I SEMINÁRIO EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
– I SERP –
Múltiplos Olhares sobre Resolução de Problemas Convergindo para a Aprendizagem

UM OLHAR PARA A SALA DE AULA A PARTIR DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E MODELAÇÃO MATEMÁTICA

Roger Ruben HUAMÁN HUANCA[1]
roger@uepb.edu.br
UEPB – Monteiro/PB

A Resolução de Problemas no Processo Ensino-Aprendizagem de Matemática

Resolver problemas faz parte da natureza humana desde os primórdios de nossa história. Os problemas serviram de motor para impulsionar o desenvolvimento e a evolução da espécie nos mais variados campos, os primeiros homens tiveram que desenvolver métodos para resolver problemas da vida como, por exemplo, localizar-se no tempo e no espaço e, também, tentar descrever e explicar o mundo físico. Eles criaram maneiras de comparar, classificar e ordenar, de medir, quantificar e inferir elementos fundamentais que a tradição da cultura nomeou de Matemática.

Segundo Stanic & Kilpatrick (1989), a resolução de problemas aparece na história através de documentos desde muito cedo, como é o caso do Papiro de Ahmes, copiado pelo escriba Ahmes, por volta de 1650 a.C., e de muitos outros registros de Egípcios, Chineses e Gregos. Para os autores, até meados do século XX, a Resolução de Problemas consiste basicamente em resolver problemas, mas não como metodologia de ensino.

Para chegarmos à concepção de que é possível Ensinar Matemática através da Resolução de Problemas, um longo caminho foi percorrido no século XX, especialmente nos últimos 40 anos.

Segundo Onuchic & Allevato (2004), as reformas sociais e as mudanças no ensino de matemática nos ajudam a entender a concepção atual da Resolução de Problemas. Para as autoras, entender a Resolução de Problemas passa pela compreensão do ensino de matemática no início do século XX, pautado basicamente na repetição. Portanto, resolver problemas era ainda basicamente resolver exercícios, a despeito dos esforços de alguns educadores cuja

[1] Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista – UNESP – Rio Claro/SP. Professor e pesquisador do Centro de Ciências Humanas e Exatas (CCHE) – Campus VI da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB – Monteiro/PB.

orientação passa a ser a de que os alunos devem aprender com compreensão para que o ensino da matemática possa avançar.

Particularmente nas décadas de 60 e 70, com o Movimento Mundial da Matemática Moderna, a Resolução de Problemas foi tida como algo estanque. No entanto, as dúvidas e os questionamentos seguiram inquietando pesquisadores no mundo todo, principalmente no que diz respeito ao ensino e à aprendizagem eficiente de Matemática. As pesquisas a respeito da Resolução de Problemas começam, então, a surgir e, com os resultados, novas inquietações.

> A “era da resolução de problemas”, fundamentada a partir de recomendação feita no documento “Uma Agenda para a Ação”, do NCTM, em 1980, diz que Resolução de Problemas deveria ser o foco da matemática escolar nos anos 80. No início da década de 90, a UNESCO, através da sua declaração mundial sobre Educação para todos, também declara claramente que a resolução de problemas deve ser um instrumento essencial da aprendizagem, do mesmo modo que a leitura, a escrita e o cálculo. (Huamán, 2006, p. 20)

Atualmente, de modo mais notável a partir dos anos 90, somos confrontados com uma outra mudança no foco do uso da Resolução de Problemas no currículo escolar: ensinar Matemática através da resolução de problemas. No Brasil, são destaques alguns trabalhos acerca da Resolução de Problemas como um objeto de estudo dentro da Educação Matemática, como os de Rodrigues (1992); Botta (1997); Andrade (1998); Azevedo (1998); Fabiani (1998); Boero (1999); Pironel (2002); Azevedo (2002); Bolzan (2003); Paulette (2003); Pereira (2004); Allevato (2005); Huamán (2006), entre outros.

Neste sentido, D’Ambrósio (2003) destaca um capítulo do Livro do Ano de 1989 - NCTM[2], no qual Schroeder e Lester (1989), insistindo, disseram que, desde que o papel da resolução de problemas é desenvolver a compreensão de Matemática nos alunos, ensinar via resolução de problemas é a abordagem mais apropriada. Eles argumentam que as propostas desta abordagem consideram a resolução de problemas não como um tópico, um padrão ou parte de um conteúdo, mas como uma postura pedagógica. Hoje, este enfoque é referido como **ensinar Matemática através da resolução de problemas**. A influência das visões de Polya (1981) e de Dewey (1933), citados por D’Ambrósio (2003, p.46) na Resolução de Problemas como arte, são evidentes nesta visão do papel da resolução de problemas no currículo escolar.

Segundo D’Ambrósio, esta nova visão também aproxima o tema da resolução de problemas, de Stanic e Kilpatrick, como um veículo. Na verdade, problemas que servem como veículos para introduzir ou desenvolver conceitos de Matemática começaram a aparecer

[2] Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos da América

em materiais curriculares de Matemática nos anos 90. Proponentes do ensino da Matemática através da resolução de problemas baseiam sua pedagogia na noção de que alunos que confrontam situações problemáticas usam seus conhecimentos existentes para resolver aqueles problemas e, no processo de resolução de problemas, constroem um novo conhecimento e uma nova compreensão. Para D'Ambrosio (2003), pesquisas recentes em psicologia e ciência cognitiva descrevem a aprendizagem como o processo de dar sentido às idéias do indivíduo com base em suas compreensões. Teorias que descrevem como as pessoas aprendem ou constroem conhecimento, servem como base para ensinar Matemática através da resolução de problemas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1999), tanto na versão para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio (2002) orientam o trabalho pedagógico no sentido de que os problemas devem ser o ponto de partida para conduzir à formação dos conceitos, antes de sua apresentação em linguagem matemática em sala de aula.

Segundo Onuchic (1999), consoante a esta concepção, consideramos que o trabalho de ensino de matemática deve acontecer numa atmosfera de investigação orientada em resolução de problemas. Os alunos devem ser desafiados a resolver um problema e devem desejar fazê-lo. O problema deve conduzi-los a utilizar seus conhecimentos anteriores. Por outro lado, o problema deverá exigir que busquem novas alternativas, novos recursos, novos conhecimentos para obter a solução, caso contrário não será para os alunos um problema.

Com relação ao entendimento da Resolução de Problemas como metodologia de ensino, Van de Walle (2001) coloca que é preciso entender que ensinar Matemática através da Resolução de Problemas não significa, simplesmente, apresentar um problema, sentar-se e esperar que uma mágica aconteça. Pelo contrário, pressupõe todo um rigor metodológico, no qual o professor, apesar de intermediador entre o conhecimento e o aluno, é responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador e estimulante, em que a aula deve transcorrer. Para se obter isso, toda aula deve compreender três partes importantes: antes, durante e depois. Para a primeira parte, o professor deve garantir que os alunos estejam mentalmente prontos para receber a tarefa e assegurar-se de que todas as expectativas estejam claras. Na fase "durante", os alunos trabalham e o professor avalia esse trabalho. Na terceira, "depois", o professor aceita a solução dos alunos sem avaliá-las e conduz a discussão, enquanto os alunos justificam e avaliam seus resultados e métodos. Então, o professor formaliza os novos conceitos e novos conteúdos matemáticos construídos. Portanto, a Resolução de Problemas requer um processo de avaliação constante por parte do professor.

Apesar de não haver formas rígidas de programar e de colocar em prática o trabalho com o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, Onuchic (1999) apresenta um roteiro de atividades que pode servir como referência ou orientação aos professores interessados em trabalhar com essa metodologia. Para ela, a tarefa inicial é formar grupos onde os alunos receberão a atividade com o problema proposto. Esse é o momento no qual os alunos têm a oportunidade de compartilhar experiências. O professor, por sua vez, passa a ser observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem. Após esse momento, os resultados são apresentados na lousa. A partir daí, dá-se início à plenária, que culmina no consenso entre os participantes da aula sobre o resultado pretendido, e o professor, por sua vez, entra com a formalização dos conteúdos. A partir disso, a avaliação pode ser feita através de novos problemas.

Por essas razões, o ensino de Matemática através da resolução de problemas é importante. Ele nos oferece uma experiência em profundidade, uma oportunidade de conhecer e delinear as dificuldades, de conhecer as capacidades e limitações do conhecimento matemático que os estudantes possuem. O ensino através da resolução de problemas coloca ênfase nos processos de pensamento, de aprendizagem e trabalha os conteúdos matemáticos, cujo valor não se deve deixar de lado.

Modelação Matemática como método de Ensino e Aprendizagem

A Modelação Matemática no Ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece. Ao mesmo tempo em que aprende a arte de modelar, os alunos utilizam os modelos matemáticos para resolver determinadas situações nas áreas da Física, Química, Engenharia, Astronomia, Economia, Biologia, Psicologia e outros. Os PCNs apresentam uma proposta para o Ensino Médio, segundo a qual "o aprendizado deve contribuir não só para o conhecimento técnico, mas também para uma cultura mais ampla, desenvolvendo meios para a interpretação de fatos naturais, a compreensão de procedimentos e equipamentos do cotidiano social e profissional, assim como para a articulação de uma visão do mundo natural e social". Dá-se assim, ao aluno a oportunidade de estudar situações-problema.

Van de Walle (2001), apud Onuchic (2003), fala do papel dos modelos no desenvolvimento da compreensão, dizendo que, com freqüência, ouve-se que bons professores usam uma abordagem de "pôr as mãos na massa" para ensinar matemática. Trata-se de materiais manipulativos ou físicos para modelar conceitos matemáticos que são, certamente, ferramentas importantes para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática. Ela diz ainda que, na utilização de modelos na sala de aula podem-se identificar três aspectos: ajudar a desenvolver novos conceitos ou relações; ajudar a fazer conexões entre conceitos e símbolos e assegurar a compreensão dos alunos.

Na Modelação Matemática, o professor pode optar por escolher determinados modelos, fazendo sua aula mais dinâmica, juntamente com os alunos, de acordo com o nível em que estão, além de obedecer ao programa curricular. É bom que se tenham vários modelos para que se possa optar entre eles e não por eles. O seu aprimoramento ou adaptação cabe ao professor e a seu bom senso.

Segundo Biembengut & Hein (2003), a Modelação Matemática tem por objetivos para o ensino e aprendizagem de matemática aproximar uma outra área do conhecimento da Matemática; enfatizar a importância da Matemática para a formação do aluno; despertar o interesse pela Matemática ante a aplicabilidade; melhorar a apresentação dos conceitos matemáticos; desenvolver a habilidade para resolver problemas; e estimular a criatividade. Para os autores, implementar a Modelação Matemática em sala de aula e fora dela é fazer inicialmente um levantamento sobre os alunos: a realidade sócio-econômica, o tempo disponível para realização de trabalho extra-classe e o conhecimento matemático que possuem. Com base nesse diagnóstico, dizem que o professor deve planejar sua aula incluindo a implementação da Modelação Matemática, isto é, como desenvolver o conteúdo programático a partir de um modelo, como orientar os alunos no desenvolvimento dos modelos matemáticos e como avaliar o processo. Dessa forma, os alunos analisam o resultado obtido.

Barbosa (2001) ressalta que, apesar dos diversos estudos sobre a Modelagem e, mais ainda, sobre a formação de professores de Matemática, ainda não são aparentes na literatura investigações que se debrucem sobre a formação de professores em relação à Modelação Matemática.

Olhando sob este prisma, estamos começando a desenvolver, no Grupo de Pesquisa em Resolução de Problemas e Educação Matemática - GPRPEM do Campus VI da UEPB, uma pesquisa sobre Modelação Matemática encarada como método de ensino e aprendizagem.

Com relação à Resolução de Problemas e à Modelação Matemática, podemos perceber que existem inúmeras formas de conceber o ensino da Matemática, cabe ao professor adequá-las a seu trabalho. Elas constituem duas alternativas bastante ricas dentro de um variado espectro de possibilidades que se apresentam como alternativas para o ensino-aprendizagem de Matemática.

O ESTUDO DA TRIGONOMETRIA NO ENSINO

Lima et al. (1996) discutem funções trigonométricas considerando esse tópico como um tema importante da Matemática, tanto por suas aplicações, que vão desde as mais elementares, no dia-a-dia, até as mais complexas, na ciência e na tecnologia, como pelo papel central que desempenham na Análise. Os autores dizem que uma propriedade fundamental das funções trigonométricas é que elas são periódicas. Por isso, são adaptadas para descrever os fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória, que existem em abundância no universo, como o movimento de planetas, som, corrente elétrica alternada, circulação do sangue, batimentos cardíacos, etc.

Esses autores dizem que são poucas as distâncias que podem ser medidas diretamente. Por isso, praticamente tudo o que desejamos saber sobre distâncias no mundo em que vivemos é calculado com o auxílio da Trigonometria.

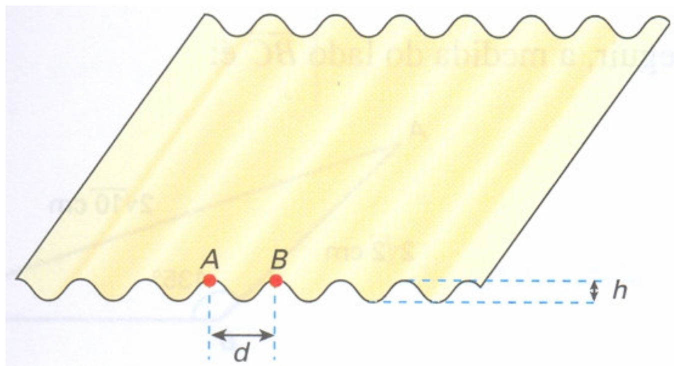
Brighenti (2003), seguindo uma trajetória histórica, diz que foi possível encontrar um fio condutor para que a aprendizagem de conceitos trigonométricos acontecesse de forma significativamente "bem natural", ficando clara a necessidade de se trabalhar com os alunos. Primeiramente, as razões trigonométricas no triângulo retângulo, explorando a idéia de semelhança entre triângulos. Em seguida, inserir esse triângulo num lugar geométrico (a circunferência) que, posteriormente, seria definido como ciclo trigonométrico de raio unitário, explorando os conceitos trabalhados anteriormente no triângulo. Desta forma, aos poucos, define-se o ciclo trigonométrico e as razões trigonométricas estudadas são inseridas nesse ciclo, sendo possível até determinar seus valores trigonométricos para arcos dos limites dos quadrantes, 0º ou 90º, quando já não existem mais triângulos.

Concordamos com os PCN_+ Ensino Médio quando dizem que a Trigonometria é, em geral, apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações trigonométricas, em detrimento de aspectos importantes das funções trigonométricas e das análises de seus gráficos. Assim, para nós, o que deve ser assegurado a esse trabalho são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos.

O PROBLEMA DA TELHA ONDULADA

Problema

O perfil da telha ondulada, representada na figura abaixo, pode ser descrito pela função $f(x) = 5\cos\frac{x}{2}$, em que os valores absolutos de x e y = f(x) indicam medidas em centímetros. Determine as medidas h e d, indicadas na figura, sendo que A e B são cristas de ondas.



Durante uma aula de Prática Pedagógica no Ensino de Matemática da UEPB campus VI Monteiro, interior do estado da Paraíba, ocorreu a seguinte discussão sobre esse problema.

O professor perguntou: – O que este problema está pedindo? Quais são seus dados? Como relacioná-los?

Chamou à lembrança deles o que havia acontecido na pesquisa do parque[3], a qual havia desenvolvido no mestrado em Educação Matemática na UNESP – Rio Claro. Perguntou: – Aqui também precisamos falar em altura e distância? Há alguma função trigonométrica expressa neste problema?

Nesse momento, responderam: – Sim, é a função $f(x) = 5\cos\frac{x}{2}$.

Vocês saberiam construir uma tabela para essa função, com os valores de ângulos notáveis: 0 rad, $\frac{\pi}{2}$rad, π rad, $\frac{3\pi}{2}$rad e 2π rad, para as funções $y = senx$ e $y = \cos x$, com argumento x e amplitude 1?

---

[3] Huamán, Roger Ruben. A *Resolução de Problemas no Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática na e Além da Sala de Aula* (UNESP – Rio Claro, 2006, Mestrado).

Junto com os alunos, na lousa, o professor registrou uma tabela para a função $y = \cos x$. Dizendo que o argumento, no problema dado, era $\frac{x}{2}$, então a tabela deveria registrar também isso, desde que na função o argumento é dado pela metade de x.

Passou-se a construção da tabela para $f(x) = 5\cos\frac{x}{2}$, vendo que a amplitude agora era 5 e o argumento $\frac{x}{2}$.

O que isso significa? perguntou o professor que continuou dizendo: vamos construir o gráfico de $f(x) = 5\cos\frac{x}{2}$ e buscar resposta a esse problema.

Queremos construir o gráfico de $f(x) = 5\cos\frac{x}{2}$.

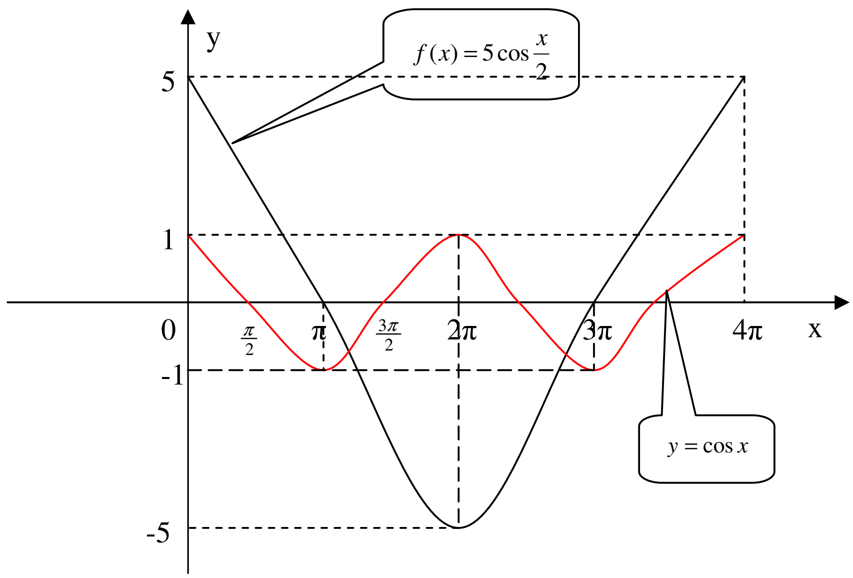
Sabendo que o domínio da função $y = \cos x$ é o conjunto dos números reais e sua amplitude é 1, quando tomarmos, para argumento, a metade do arco, temos que a amplitude continua a mesma, mas o argumento se modifica proporcionalmente.

No nosso problema, $f(x) = 5\cos\frac{x}{2}$. Então, a amplitude se altera. É agora 5, isto é, $-5 \leq y \leq 5$, e o argumento $\frac{x}{2}$ leva a um período de 0 a 4π, porque metade cabe duas vezes dentro do todo $\left(x = \frac{X}{2} \;\; \Rightarrow \;\; X = 2x \right)$. Então os pontos notáveis dos períodos se mostram assim:

x	X	$f(x) = 5\cos\frac{x}{2}$	f(x) em centímetros
$x = 0$	0	$f(x) = 5 \cdot 1$	5
$x = \frac{\pi}{2}$	π	$f(x) = 5 \cdot 0$	0
$x = \pi$	2π	$f(x) = 5 \cdot (-1)$	-5
$x = \frac{3\pi}{2}$	3π	$f(x) = 5 \cdot 0$	0
$x = 2\pi$	4π	$f(x) = 5 \cdot 1$	5

Confirmando o que foi dito acima, a tabela mostra que as variáveis x e X expressam a duplicação do argumento, quando comparamos a função y = cos x com a função $f(x) = 5\cos\frac{x}{2}$. Também se vê que a amplitude muda de 1 para 5, pois y = cos x = 1cos x. Os conceitos de medição (operação) e de medida (produto da medição) fazem-se presente neste momento.

Como no enunciado do problema, x e y = f(x) indicam medidas de comprimento respectivamente nos eixos x e y, a importância da medida será refletida nas respostas dadas ao problema.



Os gráficos foram construídos. Passamos a analisá-los ao olhar para eles.

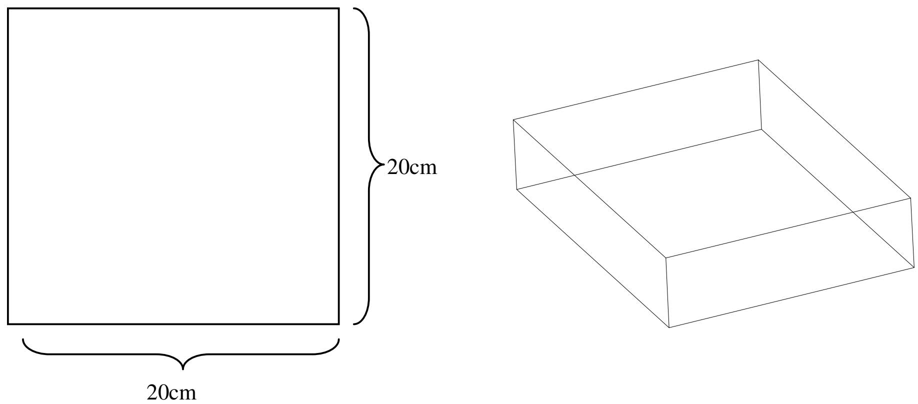
Queremos encontrar h. Sendo a amplitude da onda y, $-5 \leq y \leq 5$, y medido em cm, e como h é medido em valor absoluto, temos h = 2y = 2.5cm = 10cm.

Também, no gráfico, pode-se ver que $d = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ onde d é o período da função $f(x) = 5\cos\frac{x}{2}$. Como o argumento é medido no eixo x, tem-se que no círculo trigonométrico, de raio 1 cm, uma volta completa nesse círculo percorre uma distância igual ao comprimento da circunferência. Assim, C = 2π r e r = 1 cm. Logo, C = 2π cm ≈ 6,28 cm. Mas o argumento medido em radianos é 4π. Então d = 4π cm ≈ 12,56 cm.

Desse modo, h = 10 cm e d ≈ 12,56 cm.

O MODELO DA EMBALAGEM: A caixinha feita pelos alunos vale como modelo?

Modelo

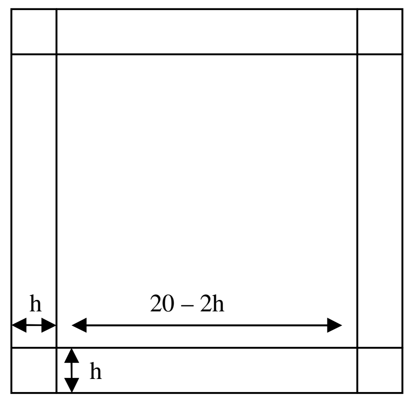


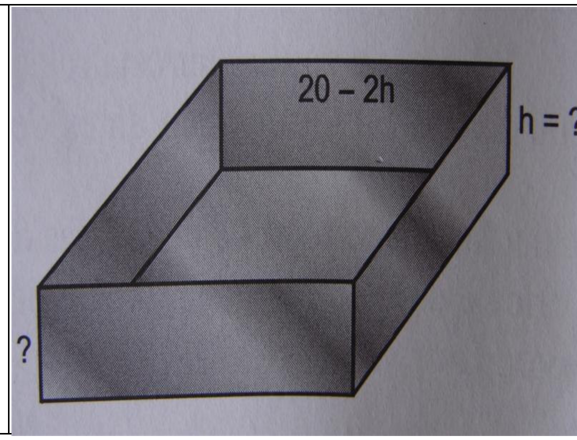
Qual deve ser a altura da caixa (quanto dobrar) para que o volume seja máximo?

No primeiro semestre de 2008, no componente curricular de Prática Pedagógica no Ensino de Matemática, da UEPB de Monteiro, escolhi alguns textos sobre Resolução de Problemas e Modelação Matemática para lermos e discutirmos em sala de aula. Tinha o intuito de aprofundar os conhecimentos teóricos, pois pretendia que os estudantes obtivessem um conhecimento e uma preparação melhores para levar a Modelação Matemática para as salas de aula em seus estágios. Não pretendia apenas aplicar tarefas prontas, mas também que eles tivessem o desafio de aprender a criar modelos.

Neste trabalho, tento descrever um episódio de aula vivido por mim e pelos estudantes com relação ao modelo apresentado. O professor comentou:

– seria bom procurar saber qual a melhor forma para fazer uma caixa, isto é, a que utilize um mínimo de material para um máximo de aproveitamento. Para isso, entreguei a folha A4 (recortada) na forma quadrada para todos, medindo 20 cm de lado. Conforme o esquema representado acima.





O professor perguntou:

- O que é um padrão? Esse modelo está relacionado com a Álgebra e com a Geometria? O que temos que encontrar para fazer a caixa?

Nesse momento, responderam:

– primeiro, temos que encontrar a equação que determina o volume da caixa em função da altura: V = área da base X altura.

Um componente do grupo diz:

– como a base é quadrada, então a área da base é $(20 - 2h)^2$. Tomando "h" como sendo a altura da caixa, fizeram: $V = (20 - 2h)^2.\ h$. Deduziram que, como $0 < h < 10$, não há altura negativa, nem podemos considerar $h \geq 0$, senão não teríamos como fazer uma caixa.

Então, $V = V(h) = (400 - 80h + 4h^2).h$.

Logo, $V(h) = 4h^3 - 80h^2 + 400h$.

Neste momento, apresentaram na lousa o conceito de pontos críticos de uma função. Para isso, usaram o cálculo diferencial, mais especificamente o ponto de máximo local e o ponto de mínimo local, justificando que a função derivada era igual a zero.

Se $V(h) = 4h^3 - 80h^2 + 400h$, calculando a derivada, escreveram: $V'(h) = 12h^2 - 160h + 400$.

Como $V'(h) = 0$, logo $12h^2 - 160h + 400 = 0$. Conseqüentemente, $h_1 = 10$ e $h_2 = \frac{10}{3}$. Como h está entre 0 e 10, então ele não pode ser 10. Portanto, o valor da altura da caixa procurada é igual a $\frac{10}{3}$, a fim de que obtenhamos o máximo volume.

Um dos estudantes perguntou:

– como conseguiremos cortar $\frac{10}{3}$ de cada canto da folha, se esta conta não é exata?

O professor respondeu:

– Esta é uma motivação para se trabalhar com valores aproximados!

Este foi um modelo matemático, no caso o modelo da caixa, que nos prendeu a atenção e nos estimulou a fazer a Modelação Matemática. Trabalhamos, desse modo, os Padrões de Conteúdo da Álgebra e da Geometria.

CONCLUSÃO

Assim como Onuchic (1999), acreditamos que o trabalho de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática deve acontecer numa atmosfera de investigação orientada em resolução de problemas. Os alunos devem ser desafiados a resolver um problema e devem desejar fazê-lo. O problema deve conduzi-los a utilizar seus conhecimentos anteriores e, por outro lado, deverá exigir que se busquem novas alternativas, novos recursos, novos conhecimentos para a obtenção da solução. Na tentativa de compreender a complexa ação de trabalhar em sala de aula, pude perceber também como metodologia de ensino a Modelação Matemática. Ela norteia-se por desenvolver o conteúdo programático a partir de um modelo matemático. O modelo deve ser o ponto de partida para o desenvolvimento dos alunos, dando oportunidade para que possam refletir sobre o modelo proposto e ir em busca do conhecimento matemático. Não há dúvida de que ensinar a partir de problemas e modelos é difícil. As atividades precisam ser planejadas ou selecionadas a cada dia, considerando a compreensão dos alunos e as necessidades de atender ao conteúdo programático.

A experiência de um problema trigonométrico e um modelo matemático, com os alunos envolvidos no componente curricular de Prática Pedagógica no Ensino de Matemática, foi muito boa e eles puderam perceber uma nova forma de aprender e de fazer Matemática através da resolução de problemas e de modelos matemáticos. Esperamos que nosso trabalho possa levantar novos questionamentos que ajudem os professores a perceber o valor da Matemática na formação de um cidadão crítico e reflexivo, necessário para uma sociedade em mudança.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, J.C. **Modelagem Matemática: Concepções e Experiências de Futuros Professores.** Rio Claro: UNESP. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio –Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**, Brasília, MEC, 1999. 113p.

_______. **Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio – Matemática**, Brasília, MEC, 2002.144p.

BRIGHENTI, M. J. L. **Representações gráficas: atividades para o ensino e a aprendizagem de conceitos trigonométricos.** Bauru, SP: EDUSC, 2003. 148p.

BIEMBENGUT, M. S. e HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**, Editora Contexto, 2003, - 3 ed. – São Paulo.

D'AMBROSIO, B. S. Teaching Mathematics through Problem Solving: A Historical Perspective. In: SCHOEN, H. L. (Ed.) **Teaching Mathematics through Problem Solving: grades 6-12**. Reston: NCTM, 2003. cap.4, p.39-52.

HUAMAN, R. R. H. **A Resolução de Problemas no processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática na e além da sala de aula.** 2006. 247 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio – Volume 1.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996. 233p. (Coleção do Professor de Matemática)

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.) **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving**. Reston: NCTM, 1990, p. 1-22.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções** e **Perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. cap. 12, p.199-218.

_______. Ensino de Matemática através da Resolução de Problemas e Modelagem Matemática. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11. , 2003, Blumenau. **Anais da 11ª Conferência Interamericana de Educação Matemática**. Blumenau: Universidade Regional de Blumenau, 2003, p. 1-11.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. p. 212-231.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**. New York: Longman, 2001. 478p.