

Regiões de segurança em lançamento de projéteis

(*Security regions in projectile launching*)

Lúcia Resende Pereira e Valdair Bonfim¹

Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil

Recebido em 29/2/2008; Revisado em 11/6/2008; Aceito em 4/7/2008; Publicado em 8/10/2008

Nosso principal objetivo neste trabalho é a determinação de *regiões de segurança* em balística. Por *região de segurança* entendemos a região do espaço tridimensional que fica livre da ação de projéteis. A determinação da região de segurança será reduzida ao cálculo da envoltória de uma família de trajetórias, indexada segundo o ângulo de tiro.

Palavras-chave: lançamento de projéteis, resistência do ar, envoltória, região de segurança.

Our main objective in this work is the determination of security regions in ballistics. By *security region* we understand the region of three-dimensional space that is free to the action of projectiles. The determination of the security region will be reduced to the calculation of the envelope of a family of trajectories, indexed according to the angle of shot.

Keywords: projectile launching, resistance of the air, envelope, security region.

1. Introdução

O assunto “lançamento de projéteis” é bastante rico, tanto do ponto de vista do ensino como da pesquisa, pois aparece numa série de situações práticas. A intenção deste trabalho é abordar um tema ainda pouco trabalhado neste tópico da física, qual seja, o tema da região de segurança. Existem várias situações práticas onde há interesse na determinação desta região, como por exemplo em treinamentos militares, teste de instrumentos bélicos ou em obras da engenharia civil onde se faz necessário o uso de explosivos para desobstruir barreiras. Neste último caso os detritos resultantes das explosões são lançados em direção aleatória com uma determinada velocidade inicial \mathbf{v}_0 , cuja intensidade na prática é superestimada, e a preocupação é que tais corpos não atinjam pessoas e ou construções pré-existentes nas proximidades. Na literatura pesquisada sobre o assunto [1] vimos que foi tratado apenas o caso particular em que não se considera a resistência do ar. Neste trabalho consideraremos o efeito da resistência do ar e da presença de ventos, e comentaremos as mudanças qualitativas ocorridas no movimento e na região de segurança. Como a região de segurança é obtida via o cálculo da envoltória de uma família de trajetórias, e como o cálculo desta envoltória utiliza argumentos de geometria e equações diferenciais, cria-se um ambiente

propício à interdisciplinaridade entre a física e a matemática. Cabe ainda ressaltar que, devido à consideração da resistência do ar e da presença de ventos, aparecem algumas dificuldades que sugerem e incitam a utilização de recursos computacionais, muito úteis para a elaboração de conjecturas e em completa consonância com as diretrizes curriculares nacionais para os cursos de física.

2. Lançamento de projéteis sem resistência do ar

Embora o caso do lançamento de projéteis sem resistência do ar seja um tema bastante estudado, faremos uma recapitulação deste tipo de movimento apenas para efeito de comparações com o caso menos trivial no qual se leva em conta esta resistência, bem como para fixar notação. Suponha que um projétil de massa m seja lançado a partir do solo com uma velocidade inicial \mathbf{v}_0 , a qual faz um ângulo de θ radianos com a horizontal. Este ângulo θ será denominado *ângulo de tiro*. Suponha ainda que a única força atuante no corpo seja a atração gravitacional $m\mathbf{g}$, da Terra sobre o corpo. Escolhendo o sistema de coordenadas ilustrado na Fig. 1, cuja origem coincide com o ponto de lançamento, e denotando por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ a posição do corpo no instante t , então a segunda lei de Newton nos diz que

¹E-mail: valdair@ufu.br.

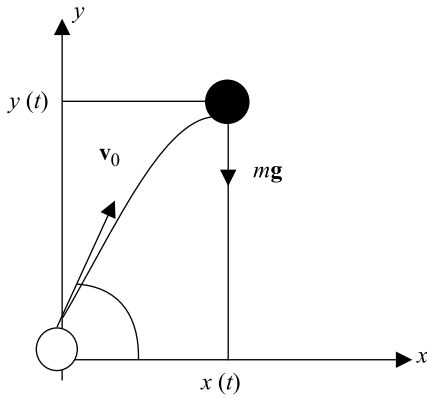


Figura 1 - Sistema de coordenadas para o lançamento oblíquo.

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \mathbf{g}, \quad \mathbf{r}(0) = 0, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}(0) = \mathbf{v}_0. \quad (1)$$

Ou ainda, em coordenadas cartesianas,

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0, & x(0) = 0, & \dot{x}(0) = v_0 \cos \theta, \\ \ddot{y}(t) = -g, & y(0) = 0, & \dot{y}(0) = v_0 \sin \theta, \end{cases} \quad (2)$$

cujas resoluções nos dá

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos \theta)t, & (3) \\ y = -\frac{g}{2} t^2 + (v_0 \sin \theta)t. & (4) \end{cases}$$

Isolando t na Eq. (3) e substituindo na Eq. (4) obtemos

$$y = -\frac{g \sec^2 \theta}{2v_0^2} x^2 + (\tan \theta)x. \quad (5)$$

Das Eqs. (3), (4) e (5) podemos concluir várias coisas a respeito do movimento do projétil e de sua trajetória. De início concluímos, a partir da Eq. (5), que a trajetória do corpo é um arco de parábola. O tempo de subida t_s , isto é, o tempo que o projétil leva para atingir o seu ponto mais alto, é conseguido impondo-se $\dot{y}(t_s) = 0$, ou seja

$$t_s = \frac{v_0 \sin \theta}{g}. \quad (6)$$

Dessa forma, a altura máxima atingida pelo corpo é

$$h_{m\acute{a}x} = y(t_s) = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}, \quad (7)$$

e a distância horizontal máxima alcançada pelo mesmo é dada pela raiz positiva da equação quadrática

$$-\frac{g \sec^2 \theta}{2v_0^2} x^2 + (\tan \theta)x = 0,$$

ou seja,

$$d_{m\acute{a}x} = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta). \quad (8)$$

Em particular, a distância horizontal máxima alcançada pelo corpo é v_0^2/g , e é conseguida quando o ângulo de tiro θ é igual a $\pi/4$ radianos, ou seja, 45° .

3. A envoltória de uma família de curvas

Suponha dada uma família de curvas planas

$$C_\theta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y, \theta) = 0\}. \quad (9)$$

Isto significa que para cada valor do parâmetro θ temos uma curva C_θ constituída por pontos (x, y) que satisfazem à equação $f(x, y, \theta) = 0$. Vamos supor aqui que a função f possua derivadas parciais contínuas com respeito às variáveis espaciais x e y , e também com respeito ao parâmetro θ . Admita ainda que a curva C_θ seja suave, no sentido de admitir reta tangente por cada um de seus pontos. Uma condição suficiente para isso é que, para cada θ fixado, o vetor gradiente (com relação às variáveis espaciais) seja diferente de zero em todos os pontos da curva C_θ , isto é

$$\nabla f(x, y, \theta) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \theta), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \theta) \right) \neq (0, 0),$$

para todo (x, y) na curva C_θ .

A envoltória da família C_θ é uma curva parametrizada $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ satisfazendo às seguintes condições

- i) $\gamma(\theta) \in C_\theta, \quad \forall \theta$;
- ii) γ e C_θ possuem a mesma reta tangente no ponto $\gamma(\theta)$.

As expressões matemáticas para tais condições são, respectivamente, as seguintes

$$\begin{cases} f(\gamma(\theta), \theta) = 0, \\ \nabla f(\gamma(\theta), \theta) \cdot \gamma'(\theta) = 0, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} f(x(\theta), y(\theta), \theta) = 0, & (10) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x(\theta), y(\theta), \theta) \frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(\theta), y(\theta), \theta) \frac{dy}{d\theta} = 0. & (11) \end{cases}$$

Para o cálculo da envoltória basta fixarmos o parâmetro θ e resolvermos o sistema de equações

$$\begin{cases} f(x, y, \theta) = 0 & (12) \\ \frac{\partial f}{\partial \theta}(x, y, \theta) = 0 & (13) \end{cases}$$

nas variáveis x e y . Uma aplicação do Teorema da Função Implícita garante que, se

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial x} \neq 0,$$

então o sistema composto pelas Eqs. (12) e (13) tem solução $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$, a qual é tão regular quanto a função f . Para vermos que toda solução $(x(\theta), y(\theta))$ das Eqs. (12) e (13) é uma envoltória, basta provarmos que a Eq. (11) também fica satisfeita, haja vista que as Eqs. (10) e (12) são as mesmas. Mas isto é simples, pois derivando a Eq. (10) em relação à variável θ encontramos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \theta) \frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \theta) \frac{dy}{d\theta} + \frac{\partial f}{\partial \theta}(x, y, \theta) = 0,$$

que devido à Eq. (13) se reduz à Eq. (11). Para ver que este procedimento de fato conduz à envoltória consideremos duas famílias de curvas, as quais podem ser pensadas como propagações de um determinado tipo de onda.

Família 1: $(x - \theta)^2 + y^2 = \text{sen}^2\theta$, com $0 < \theta < 2\pi$
 Cada C_θ é uma circunferência centrada em $(\theta, 0)$, com raio $|\text{sen}\theta|$. Neste caso temos $f(x, y, \theta) = (x - \theta)^2 + y^2 - \text{sen}^2\theta$, e a resolução do sistema de equações (12)-(13) nos leva a $x = x(\theta) = \theta + \text{sen}\theta \cos\theta$ e $y = y(\theta) = \pm \text{sen}^2\theta$. A Fig. 2 mostra várias circunferências C_θ , bem como a sua envoltória. Caso se trate, por exemplo, de propagação de ondas prejudiciais aos seres humanos, a envoltória delimita a região que está recebendo a influência danosa das ondas da outra região que fica livre desta influência.

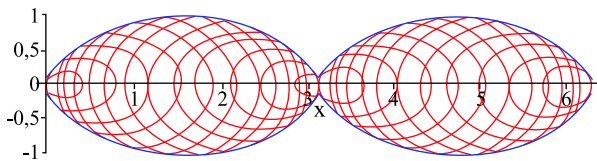


Figura 2 - Família de circunferências cujos centros deslizam sobre um eixo horizontal e cujos raios variam periodicamente.

Família 2: $(x - \theta)^2 + y^2 = \theta$, com $\theta > 0$
 Trata-se agora de uma família de circunferências centradas em $(\theta, 0)$ e raio $\sqrt{\theta}$. Neste caso temos que $f(x, y, \theta) = (x - \theta)^2 + y^2 - \theta$, e a resolução do sistema (12)-(13) fornece $x = x(\theta) = \theta - 1/2$ e $y = y(\theta) = \pm \sqrt{\theta - 1/4}$, para $\theta \geq 1/4$. A Fig. 3 mostra várias curvas C_θ e a envoltória, que é uma parábola.

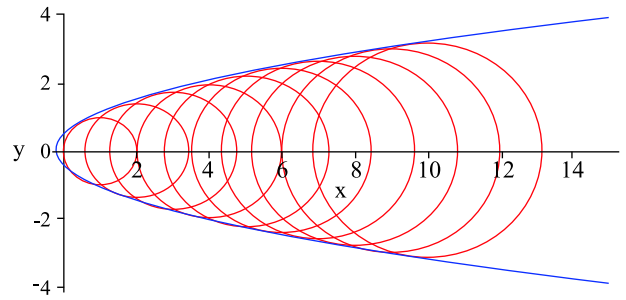


Figura 3 - Família de circunferências cujos centros deslizam sobre o eixo x e cujos raios crescem de acordo com a raiz quadrada da distância do centro à origem.

4. Cálculo da região de segurança

Inicialmente vamos fixar um plano perpendicular ao solo contendo o ponto de lançamento e determinar a envoltória de todas as trajetórias cujas velocidades iniciais sejam paralelas a este plano. Calculemos a envoltória da família de parábolas $(C_\theta)_{-\pi/2 < \theta < \pi/2}$ dada pela Eq. (5).

No caso $f(x, y, \theta) = y + \frac{g \sec^2 \theta}{2v_0^2} x^2 - (\text{tg}\theta)x$, o sistema (12)-(13) torna-se

$$\begin{cases} y + \frac{g \sec^2 \theta}{2v_0^2} x^2 - (\text{tg}\theta)x = 0 & (14) \\ x \sec^2 \theta \left[\frac{gx}{v_0^2} \text{tg}\theta - 1 \right] = 0 \end{cases}$$

Como $x \sec^2 \theta > 0$ para todo $x > 0$ e todo $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, então a segunda equação do sistema (14) nos fornece

$$\text{tg}\theta = \frac{v_0^2}{gx}. \tag{15}$$

Agora, lembrando que $\sec^2 \theta = 1 + \text{tg}^2\theta$, e substituindo a Eq. (15) na primeira equação do sistema (14), obtemos

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + \frac{v_0^2}{2g}. \tag{16}$$

Surpreendentemente, a envoltória da família de trajetórias parabólicas ainda é uma parábola, denominada *parábola de segurança*. Para obter a região de segurança no espaço tridimensional basta fazer a rotação da parábola de segurança em torno de seu eixo de simetria uma vez que, sendo os lançamentos aleatórios, temos de considerar velocidades iniciais \mathbf{v}_0 paralelas a qualquer plano vertical passando pelo ponto de lançamento, e não somente paralelas ao plano fixado. A Fig. 4 ilustra algumas trajetórias, com alguns ângulos de tiro entre 0° e 180° . Observe que cada ponto dentro da região delimitada pela parábola de segurança está na intersecção de duas trajetórias, significando que um corpo neste ponto pode ser atingido por um projétil ascendente ou por um projétil descendente. Cada uma das trajetórias

na Fig. 4 pode ser visualizada na prática com uma mangueira de jardim jorrando água. É uma ocasião onde a teoria pode ser comprovada de modo bastante simples. De fato pode-se observar, por exemplo, que o alcance horizontal máximo da água ocorre quando a mangueira faz um ângulo de 45° com a horizontal.

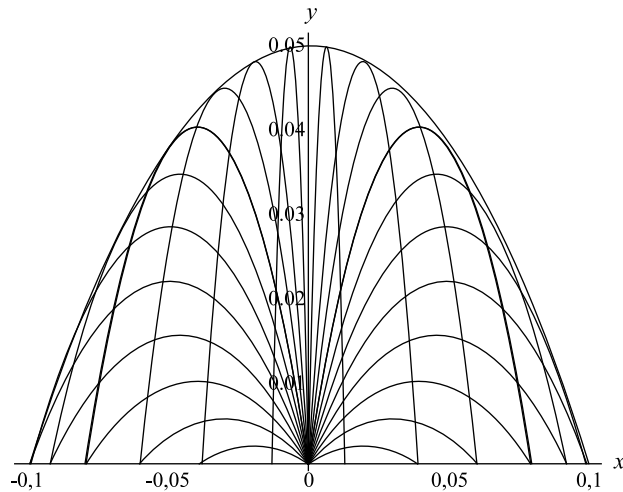


Figura 4 - Família de trajetórias e a respectiva envoltória obtidas desconsiderando-se a resistência do ar e com ângulos de tiro que variam entre 0° e 180° .

A Fig. 5 mostra a implosão do Complexo Penitenciário Carandiru num dia que, possivelmente, não soprava ventos fortes, e portanto se enquadra dentro da modelagem feita. Observe que a nuvem de partículas sugere uma região que se assemelha a um parabolóide. Na Fig. 6 vemos uma erupção vulcânica, que também sugere aproximadamente o formato de região parabólica. Pequenas diferenças com o resultado teórico obtido se devem ao fato de que o modelo físico não incorporou particularidades destas situações, como a possibilidade de existir mais de um centro de explosão, ou seja, diferentes pontos de lançamento, gerando uma combinação de regiões com formato de parabolóide.



Figura 5 - Explosão do Complexo Penitenciário do Carandiru. Foto: Rogério Cassimiro.

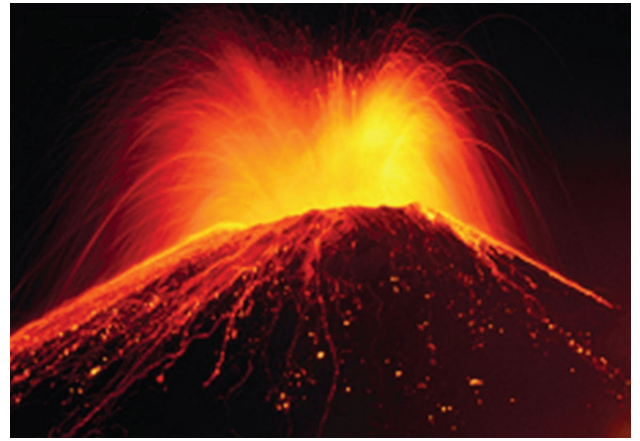


Figura 6 - Uma erupção vulcânica.

4.1. Lançamento de projéteis com resistência do ar

A partir de agora consideraremos, além da força gravitacional da Terra sobre o corpo de massa m , a resistência do ar sobre o mesmo. Esta resistência será modelada fisicamente por $-b\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, onde b é uma constante positiva. Escolhendo o mesmo sistema de coordenadas (vide Fig. 1), cuja origem coincide com o ponto de lançamento, e denotando a posição do corpo no instante t por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, então a segunda lei de Newton nos diz que

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{g} - b\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{r}(0) = 0, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}(0) = \mathbf{v}_0, \quad (17)$$

ou ainda

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \frac{b}{m}\dot{x}(t) = 0, & x(0) = 0, & \dot{x}(0) = v_0 \cos\theta \\ \ddot{y}(t) + \frac{b}{m}\dot{y}(t) = -g, & y(0) = 0, & \dot{y}(0) = v_0 \sin\theta \end{cases}$$

Resolvendo este sistema de equações diferenciais ordinárias obtemos

$$x(t) = \frac{v_0 \cos\theta}{k}(1 - e^{-kt}) \quad (18)$$

e

$$y(t) = \left(\frac{v_0}{k} \sin\theta + \frac{g}{k^2}\right)(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t, \quad (19)$$

onde $k = b/m$.

Isolando t na Eq. (18) e substituindo na Eq. (19) obtemos

$$y = \left(\operatorname{tg}\theta + \frac{g}{kv_0} \sec\theta\right)x + \frac{g}{k^2} \ln\left(1 - \frac{kx}{v_0} \sec\theta\right) \quad (20)$$

Portanto, a trajetória do projétil com velocidade inicial \mathbf{v}_0 e ângulo de tiro θ é a curva C_θ no plano xy cuja

equação é dada na Eq. (20). Observe que a Eq. (20) só faz sentido quando

$$1 - \frac{kx}{v_0} \sec \theta > 0,$$

ou seja, quando

$$x < \frac{v_0 \cos \theta}{k} = \xi. \quad (21)$$

Mais ainda, como

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} y(x) = -\infty, \quad (22)$$

segue que a trajetória tenderia assintoticamente para uma reta vertical (a saber, a reta $x = \xi$) caso não houvesse colisão do projétil com o solo. Isto é, a trajetória seria limitada à direita, conforme ilustrado na Fig. 7. No caso específico abaixo temos $\xi = 12,6295$ m.

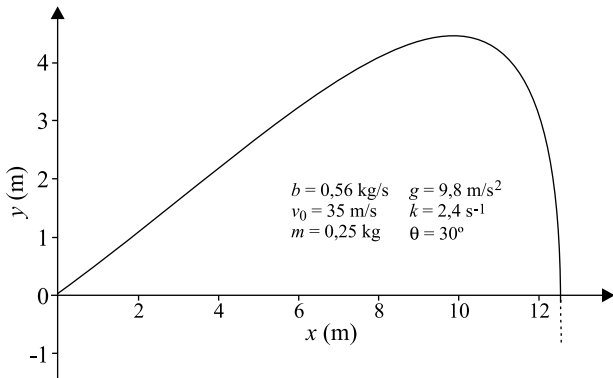


Figura 7 - Trajetória de um projétil considerando-se a resistência do ar.

Além disso, independentemente do ângulo de tiro θ , nenhuma trajetória ultrapassaria a reta $x = v_0/k = (mv_0)/b$. Note que a constante b aparece no denominador e, portanto, quanto maior o seu valor, isto é, quanto maior for a resistência do ar, menor será o alcance horizontal, conforme podemos ver na Fig. 8, que ilustra trajetórias correspondentes aos parâmetros: $m = 2$ kg, $\theta = 45^\circ$, $g = 9,8$ m/s², $v_0 = 20$ m/s, $\theta = 45^\circ$, e três valores distintos de b , em kg/s.

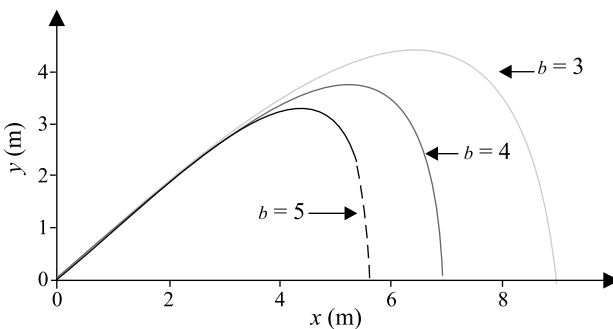


Figura 8 - Trajetórias correspondentes a diferentes valores de b , em kg/s.

Esta é uma diferença qualitativa grande com o caso parabólico, uma vez que lá as trajetórias, caso não fossem interrompidas com a colisão do projétil no solo, seriam ilimitadas na direção x .

Outra diferença entre os dois casos refere-se ao ângulo de tiro que produz o alcance horizontal máximo. Enquanto que o alcance máximo v_0^2/g no caso parabólico é obtido quando o ângulo de tiro é 45° , isso não acontece no caso $b > 0$. Para constatar isso basta considerar o caso particular em que $\|\mathbf{v}_0\| = 20$ m/s, $g = 9,8$ m/s², $b = 1$ kg/s e $m = 0,5$ kg. Chamando $d(\theta)$ a distância horizontal atingida pelo projétil quando o ângulo de tiro é θ , então

$$\left[\operatorname{tg} \theta + \frac{g}{kv_0} \sec \theta \right] d + \frac{g}{k^2} \ln \left[1 - \frac{k}{v_0} \sec \theta \right] = 0,$$

ou seja, a função $d(\theta)$ é dada implicitamente pela equação

$$G(\theta, d) = 0, \quad (23)$$

onde

$$G(\theta, d) = \left[\operatorname{tg} \theta + \frac{g}{kv_0} \sec \theta \right] d + \frac{g}{k^2} \ln \left[1 - \frac{k}{v_0} \sec \theta \right].$$

Utilizando um software para plotar a curva $G(\theta, d) = 0$ obtemos a curva descrita na Fig. 9, ou seja, o ângulo de tiro que produz o alcance horizontal máximo, neste caso particular, é aproximadamente 51% do ângulo de tiro que produz o alcance horizontal máximo no caso parabólico.

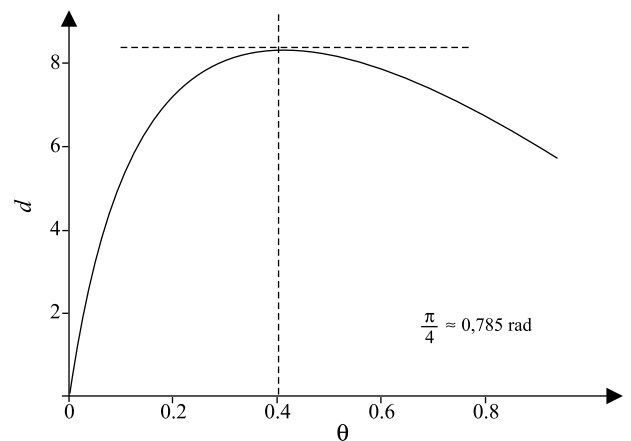


Figura 9 - Alcance horizontal máximo vs. ângulo de tiro.

4.2. Cálculo da região de segurança considerando a resistência do ar

Para o cálculo da envoltória devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} f(x, y, \theta) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \theta}(x, y, \theta) = 0, \end{cases} \quad (24)$$

onde agora

$$f(x, y, \theta) = (\operatorname{tg}\theta)x + \frac{g}{kv_0} (\sec\theta)x + \frac{g}{k^2} \ln\left(1 - \frac{kx}{v_0} \sec\theta\right) - y.$$

Efetuando os cálculos obtemos o sistema

$$\begin{cases} y = (\operatorname{tg}\theta)x + \frac{g}{kv_0} x \sec\theta + \frac{g}{k^2} \ln\left(1 - \frac{kx}{v_0} \sec\theta\right), \\ (\sec^2\theta)x + \frac{g}{kv_0} x \sec\theta \operatorname{tg}\theta - \frac{g}{k} \frac{x \cos\theta \sec\theta \operatorname{tg}\theta}{v_0 \cos\theta - kx} = 0, \end{cases}$$

ou ainda

$$\begin{cases} y = (\operatorname{tg}\theta)x + \frac{g}{kv_0} x \sec\theta + \frac{g}{k^2} \ln\left(1 - \frac{kx}{v_0} \sec\theta\right), \\ \sec\theta + \frac{g}{kv_0} \operatorname{tg}\theta - \frac{g}{k} \frac{\sec\theta}{v_0 \cos\theta - kx} = 0. \end{cases}$$

Isolando x da segunda equação obtemos

$$x = x(\theta) = \frac{v_0^2}{k v_0 \sec\theta + g \operatorname{tg}\theta} \quad (25)$$

e levando a Eq. (25) na primeira obtemos

$$y = y(\theta) = (\operatorname{tg}\theta)x(\theta) + \frac{g}{kv_0} x(\theta) \sec\theta + \frac{g}{k^2} \ln\left(1 - \frac{kx(\theta)}{v_0} \sec\theta\right)$$

que junto com a Eq. (25) fornece uma parametrização da envoltória.

Utilizando um software obtemos as seguintes trajetórias, cujos ângulos de tiro são vistas na Fig. 10 e dadas por

$$\theta_i = (2i - 1) \frac{\pi}{48}, \quad \text{para } i \in \{1, 2, 3, \dots, 12\}.$$

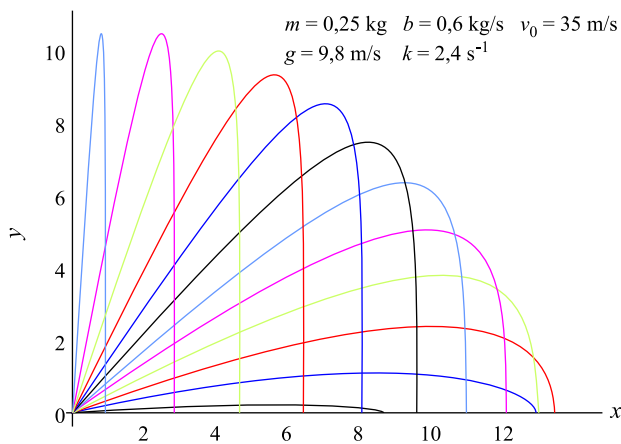


Figura 10 - Família de trajetórias obtidas considerando-se a resistência do ar e com ângulos de tiro que variam entre 0° e 90° .

Para obter a região de segurança no caso $b > 0$ basta rodar a envoltória da família acima em torno do eixo y . Apesar das diferenças qualitativas já comentadas no texto do artigo, foi possível observar, em ambos os casos, que a envoltória da família de trajetórias tem o mesmo aspecto das trajetórias. Precisamente, no caso parabólico a envoltória também é uma parábola, e no caso $b > 0$ a envoltória tem uma assíntota vertical, assim como tem assíntota vertical todas as trajetórias de projéteis que estão sujeitos à resistência do ar.

4.3. O efeito da presença de vento

Vamos supor agora que os lançamentos ocorram num local onde há presença de vento, o qual imprime aos corpos aí presentes uma velocidade constante $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Neste caso a equação do movimento pode ser modelada na forma

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \mathbf{g} - b \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{u} \right), \quad \mathbf{r}(0) = 0, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}(0) = \mathbf{v}_0.$$

Chamando $k = b/m$ e escrevendo a equação anterior em coordenadas cartesianas obtemos

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + k\dot{x}(t) = ku_1, & x(0) = 0, & \dot{x}(0) = v_0 \cos\theta, \\ \ddot{y}(t) + k\dot{y}(t) = -g + ku_2, & y(0) = 0, & \dot{y}(0) = v_0 \operatorname{sen}\theta, \end{cases}$$

cujas resolução fornece

$$x(t) = tu_1 + \left[\frac{v_0 \cos\theta - u_1}{k} \right] (1 - e^{-kt}), \quad (26)$$

e

$$y(t) = \frac{(-g + ku_2)}{k} t + \left[\frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{k} - \frac{ku_2 - g}{k^2} \right] (1 - e^{-kt}). \quad (27)$$

Observe que para valores grandes de t o fator $1 - e^{-kt}$ é quase igual a 1, de modo que temos as seguintes aproximações

$$x(t) \approx u_1 t + \left[\frac{v_0 \cos\theta - u_1}{k} \right],$$

e

$$y(t) \approx \frac{(-g + ku_2)}{k} t + \left[\frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{k} - \frac{ku_2 - g}{k^2} \right].$$

Chamando $c_1 = \frac{v_0 \cos\theta - u_1}{k}$ e $c_2 = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{k} - \frac{ku_2 - g}{k^2}$, então

$$x(t) \approx u_1 t + c_1 \quad \text{e} \quad y(t) \approx \frac{(-g + ku_2)}{k} t + c_2.$$

Logo

$$\frac{y(t) - c_2}{x(t) - c_1} \approx \frac{(-g + ku_2)}{k u_1},$$

ou seja

$$y(t) \approx c_2 + \frac{(-g + ku_2)}{k u_1} (x(t) - c_1).$$

A conclusão é de que para valores grandes de t a trajetória fica arbitrariamente próxima de uma reta com inclinação $\frac{(-g+ku_2)}{ku_1}$, a saber, a reta r de equação cartesiana

$$y = c_2 + \frac{(-g + ku_2)}{k u_1} (x - c_1).$$

As diferentes trajetórias dependerão dos valores de u_1 e u_2 . Na sequência analisaremos alguns casos particulares.

4.3.1. Caso 1: Vento horizontal soprando na direção oeste

Neste caso temos $u_1 < 0$ e $u_2 = 0$. Logo a inclinação da reta r será positiva e igual a $-g/ku_1$, e como a ordenada $y(t)$ dada na Eq. (27) é limitada superiormente concluímos em particular que o corpo colidirá com o solo em tempo finito.

As Figs. 11 e 12 ilustram duas trajetórias típicas de um corpo sendo lançado a partir da origem e as correspondentes retas assíntotas, cujos dados são os seguintes: $\theta = \pi/4$ rad, $\|\mathbf{v}_0\| = 20$ m/s, $u_2 = 0$, $m = 0,25$ kg, $b = 0,6$ kg/s, $k = 2,4$ s⁻¹, $g = 9,8$ m/s². Na Fig. 11 temos $u_1 = -10$ m/s e na Fig. 12 temos $u_1 = -2$ m/s. Ou seja, se o vento oeste for muito intenso o corpo colidirá com o solo num ponto de abscissa negativa (Fig. 11).

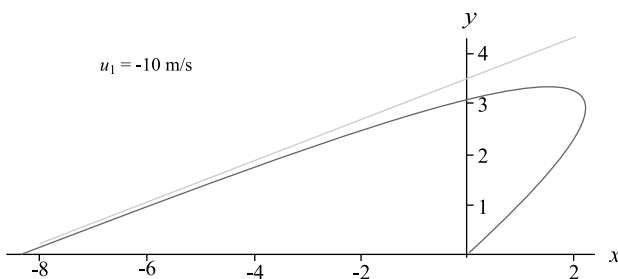


Figura 11 - Trajetória de um corpo e sua respectiva assíntota. Lançamento realizado a partir da origem considerando-se a resistência do ar e a presença de vento que sopra na direção oeste com intensidade de 10 m/s.

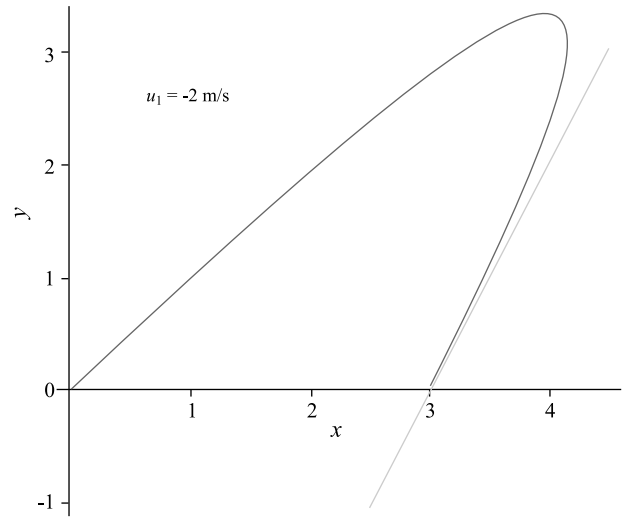


Figura 12 - Trajetória de um corpo e sua respectiva assíntota. Lançamento realizado a partir da origem considerando-se a resistência do ar e a presença de vento na direção oeste com intensidade de 2 m/s.

A Fig. 13 ilustra algumas trajetórias com ângulos de tiro compreendidos entre 0° e 180°. O efeito do vento com velocidade \mathbf{u} sobre o formato da região de segurança é evidente, a saber, o vento deforma a região de segurança fazendo com que a mesma não apresente nenhum tipo de simetria.

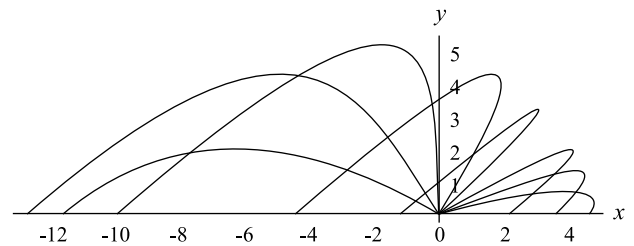


Figura 13 - Família de trajetórias obtidas considerando a resistência do ar e a presença de vento na direção oeste.

4.3.2. Caso 2: Vento horizontal soprando na direção leste

Neste caso temos $u_1 > 0$ e $u_2 = 0$. A análise é completamente análoga à anterior, com a diferença de que para valores grandes de t as órbitas ficarão arbitrariamente próximas de retas com inclinação negativa e igual a $-g/ku_1$.

4.3.3. Caso 3: Vento com direção nordeste, e baixa intensidade na direção vertical

Por “vento na direção nordeste” estamos querendo dizer que as componentes u_1 e u_2 são ambas positivas, e por “baixa intensidade” entenderemos que $u_2 < g/k$. Sob estas hipóteses a inclinação $(-g + ku_2)/(k u_1)$ da reta assíntota será negativa, e os projéteis colidirão com o solo em tempo finito, como nos casos anteriores. A

região de segurança apresentará o mesmo aspecto dos casos anteriores.

4.3.4. Caso 4: Vento com direção nordeste, e alta intensidade na direção vertical

Além de supormos que u_1 e u_2 são positivas, admitiremos que $u_2 > g/k$. Isto implica que o coeficiente angular $(-g + ku_2)/(ku_1)$ da reta assíntota é positivo. Assim, as expressões de $x(t)$ e $y(t)$ dadas nas Eqs. (26) e (27) são ilimitadas superiormente, e dizem que para valores grandes de t o projétil estará bem próximo de uma reta com coeficiente angular positivo. Em particular podemos concluir que o corpo jamais atingirá o solo, conforme ilustra a Fig. 14.

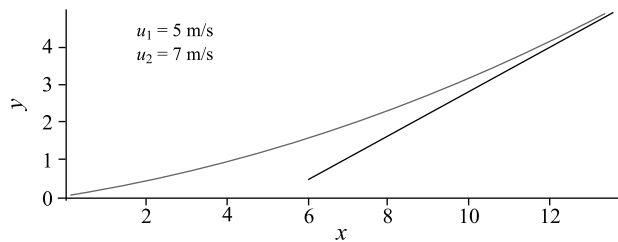


Figura 14 - Trajetória de um corpo lançado a partir da origem na presença de vento na direção nordeste e alta intensidade na direção vertical, e sua respectiva assíntota.

A Fig. 15 por sua vez mostra várias trajetórias, com

diferentes ângulos de tiro. Com ela tem-se uma idéia de como fica a região de segurança, que é o complementar da região “varrida” por estas várias trajetórias.

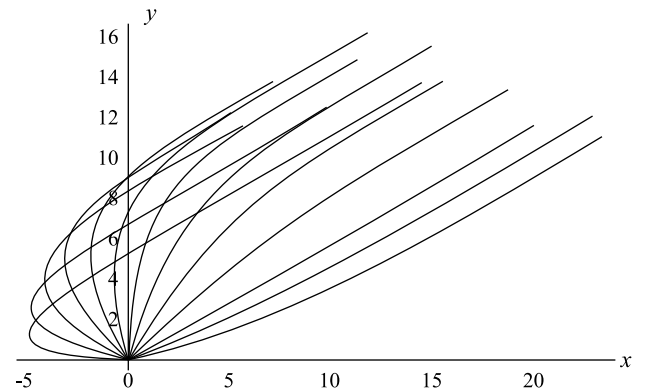


Figura 15 - Família de trajetórias na presença de vento na direção nordeste, com alta intensidade na direção vertical.

Referências

- [1] J.L. Synge e B.A. Griffith, *Mecânica Racional* (Ed. Globo, Porto Alegre, 1968), 2ª ed.
- [2] M.P. Do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* (Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2005), Coleção Textos Universitários.