

## Resolução de Problemas

**Carlos Roberto Vianna**  
**Departamento de Matemática – UFPR**  
**Caixa Postal 19081**  
**81531-990 Curitiba-Pr**

*A fantasia tem a fama de ser a louca da casa. Mas a ciência e a filosofia, que outra coisa são, senão fantasia? ... O triângulo e Hamlet têm o mesmo pedigree. São filhos da louca da casa – fantasmagorias.*

*Ideas y Creencias – Ortega y Gasset (p.50)*

Este texto pretende provocar reflexões, principalmente para aqueles que lecionam matemática em qualquer dos níveis escolares. No início questiona-se o que vem a ser um problema, em seguida são apresentadas algumas considerações sobre o uso da história da matemática associada à resolução de problemas. Ao longo do texto o conteúdo matemático varia desde considerações sobre o sinal de igualdade e uma das operações elementares até relações de equivalência ou a álgebra usualmente estudada nas sétimas séries. Talvez provoque algum incômodo o fato de que não é dada uma “solução definitiva” a nenhuma das questões... mas é isso o que se deseja: que as questões se tornem problemas para os professores.

### O que é um problema?

A matemática, do mesmo modo que qualquer outra atividade humana, pode ser definida como a busca de solução para problemas que surgem na luta pela sobrevivência. A característica *matemática* dessa atividade seria uma decorrência dos métodos empregados e do tipo de problemas escolhidos. Quando se leciona uma disciplina cujo nome é “Resolução de Problemas” surge inevitavelmente a pergunta: o que é um problema? Vamos tentar encontrar uma resposta.

Uma coisa que desconheço não é, para mim, um problema. Para que eu possa pensar em uma situação como problemática eu preciso ter consciência dela, preciso ter a *necessidade* de responder às questões... eu *preciso* saber! Um exemplo; trata-se de uma história que ouvi contada pela professora Marineuza Gazetta há alguns anos. É o seguinte:

Em uma sala de aula de primeira série uma professora está elaborando problemas junto com a turma, contextualizando-os para que tenham significado junto aos alunos. Ela escolhe uma menina da turma, digamos a Rita, menciona um armazém do bairro e elabora o seguinte enunciado: “Ritinha foi ao armazém do Omar para comprar uma dúzia de ovos. Na volta encontrou-se com Júlia (outra

aluna da turma) e ficaram brincando. Durante a brincadeira quebraram-se quatro ovos. Com quantos ovos inteiros Ritinha chegou em casa?”. Lembro-me bem que a turma ficou em completo silêncio... Até que timidamente uma garotinha do fundo da sala perguntou: “Professora... a Ritinha apanhou quando chegou em casa?”

Acho que essa historieta ilustra de modo impecável um dos aspectos do que vem a ser um problema: o problema é problema para cada indivíduo recortado contra aquilo que é o seu mundo e as suas preocupações. É um erro grave não levar isso em conta. Assim, já vi professores com práticas realmente diferenciadas, torturando seus alunos de terceira série (crianças com 9-10 anos) com problemas de compra de bugigangas domésticas a prestação... como se isso tivesse alguma relevância para essas crianças! (E pouco importa aqui o nível econômico... ou a necessidade que tenham tais crianças de ajudar os pais a ganhar dinheiro... Não há nada de “crítico” em olhar para tais crianças como adultos em miniatura! – Isso não significa que abstraímos as condições materiais, significa apenas – e de modo bem claro – que deveremos pensar o que é um problema de acordo com aquilo que motiva e coloca necessidades para os sujeitos... os nossos alunos, e não para nós, os professores)

Vimos que o aspecto subjetivo é muito forte na determinação do que venha a ser um problema, mas há um outro lado: cada problema é colocado em uma situação determinada, há um lado objetivo que consiste exatamente nessa circunstância. Em sala de aula cabe ao professor planejar e deflagrar as ações de modo que essas circunstâncias se tornem problemáticas para seus alunos. Nesse sentido, um problema de “prestações” pode vir a ser interessante para os mesmos alunos desde que as circunstâncias sejam planejadas de modo a levar em conta sua subjetividade.

Tendo em vista essas questões iniciais podemos tentar algumas aproximações para a questão: o que é um problema?

1. Um sujeito está diante de um problema quando se confronta com uma questão à qual não sabe dar resposta ou quando está diante de uma situação que não sabe resolver usando os conhecimentos de que já dispõe.
2. Um sujeito está diante de um problema quando:
  - a) **tem** uma questão para resolver;
  - b) **quer** ter uma resposta para essa questão;
  - c) **não tem**, previamente, uma resposta para essa questão.
3. Um problema é uma situação em que um sujeito é solicitado a realizar uma tarefa para a qual não possui um método de resolução determinado. Se a

realização da tarefa não for desejada pelo sujeito a situação não pode ser considerada um problema.

4. É problema tudo o que, de uma maneira ou de outra, implica da parte do sujeito a construção de uma resposta ou de uma ação que produza um certo efeito. A noção de problema não tem sentido se o sujeito puder aplicar um sistema de respostas inteiramente constituído.

É interessante destacar que todas essas “definições” salientam o caráter não rotineiro da questão. Um problema é sempre relativo... pois se você já o conhece ou sabe sua resposta ele não é um problema. Questões *rotineiras* não podem ser consideradas como problemas... tais questões são meros exercícios, como os que proliferam na maioria dos livros didáticos. Há um aspecto muito importante que é comum a todas as “definições” acima, e que nada tem a ver com o conteúdo de uma determinada disciplina; trata-se do “desejo”: o sujeito precisa ter interesse, precisa estar seduzido pela questão, precisa ter necessidade de chegar a uma resposta.

É preciso tomar certos cuidados quando se pensa a resolução de problemas. Um dos primeiros motivos para confusão ocorre quando vemos professores utilizando famosas questões de “Olimpíadas Matemáticas” com seus alunos... e dizem que tais questões são muito boas exatamente porque os alunos não poderiam encaixá-las nos esquemas prévios de resolução... Embora isso seja verdadeiro na maior parte dos casos, o que estes professores esquecem é que são poucos os alunos que têm seu “desejo” despertado por esse tipo de problemas. Problemas difíceis e enigmáticos, em geral, são significativos para aqueles que já têm uma certa atração pela matemática e pouco contribuem para despertar o interesse dos mais arredios ou daqueles que manifestam uma aversão prévia. Embora para o professor tais problemas sejam o máximo, é preciso não esquecer jamais que o problema deve ser problema para os alunos! (Aqui estou reforçando a idéia de que os alunos devem *querer* resolvê-lo)

Outro fator de confusão é a consideração da resolução de problemas como um “conteúdo”. Já vi ementas de disciplinas como o “Cálculo”, em universidades, onde entre itens como derivadas e integrais aparecia “resolução de problemas”. Deve-se ter em mente que a resolução de problemas é *uma prática* que o matemático profissional adota em seu dia-a-dia. Essa prática, transplantada para a sala de aula, é uma estratégia de ensino que está diretamente associada ao desejo, que tem o professor, de apresentar novas idéias matemáticas com significado. Aqui, o papel do problema é fornecer um vínculo entre o conteúdo matemático e uma certa realidade que é dada pelo enunciado do problema. Note bem: essa “realidade” é inteiramente flexível e

pode variar desde a busca de garantias e condições de sobrevivência até ao mais abstrato dos procedimentos de formalização de uma teoria.

Apresentar idéias matemáticas com significado é, acredito, a melhor maneira de responder a fatídica pergunta: “para que serve isso?”. Na verdade, com as novas idéias sendo apresentadas “em ação”, dificilmente ocorrerá aos alunos essa pergunta; ou seja, os problemas já são uma situação de “aplicação” do conteúdo matemático e mostram, de forma a não deixar dúvidas, “para que ele serve”. Esse é um fator de auto-avaliação para o professor: se ele soube escolher bem os problemas, ou se implantou em sala de aula uma dinâmica onde os próprios alunos se deparem e se proponham os problemas que deverão resolver, então essa pergunta não deverá aparecer.

Nada mais desastroso do que um professor assistir a um curso de resolução de problemas e voltar para sua sala de aula todo empolgado para colocar em prática o que aprendeu, e se encantar em ver seus alunos trabalhando com a matemática... e na hora da avaliação fazer o mesmo tipo de prova (e correção) a qual estava habituado. Usar a resolução de problemas em sala de aula implica em uma mudança de hábitos antigos no que diz respeito a realização de provas e ao modo de corrigir. Em primeiro lugar falemos da correção: perde sentido a forma tradicional de considerar os resultados “certos”; é necessário levar em conta fatores como a capacidade de formular perguntas, de fazer conjecturas, do uso de diferentes estratégias, a interpretação dos resultados e as possibilidades de fazer generalizações. Em segundo lugar consideremos a “prova”: se eu tenho que considerar todos os fatores anteriormente mencionados, não parece evidente que o uso da “prova” como momento de avaliação perde o sentido? Pode-se fazer provas, até com questões tradicionais se for esse o desejo do professor, mas elas deverão valer cada vez menos... E valerão, à medida em que o professor for aprendendo a trabalhar com a resolução de problemas.

### **A história da matemática e a resolução de problemas.**

Essa parte é uma versão adaptada de um texto da disciplina de Fundamentos da Matemática Elementar entregue para os alunos em 23/04/99. Assim, trata-se de um texto que foi agregado ao anterior de modo a salientar certos aspectos *do uso* didático da História da Matemática e sua relação com a Resolução de Problemas. Em resumo, defendo a tese de que se há um sentido em utilizar a história da matemática em sala de aula, esse sentido está associado com a formação do professor e suas possibilidades de escolher situações ou problemas adequados, além de direcionar as discussões na sala de aula, de modo que os alunos adquiram consciência do estado atual do seus conhecimentos e se proponham formas de superá-lo. O texto exemplifica uma

forma de conseguir isso discutindo – com professores – o significado do sinal de igualdade.

### ***Um breve histórico***

Na maioria dos livros impressos antes de 1557, quando Robert Record apresentou o seu livro *The Whetstone of Witte*, a igualdade era expressa através de palavras tais como: *aequales, aequantur, esgale, faciunt, ghelijck* ou *gleich*; e algumas vezes abreviada como *aeq.*

Autores conhecidos expressavam a igualdade de modo retórico (por extenso), entre eles: Kepler, Galileu, Torricelli, Cavalieri, Pascal, Napier, Briggs e Fermat.

O símbolo “=” levou cerca de 100 anos para ter seu uso difundido. Muitas vezes ele era utilizado em cartas e manuscritos, mas não nos livros impressos. Em 1631 o símbolo foi usado em três livros importantes e a partir daí foi gradativamente se popularizando.

É curioso observar que o mesmo símbolo foi utilizado em diferentes sentidos, por exemplo:

- a) Em 1591, François Vieta usa “=” para designar uma diferença aritmética.
- b) Em 1638, Descartes usa “=” para designar “plus ou moins” (Mais ou menos)
- c) Em 1670, Johann Caramuel usa “=” para separar frações decimais, por exemplo:  $102=857$  para designar o que representaríamos hoje como 102,857.
- d) Em 1667, Dulaurens e em 1698 Reyer, usaram “=” para indicar linhas paralelas.

Por outro lado, durante muito tempo outros sinais competiram com o “=” para designar a igualdade. Vejamos alguns exemplos:

- a) Em 1559, Buteo usava “]”, por exemplo:  $x+1 ] 5$  era o nosso  $x+1 = 5$ .
- b) Em 1571, Holzmann usou || (linhas verticais) que foi adotado por muitos outros autores. (Estas informações foram adaptadas de *A History of Mathematical Notation*, vol. 1, de Florian Cajori)

Estas observações históricas têm a finalidade de alertar para um equívoco no uso da história da matemática no ensino: vocês poderão observar em muitos livros didáticos a informação de que Robert Record foi quem inventou ou introduziu o uso do sinal de igual... e só. Por outro lado, eu fiz questão de mostrar não apenas que esse uso levou mais de 100 anos para se estabelecer, mas que autores famosos usavam sinais alternativos enquanto que outros usavam o mesmo símbolo “=” para coisas completamente diferentes daquilo que hoje entendemos. Mostrando isso eu estou salientando o aspecto “construtivo”, “convencional” e “social” da matemática... Eu defendo que só há dois tipos válidos de “uso” da história da matemática no ensino, um deles é esse: mostrar que os conceitos, notações, teorias levaram tempo para se estabelecer. O outro “uso” consiste em ajudar na compreensão dos conceitos que adotamos

atualmente, e, nesse caso, a história pode ser associada de modo muito proveitoso com a resolução de problemas.

### ***Observações gerais sobre o contexto***

Aprendemos, em algum momento da nossa escolaridade, que a imprensa foi inventada por Johannes Gutenberg (c. 1397-1468). Isso aconteceu por volta de 1450, mas há relatos de que suas primeiras experiências de impressão ocorreram já em 1430. Todavia, é interessante destacar que no século XI a China já conhecia a impressão e que há exemplos de textos budistas impressos com mais de um milhão de cópias desde o século VIII (a impressão era feita através de xilogravuras). A inovação de Gutenberg consistiu em introduzir tipos metálicos que eram duráveis, mas que criaram um problema particular para os matemáticos... era difícil introduzir "novos" símbolos pois para ser impressos eles precisariam estar disponíveis nas fôrmas de metal. Essa é a razão para que a notação tenha sido modificada largamente em cartas e manuscritos enquanto que as mudanças nos livros demoravam um pouco mais.

Seria interessante dispor de uma história da matemática que abordasse a influência da imprensa sobre as notações e a forma de escrever os algoritmos. É uma hipótese aceitável que o nosso procedimento com as divisões e multiplicações sofreram influência direta das técnicas de impressão.

Um aspecto fundamental da imprensa é a difusão dos textos escritos nas línguas maternas... atingindo um público cada vez maior e ávido por informações. Um exemplo de como funcionavam os métodos de ensino nos idos de 815 a 823 pode ser obtido através do diário de Walafried Strabo onde ele descreve com minúcias a vida nas escolas monásticas e os métodos nelas empregados. Ele conta que não sabendo uma palavra de latim, aprendeu a ler nessa língua sem compreender nada do que lia... estranhando quando um dia teve em mãos um texto escrito em seu idioma: era espantoso que se pudesse ler e ao mesmo tempo compreender o que se lia! (In: *Educação e Luta de Classes*, Anibal Ponce, p. 92). Mais de um historiador salienta o caráter revolucionário dos textos de Galileu por terem sido escritos em sua língua materna, possibilitando a mais pessoas a sua leitura. De outro lado, um exemplo notável é o de Leonardo da Vinci, hoje aclamado, que em vida não obteve o respeito dos "doutores" da época... por não saber escrever em latim!

### ***Algumas Questões***

Mas agora pensemos: o que significa o nosso sinal de igual?

Observe que:

- a)  $2 = 2$ ,  $a = a$ , ... Essa é a propriedade reflexiva. Uma coisa é igual a ela mesma.
- b) Se  $a = b$ , então  $b = a$  Essa é a propriedade simétrica.

c) Se  $a = b$  e  $b = c$ , então  $a = c$  Essa é a propriedade transitiva.

Costuma-se dizer que toda relação que satisfaça as três propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva; é uma *relação de equivalência*.

É a partir daí que podemos estabelecer algumas questões para orientar nossa reflexão: (Estes são “problemas” para professores de matemática, embora não necessitem de cálculos na sua resolução...)

1) Se a igualdade é uma relação de equivalência (É?), isso significa que podemos dizer “equivale” ao invés de dizer “é igual”? Explique.

2) Porque ninguém reluta em afirmar que 2 é igual a 2, ao passo que quando temos uma relação entre triângulos busca-se usar a palavra “congruentes” em lugar de “iguais”? Explique.

Um dos grandes erros do ensino consiste em considerarmos como banais coisas que cremos saber. Esse erro é cometido pelas pessoas que tendem a achar que aquilo que ela e seu “grupo” consideram como estabelecido está estabelecido da mesma forma por todas as demais pessoas... O erro torna-se socialmente pernicioso quando este pequeno grupo além de desconhecer as interpretações dos demais busca impor a sua significação como sendo a única válida e verdadeira.

### ***Iguais... mas diferentes!***

Em artigo recente, “Somos todos mentirosos?”, publicado na Revista do Professor de Matemática (RPM) número 37, as autoras Gilda Palis e Ialci Malta fazem uma bela exposição sobre técnicas de demonstração e suas relações com a lógica. Para motivar a introdução do artigo elas apelam para um trecho da autobiografia de Carl Gustav Jung, que lembrando de seus tempos de colégio nos diz:

*O que mais me irritava era o princípio: se  $a=b$  e se  $b=c$ , então  $a=c$ . Tendo sido dado, por definição, que **a** é diferente de **b**, por conseguinte não pode ser igual a **b**, e ainda menos de **c**. Quando se trata de uma igualdade, diz-se que  $a=a$ ,  $b=b$ , etc. Mas dizer que  $a=b$  me parecia uma fraude evidente, uma mentira. ... Até a idade avançada conservei a convicção de que, se nesses anos de colégio tivesse podido admitir sem me chocar, como meus colegas, que  $a=b$ , ou que sol=lua, cão=gato, etc., as matemáticas ter-me-iam enganado para sempre. O fato de nunca ter conseguido encontrar um ponto de contato com as matemáticas, permaneceu um enigma por toda a minha vida. ... Ficava de tal forma humilhado com minha impossibilidade de compreender, que não ousava qualquer pergunta*

Curiosamente, ao terminar o artigo as autoras não disseram uma única palavra sobre as dúvidas de Jung, na verdade elas nos dizem que: “... a grande queixa do Jung era anterior a essa discussão lógica”. O que elas fizeram foi usar a dúvida do Jung como “curiosidade”, mas acredito que ela poderia ser atacada

de frente. Aqui pretendo mostrar que a dúvida de Jung tem associação direta com a sala de aula e que um belo problema para um professor de matemática consiste em tentar responder a esta dúvida e a outras que lhe sejam semelhantes.

**Questão:** Analisar se há diferença entre os usos feitos do sinal de igual nas expressões abaixo:

(I)  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$       (II)  $x + 5 = 7$       (III)  $3x - 1 = 5x - 4$

(Testando com um grupo de 41 alunos do Curso de Matemática da UFPR obtive as seguintes respostas: 17 disseram que não há diferenças e 24 afirmaram o contrário. Considerando-se a idéia dominante de que em matemática as coisas “são” ou “não são”, essa não é uma divisão notável?)

As crianças tendem a encarar o sinal de igual como um “anunciante” do resultado. Isso advém do hábito de armar as operações separadamente, efetuá-las e depois completar com o resultado final. Considere o exemplo abaixo:

Tenho 17 figurinhas. Agora ganhei outras 35. Com quantas fiquei?

<i>Armar</i>	<i>Efetuar</i>	<i>Retornar com a resposta</i>
$17 + 35 = ?$	$17$	$17 + 35 = 52$
	$+ \underline{35}$	
	$52$	

No caso (I), do produto notável, temos a “igualdade” em qualquer situação enquanto que nas duas expressões teríamos que encontrar os valores de x que validariam a igualdade. Muitos alunos de matemática afirmaram que as expressões em x eram “equivalências”, mas jamais fariam tal ressalva se não tivessem sido levados a fazer uma comparação entre os três usos do sinal de igual. Além da diferença de significados atribuídos à igualdade, há uma diferença “posicional” que é pouco considerada, vejam os exemplos abaixo:

(A)	(B)
$6x - 3 = x + 2$	$x + 2 = 6x - 3$
$6x - x = 2 + 3$	$2 + 3 = 6x - x$
$5x = 5$	$5 = 5x$
$x = 1$	$1 = x$

Embora a igualdade goze da propriedade simétrica, são poucos os adultos, mesmo fazendo curso de matemática, que se sentem absolutamente à vontade para proceder à resolução de uma equação tal como fizemos no exemplo (B). Por que relutam em deixar a incógnita no lado direito?



Um último exemplo consiste em recordar as palavras de um filósofo que teria dito o seguinte: “um homem jamais conseguirá se banhar duas vezes no mesmo rio”. Após sair do rio, voltando a ele; será o mesmo rio? Como poderia ser o mesmo rio se antes ele era o rio onde eu não havia me banhado e, agora, é o rio onde já me banhei uma vez? Como poderia ser o mesmo rio se as águas que passavam aqui, quando me banhei da primeira vez, já estão no oceano, e, agora, essas águas aqui passam pela primeira vez? ... Voltemos para a igualdade: como pode ser  $a = a$  ? É evidente que eu tenho dois “a” e que eles não são, seguramente, o mesmo. Como afirmar que uma coisa é igual a ela mesma se tudo muda e se eu, que escrevo este texto, já não sou o mesmo que escrevia duas linhas acima?

Vimos, através de exemplos, como pode haver dificuldades relevantes de compreensão a serem ultrapassadas com a interpretação do significado de um simples sinal de igualdade. As propriedades da relação de equivalência podem ser, todas elas, postas em xeque através de raciocínios elementares... e a grande questão que se coloca para um professor é: será que meus alunos tendo tais dúvidas seriam capazes de fazer perguntas adequadas? Será que eu, como professor, seria capaz de entender as suas dúvidas? E... poderia dar alguma indicação satisfatória de encaminhamento?

O que este exemplo pretende mostrar é que a resolução de problemas deve ser entendida pelo menos em duas instâncias. Problemas para os alunos num sentido mais usual e problemas para o professor, problemas de ensino, no sentido que mostrei acima. Nesse último caso o recurso à história da matemática é crucial. Creio ter mostrado também o quanto é irrelevante a contribuição das “curiosidades” históricas, pois elas apenas servem como informação (que freqüentemente é incorreta, ou imprecisa, do ponto de vista histórico) e nada acrescentam à compreensão do conteúdo.

Discutindo “problemas” relacionados à compreensão do sinal de “=” penso ter mostrado que as situações de ensino-aprendizagem são, em geral, muito mais complexas do que a formação em matemática permite supor. O grande problema para o professor deve ser o de articular o seu conhecimento com as hipóteses elaboradas pelos seus alunos, sem cair no grave erro de adotar como pressuposto que aquilo que ele acha que sabe é uma verdade absoluta, ou que não pode ser pensado de modo diferente... Disposto a ouvir o que têm a dizer seus alunos, o professor será surpreendido com as múltiplas interpretações associadas a objetos matemáticos que ele julgava invariantes. Problema 1: dispor de tempo e condições para observar que muito freqüentemente tais interpretações ocorreram a matemáticos e constituem uma parte submersa da história da matemática. Problema 2: transpor o conhecimento matemático no seu estágio de organização atual para uma linguagem compreensível pelos alunos e, ao mesmo tempo, elaborar desafios cujas estratégias de resolução

conduzam os alunos a uma busca ou provoquem a necessidade de novas ferramentas e conhecimentos.

Para concluir, mais um problema. Cada um dos diferentes algoritmos exibido abaixo efetua a mesma operação. Qual é a operação e como o resultado foi obtido?

$$\begin{array}{r}
 7 \quad 2 \quad 3 \\
 4 \quad 7 \quad 5 \\
 \hline
 3 \quad 2 \quad 3 \\
 \quad 7 \quad 5 \\
 \hline
 2 \quad 5 \quad 3 \\
 \quad \quad 5 \\
 \hline
 2 \quad 4 \quad 8
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 7 \quad 2 \quad 3 \\
 4 \quad 7 \quad 5 \\
 \hline
 3 \quad 2 \quad 3 \\
 \quad 7 \quad 5 \\
 \hline
 3 \quad 0 \quad 0 \\
 \quad 5 \quad 2 \\
 \hline
 2 \quad 5 \quad 0 \\
 \quad \quad 2 \\
 \hline
 2 \quad 4 \quad 8
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 7 \quad 2 \quad 3 \\
 4 \quad 7 \quad 5 \\
 \hline
 7 \quad 4 \quad 8 \\
 5 \quad 0 \quad 0 \\
 \hline
 2 \quad 4 \quad 8
 \end{array}$$

$  \begin{array}{r}  7 \quad 2 \quad 3 \\  4 \quad 0 \quad 0 \\  \hline  3 \quad 2 \quad 3 \\  \quad 2 \quad 3 \\  \hline  3 \quad 0 \quad 0 \\  \quad 5 \quad 0 \\  \hline  2 \quad 5 \quad 0 \\  \quad \quad 2 \\  \hline  2 \quad 4 \quad 8  \end{array}  $		$  \begin{array}{r}  4 \quad 7 \quad 5 \\  4 \quad 0 \quad 0 \\  \hline  \quad 7 \quad 5 \\  \quad 2 \quad 3 \\  \hline  \quad 5 \quad 2 \\  \quad 5 \quad 0 \\  \hline  \quad \quad 2 \\  \quad \quad 2  \end{array}  $
--	--	--

$$\begin{array}{r}
 700 \quad 20 \quad 3 \\
 400 \quad 70 \quad 5 \\
 \hline
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 600 \quad 110 \quad 13 \\
 400 \quad 70 \quad 5 \\
 \hline
 200 \quad 40 \quad 8
 \end{array}$$

## Bibliografia

BOAVIDA, Ana Maria. Concepções sobre resolução de problemas. In: *Actas do PROFMAT 91*, vol. 1, Porto. Associação de Professores de Matemática de Portugal, 1991.

KRULIK, Stephen e REYS, Robert (org.). *A resolução de problemas na matemática escolar*. São Paulo. Atual, 1997.

Texto publicado no Livro Temas em Educação I, o livro das Jornadas de 2002. pp. 401-410 – Organizado por Futuro Congressos e Eventos

ORTEGA Y GASSET, José. *Ideas y Creencias*. (Obras, v. 29). Madrid. Alianza Editorial, 1995.

POZO, Juan Ignacio (org.) *A solução de problemas*. Porto Alegre. ArtMed, 1998.