REJANE ZEFERINO FELTES

ANÁLISE DE ERROS EM POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO: UM ESTUDO COM ALUNOS DE ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de mestre, pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Orientadora: Profª Dra. Helena Noronha Cury

Porto Alegre, 2007

REJANE ZEFERINO FELTES

ANÁLISE DE ERROS EM POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO: UM ESTUDO COM ALUNOS DE ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Aprovada em 12 de janeiro de 2007, pela Banca Examinadora.

BANCA EXAMINADORA:

____

Profª. Drª. Helena Noronha Cury – PUCRS

____

Profª. Drª. Bárbara Patrícia Olbermann Pasini - PUCRS

____

Profª.Drª. Carmen Teresa Kaiber- ULBRA

Ao meu esposo Henrique, minha filha Fernanda e minha família, pela compreensão, pelo carinho e pelo incentivo que sempre me deram.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida.

À minha família, por existirem e por terem me proporcionado às condições necessárias para estar hoje aqui, realizando este trabalho.

Aos demais colegas do curso, pelo incentivo, pelo carinho e pelos momentos compartilhados.

Ao Henrique e Fernanda, pelo amor, carinho e paciência.

A Rosane, irmã e companheira.

Aos professores do curso, pelos conhecimentos compartilhados.

À minha orientadora, professora Helena Noronha Cury, pela a oportunidade de realizar este trabalho. Por ter me acolhido e compartilhado os conhecimentos da academia e da vida, momentos de discussões e aperfeiçoamentos que ficarão guardados com orgulho e respeito.

A todos aqueles que de alguma forma colaboraram para a chegada deste momento.

[...] um erro corrigido (por ele mesmo) pode ser mais fecundo do que um acerto imediato, porque a comparação de uma hipótese falsa e suas conseqüências fornece novos conhecimentos e a comparação entre dois erros dá novas idéias. (PIAGET)

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo analisar erros cometidos por alunos de Ensino Fundamental e Médio, ao resolverem testes sobre potenciação, radiciação e equações exponenciais. A investigação foi desenvolvida em sétimas e oitavas séries do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio, de escolas públicas e particulares. O trabalho consiste na classificação dos erros nas respostas escritas dos estudantes, ao resolverem testes sobre os conteúdos citados, bem como na análise das respostas a um questionário aplicado a professores de Matemática das escolas participantes, sobre os erros cometidos pelos alunos. Foram analisadas as respostas aos testes, aplicados a 239 alunos do Ensino Fundamental e 193 do Ensino Médio, sendo os erros classificados em 17 categorias. Pelo número de ocorrências em cada classe, bem como pela análise qualitativa das respostas, é possível concluir que as maiores dificuldades estão relacionadas a operações numéricas e às propriedades da potenciação. Os professores que responderam ao questionário consideraram que, em geral, os erros são causados pela falta de estudo e de atenção. As alternativas, por eles sugeridas para auxiliar os estudantes, em geral envolvem apenas a repetição dos conteúdos e a realização de exercícios de fixação. Nas conclusões, são apresentadas algumas considerações sobre a pesquisa realizada e sobre o uso dos erros no processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Palavras-chave: Análise de erros. Potenciação e radiciação. Ensino fundamental e médio.

ABSTRACT

This research has as objective to analyze errors committed by middle and high school students, when solving questions on computing powers and roots and solving exponential equations. The research was developed in public and particular schools, in grades 7th and 8th of middle school and grade one of high school. The work consists of the classification of errors in the students´ written answers, when solving questions on the quoted contents, as well as in the analysis of the answers to a questionnaire applied to the mathematics professors of the same schools, about the errors produced by the students. The answers to the questions applied to 239 middle school and 193 high school students were analyzed and classified in 17 categories. According to the number of occurrences in each class, as well as the qualitative analysis of the answers, it is possible to conclude that the greatest difficulties are related to numerical operations and to the properties of power computing. The professors who had answered to the questionnaire had considered that, in general, errors are caused by lack of study and attention. The alternatives they suggested to help students, in general involve only the repetition of the contents and the accomplishment of exercises. In the conclusions, some considerations about the research and the use of the errors in math teaching and learning processes are presented.

Key-words: Error analysis. Powers and roots. Middle and high school teaching.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O grande número de erros cometidos por alunos de Matemática do Ensino Fundamental e no Ensino Médio sempre despertaram questionamentos em minha prática como educadora.

Dentre esses erros, destacam-se aqueles relacionados com o estudo das propriedades da potenciação. No Ensino Médio, na primeira série, os jovens cometem os mesmos tipos de erros nas questões relacionadas com o conteúdo de função exponencial. Essa semelhança entre os erros parece estar ligada ao fato de que, ao introduzir função exponencial, o professor retoma todas as propriedades de potenciação e, em seguida, essas mesmas propriedades são usadas na construção de tabelas e no estudo de gráficos dessa função. Dessa forma as dificuldades dos alunos se estendem de um a outro nível de ensino.

Durante minha prática educativa no Ensino Médio e Pós-Médio, encontrei muitas vezes esses erros em conteúdos de potenciação, radiciação e função exponencial. Grande foi o meu esforço para amenizar esses problemas, por meio da aplicação de exercícios interessantes, correções e explicações dos conteúdos usando diversas metodologias e provas bem elaboradas, porém os erros continuaram no ano seguinte, quando lecionei para os mesmos alunos na segunda série, o que gerou a sensação de fracasso profissional.

Dessa forma, compreendi que era necessária uma investigação para dar respostas às minhas angustias e inquietações, para compreender o que acontece com a aprendizagem desses conteúdos, que levam os alunos a cometerem tantos erros.

Minha caminhada na tentativa de compreensão do ensino da Matemática e da superação dos erros começou quando aprendi a tabuada do Ensino Fundamental. O gosto pela Matemática despertou o raciocínio lógico quando a professora da 2ª série me desafiou. A aprendizagem dos números, os cálculos, as tabuadas, a cada dia era mais fácil e nós ficávamos com a sensação de estarmos sendo saciados pelo saber... Tive, porém, muitos colegas nesta classe que não conseguiram acompanhar o raciocínio, eram alunos que tinham dificuldades e cometiam muitos erros. Não compreendia como isso podia acontecer, pois ainda era uma criança, mas pensei: se um dia eu conseguir ensinar Matemática, vou ensinar com muito carinho, tornando essa matéria não um bicho de sete cabeças, mas uma forma atraente de aprender!

Minha caminhada profissional foi difícil, mas sempre tive meus objetivos ou sonhos muito claros: universidade, mestrado e doutorado. Minha família também contribuiu para o sucesso. Éramos comerciantes, fazíamos contas a toda a hora, o troco, a nota fiscal, os serviços bancários, a porcentagem, o lucro... Quantos conteúdos matemáticos contextualizados!

Há seis anos, venho lecionando no Ensino Fundamental e Médio e procurando, dentro do possível, com meus alunos, construir o conhecimento de uma forma mais significativa.

No início, é claro, foi difícil. Novos comportamentos e atitudes que não encontrava com os alunos pequenos, para os quais eu lecionara até o momento. Percebi que os pré-adolescentes e jovens testavam o professor a todo instante e o modo de ensinar a Matemática e concretizá-la era novidade para mim. Busquei muitas informações sobre esses temas em leituras de livros didáticos sobre Matemática ou sobre a Educação. O maior desafio enfrentado na sala de aula foi o de ter sido educada pelo método tradicional e *imaginar* que o ensino continuava assim. A maior surpresa foi ter que reinventar a maneira de dar aula, o desafio de buscar novas maneiras de educar em Matemática. Desvencilhar-se da antiga maneira de ensinar e reinventar uma nova é o desafio que temos neste milênio.

Como diz Freire (1996),

> É próprio do pensar certo a disponibilidade ao risco, a aceitação do novo que não pode ser negado ou acolhido só porque é novo, assim como o critério de recusa ao velho não é apenas o cronológico. O velho que preserva sua validade ou encarna uma tradição ou marca uma presença no tempo continua novo. (p.39).

Quando entrei na universidade, encontrei muitas dificuldades, entre elas a defasagem de conteúdos matemáticos que apresentava como aluna, pois havia cursado o Magistério no Ensino Médio. No curso de Magistério, a Matemática básica aparece no primeiro ano, com conteúdos do primeiro ano do Ensino Médio, depois só no terceiro ano, com a disciplina de Didática da Matemática, com conteúdos de 1ª à 4ª série. Portanto, após a conclusão do Ensino Médio, os erros estavam presentes em minha vida escolar, pois os conteúdos matemáticos do segundo e terceiro anos do Ensino Médio foram vistos somente na universidade, com as disciplinas de Cálculo, Álgebra e Física.

Conclui o curso de Licenciatura Curta em Ciências, cursei mais um semestre de Matemática e decidi que era a essa área a que queria me dedicar. Mais tarde, graduei-me na Licenciatura Plena em Matemática.

Assim, tão logo veio a graduação, já estava trabalhando com o Ensino de Jovens e Adultos no Ensino Fundamental. Em seguida, ainda no mesmo ano, lecionei para o Ensino Médio, com alunos adolescentes que cursavam as séries em períodos anuais. No ano seguinte, passei a ter mais aulas com todas as séries do Ensino Médio.

Portanto, o início de minha carreira como professora de Matemática foi com alunos do curso para jovens e adultos. Lecionava para as séries aos pares, como por exemplo, 5^{as} e 6^{as}, e 7^{as} e 8^{as} do Ensino Fundamental. No Ensino Médio, as turmas eram únicas. Com esta experiência profissional, pude perceber que muitos dos alunos, dos jovens de 15 anos até o mais velho, com cerca de 65 anos, apresentavam dificuldades nos conteúdos de Matemática. Muitas vezes, os erros apresentados não estavam relacionados com o conteúdo que estava sendo trabalhado no momento, mas com dificuldades matemáticas em conteúdos que haviam aprendido há algum tempo e os problemas não tinham sido superados. Os erros mais comuns eram relativos às quatro operações, à potenciação, à resolução de expressões aritméticas, à Geometria, à Álgebra e aos gráficos.

Lecionando para alunos adolescentes do Ensino Médio que cursavam as séries em períodos anuais, percebi que também apresentavam dificuldades nos conteúdos matemáticos. O que me chamou a atenção foi o fato de que os erros não eram específicos desse nível de ensino, mas perpassavam conteúdos do Ensino Fundamental, como a Álgebra, as quatro operações, o trabalho com gráficos e a Geometria. Decidi, então, investigar este fato.

Hoje trabalho também com o ensino Pós-Médio, com os cursos Técnicos de Informática e Artes Gráficas. Aqui também percebo que os alunos apresentam muitos erros em conteúdos matemáticos, de certa forma os mesmos que já encontrei em outras séries e cursos, como os erros em Álgebra, nas quatro operações, no trabalho com gráficos, na Geometria e, principalmente, em relação aos números racionais.

Retomando minha caminhada profissional, compreendo que estou procurando encontrar soluções para amenizar os erros matemáticos nas turmas e níveis de ensino em que leciono. Sei que a superação do erro é inatingível e, mesmo, nãodesejável, pois é por meio dos erros que os alunos podem se conscientizar de suas dificuldades e construir seu conhecimento, mas acredito que é necessário entendê-los, para aproveitá-los como ferramentas para a aprendizagem.

Concordo com Enricone (2001), quando diz:

> São os professores que, em última instância, decidem ou não se querem ou não mudar. Cabe toda uma análise sobre o professor como profissional e, sobretudo, como um profissional reflexivo. Aumentam as responsabilidades dos professores que, pois além dos conhecimentos de suas disciplinas, devem ser facilitadores da aprendizagem de seus alunos e organizadores das atividades na sala de aula. (p. 52).

Hoje venho me aperfeiçoando por meio de leituras que tratam da Educação e da sala de aula. Em todos os inícios de anos e de trimestres, os professores das Escolas onde trabalho se reúnem para discutir os projetos que serão desenvolvidos com os alunos. Nesses momentos, surgem temas atuais e novas idéias, que os professores, por séries, objetivam pôr em prática no seu ensino. Nossos alunos possuem sede de aprender, mas não devemos ensinar de uma maneira ultrapassada e conservadora, mas buscando a imagem, o movimento, a construção, a experimentação, a prática, a pesquisa, os seminários, enfim toda forma com que possamos explorar os conhecimentos de modo atrativo, para uma geração acostumada com cores, movimento e imagem. As novas tecnologias, como o computador e os vídeos, não podem ser deixados de lado, pois são recursos que devem ser utilizados de forma intensa em nossas escolas. Nem sempre é possível abordar os temas sob diferentes metodologias, mas preocupa-me o embasamento matemático dos meus alunos, diante de tantos erros que encontro na resolução de exercícios e correções de avaliações. Na verdade, há várias possibilidades de abordar os problemas, como apontam Ponte, Brocardo e Oliveira (2003).

> *Há, sempre dúvida, lugar para os exercícios, os problemas, os projetos e as investigações. O grande desafio é articular esses diferentes tipos de tarefas de modo a construir um currículo interessante e equilibrado, capaz de promover o desenvolvimento matemático dos alunos com diferentes níveis de desempenho. (p.24).*

Porém, a idéia de continuar os estudos não me saía da cabeça. Dar a continuidade à formação parecia uma possibilidade muito distante, mas não irreal. Foi, então, que iniciei o curso de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática na Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS).

Cursando o mestrado, estava amadurecendo desde os primeiros meses o tema da dissertação. Estava em dúvida quanto ao tema da pesquisa, sabia apenas que seria algo relacionado com números. No primeiro momento em que elaborei pré-projetos, surgiu uma idéia, diante das muitas dificuldades que os alunos encontram na construção dos números, no Ensino Fundamental de 1ª à 4ª série. Percebi que essa construção acarreta conseqüências na vida escolar do aluno, pela relação e organização dos conteúdos. Exemplos bem práticos são as quatro operações, o estudo e compreensão da tabuada, a resolução de problemas, a seriação e a classificação e esses problemas de uma aprendizagem com lacunas se refletem posteriormente em nossas vidas.

Os professores de Matemática, ao analisarem as resoluções de problemas realizadas pelos seus alunos, podem detectar erros ocorridos e, em geral, utilizar metodologias variadas para auxiliar os estudantes a superar suas dificuldades e mostrar suas potencialidades naquele conhecimento matemático específico, refletindo sobre as soluções.

Na medida em que o estudante elabora um raciocínio e coloca no papel a resolução de um problema, cometendo erros, uma das possibilidades de auxiliá-lo consiste em escutá-lo e pedir que explique como pensou. Acredito que, neste instante, a dificuldade vem à tona e o professor pode intervir de modo a fazer com que o aluno compreenda o assunto e busque a resposta certa a partir da interpretação e análise do erro.

Quando o professor destaca ou questiona o educando para que aponte onde está o erro na solução, muitos estudantes não sabem analisá-lo e nem todos conseguem destacá-lo, mostrando que não conseguem refletir sobre sua aprendizagem. Aqui transparecem seus problemas iniciais de alfabetização matemática, pois apresentam dificuldade de dialogar sobre um determinado conteúdo, em que poderiam aparecer as dúvidas, as perguntas e as justificativas sobre as soluções encontradas. Essa forma de questionar o aluno, de fazê-lo refletir sobre sua maneira de resolver as questões não está acontecendo em nossas salas de aula, o que acarreta diversas dúvidas na aprendizagem de conteúdos e possíveis novos erros matemáticos.

Concordo com Cury (2003), quando diz que

> [...] um levantamento detalhado dos erros cometidos em provas e trabalhos realizados em disciplinas matemáticas, bem como uma

> tentativa de compreensão das causas, pode auxiliar a diminuir o alto nível de evasão e repetência em disciplinas consideradas críticas nos primeiros semestres de cursos universitários. (p.2).

Ao refletir um pouco mais sobre o tema de minha pesquisa, me dei conta de que a idéia das lacunas na construção do número, que eu estava amadurecendo, nada mais era do que pensar sobre os erros que os alunos cometem ao realizar cálculos matemáticos.

Decidi, então, pesquisar sobre algo que me incomoda há muito tempo, que é a dificuldade de aprendizagem de potenciação e da função exponencial. Ao abordar o conteúdo de potenciação na sétima série do Ensino Fundamental, e a radiciação, na oitava série, vejo que as dificuldades estão presentes principalmente com as propriedades que envolvem os expoentes negativos. Ao contextualizar, trabalhando com problemas, muitos educandos não compreendem o que fazer, pois nem sempre os livros didáticos apresentam situações práticas para relacionar a parte algébrica do estudo de potenciação com problemas reais. Assim, o estudo da potenciação e da radiciação fica, muitas vezes, restrito à parte algébrica, sem aplicações.

Decidi pesquisar também sobre os erros de aprendizagem na resolução de equações exponenciais, pois a abordagem desse conteúdo no Ensino Médio é um problema. Quando apresento as propriedades das potências e as relaciono com o estudo da função exponencial, percebo que ocorrem muitas dificuldades. Assim, esse relacionamento é uma ponte entre o estudo destes dois conteúdos, um elo que liga esses dois tipos de dificuldades matemáticas, em uma análise do porquê da ocorrência dos erros e de como a falta de compreensão dos conteúdos “potenciação” e “radiciação” pode levar às dificuldades na aprendizagem de funções e equações exponenciais.

Diante desse desafio, creio que já estou agindo socialmente, pois, ao procurar conscientizar os estudantes sobre suas dificuldades, questionando os seus raciocínios, estou propiciando o desenvolvimento de atitudes críticas, que são importantes não só na vida escolar, mas também no convívio social e nas atitudes face aos problemas do cotidiano.

A Matemática, em geral, é vista como um bicho de sete cabeças, o que faz dessa disciplina uma das mais difíceis na vida escolar. Muitas vezes, ela é responsabilizada pelo alto índice de repetência e evasão escolar, pois os alunos não aprendem os conteúdos programados para as séries e, além das reprovações, ainda se desmotivam e evadem. Esta visão que os alunos e a sociedade, em geral, têm da Matemática precisa ser mudada, pois nosso país precisa de profissionais competentes para o desenvolvimento da Tecnologia e da Ciência.

Alguns mitos e crenças em relação à disciplina de Matemática podem ter sido concebidos logo no início da vida escolar dos estudantes, mais precisamente nas séries iniciais do Ensino Fundamental, quando alguns professores podem ter deixado transparecer, através de suas atitudes ou até mesmo de suas opiniões, alguma idéias negativas sobre a disciplina. Acredito que os alunos absorvem essas críticas por meio das influências culturais e sociais, no dia-a-dia da sala de aula.

Muitas vezes essas idéias também se afirmam pelas opiniões de familiares e amigos, que às vezes usam o ditado: "filho de peixe peixinho é". O estudante está exposto a essas crenças e assume, também, essa visão, quando seus familiares reafirmam que não são bons nas contas, nas tabuadas. Procuro deixar claro, quando tenho oportunidade, de que não concordo com este ditado e com essas afirmações, porém tenho que concordar que os hábitos de estudo e o gosto pelos cálculos e problemas podem ajudar na compreensão e aprendizagem da Matemática.

Retomo aqui a idéia inicial, de que muitos estudantes não sabem analisar seu erro, quando o professor o destaca ou quando lhe questiona para que o aponte na resolução. Parece-me que isso mostra a dificuldade que tem o educando de refletir sobre sua aprendizagem. Assim, com essas considerações, tomou forma o **problema** desta pesquisa: **como as dificuldades em potenciação e radiciação, no Ensino Fundamental, influenciam a aprendizagem de equações e funções exponenciais, no Ensino Médio?**

Para abordar o problema, destaco as **questões** dele derivadas:

a) quais são os erros mais freqüentes, cometidos por alunos de 7ª e 8ª séries, em resolução de exercícios sobre potenciação e radiciação?

b) quais são os erros mais freqüentes, cometidos por alunos do Ensino Médio, em resoluções de equações exponenciais?

c) como as dificuldades relacionadas com potenciação e radiciação aparecem nas resoluções de equações exponenciais?

d) como professores vêem os erros dos alunos nesses conteúdos e quais as suas opiniões sobre as causas dos erros?

e) como a forma de ensinar os conteúdos citados oferece oportunidades de aprendizagem para os alunos?

Nesta dissertação, o capítulo 2 apresenta a metodologia da pesquisa, com indicação dos objetivos, instrumentos, participantes e etapas de análise dos dados. Já no capítulo 3, são revisadas algumas idéias sobre erros.

O capítulo 4 traz elementos de uma experiência-piloto em análise de erros e, no capítulo 5, são apresentados os dados da presente pesquisa, englobando a análise quantitativa, a qualitativa e a análise das respostas dos professores ao questionário aplicado.

No capítulo 6, há o fechamento do trabalho, com conclusões e sugestões. Além das referências, ainda são apresentados, nos Apêndices, os instrumentos de pesquisa e, nos Anexos, as listas de erros cometidos pelos alunos pesquisados.

2 METODOLOGIA DA PESQUISA

Segundo Alves-Mazotti (1998, p. 149), “Um projeto de pesquisa consiste basicamente em um plano para uma investigação sistemática que busca uma melhor compreensão de um dado problema.” Esta pesquisa tem aspectos quantitativos e qualitativos, pretendendo chegar à compreensão das causas e conseqüências dos erros cometidos pelos alunos em potenciação e radiciação.

2.1 OS OBJETIVOS

O objetivo geral desta pesquisa é analisar e classificar erros em resolução de exercícios sobre potenciação e radiciação, cometidos por alunos de Ensino Fundamental, e em resolução de equações exponenciais, por alunos de Ensino Médio, para avaliar a influência das dificuldades nos conteúdos do Ensino Fundamental sobre a aprendizagem do Ensino Médio.

Como objetivos específicos, temos:

a) analisar e classificar os erros em exercícios sobre potenciação e radiciação, nas 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental;

b) analisar e classificar os erros em resoluções de equações exponenciais, no 1º ano do Ensino Médio;

c) relacionar as dificuldades em potenciação e radiciação com as dificuldades em resolução de equações exponenciais;

d) analisar as opiniões dos professores sobre os erros cometidos pelos alunos e sobre suas causas.

2.2 TIPO DE PESQUISA E DE INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Os instrumentos de coleta de dados desta pesquisa consistem na aplicação de testes sobre potenciação, radiciação e resolução de equações exponenciais, a alunos do Ensino Fundamental e Médio, bem como em questionários aplicados a professores de Matemática desses níveis de ensino, das escolas envolvidas na pesquisa. Como essa pesquisa foi realizada onde ocorrem os problemas dos erros matemáticos, mais especificamente dentro da sala de aula, trata-se de uma pesquisa de campo. Também, como ela ocorrerá de forma natural no ambiente onde acontecem esses erros, sem a manipulação intencional da minha parte em mudar os dados encontrados, essa pesquisa é naturalística. (LÜDKE, ANDRÉ, 1986).

Fiorentini e Lorenzato (2006) completam que a pesquisa de campo:

> [...] é aquela modalidade de investigação na qual a coleta de dados é realizada diretamente no local em que o problema ou fenômeno acontece e pode se dar por amostragem, entrevista, observação participante, pesquisa –ação, aplicação de questionário, teste, entre outros. (p. 106).

Moraes (2005, p. 14) considera que ”A abordagem naturalística-construtiva pretende chegar à compreensão dos fenômenos e problemáticas que investiga examinando-os no próprio contexto em que ocorrem”.

A superação ou a erradicação do erro no processo ensino-aprendizagem é inatingível, pois é por meio dos erros que os alunos podem se conscientizar de suas dificuldades e construir seu conhecimento, mas acredito que é necessário, através de uma pesquisa, questionar e problematizar essas dificuldades. Concordo com Moraes (2004, p.14) quando alerta que “Questionar o conhecer é problematizar o conhecimento” e ainda acrescenta “Entretanto não podemos ficar no questionar. O problema faz-nos agir.” (p. 15).

As entrevistas têm como objetivo aprofundar o que se está investigando. Quando é aplicada com pessoas que apresentam um domínio de conhecimentos, permite que o entrevistado posicione suas idéias e esta é uma das vantagens que a entrevista apresenta para o pesquisador.

As entrevistas podem ser apresentadas sob três modalidades: as estruturadas, as não-estruturadas e as semi-estruturadas. As estruturadas trazem perguntas precisas, que são organizadas e formuladas de acordo com uma ordem, fazendo que o entrevistador não se possa desviar. As não-estruturadas ou abertas permitem ao entrevistado abordar diretamente os assuntos, sem uma rigidez pré-estabelecida de ordem das perguntas. As semi-estruturadas articulam as duas modalidades de entrevistas descritas: as estruturadas e as não estruturadas ou abertas. São muito usadas em pesquisas educacionais, em que o pesquisador tem como objetivo aprofundar-se na problemática estudada. (FIORENTINI; LORENZATO, 2006).

2.3 OS PARTICIPANTES DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada com alunos de 7ª e 8ª série do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio. No caso do Ensino Fundamental, foram escolhidas uma escola particular de Porto Alegre e outra pública, do litoral norte do Rio Grande do Sul. Para o ensino Médio, foram escolhidas uma escola particular e outra pública, de Porto Alegre. A escola particular foi a mesma escola na qual foi aplicado o instrumento de pesquisa com os alunos de 7ª e 8ª séries; já a escola pública não pôde ser a mesma localizada no litoral norte do Estado, porque lá não desenvolvem este conteúdo no primeiro semestre do 1º ano do Ensino Médio. Assim, foi escolhida uma outra, em Porto Alegre, na qual já havia sido desenvolvido o conteúdo de Funções Exponenciais.

As escolas de Ensino Fundamental foram escolhidas intencionalmente e dois critérios pesaram nessa escolha: leciono na escola particular em questão e formei-me no Ensino Médio da escola pública indicada. Além disso, ambas contam com um grande número de alunos, que vêm de diversos ambientes. O contato com as direções das escolas desde o primeiro instante foi receptivo, valorizando o pesquisador e a pesquisa como instrumentos de transformações no processo ensino-aprendizagem.

A escola particular, da região norte de Porto Alegre, destaca-se por ser uma escola que atinge todas as classes sociais, mas preferencialmente classes baixas. Está situada numa região próxima à periferia da cidade, abrangendo bairros mais pobres, sendo que a escola fornece bolsas de estudo a muitos dos alunos. Essa escola apresenta um total de 48 turmas com 1306 alunos, oferecendo Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Educação de Jovens e Adultos, Ensino Técnico, Turno Integral e Progressão Parcial. A pesquisa foi desenvolvida nas turmas relacionadas no quadro 1, a seguir, sendo que o número de alunos é o que consta na lista de matriculados em cada série, mas não necessariamente os que estavam presentes nos momentos de aplicação dos testes. Da mesma forma, para os quadros 2, 3 e 4, o número de alunos é sempre o que foi oficialmente fornecido pela escola.

Turmas	Numero de alunos
7A	32
7B	30
8A	46
8B	45

Quadro 1 – Turmas do Ensino Fundamental da escola particular, envolvidas na pesquisa

Nessa escola, os instrumentos de avaliação foram aplicados em dias diferentes na 7ª e 8ª série, sendo sempre no turno da manhã, no terceiro período de cada turno após o recreio. Nas turmas do Ensino Médio, nessa mesma escola, a pesquisa foi desenvolvida nas turmas de acordo com o quadro 2, a seguir:

Turmas	Numero de alunos
A	41
B	39
C	40
D	40

Quadro 2 – Turmas do Ensino Médio da escola particular, envolvidas na pesquisa

Nessa escola, os instrumentos de avaliação foram aplicados no mesmo dia com os alunos da primeira série do Ensino Médio, no turno da manhã, após o recreio, visto que vários professores tinham aula com as turmas de primeiros anos e aplicaram o teste ao mesmo tempo.

A escola pública está localizada no litoral norte do Rio Grande do Sul, e destaca-se por ser uma escola de classe média, situada no centro da cidade, mas que abrange também a periferia. Localiza-se próximo à rodoviária da cidade, o que facilita o acesso de estudantes dos municípios vizinhos, já que nem todos têm acesso ao Ensino Médio e Profissionalizante nos lugares onde residem. A escola apresenta um total de 44 turmas com 1150 alunos. Oferece Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. A pesquisa foi desenvolvida nas turmas relacionadas no Quadro 3, a seguir:

Turmas	Numero de alunos
7A	27
7B	24
8A	26
8B	26

Quadro 3 – Turmas do Ensino Fundamental da escola pública, envolvidas na pesquisa.

Na escola pública, o instrumento de avaliação foi aplicado no mesmo dia, sendo que, no turno da manhã, foi para a 8ª série e, no turno da tarde, para a 7ª série, no primeiro período de cada turno.

A escola pública onde foi desenvolvida a pesquisa com Ensino Médio está localizada no bairro Chácara das Pedras, em Porto Alegre, mas atende alunos dos bairros Bom Jesus e Vila Jardim. Assim, recebe alunos de todas as classes sociais, que se relacionam sem problemas. A escola apresenta um total de 51 turmas com 1131 alunos. Oferece Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio e Educação de Jovens e Adultos. A pesquisa foi desenvolvida nas turmas relacionadas no Quadro 4, a seguir:

Turmas	Numero de alunos
A	15
B	13
C	16
D	14

Quadro 4 – Turmas do Ensino Médio da escola pública, envolvidas na pesquisa

Para qualquer das turmas, o tempo de duração necessário para a aplicação dos instrumentos de avaliação da pesquisa foi de uma aula de 45 minutos. Antes da aplicação dos instrumentos, expliquei aos estudantes que eles não teriam “nota” pelo trabalho, mas suas respostas seriam de extrema importância para o desenvolvimento da pesquisa, como uma forma de melhoria no ensino da Matemática, para eles e para a escola. Li a parte inicial do instrumento, explicando o procedimento do mesmo e o enunciado das questões, e informei que as dúvidas que surgissem no decorrer do teste não poderiam ser esclarecidas, visto que o objetivo era avaliar os seus conhecimentos sobre o assunto.

Além disso, também foram entrevistados professores de Matemática do Ensino Fundamental, das mesmas escolas e turmas envolvidas, aos quais foi aplicado um questionário aberto. (ver Apêndice A).

2.4 A ELABORAÇÃO DOS INSTRUMENTOS DA PESQUISA

Os dados da pesquisa foram obtidos através de um teste com questões abertas para a 7ª e 8ª série do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio e de um questionário aberto aplicado aos professores.

A elaboração do teste para os alunos foi lenta. Acreditava que o instrumento não deveria ser longo, a ponto de desestimular as respostas dos alunos. Primeiramente elaborei dois tipos de teste, um para o Ensino Fundamental, envolvendo a sétima e oitava série no estudo de potenciação, e outro, para o primeiro ano do Ensino Médio, envolvendo Funções Exponenciais e talvez alguns gráficos. No mês seguinte, após discussões com a orientadora, surgiu a idéia de serem três instrumentos, uma para a sétima série, envolvendo potenciação, outro para a oitava série, envolvendo a potenciação e acrescentando a radiciação e, para finalizar, outro para o primeiro ano do Ensino Médio, com os conteúdos anteriores inseridas no tópico “equações exponenciais”. (ver Apêndice B).

A escolha por questões de cálculos algébricos ou resoluções de equações deve-se ao fato de que um dos objetivos da pesquisa é analisar erros em relação de exercícios sobre as operações de potenciação e radiciação e suas propriedades. A solução de problemas sobre tais conteúdos, como os que envolvem conceitos interdisciplinares, não é, em geral, trabalhada pelos professores dessas séries e escolas e, assim, trariam dificuldades adicionais para os alunos.

Para elaborar esses instrumentos, realizei consultas desses conteúdos em coleções matemáticas, tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio. Várias foram às referências, entre elas estão: “A Conquista da Matemática” de Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (2002); “Matemática Contexto e Aplicação”, de Luiz Roberto Dante (2004); “Tudo é matemática” do mesmo autor, de 2005; “Matemática Fundamental”, de Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr. (1994); e “Matemática Uma Nova Abordagem” de Giovanni, Bonjorno e Giovanni Jr. (2002).

Procurei também, um antigo diário de classe, de quando iniciei minha docência com o ensino na área da Matemática com alunos do Ensino Fundamental. Pude comparar questões que eu já havia aplicado aos alunos e em que tinha notado suas dificuldades ao resolvê-las com os exemplos que esses autores mencionavam em seus livros.

Quando abri aquele diário, vieram à tona, as recordações das dificuldades dos alunos. Em nenhum momento em que trabalhei com esses conteúdos abordados em minha dissertação, eu encontrei saídas para detectar quais eram as dificuldades que apareciam em maior quantidade ou de que forma os alunos cometiam os erros ao resolvê-las. Minha preocupação, naquele momento profissional, era com o fato de não estar ensinando com clareza ou de estar deixando de fora algo importante.

O questionário aberto, para os professores, foi elaborado após a classificação dos dados, em que foram analisados os tipos de erros que apareceram em maior quantidade. No corpo desse instrumento, o entrevistado era colocado frente às quantidades e aos tipos de erros, com exemplos encontrados, e era instigado, por meio de perguntas abertas, a colocar sua opinião frente à situação.

Adotei alguns cuidados para a aplicação do questionário aos professores de Matemática; no primeiro contato com os participantes, esclareci o objetivo e a natureza da minha pesquisa e também acrescentei porque ele foi escolhido para fazê-la. Assegurei-lhes que suas opiniões fariam parte do trabalho científico, garantindo-lhes a fidedignidade das idéias e anonimato de suas identidades, bem como o nome do local em que trabalham. Garanti que suas respostas seriam transcritas para a pesquisa com a autorização dos mesmos. Os professores ficaram livres para escolher o local em que desejariam realizá-las, que poderia ser no ambiente de trabalho ou em casa. Houve a possibilidade de ser enviada através de e-mail ou ser entregue em mãos.

2.5 A PREPARAÇÃO DOS DADOS PARA ANÁLISE

Após recolher todos os testes, esses foram corrigidos para possibilitar a construção de um quadro com distribuições de freqüência de acertos, erros e questões não respondidas. As respostas às perguntas foram transpostas para uma folha à parte e a cada tipo de resposta foi atribuído um número que a identificava.

No início, a numeração foi feita em ordem crescente, com algumas anotações à margem. Porém, os apontamentos se avolumaram e a diversidade de erros apontou a necessidade de trocar a estratégia de identificação.

Assim, iniciei a categorização das respostas erradas pela identificação dos sujeitos, indicando em primeiro lugar a turma: 7 para a 7ª série e 8 para a 8ª série. As turmas foram classificadas em A e B, já que em cada escola havia duas turmas de cada série. As escolas foram classificadas pela inicial do nome da mesma em maiúscula. Em seguida, foi indicado o número de alunos, em uma seqüência de 1 até o número máximo de respondentes da turma em questão. Portanto, a resposta de um aluno identificado por 7AP23 significa a resposta do 23º aluno da 7ª série A da escola P. Da mesma forma, foi feito para os alunos do Ensino Médio.

Após a digitação de todas as respostas erradas encontradas nas provas, foram criadas as categorias, de acordo com o tipo de erro detectado. A tarefa de entender como o aluno pensou ao resolver as questões foi difícil, porque eu procurava entender a resolução a partir do que esperava encontrar como resposta certa. É estranho analisar um erro através de um raciocínio certo, mais ainda escrever corretamente sobre um raciocínio que está errado. Assim, é importante destacar que, nesta análise, em que os alunos não foram entrevistados, o olhar sobre a proposta tem a visão da pesquisadora, ou seja, tem por base seu conjunto de procedimentos para solucionar a questão. Ainda que discussões posteriores com a orientadora possam ter modificado algumas categorias, é sempre sob o viés do acerto que o erro está sendo apresentado.

Em um primeiro momento, foram criadas 147 categorias, que após refinamento foram condensadas em 49. Muitas classes foram agrupadas por semelhança na resolução dos cálculos ou por termos usados nas anotações para a criação inicial da classificação. Após a contagem do número de erros em cada uma das classes, verifiquei que alguns deles tinham apenas uma ou duas ocorrências; a partir de discussões e reflexões, as 49 classes foram reagrupadas em 17, denominadas por letras maiúsculas, de A até R. A partir da classificação dos erros, foram criados quadros com distribuição de freqüências.

A preparação dos dados para a análise de erros é uma etapa trabalhosa, mas se faz necessária para podermos quantificá-los e, a partir desse ponto, analisá-los com clareza. Essa etapa, com certeza, é um momento em que amadurecemos as idéias em relação à pesquisa que estamos desenvolvendo. Muitas das idéias iniciais sobre a análise foram abandonadas face às respostas encontradas; outras foram implementadas ao percebermos que contribuíam para uma melhor análise das respostas. Nas palavras de Lüdke e André (1986)

> A construção de categorias não é tarefa fácil. Elas brotam, num primeiro momento, do arcabouço teórico em que se apóia a pesquisa. Esse conjunto inicial de categorias, no entanto, vai ser modificado ao longo do estudo, num processo dinâmico de confronto constante entre teoria e empiria, o que origina novas concepções e, conseqüentemente, novos focos de interesse. (p.42).

As mesmas autoras acrescentam que “É preciso que a análise não se restrinja ao que está explícito no material, mas procure ir mais a fundo, desvelando mensagens implícitas, dimensões contraditórias e temas sistematicamente ´silenciados`.” (p. 48).

A categoria de número 36 foi uma das que apareceram desde o início da correção da primeira prova da sétima série e nela foram agrupadas as respostas não compreendidas. Totalizou 187 erros, representando 19% do total. Segundo Lüdke e André (1986, p. 43), “Os dados que não puderam ser agregados devem ser classificados em um grupo à parte para serem posteriormente examinados”. No caso desta categoria, exemplos serão apresentados posteriormente.

2.6 AS ETAPAS PARA A ANÁLISE DOS DADOS

Quando o professor corrige provas, trabalhos e exercícios, este não está analisando os erros de seus alunos, nem suas causas e conseqüências, ou seja, não está levantando questões de pesquisa que possam ser investigadas, mas ao corrigir um trabalho, foram planejadas anteriormente as categorias, isto é, o professor elaborou o gabarito para fazer a correção dos mesmos.

Ao analisarmos com profundidade os trabalhos dos alunos, temos que seguir algumas etapas. Nesta pesquisa, ao analisar as respostas dos alunos, mais especificamente os seus registros escritos sobre as questões referentes ao estudo da potenciação, radiciação e equações exponenciais, o desenvolvimento foi realizado em três etapas básicas, pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

Na primeira etapa da análise do conteúdo, em que os alunos registraram na prova, através da escrita, o seu raciocínio matemático, o material foi organizado para que pudesse haver formulação de conjecturas sobre os erros. Acredita-se que nesta etapa o pesquisador se deixa impregnar pela investigação, pois ele se envolve na busca de materiais interessantes a serem investigados, de acordo com o seu problema e questões de pesquisa.

No próximo passo desta pesquisa, o material escolhido foi devidamente codificado, fazendo a unitarização e a categorização dos erros mais significativos encontrados. A unitarização teve como objetivo reler, rever, analisar novamente o material selecionado e definir as unidades de análise como palavras chaves, ou seja, aqueles erros repetidos em muitos trabalhos. Com o material selecionado, foram escolhidos os critérios de categorização.

No final, cada classe de erro foi descrita e os erros foram apresentados quantitativamente, em quadros com distribuição de freqüência, e qualitativamente, com exemplos de cada caso.

Para as entrevistas, também as opiniões dos professores foram objeto de análise de conteúdo, sendo as categorias descritas e interpretadas.

3 ALGUMAS IDÉIAS SOBRE ERROS

Segundo Bueno (1992, p.254), podemos definir *erro* como: s.m desacerto; incorreção; engano; falta; pecado; erro absoluto (Mat): diferença, em valor absoluto, entre valor exato da grandeza e o valor calculado; - relativo: relação entre erro absoluto e o valor exato de uma grandeza.

Analisando numa perspectiva formal, muitas vezes, em Educação, o erro é visto como algo ruim, algo mau, algo a ser evitado e punido. Macedo (1990, p. 352), argumenta “Há professores que defendem o ponto de vista de que não se pode permitir que o erro aconteça, pois ele se fixa e uma vez fixado dificilmente será eliminado da criança”. É como se o erro criasse raízes e se comportasse como uma erva daninha que sempre persiste e resiste. Outra idéia formal do erro é a de que deve ser apagado, corrigido o mais depressa possível. O que interessa, em último lugar, é se a criança aprendeu ou não a ler, escrever a contar. A escola está preocupada com o plano do fazer, da eficácia diante da transmissão e aquisição do conhecimento

Segundo Morin (2002),”o erro está ligado à vida e, portanto, à morte”. E ainda acrescenta: “A cada instante, a vida conhece o risco do erro”. (p.143). O erro é tratado por esse autor como um problema, mas um problema de ordem primária, prioritário, sobre o qual cabe a nós, pesquisadores, pensarmos sobre sua originalidade.

Quando a verdade surge como absoluta, sobrepondo-se ao erro, ela agrava essa questão, porque quem crê que detêm toda a verdade sobre o conhecimento está se tornando inacessível aos erros e conseqüentemente defenderá que as idéias contrárias as suas são mentiras, pois contradizem a sua verdade. Na realidade, tudo isso traduz que a verdade considerada absoluta por esse sujeito é o seu maior erro. O erro fundamental consiste em apropriar-se do que se acha que é a verdade absoluta.

Morin (2002), acrescenta que a idéia do erro em relação à vida e a morte está ligada diretamente à vida dos animais, onde o domínio da vida através da sobrevivência é uma estratégia. “No domínio animal, astúcias, enganos, logros, têm por função induzir o outro a erro, enquanto a estratégia consiste em evitar e em corrigir o mais e o mais cedo possível os seus erros”. (p. 143). Nesse jogo de erros e verdades, podemos olhar para trás e ver que a história da humanidade evoluiu através de erros,

> Em outras palavras, tudo quando surge de novo em relação ao sistema de crenças ou de valores estabelecidos aparecem sempre e necessariamente como um desvio e pode ser esmagado como erro. (MORIN, 2002, p. 147).

Em muitos momentos no processo da construção do conhecimento, o mais importante não é corrigir incansavelmente os erros, comparando com o número de acertos, mas saber que existem aspectos a serem corrigidos, melhorados e outros que até devem ser mantidos, pois em muitas situações de sala de aula o que está certo aqui pode estar errado acolá. Segundo Macedo (1990, p. 354), “Assim, há coisas no processo que devem ser corrigidas, porque não produzem o resultado pretendido, e há coisas que podem ser mantidas”.

Podemos considerar que a compreensão das causas dos erros deve estar ligada a uma realidade de uma comunidade escolar ou a um Sistema de Ensino do qual os alunos fazem parte.

Será que existe um culpado pela ocorrência do erro? Nessa busca incessante das causas dos erros, nem sempre se encontra o culpado, pois ele é classificado como uma falha escolar. Sendo assim, o estudo de erros, para entender melhor suas causas e poder auxiliar os alunos em suas dificuldades, pode auxiliar os professores e o Sistema de Ensino na compreensão e diminuição das repetências e evasões escolares. De acordo com Macedo (1990, p. 347), “Erro e acerto são sempre relativos a um problema ou sistema”.

O mesmo autor ainda acrescenta:

> Quando a escola falha nesta perspectiva da eficácia, a razão do erro é buscada em muitas fontes: ora é considerado um problema do professor, ora da escola, ora da criança, etc. Mas há sempre um culpado na historia. Nessa perspectiva nem sempre se vê o problema em um sentido dinâmico, ou seja, em um sistema de co-responsabilidade. (MACEDO, 1990, p.353)

Para Popper (apud Kuhn, 1979, p.17), “todos podemos aprender, e aprendemos, com nossos erros” e nessa perspectiva Macedo (1990, p. 348), acrescenta, “Ensinar o verdadeiro, o certo, é um compromisso social, político e pedagógico do professor”.

A criança tem a capacidade de inventar, a partir de sua imaginação, possibilidades de acontecer um erro, pois inventa operações e métodos inexistentes na resolução de questões. A “falsa generalização do erro” ocorre quando inventamos procedimentos a partir de outros semelhantes e já compreendidos.

Segundo Costa (1988, p. 20), “A analise do ´erro` pode oferecer pistas ricas para o redimencionamento de uma prática pedagógica que seja mais comprometida com as nossas crianças brasileiras”.

O aluno que corrige um erro e o entende pode mudar sua aprendizagem. Comparar erros desencadeia caminhos para a construção de novos saberes. Um erro corrigido pelo aluno pode ser mais proveitoso para ele, para o professor e para todo o grupo de estudantes, do que um acerto imediato.

Segundo Costa (1988, p.16),

> A analise do “erro” nos permite valorizar o processo subjacente às respostas, não apenas a resposta com um produto que se encerra em si mesmo. A analise dos processos utilizados pelas crianças nos leva a verificar o que há de positivo nela, a sua construção lógica, não apenas os seus supostos déficits.

Quando o aluno estrutura seus conhecimentos, quando percebe que aprendeu, o mais importante não é reter as informações que lhe foram passadas ou que buscou sozinho, mas utilizar esses conhecimentos para solucionar problemas e compreender as transformações do mundo.

A análise de erros de produções de alunos de Matemática tem, no seu desenvolvimento, recebido influências importantes, do behaviorismo e do construtivismo. A primeira pressupõe a eliminação do erro e a segunda, aborda a exploração das dificuldades na construção do conhecimento. Essas são alternativas que os trabalhos acadêmicos vêm demonstrando para a exploração dos erros no estudo do processo de ensino e de aprendizagem.

Os professores sempre têm se preocupado com a avaliação do trabalho escolar, procurando, muitas vezes, avaliar os alunos como um todo. De acordo com Luckesi (2000), “A avaliação da aprendizagem não pode continuar sendo a tirana da prática educativa, que ameaça e submete a todos”, acrescentando ainda que “chega de confundir avaliação aprendizagem com exames“ Segundo o autor, são duas visões antagônicas, pois esclarece que “avaliação, é amorosa, inclusiva, dinâmica e construtiva”, em contrapartida diz que a avaliação com exames “não são amorosos são excludentes, não são construtivos, mas classificatórios”. Luckesi concorda com a idéia de que “A avaliação inclui, traz para dentro; os exames selecionam, excluem, marginalizam.” (2000, p.7)

A escola deve ter como finalidade proporcionar aos alunos o conhecimento, não apenas instruí-los e prepará-los para o mercado de trabalho, mas propiciar o desenvolvimento do discente como um todo, seja emocional, intelectual e pessoal.

Esteves (1983, p.9), acrescenta que “A preocupação do professor é a criança toda, não apenas suas habilidades intelectuais – por isso fala-se em avaliação e não em medida de aspectos isolados.”

O professor deve estar atento às condições em que os erros acontecem e quais as maneiras e as estratégias para superá-los. Nessas condições, pretende-se que o professor também possa desenvolver com alunos essa observação, a fim de que tome consciência da fragilidade de um suposto fracasso escolar diante dele.

Segundo Cury (1995, p. 9),

> Se focalizarmos a natureza da Matemática em si, a eliminação do erro está ligada ao entendimento da incompreensão do aluno sobre o conceito apresentado e à retomada do assunto sob novos enfoques, se pretendemos explorar o erro, esse pode nos levar à reflexão sobre os limites e características da própria Matemática.

O erro pode acontecer por diversos motivos; seja por falta de atenção, dificuldades com os conteúdos que conseqüentemente ainda não são dominados pelo aluno e quando este utiliza resoluções inadequadas.

Cada professor aborda o erro de acordo com as suas concepções como educador, e mais, assumindo o seu perfil ao ensinar Matemática. Kaiber e Andrade (2005) reforçam:

> [...]a postura docente adotada perante os erros é conseqüência da concepção que possuem sobre o desenvolvimento do processo de ensino, sobre a aprendizagem do aluno e principalmente sobre a própria Matemática, na qual percebem-na como algo útil em suas vidas, alicerçando seu trabalho na repetição e no domínio de técnicas. (p. 7).

Analisar os erros nas provas e testes dos alunos fazem parte da rotina do professor de Matemática, é um hábito. Muitos educadores, ao corrigir os testes, avaliam o erro de seus educandos atribuindo uma nota de acordo com o número de acertos e erros obtidos em cada instrumento, outros, aproveitam os erros que mais se destacaram e fazem uma retomada de conteúdos com uma revisão a partir desse ponto; outros, porém, partem dos erros encontrados e constroem com seus alunos estratégias de validação ou não, impulsionando para a construção de hipóteses e discussões, com a finalidade em construir, por meio deles, o ensino e a aprendizagem.

O erro pode ser considerado como ponto de partida, como fonte de informação, proporcionando aprendizagens. Deve ser encarado como uma etapa a ser vencida pelos alunos. Ele denuncia o percurso que o discente traçou, o caminho que ele percorreu até chegar a uma determinada resposta, e esses caminhos, esses percursos fazem parte de possibilidades na construção do seu conhecimento.

Segundo Esteves (1983, p.9),

> Saber o nível de conhecimento das crianças no momento em que estas lhe são entregues, para determinar o quanto progrediram depois de um certo tempo; verificar quantidade de aprendizagem e o modo como ela se realiza, para dosar e distribuir os trabalhos de sala de aula; conhecer os pontos fortes e fracos dos alunos, para dar a cada um o auxílio de que o indivíduo necessita – são algumas das muitas razões por que a avaliação se tem constituído um guia indispensável ao professor.

A retomada das resoluções incorretas por parte do professor faz com que os discentes possam conscientizar-se do que cometeram e, a partir desse ponto, possam observar com mais atenção e direcionamento, traçando estratégias de superação e conseqüentemente diminuir o fracasso escolar.

Existe um consenso, por parte do professor de Matemática, de que nesta disciplina só podemos avaliar por meio de provas, testes, e que as respostas dos alunos, submetidos a esses instrumentos de avaliação devem ser fiéis ao foco sob o qual o conteúdo foi estudado. Sabemos que diferentes tipos de resoluções podem aparecer, percorrendo caminhos diferenciados, fugindo das concepções "certinhas" que encontramos nos livros ou as que nós professores de Matemática estamos acostumados a ensinar e a encontrar na maioria das resoluções.

Hoje, o erro é objeto de estudos e debates, pois a partir dele pode-se aprender. Quando queremos entender suas causas e conseqüências, o erro pode parecer uma falha no processo de ensino e aprendizagem, mas é condizente com o processo de construção de conhecimento matemático.

Segundo Cury (1995, p. 9-10),

> Se estamos interessados no processo de aprendizagem da Matemática, o erro pode ser visto como instrumento de identificação dos problemas do currículo e da metodologia, e, ao resolvê-los, os erros serão eliminados; se, no entanto, queremos explorar o erro, esse pode constituir-se em instrumento para a compreensão dos processos cognitivos.

Sinônimo de fracasso escolar, ele reflete as condições em que foi há muito tempo relacionado com os castigos físicos e emocionais na escola. Exemplos disso são as repetições de palavras, o motivo de chacotas dos colegas e até agressões.

Segundo Pires (2003, p. 61)

> Quem paga o preço da defasagem são os próprios alunos. Muitos assumem a culpa pelas deficiências da escola e crescem resignados com o rótulo da incapacidade. De quebra, recheiam o currículo de reprovações e, inevitavelmente, chegam à adolescência com a auto-estima ferida.

Hoje, as projeções mudaram, porém os alunos pagam por punições diferenciadas, como as notas baixas, as más aprendizagens acarretando castigos, reprovações, evasões, vergonha e ridicularização.

Conforme Falzetta (2002, p. 22), “errar sabendo é melhor do que acertar ao acaso”. Esteban (2002) também enfatiza, “[...] o distanciamento entre o erro e acerto, um dos movimentos centrais do processo avaliativo, vemos que, na sala de aula, nem todos os erros possuem o mesmo valor e freqüentemente este valor depende de quem erra e de quem avalia.” (p. 135)

As estratégias de resoluções nas respostas dos alunos têm o mesmo peso ou até mais do que o resultado final. Segundo Diniz (apud Falzetta, 2002, p. 22), “Tem professor que, na correção, só olha as respostas.” O modo de pensar vai além do fazer, mas o estudante o compreende fazendo. Smole e Diniz (Ibid.) consideram que existem maneiras de chamar a atenção para que o erro não seja caracterizado como uma tragédia escolar. Entre as práticas de sala de aula, destacam crenças que precisam ser evitadas: de que os problemas devem sempre ter soluções; de que seus dados devem aparecer na ordem direta e estar nos enunciados; de que devem vir em forma de textos; de que a resposta deve ser única; de que só é preciso resolver através de contas; de que o acerto vem com a prática e esforço; de que a resolução deve ser rápida; de que, se o aluno errar, não adianta investigar, ele deve começar de novo; e de que o professor não deve gerar confusão ou dúvida diante das resoluções.

Para inverter essas situações, podemos dar a resposta dos problemas e pedir que seja explicado o que está faltando; pedir que os estudantes corrijam as respostas dos colegas, desde que elas venham acompanhadas de justificativas; aceitar várias soluções encontradas, para que os alunos descubram as corretas, com a finalidade de valorizar as estratégias nas resoluções e não somente a resposta final correta.

4 O DESENVOLVIMENTO DE UMA EXPERIÊNCIA-PILOTO

Para entender os processos da análise de erros em Matemática, realizei uma experiência-piloto, durante o período em que elaborava o projeto desta pesquisa. Essa experiência teve como objetivo ver como funcionaria este projeto, na prática, e aprender a fazer a análise dos dados desta pesquisa de dissertação. Minha inserção na experiência se deu a partir de um projeto de Iniciação Científica, desenvolvido por uma aluna de um curso de Licenciatura em Matemática, com bolsa da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS). Fui convidada a aplicar, aos meus alunos de oitava série, um teste de múltipla escolha, envolvendo conteúdos matemáticos da série em questão.

O teste aplicado foi elaborado com dez questões, adaptadas de Dante (2005), com espaço ao lado de cada uma, para que o aluno pudesse registrar o seu raciocínio através do desenvolvimento da questão. O teste foi aplicado com um total de 76 alunos, nas quatro oitavas séries do Ensino Fundamental de uma escola particular de Porto Alegre.

Das dez questões elaboradas, as questões de número 3 e 9 não foram consideradas por problemas de digitação e elaboração. Com esse problema, já me foi possível verificar o cuidado necessário antes da aplicação de um instrumento de pesquisa, para que as questões não causem dificuldades extras aos participantes. O teste com as questões aplicadas está no Apêndice C.

Foi feita a tabulação dos dados, analisando as questões qualitativamente e quantitativamente, contando o número de alunos que acertaram ou que não responderam às questões. Os dados estão indicados no quadro 5, a seguir:

QUESTÃO	**ACERTARAM**		**NÃO RESPONDERAM**	
	nº	%	nº	%
1	12	16	18	24
2	9	12	19	25
4	68	89	2	3
5	22	29	3	4
6	31	41	3	4
7	52	68	5	7
8	33	43	1	1
10	51	67	9	12

Quadro 5 – Número de alunos que acertaram ou não responderam às questões

De acordo com a tabulação dos dados, as questões que os alunos da 8ª série mais erraram foram a 1 e a 2, o que mostra que há estudantes de final de Ensino Fundamental sem conhecimento de conteúdos que vão precisar em todo o Ensino Médio ou Superior. Como esses alunos vão enfrentar a primeira serie do Ensino Médio no ano seguinte? Qual será a base matemática desses alunos?

Foi feita também a análise qualitativa dos erros que surgiram e, para ilustrar, apresento cada questão e exemplifico as classes de erros nas questões 01, 02 e 08.

a) Questão 1: O valor numérico da expressão $\frac{3x}{2}+\frac{1}{3}$ é *A* para x = - 1 e *B* para x = ½ . O valor de A + B é: a) - ¼ b) - ½ c) - ¾ d) $-\frac{1}{12}$ e) $-\frac{1}{6}$

Os erros foram classificados em seis categorias, exemplificadas a seguir:

Classe A: o aluno não substitui corretamente o valor de x.

Ex: a) $x=\frac{-1}{1}+\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{-2+1}{2}=\frac{-1}{2}$

Classe B: o aluno não sabe efetuar a adição de frações, pois soma numeradores e denominadores.

Ex: $\frac{3(-1)}{2}+\frac{1}{3}=\frac{-3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{-2}{5}$

Classe C: o aluno soma os numeradores e multiplica os denominadores.

Ex: $\frac{3}{2}.(-1)+\frac{1}{3}=\frac{-3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}$

Classe D: O aluno substitui corretamente o valor de x, mas erra cálculos com frações.

Ex: $A=\frac{3.(-1)}{2}+\frac{1}{3} \Rightarrow A=\frac{-3}{2}+\frac{1}{3} \Rightarrow A=\frac{-2}{5}$;

$$B=\frac{3.(\frac{1}{2})}{2}+\frac{1}{3} \Rightarrow B=\frac{\frac{3}{2}}{2}+\frac{1}{3} \Rightarrow B=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \Rightarrow B=\frac{2}{6}+\frac{1}{3} \Rightarrow B=\frac{1}{3};$$

$$A+B=\frac{-2}{5}+\frac{1}{3} \Rightarrow A+B=\frac{-1}{6}$$

Classe E: o aluno substitui corretamente, mas erra na soma de A + B.

Ex: $A=\frac{3.(-1)}{2}+\frac{1}{3}=\frac{-3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{-9+2}{6}=\frac{-7}{6}$; $B=\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{9+4}{12}\Rightarrow\frac{13}{12}$; $A+B=\frac{-7}{6}+\frac{13}{12}=\frac{-7}{6}$

Classe F: O aluno não substitui x, indica corretamente a soma de $\frac{3x}{2}+\frac{1}{3}$, mas depois soma apenas os numeradores, “perdendo” o denominador.

Ex: $\frac{9x}{6}+\frac{2}{6}=9x+2$

b) Questão 2: A forma mais simples de resolver a expressão $\frac{y-1}{y+1}-\frac{y^2}{y^2-1}+\frac{2y}{y-1}$

é: $a)\frac{2y^2+1}{\left((y+1)(y-1)\right)}$ $b)\frac{2y^2-1}{(y+1)(y-1)}$ $c)\frac{2y+1}{(y+1)(y-1)}$ $d)\frac{2y^2+1}{(y+1)(y+1)}$ $e)\frac{2y^2+1}{(y-1)(y-1)}$

Nesta questão, foram elencadas quatro classes:

Classe A: O aluno não determina corretamente o mínimo múltiplo comum das expressões algébricas do denominador e não se compreende qual expressão usou como denominador comum, na segunda operação:

Ex: $\frac{y-1}{y+1}-\frac{y^2}{y^2-1}\Rightarrow\frac{(y-1)}{y}+\frac{2y}{y-1}=\frac{3y-1}{y^2-1}$

Classe B: O aluno não determina corretamente o mínimo múltiplo comum das expressões algébricas do denominador e não se compreende qual regra utilizou para efetuar as operações indicadas; em seguida, parece ter abandonado a fração algébrica, mas é incompreensível o restante do desenvolvimento.

Ex. 1: $\frac{y^2+1-y^2+2y+1}{(y+1)-(y-1)}\Rightarrow y^2-1=y-1.y-1=y^2+1\Rightarrow 2y.(y+1)=2y.1$

Ex. 2: $\frac{y-1}{y+1}-\frac{y^2}{y^2-1}+\frac{2y}{y-1}=\frac{-y}{y}-\frac{y^2}{y^2}+\frac{2y}{y}=\frac{-y^2}{-y^2}+\frac{2y}{y}$

Neste segundo exemplo, parece que o aluno desprezou os valores numéricos e, ainda, eliminou a fração inicial (considerou que “cortava” termos iguais?)

Classe C: O aluno determina o denominador comum pelo produto dos três denominadores, efetua as operações corretamente, mas não sabe efetuar os produtos dos binômios ou monômios por binômios.

Ex:

$$\frac{(y^2-1)(y-1)(y-1)-(y^2)(y+1)(y-1)+2y(y+1)(y^2-1)}{(y+1)(y^2-1)(y-1)}=$$

$$\frac{y^4-y^3-y^3+y^2-y^2+y+y+y-y^4+2y+1}{(y+1)(y^2-1)(y-1)}$$

Classe D: O aluno indica o mínimo múltiplo comum como produto da soma pela diferença, mas depois não efetua corretamente as operações de divisão e multiplicação.

Ex:

$$\frac{y-1}{(y+1)(y-1)}-\frac{y^2}{(y\ \ +1)(y-1)}+\frac{2y}{(y+1)(y-1)}=\frac{y^2-1}{(y+1)(y-1)}-\frac{y^2}{(y+1)(y-1)}$$

$$\frac{y-1}{y+1}-\frac{y^2}{y^2-1}-\frac{2y}{y-1}=\frac{y-1}{y+1}-\frac{y^2}{y^2-1}+\frac{2y}{y-1}$$

c) Questão 8: De 50 provas de kart, Marcelo venceu 15. A porcentagem de derrotas de Marcelo é de: a) 70% b) 30% c) 40% d) 10% e)) 50%

Neste caso, foram criadas oito categorias de erros:

Classe A: O aluno acertou, usou proporção para descobrir a percentagem correspondente a 35 derrotas, partindo dos 50%, que provavelmente sabia calcular mentalmente, de imediato.

Ex: 25 – 50%
35 –70%
70%

Classe B: O aluno fez um cálculo correto (15 representa 30% de 50), mas a linguagem matemática empregada não está correta. No entanto, sabe raciocinar sobre os dados do problema.

Ex: $\frac{50\%}{15}=30\%$, venceu; então perdeu em 70%

Classe C: O aluno calcula corretamente a percentagem das vitórias, usando regra de três simples.

Ex: 50 – 100

15 – x

50x = 1500

x = $\frac{1500}{50}$

x = 30

Classe D: O aluno faz uma regra de três, substituindo os valores corretamente, mas errando em termos de linguagem matemática, pois indica “50%”, quando deveria apenas escrever “50”.

Ex: 50% - 100%

35 - x

50x = 3500

x = 70%

Classe E: O aluno parece ter realizado cálculos mentais e consegue determinar que 15 vitórias correspondem a 30% das provas, de onde a diferença indica a percentagem de derrotas.

Classe F: O aluno confunde o número de vitórias com uma percentagem e aplica incorretamente; erra também no uso do sinal de igualdade. No entanto, ao final coloca o valor correto, mas não se sabe se fez cálculos mentais.

Ex: $\frac{15}{100}50 = \frac{750}{100} = 70\%$

Classe G: O aluno erra porque faz o cálculo correto da percentagem das vitórias mas esquece de prestar atenção no que o problema pedia, a percentagem de derrotas.

Ex: 50 – 15 = 35   15 = 30%

Classe H: O aluno relaciona a quantidade de voltas da prova e não a quantidade de derrotas.

a) $\frac{50}{2} = 25 = 50 \,{}^{0}\!/_{0} \rightarrow 5.10 = 50 \,{}^{0}\!/_{0}$. Cada 5 voltas equivale a 10%.

Cada uma dessas questões e suas respectivas categorias de erros poderia levar à discussão de possíveis causas e à busca de explicações dadas por autores que detectaram dificuldades semelhantes. No caso da experiência-piloto, apenas classifiquei os erros e exemplifiquei-os, pois meu objetivo era aprender a técnica. Somente quando apliquei o teste aos participantes desta investigação de mestrado é que procurei as interpretações dos dados, pois se relacionavam, então, diretamente com o tema escolhido, potenciação, radiciação e equação exponencial.

No entanto, de maneira geral, já é possível verificar que esses alunos da oitava série têm dificuldades bastante grandes, relacionadas com adição de frações numéricas e algébricas. Esse problema, ainda que não diretamente ligado à potenciação e radiciação, se apresentou, também, nas respostas encontradas na presente investigação, como é apontado no capítulo 5.

5. ANÁLISE DOS DADOS DA INVESTIGAÇÃO

5.1 A QUANTIFICAÇÃO DOS ERROS

Visto que a pesquisa se realizou com a aplicação de testes a turmas de estudantes de 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio, sem que eles tivessem sido acompanhados ou entrevistados posteriormente sobre os erros, a análise quantitativa traz os dados organizados de uma forma geral e permite fazer alguma interpretações sobre as dificuldades encontradas.

Foram participantes da pesquisa 107 alunos de 7ª série, 132 de 8ª série e 193 do 1º ano do Ensino Médio. O número de participantes, em cada série e escola, está indicado na Figura 1:

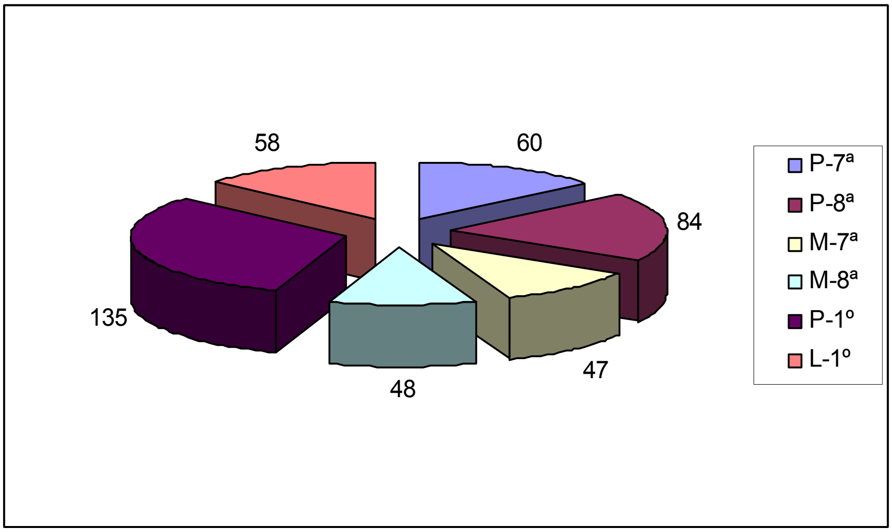


Figura 1 – Número de participantes, por escola e série

A seguir, são apresentados os quadros com o número e percentagem de alunos participantes que acertaram, erraram ou não responderam às questões do teste aplicado, em cada série e escola.

Questões	Acertaram		Erraram		Não responderam	
	nº	%	nº	%	nº	%
1	48	80	12	20	0	0
2	33	55	26	43	1	2
3	26	43	31	52	3	5
4	40	67	13	22	7	12
5	41	68	18	30	1	2
6	14	23	43	72	3	5
7	16	27	36	60	8	13
8	2	3	39	65	19	32

Quadro 6 – Distribuição dos alunos que acertaram, erraram ou não responderam na 7ª série da Escola P

Questões	Acertaram		Erraram		Não responderam	
	nº	%	nº	%	nº	%
1	42	82	5	10	0	0
2	35	69	11	22	1	2
3	18	35	23	45	6	12
4	31	61	11	22	5	10
5	38	75	8	16	1	2
6	16	31	31	61	0	0
7	20	39	23	45	4	8
8	7	14	26	51	14	27

Quadro 7 – Distribuição dos alunos que acertaram, erraram ou não responderam na 7ª série da Escola M

Observando os dados das sétimas séries, é digno de nota o fato de que a questão mais acertada, a de número 1, (“$2^3.2^2=$”) é aquela em que o aluno apenas aplica a propriedade do produto de potências de mesma base. As menos acertadas foram as de número 6, “$(3^2.2)^3=$” e 8, “$(9^3:3^3)^{-1}=$” , que envolvem potência de um produto ou de um quociente e, além disso, na questão 8 ainda se destaca o expoente negativo.

Questões	Acertaram		Erraram		Não responderam	
	nº	%	nº	%	nº	%
1	15	18	63	75	6	7
2	0	0	58	69	26	31
3	13	15	41	49	30	36
4	4	5	53	63	27	32
5	15	18	39	46	30	36
6	56	67	17	20	11	13
7	32	38	42	50	10	12
8	5	6	44	52	35	42

Quadro 8 – Distribuição dos alunos que acertaram, erraram ou não responderam na 8ª série da Escola P

Questões	Acertaram		Erraram		Não responderam	
	nº	%	nº	%	nº	%
1	9	19	32	67	7	15
2	7	15	27	56	14	29
3	35	73	7	15	6	13
4	17	35	25	52	6	13
5	5	10	31	65	12	25
6	15	31	26	54	7	15
7	4	8	40	83	4	8
8	5	10	35	73	8	17

Quadro 9 – Distribuição dos alunos que acertaram, erraram ou não responderam na 8ª série da Escola M

Nas oitavas séries, o maior problema se localiza na questão 8, "$\sqrt[3]{\sqrt{a^2}}$", que envolve raiz de um radical. As questões que apresentam os maiores problemas na sétima série, que foram repetidas no teste da oitava série, também sinalizam para dificuldades nessa série; na escola particular, por exemplo, a questão "$\left(9^3 : 3^3\right)^{-1}$ =" não foi acertada por nenhum aluno!

Questões	Acertaram		Erraram		Não responderam	
	nº	%	nº	%	nº	%
1	77	57	37	27	21	16
2	26	19	54	40	55	41
3	70	52	39	29	26	19
4	1	1	79	59	55	41

Quadro 10 – Distribuição dos alunos que acertaram, erraram ou não responderam no 1º ano da Escola P

Questões	Acertaram		Erraram		Não responderam	
	nº	%	nº	%	nº	%
1	18	31	26	45	14	24
2	6	10	24	41	28	48
3	6	10	23	40	29	50
4	0	0	39	67	19	33

Quadro 11 – Distribuição dos alunos que acertaram, erraram ou não responderam no 1º ano da Escola L

Já no primeiro ano do Ensino Médio, vê-se que a questão 4, que envolve resolução de equação exponencial ($2^{2x} - 9.2^x + 8 = 0$) com estratégias mais elaboradas, foi a que apresentou maiores problemas, seguida da questão 2, que solicita a resolução de $2^x = \sqrt{8}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[6]{2}$.

O que se pode conjeturar apenas pela análise quantitativa dos dados? Parece que os estudantes têm algum conhecimento das definições de potenciação e radiciação, mas não dominam as propriedades, especialmente as que envolvem mais de uma operação (potência de produto ou de quociente, substituição do expoente por uma variável). Essas hipóteses vão ser melhor discutidas na análise qualitativa, em que temos os exemplos das dificuldades e os tipos de erros.

5.2 OS TIPOS DE ERROS

Em relação aos erros detectados, apresento, aqui, as classificações, para poder quantificar o número de ocorrências. As respostas de cada aluno, de cada série e escola, estão apresentadas nos Anexos.

Como já foi apontado, os erros cometidos pelos alunos da 7ª e 8ª séries foram classificados em 47 categorias, de acordo com semelhanças de resolução, sendo cada classe descrita de modo sucinto. A seguir, essas descrições são listadas, para serem, posteriormente, apresentadas em um esquema, para facilitar a compreensão dos novos agrupamentos que foram feitos. Nesta primeira categorização, foram usados números para indicar os tipos de erro, sendo que alguns deles se relacionam exclusivamente a exercícios de potenciação e outros, exclusivamente à radiciação, havendo, ainda, aqueles que são comuns a qualquer das soluções. Na exemplificação, serão usados, no próximo item, os erros já categorizados de maneira mais resumida:

01: multiplica a base da potência pelo expoente;

02: multiplica (ou divide) as bases das potências e eleva à soma dos expoentes;

03: erra operações com inteiros (adição, multiplicação, divisão...);

04: efetua corretamente a operação de potenciação, mas não calcula o resultado final;

5: multiplica (ou divide) as bases das potências e eleva ao produto (ou quociente) dos expoentes;

6: efetua as operações com os números, na ordem em que aparecem;.

7: comete um lapso;

8: eleva a base da potência e o primeiro expoente ao segundo, considerando este resultado como base para elevar ao segundo expoente;

9: troca operações (por exemplo, potenciação pela multiplicação, radiciação pela potenciação, multiplicação ou divisão pela adição, divisão pelo produto...);

10: considera que qualquer potencia tem expoente 2;

11: soma as bases das potências e eleva à soma dos expoentes;

12: eleva a base da potência ao segundo expoente;

13: considera que $(-a)^2 = -a^2$;

14: erra operações com racionais ou reais;

15: cria uma espécie de “propriedade associativa” da potenciação, ou uma “distributiva” da potenciação em relação à adição;

16: multiplica o denominador da fração pelo expoente da potência e soma com o numerador, numa espécie de falsa generalização da redução de uma fração mista para ordinária;

17: distribui a multiplicação em relação à multiplicação;

18: considera que apenas um dos fatores de um produto deve ser elevado ao expoente;

19: considera que elevar um inteiro “a” a uma potência n ou extrair a raiz n-ésima de “a” é fazer n.a;

20: usa incorretamente a linguagem matemática;

21: desconsidera o expoente ou desconhece a definição de potenciação ou radiciação ou suas propriedades;

22: considera que elevar a –1 é multiplicar por –1;

23: soma as bases das potências;

24: eleva a base da potência à soma dos expoentes;

25: eleva o denominador da fração ao expoente e passa para o numerador;

26: considera que somente a segunda base deve ser elevada ao expoente, como se tivesse tirado os parênteses;

27: eleva a primeira base à soma dos expoentes;

28: eleva o primeiro fator de um produto à soma dos expoentes e o segundo, ao segundo expoente;

29: divide a base da potência pelo expoente ou o expoente pela base;

30: soma os coeficientes, mas não considera o coeficiente 1;

31: soma apenas os coeficientes diferentes de 1;

32: soma os radicandos;

33: divide os coeficientes e coloca o radical em evidência;

34: divide os radicandos;

35: calcula as raízes quadradas ou multiplica os índices dos radicais e calcula as raízes, mas permanece com o radical;

36: erro não identificado;

37: multiplica os índices dos radicais ou eleva um índice ao outro ou soma índices e considera que a raiz quadrada tem índice 1 ou, ainda, diminui um índice do outro;

38: multiplica (ou soma) o índice pelo expoente do radicando;

39: troca a ordem de prioridade das operações (primeiro multiplica, depois eleva a um expoente);

40: divide as bases das potências e eleva ao produto dos expoentes menos 1;

41: divide as bases das potências e eleva ao produto dos expoentes;

42: divide as bases das potências e conserva os expoentes;

43: eleva o radical ao quadrado ou ao cubo;

44: multiplica coeficiente pelo radicando;

45: soma os coeficientes com o radicando, multiplica e/ou divide os radicandos;

46: soma os coeficientes e transforma em índice e multiplica os radicandos;

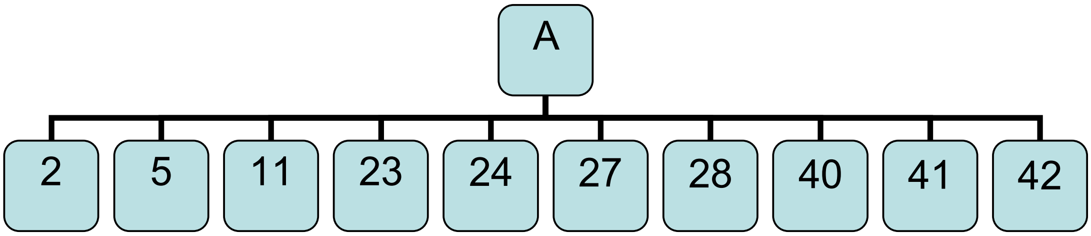
47: elimina um ou ambos os radicais.

Nas resoluções de equações exponenciais, no Ensino Médio, além de muitos dos erros já descritos, ainda surgiram mais duas categorias:

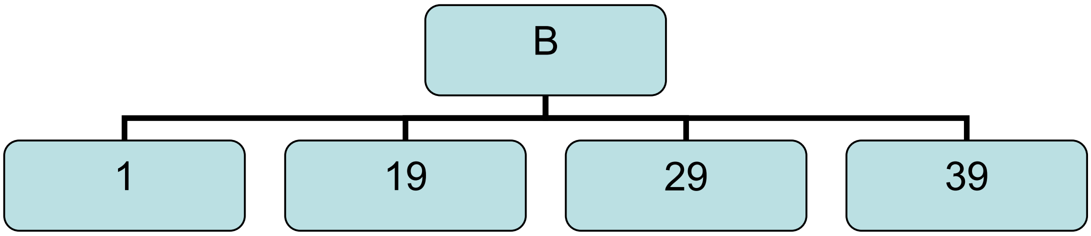
48: multiplica os expoentes das potências;

49: não reconhece os padrões de resolução de uma equação exponencial.

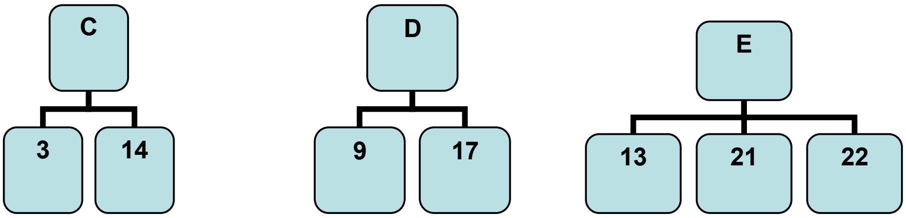
Com as 47 categorias que foram criadas para os erros do Ensino Fundamental, foi feita uma nova classificação, juntando aqueles que apresentavam semelhança em termos de estratégia de resolução ou de uso de (falsas) propriedades. Assim, os erros foram agrupados em 16 classes, indicadas pelas letras A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, L, M, N, O, P, Q, esquematizadas a seguir:



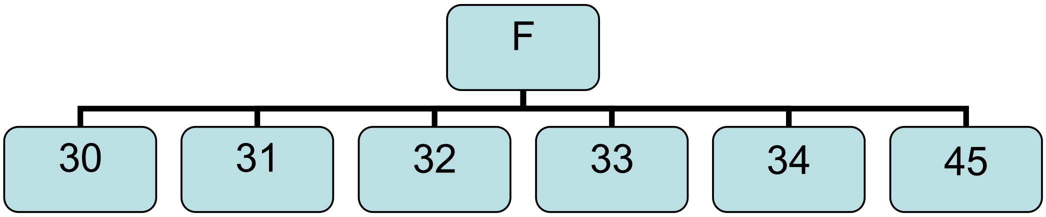
O erro do tipo A é, portanto, aquele que envolve operações erradas sobre as bases das potências.



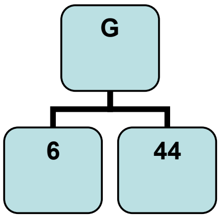
O erro do tipo B é aquele em que o aluno confunde a própria definição de potenciação.

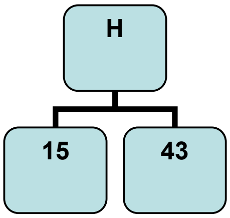


O erro do tipo C envolve erros em operações com conjuntos numéricos; o erro D envolve propriedades das operações em conjuntos numéricos; o erro do tipo E envolve a desconsideração do expoente ou o não-entendimento do expoente negativo.

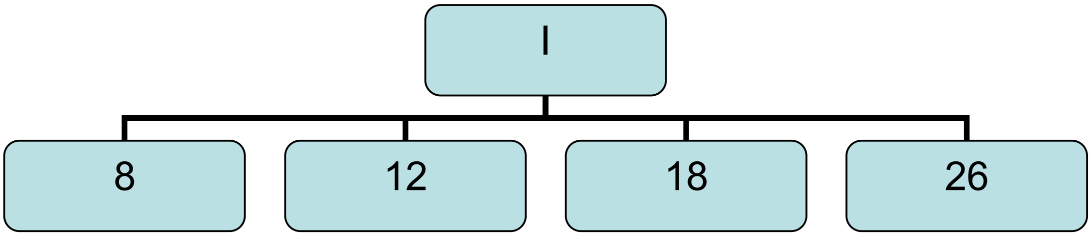


O erro do tipo F envolve dificuldades na adição de radicais, operando incorretamente com os coeficientes ou com os radicandos.

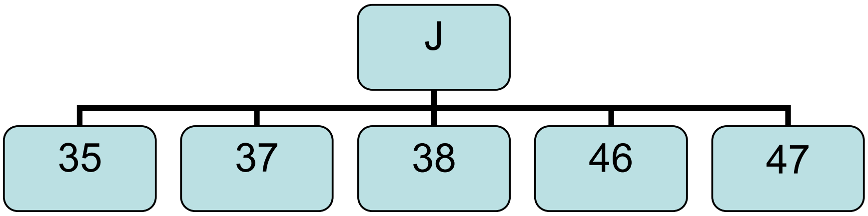




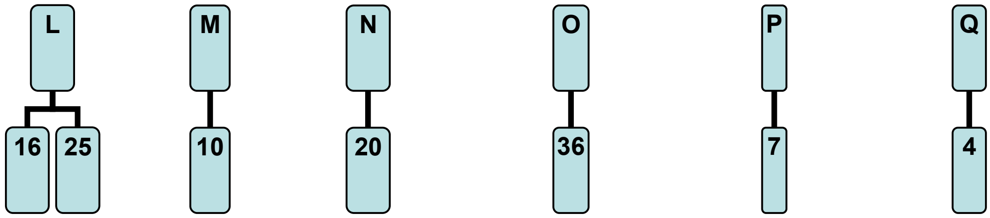
O erro do tipo G mostra que o aluno tende a resolver as operações na ordem em que aparecem os números envolvidos, independente das regras. Da mesma forma, o erro H traz dificuldades de compreensão de propriedades das operações com radicais.



O erro do tipo I envolve erros relacionados com os expoentes das potências.



O erro do tipo J mostra que o aluno se confunde no trabalho com radicais, de maneira geral, criando falsas regras.



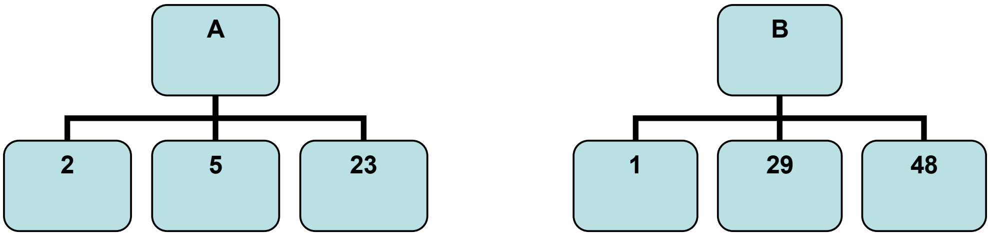
O erro do tipo L evidencia dificuldades com potenciação de frações. O erro M é específico, pois o aluno parece conhecer apenas a potência com expoente 2. O erro N indica dificuldades na escrita da linguagem matemática. O erro do tipo O é aquele em que não conseguimos entender a resolução. O erro P indica um lapso, de leitura ou escrita. O erro Q, na verdade, não é um resultado incorreto, apenas indica que o aluno não sabe finalizar uma solução de um exercício.

Para dar uma idéia geral do número de erros no Ensino Fundamental, em cada classe, apresento, a seguir, o quadro 12:

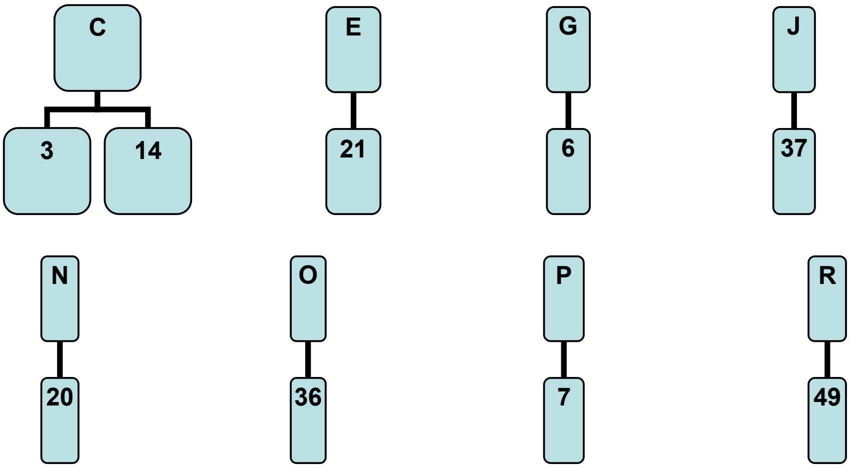
Classe de erro	7ª P		7ª M		8ª P		8ª M		Total	
	nº	%	nº	%	nº	%	nº	%	nº	%
A	31	12	9	6	3	1	17	7	60	6
B	24	9	11	7	11	3	9	4	55	5
C	63	24	41	27	58	15	12	5	174	17
D	11	4	0	0	18	5	12	5	41	4
E	43	16	29	19	45	12	17	7	134	13
F	3	1	1	1	10	3	32	14	46	4
G	7	3	7	5	38	10	3	1	55	5
H	2	1	0	0	50	13	0	0	52	5
I	11	4	6	4	3	1	5	2	25	2
J	0	0	0	0	26	7	18	8	44	4
L	1	0	1	1	9	2	0	0	11	1
M	8	3	1	1	3	1	4	2	16	2
N	3	1	2	1	4	1	3	1	12	1
O	32	12	39	25	85	22	31	13	187	18
P	8	3	5	3	1	0	1	0	15	1
Q	16	6	1	1	18	5	68	29	103	10
Total	263	100	153	100	382	100	232	100	1030	100

Quadro 12 – Distribuição de erros por classe, no Ensino Fundamental

Vê-se, então, que as classe de erros mais freqüentes são a O, a C, a E e a Q. Em relação aos erros cometidos por alunos do Ensino Médio, algumas classes não foram representadas; reagrupando, então, as categorias indicadas por números, temos os tipos esquematizados, com as mesmas letras indicadas anteriormente, apenas com menos classes, pela falta de alguns tipos de erros:



O erro 48 ficou englobado na categoria B, pois indica dificuldade com a potenciação.



Já o erro 49 é colocado em uma nova classe, R, por ser específico para a resolução de equações exponenciais. Essa classe é, então, a 17ª da categorização. Para dar uma idéia geral do número de erros no Ensino Médio, em cada classe, apresento, a seguir, o quadro 13:

Classe	L-1º		P-1º		Total	
	nº	%	nº	%	nº	%
A	2	2	3	4	5	3
B	14	12	5	7	19	10
C	37	31	14	19	51	27
E	41	34	14	19	55	29
G	3	3	13	18	16	8
J	0	0	2	3	2	1
N	3	3	0	0	3	2
O	9	8	12	17	21	11
P	1	1	4	6	5	3
R	9	8	5	7	14	7
Total	119	100	72	100	191	100

Quadro 13- Distribuição de erros por classe, no Ensino Médio

Neste caso, vê-se que os erros mais freqüentes são os dos tipos E, C, O e B. Assim, há três categorias de erros que se destacam, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio: as classes C, E e O, descritas a seguir. É importante mencionar que o erro do tipo C é o que envolve operações com conjuntos numéricos – inteiros, racionais, reais. Seria de esperar que, pelo menos os inteiros e racionais estivessem suficientemente compreendidos pelos alunos de 7ª e 8ª séries e, mais ainda, do Ensino Médio. No entanto, 17% do total dos erros dos estudantes de Ensino Fundamental e 27% dos do Ensino Médio indicaram problemas em relação às operações com números.

O erro do tipo E já é mais ligado ao conteúdo investigado, pois aponta as dificuldades com as propriedades da potenciação ou radiciação. Esse erro representa 13% do total, no Ensino Fundamental, e 29% do total, no Ensino Médio. Já o erro do tipo O engloba aquelas resoluções não identificáveis, que, provavelmente, mostram o completo desconhecimento do assunto por parte do aluno, a ponto de nem conseguir produzir uma resposta com algum significado. Esse tipo de erro representa 18% do total, no Ensino Fundamental, e 11%, no Ensino Médio.

A análise quantitativa já chama a atenção para o fato de que as classes de erros mais freqüentes nos dois níveis de ensino tiveram uma percentagem mais elevada no Ensino Médio, quando seria de esperar que os alunos tivessem superado as dificuldades no Ensino Fundamental, já que foram aprovados para o nível seguinte.

Além disso, se analisarmos os tipos de erros que não se verificaram no Ensino Médio, ou seja, os erros das classes D, F, H, I, L, M e Q, pode-se supor que as dificuldades correspondentes não tenham se apresentado, necessariamente, na resolução das equações exponenciais indicadas, como, por exemplo, os erros relacionados com operações com radicais. Assim, não se pode afirmar que o aluno já não comete aqueles erros, apenas que ele não teve oportunidade de mostrar seu conhecimento. Não se pode garantir, como diz Esteban (2002), "[...] que *conhecimentos* estavam presentes nas *respostas erradas* e que *desconhecimentos* nos indicavam as *respostas certas*. (p. 145, grifos do autor).

5.3 ANÁLISE QUALITATIVA DAS SOLUÇÕES

Para discutir qualitativamente os dados da pesquisa, trago, neste item, algumas definições e propriedades da potenciação e da radiciação, para, posteriormente, analisar os erros cometidos pelos alunos, referindo-me ao conteúdo matemático envolvido.

No estudo das potências, encontramos a seguinte definição em Hefez (2005):

> Seja *a* um elemento de um conjunto A munido de duas operações sujeitas às leis básicas da aritmética. Vamos definir as potências a^n com $n \in N$ por recorrência. Ponhamos $a^1=a$ e $a^0 = 1$, se $a \neq 0$. Supondo a^n definido, defina $a^{n+1} = a^n . a$ (p. 15).

Apresentando um desenvolvimento formal do assunto, pode-se iniciar pela definição de potência $a^{n:}$ Sejam $a \in \Re_+^*$ e $n \in N$. A *potência* a^n é definida como o produto de fatores iguais ao número a, ou seja, $a^n = a.a.a...a$ (n fatores). O número a é chamado de base e n expoente da potência $a^{n.}$

Complementando a definição, costuma-se mencionar as propriedades, demonstradas por indução: Sejam $m, n \in N^*$, $a, b \in \Re_+^*$

P1: $a^m . a^n = a^{m+n}$

P2: $(a^m)^n = a^{m.n}$

P3: $(a.b)^n = a^n . b^n$

P4: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, se m>n

P5: $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

A extensão da definição de potência para expoente inteiro é feita por meio de uma definição por recorrência, que pode ser apresentada da seguinte forma: Sejam $a \in \Re_+^*$ e $n \in N^*$. Definimos: $\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a.a^{n-1} \\ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \end{cases}$

Para definir potência com expoente fracionário, pode-se introduzir, primeiramente, a definição de raiz n-ésima de um real positivo: Sejam a>0 e $n \in N^*$. Chama-se *raiz n-ésima de a*, o número real positivo b tal que $b^n = a$. Dessa forma, é apresentada a notação $b = \sqrt[n]{a}$.

Partindo dessa definição e tomando a, $b \in \Re_+^*$, $m,n \in N^*$, temos as seguintes propriedades:

P1: $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$
P2: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
P3: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$
P4: $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, se b≠0
P5: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[p.n]{a^{p.n}}$

Finalmente, pode-se apresentar a definição de potência com expoente fracionário: Dado o número real positivo a e o número racional $\dfrac{m}{n}$, $m,n \in Z$, n>0, então definimos $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Muitos livros de Ensino Fundamental e Médio, como Dante (2004, 2005), apresentam a definição de potência com expoente natural, inteiro ou racional, da mesma forma que já foi citado acima, acrescido, ainda, de exercícios sobre "operações com radicais", semelhantes aos que foram propostos aos alunos desta pesquisa. Assim, em livros de Educação Básica, as definições e propriedades são apresentadas com comentários, com exemplos, com exercícios de fixação e de aplicação. Porém, pelos dados coletados nesta investigação, os alunos têm dificuldade em compreender as definições e aplicar as propriedades, conforme se pode ver nos casos listados a seguir, em que apresento, para cada questão do teste, resoluções que exemplificam quase todas as categorias, de A a Q, com exceção daquelas que tiveram apenas uma ou duas ocorrências e que não são, portanto, relevantes para a análise.

Esses exemplos são dispostos em quadros, em que são indicados o tipo de erro, o número de ocorrências em todas as turmas de 7ª e/ou 8ª séries, considerando o total dos 1030 erros detectados e o exemplo, com identificação de um aluno que tenha apresentado essa solução. Primeiramente são listadas as questões aplicadas à sétima série, sendo que duas delas são comuns à sétima e oitava séries. Foram escolhidos exemplos de cada uma das categorias criadas para os erros do Ensino Fundamental, com exceção daquelas que tiveram apenas uma ou duas ocorrências, bem como da classe Q, que não configura erro propriamente dito, como já foi indicado.

QUESTÃO 1: $2^3.2^2$ =

Tipo de erro: Multiplica a base pelo expoente.	**Total:** 42 erros	**Classe**: B	**Exemplo:** 7AP9: 6. 4 = 24

QUESTÃO 2: $\left(3^2\right)^3$ =

Tipo de erro: Efetua as operações com os números, na ordem em que aparecem.	**Total:** 42 erros	**Classe**: G	**Exemplo:** 7BM9: 3. 2 = 6. 3 = 18

QUESTÃO 3: $\left(-2^2\right)^3$ =

Tipo de erro: Considera que $(-a)^2 = -a^2$	**Total:** 23 erros	**Classe**: E	**Exemplo:** 7AM9: - 64

QUESTÃO 4: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 =$

Tipo de erro:	Total:	Classe:	Exemplo:
Cria uma espécie de propriedade associativa da potenciação, ou uma distributiva da potenciação em relação à adição.	23 erros	H	7BP24: $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{4}.\frac{1}{4}.\frac{1}{4}=\frac{3}{64}$

QUESTÃO 5: $(2.4)^2 =$

Distribui a multiplicação em relação à multiplicação	**Total:** 5 erros	**Classe:** D	**Exemplo:** 7AP21: (2. 4). (2. 4) = 4 + 8 + 8 + 16 = 4 + 16 + 16

QUESTÃO 6: $(3^2.2)^3 =$

(questão comum à sétima e oitava séries)

Tipo de erro:	Total:	Classe:	Exemplo:
Multiplica (ou divide) as bases e eleva à soma dos expoentes.	27erros	A	7AP24: 6^3. 6^3. 6^3 = $(6^9)^3$ = 216^9

QUESTÃO 7: $(25^2 : 5)^2 =$

Tipo de erro:	Total:	Classe:	Exemplo:
Troca operações (por exemplo, potenciação pela multiplicação, radiciação pela potenciação, multiplicação ou divisão pela adição, divisão pelo produto...).	38 erros	D	7AP2: $(625.\ 5)^2$

QUESTÃO 8: $\left(9^3 : 3^3\right)^{-1}$ =

(questão comum à sétima e oitava séries)

Tipos de erro:	Total:	Classe:	Exemplo:
Desconsidera o expoente ou não sabe o que é potenciação.	53 erros	E	7BP29: (9. 9. 9. 3. 3. 3)$^{-1}$ = (729: 27) = 27
Considera que elevar a –1 é multiplicar por –1.	42 erros	E	7BP23: (729: 27)$^{-1}$ =(27)$^{-1}$ = -27

Questões aplicadas à oitava série, além das duas já indicadas

QUESTÃO 3: $\sqrt{7} + 5\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$ =

Tipos de erro:	Total:	Classe:	Exemplo:
Soma os coeficientes, mas não considera o coeficiente 1.	14 erros	F	7AP31: $7\sqrt{7}$
Eleva o radical ao quadrado ou ao cubo	34 erros	H	7AP39: $\left(\sqrt{7}\right)^2 + \left(5\sqrt{7}\right)^2 + \left(2\sqrt{7}\right)^2 = 7 + 5.7 + 2.7 = 7 + 30 + 14 = 51$

QUESTÃO 4: $2\sqrt{3}.\sqrt{3}$ =

Tipos de erro:	Total:	Classe:	Exemplo:
Divide os coeficientes e coloca o radical em evidência	22 erros	F	8BP42: $2\sqrt{3}\,.1\sqrt{3} = 2\sqrt{3} = 2.3 = 6$
Calcula as raízes quadradas (ou multiplica os índices dos radicais e calcula as raízes), mas permanece com o radical.	30 erros	J	8AP35: $2\sqrt{9} = 2\sqrt{3}$

QUESTÃO 5: $3\sqrt{5} : \sqrt{5} =$

Tipo de erro:	Total:	Classe:	Exemplo:
Erro não identificado	187 erros	O	8AM12: $1\sqrt{5}$

QUESTÃO 6: $\sqrt{81} : \sqrt{9} =$

Tipo de erro:	Total:	Classe:	Exemplo:
Erra operações com inteiros (adição, multiplicação, divisão...).	148 erros	C	8BP23: 9: 3 = 2

QUESTÃO 7: $\sqrt{\sqrt{16}} =$

Tipo de erro:	Total:	Classe:	Exemplo:
Eleva o radical ao quadrado ou ao cubo	34 erros	H	8AP23: $\left(\sqrt{\sqrt{16}}\right)^2 = \left(\sqrt{16}\right)^2 = 16$

QUESTÃO 8: $\sqrt[3]{\sqrt{a^2}} =$

Tipo de erro:	Total:	Classe:	Exemplo:
Multiplica os índices dos radicais ou eleva um índice ao outro ou soma índices e considera que a raiz quadrada tem índice 1 ou diminui um índice do outro.	7 erros	J	8AM2: $\sqrt[6]{a}$

Sobre as questões aplicadas às turmas do Ensino Médio, optei por analisar apenas a segunda e a terceira questões, que apresentavam os mesmos conteúdos já investigados em relação aos alunos do Ensino Fundamental, pois a primeira e a quarta abordavam, diretamente, a resolução de uma equação exponencial.

Para o Ensino Médio, os conteúdos relativos às funções e equações exponenciais, partem da definição de função exponencial: dado $a \in \Re$, a > 0 e a ≠ 1, denomina-se função exponencial de base *a* uma função f de $\Re$ em $\Re$ tal que $f(x) = a^x$.

Para as questões de Ensino Médio, os erros já foram classificados diretamente nas 17 categorias agrupadas anteriormente, inclusive a que se refere às dificuldades na resolução da própria equação exponencial. Dessa forma, para cada aluno, há mais de um tipo de erro detectado, o que me levou a não computar, nos novos quadros, o número de erros de cada tipo.

Apresento, a seguir, para as questões 2 e 3 do teste do Ensino Médio, exemplos de resoluções que representam as classes com maior número de ocorrências. Esses exemplos são dispostos em quadros, em que são indicados o tipo de erro e o exemplo, com identificação de um aluno que tenha apresentado essa solução.

QUESTÃO 2: $2^x = \sqrt{8}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[6]{2}$

Tipo de erro:	**Exemplo:**
Desconsidera o expoente ou não sabe o que é potenciação, radiciação ou suas propriedades.	1PA01: $2^x = (2^3)^{2=6}.\ 2^4.\ 2^6$ $2^x = 2^{16}$ $x = 16$

Nesta resolução, o aluno considera que $\sqrt[n]{a^m} = a^{m.n}$, ou seja, confunde as operações de potenciação e radiciação; esse erro foi inserido na classe E, que apresenta o maior número de ocorrências entre esses alunos de Ensino Médio. Vê-se que a resolução da equação exponencial é compreendida, ou seja, ao encontrar potências de 2 nos dois membros da equação, o estudante sabe que a solução consiste em igualar os expoentes.

Hoch e Dreyfus (2004) referem-se ao “sentido da estrutura”, mencionando uma habilidade de reconhecer uma expressão ou sentença algébrica como uma estrutura previamente encontrada. Os alunos desta pesquisa parecem ter, portanto, essa habilidade, porém seu problema está localizado nas dificuldades com as propriedades da potenciação e radiciação.

Tipo de erro:	Exemplo:
Erra operações com racionais ou reais.	1PB28: $2^x = 8^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$ $2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$ $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ $\frac{x = 18 + 3 + 2}{12}$

Este erro foi inserido na classe C, a segunda em termos de ocorrências, nas turmas de Ensino Médio. Neste caso, o aluno sabe expressar $\sqrt[n]{a^m}$ como $a^{m/n}$, sabe também que deve somar os expoentes em um produto de potências de mesma base; seu problema é relacionado com a adição de frações, visto que não conseguiu terminar o exercício por não saber encontrar o valor de x.

Tipo de erro:	Exemplo:
Multiplica os expoentes das potências	1PB03: $2^x = 8^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$ $2^x = (2^3)^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$ $2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$ $x = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$

Neste caso, o aluno conhece as estratégias para resolução de equações exponenciais, no entanto desconhece a propriedade do produto de potências de mesma base, pois multiplica os expoentes, erro que foi inserido na classe B.

QUESTÃO 3: $2.3^{x-2} = 162$

Tipo de erro:	Exemplo:
Desconsidera o expoente ou desconhece a definição de potenciação ou radiciação ou suas propriedades.	1LA12: $6^{x-2} = 3^5$ $3^{x-4} = 3^5$ $x = 9 + 4$ $x = 9$

Neste exemplo, o aluno desconhece propriedades da potenciação, pois multiplica o coeficiente pela base da potência; quando nota que não obtém a mesma base encontrada no segundo membro, modifica a solução, multiplicando o coeficiente pelo subtraendo do expoente. Além disso, confunde-se na escrita, ao igualar os expoentes. Novamente, é um erro classificado como do tipo E.

Tipo de erro: Não reconhece os padrões de resolução de uma equação exponencial	**Exemplo:** 1PA18: $2.a.-\frac{1}{9}=162=0$ $\frac{18.9a-1-1458}{9}$ $117a+1957$

Este é um exemplo típico de erro classificado originalmente sob o número “49”, posteriormente inserido como uma nova classe, a R. Nota-se que o aluno deve ter idéia de alguma estratégia de substituição de variável, mas expressa de forma errada, inclusive inserindo “$-\frac{1}{9}$ “ como fator e igualando a equação a zero.

Tipo de erro: Multiplica o coeficiente pela base da potência e depois, a base pelo expoente Erra operações com inteiros	**Exemplo:** 11LD12: $6^{x-2}=162$ $6x-12=162$ $6x=162+12$ $6x=174$ $x=\frac{174}{6}=2$

Nesta resolução, o aluno inicia multiplicando o coeficiente pela base da potência e, a seguir, a base pelo expoente. Com isso, transforma a equação exponencial em uma equação de 1º grau e ainda erra a operação de divisão. Assim, seus erros se inserem nas classes A e C.

De uma maneira geral, os erros encontrados não fogem aos padrões já indicados em pesquisas relativas aos mesmos conteúdos. Abrate, Pochulu e Vargas (2006), ao analisar erros cometidos por alunos concluintes do Ensino Médio, consideram que uma das causas para dificuldades relacionadas com os números reais e suas propriedades é o fato de que os estudantes recorrem demasiadamente à memorização para usar definições e propriedades. Por exemplo, cometem erros ao escrever $a^{-(b/c)} = a^{c/b}$ ou $(a+b)^{-n} = (\frac{1}{a})^{n} + (\frac{1}{b})^{n}$, o que também foi detectado neste trabalho.

Mancera (1998), ao relatar erros cometidos por alunos, refere-se ao fato de que “não é possível tentar convencer os estudantes de que $a^0=1$ ou que 0!=1 com ´argumentos intuitivos`” (p. 60), mostrando que eles partem de, por exemplo, $2^4=2.2.2.2=16$ e chegam a $2^1=2$, concluindo que 2^0=nada. Assim, convencem-se de que $2^0=0$.

O mesmo autor ainda apresenta uma dificuldade que também surgiu para os alunos aqui investigados; ele mostra o exemplo $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{4} \mathrm{x} \frac{3}{2}$, que, nesta pesquisa, foi classificado como erro nº 1.

Marquis (2001), ao apontar erros comuns em Álgebra, propõe um tipo de exercício que consiste em apresentar aos alunos uma lista de afirmativas falsas, baseadas em erros que costuma encontrar em provas, e solicitar aos estudantes que corrijam as afirmativas, de forma a discuti-las posteriormente. Entre os exemplos, cita $3^2.\ 3^3 = 9^5$, erro que também foi encontrado nesta investigação e que foi classificado como erro nº 2.

Pochulu (2004), ao entrevistar professores sobre erros mais freqüentes, cita, entre outras respostas, que os estudantes:

Recuperam o esquema de multiplicação reiterada, com fatores negativos, quando o expoente da potência é um inteiro negativo;

Assumem que toda potência de expoente nulo dá como resultado zero, ou é igual à base da mesma;

Aplicam distributivas da radiciação com relação à soma ou ao resto.

Esses exemplos mostram que os erros cometidos pelos alunos desta investigação aparecem freqüentemente em outras pesquisas, o que justifica a importância de refletir sobre essas dificuldades.

5.4 ANÁLISE DAS RESPOSTAS DOS PROFESSORES

O questionário que solicitava aos professores a análise dos erros cometidos pelos alunos foi aplicado a quatro docentes das turmas envolvidas na pesquisa. Os dois professores da escola particular (P) têm Licenciatura Plena em Matemática, com Especialização na área de Ciências Exatas. Um deles tem 17 anos de magistério e o outro, 28 anos.

Dos dois docentes da escola pública (M), um deles tem Licenciatura Plena em Matemática e atua há quatro anos no Ensino Fundamental e Médio. O outro docente tem Licenciatura em Ciências do Primeiro Grau e 23 anos de magistério, atuando apenas no Ensino Fundamental e tendo cursado uma Especialização na área de Educação.

Nesta pesquisa, como já foi mencionado, foram apresentados exemplos de erros cometidos pelos alunos aos quatro docentes, que se manifestaram sobre eles. Abrate, Pochulu e Vargas (2006) realizaram um estudo sobre erros em Matemática cometidos por estudantes concluintes do Ensino Médio; iniciaram a pesquisa entrevistando professores da área, com muitos anos de prática docente, solicitando que detalhassem os erros mais freqüentes. A seguir, com essas informações, elaboraram um teste e aplicaram a uma amostra de alunos. Na presente investigação, portanto, os erros dos alunos também estão submetidos à opinião dos docentes, mas as fases da pesquisa são distintas.

Para a análise das respostas dadas pelos professores, são apresentadas, inicialmente, aquelas relacionadas diretamente aos erros dos estudantes, segundo a ordem das perguntas do questionário; após, são indicadas, para posteriores comentários, as respostas a questões específicas sobre avaliação e análise de erros.

As respostas dos professores P1, P2, P3 e P4 estão listadas logo em seguida à questão proposta e são feitos alguns comentários sobre suas falas.

Erro 1: o aluno multiplica a base pelo expoente.

Exemplos encontrados:

QUESTÃO: $2^3.2^2 =$	**QUESTÃO:** $\left(3^2.2\right)^3 =$
RESOLUÇÃO de um aluno de 7ª série: 6. 4 = 24	**RESOLUÇÃO** de um aluno de 8ª série: (6^2) . (6^2) . (6^2) = 218

Entre os 1030 erros, 42 eram deste tipo, correspondente a uma percentagem de 4% do total. Esse tipo de erro costuma acontecer em suas aulas? Qual a sua opinião sobre a causa deste erro?

P1 – Sim. O aluno não assimilou a aplicação das propriedades, então automaticamente resolve como se fosse apenas a potência e multiplicação. A causa é sem dúvida é a atenção, pois saberá resolver este cálculo.

P2 – Acontecem poucos casos assim, mas levando-se em conta, que os alunos estão na 7ª e 8ª série, não deveriam acontecer. Falta de estudo, fixação, despreparo.

P3 – Sim. Os alunos tem uma produção muito maior com a multiplicação, por isso multiplicam e pouco realizam a potência, por isso cometem erros desse tipo.

P4 – Sim. É comum o aluno multiplicar a base pela pelo expoente mostrando a falta de compreensão da operação potenciação.

Quando P2 fala em falta de estudo, de fixação e despreparo dos alunos, lembro das palavras de Alves (1980, p. 46), sobre dificuldades de aprendizagem: ”[...] a economia pragmática e libidinal do corpo só retém os conceitos que funcionam como extensão de si mesmo ou que tenham uma função lúdica: eficácia e prazer.” E ainda enfatiza que, nessas dificuldades, “O que é imediatamente experimentado não precisa ser ensinado nem repetido para ser memorizado.“

Erro 2: o aluno multiplica as bases e eleva à soma dos expoentes.

Exemplos encontrados:

QUESTÃO: $2^3.2^2 =$	**QUESTÃO:** $(3^2)^3 =$
RESOLUÇÃO de um aluno de 7ª série: 4.4.4.4.4	**RESOLUÇÃO** de um aluno de 7ª série: $(3^2).(3^2).(3^2) = 27^6$

Entre os 1030 erros, 27 eram deste tipo, correspondente a uma percentagem de 3% do total. Esse tipo de erro costuma acontecer em suas aulas? Na sua opinião, o que leva o aluno a cometê-lo?

P1 – Sim, o conteúdo Propriedades da Potenciação não é entendido e nem aplicado. O aluno resolve como se fossem operações distintas.

P2 – Casos raros. Típicos de falta de atenção e de conhecimento. Repito que a fixação de conteúdos é básica.

P3 – Sim. A fraca noção sobre potência.

P4 – Não.

P2 repete que “a fixação de conteúdos é básica”. Zunino (1995) aponta esse tipo de visão, de professores que compartilham concepções de ensino e aprendizagem e acreditam que “ensinar consiste em explicar, aprender consiste em repetir (ou exercitar) o ensinado até produzi-lo fielmente.” (p. 11). O autor ainda interroga: “Como pode ser possível que as mesmas crianças que são capazes de aprender muitas coisas a partir de sua experiência familiar e social vejam-se reduzidas, ao entrarem na escola, ao papel de simples repetidoras?” (Ibid., p. 11).

Erro 3: o aluno erra operações com inteiros (adição, multiplicação, divisão...).

Exemplos encontrados:

QUESTÃO: $2^3.2^2 =$	**QUESTÃO:** $(3^2.2)^3 =$
RESOLUÇÃO de um aluno de 7ª série: 16.4 = 64	**RESOLUÇÃO** de um aluno de 8ª série: $(18)^3$ = 18. 18. 18 = 324

Entre os 1030 erros, 148 eram deste tipo, correspondente a uma percentagem de 15% do total. Esse tipo de erro costuma acontecer em suas aulas? Na sua opinião, o que leva o aluno a cometê-lo?

P1 – (não respondeu)

P2 – É grave em 7ª e 8ª série acontecer este tipo de erro. O aluno simplesmente desconhece o conteúdo.

P3 – Sim. Falta de atenção e de concentração.

P4 – Sim. Acredito que o que leva o aluno a cometer esse erro é falta de atenção.

Erro 4: o aluno efetua corretamente a operação de potenciação, mas não calcula o resultado final.

Exemplos encontrados:

QUESTÃO: $(3^2. 2)^3 =$	**QUESTÃO:** $(3^2.2)^3 =$
RESOLUÇÃO de um aluno de 7ª série: $(9. 2)^3 = 18^3$	**RESOLUÇÃO** de um aluno de 8ª série: $(9. 2)^3$ = 729. 8 =

Entre os 1030 erros, 105 eram deste tipo, correspondente a uma percentagem de 10% do total. Esse tipo de erro costuma acontecer em suas aulas? Na sua opinião, o que leva o aluno a cometê-lo?

P1 – Falta de atenção, não se "dá conta" que é necessário resolver a potência final.

P2 – A pressa em resolver o que é proposto também é condicionada ao erro.

P3 – Sim. Falta de atenção, pois prevalece o conceito de multiplicação.

P4 – Sim. O erro acontece pela falta de compreensão do enunciado do exercício.

P4 se refere à "falta de compreensão do enunciado do exercício". Zunino (1995) ressalta que, ao propormos problemas aos estudantes e ao avaliarmos sua resolução, "devemos levar em conta qual é o grau de complexidade das noções e relações que estão implicadas no enunciado, assim devemos favorecer a discussão entre as crianças sobre tais noções." (p. 116).

O mesmo autor pode auxiliar a contrapor a resposta de P1: "Falta de atenção, não se ´dá conta` que é necessário resolver a potência final." Zunino (1995) esclarece:

> Parece evidente que a exercitação contínua em contas descontextualizadas não é o meio mais adequado para garantir que as crianças possam julgar a correção dos resultados que obtêm, assim como repetir de memória afirmações referentes à reversibilidade das operações ou "comprovar" mecanicamente as contas sem saber em que se está aplicando essa propriedade, não garantirá sua utilização operacional naquelas situações onde forem requeridas. (p. 116)

Erro 6: o aluno efetua as operações com os números, na ordem em que aparecem.

Exemplos encontrados:

QUESTÃO: $(3^2)^3 =$	**QUESTÃO:** $2\sqrt{3}.\sqrt{3} =$
RESOLUÇÃO de um aluno de 7ª série: 3. 2 = 6. 3 = 18	**RESOLUÇÃO** de um aluno de 8ª série: 2. 3. 3 = 6. 3 = 18

Entre os 1003 erros, 42 eram deste tipo, correspondente a uma percentagem de 4% do total. Esse tipo de erro costuma acontecer em suas aulas? Na sua opinião, o que leva o aluno a cometê-lo?

P1 – (não respondeu)

P2 – Ele sequer se preocupou em pensar ou entender a questão proposta.

P3 – Sim. O aluno não entendeu bem o conceito de potência e raiz quadrada, então multiplica pois está mais acostumado.

P4 – Não.

P3 considera que “O aluno não entendeu bem o conceito de potência e raiz quadrada”. Mas é o caso de perguntar desde quando esse aluno “tem” o conceito, pois, como diz Alves (1980)

> [...] é necessário que, com freqüência, façamos um inventário da bagagem conceptual que carregamos. [...] E eu descubro que há muitos conceitos que estão aí e que ou não significam nada, realmente, ou se desgastaram, pelo uso. E quando o uso os desgastou, é necessário que se lhes imponha uma quarentena de silêncio para que o seu sentido seja recuperado.” (p.47)

Erro 9: o aluno troca operações (por exemplo, potenciação pela multiplicação, radiciação pela potenciação, multiplicação ou divisão pela adição, divisão pelo produto...)

Exemplos encontrados:

QUESTÃO: $2^3.2^2 =$	**QUESTÃO:** $2\sqrt{3}.\sqrt{3} =$
RESOLUÇÃO de um aluno de 7ª série: 8 + 4 = 12	**RESOLUÇÃO** de um aluno de 8ª série: $3\sqrt{3}$

Entre os 1030 erros, 38 eram deste tipo, correspondente a uma percentagem de 4% do total. Esse tipo de erro costuma acontecer em suas aulas? Na sua opinião, o que leva o aluno a cometê-lo?

P1 – Sim, atenção.

P2 – A falta de base dos alunos é incrível. Faltou conhecimento, atenção, fixação.

P3 – Sim. Isso é pura falta de atenção.

P4 – Não.

P2 faz uma crítica forte, ao dizer que “A falta de base dos alunos é incrível.” Pode-se questionar o que a escola e os professores estão considerando como sendo a base necessária para aqueles estudantes. Essa fala nos remete às palavras de Ponte (2003):

> Eles precisam saber identificar, compreender e saber usar os números, as operações com os números e as relações numéricas. Os alunos precisam saber interpretar criticamente o modo como os números são usados na vida de todos os dias e a escola deve procurar desenvolver esse tipo de competência. (p. 70)

Quando o mesmo professor P2 afirma que “Faltou conhecimento, atenção, fixação”, isso nos faz refletir sobre suas concepções, pois, para ele, parece que a Matemática é absoluta, não admite falhas e os alunos somente devem fixar os ensinamentos, sem desenvolver competências que lhes permitam usá-los no cotidiano.

Erro 22: o aluno considera que elevar a –1 é multiplicar por –1.

Exemplos encontrados:

QUESTÃO: $(9^3 : 3^3)^{-1} =$	**QUESTÃO:** $(9^3 : 3^3)^{-1} =$
RESOLUÇÃO de um aluno de 7ª série: $(-9^3 : -3^3)$	**RESOLUÇÃO** de um aluno de 8ª série: $27 : 9 = -3$

Entre os 1030 erros, 42 eram deste tipo, correspondente a uma percentagem de 4% do total. Esse tipo de erro costuma acontecer em suas aulas? Na sua opinião, o que leva o aluno a cometê-lo?

P1 – (não respondeu)

P2 – Simplesmente ele desconhece o conteúdo, ou por falta de estudo, ou por falta de interesse.

P3 – Sim. É que o aluno domina melhor a subtração e não entendeu bem a potência (-1).

P4 – Não.

P2 relaciona a dificuldade dos estudantes com falta de interesse. Falsetta (2002 p.19) diz: ”Gostar e ter curiosidade são impulsos naturais de toda a criança. Não se deve, portanto, tomá-los como objetivos em classe.”

P3, por sua vez, diz: “É que o aluno domina melhor a subtração e não entendeu bem a potência”. As palavras de Zunino (1995) são adequadas para elucidar o fato:

> [...] a incompreensão dos procedimentos, em geral, não está relacionada com dificuldades para compreender as operações em si mesmas, já que na maioria dos casos as crianças sabem quando se deve somar, subtrair, multiplicar ou dividir. [...] provém sempre da desvinculação entre os procedimentos e a natureza posicional de nosso sistema de numeração.” (p. 70).

Erro 35: o aluno calcula as raízes quadradas (ou multiplica os índices dos radicais e calcula as raízes), mas permanece com o radical.

Erro 43: o aluno eleva o radical ao quadrado ou ao cubo

Exemplos encontrados:

QUESTÃO: $\sqrt{\sqrt{16}} =$	
RESOLUÇÃO de um aluno de 8ª série: $\sqrt[4]{4}$	

QUESTÃO: $\sqrt[3]{\sqrt{a^2}} =$	
RESOLUÇÃO de um aluno de 8ª série: $\left(\sqrt[3]{\sqrt{a^2}}\right)^3 = \left(\sqrt{a^2}\right) = a^2$	

Entre os 1030 erros, 30 eram semelhantes ao erro 35 e 34, ao erro 43, com percentagens de 3% cada um. Estes tipos de erro costumam acontecer em suas aulas? Na sua opinião, o que leva o aluno a cometê-los?

P1 – (não respondeu)

P2 – Analisando todos os erros cometidos, podemos notar o despreparo, falta de base em séries iniciais para entender, falta de conhecimento dos conteúdos (despreparo), falta de interesse e falta de fixação dos conteúdos.

P3 – Sim, acontece até erros piores, pois os alunos têm muita dificuldade de trabalhar com radicais.

P4 – Não.

P2 refere-se aos erros dizendo “podemos notar o despreparo, falta de base em séries iniciais para entender, falta de conhecimento dos conteúdos (despreparo) falta de interesse e falta de fixação dos conteúdos.” Falsetta (2002, p.19) alerta para o fato de que “antes de começar a mudar tudo, vai um alerta: só fazer a turma gostar da aula não significa que todos esteja, aprendendo.”

As questões abertas, referentes ao próprio processo de analisar os erros, foram as seguintes:

Questão 1: Sabemos que a análise da produção escrita dos alunos é uma das maneiras de entender as razões pelas quais os estudantes apresentam dificuldades em determinados conteúdos matemáticos. Em geral, avaliamos as provas, pontuando as questões corretas, às vezes aquelas parcialmente corretas, mas, ao encontrar erros, quando muito o indicamos, assinalando em vermelho e não levando em conta as informações que os erros também podem trazer. Qual a sua opinião sobre a idéia acima?

P1 – Na verdade é preciso avaliar todo o desenvolvimento do raciocínio e não apenas o resultado final.
P2 – Todo e qualquer erro nos resulta informações. Falta de leitura com interpretação do que lê, pouco conhecimento do conteúdo que errou, falta de fixação de atenção, de interesse. Devemos levar em conta que a falta de interesse, na maioria das vezes é porque o aluno nunca consegue aprender.
P3 – Acho que devemos avaliar o aluno como um todo, pois aprendemos muito quando acertamos, e quando erramos também aprendemos.
P4 – Concordo plenamente. Deveríamos apontar os erros e através deles levar o aluno a compreensão e a visão matemática, solucionando problemas existentes nos conteúdos.

Questão 2: Leia as afirmações abaixo:

A análise de erros não tem como finalidade a avaliação somativa, cujo objetivo é classificar os alunos e atribuir notas ou conceitos e também não deve ser confundida com avaliação, pois é um trabalho realizado com objetivos formativos, isto é, não tem a finalidade de aprovar ou reprovar o estudante. Essa avaliação formativa é feita para inventariar, apoiar, orientar o aluno na busca de soluções para os problemas detectados, permitindo ao professor regular o ritmo das atividades ou o tipo de estratégias. Na sua opinião, o que pode ser feito para auxiliar os alunos que apresentam erros como os citados acima?
P1 – Muita paciência, tempo para fixar e revisar os conteúdos em forma de trabalhos ou avaliações em duplas.
P2 – Devem ser incentivados a ler com interpretação, e como cada um é um ser diferente não pode ser avaliado num todo. O erro é conseqüência de vários fatores: psicológicos, falta de base, falta de fixação. O aluno deve ser levado a gostar de Matemática e ele só vai aprender a gostar quando entendê-la. Muitos exercícios, atividades diversas, podem fazê-lo entender melhor. Nesse conteúdo proposto de Potenciação, não há grandes dificuldades. Então, nós nos perguntamos sempre: Será que a falha do professor que não explicou bem ou o aluno que não quer

aprender. Por que ele não quer aprender? Está é a chave – ele não quer ou não conseguiu?
P3 – Trabalhar mais os conceitos de potência e radiciação, e fazer mais exercícios de fixação para fixar e memorizar os processos, pois as quatro operações levam vários anos para os alunos fixarem, então acho que falta fixar melhor os conceitos de potenciação e exercitar mais.
P4 – Revisar os conteúdos que apresentam problemas fazendo com que o aluno compreenda os conceitos e o porquê do cálculo. Na sociedade atual precisamos formar alunos mais autônomos e criativos, competentes para estudar e pesquisar por si mesmos abandonando a tradicional matemática decorada.

Ainda que os quatro respondentes tenham expressado suas opiniões em frases curtas, é possível fazer uma categorização dos tipos de respostas. Pode-se vislumbrar três visões sobre avaliação e sobre análise de erros, que indico por I, II e III. A visão I é do professor que coloca a responsabilidade dos erros no aluno e considera que ele erra por falta de base, de atenção, de estudo, de fixação, de concentração, de interesse. Esses professores parecem ter uma concepção absolutista da Matemática (CURY, 1996), pois consideram que seus alunos devem ter um conhecimento incontestável e que o erro só acontece pela falta de atenção por parte dos alunos e falha na revisão de conteúdo por parte dos professores. Quando os docentes se referem ao erro como falta de atenção, a visão construtivista segundo Kaiber e Andrade (2005, p. 6), "é negada, especialmente de acordo com as origens do erro: ´o aluno erra porque não presta atenção`."

Também parece ser tradicional a pedagogia desses mestres, pois acreditam que a aprendizagem se faz por fixação, por repetição de exercícios padronizados.

É comum professores encontrarem justificativas para o fracasso escolar de seus alunos ou de sua turma, quando não conseguem enxergar que são poucos os indivíduos que se encaixam em suas concepções de aprendizagem e que respondem as suas exigências. Parra e Saíz (1996, p. 59) comentam que "ao mesmo tempo que ensina um saber, o professor recomenda como usá-lo". A escola retrata sua incapacidade de lidar com as diferenças quando acredita que este seja um referencial único e verdadeiro.

Esteban (2002) ressalta:

> Professoras diferentes, com opções teóricas distintas e com modos particulares de conduzir a prática, avaliam de modo diferente o resultado dos alunos e alunas. O que algumas professoras entendem como positivo, como uma evolução, como parte produtiva de um processo, outras interpretam como excesso de erros, como ausência de conhecimentos, como problema da criança, como resultado de um processo de ensino / aprendizagem mal desenvolvido. (p.62).

Continuando a análise das concepções dos professores participantes da pesquisa, a visão II é a daquele docente que procura responder à pergunta da investigadora buscando alguma causa para o erro apresentado. Ainda que não demonstre aceitar a ocorrência dos erros e critique o aluno, de certa forma, apontando a falta de compreensão ou o desconhecimento do assunto, esse professor tenta encontrar uma explicação, na forma como se deu a aprendizagem. P3, por exemplo, considera que os alunos usam muito mais a multiplicação e por isso erram as potenciações; P1 refere-se às propriedades da potenciação, que não teriam sido compreendidas; P4 comenta a falta de compreensão do enunciado do exercício.

Os professores precisam de um suporte para entender o porquê do insucesso escolar em suas atividades. Esses fracassos podem estar associados aos sistemas de avaliação e à formação docente, como bem explica Esteban (2002, p.30): "o fracasso escolar é apenas uma das faces da desigualdade social."

A visão III só aparece quando o professor responde às questões abertas, quando se posiciona sobre avaliação e análise de erros. Nesses casos, surgem idéias de caráter mais falibilista (CURY, 1996), em que o docente parece aceitar o erro, como se vê nas respostas de P3 e P4 à questão 1. Ao serem questionados sobre o que fazer para auxiliar o aluno que apresenta erros, somente P4 sugere que se procure levar o estudante a compreender os conceitos, pois os outros colegas ainda insistem na idéia de que é necessário fazer mais exercícios de fixação.

De uma maneira geral, pode-se tecer alguns comentários sobre as posturas relativas à avaliação, subjacentes às respostas dadas. Os fracos resultados indicados em avaliações nacionais, como a do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), apontam a incapacidade da escola de alcançar seus objetivos. Porém, mesmo quando o aluno é repetente e continua estudando no próximo ano ou retorna para a escola depois de um tempo, as famílias e a sociedade acreditam no seu potencial, pois o mantém na instituição escolar. Assim, é preciso mudar as concepções de avaliação, permitindo que novas práticas sejam inseridas no ambiente escolar e a análise de erros é uma delas.

Segundo Esteban (2002),

> A transformação do sentido da prática pedagógica demanda um questionamento tanto das condições materiais do trabalho, de sua estrutura, objetivos e organização, quanto das concepções, valores e conhecimentos subjacentes ao processo ensino/ aprendizagem. (p. 54).

Na proposta de uma avaliação formativa, que auxilie o aluno, mostrando suas dificuldades e apoiando-o na busca de soluções, Esteban (2002) ainda acrescenta:

> Alcançar este propósito não é tarefa fácil. O trajeto é longo, sinuoso e muitas vezes obscuro. A complexidade do objeto de estudo exige o manejo de muitos fios e tem sido bastante difícil, para nós, fazê-lo com clareza e coerência, afrontando a dinâmica particular da prática e a flexibilidade dos dados recolhidos. Este trabalho é uma tentativa a mais de percorrer um novo caminho, o que imprime uma dinâmica em que o erro é inevitável. (p.13).

Na resposta a uma pergunta do questionário desta pesquisa, o professor P2 afirma: “Nesse conteúdo proposto de Potenciação, não há grandes dificuldades.” E acrescenta: “Então, nós nos perguntamos sempre: Será que a falha é do professor que não explicou bem ou o aluno que não quer aprender. Por que ele não quer aprender? Esta é a chave – ele não quer ou não conseguiu? “ Parece que sua indagação está relacionada com aquilo que o aluno pode fazer, por si, no processo de ensino e aprendizagem. Sabemos que não é fácil desenvolver a autonomia dos alunos. É necessário que se construa, degrau por degrau, por meio de indagação, da exploração do conteúdo, das suas dúvidas, de um ambiente propício para pensar, compreender e, por fim, construir. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p.26), para que ”o aluno possa, de fato, investigar, é necessário deixá-lo trabalhar de forma totalmente autônoma e, como tal, o professor deve ter somente um papel de regulador da atividade. “

Muitas vezes quando se está se construindo conceitos, não temos um ambiente favorável para que se desenvolvam essas habilidades citadas. Não existe *a priori* ambiente favorável à construção de conceitos e conhecimentos, esse ambiente deve ser construído com o grupo. Quando o ambiente passa a ser favorável no processo, a discussão de soluções para os problemas gerados pelo conteúdo que se está trabalhando pode gerar novos problemas. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003),

> O sucesso de uma investigação depende também, tal como de qualquer outra proposta de professor, do ambiente de aprendizagem que se cria na sala de aula. É fundamental que o aluno se sinta a vontade e lhe seja dado tempo para colocar questões, pensar, explorar as suas idéias e exprimi-las, tanto ao professor como aos seus colegas. O aluno deve sentir que suas idéias são valorizadas e que se as discuta com os colegas, não sendo necessária a validação constante por parte do professor. (p.28).

É necessário que, ao encontrar erros, os professores os analisem e construam caminhos para que os alunos cheguem às soluções corretas. Segundo Cury (2006, p.1) “A partir dos resultados da investigação, podemos elaborar estratégias de ensino e auxiliar os alunos a superarem suas dificuldades no conteúdo em questão e a construírem um saber matemático condizente com o nível de ensino em que se encontram.”

Quando o professor se apropria das soluções encontradas pelos alunos e faz a reflexão em cima dos caminhos que os levaram a chegar naquele ponto, ele está agindo de forma a não remediar, evitar, erradicar os erros, mas a desconstruir todo um processo de construção de conceitos inadequados e, a partir deles, construir novos conceitos.

6 CONCLUSÕES

Nesta pesquisa, tive como objetivos analisar e classificar os erros em exercícios sobre potenciação e radiciação, no Ensino Fundamental, e na resolução de equações exponenciais, no 1º ano do Ensino Médio. Estes dois objetivos foram alcançados com a ampla listagem de erros e as classes nas quais eles foram categorizados. Nos dois níveis de ensino, os erros mais freqüentes foram os das classes C - que envolve os erros em operações com conjuntos numéricos - e E, em que os estudantes desconsideram o expoente da potência ou não entendem a propriedade que envolve expoente negativo.

Outro objetivo era relacionar as dificuldades em potenciação e radiciação com aquelas encontradas nas resoluções de equações exponenciais. Era de se esperar que os alunos do Ensino Médio já tivessem superado dificuldades com as operações e propriedades dos conjuntos numéricos; no entanto, os erros mais freqüentes, das classes C e E, tiveram percentagem mais elevada nas respostas dos estudantes do Ensino Médio. Assim, vê-se que esses alunos, apesar de terem concluído o Ensino Fundamental, ainda levam essas dificuldades, especialmente as relacionadas com bases ou expoentes negativos. Este fato faz com que eles não consigam, muitas vezes, resolver equações exponenciais, não só por desconhecerem as estratégias de resolução, mas especialmente por não dominarem as operações e propriedades.

Em relação às opiniões dos professores sobre os erros cometidos pelos alunos, viu-se que ainda é freqüente a idéia de que a aprendizagem se faz por fixação, repetição e realização de exercícios padronizados. Mesmo procurando tentar encontrar explicações para as causas dos erros, somente um dos entrevistados sugeriu ser necessário levar os alunos a compreender os conceitos.

Ao finalizar esta dissertação, retomo o que abordei no projeto desta pesquisa, em que afirmei ter encontrado muitas vezes, durante minha prática educativa no Ensino Médio e Pós-Médio, erros em conteúdos de potenciação, radiciação e função exponencial. Grande foi o meu esforço para amenizar esses problemas, por meio da aplicação de exercícios interessantes, correções e abordagem dos conteúdos usando diversas metodologias, porém os erros continuaram no ano seguinte, quando lecionei para os mesmos alunos na segunda série, o que gerou a sensação de fracasso profissional.

Muitas vezes, os erros apresentados não estavam relacionados com o conteúdo que estava sendo trabalhado no momento, mas com dificuldades matemáticas em conteúdos que haviam aprendido há algum tempo e os problemas não tinham sido superados. Os erros mais comuns eram relativos às quatro operações, à potenciação, à resolução de expressões aritméticas, à Geometria, à Álgebra e aos gráficos.

Nesta pesquisa, quando analisei erros, procurei abordar a visão falibilista, pois acredito que a Matemática admite falhas na construção dos conhecimentos e que os alunos podem construir suas estratégias de resoluções através de acertos e erros, para que se convençam de que, em suas falsas generalizações (estratégias inventadas), eles passam por obstáculos ainda não superados, por conhecimentos ainda não totalmente construídos, como os conceitos e as propriedades, em que não houve uma consolidação do conhecimento, uma apropriação por parte do sujeito.

Não basta dizermos quais são os caminhos corretos e qual é o caminho que nossos educandos devem percorrer em suas estratégias para a superação de seus próprios erros. Mas é necessário que o aluno reconheça suas dificuldades, que os seus conhecimentos ainda são insuficientes, pois só assim ele perceberá que, se insistir nas estratégias erradas, continuará tendo dificuldades e não chegará a conhecer o que a comunidade escolar considera como saber básico.

Segundo Rico (1995), o aparecimento de erros nas produções dos alunos acontecem por várias causas, entre elas, as concepções inadequadas sobre os aspectos fundamentais da Matemática, resultados de utilização de procedimentos imperfeitos que, às vezes, não podemos reconhecer ou exemplos de métodos e estratégias inventadas, não formais mais originais, para solução de alguns problemas propostos.

Muitos professores de Matemática em formação também cometem erros, assim como os seus alunos. Isso pode estar refletindo obstáculos epistemológicos que os próprios matemáticos enfrentaram ao longo da história e partiram para a superação. Alguns desses erros tem as mesmas causas e são semelhantes aos dos alunos, portanto deve-se prestar mais atenção a uma reestruturação nos cursos de formação de professores, aos seus conhecimentos prévios, promovendo trabalhos que se valham da análise de erros.

Desde que entrei no curso de mestrado venho refletindo e avaliando a minha ação pedagógica, diante dos erros matemáticos que encontro durante a caminhada profissional, seja no ensino Fundamental e Médio. Algumas ações já se refletem nas minhas aulas, como, por exemplo, aproveitar os erros que apareceram na turma, sobre um determinado conteúdo, e discutir sobre eles, promovendo um debate cheio de novidades que empolgam os alunos; muitos deles encontram até um momento para desabafar, promovendo uma crítica sobre suas próprias produções. Outros estudantes contam que tinham entendido de uma maneira totalmente diferente e agora compreenderam que estavam resolvendo e pensando de uma maneira errada. Essas reflexões, por parte dos alunos, podem trazer à tona uma conscientização sobre seu conhecimento ao cometer um erro.

Em outros momentos, como nas avaliações, elaboro questões que aparecem com desenvolvimentos errados e certos, em que os alunos devem apontá-los e justificar o porquê de uma resolução não estar correta. Aparecem também, durantes esses trabalhos avaliativos, algumas estratégias de resoluções, sendo que algumas com falsas generalizações, nas quais o estudante escolhe qual prefere desenvolvê-la e justifica porquê.

Durante as correções de avaliações, costumo apontar os erros e devolvo a prova aos alunos, para que percebam suas dificuldades e recebam mais uma oportunidade de corrigir o que erraram, e, em seguida os estudantes a devolvem, para que o professor possa corrigi-la pela segunda vez. Esses apontamentos, muitas vezes, são feitos individualmente ou em duplas, para que o discente tenha a oportunidade de expressar verbalmente o que ele não conseguiu expressar na forma escrita, ou seja, o seu pensamento.

Em alguns momentos de correções das avaliações, transfiro essa tarefa para duplas de estudantes, com o objetivo de que discutam a forma de avaliar os seus colegas, desde os comentários, as correções de escrita, a atribuição de notas, os lembretes, os elogios, e principalmente os apontamentos dos seus erros. Em um segundo momento de correção, então, retomo essas observações, prevalecendo as correções dos colegas, nas quais só interfiro se a correção estiver equivocada e prejudicar o desempenho dos estudantes.

Esta pesquisa também mexeu com as minhas concepções como professora de Matemática: penso que no ensino dessa disciplina deve prevalecer uma aplicação prática dos conteúdos, para que tragam significados reais da Matemática do dia-a-dia dos alunos, bem como gerar situações problemas e desafios matemáticos para discussões em sala, pois as repetições de procedimentos nas resoluções de grandes listas de exercícios não levam à aprendizagem dos conteúdos, mas a uma exaustão até chegar ao domínio formal dos procedimentos. A repetição de procedimentos e memorização não leva à aprendizagem, pois ela só acontece quando os alunos começam a pensar matematicamente, compreendem o processo, o sentido das resoluções e apropriam-se desses conhecimentos. Aplicar os procedimentos matemáticos nas resoluções, aprender Matemática e pensar matematicamente são três dimensões diferentes.

Para concluir o trabalho, apresento algumas idéias que podem servir como sugestões para colegas que venham a repetir estudos sobre erros ou, mesmo, para aqueles que trabalham nesses níveis de ensino. Para tentar remediar os erros poder-se-ia promover encontros através de oficinas com os professores de Matemática especificamente envolvendo cada nível de ensino e diferentes séries, pois um mesmo erro pode assumir diferentes causas. Assim, alguns erros assumem um pensamento intuitivo que se generaliza equivocadamente, outros se explicam através dos métodos a que os alunos estão sujeitos e também à falta de conhecimentos teóricos.

Vejo, assim, que a análise de erros constitui um importante campo de estudo e investigação em Educação Matemática, sendo também referenciada como ponto de partida para inovações dentro do ensino de Matemática.

A Matemática é uma das Ciências que trabalha o raciocínio lógico, através da exploração de diversos caminhos nas resoluções de problemas. Pode-se cometer erros nessa caminhada, que também podem ser aproveitados para promover novas aprendizagens. Este olhar sobre a Matemática é único, pois, se compararmos com a área médica ou outras, como a Economia, por exemplo, as conclusões após um erro podem ser desastrosas. Na Matemática, pode-se visualizar os erros como fonte de motivação para os alunos, quando discutimos estratégias de resoluções, exploramos de forma criativa as atividades valiosas de planejamentos e resoluções de problemas.

Existem duas visões sobre a análise de erros em Educação Matemática, não rigidamente separadas. A primeira, que aponta para a remediação dos erros, parte da expectativa de se alcançar uma verdade absoluta, para evitar os erros. A segunda visão, em que os erros são aceitos como pontos de partida para explorações, apóia-se em uma concepção falibilista da Matemática, em que se admitem falhas e erros, mas por meio deles se pode construir o conhecimento.

O erro pode assumir, no ensino, o papel de um instrumento que possa identificar problemas, de acordo com o nível e as séries envolvidas. Quando os erros são analisados, podem ser superados, pois erro e acerto fazem parte do processo do ensino e aprendizagem. Por outro lado, a investigação que parte da análise dos erros permite compreender o processo cognitivos dos nossos alunos e assim auxiliá-los a construir novos conhecimentos. Esta é a idéia que ficou deste trabalho e espero ter contribuído para que novas pesquisas sejam feitas sob o mesmo enfoque, para que a análise de erros seja mais uma ferramenta para auxiliar professores e alunos em sua caminhada na busca de uma aprendizagem matemática mais adequada às necessidades da sociedade.

REFERÊNCIAS

ABRATE, R.; POCHULU, M.; VARGAS, J. **Errores y dificultades en matemática**: análisis de causas y sugerencias de trabajo. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María, 2006.

ALVES-MAZZOTTI, A.F. O método nas ciências sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A.F.; GEWANDSZNAJDER, F. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais**. São Paulo: Pioneira, 1998. p. 109-188.

ALVES, Rubem. **Conversas com quem gosta de ensinar**. 24. ed. São Paulo; Cortez; Autores Associados, 1991.

ANTUNES, Celso. **Como desenvolver as competências em sala de aula.** Vozes. Petrópolis, RJ, 2004.

BATISTA, Cecília.. Fracasso Escolar: Análise de Erros em Operações Matemáticas. **Zetetiké**, v.3, p. 61-72, nov. 1995.

BUENO, Silveira. **Minidicionário Silveira Bueno**. Minidicionário da Língua Portuguesa. São Paulo: Lisa, 1992.

COSTA, Dóris Anita Freire. A análise do Erro como caminho de Descoberta do Pensamento da Criança**. AMAE Educando**. v. 21, n.199, p. 14-20, out. 1988.

CURY, H. N. Retrospectiva história e perspectivas atuais da análise de erros em educação matemática. **Zetetiké**, v.3, n.4, p. 39-50, nov. 1995.

______. Concepções sobre matemática e práticas avaliativas: as possíveis relações. **Estudos em Avaliação Educacional**, n. 14, p. 65-82, jul./dez. 1996.

______. Análise de erros em Cálculo diferencial e integral: resultados de investigação em cursos de engenharia. In: Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, 31., 2003, São José do Rio Preto. **Anais...** São José do Rio Preto: UNESP, 2003. CD-ROM

______. Análise de erros em educação matemática. **Veritati**, Salvador, n. 4, p. 95-107, jun. 2004.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações.** São Paulo: Ática, 2004.

______. **Tudo é matemática:** ensino fundamental. São Paulo. Ática, 2005.

DEMO, Pedro. **A dinâmica não Linear do Conhecimento:** Complexidade e Aprendizagem. São Paulo. Atlas. 2002.

ENRICONE, Délcia (Org.). **Ser professor**. Porto Alegre: Edipucrs, 2001.

ESTEBAN, Maria Teresa. **O que sabe quem erra?** Reflexões sobre a avaliação e o fracasso escolar. 3. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

ESTEVES, O. P. **Testes, medidas e avaliação**. Rio de Janeiro: Arte & Indústria Editora, 1983.

FALZETTA, R. A matemática pulsa no dia-a-dia. **Nova Escola**, v. 17, n. 150, p. 18-23, março 2002.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S**. Investigações em educação matemática**; percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

FONSECA**,** Maria da Conceição F. R. O Caráter evocativo da matemática e suas possibilidades educativas. **Zetetiké**, v.7, n.11, p.60-62, jan.1999.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GIOVANNI, R. J.; BONJORNO, R. J.; GIOVANNI JR. R.J. **Matemática Fundamental.** Ensino Médio. São Paulo: FTD, 1994.

______. **Matemática Fundamental Uma Nova Abordagem**. Ensino Médio. São Paulo: FTD, 2002.

GIOVANNI, R. J.;CASTRUCCI, B.; GIOVANNI JR. R.J. **A Conquista da Matemática.** São Paulo: FTD, 2002.

HEFEZ, Abramo. **Elementos de Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

KAIBER, C. T.; ANDRADE, L. S. Reflexões sobre o papel do erro no processo de ensino e aprendizagem da matemática. In; CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 3., 2005, Canoas. **Anais...** Canoas: ULBRA, 2005. 1 CD-ROM.

HOCH, M.; DREYFUS, T. Structure sense in high school algebra: the effect of brackets. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., 2004, Bergen, Norway. **Proceedings…** Bergen: PME, 2004. CD-ROM.

KUHN, Thomas. S. Lógica da Descoberta ou Psicologia da Pesquisa? In: LAKATOS, I.; MUSGRAVE, A. (Org.) **A Crítica e o Desenvolvimento do Conhecimento**. São Paulo: Cultrix, 1979.

LUCKESI, C. C. O que é mesmo o ato de avaliar a aprendizagem? **Pátio**, v.4, n.12, p. 7-12, 2000.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em educação**; abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACEDO, Lino de. **Para uma visão construtivista do erro no contexto escolar**. In: São Paulo. Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas

Pedagógicas. *Coletânea de Textos de Psicologia*: psicologia da educação. São Paulo, 1990. v.1. p. 346-362.

MANCERA MARTINEZ, Eduardo. **Errar es um placer**. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1998.

MARQUIS, June. Erros comuns em álgebra. In; COXFORD, A.; SHULTE, A. (Org.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 234-236.

MORAES, Roque. **Participando de Conversas.** 2004. Texto digitado.

______. **Da noite ao dia:** tomada de consciência de pressupostos assumidos dentro das pesquisas sociais. 2005. Texto digitado.

MORIN, Edgar. **Ciência com Consciência**. 6. ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2002.

PARRA, C.; SAÍZ, I. **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

POCHULU, Marcel D. Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. Revista Ibero-Americana de Educación, v. 35, n.4, 2004. Disponível em: <http://www.campus-oei.org/revista/deloslectores/849Pochulu.pdf > Acesso em 10 jan. 2005.

PONTE, J.P., BROCARDO, J., OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PIRES, Letícia. Na raiz do problema. **Amanhã**, Porto Alegre, v. 18, n. 192, p. 60-67, 2003.

RICO, Luis. Errores en la aprendizaje de las matemáticas. In: KILPATRICK, J.; GOMES, P. RICO, L. **Educación Matemática**. Colombia: Grupo Editorial Iberoamerica, 1995. p. 69-108.

ZUNINO, Delia L. de. **A matemática na escola**: aqui e agora. 2. ed. Porto Alegre; Artes Médicas, 1995.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário para professores

Caro professor,

Gostaria de contar com a sua colaboração para responder as perguntas abaixo, sobre os conteúdos Potenciação e Radiciação, para a pesquisa que estou desenvolvendo no Mestrado em Educação em Ciências e Matemática da PUCRS, com o objetivo de analisar dificuldades dos alunos em Matemática. Utilize o espaço em branco abaixo de cada pergunta para expressar suas idéias. Entregue todo o material, não sendo necessário identificar-se.

Obrigada!
Rejane Zeferino Feltes

Sabemos que a análise da produção escrita dos alunos é uma das maneiras de entender as razões pelas quais os estudantes apresentam dificuldades em determinados conteúdos matemáticos. Em geral, avaliamos as provas, pontuando as questões corretas, às vezes aquelas parcialmente corretas, mas, ao encontrar erros, quando muito o indicamos, assinalando em vermelho e não levando em conta as informações que os erros também podem trazer.

1. Qual a sua opinião sobre a idéia acima?

2. Os erros de 256 alunos de 7ª e de 8ª série envolvendo uma escola particular e outra pública, em um total de 1030 erros em 16 questões, foram classificados. Gostaria que você analisasse as classes de erros apresentadas nos quadros a seguir e respondesse às questões correspondentes:

Erro 1: o aluno multiplica a base pelo expoente.

Exemplos encontrados:

QUESTÃO: $2^3.2^2 =$	**QUESTÃO:** $(3^2.2)^3 =$
RESOLUÇÃO de um aluno de 7ª série: 6. 4 = 24	**RESOLUÇÃO** de um aluno de 8ª série: (6^2) . (6^2) . (6^2) = 218

Entre os 1030 erros, 42 eram deste tipo, correspondente a uma percentagem de 4% do total. Esse tipo de erro costuma acontecer em suas aulas? Qual a sua opinião sobre a causa deste erro?

Erro 2: o aluno multiplica as bases e eleva à soma dos expoentes.

Exemplos encontrados:

QUESTÃO: $2^3.2^2 =$	**QUESTÃO:** $(3^2)^3 =$
RESOLUÇÃO de um aluno de 7ª série: 4.4.4.4.4	**RESOLUÇÃO** de um aluno de 7ª série: $(3^2).(3^2).(3^2) = 27^6$

Entre os 1030 erros, 27 eram deste tipo, correspondente a uma percentagem de 3% do total. Esse tipo de erro costuma acontecer em suas aulas? Na sua opinião, o que leva o aluno a cometê-lo?

Erro 3: o aluno erra operações com inteiros (adição, multiplicação, divisão...).

Exemplos encontrados:

QUESTÃO: $2^3.2^2 =$	**QUESTÃO:** $(3^2.2)^3 =$
RESOLUÇÃO de um aluno de 7ª série: 16.4 = 64	**RESOLUÇÃO** de um aluno de 8ª série: $(18)^3$ = 18. 18. 18 = 324

Entre os 1030 erros, 148 eram deste tipo, correspondente a uma percentagem de 15% do total. Esse tipo de erro costuma acontecer em suas aulas? Na sua opinião, o que leva o aluno a cometê-lo?

Erro 4: o aluno efetua corretamente a operação de potenciação, mas não calcula o resultado final.

Exemplos encontrados:

QUESTÃO: $(3^2. 2)^3 =$	**QUESTÃO:** $(3^2.2)^3 =$
RESOLUÇÃO de um aluno de 7ª série: $(9. 2)^3 = 18^3$	**RESOLUÇÃO** de um aluno de 8ª série: $(9. 2)^3$ = 729. 8 =

Entre os 1030 erros, 105 eram deste tipo, correspondente a uma percentagem de 10% do total. Esse tipo de erro costuma acontecer em suas aulas? Na sua opinião, o que leva o aluno a cometê-lo?

Erro 6: o aluno efetua as operações com os números, na ordem em que aparecem.

Exemplos encontrados:

QUESTÃO: $(3^2)^3 =$	**QUESTÃO:** $2\sqrt{3}.\sqrt{3} =$
RESOLUÇÃO de um aluno de 7ª série: 3. 2 = 6. 3 = 18	**RESOLUÇÃO** de um aluno de 8ª série: 2. 3. 3 = 6. 3 = 18

Entre os 1030 erros, 42 eram deste tipo, correspondente a uma percentagem de 4% do total. Esse tipo de erro costuma acontecer em suas aulas? Na sua opinião, o que leva o aluno a cometê-lo?

Erro 9: o aluno troca operações (por exemplo, potenciação pela multiplicação, radiciação pela potenciação, multiplicação ou divisão pela adição, divisão pelo produto...)

Exemplos encontrados:

QUESTÃO: $2^3.2^2 =$	**QUESTÃO:** $2\sqrt{3}.\sqrt{3} =$
RESOLUÇÃO de um aluno de 7ª série: 8 + 4 = 12	**RESOLUÇÃO** de um aluno de 8ª série: $3\sqrt{3}$

Entre os 1030 erros, 38 eram deste tipo, correspondente a uma percentagem de 4% do total. Esse tipo de erro costuma acontecer em suas aulas? Na sua opinião, o que leva o aluno a cometê-lo?

Erro 22: o aluno considera que elevar a –1 é multiplicar por –1.

Exemplos encontrados:

QUESTÃO: $(9^3: 3^3)^{-1} =$	**QUESTÃO:** $(9^3: 3^3)^{-1} =$
RESOLUÇÃO de um aluno de 7ª série: $(- 9^3: -3^3)$	**RESOLUÇÃO** de um aluno de 8ª série: 27: 9 = -3

Entre os 1030 erros, 42 eram deste tipo, correspondente a uma percentagem de 4% do total. Esse tipo de erro costuma acontecer em suas aulas? Na sua opinião, o que leva o aluno a cometê-lo?

Analise os dois tipos de erros a seguir, envolvendo radicais, índices e radicandos:

Erro 35: o aluno calcula as raízes quadradas (ou multiplica os índices dos radicais e calcula as raízes), mas permanece com o radical.

Exemplos encontrados:

RESOLUÇÃO de um aluno de 8ª série: $\sqrt[4]{4}$
QUESTÃO: $\sqrt{\sqrt{16}} =$

Erro 43: o aluno eleva o radical ao quadrado ou ao cubo

QUESTÃO: $\sqrt[3]{\sqrt{a^2}} =$
RESOLUÇÃO de um aluno de 8ª série: $\left(\sqrt[3]{\sqrt{a^2}}\right)^3 = \left(\sqrt{a^2}\right) = a^2$

Entre os 1030 erros, 30 eram semelhantes ao erro 35 e 34, ao erro 43, com percentagens de 3% cada um. Estes tipos de erro costumam acontecer em suas aulas? Na sua opinião, o que leva o aluno a cometê-los?

3. Leia as afirmações abaixo:

A análise de erros não tem como finalidade a avaliação somativa, cujo objetivo é classificar os alunos e atribuir notas ou conceitos e também não deve ser confundida com avaliação, pois é um trabalho realizado com objetivos formativos, isto é, não tem a finalidade de aprovar ou reprovar o estudante. Essa avaliação formativa é feita para inventariar, apoiar, orientar o aluno na busca de soluções para os problemas detectados, permitindo ao professor regular o ritmo das atividades ou o tipo de estratégias.

Na sua opinião, o que pode ser feito para auxiliar os alunos que apresentam erros como os citados acima?

APÊNDICE B – Questões aplicadas aos alunos

Caro aluno,

Gostaria de contar com a sua colaboração para resolver as questões abaixo, sobre o conteúdo Potenciação, para a pesquisa que estou desenvolvendo, com o objetivo de analisar dificuldades dos alunos em Matemática. Utilize o espaço em branco ao lado de cada questão para mostrar seus cálculos e explicar a solução. Entregue todo o material, não sendo necessário identificar-se.

Obrigada!
Rejane Zeferino Feltes

Efetue:

1) $2^3.2^2 =$

2) $(3^2)^3 =$

3) $(-2^2)^3 =$

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 =$

5) $(2.4)^2 =$

6) $(3^2.2)^3 =$

7) $(25^2 : 5)^2 =$

8) $(9^3 : 3^3)^{-1} =$

Caro aluno,

Gostaria de contar com a sua colaboração para resolver as questões abaixo, sobre os conteúdos Potenciação e Radiciação, para a pesquisa que estou desenvolvendo, com o objetivo de analisar dificuldades dos alunos em Matemática. Utilize o espaço em branco ao lado de cada questão para mostrar seus cálculos e explicar a solução. Entregue todo o material, não sendo necessário identificar-se.

Obrigada!
Rejane Zeferino Feltes

Efetue:

1) $(3^2.2)^3 =$

2) $(9^3 : 3^3)^{-1} =$

3) $\sqrt{7} + 5\sqrt{7} + 2\sqrt{7} =$

4) $2\sqrt{3}.\sqrt{3} =$

5) $3\sqrt{5} : \sqrt{5} =$

6) $\sqrt{81} : \sqrt{9} =$

7) $\sqrt{\sqrt{16}} =$

8) $\sqrt[3]{\sqrt{a^2}} =$

Caro aluno,

Gostaria de contar com a sua colaboração para resolver as questões abaixo, sobre o conteúdo Equações Exponenciais, para a pesquisa que estou desenvolvendo, com o objetivo de analisar dificuldades dos alunos em Matemática. Utilize o espaço em branco ao lado de cada questão para indicar seus cálculos ou explicar seu raciocínio. Entregue todo o material, não sendo necessário identificar-se.

Obrigada!
Rejane Zeferino Feltes

Resolva as equações abaixo:

1) $32^{x+2} = 16^{x+1}$

2) $2^{x} = \sqrt{8}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[6]{2}$

3) $2.3^{x-2} = 162$

4) $2^{2x} - 9.2^{x} + 8 = 0$

APÊNDICE C – Questões do Projeto Piloto

Prezado(a) aluno(a):

Estamos desenvolvendo um projeto de pesquisa para analisar dificuldades encontradas pelos alunos ao resolver questões de Matemática. Solicitamos sua colaboração no sentido de resolver as questões abaixo. Utilize o espaço em branco à direita de cada uma para indicar seus cálculos ou explicar seu raciocínio e, após selecionar a alternativa que lhe parece correta, marque a resposta na grade em anexo. Entregue todo o material, não sendo necessário identificar-se. Agradecemos sua colaboração.

1) O valor numérico da expressão $\frac{3x}{2}+\frac{1}{3}$ é *A* para x = - 1 e *B* para x = ½ . O valor de A + B é:

a) - ¼ b) - ½ c) - ¾ d) $-\frac{1}{12}$ e) $-\frac{1}{6}$

2) A forma mais simples de resolver a expressão $\frac{y-1}{y+1}-\frac{y^2}{y^2-1}+\frac{2y}{y-1}$ é:

$a)\frac{2y^2+1}{\left((y+1)(y-1)\right)}$ $b)\frac{2y^2-1}{(y+1)(y-1)}$ $c)\frac{2y+1}{(y+1)(y-1)}$ $d)\frac{2y^2+1}{(y+1)(y+1)}$ $e)\frac{2y^2+1}{(y-1)(y-1)}$

4) Em um acampamento de férias hás 72 pessoas, entre alunos e professores. Sabe-se que cada professor é responsável por 8 alunos. Quantos alunos e quantos professores há nesse acampamento?

a) 17 e 5 b) 21 e 6 c) 28 e 8 d) 32 e 4 e) 64 e 8

5) Uma bactéria dividiu-se em duas, essas duas em quatro, as quatro em oito, e assim sucessivamente. Considere que a primeira bactéria, o número da geração é 0. Supondo que não haja mortes, a lei matemática que representa essa população de bactérias em função do número de gerações é

$a)\,2x$ $b)\,2^x$ $c)\,2x^2$ $d)\,x^2$ $e)\,4x$

6) Um ciclista partindo de um ponto *A*, percorre 15 km ao Norte; a seguir, fazendo um ângulo de 90^0, percorre 20 km para Leste, chegando ao ponto *B*. A distância, em linha reta, do ponto *B* ao *A*, em km, é

a) 15 b) 25 c) 35 d) 45 e) 55

7) Rogério foi passar o fim de semana com seu pai. Depois de um passeio no parque, eles foram almoçar e um restaurante. Rogério podia escolher uma entre três tipos de saladas diferentes; uma entre dois tipos de carne diferentes e uma entre dois tipos de sobremesas diferentes. Rogério decidiu montar seu cardápio

com um tipo de salada, um tipo de carne e uma sobremesa. Quantas possibilidades de cardápios diferentes Rogério pode montar?

a) 4 b) 8 c) 10 d) 12 e) 14

8) De 50 provas de kart, Marcelo venceu 15. A porcentagem de derrotas de Marcelo é de:

a) 70% b) 30% c) 40% d) 10% e)) 50%

10) A turma de Marisa tem 40 alunos. Dois quintos deles participam da aula de dança, ¼ faz aula de computação e os restantes têm aula de jardinagem. O total de alunos nestas três atividades é

a) 12 – 8 – 10 b) 14 – 9 – 12 c) 16 -10-14 d) 8 – 11 – 16 e) 20 – 12 – 18

ANEXOS

ANEXO A- Erros cometidos pelos alunos da Sétima série da Escola Particular

1ª QUESTÃO: $2^3.2^2 =$

Erros classificados:

7AP2 – 4.4.4.4.4 7AP9 – 6. 4 = 24 7AP15 – (2). (2). (2) = 6 . 4 = 24 7AP18 – 8. 4 = 2. 2. 2. 2. 2. 7AP19 - $2^3.2^2 =$ 2. 2. 2 = 8, 2.2 = 4, (8. 4) 7AP21 - 4^5	7AP23 - $2^3.2^2 = 4^5$ = 4^5 7AP26 - 4^5 7AP30 – 8 + 4 = 12 7BP1 – $2^3.2^2 =$ 6. 4 = 24 7BP2 –2. 2 = 4, 3. 3 = 6, $2^3.2^2 = 4^6$

2ª QUESTÃO: $(3^2)^3 =$

Erros classificados:

7AP1 – 3. 2. 2 = 6. 3 = 18 7AP4 - $(9)^3 =$ (9). (9). (9) = 783 7AP6 - 27^8 7AP7 - $(8)^3 =$ 8. 8. 8 = 512 7AP9 – 6. 3 = 18 7AP11 – $(9)^3$ 7AP13 - $(9)^3 = 72$ 7AP15 – (3). (3) = 9. 9. 9 = $(9)^3 = 720$ 7AP16 – 3. 3 = 27, 27. 3 = 81 7AP18 - $6^2 x6x^2 6x^2 = 18x^6$ 7AP19 - $(9)^3$ = (3.3) = 9 7AP20 - $(3^2).(3^2) = (6^4).(3^2) = 18^6$ 7AP21 - $(3^2).(3^2).(3^2) = 27^6$	7AP22 - $3^2.3^2.3^2 = 27^6$ 7AP23 – $(3^2 x 3^2 x 3^2) = 27^6$ 7AP24 - $3^2.3^2.3^2 = 27^6$ 7AP26 - $(3^2).(3^2).(3^2) = (9^4).(3^2) = 276$ 7AP27 - $(9)^3$ 7AP30 - $(3^2).(3^2) = 9^4 = 27^6$ 7BP5 – 9. 27 = $(9)^3$ = 9. 9. 9 = 27 7BP6 - $(9)^3$ = 739 7BP14 – $(3^2)^3$ = $(6)^3$ = 216 7BP18 - $(3^2)^3$ = 10 7BP25 - $(3^2)^3$ = $(9)^3$ 7BP26 - (3. 3)^3 = $(9)^3$ = 9. 9. 9 = 82. 9 7BP30 – 3^2. 3^2. 3^2 = 27^8

3ª QUESTÃO: $(-2^2)^3 =$

Erros classificados:

7AP1 - - 2. + 2. 3 = -4.3 = - 12	7AP26 - $(-2^2).(-2^2).(-2^2) = (-4^4).(-2) = -8^6$
7AP4 – (- 2). (- 2) = $(4)^3$ = 4. 4 = 16	7AP27 - $(-4)^3 = -64$
7AP5 - $-4^3 = -84$	7AP28 – -2. -2 = $(+2)^3$ = 2. 2. 2 = 8
7AP6 - 8^8	7AP30 - $(-2^2).(-2^2).(-2^2) = -2.2 + 2.2 + 2.2 = 4.4.4 = -6^6$
7AP9 – 4. 3 = 12	7BP2 - -2. -2 = $(4)^3$ = -4. -4. -4 = -128
7AP10 – (- 2). (- 2) . (- 2) = $(8)^3$ = 8. 8. 8 = 512	7BP6 – $(-8)^3 = -512$
7AP13 – $(-4)^3 = (-96)$	7BP8 – $(-4)^3$ = -4. -4. -4 = -64
7AP15 – $(+4)^3 = 20$	7BP9 - $(-4)^3$ = -4. -4. -4 = -64
7AP16 – -2. -2 = - 4, - 4. 3 = - 12	7BP13 – $(4)^3$
7AP18 – $-2^2.2^2.2^2 = 6^6$	7BP14 - $(-4)^3 = 12$
7AP19 – (-8^2)	7BP18 – 6
7AP20 – $(-2^2).(-2^2).(-2^2) = (-4^4).(-2) = -8^6$	7BP22 - $(-4)^3 = -8$
7AP21 – $(-2^2).(-2^2).(-2^2) = 8^6$	7BP25 - $(-4)^3 = 12$
7AP22 – $(-2^2).(-2^2).(-2^2) = -8^6$	7BP28 - $(-8)^2 = -64$
7AP23 – $(-2^2.-2^2.-2^2) = -8^6$	7BP30 - -2. 2. 2 = 8^8
7AP24 - $-2^2.-2^2.-2^2 = -8^6$	

4ª QUESTÃO: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 =$

Erros classificados:

7AP1 – 1. 2. 3 = 2. 3 = 6	7AP30 - $\left(\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$
7AP6 - $\frac{1}{27}$	7BP9 - $(0,5)^3$ = 0,5. 0,5. 0,5
7AP15 - $\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$	7BP18 - 7
7AP20 - $\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	7BP24 - $\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4}.\frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{3}{64}$

continuação: 7AP21 - $\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}$ 7AP26 - $\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ 7AP27 - $\frac{1}{12}$	continuação: 7BP26 - $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ 7BP30 - $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$

5ª QUESTÃO: $(2.\ 4)^2 =$

Erros classificados:

7AP1 – 2. 4. 2 = 8. 2 = 16 7AP6 – 4. 16 = 66 7AP9 – 8. 2 = 16 7AP11 – $(8)^2$ = 16 7AP14 – 2. 4. 2. 4 = 16 7AP17 – (24). 24 = 576 7AP18 – 2. 4. 2. 4 = 8. 8 7AP19 – (2. 2) = 4, (4. 4) = 16 7AP20 – (2. 4). (2. 4) = 4. 8. 8. 16 = 32. 139	7AP21 – (2. 4). (2. 4) = 4 + 8 + 8 + 16 = 4 + 16 + 16 = 7AP30 – (2. 4) = 8. 2 = 16 7BP2 –$(8)^2$ = 8. 8 = 56 7BP10 – 2. 4 = 8, 8. 8 = 65 7BP18 – 8: 2 = 4 7BP21 – 8^2 = 76 7BP25 – $(8)^2$ 7BP26 – $(8)^2$ = 8. 8 = 74 7BP30 – 2. 4. 2. 4 = 65

6ª QUESTÃO: $(3^2.\ 2)^3 =$

Erros classificados:

7AP1 – 3. 2. 2. 3 = 6. 6 = 36 7AP2 – $(9.\ 2)^3 = (18)^3$ = 324 7AP3 - $(9.\ 2)^3$ = (162. 8) = 1296 7AP5 – 9.2 = 18^3 = 1386 7AP6- 27^8. 8 = 216 7AP7 – $(9.\ 2)^3 = (18)^3$ = 18. 18. 18 = 2880	7AP27 – 9. 2 = 72. 2 = 144 7AP28 – 3. 3 = 9. 2 = $(18)^3$, 18. 18. 18 = 5812 7AP30 – 3. 2. 2 = 12^4 = 36 7BP2 – $(18)^3$ = 18. 18 = 316 7BP4 – $(9.\ 2)^3 = (18)^3$ = 324 7BP5 – $(9.\ 2)^3 = 18^3$ = 18+ 18+ 18+ = 316

continuação:	continuação:
7AP8 – 3.3 = 9, 9.2 = 18, 18. 18. 18 = 2590	7BP6 – $(9.\ 2)^3$ = 739. 8 = 5916
7AP9 – 6. 6 = 36	7BP7 – $(9.\ 2)^3 = (18)^3$ = 324
7AP11 – (9. 2) = $(18)^3$	7BP9 – $(9.\ 2)^3 = (18)^3$ = 324
7AP12 – (3. 3. 2) = 9. 2 = 16. 16. 16 = 1536	7BP10 – 3. 3 = 9, 9. 2 = 18, 18. 18. 18 = 337
7AP14 – 3. 3 = 9, 9. 2. 9. 2 = 324	7BP11 – $(9.\ 2)^3 = (18)^3$ = 324
7AP15 - $(9.\ 2)^3 = (18)^3$ = 324	7BP12 – $(9.\ 2)^3$ = 18. 18. 18 = 5842
7AP17 - $(9.\ 2)^3$ = 0	7BP13 – $(9.\ 2)^3 = (18)^3$ =
7AP18 – $3^2.\ 3^2 = 9^4$	7BP14 – $(6.\ 2)^3 = (12)^3$ = 1728
7AP19 –3. 3 = 9, 2. 2. 2 = 8, (9. 8) =	7BP15 – 9. 8 = 81
7AP20 – $(3^2.\ 2).\ (3^2.\ 2).\ (3^2.\ 2) = (9^4.\ 6^2.\ 6^2.\ 4).\ (3^2.\ 2) = 27^6.\ 18^9.\ 18^4.\ 12^2.\ 18^4.12^2.\ 16^2.8$	7BP18 – 5
7AP21 - $(3^2.\ 2).\ (3^2.\ 2).\ (3^2.\ 2) = 27^6.\ 12^2 + 9^4 + 6 + 6 + 4 = 27^6 + 12^2 + 9^4 + 16$	7BP19 – $(9.\ 2)^3 = (18)^3$ = 324
	7BP21 – $(9.\ 2)^3 = 18^3$ = 5032
7AP22 – $(6^3)^3 = 6^3.\ 6^3.\ 6^3 = 216^9$	7BP22 – $(9.\ 2)^3 = (18)^3$ = 324
7AP23 - $(3^2.\ 2.\ 3^2.\ 2.\ 3^2.\ 2) = 6^4.\ 6^4.6^4 = 216^{16}$	7BP24 – 3. 3 = (9. 2)3 = (18)3 = 18. 18. 18
7AP24 – $6^3.\ 6^3.\ 6^3 = (6^9)^3 = 216^9$	7BP25 – $(6.\ 2)^3$
7AP26 - $(6^2).\ (6^2) = 36^4$	7BP30 – $3^2.\ 2.\ 3^2.\ 2.\ 3^2.\ 2 = 216^8$

7ª QUESTÃO: $(25^2 : 5)^2$ =

Erros classificados:

7AP1 – 25. 2: 5. 2 = 50: 10 = 50	7AP22 – $(5^2)^2 = 5^2.\ 5^2$ = 254
7AP2 – $(625.\ 5)^2$ =	7AP24 – $(5^1)^2 = 25^1$
7AP3 – $(625.\ 5)^2$ = 390625: 5	7AP26 – (5). (5) = 25
7AP4 – $(25^2 : 5)^2 = (625 : 5)^2 = 15^2$ = 15.15.15 = 125	7AP27 – $50^2 : 5 = 10^2$ = 100
	7AP30 – 25: 2 = 10^7
7AP5 – 175: 5 =175: 5 = 15^2, 15^2 = 90	7BP2 – $(625 : 5)^2$
7AP6 – 125^4: 25 = 25	7BP3 – $(625 : 5)^2$
7AP8 - 25. 25 = 125, 125: 5 = 25^2, 25. 25 = 125	7BP6 - $(25^2 : 5)^2$ = 625: 5 =
7AP9 – 50: 25 = 2	7BP8 – $(25^2 : 5)^2$ = 25. 25 = 625: 5^2

continuação:	continuação:
7AP10 – 25. 25 = 625, 625: 5 = $(125)^2$ = 2125	7BP10 – 25. 25 = 625, 625: 5 = 125, 125. 125 = 125
7AP11 – $(625.\ 5)^2 = (121)^2$ = 374	7BP18 – $(25^2\text{: } 5)^2$ = 6
7AP12 – $(685\text{: } 5)^2 = (137)^2$ = 1686	7BP20 – $(25^2\text{: } 5)^2$ = 625: 25 = 0,025
7AP13 – 25. 25 = 625, 5. 5 = 10, 625: 10 = 211	7BP21 – $(25^2\text{: } 5)^2 = (1225\text{: } 5)^2 = (245)^2$ =
7AP15 – $(625.\ 5)^2$ = 125	7BP22 – $(25^2\text{: } 5)^2$ = 25. 25 = 625: 5 = $(125)^2$ = 4685
7AP16 – 25. 25 = 1125, 5. 5 = 25, 1125. 25 = 15083	7BP23 –$(25^2\text{: } 5)^2$ = 25. 25 = 135
7AP17 – 625. 5 = 25	7BP24 – $(25^2\text{: } 5)^2$ = 25. 25 = 125
7AP19 – 25. 25 = 625, 5. 5 = 25, (625: 25) =	7BP25 – $(25^2\text{: } 5)^2 = (50^2\text{: } 5)^2$
7AP20 – $(25^2\text{: } 5).\ (25^2\text{: } 5) = (125^4\text{: } 25) = 5^4$	7BP30 – $(25^2\text{: } 5)^2 = 25^2\text{: } 5.\ 25^2\text{: } 5 = 265^4$
7AP21 – $(25^2\text{: } 5).\ (25^2\text{: } 5)$ = 625: 5 = 125	

8ª QUESTÃO: $(9^3\text{: } 3^3)^{-1}$ =

Erros classificados:

7AP1 – $(9^3\text{: } 3^3)^{-1}$ = 9. 3: 3. 3. (-1) = 27. 6 = 45	7BP3 – (729: - 27) = -27
7AP3 – (729: 27) = 28	7BP4 – 729. 27
7AP4 – $(347\text{: } 27)^{-1} = (58)^{-1}$ = 12	7BP5 – 729: 27
7AP6 – $9^3\text{: } 3^3 = 3$	7BP7 – $(729\text{: } 27)^{-1} = (27)^{-1}$ = -27
7AP7 – (729: 18)	7BP10 – 9. 9. 9 = 729, 3. 3. 3 = 27, 729: 27 = 28
7AP8 – 9. 9. 9 = 729, 3. 3. 3 = 27, 729: 27 = 5	7BP11 – $(729\text{: } 27)^{-1} = (27)^{-1}$ = -27
7AP9 – 3: 3 = 1	7BP12 – 729: 27
7AP10 – 9. 9. 9 = 729, 3. 3. 3 = 27, 729: 27 = $(29)^{-1}$ = 29	7BP14 – 729: 27
7AP13 – 9. 9. 9 = 729, 3. 3. 3 = 27, 729: 27 =	7BP15 – (729: - 27) = -27
7AP16 –3. 3. 3 = 81, 9. 9. 9 = 729, 729: 81 = 15019	7BP16 – $(729\text{: } 27)^{-1} = (27)^{-1}$ = -27
7AP17 – 729: 27 =	7BP17 – $(729\text{: } 27)^{-1} = (27)^{-1}$ = -27.
7AP19 – 9. 9. 9 = 729, 3. 3. 3 = 27, $(729\text{: } 27)^{-1}$ =	7BP18 – $(9.\ 9.\ 9.\ 3.\ 3.\ 3)^{-1}$ = (729: 27) = 27
7AP20 – $(-\ 9^3\text{: } -3^3)$	7BP19 –7
	7BP20 – 9. 9. 9 = 729, 729: 27 = 1

continuação: 7AP21 – (9:3) = 128: 3 = 7 7AP24 – $(3)^{-1}$ = 3 7AP26 – 27 7AP27 – $(18: 9)^{-1}$, -18: 9 = 2 7AP30 – 9. 3 + 3. 3 = 27 + 9 = - 35 7BP1 – 729: 9 = 81^{-1} = -81 7BP2 – 9. 9. 9/ 3. 3. 3 = $(819:27)^{-1}$ = $(810)^{-1}$ = -810	continuação: 7BP21 – 9. 9. 9 = 729: 27 = 101 = -101 7BP23 – $(729: 27)^{-1}$ = $(27)^{-1}$ = -27 7BP24 – 9. 9. 9 = $(729: 3)^{-1}$ 7BP25 – (27^3: 9^3) 7BP28 – $(9. 9. 9. 3. 3. 3)^{-1}$ = (729: 27) = 27 7BP29 – $(9. 9. 9. 3. 3. 3)^{-1}$ = (729: 27) = 27

ANEXO B- Erros cometidos pelos alunos da Sétima série da Escola Estadual

1ª QUESTÃO: $2^3.2^2 =$

Erros classificados:

7AM13 – 24	7BM1 – 4^6
7AM18 - 24	7BM15 –16.4 = 64

2ª QUESTÃO: $(3^2)^3 =$

Erros classificados:

7AM2 – 243	7AM24 - 243
7AM12 - 72	7BM1 – 6^3
7AM16 - $(9)^3$ = 153	7BM4 – $9^5 = 9^6$
7AM18 - 18	7BM9 –3. 2 = 6. 3 = 18
7AM22 – 18	7BM15 - 72
7AM23 – 243	

3ª QUESTÃO: $(-2^2)^3 =$

Erros classificados:

7AM5 - -4^3 = - 64	7AM23 – - 54
7AM7 – 0	7AM24 – -54
7AM8 - -64	7BM1 – -4^3
7AM9 - - 64	7BM2 - -4^3 = - 64
7AM11 – 32	7BM3 - - 20 = 0
7AM12 – 62	7BM4 – 6^5
7AM13 – 7	7BM5 – 4. 4. 4 = - 64
7AM17 – - 64	7BM7 - - 32
7AM18 – 7	7BM9 - -4. 3 = -12
7AM19 – 4^3 = 62	7BM15 – -64
7AM20 – 62	7AM22 – - 12

4ª QUESTÃO: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 =$

Erros classificados:

7AM3 – $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$ 7AM6 - $\frac{3}{8}$ 7AM7 – 0 7AM8 – $\frac{3}{8}$ 7AM18 – $\frac{1}{12}$ 7AM22 – $\left[\frac{3}{2}\right]$	7AM23 - $\frac{3}{8}$ 7AM24 - $\frac{3}{8}$ 7BM7 - $\frac{3}{8}$ 7BM9 - $\frac{3}{6}$ 7BM211 - $\frac{1}{6}^3 = 216$

5ª QUESTÃO: $(2.\ 4)^2 =$

Erros classificados:

7AM5 – 36	7AM23 – 1078
7AM7 – 0	7AM24 – 1078
7AM18 – 100	7BM4 – 4^8
7AM22 – 16	7BM9 – 2. 4 = 8. 2 = 16

6ª QUESTÃO: $(3^2.\ 2)^3 =$

Erros classificados:

7AM3 – 729	7AM20 – 72
7AM4 – 3. 3 = 9. 2 = 18, 18^3 = 18. 18. 18 = 9216	7AM22 = 36
7AM5 - $(9.\ 2)^3 = 18^3$	7AM23 – 324
7AM6 – $(9.2)^3 = 18^3 = 324$	7AM24 – $(9.\ 2)^3 = (18)^3 = 324$
7AM7- 0	7AM25 – 9. 8 = 72

continuação:	continuação:
7AM8 – $9.\ 2^3 = 9.\ 8 = 72$	7BM1 – 12^3
7AM9 – 3032	7BM2 - 81^3
7AM10 – 2592	7BM4 – $9^6.\ 6^5$
7AM11 – 324	7BM5 – $9.\ 8 = 72$
7AM12 – 5826	7BM7 – 5732
7AM14 – 324	7BM9 – $3^2 = 6.\ 2 = 12.\ 3 = 36$
7AM15 – $3.\ 3 = 9.\ 2 = (18)^3$, 18. 18. 18 = 5548	7BM12 – 54
7AM16 - $(9.\ 2)^3 = (18)^3 = 1152$	7BM13 – 18. 18= 324
7AM17 – 324	7BM14 – (9. 2). (9.
7AM18 - 36	7BM15 – 64
7AM19 – 9. 8 = 72	

7ª QUESTÃO: $(25^2{:}\ 5)^2 =$

Erros classificados:

7AM3 – 625	7AM23 – 100
7AM4 –(625: 5) = 125	7AM24 – $(50{:}\ 5)^2 = 10^2 = 100$
7AM5 – $35^2 = 1223$	7AM25 – 925: 25 = 37
7AM7 – 0	7BM1 – 10^2
7AM9 – 91809	7BM3 –1250: 25=
7AM10 – 5	7BM4 – 25^4
7AM11 – 125	7BM5 – 50: 10 = 5
7AM12 - 125 625	7BM6 – $(625.\ 5)^2 = 390\ 625\ 5 = ?$
7AM15 – 15685	7BM9 – $25^2 = 50{:}\ 5 = 20$
7AM18 – 20	7BM12 – 625: 5 = 125. 2 = 250
7AM21 – 20	7BM13 – 25. 25 = 625: 5 = 125 = 15 625
7AM22 – 20	7BM15 – 625: 5 = 5025, 525. 525 = 12125

8ª QUESTÃO: $(9^3: 3^3)^{-1} =$

Erros classificados:

7AM1 – 729: 27 = 2^{-1} = 27	7AM17 – 27
7AM2 – -3	7AM18 – 26
7AM3 – 9. 9. 9 = $\frac{-729}{27}$	7AM19 – 81: 9 = 9^{-1} = -9
7AM4 – 729: 9 = 81 = - 81	7AM20 – 18954
7AM5 – x + 729: $(+27)^{-1}$ = 3^{-1}= -3	7AM22 – 2
7AM6 – $(729: 27)^{-1}$ = $(27)^{-1}$ = -27	7AM23 – - 81
7AM7 – 0	7AM24 – (243: 27) $^{-}$1 = (3)$^{-}$1 = - 81
7AM8 –729: 27^{-1} = 27^{-1} = -27	7AM25 – 729. 26 = 18954
7AM12 – 9	7BM4 – - 3^6
7AM13 – - 9	7BM5 – 9. 9. 9 = 729, 3. 3. 3 = - 27, - 20683
7AM14 – 27	7BM6 – $(729: 27)^{-1}$ = - 729: -27 = ?
7AM15 – 1	7BM9 – 27 : 3^3 = 27^{-1} = -26
7AM16 – (649: 27) = $(24)^{-1}$ = 24	7BM13 – 0

ANEXO C- Erros cometidos pelos alunos da Oitava série da Escola Particular

1ª QUESTAO: $\left(3^2.2\right)^3 =$

Erros classificados:

8AP2 – (9. 2) . (9. 2) = 81 + 18 + 18 + 4 = 121	8BP9 – $(9.2)^3 = 18^3 = 54$
8AP3 - $(9. 2)^3 = (18)^3 = 324$	8BP10 – 3. 3 = 9, 2. 2. 2 = 8, 9. 8 =
8AP4 – 9^2. 4 = 81. 4 = 224	8BP11 – $\left[\left(3^2.2\right).\left(3^2.2\right)\right]\left(3^2.2\right) = 9^4 + 6^2 + 6^2 + 4\left(3^2.2\right) = \left(9^4 + 12^2 + 4\right)\left(3^5.2\right) = 27^6 + 18^5 + 36^4 + 24^3 + 12^3 + 8 = 27^6 + 18^5 + 36^4 + 36^3 + 8$
8AP5 - $(3^2. 2). (3^2. 2). (3^2. 2) = 27^2 + 12 + 12 + 8$ = 27 +24 + 8; a = 27, b = 24, c = 8.	8BP12 – $(9. 2)^3$ = (9. 2). (9. 2) = 18+ 18+ 18 = 314
8AP6 – $(9. 2)^2 = (18)^2$ =326	8BP13 – $(9. 2)^3$ = 729. 8 =
8AP7 – $(9. 2)^3 = (18)^3$ =30	8BP14 – 27. 6 = 162
8AP8 – $(9. 2)^3$ = (729 . 8) =5932	8BP15 – 81^2. 4 = 891. 4 =
8AP9 – $(9. 2)^3$ = 289 . 8 = 2312	8BP16 – $(3^2. 2). (3^2. 2). (3^2 . 2) = 9^4. 6^2. 6^2. 4. (3^2.2)$
8AP10 – $(9. 2)^3 = (18)^3$ =30	8BP17– $(18)^3$ = 18. 18. 18 = 324
8AP11 – $(9. 2)^3$ = 9. 9 = 81, 81. 9 = 289, 289 . 8 = 2312	8BP18 – 9.4 = 36
8AP12 – $(9. 2)^3 = (18)^3$ = 1152	8BP19 – $(3^2. 2)$. (3. 2). (3. 2) = $9^2 + 6^2$ + 6. 4 =(3. 2), $27^2 + 18^2 + 18^2 + 12^2$ + 18 + 12 + 12 8 + 75^2 +50
8AP13 – $(9. 2)^3$ = (9. 2). (9. 2). (9. 2) = 81 + 18 + 18 + 4 + 81 + 18 + 18 + 4 = 162 + 72 + 8 = 314	8BP20 – 6^6
8AP19 – $(9. 2)^3 = (18)^3$ = 324	8BP21 – (3. 2). (3 . 2). (3 . 2) = 27 + 12 + 12 + 8 = 27 + 24 + 8 = 59
8AP 20 – (9. 2). (9. 2). (9. 2) = 18 + 18 + 18	8BP23 – (9. 2). (9. 2). (9. 2)
8AP21 - (9. 2). (9. 2). (9. 2) = 81 . 4 . 18 . 4 = 23 328	8BP24 – $(3^2. 2). (9. 2)^3$ = 729. 8 = 6532
8AP22 – $(9. 2)^3 = (18)^3$ = 54	8BP27 – $(9.2)^3$ = (9. 2). (9. 2). (9. 2) =81. 18. 18. 4. (9. 2) = 81. (18. 18. 36. 8) = 1448. 548.8 = 593504. 8 = 9748032
8AP24 – 9 . 2 = 6	8BP29 – 9. 12 = 28
8AP25 – $(9. 2)^3$ =54	8BP30 – 27. 6 = 162
8AP26 – $(9. 2)^3 = 18^3$ = 6540	8BP31 – $(9. 2)^3$ = (9. 2) = (84, 64). (9. 2) = 748, 388
8AP27 – 9 . 8 = 72	8BP32 – $(9. 2)^3$ = (9. 2). (9. 2). (9. 2) = (81 + 18 +18 + 4). (9. 2) = 729 + 162 +162 + 36 + 36 + 8 = 1331
8AP28 – $(6^2) . (6^2) . (6^2)$ = 218	8BP33– (9.2) (9. 2). (9. 2) = (81 + 18 +18 + 4). (9. 2) = 729 + 162 +169 + 36 + 164 + 36. 38 + 8 = 1331
8AP29 – $(3^2. 2). (3 . 2). (3^2 . 2) = 21^2 . 8 = 168^8$	8BP34 – $(9.2)^3 = (18)^3$ = 276
8AP30 – 9. 4 = 36	
8AP34 – $(9. 2)^3$ = 72	

continuação: 8AP36 – 9. 8 = 56 8AP37 – $(18)^3 = 5292$ 8AP38 – (3. 2). (3. 2). (3. 2) = 278 8AP39 – $(9.\ 2) = 18 = (18)^3 = 324.\ 324$ 8AP40 – (162. 8) = 162. 8 = 1276 8AP41 – (9. 2) = 0 = 73 . 8 = 664 8BP1 – $(9.2)^3 = 729.\ 8 = 532$ 8BP2 – (9. 2) . (9. 2) = 81. 18. 18. 4 = 81 8BP3 – $(9.\ 2)^3 = (10)^3 = 2000$ 8BP4– $(9.2)^3 = (18)^3 = 18.\ 18.\ 18 = 324$ 8BP6 – $(9.2)^3 = (18)^3 = 5822$	continuação: 8BP35 – $(3^2.2).(3^2.2).(3^2.2) = (9^4+6^2+6^2+4)(3^2.2) =$ $(9^4+12^2+4)(3^2.2) = 27^6+18^4+36^4+24^2+12^2+8 =$ $27^6+54^4+36^2+8$ 8BP37 – 27. 6 = 162 8BP38 – $[(3^2.2).(3^2.2)](3^2.2) = 9^4+6^2+6^2+4(3^2.2) =$ $(9^4+12^2+4)(3^5.2) = 27^6+18^5+36^4+24^3+12^3+8 =$ $27^6+18^5+36^4+36^3+8$ 8BP39 – $(9.\ 2)^3 = (243.\ 8) = 1864$ 8BP40 – $(9.\ 2)^3 = 18^3$ 8BP42 – $(9.\ 2)^3 = 27.\ 8 = 516$

2ª QUESTÃO: $(9^3: 3^3)^{-1} =$

Erros classificados:

8AP2 - (729: 27) = -27 8AP4 – $1^3 : 1^3 = 1 : 1 = 1$ 8AP5 – $(9^3.\ 3^3) = 9: 3 = 3$ 8AP6 – $1^3 : 1^3 = 1 : 1 = 1$ 8AP7 – 9 . 3. 9. 3. 9. 3 = 243, 3. 3. 3 = 27, 243 :27 = 9 8AP9 – 289:9 8AP10 – – 9 . 3. 9. 3. 9. 3 = 243, 3. 8. 3 = 27, 243 :27 = 9 8AP14 – 9 . 3. 9. 3. 9. 3 = 243, 3. 3. 3 = 27, 243 :27 = 9 8AP15 – 243: 27 = $(9)^{-1}$= -9 8AP16 – 243: 27 = $(9)^{-1}$= -9 8AP17 – $(729: 27)^{-1}$ = - 729: - 27 = 27 8AP18 – 243: 27 = $(9)^{-1}$= -9 8AP19 – $(729: 27)^{-1}$	8BP1 – $(9^3: 3^3)^{-1} = (729:27)^{-1} = -24$ 8BP2 – 72: 27 = 8BP3 – $(729: 27)^1$ 8BP4 – $(6561: 81)^{-1} = (81)^{-1} = -81$ 8BP6 – $(729: 27)^{-1} = (27)^{-1} = -27$ 8BP8 – $(729: 27)^{-1}$ = - 729: - 27 = -27 8BP9 – $(27: 9)^{-1} = 3^{-1} = -3$ 8BP17 – 832 8BP18 – - 9. – 3 = 27 8BP19 – 729: 9 = - 81 8BP20 – 27^{-9} 8BP22 – $(729: 27)^{-1} = (27)^{-1} = -27$ 8BP23 – 243: 9 = 27 8BP24 – $(729: 27)^{-1} = (24)^{-1} = -24$

continuação:

8AP21 – $(729: 27)^{-1} = (26)^{-1} = 25$

8AP22 – $(27: 27)^{-1} = (1)^{-1} = 1$

8AP24 – 9: 3 = 27

8AP25 – $(729: 12)^{-1}$

8AP26 – $(729: 27)^{-1} = (27)^{-1}$

8AP27 – 243: 81 = $(3)^{-1}$

8AP28 – -81

8AP29 – $(9^3. 3^3).\ (9^3. 3^3) = 81 + 21 + 21 + 9 = 81 + 42 + 9 = -132$

8AP30 – $(27. 9)^{-1} = 18 – 1 = 17$

8AP32 – $(27: 27)^{-1} = (1)^{-1} = -1$

8AP34 – 243: 81 = $(3)^{-1}$

8AP36 – 569. 21 = 5696

8AP37 – $(27:27) = 1 = (1)^{-1} = -1$

8AP38 – (3:3) = 3

8AP39 – 6561: 81 = -81

continuação:

8BP25 – $(725: 27)^{-1} = (27)^{-1} = -27$

8BP28 – 72: 27 =

8BP29 – 72: 27 = 2^{-1}

8BP30 – 729: 27 = 27

8BP31 – $(729: 27)^{-1} = 26^{-1}$

8BP32 – $(729: 27)^{-1} = (27)^{-1} = -27$

8BP34 – $(729: 27)^{-1} = (27)^{-1} = -\frac{1}{27}$

8BP35 – $\frac{-9^3}{-3^3} = 3^3$

8BP36 – $(72: 27)^{-1} =$

8BP37 – 729: 27 = 27

8BP38 – $(243: 27)^{-1}$ = - 243: - 27 = - 9

8BP39 – (243: 27) = 9

8BP42 – $(729: 9)^{-1} = (81)^{-1} = - 81$

3ª QUESTÃO: $\sqrt{7}+5\sqrt{7}+2\sqrt{7}=$

Erros classificados:

8AP2 – $\left(\sqrt[2]{7}\right)^2+\left(5\sqrt[2]{7}\right)^2=7+(5.7)+(2.7)=7+35+14=56$

8AP3 – $7+35+14=0$

8AP4 – $7\sqrt{35}+\sqrt{14}=7+35+\sqrt{14}=7+35+14=56$

8AP5 – $\sqrt{7}+5\sqrt{7}+2\sqrt{7}=8\sqrt{21}$

8AP6 – 7 + 5 – 7 + 2. 7 = 7 + 35 + 14 = 56

8AP7 – 7 + 5 + 7 + 2 + 7 = 28

8AP9 – 7 + 5 – 7 + 2. 7 = 7. 35 + 14 = 245 + 14 = 259

8AP10 – 7 + 5 + 7 + 2 + 7 = 28

8AP12 – $\sqrt{12}.\sqrt{9}.\sqrt{7}=\sqrt{12}.3\sqrt{7}=\sqrt{36}.\sqrt{7}=6\sqrt{7}=6\sqrt{7}$

8AP14 – 7 + 5 + 7 + 2 + 7 = 28

8AP15 – $7\sqrt{7}$

8AP16 – $7\sqrt{7}$

8AP17 – $7\sqrt{7}$

8AP18 – $7\sqrt{7}$

8AP19 – 7 + 35 + 14 =

8AP20 – $\sqrt{12}.\sqrt{8}$

8AP23 – $\left(\sqrt{7}\right) + \left(5\sqrt{7}\right) + \left(2\sqrt{7}\right) = 7 + (5.7) + (2.7) = 7 + 35 + 14 = 56$

7AP24 – $\sqrt[8]{21}$

7AP25 – $2\sqrt{9}.\sqrt{9} = 2\sqrt{18}$

7AP26 – $2\sqrt[3]{3}$

7AP29 – 1 + 5 (1) + 2(1) = 6 + 6 + 2 = 14

8AP30 – $\sqrt{7} + \sqrt{12} + \sqrt{14} = \sqrt{7} + 6 + 7 = 20$

7AP31 – $7\sqrt{7}$

7AP36 - $\sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{7} = \sqrt{27} = 7$

7AP38 – $\sqrt{28}$

7AP39 – $\left(\sqrt{7}\right)^2 + \left(5\sqrt{7}\right)^2 + \left(2\sqrt{7}\right)^2 = 7 + 5.7 + 2.7 = 7 + 30 + 14 = 51$

7BP3 – 10

7BP5 – 12

7BP7 – $\sqrt{7}.\sqrt{7}.\sqrt{7} = \sqrt{7}$

7BP8 – 7 + 5. 7 + 2. 7 = 7 + 35 + 14 = 42 + 14 = 56

7BP17 – $10\sqrt{7}$

7BP18 – 7 + 5. 7 + 2. 7 = 7 + 35 + 14 = 56

7BP19 – $7\sqrt{7} + \sqrt{7} = 7\sqrt{7}$

7BP20 – $\sqrt{12}.\sqrt{9}.\sqrt{7} = \sqrt{12}.\sqrt{3}.\sqrt{7} = 12 + 3 + 7 = 22$

7BP23 – $\sqrt{7}+5\sqrt{7}+2\sqrt{7}=7\sqrt{7}$
7BP26 – $\left(7\sqrt[2]{7}\right)^2+5\left(\sqrt[2]{7}\right)\ +2\left(\sqrt[2]{7}\right)^2=7+5+7+2+7=12+9+7=28$
7BP27 – $\sqrt{7}+\sqrt{12}+\sqrt{9}=\sqrt{19}+\sqrt{9}=\sqrt{28}$
7BP30 – 7 + 5. 7 + 2. 7 = 478
7BP31 – 28
7BP37 – 7 + 5. 7 + 2 .7 = 478
7BP41 – $7\sqrt{21}$
7BP42 – $8\sqrt{7}^3$

4ª QUESTÃO: $2\sqrt{3}.\sqrt{3}=$

Erros classificados:

8AP4 – $\sqrt{6}.\sqrt{3}=\sqrt{18}$	8BP7 - $2\sqrt{3}.\sqrt{3}$
8AP5 - $2\sqrt{3}.\sqrt{3}=2\sqrt{9}$	8BP8 – 2. 3. 3 = 6. 3 = 18
8AP6 – 2. 3. 3 = 18	8BP11 - $2\sqrt{3}$
8AP7 – 2. 3. 3 = 18	8BP12 - $2\sqrt{9}$
8AP9 – 2. 3. 3 = 18	8BP16 - $2\sqrt{3}$
8AP10 – 2. 3. 3 = 18	8BP17 - $2\sqrt{3}$
8AP11 – 2. 3. 3 = 18	8BP18 - 2. 3. 3 = 6. 3 = 18
8AP13 – 2. 3. 3 = 18	8BP19 - $6\sqrt{3}$
8AP14 – 2. 3. 3 = 18	8BP23 - 2. 3. 3 = 6. 3 = 18
8AP15 - $2\sqrt{3}$	8BP24 - $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{2}$
8AP19 - $\sqrt{6}.\sqrt{3}=$	
8AP21 – 2. 3. 3 = 18	
8A24 - $2\sqrt{9}\ =\sqrt{18}=0$	8BP26 - $2-\left(\sqrt[2]{3}\right)^2.\left(\sqrt[2]{3}\right)^2=2.3.3=6.3=18$
8AP25 - $\sqrt{7}$	8BP30 - $2\left(\sqrt{3}\right).\left(\sqrt{3}\right)^2=2.3.3=12$
8AP29 – 2. (1). 1 = 2. 1 = 2	8BP31 - $\sqrt{0024}$

8AP32 - 2. 1 = 2	8BP32 - $2\sqrt{9}$ = 2 + 3 = 5 ou 2. 3 = 6
8AP35 – $2\sqrt{9} = 2\sqrt{3}$	8BP34 - $2\sqrt{3}$
8AP37 - 2. 1 = 2	8BP35 - $2\sqrt{9}$
8AP38 - $2\sqrt{3}.\sqrt{3} = 2\sqrt{6}.\sqrt{3} = 2\sqrt{2}$	8BP37 - $2.(\sqrt{3})(\sqrt{3})^2 = 2.3.3 = 12$
8AP39 – 2. 9 = 18	8BP40 – 3
8AP40 - 2. 3. 3 = 18	8BP41 - $2\sqrt{9} = 2\sqrt{3}$
8BP2 - $2\sqrt{9}$ = 2. 3 = 9	8BP42 - $2\sqrt{3}\ .\ 1\sqrt{3} = 2\sqrt{3} = 2.3 = 6$
8BP3 - 18	
8BP6 - $2\sqrt{3}$	

5ª QUESTÃO: $3\sqrt{5} : \sqrt{5} =$

Erros classificados:

8AP4 – $\sqrt{15} : \sqrt{5} = \sqrt{3}$	8BP7 – $3\sqrt{5}\ .\ \sqrt{5}$
8AP5 – $3\sqrt{5}.3\sqrt{5}.3\sqrt{5} = 27\sqrt{125:}\sqrt{5} = \sqrt[3]{25}$	8BP8 –3. 5. 5 = 15 : 5 = 3
8AP15 – $3\sqrt{5}$	8BP12 – $3\sqrt{1}$
8AP16 – $3\sqrt{5}$	8BP14 – 9: 5. 6 = 75
8AP17 – $3\sqrt{5}$	8BP16 – $3\sqrt{5}$
8AP18 – $3\sqrt{5}$	8BP17 – $3\sqrt{5}$
8AP19 – 15	8BP18 – 3. 5. 5 = 15. 5 = 75
8AP24 – $3\sqrt{5} : \sqrt{5} = 3\sqrt{25.1} = \sqrt{3}$	8BP19 – $3\sqrt{1}$
8AP25 – $3\sqrt{25} : \sqrt{25} = 3\sqrt{1}$	8BP23 – 3. 25: 25 = 3. 1 = 3
8AP27 – $3\sqrt{5}$	8BP26 – $3(\sqrt[2]{5})^2 : (\sqrt[2]{5})^2 = 3.5 : 5 = 15 : 5 = 3$
8AP28 – $3\sqrt{5}$	8BP30 – 9. 5. 5 = 75
8AP29 –3(1 + 1) = 3 + 3 = 6	8BP31 – 24
8AP31 – $3\sqrt{5}$	8BP32 – $3\sqrt{1}$ = 3 + 1 = 4
8AP33 – $3\sqrt{5}$	8BP34 – $3\sqrt{5}$

continuação: 8AP34 – $3\sqrt{5}$ 8AP35 – $3\sqrt{5}$ 8AP38 – $3\sqrt{3} : 5 = 3\sqrt{2}$ 8BP3 – $3\sqrt{5}$ 8BP6 – $3\sqrt{5}$	continuação: 8BP35 – $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ 8BP37 – 9. 5. 5 = 75 8BP41 – 125: 5 = 3 8BP42 - 9. 5. 5 = 75

6ª QUESTÃO: $\sqrt{81}.\sqrt{9} =$

Erros classificados:

8AP1 – $\sqrt{9} : \sqrt{3}$ 8AP5 – $\sqrt{81} : \sqrt{9} = \sqrt[4]{9}$ 8AP21 – $\sqrt{9} : \sqrt{3} = \sqrt{3} : \sqrt{3} = 3.3 = 9$ 8AP25 – $\sqrt{9} : \sqrt{3} = \sqrt{3}$ 8AP29 – 9 + 3 = 11 8AP33 – $\sqrt{9} : \sqrt{3}$ 8AP36 – 9. 3 = 27	8AP38 – $\sqrt{81} : \sqrt{9} : \sqrt{9}$ 8BP3 – 8: 3 = 2 8BP12 – $\sqrt{9}$ 8BP14 – 9: 3 = x = 3 8BP15 – $\sqrt{9} : \sqrt{9}$ = 3: 3 = 1 8BP23 – 9: 3 = 2 8BP34 - $\sqrt{9.9} : \sqrt{9} = 9\sqrt{9} : \sqrt{9} = 9\sqrt{9}$ 8BP37 – 9: 3 , x = 3

7ª QUESTÃO: $\sqrt{\sqrt{16}} =$

Erros classificados:

8AP4 – 16 8AP6 – 16 8AP8 – $\frac{4}{16}$ 8AP12 – $\sqrt[2]{4} = 4$ 8AP13 – $\sqrt{16} = 4$	8BP3 – 36 8BP6 – $\sqrt{16}$ = 16 8BP7 – $\sqrt{16}$ = 4 8BP8 – 8 8BP12 – $\sqrt{16}$

continuação:	continuação:
8AP17 – $\sqrt{4}=2^0+3-5=999$	8BP16 – $\left(\sqrt{\sqrt{16}}\right)^2=\left(\sqrt{16}\right)^2=4$
8AP21 – $\sqrt{8}.\sqrt{8}=\sqrt{64}=8$	8BP17 - $\sqrt[3]{\sqrt{16}}=\sqrt{16}=4$
8AP23 – $\left(\sqrt{\sqrt{16}}\right)^2=\left(\sqrt{16}\right)^2=16$	8BP19 – 16
8AP24 – 16 = 0	8BP20 – 4
8AP25 – $\sqrt{4}=\sqrt{2}$	8BP22 – $\left(\sqrt{\sqrt{16}}\right)^2=\left(\sqrt{16}\right)^2=16$
8AP27 – 4	8BP23 – $\sqrt{\sqrt{16}}=\sqrt{16}=4$
8AP28 – $\sqrt{\sqrt{16}}=4$	8BP26 – $\left(\sqrt{\sqrt{16}}\right)^2=\left(\sqrt[2]{16}\right)^2=16$
8AP30 – $\sqrt{4}=\sqrt{2}$	8BP27 – $\sqrt{256=16}$
8AP31 – $\sqrt{4}=2$	8BP30 – $\left(\sqrt{\sqrt{16}}\right)^2=\left(\sqrt{16}\right)^2=16$
8AP32 – $\sqrt{16}=4$	8BP31 – $\sqrt{\sqrt{16}}^2=\sqrt{16}^2=4$
8AP34 – 4	8BP34 – $\left(\sqrt{\sqrt{16}}\right)^2=\left(\sqrt{16}\right)^2=16$
8AP36 – 4	8BP35 – $\left(\sqrt{\sqrt{16}}\right)^2=\sqrt{16}=4$
8AP37 – 4	8BP37 – $\left(\sqrt{\sqrt{16}}\right)^2=\sqrt{16}=16$
8AP38 – $\sqrt{\sqrt{4}}$	
8AP40 – $\sqrt{16}=4$	
8BP2 – $\left(\sqrt{16}\right)=4$	

8ª QUESTÃO: $\sqrt[3]{\sqrt{a^2}}=$

Erros classificados:

8AP2 – $\left(\sqrt[3]{\sqrt{a^2}}\right)^3=\sqrt{a^2}=a$	8BP11 – $\left(\sqrt[3]{\sqrt{a^2}}\right)^3=\sqrt[2]{a^2}=a^2$
8AP5 – a^2 = a. a = a^2	8BP12 – $\sqrt{a^2}$
8AP9 – $\sqrt[6]{a^2}$	8BP17 – $\sqrt[3]{\sqrt{a^2}}^2=\sqrt{a^2}=a$

continuação:

8AP11 – $\sqrt[6]{a^2}$

8AP12 – $\sqrt[5]{a^2}$

8AP13 – $\sqrt[6]{a^2}$

8AP16 – $\sqrt[2]{a^2}^{\,2} = a$

8AP17 – $\sqrt[2]{a^2}^{\,2} = a$

8AP19 – a^2 +

8AP21 – $\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{a} = 3a.3a = 9a$

8AP23 – $\left(\sqrt[3]{\sqrt{a^2}}\right)^3 = \left(\sqrt{a^2}\right) = a^2$

8AP24 – $a^2 = 0$

8AP26 – $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$

8AP27 – $\sqrt[6]{a^2}$

8AP28 – $\sqrt[6]{a^2}$

8AP29 – $\sqrt[6]{a^2}$

8AP30 – $3\sqrt{a^2} = 4^2 = 3$

8AP32 – a

8AP34 – $\sqrt{a^2}$

8AP37 – a

8AP39 – a

8BP6 – $\left(\sqrt{a^2}\right)^2 = a^2$

8BP7 – $\sqrt{a^2} = a$

8BP8 – a

continuação:

8BP18 - a^6

8BP19 – 3 a^2

8BP22 – $\sqrt[3]{\sqrt{a^2}}^{\,3} = \left(\sqrt{a^2}\right)^2 = a^2$

8BP23 – a

8BP24 – $\left(\sqrt[3]{\sqrt{a^2}}\right)^3 = \sqrt{a^2} = a$

8BP25 – $\left(\sqrt{\sqrt{a^2}}\right)^3 = \left(\sqrt[2]{a^2}\right) = a^2$

8BP26 – $\left(\sqrt[3]{\sqrt{a^2}}\right)^3 = \sqrt[3]{a^2}^{\,2} = a^2$

8BP30 – $\left(\sqrt[3]{\sqrt{a^2}}\right)^4 = \sqrt{a^2} = a^2$

8BP31 – $\sqrt[2]{a^2} = a$

8BP32 – $\left(\sqrt[3]{\sqrt{a^2}}\right)^3 = \sqrt{a^2} = \left(\sqrt[2]{a^2}\right)^2 = a^2$

8BP34 – $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^3 = \left(\sqrt[2]{a^2}\right)^2 = a^2$

8BP35 – $\left(\sqrt[3]{\sqrt{a^2}}\right)^3 = \sqrt{a^2}$

8BP36 – $\left(\sqrt{a^2}\right)^2 = a^2$

8BP37 – $\left(\sqrt[3]{\sqrt{a}^{\,1}}\right) = \sqrt{a^2} = a^2$

8BP38 – $\sqrt{a}$

8BP39 – $\sqrt{a}^{\,3}$

ANEXO D- Erros cometidos pelos alunos da Oitava série da Escola Estadual

1ª QUESTAO: $(3^2.2)^3 =$

Erros classificados:

8AM2 – 6^5	8AM24 – 27. 6 =
8AM3 - 6^6	8BM1 – 6^5
8AM7 – $(9.\ 2)^3 = (\ 81)^3 = 5761$	8BM3 – 54
8AM8 – 9. 6 = 53	8BM4 – $(9.2)^3 = 54$
8AM9 – 72	8BM5 – $(\ 3^2.\ 2)\ .\ (\ 3^2.\ 2)\ .\ (\ 3^2.\ 2) = 27^8.\ 8^3$
8AM10 – 72	8BM7 – $(9.2)^3 = 18^3 = 5588$
8AM11 – $(\ 9^2.\ 8) = 81.\ 8 = 648$	8BM8 – 324
8AM12 – $(3^6.\ 2^3) = (729.\ 4\ ) = 2926$	8BM9 – $(\ 6.\ 2)^3 = 216.\ 8 = 1728$
8AM13 – 6^6	8BM12 – $(\ 6.\ 2)^3 = 18.\ 6$
8AM14 – 9. 8 = 72	8BM15 – (3. 8) = 729
8AM15 – $9.\ 4 = 36 = \sqrt{36}$	8BM16 – $(9.2)^3 = 324$
8AM16 – $3^5\ .\ 8 =$	8BM17 – $(\ 3^2.\ 2)\ .\ (\ 3^2.\ 2)\ .\ (\ 3^2.\ 2)$
8AM17 – $(9.\ 2)^3 = 18^3$	8BM18 – $(9^2)^3 = 81^3$
8AM18 – 6^5	8BM20– $(9.2)^3 = 18^3$
8AM19 – $9.\ 2^3 = 18^3$	8BM21 – $(9.2)^3 = 18^2 = 324$
8AM23 – 6^5	8BM23 – $6^6 = 46656$

2ª QUESTÃO: $(9^3: 3^3)^{-1} =$

Erros classificados:

8AM2 – 3^8	8AM19 – 729: 9 = 6561
8AM3 - - 3^4	8AM20 – 27: 9 = -3
8AM7 - $\frac{4}{9}$	8AM21 – $729: 18 = (40{,}5)^{-1}$
8AM8 – 729 = 27	8AM23 – $(3^3)^{-1}$
8AM9 – 3^8	8BM1 – 3^{-1}
8AM11 – - 3	8BM3 – 2
8AM12 -	8BM5 – $(\ 9^3: 3^3)^3 = 3: 1 = 3$
	8BM7 – $(729: 27)^{-1} = (27)^{-1} = -27$

$\left(9^{-3}:3^{-3}\right)=\frac{1}{9}^{3}:\frac{1}{3}^{3}=\frac{1}{729}:\frac{1}{27}=\frac{1}{729}.\frac{27}{1}=\frac{27}{729}$ 8AM13 – 3^{8} 8AM14 – 27 8AM15 – 729: 27 = 27 = $\sqrt{27}$ 8AM17 - 7 8AM18 – 3^{9}	8BM12 – 3^{-1} 8BM13 – 6561: 27 = 243 8BM18 – $(3)^{-1}$ 8BM20 – $(729: 27)^{-1}$ 8BM21 - $(729: 9)^{-1} = 81^{-1}$ 8BM23 – -1^{1}

3ª QUESTÃO: $\sqrt{7}+5\sqrt{7}+2\sqrt{7}=$

Erros classificados:

8AM3 – $7\sqrt{7}$ 7AM8 – $7\sqrt{7}$ 7AM15 - $\sqrt{12}+\sqrt{9}+\sqrt{7}=\sqrt{21}+\sqrt{7}=\sqrt{28}$ 7AM16 – $7\sqrt{7}$	7BM3 – $7\sqrt{7}$ 7BM11 – $7\sqrt{7}$ 7BM17 – 5 + 2 = 7 7BM18 – $7\sqrt{7}$

4ª QUESTÃO: $2\sqrt{3}.\sqrt{3}=$

Erros classificados:

8AM1 – $2\sqrt{9}$ 8AM3 - $2\sqrt{9}$ 8AM8 – $2\sqrt{9}$ 8AM11 – $3\sqrt{3}$ 8AM12 – $2\sqrt{9}$ 8AM14 – $2\sqrt{6}$ 8AM15 - $2\sqrt{9}$ 8AM16 - $2\sqrt{9}$	8BM5 - $3\sqrt{3}$ 8BM6 - $2\sqrt{6}$ 8BM7 - $2\sqrt{9}$ 8BM8 - $2\sqrt{3}$ 8BM9 - $2\sqrt{3}$ 8BM11 - $2\sqrt{3}$ 8BM12 - $2\sqrt{3}$ 8BM17 - 2. 3. 3 = 6. 3 = 18

continuação:	continuação:
8AM17 - $2\sqrt{9}$	8BM18 - $2\sqrt{9}$
8BM1 - $2\sqrt{3}$	8BM19 - $2\sqrt{1}$
8BM3 - $2\sqrt{9}$	8BM20 – 2. 4. 4. 3. 1,43. 2,86. 1,43 = 4,0818
8BM4 - $2\sqrt{3}$	8BM21 - $3\sqrt{3}$
	8BM23 - $2\sqrt{3}$

5ª QUESTÃO: $3\sqrt{5} : \sqrt{5} =$

Erros classificados:

8AM1 – $3\sqrt{1}$	8AM22 – $3\sqrt{5}$
8AM2 – $3\sqrt{5}$	8AM23 – $\sqrt{5}$
8AM3 – $3\sqrt{1}$	8BM1 - $3\sqrt{1}$
8AM4 – $3\sqrt{5}$	8BM4 - $3\sqrt{5}$
8AM6 – $3\sqrt{5}$	8BM5 - $2\sqrt{5}$
8AM7 – $3\sqrt{5}$	8BM7 - $3\sqrt{1}$
8AM8 – $3\sqrt{1}$	BM8 - $3\sqrt{5}$
8AM11 – $3\sqrt{5}$	8BM12 - $3\sqrt{5}$
8AM12 – $1\sqrt{5}$	8BM16 - $3\sqrt{5}$
8AM13 – $3\sqrt{5}$	8BM17 – 3. 5: 5 = 15: 5 = 5
8AM14 – $3\sqrt{1}$	8BM18 - $3\sqrt{1}$
8AM15 – $3\sqrt{5}$	8BM19 - $3\sqrt{1}$
8AM17 – $3\sqrt{1}$	8BM20 - 3. 2, 23: 2,23 = 6,69: 2,23 =
8AM18 – $3\sqrt{5}$	8BM21 - $3\sqrt{2{,}23} : \sqrt{2{,}23} = 3\sqrt{1}$
8AM20 – $\sqrt{5}$	8BM23 - $3\sqrt{1}$

continuação: 8AM21 – $3\sqrt{5}$	

6ª QUESTÃO: $\sqrt{81} : \sqrt{9} =$

Erros classificados:

8AM1 – $\sqrt{9}$ 8AM2 – $\sqrt{9} : \sqrt{3} = \sqrt{3} : \sqrt{3} = 1$ 8AM3 - $\sqrt{9}$ 8AM4 – 3: 3 = $\sqrt{9}$ = 1 8AM5 – $\sqrt{9} : \sqrt{9} = \sqrt{3} : \sqrt{3} = 1$ 8AM6 – $\sqrt{9} : \sqrt{3} = \sqrt{3} : \sqrt{3} = \sqrt{4}$ 8AM7 – $\sqrt{9}$ 8AM9 - $\sqrt{9}$ 8AM10– $\sqrt{9}$ 8AM11 – $\sqrt{9} : \sqrt{5}$ 8AM14 – 9 8AM15 – $\sqrt{3}$	8AM16 – 9: 3 = 2 8AM17 – $\sqrt{9}$ 8AM20 - $3\sqrt{3} : \sqrt{3} = \sqrt{3}$ 8AM22 – $\sqrt{9} : \sqrt{3} = \sqrt{3} : \sqrt{3} = \sqrt{3}$ 8BM3 – $\sqrt{9}$ 8AB5 = 9 8BM7 – $\sqrt{9}$ 8BM8 – 1 8BM11 – $\sqrt{9} : \sqrt{3} = \sqrt{3}$ 8BM16 - $9\sqrt{9}$ 8BM18 – $\sqrt{9}$ 8BM19 – $\sqrt{9} : \sqrt{9} = \sqrt{1}$ 8BM23 – $3\sqrt{3} : \sqrt{3} = 3\sqrt{\ }$

7ª QUESTÃO: $\sqrt{\sqrt{16}} =$

Erros classificados:

8AM1 – $\sqrt[4]{16}$ 8AM2 – $\sqrt[4]{16}$ 8AM3 – $\sqrt[4]{16}$	8AM23 – $\sqrt[4]{16}$ 8AM24 – $\sqrt[4]{16}$ 8BM1 – 16^4

continuação:	continuação:
8AM4 – $\sqrt[4]{16} = 4$	8BM3 – 32
8AM5 – $\sqrt[4]{16} = \sqrt{2}$	8BM5 – $\sqrt[4]{4}$
8AM6 – $\sqrt[4]{16} = \sqrt{2}$	8BM7 – $\sqrt[4]{16}$
8AM7 – $\sqrt[4]{16}$	8BM8 – 4
8AM8 - $\sqrt[2]{16} = 4$	8BM9 – $\sqrt[4]{16}$
8AM9 – $\sqrt[2]{16}$	8BM10 – $\sqrt[4]{16}$
8AM10 – $\sqrt[4]{16}$	8BM11 – $\sqrt{4}$
8AM11 – $\sqrt[4]{16}$	8BM13 – $\sqrt{16}$
8AM14 – 8	8BM14– $\sqrt[4]{4}$
8AM15 – $\sqrt{4}$	8BM15 – $\sqrt[4]{4}$
8AM16 – $\sqrt[4]{16}$	8BM16 – $\sqrt[4]{4}$
8AM17 – $\sqrt[4]{16}$	8BM17 – 16^4
8AM18 – 16^4	8BM18 – $\sqrt{4}$
8AM19 – $\sqrt[4]{16}$	8BM19 – $\sqrt[2]{16} = 4$
8AM20 – $\sqrt[4]{16}$	8BM20 – $\sqrt[4]{16}$
8AM21 – $\sqrt[4]{16} = 4$	8BM21 – $\sqrt[4]{16}$
8AM22 – $\sqrt[4]{16}$	8BM23 – $\sqrt[4]{16}$

8ª QUESTÃO: $\sqrt[3]{\sqrt{a^2}} =$

Erros classificados:

8AM1 – $\sqrt[6]{a^2}$	8AM22 – $\sqrt[6]{a^2}$
8AM2 – $\sqrt[6]{a}$	8AM23 – - $\sqrt[6]{a^2}$

continuação:	continuação:
8AM3 – $\sqrt[6]{a^2}$	8AM24 – $6\sqrt[6]{a^2}$
8AM5 – $\sqrt[6]{a^2}$	8BM1 – a^{12}
8AM6 – $\sqrt[9]{a}$	8AM3 – $-a^5$
8AM7 – $\sqrt[6]{a^2}$	8AM5 – $\sqrt[6]{a^2}$
8AM8 – $\sqrt[6]{a}$	8BM7 – $\sqrt[6]{a^2}$
8AM10 – $\sqrt[3]{a^2}$	8BM8 – $\sqrt[6]{a^2}$
8AM11 – $\sqrt[6]{a^2}$	8BM9 – $\sqrt[6]{a^2}$
8AM14 – $\sqrt{a.a} = \sqrt{a}$	8BM10 – $\sqrt[5]{a.a}$
8AM15 – $\sqrt[3]{a^2}$	8AM11 – $-a^6$
8AM16 – $\sqrt[5]{a^3}$	8AM13 – $\sqrt{a^5}$
8AM17 – $\sqrt[6]{a^2}$	8BM17 – $\sqrt[6]{a^2}$
8AM18 – a^{12}	8BM18 – $-a^6$
8AM19 – $\sqrt[6]{a^2}$	8BM19 – $\sqrt[6]{a^2}$
8AM20 – $\sqrt[6]{a^2}$	8BM20 – $\sqrt[6]{a^2}$
8AM21 – $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt[2]{a}$	8AM21 – $\sqrt[6]{a^2}$

ANEXO E- Erros cometidos pelos alunos do Primeiro Ano da Escola Particular

2ª QUESTÃO: $2^x = \sqrt{8}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[6]{2}$

Erros classificados:

1PA01 –
$2^x = (2^3)^{2=6}.\ 2^4.\ 2^6$
$2^x = 2^{16}$
$x = 16$

1PA02 –
$2^X = \sqrt{2^3}.2^2.2^3$
$X = 18$

1PA03 –
$2^X = \sqrt{2^3}.2^2.2^3$
$X = 18$

1PA04 –
$2^x = \left(\frac{1}{8}\right).\left(\frac{1}{16}\right).\left(\frac{1}{64}\right)$
$64^x = 8.\ 4.\ 1$
64

1PA07 –
$2^x = 2$

1PA13 –
$2^x = \sqrt{2^3}.2^2.2^3$
$x = 18$

1PA14 –
$2^x = 2^3.2^2.2^3$
$x = 18$

1PA21 –
$2^x = 2{,}82\ .\ 2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$
a =

1PA30 –
$2^x =$

1PB01 –
$2^x = 8^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$
$2^x = 2^3.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{6}$
$x = \frac{3}{48}$

1PB04 –
$2^x = 2^2.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$
$x = 2.\frac{1}{4}.\frac{1}{6}$
$\frac{12x = 24.3.2}{12}$
$12x = 144$
$x = \frac{144}{12} = 12$

1PB06 –
$2^x = 2^2.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$

1PB07 –
$2^x = \sqrt{8}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$
$2^x = \sqrt{2^3}$
$2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$
$x = \frac{3}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{6}$
$12x = 18.3.2$
$x = \frac{108}{12} = 9$

1PB15 –
$2^x = 8^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$
$2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$

1PC27 –
$2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{4}{2}}.2^{\frac{6}{2}}$
$\frac{6+8+12}{2} = \frac{26}{2} = 13$
$x = 13$

continuação:

1PB02 –

$$2^x = 8^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$$

$$2^x = \left(2^3\right)^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$$

$$x = \frac{3}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{6}$$

$$x = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$$

$$x = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$$

$$x = \frac{3}{48}$$

1PB17 –

$$2^x = 8^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$$

$$2^x = \left(2^3\right)^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$$

$$2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$$

$$2^x = \frac{3}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{6}$$

$$2^x = \frac{3}{48} = 16$$

1PB18 –

$$2^x = \sqrt{4096}.\sqrt{64}.\sqrt{2}$$

$$2^x = 64.8.2$$

$$2^x = 1024$$

$$2^x = 2^{10}$$

$$x = 10$$

1PB20 –

$$2^x = \sqrt{2^4}$$

1PB25 –

$$2^x = 8^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$$

$$2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$$

Continuação:

1PC29 –

$$2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$$

$$\frac{6x - 9 +}{6}$$

1PC30 –
2x =

1PC33 –

$$2^x = 2^{\frac{2}{3}}.2^4 - 6^6$$

$$x = \frac{2}{3}.4.6$$

1PD02 –

$$2^x = 2^3.\frac{2}{4}.\frac{2}{6}$$

$$x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.3^{\frac{2}{6}}$$

$$x = \frac{3}{2}.\frac{1}{4}.\frac{2}{6}$$

$$x =$$

1PD03 –

$$x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.3^{\frac{1}{6}}$$

$$x = \frac{3^x}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

1PD04 –

$$x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.3^{\frac{1}{6}}$$

$$\frac{12x = 18.3.2}{12}$$

$$12x = 108$$

$$x = \frac{108}{12}$$

$$x = 9$$

Continuação:	Continuação:
1PB26 – $2^x = 2^2.2^{\frac{4}{2}}.2^{\frac{6}{2}}$ $2^x = \frac{2}{1}.\frac{4}{2}.\frac{6}{2}$ $2^x = 4.4.6$ $2^x = 96$ $x = \frac{96}{2}, x = 48$ 1PB28 – $2^x = 8^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$ $2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$ $x = \frac{3}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ $\frac{x = 18+3+2}{12}$ 1PC06 – $2^x = 2^3 + 2^4 + 2^6$ $x = 3 + 4 + 6$ $x = 12$ 1PB28 – $2^x = 8^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$ 1PB33 – $(2^x = a)$ $2^x = \sqrt{8}$ 21 1PC04 – $2^x = 8^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$ 1PC10 – $2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$ $x = \frac{3}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{6}$ $\frac{12x = 18+48+6}{12}$ 12x = 72 $x = \frac{72}{12} = 6$	1PD06 – $x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{4}{2}}.3^{\frac{6}{2}}$ $2^x = 2^{3+\frac{4}{2}+\frac{6}{2}}$ $2^x = 3+\frac{4}{2}+\frac{6}{2}$ $\frac{2x = 6+4+6}{2}$ $2x = 6+4+6$ $2x = 16$ $x = \frac{16}{2}$ $x = 8$ 1PD09 – $\frac{1}{2}:4 = \frac{1}{2}.\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}:6 = \frac{1}{2}.\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ $2^x = 2^3.2^{\frac{\frac{1}{2}}{4}}.2^{\frac{\frac{1}{2}}{6}}$ $x = 2^3.2^{\frac{1}{8}}.3^{\frac{1}{12}}$ $2^x = \frac{3}{1}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}$ $\frac{24x = 72+3+2}{24}$ $24x = 72+3+2$ $24x + 77$ $x = \frac{77}{24}$ 1PD11 – $2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$

continuação:

1PC11 –

$2^x = 2^4.2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{2}}$

$x = \frac{x.1.1}{2}$

$x = \frac{1}{2}$

$x = 2$

1PC12 –

$2^x = \frac{4}{2}.\frac{2}{4}.\frac{2}{6}$

$2^x = \frac{8}{12}.\frac{2}{3}$

$2^x = \frac{2}{3}$

$x = 2$

1PC14 –

$2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$

$2^x = \frac{3}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$

$\frac{x = 18+3+2}{12}$

$x = 23$

1PC16 –

$2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$

$x = 12.2$

1PC19 –

$2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$

$y = \frac{3}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$

$y = 18+3+2$

$y = 23$

$x = \frac{3}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{6}$

$\frac{12x = 24+3+2}{12}$

$12x = 29$

$x = \frac{29}{12}$

1PD12 –

$2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$

$2^x = 2$

1PD14 –

$2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$

$x = \frac{3}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{6}$

$\frac{12x = 18.3.2}{12}$

$12x = 108$

$x = \frac{108}{12}$

$x = 9$

1PD15 –

$2^x = 2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$

$x = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6} = \frac{4+3+2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$x = \frac{3}{4}$

1PD16 –

$2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{x}}.2^{\frac{1}{6}}$

$x = 23$

1PD18 –

$2^x = 2^{3.\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$

$x = 3.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{6}$

$x = \frac{3}{48}$

continuação: 1PC20 – $2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$ $2^x = \frac{3}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ $\frac{x = 18+3+2}{12}$ $x = 23$ 1PC22 – $2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$ $2^x = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{6}{2}$ $\frac{x = 18+3+2}{12}$ $x = 23$ $2^x = b$ $2^x = 23$ 1PC26 – $2 = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}.2$ 1PB03 – $2^x = 8^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$ $2^x = (2^3)^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$ $2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$ $x = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$	continuação: 1PD19 – $2^x = 2^3.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$ $2^x = 2^{3+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}$ $\frac{x}{1} = \frac{3}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ 1PD23 – $2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$ $2^x = 2^{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}$ $\frac{12x = 18+3+2}{12}$ $12x = 24$ $x = \frac{24}{12}$ $x = 12$ 1PD26 – $2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$ $2^x = 2^{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}$ $x = \frac{3}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6} = \frac{18+3+2}{12} = \frac{24}{12} = 2$ 1PD29 – $2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$ $2^x = 2^{\frac{3}{2}+4+\frac{1}{6}}$ $x = \frac{3}{2}+\frac{4}{1}+\frac{1}{2}$ $\frac{2x = 3+8+1}{2}$ $2x = 12$ $x = \frac{12}{2} \rightarrow x = 6$ 1PD32 – $2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^4.2^6$ $x = 3+8$

3ª QUESTÃO: $2.3^{x-2} = 162$

Erros classificados:

1PA04 – $2.\ 3^{x}.\ 3^{-2} = 162$ $2.\ a.\ \frac{1}{9} = 162$ $18.\ 9^{a}.\ \frac{1}{9} = 1458$ $162^{a} = 1458$ $2.\ 3^{4} = 2.\ 3^{5}$ $a = 4 - 5$ $a = -1$	1PB08 – $6^{x-2} = 6^{2}$ $x - 2 = 2$ $x = 2 + 2$ $x = 4$
1PA06 – $2.\ 3^{x}.\ 3^{-2} = 162$ $2.\ a.\ \frac{1}{9} = 162$ $2^{a}.\sqrt{3^{8}} = \sqrt{162}$ $a = 2.\ 3 - 12.7$ $a = 6 - 12.\ 7$ $a = 6.\ 7$	1PB09 – $2,\ 3^{x}.\ 3^{2} = 9$ $9^{x^{2}} = 9$ $x^{2} =$
1PA09 – $2.\ 3^{x} \cdot 3^{-2} - 162$ $2.\ a.\ \frac{1}{3} = 162$ $2a\sqrt{3^{8}} = a.\ 16^{+2}$ a.1	1PB10 – $2.\ 3^{x} \cdot 3^{-2} - 162$ $2.a + \frac{1}{9} = 162$ $\frac{18.a.1 = 1458}{9}$ $20a = 1458$ $a = \frac{1458}{20}$ $a = 72.9$
1PA11 – $2.\ 3^{x} \cdot 3^{-2} - 162$ $2.\ a.\ \frac{1}{3} = 162$ $2a\sqrt{3^{2}} = a.\ 16^{+2}$ $a = 1$	1PB13 – $2.3^{6-x} = 162$ $2.\ 3^{4} = 162$ $x = 4$
1PA16 – $2.\ 3^{x} \cdot 3^{-2} - 162$ $2.\ a.\ 3^{-2} = 162$ $\frac{2}{3} = \frac{162}{1}$ $\frac{2a = 486}{3}$ $a = \frac{186}{2}$ $a = 243$	1PB14 – $2.\ 3^{x}.3^{-2} = 162$ $\quad 3^{x} = a$ $2.a.\left(\frac{1}{3}\right)^{2} = 162$ 1PB20 – $2.\ 3^{x}.\ 3^{-2} =$ 1PB30 – $2^{x}.\ 3^{-2} = 162$ $a.\quad 3^{2} = 162$ 1PB31 – $2^{x}.\ 3^{-2} = 162$ $\quad 3^{x} = a$ $6^{x}.\ 3^{-2} = 162$ $\quad 3^{x} = 171$ $a.-9 = 162$ $a = 162 + 9$ $a = 171$ 1PB34 – $2.\ 3^{x}.\ 3^{-2} = 162$

continuação:	continuação:
1PA18 – 2. a - $\frac{1}{9}$ =162 2. a - $\frac{1}{9}$ =162 = 0 $\frac{18.9a-1-1458}{9}$ 117^a +1957 1PA20 – 2. $3^{x} \cdot 3^{-2}$ – 162 2. a - $\frac{1}{9}$ =162 $\frac{2a}{9}=162$ $\frac{2a=1458}{9}$ $a=\frac{1458}{2}$ $a=729$ 1PA21– 3^x = a 2. $3^{x} \cdot 3^{-2}$ – 162 $3^x = 3^2$ 2. a - $\frac{1}{9}$ =162 x = 2 $\frac{18.9a.1=1458}{9}$ $9a=\frac{1458}{18}$ $9a=81$ $a=\frac{81}{9}$ $a=9$ 1PA22 – 2. 3^{x-2} = 2. 3^4 x – 2 = 4 x = 4 - 2 x = 2 1PA23 – 2.a.3^{2-x} = 162 $3^x = 3^2$ 2. a. $\frac{1}{9}$ =162 x = 2	2. a. $\frac{1}{9}$ = 162 18. 9a. 1 = 162 162a = 160 a = $\frac{162}{162}$ a = 1 3^x = 1 1PC01 – 2. 3^x. 3^{-2} = 2^1. 3^4 x – 2 = 4 + 1 x = 5 + 2 x = 7 1PC03 – 2. 3^{x-2} = 2. 3^4 3^{x-2} = 3^4 x – 2 = 4 x = 4 – 2 x = -2 1PC06 – $(6)^{x-2}$ = 162 1PC16 – 2. 3^{x-2} = 2. 3 1PC18 – - 12 x = 162 $x=\frac{162}{12}$ 1PC19 – $(6)^{x.2}$ = 162 6x – 12 = 162 6x = 162 + 12 6x = 174 $x=\frac{174}{6}$ x = 29 1PC22 – 2 1PC26 – 6^{x-2} = 1PC28 – 800N 1PC30 – 2. 3^x. 3^{-2} = 162 18^{-2x} = 162 1PD06 –

$\dfrac{18.9a.1=1458}{9}$ $9a=1458$ $9a=81$ $a=\dfrac{81}{9}$ $a=9$ 1PA25 – $2.\ 3^{x-2} = 2.\ 3^4$ $x - 2 = 4$ $x = 4 - 2$ $x = 2$ 1PA26 – $2.\ 3^{x-2} = 2.\ 3^4$ $x - 2 = 4$ $x = 2$ 1PA27 – $2.\ 3^{x-2} = 2.\ 3^4$ $1.\ x - 2 = 1.\ 4$ $1x - 2 = 4$ $x = 2 + 4$ $x = 8$ 1PA29 – $2.\ 3^{x-2} = 2^1.\ 3^4$ $x - 2 = 1 + 4$ $x = 5 + 2$ $x = 7$ 1PA30 – $2.\ 3^{x-2} = 2^1.\ 3^4$ $x - 2 = 4$ $x = 4 - 2$ $x = 2$	continuação: $2^1.\ 3^{x-2} = 3^{3.\ 2}$ $2.\ a^x.\ a^{-2} = a^3\ .\ a^2$ $2.\ a^x\ .a^2$ 1PD07 – $2.\ 3^{x-2} = 2.\ 3^4$ $x - 2 = 4$ $x = \dfrac{4}{2}$ $x = 2$ 1PD16 – $2.\ 3^{x-2} = 2.\ 3^4$ $x - 2 = 4$ $x = 2$ 1PD18 – $2.\ 3^{x-2} = 2.\ 3^4$ $x - 2 = 4$ $x = 4 + 2$ $x = 2$ 1PD19 – $2.\ 3^{x-2} = 2.\ 3^3$ $x - 2 = 3$ $x = 3 + 2$ $x = 5$ 1PD25 –$2.\ 3^{x-2} = 2.\ 3^4$ $x.\ 2 = 4$ $x = 4 - 2$ $x = 2$ 1PD32 – $2.\ 3^{x-2} = 2.\ 3^3$ $x^{-2} = 3$ $x = 5$ 1PD33 – $2.\ 3^{x-2} = 2.\ 3^3$ $x - 2 = 3$ $x = 3 - 2$ $x = 1$

ANEXO F- Erros cometidos pelos alunos do Primeiro Ano da Escola Estadual

2ª QUESTÃO: $2^x = \sqrt{8}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[6]{2}$

Erros classificados:

1LA01 – 2 = = 1

1LA03 –

$$2^x = \sqrt{8}.\sqrt[12]{2}$$
$$2^x = \sqrt{2^3}.\sqrt[12]{2}$$
$$2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{2}{12}}$$
$$x = \frac{3}{2}.\frac{2}{12}$$
$$x = \frac{36}{4}$$
$$x = 9$$

1LA10 –

$$2^x = \sqrt{2^3}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[6]{8}$$
$$x = \frac{3}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{6}$$
$$x = \frac{18.3.2}{12} = \frac{108}{12}$$
$$x = 12{,}47$$

1LA14 –

$$2^x = \sqrt{2^3}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[6]{2}$$
$$2^x = \frac{3}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{6}$$

1LB07 – $2^x = \sqrt[2]{2^4}.\sqrt[4]{2^1}.\sqrt[6]{2^1}$

$$2^x = 2^{\frac{4}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$$
$$x = \frac{4}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{6} = \frac{24.3.2}{12} =$$

1LB09 –

$$2^x = \sqrt{2^{\frac{3}{1}}}.\sqrt{2^{\frac{4}{1}}}.\sqrt{2^{\frac{6}{1}}}$$
$$x = \frac{3}{1}.\frac{4}{1}.\frac{6}{1} = x = 72$$

1LB11 – a = $\frac{3}{48}$

1LC07 –

$$2^x = \sqrt[2]{2^3}.\sqrt[4]{2}$$
$$2^x = 2^{\frac{3}{2}}$$

1LC08 –

$2^x = 2^3 . 2^4 . 2^6$
$2^x = 2^{13}$
$x = 13$

1LC10 – $2^x = \sqrt[10]{32}$
2x =

1LC14 –

$$^{x} = \sqrt{2^{\frac{3}{2}}}.\sqrt{2^{\frac{1}{4}}}.\sqrt{2^{\frac{1}{6}}}$$
$$2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$$
$$x = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{18+3+2}{12} =$$

x = 23

1LC15 –

$$2^x = \sqrt[12]{32}$$
$$2^x = \sqrt[12]{2^5}$$
$$2^x = 2^{\frac{5}{12}}$$
$$x = \frac{5}{12}$$

1LD01 – $2^x = \sqrt{8}$

1LD02 –

$$2^x = 2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{2}}$$
$$x = \frac{1}{16}$$

1LD03 –

$$2^x = \sqrt{2^3}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[6]{2}$$
$$2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$$

continuação:	continuação:
1LB12 – $2^x = \sqrt[10]{32}$ $2^x = \sqrt[10]{2^5}$ $x = 10 + 5$ $x = 15$ 1LB13 – $2^x = \sqrt[3]{2^2}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[6]{2}$ $2^x = \sqrt[12]{2}$ $x = 12$ 1LC02 – $2^x = 2\sqrt{2}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[6]{2}$ $2^x = 2\sqrt[11]{2}$ $x = \sqrt[11]{2}$ 1LC03 – $2^x = 8^2.\ 2^4.2^6$ $2^x = 2^3.\ 2^4.2^6$ x = 3. 4. 6 x = 3. 24 x = 72 1LC06 – $2^x = \sqrt{2^{\frac{3}{2}}}.\sqrt{2^{\frac{1}{4}}}.\sqrt{2^{\frac{1}{6}}}$ $2^x = 2^{\frac{3}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}}$ $\frac{2x}{1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{24x = 12 + 3 + 2}{12} =$ $2x = 17$ $x = \frac{17}{2}$	1LD05 – $2^x = \sqrt{2^3}.\sqrt[4]{1^1}.\sqrt[6]{1^1}$ $2^x = 2^3.1^4.1^6$ $2^x = 2^{13}$ $x = 13$ 1LD08 – $2^x = \sqrt[2]{2^3}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[6]{2}$ $2^x = 2.\frac{3}{2}.\frac{4}{2}.\frac{6}{2}$ $\frac{3.4.6}{2} = \frac{72}{2} = 36$ 1LD11 – $2^x = 2^3.1^{\frac{1}{4}}.1^{\frac{1}{6}}$ $x = 3.\frac{1}{4}.\frac{1}{6}$ 1LD12 – 2x = 0

3ª **QUESTÃO:** $2.3^{x-2} = 162$

Erros classificados:

1LA01 – $5^{x-2} = 162$ $5^{x-2} = 168$ 1LA03 – $2.\ 3^{x-2} = 3^4$ 2x – 2 = 4	1LC11 – $2.\ 3^{x-2} = 8$ 1LC14 – $3^{x-2} = \frac{162}{2}$ $3^{x-2} = 51$

continuação: $2x = 4 + 2$ $x = \frac{6}{2}$ $x = 3$ 1LA12 – $6^{x-2} = 3^5$ $3^{x-4} = 3^5$ $x = 9 + 4$ $x = 9$ 1LA13 – $(2)^{x-2} = 16^2$ $2x^2 - 4 = 9^3$ 1LA14 – $2.\ \frac{3^x}{3^2} = 162$ 1LB05 – $6^{x-2} = 162$ 1LB06 – $6^{x-2} = 162$ 1LB012 – $6^{x-2} = 162$ 1LB013 – $6^{x-2} = 162$ 1LC03 – $6^{x-2} = 162$ $x = \frac{162}{-2}$ $x = 81$ 1LC06 – $6^{x-2} = 2^8$ $6x - 2 = 8$ $6x = 8 + 2$ $x = \frac{10}{6}$ 1LC07 – $6^{x-2} = 162$ 1LC08 – $2.\ 3^{x-2} = 162$ $6^{x-2} = 162$ $6^{x-2} = 2^9$ $x = -6^{-2} + 2^9$ $x = -4^{-11}$	continuação: $3^{x-2} = 3^3$ $x = 5$ 1LC09 – $6^{x-2} =$ 1LC10 – $5^{x-2} = 162$ $5^x = 162$ $5^{1x} = 9^{2+2}$ $5^{1x} = 9^{4x}$ $5 = 9^{1x-4}$ $5 = 9^5$ 1LD01 – $6^{x-2} = 162$ 1LD03 – $6^{x-2} = 27$ 1LD04 – 6^{x-2} 1LD05 – 6^{x-2} 1LD08 – $6\ (x-2) = 2.\ 3^4$ $6x - 12 = 6$ $6x = 6 + 12$ $6x = 18$ $x = \frac{18}{3}$ $x = 3$ 1LD011 – 162:3 1LD012 – $6^{x-2} = 162$ $6x - 12 = 162$ $6x = 162 + 12$ $6x = 174$ $x = \frac{174}{6}$ $174: 6 = 2$