas dependem apenas do valor do ângulo B. Assim, considerando um triângulo retângulo e fixando um ângulo agudo $\hat{B}$, temos:

Figura 35 Triângulo retângulo ABC



1º) Seno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

2º) Cosseno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

3º) Tangente de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo.

Apêndice D – Sistema Métrico e Aproximações

Grandeza Física é tudo aquilo que pode ser medido e, posteriormente, comparado. Medir uma grandeza significa, portanto, compará-la com outra medida de mesma espécie a qual denominamos de unidade ou padrão, de modo a sabermos quantas vezes essa unidade cabe na grandeza a ser medida.

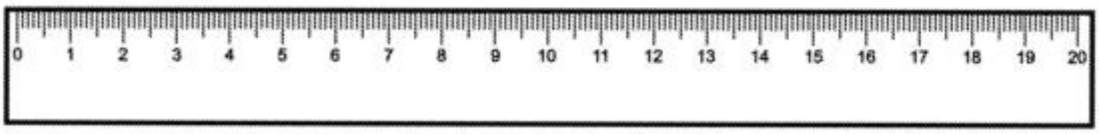
Os povos antigos utilizaram durante muito tempo partes do corpo como unidade padrão de medidas (polegada, jarda, pé). No entanto, em função dos tamanhos diferentes dessas medidas de pessoa para pessoa, foi necessário o estabelecimento de um padrão mais coerente. Em 1795 foi estabelecido como unidade fundamental para medidas de comprimento o metro. Surgia aí o sistema métrico decimal, bem como os seus múltiplos e submúltiplos, e ainda, as variações para as medidas de superfícies (áreas) e capacidades (volumes).

Tabela 10 Quadro das unidades de medidas de comprimento

Múltiplos			**Unidade Fundamental**	**Submúltiplos**		
Quilômetro	**Hectômetro**	**Decâmetro**	**Metro**	**Decímetro**	**Centímetro**	**Milímetro**
km	hm	dam	M	dm	Cm	mm
1000 m	100 m	10 m	1 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m

Nas medições com uso de régua comum, utilizam como unidades o centímetro e o milímetro, observe a imagem a seguir:

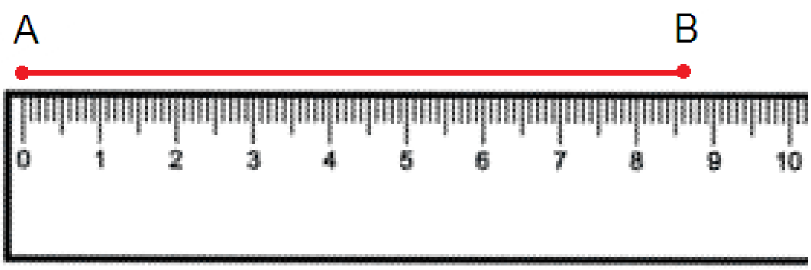
Figura 36 Imagem de uma régua fora de escala



Nesta régua os números estão marcando os centímetros, e as marcações menores representam os milímetros. Sabemos que cada dez milímetros vale um centímetro, 1 cm = 10 mm, sendo assim, cada milímetro vale um décimo de centímetro, ou seja, 1 mm = 0,1 cm.

Logo, ao mensurar um segmento com régua, e este segmento for uma medida não exata, procure aproximar utilizando os milímetros. Analise a imagem a seguir fazendo a mensuração do segmento AB:

Figura 37 Mensurando o segmento AB



Comparando o segmento com a régua, temos que o segmento AB está entre 8 e 9 centímetros de comprimento, mas vamos aproximar uma casa decimal, ou seja, valor analisar os milímetros, observamos que o ponto B está mais próximo do sexto milímetro na casa dos oito centímetros. Neste caso o segmento AB tem aproximadamente 8,6 centímetros.

Apêndice E – Atividades Propostas

Projeto: DESCOBRINDO AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Orientador: Prof. Dr. Renato José Moura
Professor: Henrique Oliveira

Procedimentos para as próximas aulas:

1ª Etapa: Construção de pelo menos três triângulos retângulos com régua e transferidor conhecendo um ângulo agudo.

2ª Etapa: Calculando as razões entre os lados e montando uma tabela com esses valores.

3ª Etapa: Apresentação do software Geogebra, mostrando a aplicação do software na educação e a construção no Geogebra dos triângulos retângulos.

4ª Etapa: Repetir a tabela referente às razões entre os lados, porém os valores são referentes aos encontrados no Geogebra.

5ª Etapa: Analisar as tabelas dos grupos e investigar se existe alguma semelhança ou algum padrão entre as razões.

6ª Etapa: Explanar o conteúdo Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo.

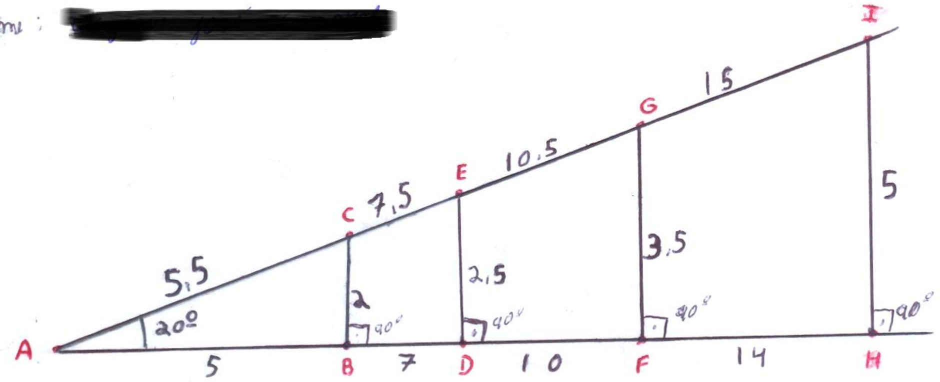
7ª Etapa: Concluir o projeto com alguns problemas envolvendo as razões trigonométricas.

Apêndice F – Fotos de atividades realizadas pelos alunos

Neste apêndice trazemos algumas imagens das atividades realizadas pelos alunos, referente a primeira parte do projeto, que é a construção do triângulo retângulo usando régua e transferidor, com as tabelas 1 e 2.

Figura 38 Atividades do aluno V

nome: [redacted]



Medidas

Triangulo	hip.	c.o.	c.a.
A, B, C	5.5	2	5
A, D, E	7,5	2,5	7
A, F, G	10,5	3,5	10
A, H, I	15	5	14

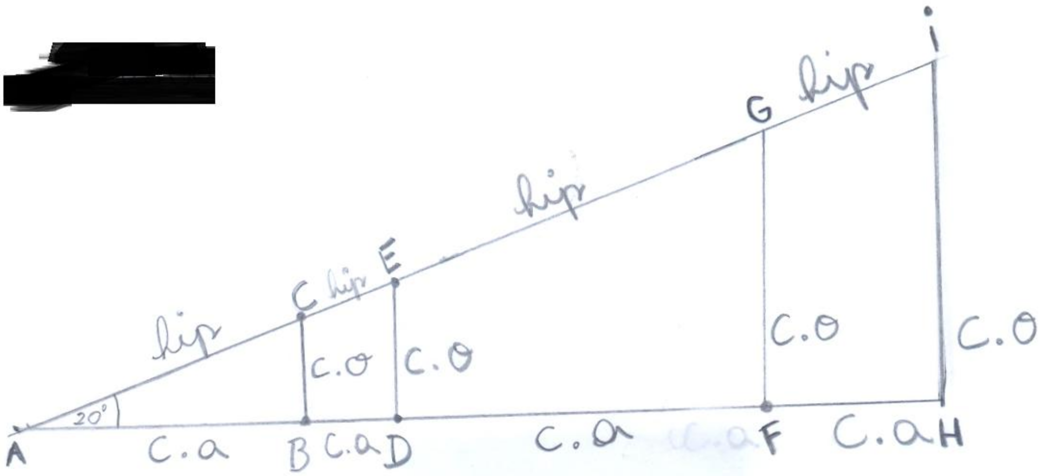
=

Razões

	c.o./hip	c.a./hip	c.o./c.a.
Δ A,B,C	0,36	0,90	0,4
Δ A,D,E	0,33	0,93	0,35
Δ A,F,G	0,33	0.95	0,35
Δ A,H,I	0,33	0,93	0,35

Figura 39 Atividades do aluno T.H.

[redacted]



Medidas

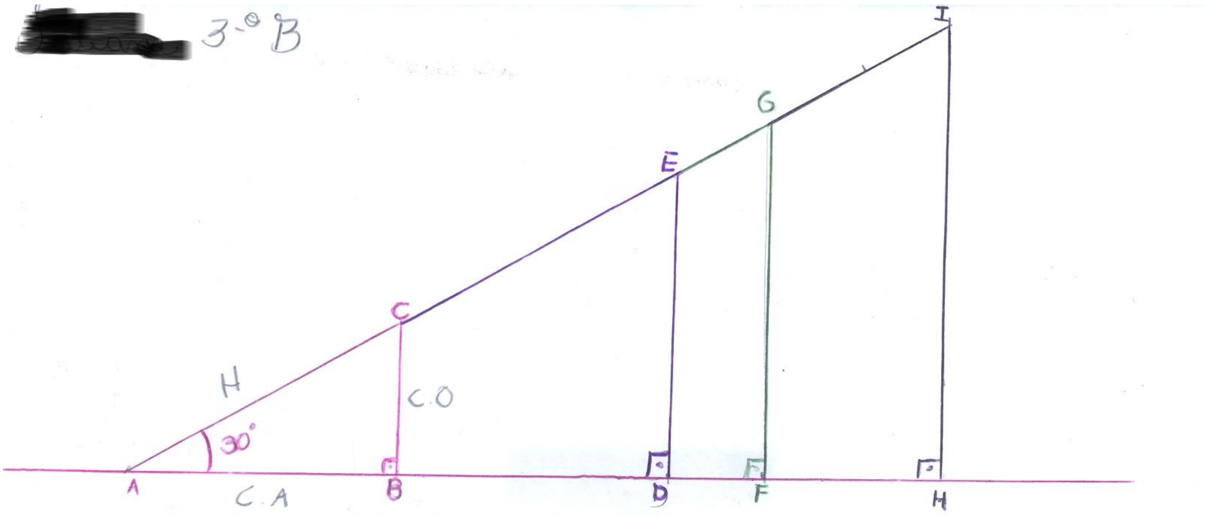
	hip	c.o	c.a
ABC	4,0	1,5	3,5
ADe	5,5	2,0	5,0
AFG	10,5	3,5	9,5
AHi	13,0	4,5	12,0

Razões

	c.o / hip	c.a / hip	c.o / c.a
ABC	0,37	0,87	0,42
ADe	0,36	0,90	0,4
AFG	0,33	0,90	0,36
AHi	0,34	0,92	0,37

Figura 40 Atividades do aluno M

[redacted] 3.º B



Medidas

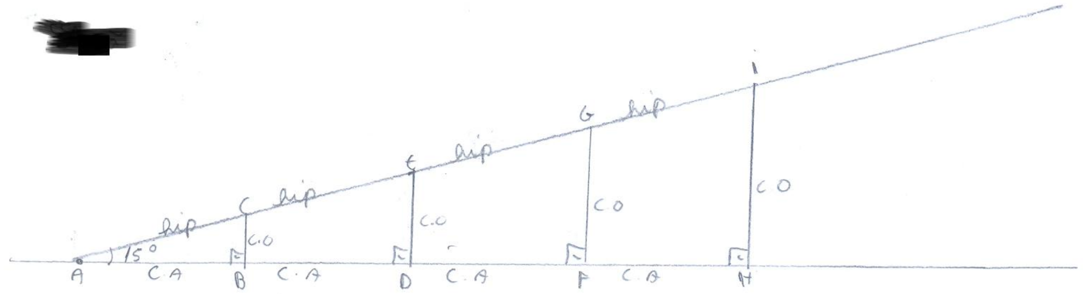
Triângulo	hipotenusa	cateto oposto	cateto adjacente
ABC	5,2	2,6	4,5
ADE	10,5	5,2	9,1
AFG	12,4	6,1	10,7
AHI	15,8	7,9	13,7

Razões

	C.O / hip	C.A / hip	C.O / C.A
△ABC	0,500	0,865	0,577
△ADE	0,495	0,866	0,571
△AFG	0,491	0,862	0,570
△AHI	0,500	0,867	0,576

Figura 41 Atividades da aluna T.A.

[redacted]



medidas

triangulo	hip	C.O	C.A
ABC	3,0	0,8	2,9
ADE	6,1	1,6	5,8
AFG	9,4	2,4	8,8
AHI	12,4	3,1	11,8

triangulo	C.O / hip	C.A / hip	C.O / C.A
ABC	0,266	0,966	0,275
ADE	0,262	0,956	0,275
AFG	0,255	0,936	0,272