Bolema, Rio Claro (SP), Ano 20, nº 28, 2007, pp. 113 a 138

Estudo de um Caso de Implantação da Metodologia de Resolução de Problemas no Ensino Médio[1]

A Case Study: Problem Solving in High School Mathematics

Melise Maria Vallim Reis[2]
Edna Maura Zuffi[3]

Resumo

Este artigo é baseado em atividades desenvolvidas dentro de um projeto mais amplo – modalidade FAPESP "Ensino Público" – intitulado "Desenvolvimento e Avaliação de Uma Pedagogia Universitária Participativa no Ensino Médio: Atividades com ênfase em Matemática, Ciências e Comunicação". Nele foram utilizados métodos de pesquisa qualitativa para o estudo da implantação da metodologia de *ensino de Matemática através da Resolução de Problemas,* junto a alguns alunos de uma escola pública, no interior do Estado de São Paulo. A análise dos dados mostrou que a experiência teve êxito, tanto para a geração de significados aos alunos, aproximando-os de uma proposta investigativa, quanto para a melhoria de sua participação em sala de aula. Trouxe indícios de que metodologias diferenciadas podem ser eficazes no ensino público, apesar das contingências do mesmo e das dificuldades geradas pelas mudanças.

Palavras-chave: Educação Matemática. Resolução de Problemas. Ensino Médio. Sistemas Lineares e Funções.

[1] Projeto parcialmente financiado pela FAPESP, de 2002 a 2005, junto ao IEA-São Carlos/ ICMC/ IFSC/ IQSC- USP.
[2] ICMC/USP - São Carlos, Caixa Postal 668, CEP: 13560-970, São Carlos-SP. email: melise.reis@gmail.com
[3] Depto. Matemática, ICMC/USP - São Carlos, Caixa Postal 668, CEP: 13560-970, São Carlos-SP. email: edna@icmc.usp.br

Abstract

This paper is based on activities developed in a public school project entitled "Development and Evaluation of a Participative Pedagogy of University in High School: emphasis on Mathematics, Science, and Communication". In this project, we use qualitative research to study the introduction and development of a methodology that uses problem solving to teach Mathematics in a public high school class, in the State of São Paulo, Brazil. The data analysis showed that the experience was successful in generating new meanings for students, exposing them to an investigative approach, as well as stimulating their participation in the classes. It provided strong evidence that problem solving methodology is feasible for public schools, despite the many constraints that may interfere in the process.

Keywords: Mathematics Education. Problem Solving. High School. Linear Systems and Functions.

Introdução

A Resolução de Problemas tem sido foco de pesquisas na área de Educação Matemática em diversos países. Desde a tradução, no Brasil, da obra organizada por S. Krulik e R.E. Reys (1997), o livro do ano de 1980 do NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, dos E.U.A.), que esta linha de ensino e pesquisa ganhou mais fôlego em nosso país. Este livro traz vinte e dois artigos de especialistas, em sua maioria, americanos, sendo dois destes últimos dedicados a processos de medição quanto ao nível de habilidades dos alunos, individualmente, ou a eficácia de planos de ensino para desenvolver estas habilidades. O primeiro artigo é a reprodução de um texto de 1949, de George Pólya (1990), cujas idéias desencadearam maiores discussões sobre a questão da "Resolução de Problemas (R.P.) em Matemática", com seu clássico *How to solve it* [4] (1ª edição de 1945, 5ª edição ampliada em 1948). Para Pólya (1990), alguns dos princípios básicos da R.P. são os seguintes: o homem é visto como um "animal que resolve problemas" e que tem seus dias preenchidos por aspirações não imediatamente alcançáveis; a inteligência é essencialmente a habilidade para resolver problemas: do cotidiano, pessoais, sociais, científicos, de toda sorte; o aluno

[4] No Brasil, "A Arte de Resolver Problemas".

aprende a resolver problemas, resolvendo-os; a matemática seria o único assunto da escola secundária em que o professor pode propor, e os estudantes podem resolver, problemas em um nível científico (considera que o nível de Euclides seria completamente científico, embora trate de teoremas simples) (KRULIK; REYS, 1997).

Embora não assumamos todas as posições anteriores, concordamos com a afirmação de Pólya (1990) de que a formação do professor também deve enfatizar habilidades de resolver problemas. Verificamos que os professores que não tiveram anteriormente nenhuma experiência com a R.P. em sua formação, sem o apoio de uma pessoa mais especializada no assunto, dificilmente conseguem lidar, de forma rigorosa e ao mesmo tempo flexível, com este tipo de atividade em sala de aula. Isto nos remete às idéias que pretendemos explorar neste artigo, no qual analisaremos algumas nuanças e possibilidades geradas pela utilização da Resolução de Problemas como metodologia, nas aulas de Matemática de uma escola pública da Rede Estadual, no interior de S. Paulo.

No cenário internacional, encontramos vários trabalhos sobre a temática "Resolução de Problemas", abordada sob diversos prismas e referenciais teóricos. Lawson e Chinnappan (2000) examinaram a relação entre o desempenho na resolução de problemas e a qualidade de organização do conhecimento de 36 estudantes da 10ª série, em tarefas de geometria, na Austrália. Estes foram classificados em dois grupos (um de alto e outro de baixo rendimento) e os autores reportam suas análises estatísticas quanto a indicadores de conteúdo e conexão ("content" & "connectedness") para os dois grupos. Os indicadores de conexão de conhecimentos mostraram que os alunos de alto rendimento, em comparação aos outros, podiam retomar mais conteúdos espontaneamente e ativar mais ligações entre esquemas de conhecimentos dados e informações relacionadas. Comentam que estes indicadores de conexão foram mais determinantes para diferenciar os grupos quanto à base de seu sucesso na resolução de problemas.

Van Dooren, Verschaffel e Onghena (2002) investigaram estratégias e habilidades na resolução de problemas aritméticos e algébricos, com professores em formação inicial para escolas primárias e secundárias da Bélgica, comparando-os no início e no final de seu curso. Analisaram aspectos do comportamento desses professores ao resolverem os problemas propostos e a maneira pela qual avaliavam a solução de seus alunos. Verificaram que os futuros professores da escola secundária preferiam usar a álgebra, tanto para suas soluções quanto para avaliar o trabalho dos alunos, mesmo quando uma solução aritmética parecia mais evidente. Alguns professores da escola primária tendiam a aplicar exclusivamente métodos aritméticos, mas, tomadas como um todo, concluíram que as avaliações dos professores primários estavam mais adaptadas à natureza da tarefa.

Ainda, no IX Congresso Internacional de Educação Matemática (IX ICME), realizado em 2000, no Japão, instalou-se um grupo de discussão sobre a "Resolução de Problemas na Educação Matemática" (TSG-11: *Problem Solving in Mathematics Education*). Um dos pontos enfatizados nestas discussões foi quanto à pesquisa sobre a prática e os trabalhos desenvolvidos para ensinar por meio de, e sobre, a resolução de problemas. Houve o pronunciamento de quatro especialistas, reportando sobre o "estado da arte" da temática em seus países, e a apresentação de 20 participantes, que expuseram suas experiências de ensino-aprendizagem através da resolução de problemas.

No cenário nacional, Alves (2004) também coloca como um dos objetivos da Educação Básica desenvolver no aluno a capacidade de solucionar problemas. Utiliza o "modelo de prontidão" para uma atividade matemática, a fim de analisar como a habilidade para perceber um tipo generalizado de problema se manifesta em estudantes do Ensino Médio, com diferentes desempenhos na solução de problemas matemáticos. Esse componente, segundo a autora, seria responsável pela generalização rápida e imediata da estrutura do problema, que ocorre no momento em que o sujeito percebe e seleciona as características essenciais daquele tipo de problema, na leitura inicial. Os resultados da autora indicaram que os estudantes não apresentam tal componente desenvolvido satisfatoriamente.

Allevato e Onuchic (2004), por meio de um programa implementado em linguagem JAVA, analisam como um estudante desenvolveu um elaborado raciocínio lógico-matemático e perfeito encadeamento de idéias matemáticas para resolver um problema de divisibilidade.

Obviamente, nesta retomada de alguns trabalhos acerca da Resolução de Problemas como um objeto de estudos consistente dentro da Educação Matemática, deixamos de abordar muitos outros (ANDRADE, 1997, FABIANI, 1998, SPALLETTA, 1998, PALMA, 1999, ROSOLEN, 1999, OLIVEIRA, 2000, UTSUMI, 2000, MEDEIROS, 2001, MURARI; PEREZ, 2002). Nossa intenção, com tais citações, no entanto, é mostrar que o tema continua atual nas discussões junto a pesquisadores da área. Porém, no que diz respeito à real capacidade da metodologia de ensino-aprendizagem por meio da resolução de problemas provocar mudanças de longo prazo nas salas de aula de Matemática, principalmente no Brasil, e com todas as condições peculiares de nossa educação, há ainda muitas investigações a serem feitas. É nesta perspectiva que trazemos nossa pesquisa ao debate.

Neste trabalho, adotamos a concepção de Onuchic (1999) e entendemos que a *metodologia de ensino de Matemática por meio da Resolução de Problemas* (M.R.P.) consiste em apresentar e trabalhar com os alunos, no início do tratamento dos conceitos matemáticos, uma ou mais situações-problema que possam levá-los a raciocinar sobre a necessidade de construir esses conceitos (bem como de recordar outros periféricos, necessários à resolução do problema) e, também, para que possam trazer à tona as concepções prévias que eventualmente tenham sobre os entes matemáticos envolvidos na resolução. Assim, esta resolução requer um amplo repertório de conhecimento, não se restringindo às particularidades técnicas e aos conceitos, mas estendendo-se às relações entre eles e os princípios fundamentais que os unificam. E a situação-problema não deve ser tratada como um caso isolado, mas como um passo para alcançar a natureza interna da Matemática, assim como seus usos e aplicações. (ONUCHIC, 1999).

Do ponto de vista pedagógico, a Resolução de Problemas parece ser considerada bastante frutífera, pois continua em pauta em diversas discussões e pesquisas dentro da Educação Matemática. Apesar disso, tem-se observado que poucos professores da Rede Oficial de Ensino tiveram experiências concretas com a mesma, principalmente no nível Médio e no sentido que aqui propomos. Alunos e professores ainda se mostram mais adeptos aos métodos tradicionais de ensino, relutando em participar de novas proposições, exceto em situações esporádicas, que não são desenvolvidas com regularidade e continuidade.

Desse modo, procuramos apresentar uma investigação sistematizada, na sala de aula do Ensino Médio, sobre a aceitação e a validação dessa metodologia, junto a um professor que a desenvolveu pela primeira vez e também por parte de seus alunos, quando esta foi proposta em um regime mais regular, prolongando-se por todo o ciclo de ensino-aprendizagem em questão.

Várias perguntas se colocaram a partir daí: (1) quais as dificuldades de implementação da R.P. por parte do professor do Ensino Médio? (2) quais as vantagens e/ou dificuldades geradas com a nova metodologia junto aos alunos? (3) quais os resultados efetivos sobre a melhoria do aprendizado em Matemática, por parte desses alunos, a partir da implantação da M.R.P.? (4) quais as dificuldades e/ou facilidades técnicas (como grade curricular, horários das aulas, bibliotecas, materiais disponíveis) oferecidas pela escola, que podem influenciar no desenvolvimento da metodologia?

Tentaremos responder brevemente estas perguntas, procurando focar principalmente as questões (2) e (3) e apontar dados das observações, entrevistas e análise realizadas, os quais evidenciam que o desenvolvimento da M.R.P. foi bastante frutífero para a escola em questão.

Aspectos teóricos e metodológicos da pesquisa

O objetivo geral do projeto no qual se insere esta pesquisa é promover a melhoria da qualidade do ensino de Ciências e Matemática nessa escola, em classes do Ensino Médio, e este fim desdobra-se na formação de aptidões para as ciências, em se tratando dos alunos, e na formação continuada dos professores envolvidos. Iniciou-se em 2000, de forma experimental, e a partir de 2002, passou a contar com o financiamento da FAPESP, dentro da alínea “Melhoria do Ensino Público”.

Participam do projeto uma única sala de cada série da escola envolvida, seus professores e a coordenação pedagógica. Os alunos são selecionados dentre aqueles que mostram maior interesse em aderir a essa proposta, quando, no final da 8ª série do Ensino Fundamental, são informados de que deverão dedicar maior tempo aos estudos nas áreas de Ciências e Matemática, caso aceitem a participação.

A escola é pública e localiza-se na região central da cidade de São Carlos, interior de São Paulo. Sua comunidade é bastante heterogênea, sendo formada por muitos estudantes com condições sócio-econômicas precárias, oriundos de diversos bairros periféricos e, inclusive, alguns da zona rural.

Para o ensino de Matemática, foi elaborado, numa parceria entre a pesquisadora e a professora participante, um texto didático que tem como foco a M.R.P. nas aulas que iniciam assuntos novos. O texto é reproduzido e fornecido a todos os alunos, em cada série. Além disso, eles dispõem de um livro para estudos e exercícios complementares, que fica disponível a cada aluno, durante o período letivo, e que é recolhido no final de cada ano, para o uso das turmas seguintes.

A professora foi orientada, logo no início do projeto, a estabelecer um novo contrato didático (BROUSSEAU, 1988) com as classes participantes. Não foi feito um contrato formal, com regras por escrito, mas a professora explicava as normas de funcionamento da M.R.P. no início de cada ano letivo e as retomava durante as aulas destinadas ao trabalho com situações-problema (geralmente aquelas que antecediam o desenvolvimento de conteúdos novos). Em resumo, nestas aulas, eles deveriam formar grupos de quatro ou cinco membros, discutir e propor soluções para os problemas apresentados. Deveriam procurar registrar, com o máximo de detalhes possível, seus processos de resolução, os quais seriam apresentados a toda a sala, pela professora, num momento de síntese e análise dos resultados alcançados. A avaliação deste trabalho em grupo, assim como outras atividades complementares e uma ou duas provas individuais, comporiam as notas bimestrais dos alunos, as quais deveriam refletir o nível de envolvimento dos mesmos com as atividades propostas.

Com a aplicação de técnicas de *pesquisa qualitativa* (ANDRÉ, 1995, BORBA; ARAÚJO, 2004), observamos duas salas de aula contempladas pelo projeto. Com registro sistemático dos dados (escrito ou em vídeo), tentamos responder as perguntas anteriormente mencionadas. Tendo por base os aspectos teóricos que apresentaremos a seguir, realizamos uma sistemática caracterização e documentação de dois episódios de desenvolvimento da M.R.P.: um na 1ª série, quando os alunos ainda tinham tido pouco contato com esta metodologia, e um na 2ª série, quando já estavam mais habituados com a mesma. Por uma questão de síntese, aqui apresentaremos, em maiores detalhes, apenas alguns episódios relativos à segunda.

Entendemos por *situação-problema* aquela que convide ao pensamento matemático, que seja desafiadora, que envolva a idéia de um obstáculo a ser superado, ou de idéias a serem elucidadas, e que não forneça indicações diretas de quais operações executar para sua solução. Por exemplo, daí se excluem enunciados do tipo "calcule (ou simplifique) [uma expressão]", ou simplesmente aqueles que envolvam a aplicação simples de um algoritmo de cálculo previamente conhecido.

É claro que só haverá problema se o aluno perceber uma dificuldade a ser superada, e o que é problema num estágio pode não mais se caracterizar dessa maneira em outro. Tal situação-problema somente se constituirá em uma motivação de aprendizado para uma pessoa, quando não lhe for familiar, ou seja, quando há certa novidade na mesma, que requer um tratamento distinto de uma mera aplicação rotineira; quando necessita de uma deliberação, identificação de hipóteses possíveis, tendo o indivíduo que elaborar condutas próprias que ponham à prova suas capacidades de raciocínio autônomo. Acreditamos que isto não está em contradição com a definição de Onuchic (1999, p. 215), segundo a qual um problema é "tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver, que o problema passa a ser um ponto de partida e que, através da resolução de problemas, os professores devem fazer conexões entre os diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos".

Apenas limitamos, neste artigo, as situações-problema àqueles casos em que há necessidade de maior envolvimento cognitivo, nos quais a resolução não ocorre de imediato, por mera aplicação de um algoritmo já conhecido e dominado pela pessoa que se dispõe a resolvê-la. Referimo-nos a situações-problema expressas em enunciados mais abertos, nos quais os números ou dados apresentados são mais gerais e, para cuja resolução, não importa realmente saber quais são esses números ou dados, mas a sua natureza e suas inter-relações. Ainda, podem englobar situações-problema em que há necessidade de levantamento de hipóteses e a geração de dados a partir destas.

No artigo de Ponte (2003a), encontramos uma outra caracterização possível, diferenciando a resolução de problemas, de tarefas de exploração e investigação. Não fazemos esta distinção rigorosa e aqui trazemos um enfoque para a M.R.P., no qual, ao se ensinar por meio de problemas, estes passam a ser importantes, não somente como um propósito de se aprender Matemática, mas também, como um **primeiro passo** para se fazer isso. Segundo nossa proposta, o ensino-aprendizagem de um assunto começa com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse assunto e, a partir dela, são desenvolvidas técnicas matemáticas razoáveis para a mesma e para outras similares (ONUCHIC, 1999), levando o aluno a ultrapassar o problema em si e a refletir sobre conceitos generalizados a que ele possa conduzi-lo. Então, fica difícil delinear onde termina um e começa o outro tipo de atividade, segundo a caracterização de Ponte (2003a). Durante as discussões de que participamos no V CIBEM (Congresso Iberoamericano de Educação Matemática, julho de 2005), em Portugal, no grupo de Resolução de Problemas e Tarefas Investigativas (Grupo de Discussão GD04), esta dificuldade de conceptualização também foi constatada por outros pesquisadores e acordou-se que ela depende mais da orientação que é seguida durante o envolvimento dos alunos e professores com a atividade, e não da tarefa em si, considerada isoladamente.

Uma caracterização interessante também pode ser encontrada com a idéia de Tarefas Intelectualmente Exigentes (TIE), proposta por González (1998). Segundo este autor, se assumimos que um dos propósitos básicos da educação seja auxiliar os educandos a desenvolver ao máximo suas potencialidades e convertê-los em cidadãos capazes de aprender, pensar e raciocinar de maneira autônoma e eficaz, devemos organizar tarefas que os estimulem na ativação de seus processos de pensamento de ordem superior e os levem a ser indivíduos intelectualmente competentes. Tais tarefas devem exigir certo esforço no raciocínio, e não serem realizáveis como mero exercício de memória, nem com a utilização mecânica de esquemas de algoritmos, nem de receitas pré-concebidas. Ao contrário, devem exigir certo esforço intelectual. O envolvimento em uma TIE evoca o exercício de algumas habilidades cognitivas básicas, como o raciocínio, a leitura, a escrita, e o cálculo ou manejo de relações quantitativas ou simbólicas. Porém, além destas, também requer processos de pensamento superiores, como a metacognição, e a possibilidade de transformá-la em uma experiência generalizável e transferível.

Com a M.R.P., estamos propondo que o envolvimento em uma atividade de resolução de problema aproxime os alunos de uma investigação (PONTE, 2003a), ou no sentido proposto por González (1998), de uma Tarefa Intelectualmente Exigente, sem, entretanto, esperarmos, num primeiro momento, que esses alunos utilizem habilidades metacognitivas de forma tão explícita e intensa quanto um pesquisador em Matemática.

No estudo da tese de Santos (1993), pudemos encontrar uma caracterização de requisitos e etapas sobre a Resolução de Problemas, a qual consideramos muito interessante, tomada como uma metodologia que se aproxime de uma atividade de investigação, suscitando conflitos cognitivos que possam auxiliar nas mudanças conceituais e metodológicas. Consideramos que tal caracterização se aproxima das concepções por nós adotadas e estes requisitos e etapas nos auxiliaram na análise das situações observadas. São eles:

1. Consciência da existência do problema: verificar se o aluno adquiriu percepção da situação como um problema - e em que nível de consciência - e se ele define, com clareza, os objetivos e a linguagem simbólica nele envolvidos.

2. Supressão de dados: verificar se o aluno consegue suprimir os dados para a solução da situação-problema, evitando um tratamento puramente operativo (i.é., evitar que os alunos saiam empregando quaisquer operações e manipulação dos dados, antes de analisar mais profundamente a situação-problema, como é comum nas abordagens mais tradicionais das tarefas de resolução).

Posteriormente, quando esta orientação de supressão de dados já estiver incorporada pelos alunos, problemas com enunciados mais tradicionais poderão ser propostos. Este tipo de abordagem, segundo Santos (1993), aproxima a R.P. de uma atividade de investigação, fugindo aos enfoques canônicos mais encontrados em livros-texto, os quais trazem modelos operatórios, propostos antes das resoluções pelos alunos. A apresentação destas situações abertas requer a adoção de pautas e/ou orientações gerais de ação.

3. Interesse pela situação problemática abordada: refere-se ao envolvimento do aluno com discussão prévia do enunciado e do significado da situação-problema, favorecendo uma atitude positiva para a tarefa e suas relações com o pensamento tipicamente científico, i.e., suas inclinações para tentar resolver, levantar hipóteses, testar, provar e propor generalizações, a partir da situação apresentada.

4. Análise qualitativa: compreende a interação entre as informações descritivas do enunciado e os conhecimentos do sujeito. As características dessa análise, global e qualitativa, têm suporte na declaração de Einstein (apud Santos, 1993, p.49) de que

> nenhum cientista pensa sobre fórmula. Antes que o cientista comece a calcular, deve ter em seu cérebro o desenvolvimento de seus raciocínios. Estes últimos, na maioria dos casos, deveriam poder ser explicados com palavras simples. Os cálculos e as fórmulas vêm depois.

Neste mesmo sentido, Ponte et al. (2003b, p. 13-17) consideram que, "para os matemáticos, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos e desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades", mais do que pensar em fórmulas ou propor um resultado fechado em si mesmo. Para isto, dá como exemplo um caso envolvendo o famoso matemático Henri Poincaré, quando este, ao tentar demonstrar a impossibilidade de existência de funções com certo tipo de características, acabou por provar precisamente o contrário. Estes autores defendem, então, que o processo de criação matemática envolve acontecimentos inesperados, "de movimentos para frente e para trás, e essa perspectiva contrasta fortemente com a imagem usual dessa ciência como um corpo de conhecimento organizado de forma lógica e dedutiva, qual edifício sólido, paradigma do rigor e da certeza absolutos".

Desse modo, uma investigação matemática desenvolve-se em torno de um ou mais problemas. E, quando trabalhamos num problema, embora nosso objetivo, naturalmente, seja resolvê-lo, para além disso, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, revelam-se tão ou mais importantes que a solução do problema original. Ponte et al. (2003b) defendem, então, que os alunos podem envolver-se em investigações matemáticas e que isso pode se constituir num poderoso processo de construção do conhecimento. Suas propostas sobre atividades investigativas privilegiam o desenvolvimento, em sala de aula, de tarefas que levem mais à exploração e formulação de questões, à formulação de conjecturas, à realização de testes e refinamentos dessas conjecturas, às justificações e avaliação dos resultados.

A etapa de análise qualitativa aproximaria, então, a Resolução de Problemas a uma atividade investigativa, pois consiste numa atividade de tomada de consciência, de compreensão e também de organização. Nesse processo, as escolhas e decisões são vistas com a finalidade de ajustar a situação-problema a um quadro teórico.

Na M.R.P. - como uma proposta de atividades que se aproximam de uma investigação - a etapa de análise qualitativa é fundamental nesse processo de ajuste e também se refere fortemente a processos de metacognição (GONZÁLEZ, 1998). Assim, ao percorrer os passos iniciais da resolução pela análise qualitativa, os alunos, em grupo, expõem conjecturas mais ou menos nebulosas que posteriormente são transformadas em hipóteses mais precisas, auxiliando-os a compreender e tomar consciência de suas habilidades e dificuldades durante o processo de resolução, e a reconhecer se avançaram ou não na realização da tarefa.

5. Levantamento de Hipóteses: esclarecimento dos dados relevantes, parâmetros da situação-problema, formulação ou levantamento de hipóteses não explicitadas – principalmente quando lidamos com enunciados abertos – conscientização sobre as pré-concepções e conflitos cognitivos que podem aparecer no processo de resolução.

6. Estratégias de resolução: refere-se a compreender, delimitar e modelar o problema a partir de conhecimentos teóricos, ao se passar por todas as etapas da R.P., inclusive pelo levantamento de hipóteses, e evitando o simples "ensaio e erro" (principalmente aquele que não traz uma aproximação com os conhecimentos prévios do aluno, e apesar de ser esta, na maioria das vezes, a primeira forma observada em nossa pesquisa, com que os alunos atacavam os problemas em Matemática).

Qualquer que seja a estratégia de resolução adotada, a fundamentação e clarificação prévia ou concomitante da solução, não deixa de ser uma necessidade essencial. Isso implica a necessidade de explicitação e verbalização, afastando a solução de um operativismo sem significado (SANTOS, 1993).

7. Análise dos resultados: refere-se a voltar aos princípios peculiares a cada situação; valorizar o processo e não apenas o resultado; verificar as hipóteses após a obtenção dos resultados e a adequação das estratégias tomadas. Esta etapa não deve ser reservada somente ao final, mas em diversos momentos da proposta de solução. Ela também favorece os processos metacognitivos, à medida que estimula o estudante a retomar todo o esforço empreendido na atividade de resolução.

8. Frutibilidade: refere-se a levantar a possibilidade de a situação-problema estudada dar origem a novos problemas, de modo semelhante a uma investigação científica. Analisar a possibilidade de generalizar situações, considerando implicações teóricas. Tal aspecto é considerado como um dos produtos mais interessantes da R.P., pois remete ao plano mais complexo da criatividade de alunos e professores.

Aproximando esta etapa à proposta teórica de González (1998), entendemos que ela favorece o engajamento dos estudantes em processos cognitivos superiores, contribuindo fortemente para que a resolução de problema se constitua numa experiência generalizável e transferível.

Entretanto ressaltamos que, nem por isso, todas estas etapas levantadas devem ser tomadas à risca, à semelhança de um algoritmo padronizado e rígido, com o propósito de guiar, passo a passo, as atividades desenvolvidas pelos alunos. A intenção, com elas, é alertar para a propagação de mecanismos conservadores usuais na R.P., os chamados "vícios metodológicos" traduzidos por apropriação de certeza absoluta sem autocrítica, e para a tentação de se deixar conduzir por caminhos operativos mecânicos, cegos e simplistas (SANTOS, 1993, p. 56).

Na análise dos dados obtidos nas aulas em que se empregou a M.R.P., procuramos, então, observar se tais etapas e/ou requisitos que aproximam a tarefa de uma atividade investigativa estavam presentes. A seguir, destacamos alguns pontos da análise que julgamos relevantes para a caracterização de um quadro do uso da M.R.P. na escola observada. Como já mencionado, utilizaremos principalmente os dados da 2ª série, para não alongar em demasia este artigo.

As situações-problema seguintes foram apresentadas na aula introdutória ao conteúdo de "sistemas lineares", que consta do currículo usual do Ensino Médio:

1) Uma criança se interessa por comer apenas dois alimentos: sorvete e quindim. A mãe, preocupada, consultou um nutricionista e este lhe forneceu a seguinte tabela:

	Sorvete	Quindim	Necessidade diária de cada nutriente
Proteína(mg)	2	1	20(mg)
Gordura(g)	1	3	30(g)

A tabela mostra que cada sorvete contém 2 mg de proteína e 1g de gordura. E a criança precisa de 20 mg de proteína e 30 g de gordura, por dia. Então a mãe tem o seguinte problema:

a) Quantos sorvetes e quantos quindins a criança poderá comer para atingir as necessidades básicas diárias desses nutrientes?

b) Com que quantidades a criança estará ultrapassando essas necessidades? Quando ela estará ingerindo proteínas e gorduras abaixo dessas necessidades?

2) O problema acima é uma simplificação do que os nutricionistas

chamam de “problema da dieta”. Considere agora um animal que precisa de proteínas, gorduras, vitaminas e sais minerais equilibrados em sua dieta e que ele coma quatro alimentos: leite, ovos, mamão e alface. Considere a tabela nutricional:

	Leite (100ml)	Ovos (1 un.)	Mamão (100g)	Alface (100g)	Necessidades diárias
Proteína(mg)	2	1	0	0	20
Gordura(g)	1	3	1	0	30
Vitaminas(mg)	0	0	1	1	20
Sais Minerais(mg)	1	1	2	1	10

Pergunta-se: Quantas unidades ingerir de cada alimento, para se atingir as necessidades diárias? (As unidades são as porções entre parênteses). Analise o que significam as respostas encontradas.

Análise dos dados

Relatamos, em seguida, algumas categorias obtidas a partir das unidades de análise, na resolução das situações-problema anteriores, pelos alunos, antes de terem visto a formalização da teoria geral sobre sistemas lineares.

Observamos que os diálogos que se apresentam poderiam ter sido obtidos por alunos da 7ª ou 8ª séries do Ensino Fundamental, a não ser pelo fato de que alguns grupos de alunos utilizaram sólidos conhecimentos sobre funções e seus gráficos, que geralmente são construídos, nas escolas públicas de São Carlos, a partir da 1ª série do Ensino Médio. (Lembramos que os dados aqui destacados referem-se a alunos da 2ª série). Além disso, notamos que os alunos, anteriormente a este projeto, nunca haviam tido um contato com a Resolução de Problemas em Matemática de forma sistematizada, o que lhes causava bastante estranheza com a linguagem das situações-problema, apesar de simples. Muitos desses alunos ingressaram no projeto, na 1ª série do Ensino Médio, com dificuldades em lidar com operações aritméticas básicas, principalmente quando estas incluíam frações e números representados em forma de decimais. Pelo diagnóstico feito pela professora, apresentavam, no início, dificuldades para resolverem alguns tipos de equações simples, quando estas envolviam esses números. Também apresentavam muitas dificuldades para lidar com os enunciados das situações-problema e destacar e anotar dados relevantes para sua solução.

Isto pode não ser o "típico" ou o "esperado" para uma sala do Ensino Médio, porém é o que se apresenta na realidade de muitas escolas públicas, segundo relatos da própria professora participante do projeto.

Destacamos que, apesar de todas estas dificuldades, as situações-problema foram enfrentadas pelos alunos da 2ª série com muito boa disposição. Os grupos (de 4 a 5 componentes) se envolveram na resolução e mostraram interesse em alcançar uma solução. Como será relatado a seguir, alguns deles ultrapassaram as expectativas da professora, uma vez que estas situações serviriam para desencadear discussões e sistematizações posteriores sobre sistemas de equações lineares e seus métodos de resolução. Tais sistematizações eram feitas pela professora, após a apresentação das propostas de resolução de todos os grupos da sala. Em aulas posteriores, os métodos generalizados para a resolução de sistemas de equações lineares de ordem maior ou igual a três foram apresentados, dando-se ênfase aos processos de escalonamento e às idéias de equações equivalentes por transformações lineares.

1. Com relação à **Consciência da existência do problema:**

1º excerto: A professora incentiva constantemente à leitura do enunciado e o envolvimento dos alunos. Incentiva, inclusive, que produzam uma expressão para o mesmo em linguagem matemática, quando vê que eles estão "chutando" valores isolados para chegarem à solução (isto era comum, num primeiro momento de aproximação desses alunos às situações-problema):

- Vocês deverão ler os exercícios [a professora não fazia distinção dos termos "exercícios, problemas/situações-problema" na sala de aula] *do inicio até o final, primeiro, para terem uma noção de como solucioná-los. Primeiro têm que entender, depois vocês vão raciocinar sobre a solução.*

- Vocês fizeram a verificação da quantia que vocês encontraram, não fizeram? [Aqui, os alunos já haviam encontrado dois números inteiros que resolviam o problema]. *Então, essa verificação tem uma relação matemática da quantia de sorvetes e quindins. Tentem estabelecer essa relação. Pensem um pouquinho. Vocês fizeram um cálculo, não fizeram?*

Tentem raciocinar em cima desse cálculo. E associar a ele algum cálculo matemático. A algum cálculo algébrico matemático (...)

2º excerto: Os alunos perceberam que o problema os conduzia a montar equações, porém tiveram dificuldade de organizar as idéias em linguagem matemática. Após a intervenção da professora, eles conseguiram essa organização:

A_8: (...) O sorvete é x_1 e o quindim é x_2 e que a soma dos dois teria que dar um y.

$x_1 + x_2 = y$

O que a gente sabe é que a proteína tem que dar 20 e a gordura tem que dar 30

$x_1 + x_2 = 20$

$x_1 + x_2 = 30$

e que esses números tem que depender do sorvete e os outros do quindim.

Profa.: É...só que tem um excesso de variáveis aí.

[Os alunos desse grupo haviam anotado expressões envolvendo *x,y,* x_1 e x_2 e há certa liberdade matemática no uso dos termos "incógnita" e "variável", sem muita preocupação por parte da professora].

A_8: A gente achou a mesma coisa só que a gente não sabe.

Profa.: Tem que sintetizar um pouco. As quantidades do que, que vocês estão procurando?

A_8: Sorvetes e quindins. x e y.

A_9: $x + y = 20$

$x + y = 30$

Mas como que o mesmo x e o mesmo y têm que dar 20 e 30?

P (pesquisadora): É isso? Quando você come x sorvetes, quanto de proteína você come?

A_8: 2 proteínas.

P: x sorvetes, quanto de proteína?

A_8: x.

P: 1 sorvete?

A_8: 2

P: 2 sorvetes?

A_8: 4.

P: 5 sorvetes?

A_8: 10.

P: 5,5 sorvetes?

A_8: 11.

P: x sorvetes?

A_8: x.

Profa.: Pensa no seu raciocínio.

A_8: y

A pesquisadora insiste na idéia da duplicação.

A_8: Já tá aí, mas eu não consigo pensar direito.

Profa.: Renan, qual o cálculo numérico que você fez?

A_8: Duas vezes.

P: Duas vezes o que? Não é o número de sorvetes?

A_8: Duas vezes x.

Profa.: Só que você ingere quindins também.

P: O que é o número de quindins para você?

A_8: y.

P: Então escreve aí: x é o número de sorvetes. O que nós vimos aí? Quanto de proteína ingere quando ingerimos 1 quindim? E quando ingere y quindins?

A_9: Seria $2x + y = 20$

P: Isso...muito bem!

Profa.: Agora pensa na gordura.

A_8: Agora a gordura é ao contrário... $x + 3y = 30$. (...)

Observamos que, num outro grupo, um aluno teve necessidade de várias intervenções, tanto da professora quanto da pesquisadora (presente na sala, nesse momento), para chegar à relação algébrica correta, enquanto que neste exemplo, os alunos conseguiram isso mais independentemente: já haviam percebido que o problema envolvia um sistema e tinham mais segurança no que falavam.

2. **Análise Qualitativa da situação-problema:**

O excerto seguinte mostra que foi necessária a intervenção da pesquisadora para que o aluno revisasse sua construção parcial da solução e também avaliasse criticamente a validade de sua estratégia de resolução para casos mais gerais.

(...) T: 6 sorvetes e 8 quindins. (fornecendo a resposta ao 1º problema)

P: E como você achou esses números?

T: Por raciocínio. [Com esse termo, eles querem dizer "por tentativa e erro": era um termo convencionado naquela classe].

P: E se não desse 30 na segunda conta?

T: Aí não dava certo. Aí tinha que tentar outro.

P: Tinha que chutar outro?

T: É.

P: Então não é raciocínio, é chute!

T: É... mais ou menos. Mas deu certo.

P: Deu? Qual é a pergunta do seu problema?

T: Quantos sorvetes e quantos quindins a criança poderá comer para atingir as necessidades diárias desses nutrientes?

P: E qual a resposta?

T: Para atingir as necessidades básicas desses nutrientes, a criança precisará comer 6 sorvetes e 8 quindins. Só!

P: E se aqui, ao invés de 30 fosse 28?

T: 28? Aí teria que fazer tudo de novo.

(...)

Podemos destacar, aqui, que os processos de Resolução de Problemas devem ser enriquecidos com a mediação do professor, até que os alunos desenvolvam maior autonomia para fazerem, sozinhos, esta análise qualitativa de suas estratégias. Pelos dados observados em nossa pesquisa, parece-nos que isto não é simples de se conseguir: mesmo os alunos do 2º ano utilizaram, em primeiro lugar, a estratégia de "ensaio e erro", verificando com vários números arbitrários o que ocorria no problema, antes de agrupar informações descritivas e de lançar mão de seus conhecimentos algébricos prévios.

O 2º excerto, apresentado anteriormente, também ilustra a necessidade dessa mediação. Nele, após a sugestão da professora, de sintetizarem as notações, A_8 sugere o uso de duas variáveis e A_9 monta um sistema, mas, na mesma hora, percebe que há algo de errado, pois ele seria impossível (A_9: *Como que com o mesmo x e o mesmo y pode dar 20 e 30?*). Após a percepção de A_9, ocorre a intervenção da professora para que o sistema montado esteja coerente com os dados do problema. Notamos, aqui, o uso de conhecimentos prévios dos alunos para refutar esta primeira proposta do grupo, mas somente após a chamada da professora para um certo nível de organização da resolução do problema.

Destacamos que outras duas situações semelhantes foram observadas na 2ª série, nas quais os alunos utilizam seus conhecimentos prévios sobre sistemas lineares a duas incógnitas, para analisar criticamente a proposta de solução de cada grupo.

3. **Verificação de hipóteses e dados:**

O processo de levantamento de hipóteses não foi muito trabalhado pelos alunos, quando os problemas eram mais abertos, como podemos observar no exemplo abaixo:

Na resolução da parte (b) do primeiro problema, o Grupo 7 fez a seguinte observação:

- *Se comer mais que 6 sorvetes e 8 quindins irá ultrapassar. Se comer menos, ficará abaixo das necessidades diárias.*

Este grupo, embora tenha levantado essa hipótese, não analisou os casos em que uma quantidade aumenta e a outra diminui. Outros grupos apresentaram maiores dificuldades ainda com esta questão (com exceção do Grupo 8).

Vimos que há, ainda, certa dificuldade mesmo para os alunos da 2ª série, com o levantamento de todas as hipóteses plausíveis, mesmo tendo sido trabalhada, com eles, a M.R.P. por dois anos, o que nos mostra que esta estratégia também não é utilizada com naturalidade. Acreditamos, entretanto, que quanto mais prolongada for a experiência escolar dos alunos com este tipo de metodologia, maior será a possibilidade de que eles alcancem uma atitude mais investigativa diante das situações-problema.

4. **Verificação de estratégias de resolução:**

Observamos que a estratégia de "ensaio e erro" foi a primeira a ser utilizada por todos os grupos na 2ª série.

Um outro grupo também propôs o uso da "Regra de Três Composta", antes de generalizar com a estratégia algébrica de montar um sistema linear, como vemos na situação a seguir:

(...)
Profa.: A que conclusão vocês chegaram?
T: Seis sorvetes e oito quindins. Professora, se tiver um cálculo matemático para ser feito seria uma regra de três composta?
Profa.: Deu certo por regra de três inicialmente?
T: Se fizer por regra de três simples separadamente, dá certo. Mas aí, se quisesse fazer tudo de uma vez só, por regra de três composta, daria certo?
Profa.: É que são duas grandezas, mas cada grandeza com suas respectivas quantidades. Então tenta pensar em outro cálculo matemático que estaria de acordo. Vocês encontraram as quantidades de sorvetes e quindins, não encontraram? E se não encontrassem? Qual seria a possibilidade? Vocês estariam chamando as quantidades de sorvetes e quindins do quê? (...)

Para a generalização do problema da dieta (questão 2), também foi usada a estratégia de dividir um sistema "4 por 4" em dois sistemas "2 por 2":

P: Não sabe resolver?
A_{10}: Não... Porque o sistema que a gente sabe é só com dois e aqui tem quatro.
A_{11}: Não pode dividir no meio?
P: Mas aí o que vai acontecer?
A_{11}: Primeiro vamos achar o x e o z e depois o a e o z.
P: Então tenta aí o que você tá pensando.
A_{11} escreveu: $2x + y = 20$
$x + 3y + z = 30$
A_{10}: Não vai dar certo. Tem o z (...)

Notamos que, para o segundo problema, os alunos não tiveram dificuldade em montar o sistema 4 por 4 (de quatro equações, a quatro incógnitas), após terem trabalhado com o problema 1, usando seus conhecimentos prévios sobre sistemas com a situação anterior e generalizando-os para uma outra semelhante. E para a solução, resgataram o conhecimento das estratégias que utilizaram para resolver o sistema 2 por 2.

Para a questão 1b, um dos grupos nos surpreendeu ao propor como estratégia o uso de gráficos. O grupo 8 resgatou seus conhecimentos sobre funções afins e sobre o comportamento de seu gráfico para avaliar as possíveis respostas ao problema, sem que a professora tivesse evocado esses conhecimentos. Vale observar que esse grupo usou a mesma estratégia que o anterior, na resolução do segundo problema: sugeriram dividir o sistema 4 por 4 em duas partes, com duas equações em cada uma.

5. Quanto à **análise dos resultados**, o momento de socialização daqueles alcançados pelos vários grupos era muito propício a essa análise. A professora apresentou aos alunos todas as possibilidades de resultados, na lousa, e discutiu brevemente sobre as soluções encontradas. Nestes momentos de síntese, ela continuava a fazer questionamentos sobre as respostas que estavam incorretas ou incompletas. Todos os alunos se atentavam para essa análise, mas apenas os mais participativos apresentavam sugestões sobre as propostas dos colegas. Verificamos que nos pequenos grupos, isoladamente, os alunos não alcançavam plenamente esta etapa de analisarem as soluções encontradas dentro do grupo.

6. Quanto à **supressão dos dados** e a **frutibilidade:**

Não constatamos situações de sala de aula suficientes para que possamos identificar tais categorias de análise. No primeiro caso, a idéia passada na condução da resolução era mais a de que os alunos deveriam usar/manipular os dados, para depois passar à representação algébrica. A mediação da professora ajudou, então, a organizar a linguagem matemática formal a partir da manipulação dos dados numéricos. Quanto à **frutibilidade**, esta não foi bem desenvolvida pela pesquisadora junto à professora, na orientação sobre a M.R.P., e ela raramente pedia que os alunos criassem novos problemas ou generalizassem a partir daqueles já resolvidos.

Considerações finais

As etapas encontradas em Santos (1993) nos auxiliaram a gerar um quadro sobre o qual as atividades de Resolução de Problemas desenvolvidas puderam ser interpretadas. Algumas destas etapas foram encontradas em maior, outras, em menor intensidade nos episódios analisados, porém estes revelaram uma boa aproximação de nossa proposta da M.R.P. com atividades de caráter investigativo (PONTE et al., 2003b).

Com esse modelo, foi possível analisar situações de sala de aula reais, que envolveram a M.R.P., que não foram exclusivamente conduzidas por pesquisadores, num ambiente cultural próprio da escola pública, sem que este fosse bruscamente alterado por agentes externos (embora se tenha um certo nível de interferência na parceria realizada com a professora).

Estas reflexões nos levam a sugerir que é possível ampliar o uso da M.R.P. de forma sistemática, mesmo no contexto das escolas públicas, de maneira a aproximar seus alunos de tarefas que sejam intelectualmente exigentes e os conduzam a atividades mais próximas de uma investigação matemática. Observamos, entretanto, que tal propósito não é tão simples e imediato, se quisermos utilizar a resolução de problemas com um enfoque investigativo. Por exemplo, o **levantamento de hipóteses** (SANTOS, 1993), durante o trabalho com situações-problema, precisaria ainda ser mais desenvolvido, segundo os dados que obtivemos para o caso em questão. Isto demanda investimentos de tempo e muitos esforços, por parte dos alunos, professores e alguns mediadores que conheçam as teorias que fundamentam a M.R.P.

Retomando as perguntas originalmente propostas para esta investigação, a partir dos dados aqui relatados, pudemos chegar a algumas conclusões:

- O número grande de alunos na sala se constituiu numa dificuldade inicial para a professora, pois não era possível dar atenção total a todos os grupos, durante a resolução dos problemas. Mas isto se foi acomodando no processo, porque, com o passar do tempo, os alunos foram se habituando a esperar por ela, enquanto desenvolviam tentativas de resolver por si mesmos.
- Outro obstáculo enfrentado foi que os alunos da 1ª série, por não terem experiência com este tipo de proposta em anos anteriores, ficavam mais relutantes e reclamavam muito de suas dificuldades. Porém, isto também foi amenizado, conforme se ampliavam os momentos de experimentação dos alunos com a M.R.P. Os estudantes da 2ª série apresentavam mais desenvoltura e engajamento nas tarefas, pois acreditamos que eles já estivessem mais acostumados a enfrentar desafios. Estes fatos mostram que a aplicação da M.R.P., de forma continuada, foi importante para mudar a postura dos alunos diante da busca pelo saber e da própria aprendizagem. Isto parece corroborar as hipóteses de González (1998, p. 69-70), segundo as quais são

necessárias práticas reiteradas com as tarefas intelectualmente exigentes (TIE), para que o aluno tenha oportunidade de exercitar processos de pensamento superiores e tenha a possibilidade de transformá-los em experiências generalizáveis e transferíveis. E aqui acrescentamos que, num outro nível, o mesmo deve acontecer com o professor que conduz tais práticas, caso este não esteja familiarizado com elas.

• Outro ponto observado foi que os alunos também apresentavam certos "buracos" em sua formação aritmética e algébrica que, supostamente, deveria ter sido alcançada até a 8ª série. Acreditamos que a M.R.P. também os tenha auxiliado a detectar essas falhas e os incentivou a estudarem mais, proporcionando-lhes reiterados momentos para **exercitarem suas habilidades metacognitivas**.

• Como relatado em alguns episódios anteriores, uma transformação qualitativa ocorreu na construção de significados para os conceitos matemáticos observados, para boa parte dos alunos, porque estes eram estimulados, pelos colegas e pela professora, a questionarem a validade de seus métodos propostos para a solução dos problemas. Também acreditamos que a M.R.P. tenha auxiliado os alunos a fazer mais conexões entre os vários assuntos estudados em Matemática.

Esta pesquisa de campo, e essa oportunidade de contato direto com a prática de uma nova metodologia em sala de aula (no sentido de que era inédita para a professora e a escola), juntamente com o modelo teórico de Santos (1993), possibilitaram-nos a descrição e a análise crítica de alguns fatores importantes, nessa prática, como por exemplo: as barreiras, de ordens cognitiva e metacognitiva, a serem enfrentadas pelos alunos com as mudanças. Porém, mesmo com essas barreiras, verificamos possibilidades reais de sucesso para as mesmas, desde que a escola deseje efetivá-las e possa contar com o apoio de profissionais mais experientes com as "novas" propostas.

Referências

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. A resolução de um problema de divisibilidade através da linguagem JAVA promovendo reflexões sobre a utilização dos computadores no ensino de Matemática. **Revista Interciência. Ciências Exatas**, Catanduva, v. 4, n. 2, p. 15-20, 2004.

ALVES, E. V. Habilidades matemáticas: a percepção generalizada de um tipo de problema. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2004. Comunicação Científica – GT 3 - Educação Matemática no Ensino Médio. 1 CD-ROM.

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula**. 1997. 295 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1997.

ANDRÉ, M. E. D. A. **Etnografia da prática escolar**. Campinas, SP: Papirus, 1995.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BROUSSEAU, G. Le contrat didactique: le milieu. **Rechèrches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 9, n. 3, 1988.

FABIANI, F. S. **Números complexos via resolução de problemas**. 1998. 210 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

GONZÁLEZ, F. E. Metacognicion y tareas intelectualmente exigentes: el caso de la resolución de problemas matemáticos. **Zetetiké**, Campinas, v. 6, n. 9, jul./dez., p. 59-87, 1998.

KRULIK, S.; REYS, R. (Org.). **A resolução de problemas na matemática escolar.** São Paulo: Atual, 1997.

LAWSON, M. J.; CHINNAPPAN, M. Knowledge connectedness in geometry problem solving. **Journal for Research in Mathematics Education**, Washington, v. 31, n.1, p. 26-43, 2000.
ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. Rio Claro: Editora UNESP, 1999. p. 199-220.

MEDEIROS, K. M. O contrato didático e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 8, n. 9/10, p. 32-39, 2001.

MURARI, C.; PEREZ, G. O uso de espelhos e caleidoscópios em atividades educacionais de geometria para 7ª e 8ª séries. **Bolema**, Rio Claro, v. 15, n. 18, p. 1-25, 2002.

OLIVEIRA, P. R. **Currículo e resolução de problemas em matemática:** analisando relações. 2000. 78 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

PALMA, R. C. D. **A resolução de problemas matemáticos na concepção e crença dos professores das séries iniciais do ensino fundamental:** dois estudos de caso. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 1999.

PÓLYA, G. **How to solve it**. London: Penguin Books, 1990.

PONTE, J. P. Investigar, ensinar e aprender. **Actas do ProfMat**, Lisboa, p. 25-39, 2003a. 1 CD-ROM.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003b.

ROSOLEN, R. **Vozes dos alunos do ensino fundamental:** percepções, expectativas e sentimentos sobre resolução de problemas no ensino de matemática. 1999. 154 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Metodista de Piracicaba, Piracicaba, 1999.

SANTOS, M. S. **A metodologia de resolução de problemas como atividade de investigação:** um instrumento de mudança didática. 1993. 253 f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1993.

SPALLETTA, A. G. **Desenvolvimento das habilidades matemáticas:** um estudo sobre as relações entre o desempenho e a reversibilidade de pensamento na solução de problemas. 1998. 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998. Disponível em: http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls000134200 Acesso em: 20 nov. 2006.

UTSUMI, M. C. **Atitudes e habilidades envolvidas na solução de problemas algébricos:** um estudo sobre o gênero, a estabilidade das atitudes e alguns componentes da habilidade matemática. 2000. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

VAN DOOREN, W.; VERSCHAFFEL, L.; ONGHENA, P. The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra word problems. **Journal for Research in Mathematics Education**, Washington, v. 33, n.5, p. 319-351, 2002.

Aprovado em abril de 2007
Submetido em fevereiro de 2006