XADREZ CHINÊS[1]

Aparecida Francisco da SILVA,
Hélia Matiko Yano KODAMA[2]

Resumo: As autoras buscam mostrar como o uso do jogo xadrez chinês pode tornar-se um recurso enriquecedor especialmente no sentido de propor algumas atividades motivadoras para o estudo de tópicos de geometria, combinatória ou progressões aritméticas. No entanto, destacamos que o uso de jogos em sala de aula deve resultar da reflexão do professor sobre qual jogo usar, como usar, qual o melhor momento de inseri-lo em sala de aula e como explorá-lo educacionalmente, ou seja, com que objetivo. Vale destacar que não pretendemos esgotar todas as possibilidades, apenas apresentar um conjunto de atividades recreativas que organizamos no desenvolvimento do projeto "Jogos no Ensino da Matemática", junto ao Núcleo de Ensino da UNESP, Câmpus de São José do Rio Preto.

Palavras-chave: jogo no ensino; xadrez chinês.

INTRODUÇÃO

No presente artigo apresentamos uma seleção de atividades e conteúdos que podem ser explorados a partir do jogo Xadrez Chinês na forma como foi desenvolvido no projeto "Jogos no Ensino da Matemática", especialmente no que diz respeito às atividades a partir das situações do jogo ou de seu tabuleiro e situações problemas que podem ser exploradas.

No intuito de incentivar o uso deste jogo pelos leitores, apresentamos na primeira parte uma pequena referência a respeito de sua origem e suas regras.

Na segunda parte denominada "Aspectos Gerais" apresentamos algumas observações que o professor pode fazer enquanto os alunos jogam e que podem ajudar o professor a avaliar a compreensão do jogo e mesmo dos conteúdos, pelos alunos.

Na terceira parte apresentamos alguns aspectos combinatórios e um pouco de geometria que pode ser explorada a partir do jogo, suas regras e seu tabuleiro.

Origem

Aparentemente os jogos de tabuleiro surgiram por volta dos anos 600 na Índia. Sua origem, entretanto, parece estar ligada às fundações das primeiras cidades de que se noticia, há alguns milhares de anos, nas regiões do antigo Egito e da Mesopotâmia (hoje Iraque), onde foram encontrados em escavações arqueológicas objetos e desenhos que parecem ser ou fazer referência

---

[1]A versão preliminar deste artigo foi elaborada pelo grupo de estudos Jogos no Ensino da Matemática do IBILCE/UNESP, e as autoras agradecem o trabalho de digitação da aluna Michele R. Dornelas.
[2]Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas – UNESP – São José do Rio Preto.

a jogos de tabuleiro. Há traços de que mais tarde os jogos tenham aparecido em vários lugares do mundo antigo, tais como Índia, China, Japão, Pérsia, África do Norte e Grécia. Depois, os jogos de tabuleiro chegaram até Roma, outros países da Europa e países árabes.

Xadrez Chinês também chamado de Dama Chinesa, segundo bibliografia pesquisada, tem pouco a ver com Xadrez e aparentemente, não foi inventado na China. Tendo surgido no século XIX tornou-se popular em primeiro lugar na Suécia.

Acredita-se que J. Pressman introduziu o jogo nos USA durante 1928, entretanto, outros manufatureiros começaram a fabricá-lo logo após, incluindo Milton Bradley quem, sem documento confirmado, patenteou o jogo em 1941.

A primeira patente foi da Ravensburger, famosa companhia alemã de jogos. Com o nome Stern-Halma apareceu poucos anos após o Halma na Alemanha e foi, mais tarde, lançado no USA com o nome de Xadrez Chinês e esta é sua forma mais conhecida hoje.

Como jogar

O jogo, possui versões para 2, 3, 4 e 6 jogadores (com formatos distintos de tabuleiros). Na versão para 3 jogadores, com formato da "Estrela de Davi" cada jogador começa com 15 peças, com sua cor posicionada na base da mesma cor (uma das pontas da estrela). O objetivo é simplesmente mover todas as peças através do tabuleiro, para o lado oposto. Move-se uma peça por vez ao longo de qualquer linha durante as jogadas e nenhum jogador poderá ocupar a ponta que corresponde "espaço de partida" ou de "chegada" de outro jogador, sendo permitido mover a peça para qualquer casa adjacente seguindo os segmentos. Se a casa estiver ocupada por uma peça, seja ela sua ou de um adversário, e a casa subseqüente no mesmo segmento estiver vaga, pode-se pular até ela. Uma peça pode dar vários pulos na mesma jogada. O jogador que melhor criar oportunidades e levar todas as peças para o lado oposto em primeiro lugar, vencerá o jogo.

Aspectos Gerais

Apesar do jogo ser indicado para crianças a partir de 4 anos, ele é muito interessante para todas as idades. Isso devido à variedade de assuntos que podem ser desenvolvidos a partir dele.

Com crianças de 4 à 6 anos, pode-se trabalhar a parte de coordenação motora, a diferença de cores, senso de direção, contagem, forma geométrica triangular e a noção de conjuntos.

Já com a faixa etária de 7 à 10 anos, podem ser exploradas as outras formas geométricas existentes no tabuleiro além do triângulo, condições de alinhamento (ao se locomover), a noção de segmento, quantidade e as diferentes estratégias.

Nas idades mais avançadas, poderão ser trabalhados esses mesmos conceitos, aprofundando-os e também explorar o conceito de semelhança de figuras planas, pavimentação do plano, grafos e combinatória.

Na perspectiva da resolução de problemas, o professor formulará questões aproveitando as situações do jogo e discutirá, ao final, os vários conceitos que apareceram e aparecem naturalmente durante as jogadas.

Como é importante conhecer os materiais do jogo e promover todo tipo de situação que possibilite seu conhecimento e assimilação das regras, sugerimos as seguintes questões:

1- Como é o material que você observou? Descreva-o.

2- Como é a organização das peças no tabuleiro antes do início da partida?

3- Qual é o objetivo do jogo?

4- Quais as condições para que se possa realizar um passe (movimento) longo?

5- É possível chegar ao resultado por um caminho diferente?

6- Conhece algum jogo análogo?

7- Como vê o jogo? Poderia imaginar um jogo análogo mais simples?

Desenvolver esse hábito de questionamentos, contribui para o estabelecimento de atitudes que enaltecem a observação como uma dos principais recursos para a aprendizagem acontecer.

Além disso, o professor deverá observar seus alunos, a respeito de suas ações e raciocínio. Por exemplo, podem ser observados durante o jogo os seguintes aspectos:

1- Como o aluno se organiza no espaço? Leva uma peça de cada vez para o outro lado do tabuleiro?

2- O aluno tem domínio do espaço do tabuleiro em termos de sentido e direção?

3- Exploração do tabuleiro: o aluno explora todos os lugares possíveis para o deslocamento das peças?

4- Estratégia: o aluno é capaz de considerar o adversário para coordenar os movimentos ou fica atento somente em suas próprias peças? Consegue realizar "séries de pulos", coordenando várias direções e sentidos ao mesmo tempo?

Observação: Estas situações não estão selecionadas por idades. Cabe ao professor selecionar aquelas que se encaixam na faixa etária ou realidade do grupo em que estiver trabalhando.

Aspectos Combinatórios

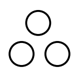
Analisando o tabuleiro do jogo podemos estudar alguns elementos de contagem. Por exemplo, alguns dos chamados números figurados aparecem naturalmente ao se explorar o tabuleiro. Estes, como diz o próprio nome, resultam da distribuição de pontos de maneira a formar figuras geométricas.

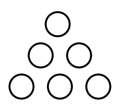
Os números triangulares e os hexagonais podem serem explorados a partir do tabuleiro da seguinte forma:

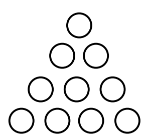
I) Triangulares:

Considerando um dos triângulos "maiores" e indicando por T_n o n-ésimo número triangular temos:

$T_1 = 1$ 

$T_2 = 1+2 = 3$ 

$T_3 = 1+2+3 = 6$ 

$T_4 = 1+2+3+4 = 10$ 

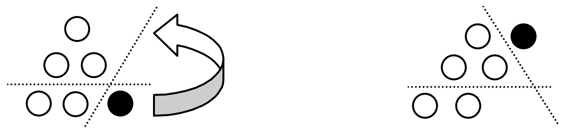
e de modo geral,

$T_n = T_{n-1} + n$

$T_n = 1+2+...+n = \frac{1}{2} .n.(n+1)$

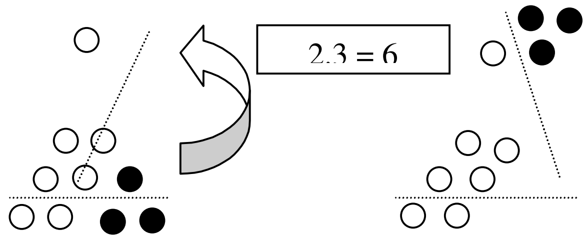
Esses triângulos podem ser transformados (a partir do 3º) da seguinte forma:

T_3 :



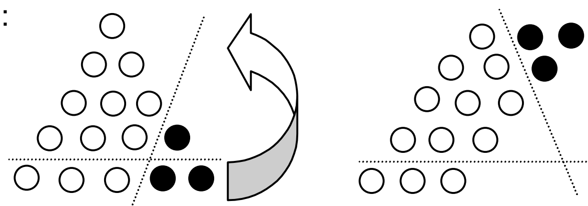
2.3 = 6

T_4 :



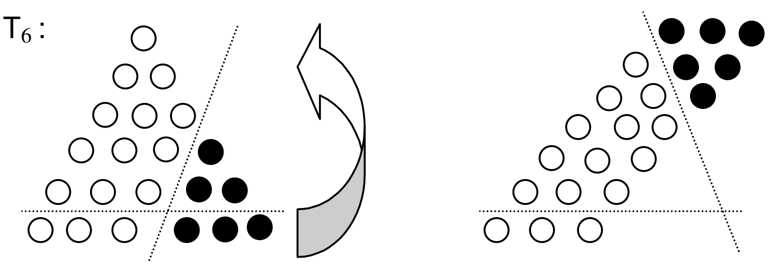
2.5 = 10

T_5:



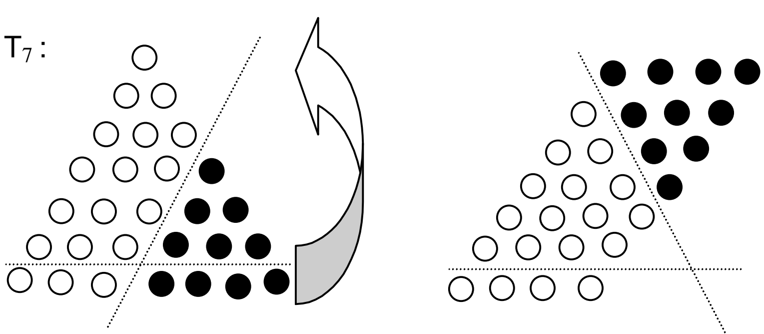
3.5 = 15

T_6 :



3.7 = 21

T_7 :



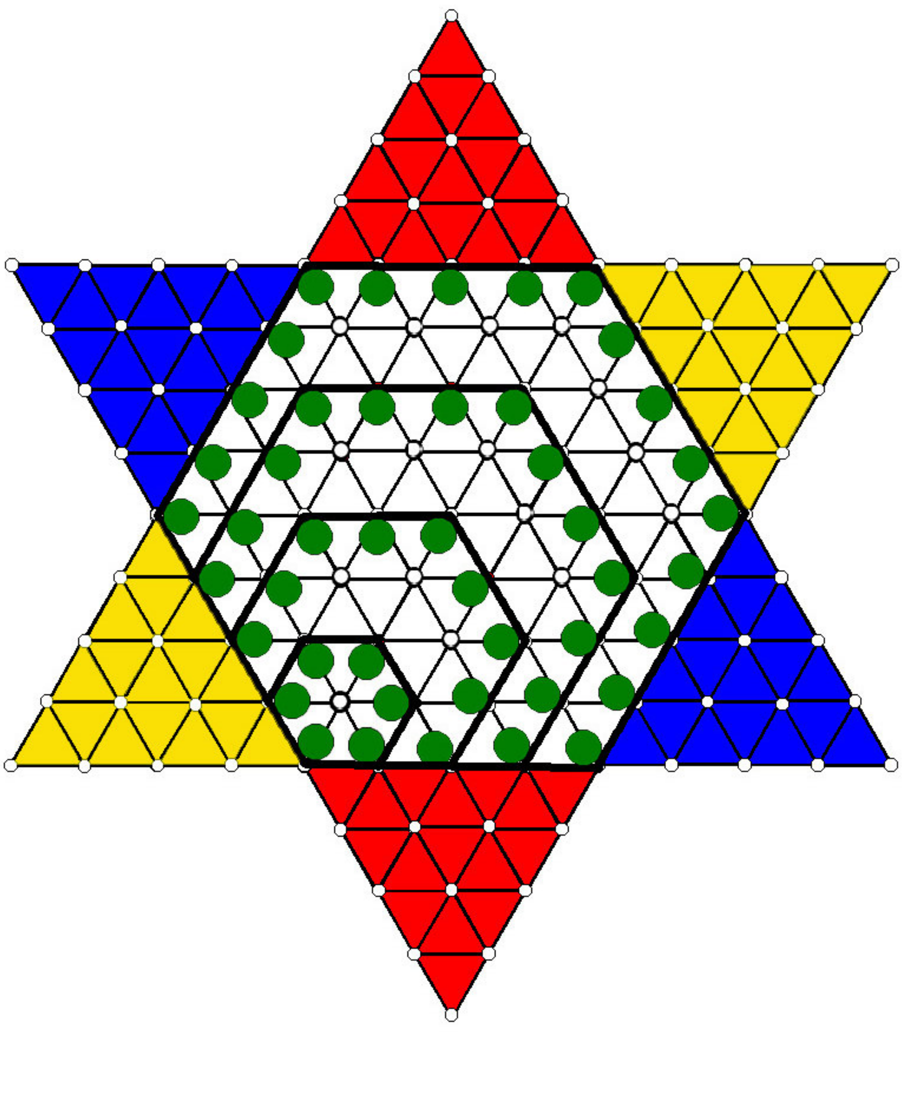
4.7 = 28

Observemos que ao “deslocarmos” o triângulo indicado estamos “completando” um “paralelogramo”, com a seguinte propriedade:

1) Se n é ímpar conservamos a linha básica n e as demais ficam (n-1)+1, (n-2)+2, **....**, $\left(n-\frac{(n-1)}{2}\right)+\left(\frac{(n-1)}{2}\right)$, ou seja, teremos $\frac{(n+1)}{2}$ linhas todas com n pontos o que nos dá, em geral, $n.\frac{(n+1)}{2}$ pontos em T_n.

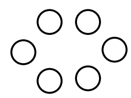
2) Se n é par formamos o paralelogramo com $\frac{n}{2}$ linhas onde as linhas têm (n+1), (n-1)+2, ..., $\left(n-\frac{n}{2}\right)+\frac{n}{2}$ pontos, ou seja, no total teremos $\frac{n}{2}.(n+1)$ pontos.

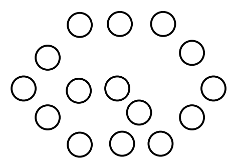
II) Números Hexagonais: H_n



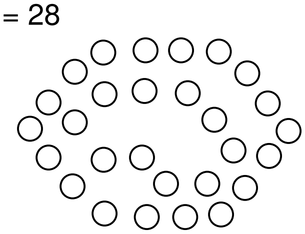
Observando o centro do tabuleiro, também podemos perceber os números hexagonais:

$H_1 = 1$ 

$H_2 = 1+5 = 6$ 

$H_3 = 1+5+9 = 15$ 

$H_4 = 1+5+9+13 = 28$



.
.
.

Observamos que para obter os números hexagonais H_n acrescentamos 5 pontos que serão os novos vértices, alinhados com os demais (fig 1) e acrescentamos a cada novo "lado" obtido outros novos pontos.

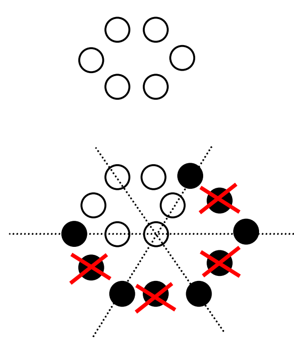


Fig 1. passagem de H_2 para H_3

Agora a pergunta: como calcular H_n para n qualquer? (Observe que aqui se apresenta uma situação problema que pode ser explorada para a introdução do conceito das Progressões Aritméticas).

Para respondê-la podemos questionar os alunos:

- Quantos pontos acrescentamos em cada passo?
- Como podemos organizar esse resultado?

Veja o que segue:

$H_1 = 1$

$H_2 = 1+5$

$H_3 = H_2+5+\{\text{pontos interiores para completar os 4 lados:4}\} = H_2+9$

$H_4 = H_{3+}5+\{\text{pontos interiores para completar os 4 lados(4.2)}\} = H_3+13$

$H_5 = H_4+5+\{\text{pontos interiores para completar os 4 lados(4.3)}\} = H_4+17$

$H_6 = H_5+5+\{\text{pontos interiores para completar os 4 lados(4.4)}\} = H_4+21$

Denotando por b_n, $n \geq 2$, o número de pontos que acrescentamos em cada passagem temos:

$b_1 = 1 = 5+4.(-1) = 5+4.(1-2)$

$b_2 = 5 = 5+4.(2-2)$

$b_3 = 5+4.1 = 5+4.(3-2)$

$b_4 = 5+4.2 = 5+4.(4-2)$

.

.

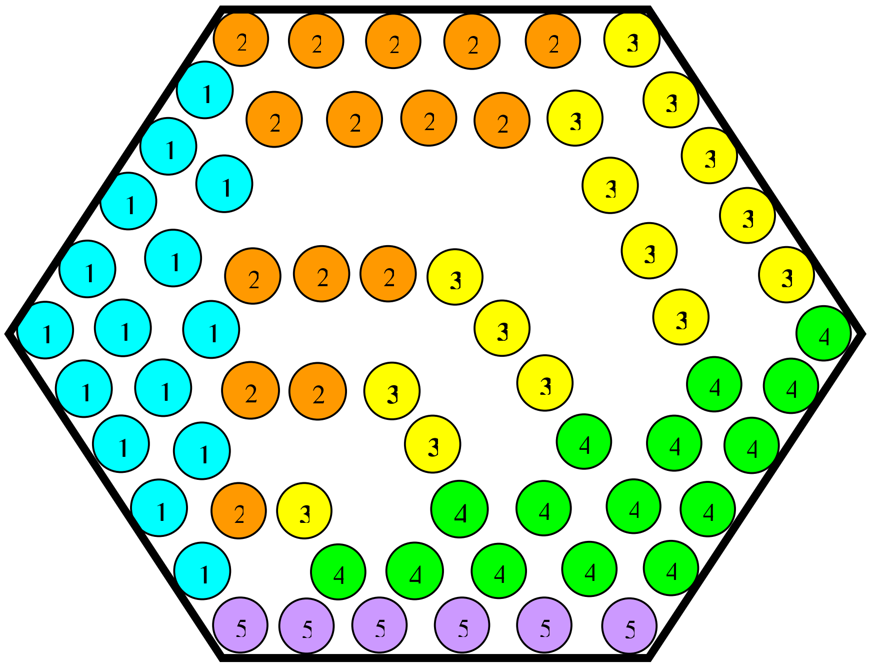
.

de modo geral, bn = 5+4.(n-2) = 5+4.n-8 = 4.n - 3

Mas os $H_{n's}$ são as somas dos $b_{j's}$ para $1 \leq j \leq n$, ou seja, H_n = 1+5+9+...+(4.n-3).

Para obtê-la de modo geral, em função de n como podemos preceder?

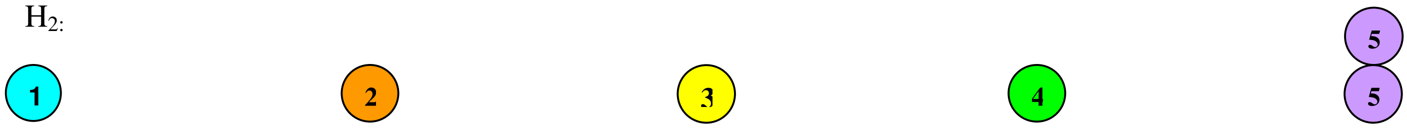
Vejamos: Uma forma de facilitar este processo é obter os números hexagonais em função dos triangulares. Para tanto observe a distribuição com setores “coloridos”.



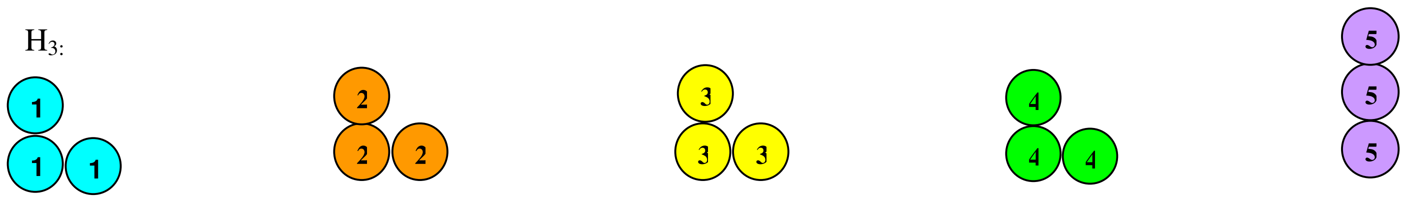
Distribuindo convenientemente as peças destacadas obtemos:

H_1:

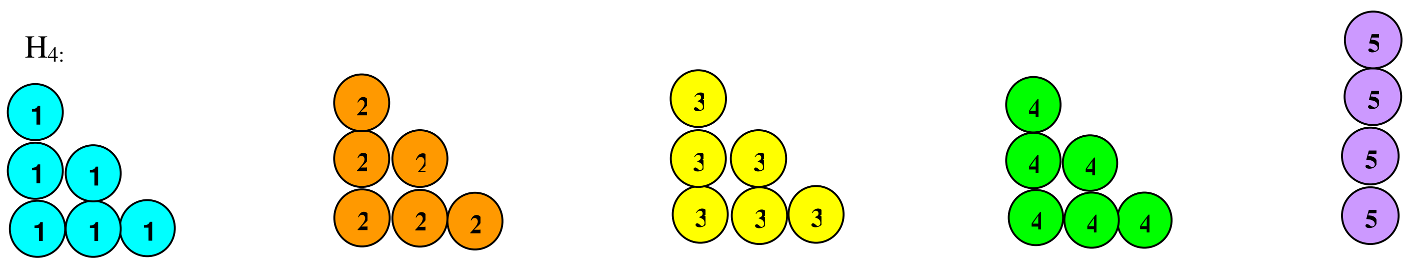
H_2:



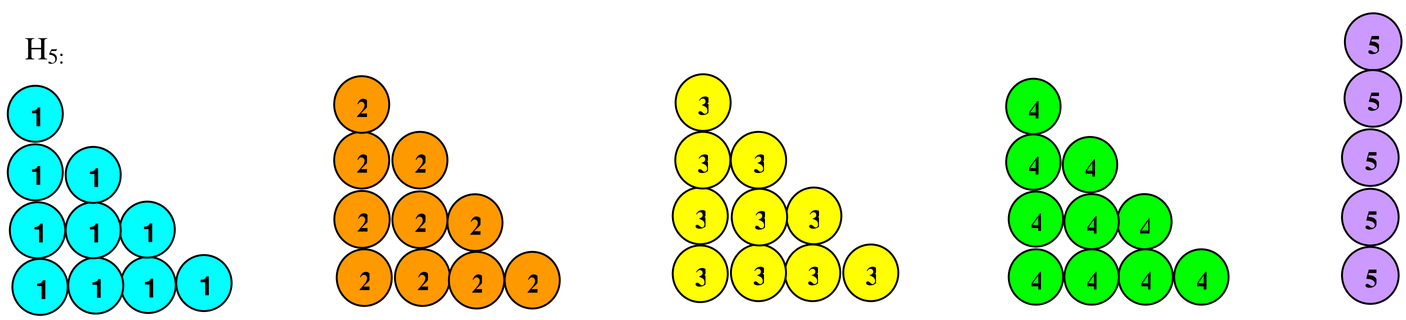
H_3:



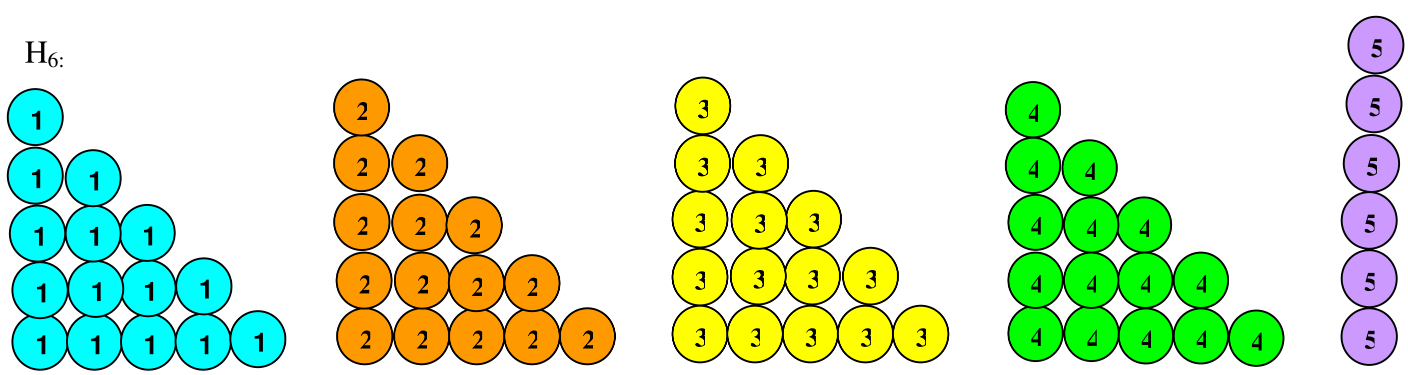
H_4:



H_5:



H_6:



Assim, temos:

$H_2 = 4.T_1 + 2$

$H_3 = 4.T_2 + 3$

$H_4 = 4.T_3 + 4$

$H_5 = 4.T_4 + 5$

De modo geral, obtemos:

$H_n = 4.T_{n-1} + n$

Como sabemos que $T_{n-1} = \frac{1}{2}.(n-1).n$ temos:

$$H_n = 4.\frac{1}{2}.(n-1).n + n = 2.(n-1).n+n = [2.(n-1)+1].n = (2.n-2+1).n = n.(2.n-1)$$

Também podemos explorar o número de triângulos do tabuleiro. Em cada região triangular colorida (vermelho, verde e azul) podemos perceber que os triângulos são distribuídos de modo a formar uma P.A. (Progressão Aritmética) de razão 2 como veremos.

Indicando por a_i o número de triângulos compreendidos entre a (i-1)-ésima linha e a i-ésima linha a partir de um dos vértices do tabuleiro, temos:

$a_1 = 1$

Na linha seguinte temos 3 triângulos como pode ser visto na figura, ou seja,

$a_2 = a_1 + 2$

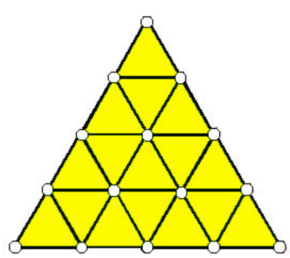
Podemos resumir estes dados da seguinte forma:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1+2 = 3 = a_1+2$

$a_3 = 3+2 = 5 = a_2+2$

$a_4 = 5+2 = 7 = a_3+2$



Assim, o termo geral é: $a_{n+1} = a_n + r$

Agora, reescrevendo os termos, temos:

$a_1 = 1$

$a_2 = a_1+2$

$a_3 = a_2+2 = (a_1+2) + 2 = a_1+2.2$

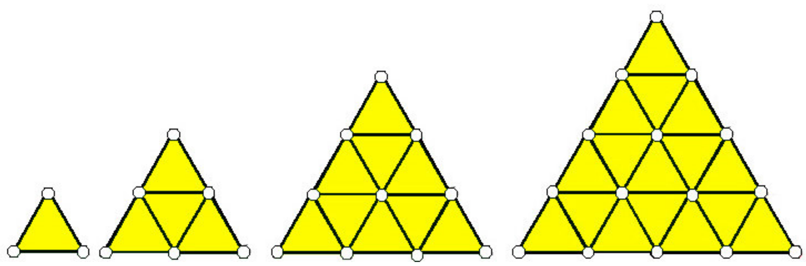
.

.

.

$a_n = a_{n-1}+2 = a_1 + (n-1).2 + 2 = a_1+n.2$

Ao observarmos os triângulos, podemos contabilizar o número total de triângulos "pequenos" em que esse foi decomposto:



Se a cada triângulo juntarmos um outro congruente ao primeiro de forma conveniente podemos transformar as "pilhas triangulares" de triângulos em paralelogramos decomposto em triângulos. Cada fila do paralelogramo é formada pelo mesmo números de triângulos.

Assim podemos observar que $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$ e obtemos a seguinte propriedade de P.A. "a soma de termos eqüidistantes é constante", e, a partir daí inferirmos a fórmula para a soma dos termos de uma P.A.

Observação 1) Ao trabalharmos com alunos do ensino médio podemos formalizar este resultado da seguinte forma:

A partir desta propriedade $a_1+a_n = a_2+a_{n-1} = \ldots$, deduzimos a fórmula da soma finita (S_n) dos n primeiros termos de uma P.A., da seguinte maneira:

$S_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$

$S_n = a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1$

$$2S_n = \underbrace{(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\ldots+}_{\text{nparcelas}}(a_n+a_1) \Rightarrow 2S_n = n(a_1+a_n)$$

Portanto,

$$S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}$$

No exemplo acima, temos:

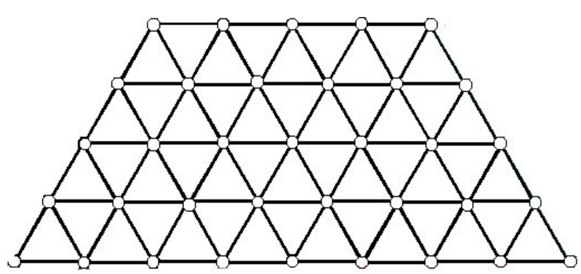
$$S_4 = \frac{(1+7).4}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

O número de pontas da estrela em todo tabuleiro é 6. Sendo T_c o número de triângulos "pequenos" coloridos temos:

$$T_c = 6.S_4 = 6.16 = 96$$

Vejamos no que segue o número total de triângulos "pequenos" no tabuleiro. Podemos dividir a região hexagonal em 2 regiões trapezoidais.

Observemos, primeiramente, uma delas.



Como podemos observar na figura, a 1ª linha é o 5º termo da P.A. anterior, renomeando por $b_1 = a_5, b_2 = a_6$ e assim por diante, temos:

$$b_1 = a_5 = a_4 + r \Rightarrow b_1 = 7 + 2 = 9$$

Calculando o n-ésimo termo, temos:

$$b_n = b_1 + (n-1).r \Rightarrow b_4 = 9 + (4-1).2 = 9 + 6 = 15$$

Logo, a soma dos termos, que vamos chamar de $S_n^{'} = \frac{(b_1 + b_n).n}{2}$ é no exemplo:

$$S'_4 = \frac{(9+15).4}{2} = \frac{24.4}{2} = \frac{96}{2} = 48$$

Portanto, se H é o número de triângulos na região hexagonal, temos:

$$H = 2S_4^{'} = 2.48 = 96$$

O cálculo do número de "triângulos" pequenos será dado pela soma de T_c e H, ou seja:

$$T_c + H = 96 + 96 = 192$$

Portanto, o tabuleiro possui 192 triângulos "pequenos".

Cálculo do número de pontos

No cálculo do número de pontos do tabuleiro, uma P.A. surge naturalmente, da seguinte maneira:

Dividindo o tabuleiro obtemos dois trapézios e dois triângulos. Calculemos então, o número de pontos em cada uma dessas regiões obtidas.

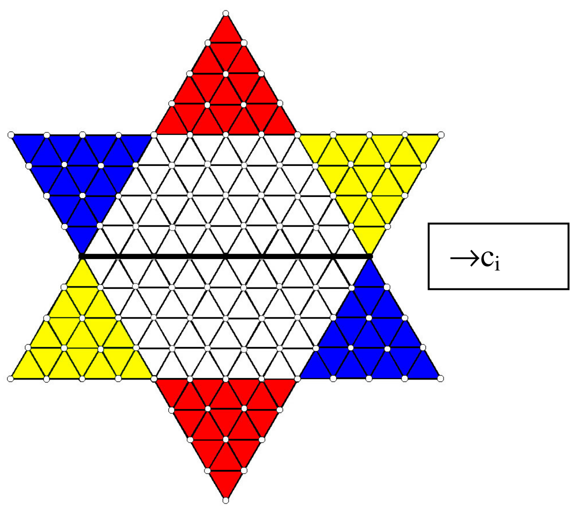
No trapézio, temos que os pontos formam uma P.A. de razão 1 (r = 1), de termos:

$$c_1 = 9$$
$$c_2 = 9 + 1 = 10$$
$$c_3 = 10 + 1 = 11$$
$$c_4 = 11 + 1 = 12$$
$$c_5 = 12 + 1 + 13$$

Logo, a soma dos termos S_5, é:

$$S_5 = \frac{(c_1 + c_5).5}{2} \Rightarrow S_5 = \frac{(9 + 13).5}{2} = 55$$

Como afirmamos anteriormente, há dois trapézios e c_i indica os pontos comuns aos dois.



Indicando por P o número de pontos nas regiões trapezoidais, temos:

$$P = 2.S_5 - c_1 = 2.55 - 9 \Rightarrow P = 110 - 9 = 101$$

O mesmo ocorre com os triângulos, cujos termos são:

$$a_1^{'} = 1$$
$$a_2^{'} = a_1^{'} + r \Rightarrow a_2^{'} = 1 + 1 = 2$$
$$a_3^{'} = a_2^{'} + r \Rightarrow a_3^{'} = 2 + 1 = 3$$
$$a_4^{'} = a_3^{'} + r \Rightarrow a_4^{'} = 3 + 1 = 4$$

Assim, a soma dos termos:

$$S_4' = \frac{(a_1' + a_4').4}{2} \Rightarrow S_4' = \frac{(1+4).4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Como dissemos, há dois triângulos, então, se P_v indica o total de pontos nas regiões triangulares teremos:

$$P_v = 2.S_4' = 20$$

Portanto, o número total de pontos do tabuleiro é:

$$P + P_v = 101 + 20 = 121$$

BIBLIOGRAFIA

Dolce, Osvaldo e Pompeo, José Nicolau. *Fundamentos da Matemática Elementar* - Vol. 9 – Editora Atual, 2001.

Macedo, L. e outros. *Aprender com jogos e situações-problema* – Artmed, 2000

http://www.tradgames.org.uk/games/Halma.htm

http://www.ludomania.com.br/Tradicionais/jogos$_{t}$radicionais.html

http://www.pt.wikipedia.org/

http://www.atractor.pt/mat/numeros/hexagonais