



2º SIPEMAT

SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

DE 28 DE JULHO A 1 DE AGOSTO **2008**

MATEMÁTICA FORMAL E MATEMÁTICA NÃO-FORMAL
20 ANOS DEPOIS: SALA DE AULA E OUTROS CONTEXTOS

SIGNIFICADO DO SÍMBOLO “=” NO CONTEXTO DAS FUNÇÕES E AS CONCEPÇÕES DOS ALUNOS DO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

José Dilson Beserra Cavalcanti

Grupo de Pesquisa Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática-UFPE

SME-TUPANATINGA/SEDUC/PE

dilsoncavalcanti@gmail.com

Marcelo Câmara dos Santos

Grupo de Pesquisa Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática-UFPE

Cap-UFPE/SBEM

marcelocamaraufpe@yahoo.com.br

RESUMO

O presente artigo é um recorte de alguns dos resultados obtidos em nossa dissertação de mestrado e é fundamentado em duas idéias. A primeira é que o significado do símbolo “=” não se restringe a denotar igualdade, podendo apresentar diferentes significados a depender do contexto no qual está inserido. A segunda idéia é a de que nem sempre as concepções dos alunos são compatíveis com o significado do símbolo “=". Nosso objetivo neste trabalho é discutir as concepções dos alunos do 3º ano do Ensino Médio sobre o significado do símbolo “=”, particularmente, no contexto das funções. Conforme nossos resultados, os alunos demonstraram diferentes concepções sobre o significado do símbolo “=”, contudo, nenhuma foi compatível com os atributos deste símbolo no contexto das funções.

Palavras-chave: concepções, sinal de igualdade, significado.

INTRODUÇÃO

É difícil olharmos para o símbolo “=” e não pensarmos imediatamente em igualdade. Entretanto, o sinal de igualdade apresenta diversos usos sofisticados na Matemática que fica até complicado compreender, ou mesmo aceitar o seu significado como igualdade. Dessa maneira, podemos argumentar que o símbolo “=” tem diversos significados a depender do contexto no qual aparece e da maneira como ele é utilizado.

As possibilidades de discutirmos os diferentes significados do sinal de igualdade nos contextos aritméticos e algébricos são bastante amplas. Por essa razão, optamos por discutir em nossa fundamentação os significados do símbolo “=” em quatro contextos, dois aritméticos e dois algébricos, que consideramos chaves no ensino de Matemática da Educação Básica. Os contextos aritméticos são as operações e as igualdades, usualmente representadas por ‘ $3 + 4 =$ ’ e ‘ $3 + 4 = 7$ ’, respectivamente. Os contextos algébricos correspondem às equações e funções, representadas comumente por expressões como $x + 5 = 10$ e $y = 3x + 5$, respectivamente. Esclarecemos que os resultados de nossa pesquisa correspondem apenas ao contexto das funções.

Elucidamos também, que vamos utilizar o termo significado do sinal de igualdade como algo correspondente às características particulares da utilização do símbolo “=” a depender do contexto no qual ele aparece, e, conseqüentemente, do conceito matemático que a expressão representa. Nestes termos, o significado do sinal de igualdade não se confunde, necessariamente, com as concepções dos alunos sobre o sinal de igualdade. Isto é, o símbolo “=” pode ter um determinado significado em uma expressão que representa um contexto particular e os alunos não reconhecê-lo, podendo apresentar, então, outras concepções que não correspondem ao significado particular do sinal de igualdade naquela expressão. Por exemplo, a literatura demonstra que os alunos podem demonstrar uma concepção do significado do símbolo “=” como um *sinal de fazer algo* (símbolo operador) mesmo em situações que este símbolo está representando uma relação de igualdade ou de equivalência, como no caso das igualdades aritméticas e das equações.

O SIGNIFICADO DO SÍMBOLO “=” NO CONTEXTO DAS FUNÇÕES

O conceito de função, assim como o de equação, é um dos principais na Álgebra Escolar. Freqüentemente, ele é formalmente introduzido no 9º ano do Ensino Fundamental, e uma boa parte do primeiro ano do Ensino Médio é destinada ao ensino desse conceito.

Conforme Meira (1997), funções são comumente definidas como uma “*relação especial entre dois conjuntos*” (p. 63). De fato, Freudenthal (1983) reconhece que, uma relação f , por exemplo, “é uma função de A em B se para todo $a \in A$ existe exatamente um

elemento $b \in B$ tal que $a, b \in f'$ (p. 497). Entretanto, o próprio Freudenthal (ibid.) demonstra uma perspectiva alternativa, na qual as funções são definidas em termos de uma *dependência causal entre variáveis*. Em outras palavras, as funções podem ser entendidas, como um ato que transforma cada elemento de A em um elemento de B (FREUDENTHAL, 1983; MEIRA, 1997).

A definição de função enquanto relação enfatiza a existência de correspondências entre conjuntos, sugerindo uma compreensão *estática* de funções. Já a outra definição de funções, apresenta, mais adequadamente, as propriedades dinâmicas da *dependência entre variáveis*, no sentido de que as transformações aplicadas na variável independente provocam mudanças na variável dependente (MEIRA, 1997).

No que diz respeito à representação da relação entre as variáveis dependente e independente, no conceito de função, Meira (ibid.) explica que, formalmente, consideram-se três sistemas simbólicos distintos. O primeiro corresponde a tabelas contendo listas de pares ordenados que satisfaçam a dependência; o segundo refere-se aos gráficos da função no plano cartesiano, ou diagramas de setas que estabelecem relações entre conjuntos; e o último, concerne às equações em duas variáveis, comumente representadas por $y = ax + b$, onde a indica uma constante de proporcionalidade e b uma constante aditiva.

Tomando como base a igualdade $y = 3x + 5$ como uma maneira de representar o conceito de função afim e considerando a idéia de que ambos os lados da igualdade representam a mesma coisa, podemos levantar o seguinte questionamento: é adequada, no contexto das funções, a afirmação de que y e $3x + 5$ são nomes para a mesma coisa, ou para o mesmo número? De fato, Freudenthal (1983) e Hafstrom (1961) utilizaram a afirmação vernácula *nomes para a mesma coisa*, assim como o School Mathematics Study Group defendeu a idéia *nomes para o mesmo número* como qualidades associadas aos lados de uma igualdade.

É importante ressaltar que Freudenthal (1983), assim como Hafstrom (1961) utilizaram esta afirmação no âmbito das igualdades aritméticas, como por exemplo, $3 + 4 = 7$ ou $3 + 4 = 5 + 2$. Assim, Freudenthal (1983) também alertou que esta fórmula, nomes para a mesma coisa, não corresponde a diversas outras expressões contendo o símbolo “=” . Por exemplo, se em $x + 4 = 10$, podemos dizer que ‘ $x + 4$ ’ é a mesma coisa que ‘10’, ou são nomes diferentes para a mesma coisa, estamos admitindo que ‘ $1 + 4 = 10$ ’, ‘ $2 + 4 = 10$ ’, etc., em sua maior parte, afirmações falsas, com exceção para $x = 6$ que, satisfaz em ‘ $x + 4 = 10$ ’, a fórmula ‘nomes diferentes para a mesma coisa’. Essa afirmação vernácula é igualmente falsa para o conceito de função, uma vez que, é absurdo dizer que, em $y = ax + b$, temos ‘ y ’ e ‘ $ax + b$ ’ como ‘nomes diferentes para a mesma coisa’.

Ponte (2006), por sua vez, aponta que o símbolo “=” numa função, tal como $y = k.x$, não está indicando algo que seja para resolver ou calcular. Nesse sentido, nosso interesse

no momento é discutir o significado do sinal de igualdade no contexto das funções, e, para tal, achamos conveniente observar, de maneira articulada, o uso do símbolo “=” e a idéia de dependência entre variáveis. As características particulares desta articulação sugerem, então, que o sinal de igualdade seja utilizado como um símbolo que indica uma relação funcional (GODINO e FONT, 2003; MOLINA, 2006) ou uma igualdade funcional (ROJANO, 2002). Nesse sentido, entendemos que o atributo mais adequado do símbolo “=” no contexto das funções é indicar uma relação dinâmica que implica na idéia de dependência causal entre as variáveis dependente e independente.

Por fim, ressaltamos que Cavalcanti (2008) elaborou, fundamentado na literatura sobre o sinal de igualdade, uma síntese na qual definiu cinco concepções “a priori” descrevendo as principais finalidades e características do símbolo “=” nos contextos das operações e igualdade aritméticas, das equações e funções.

Contextos	Categorias de análise (a priori)	Expressões (exemplos)	Principal finalidade do símbolo “=”	Principais características do símbolo “=”
Operações aritméticas	Concepção Operacional	$8 + 7 =$ $8 + 7 + 5 + 9 =$	Indicar um cálculo a ser realizado, ou, o local do resultado.	Aspecto assimétrico (um lado é dado, o outro precisa ser preenchido/encontrado)
Igualdades aritméticas	Concepção Igualdade Relacional	$6 + 5 = 11$ $5 + 7 = 4 + 8$ $15 = 7 + 8$	Indicar que o que está no lado direito do “=” é igual, idêntico ou equivalente ao que está no lado esquerdo.	Relação de igualdade que inclui: identidade única de significado e equivalência dos diferentes significantes.
Equações	Concepção Equivalência em igualdade condicional	$x + 5 = 14$ $5 + x = 4 + 8$ $5 = x + 8$ (etc.)	Indicar que a expressão ou número que está no lado direito do “=” é equivalente a expressão ou número à esquerda.	Indica uma relação de equivalência em igualdade condicional
Funções	Concepção Funcional	$y = 2x + 3$ $2x + 3 = y$	Indicar uma dependência causal entre variáveis	Relação de dependência entre a variável dependente e independente
Todos	Concepção Relacional Nome-Símbolo	Qualquer uma contendo um símbolo “=”	Não tem finalidade específica	Não tem características específicas

Quadro 01 – Síntese com as principais idéias que fundamentaram a elaboração dos instrumentos de investigação

Além destas concepções definidas *a priori*, Cavalcanti (2008) definiu *a posteriori* mais duas concepções: Concepção símbolo separador e Concepção operacional sintático. A concepção símbolo separador surgiu quando os alunos escreveram respostas que identificavam o significado do “=” como sinal de separar, ou indicar a separação, por exemplo, entre as letras e os números numa equação, os membros, uma incógnita e outra numa função.

A concepção denominada de operacional sintático surgiu quando os alunos escreveram respostas que identificavam o símbolo “=” como um símbolo para mostrar o resultado da incógnita, ou para dar o valor de x , por exemplo. Assim, esclarecemos que o nome operacional sintático foi baseado na idéia de operacional, porque sugere ação e resultado, e sintático, pela razão de que o resultado da incógnita, produto final da resolução de uma equação, envolve a utilização de regras sintáticas associadas à manipulação de incógnitas e determinação de seus valores.

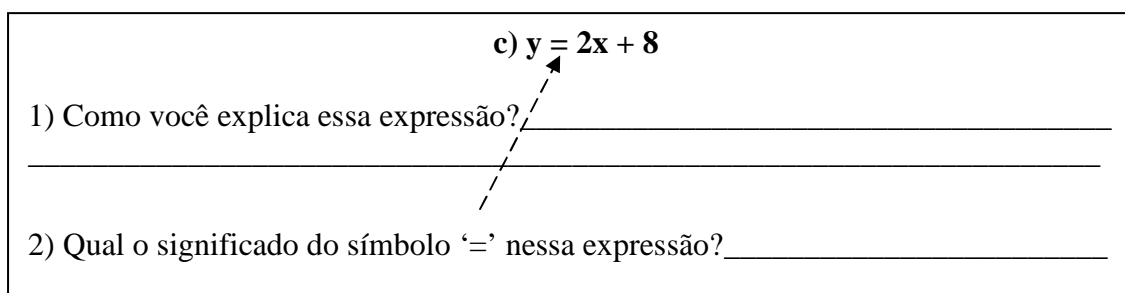
METODOLOGIA

Participaram da pesquisa duzentos e cinco alunos do 3º ano do Ensino Médio de escolas públicas da região metropolitana do Recife. O experimento consistiu na aplicação de dois instrumentos de investigação. Cada instrumento, por sua vez, foi constituído por quatro expressões representando os contextos das operações e igualdades aritméticas, das equações e das funções.

O aspecto que diferenciou um instrumento do outro corresponde à presença de um símbolo de operação (no caso, o símbolo + de adição) antes ou depois do símbolo de igualdade. Por exemplo, se no instrumento 1 a expressão correspondente a igualdade aritmética fosse $5 + 7 = 12$ (símbolo operatório + antes do símbolo “=”), no instrumento 2, seria $12 = 5 + 7$ (símbolo operatório + depois do sinal de igualdade).

Ressaltamos que no presente artigo discutiremos apenas os resultados correspondentes aos itens **c** do instrumento 1 e 2 que representam a utilização do símbolo “=” no contexto das funções. Assim, se considerarmos $y = ax + b$ como uma maneira usual de representar as funções do 1º grau, podemos dizer que a expressão $y = 2x + 8$ corresponde a uma representação de função do 1º grau.

Como compreendemos função como um conceito envolvendo a idéia de *dependência causal entre variáveis* (FREUDENTHAL, 1983; MEIRA, 1997), assim como a expressão $y = 2x + 8$, podemos também considerar a expressão $2x + 8 = y$ como uma representação deste conceito. Dessa maneira, elaboramos os dois itens que discutiremos no presente trabalho e que apresentamos a seguir nas figuras 1 e 2.



c) $y = 2x + 8$

1) Como você explica essa expressão? _____

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? _____

Figura 1 - Item c do instrumento 2

c) $2x + 8 = y$

1) Como você explica essa expressão? _____

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? _____

Figura 2 - Item c do instrumento 1

O objetivo destes itens foi investigar as concepções dos alunos do 3º ano do ensino médio sobre o significado do símbolo “=” no contexto das funções. Outro ponto que buscamos verificar, também, foi se a estrutura das expressões (símbolo de operação, +, antes ou depois do símbolo “=”) influencia, ou não, as concepções destes alunos sobre o significado do símbolo “=”.

PRINCIPAIS RESULTADOS

Na análise do item c do instrumento 1, identificamos seis concepções dos alunos sobre os significados do símbolo “=” na expressão $2x + 8 = y$. São elas: Operacional, Igualdade relacional, Relacional nome-símbolo, Operacional sintático, Símbolo separador e Equivalência em igualdade condicional. É importante ressaltar que mesmo identificando várias concepções sobre o significado do símbolo “=” no contexto das funções, não conseguimos dados que indicassem a concepção que definimos a priori como concepção funcional, na qual o aluno reconheceria o símbolo “=” como indicador de uma relação de dependência entre a variável independente e dependente.

Os percentuais referentes à cada concepção estão representados na tabela a seguir, assim como os percentuais correspondentes aos que não responderam e às respostas não identificadas.

Concepções	Expressão	Funções $2x + 8 = y$
Operacional		37,3%
Relacional nome-símbolo		28,4%
Igualdade relacional		9,8%
Símbolo separador		7,8%
Operacional sintático		6,9%
Equivalência em igualdade condicional		1,0%
Funcional		0%
Não identificada		7,8%
Não respondeu		1,0%
Total		100%

Tabela 1 – Contexto das funções (Instrumento 1)

A porcentagem de respostas não identificadas e de alunos que não responderam foi de 7,8% e 1,0%, respectivamente. A maior parte das respostas foi referente à concepção operacional. Assim, apresentamos a seguir um protocolo ilustrando esta concepção do significado do símbolo “=”.

c) $2x + 8 = y$

1) Como você explica essa expressão? um gesto simples de cálculo

2) Qual o significado do símbolo “=” nessa expressão? o fim de uma conta.

Quadro 1 – Protocolo (instrumento1/6)

Conforme a resposta do aluno, no protocolo **instrumento1/6**, a expressão representa “um gesto simples de cálculo”. Nessa direção, de maneira condizente, ele interpreta o significado do símbolo “=” neste cálculo como referência ao final de uma conta. Esta idéia também pode ser entendida como uma expectativa que está intrinsecamente associada à uma concepção operacional. Tal expectativa pode ser apoiada pela maneira que o símbolo “=” é introduzido na escola, por exemplo, $3 + 4 =$, e pela utilização de calculadoras (GINSBURG, 1977; JONES e PRATT, 2005). Dessa maneira, podemos dizer que quando digitamos, em uma calculadora, alguns números e sinais de operação (+, -, x, ÷), comumente apertamos o símbolo “=”, com a intenção de finalizarmos a operação e de mostrar o resultado.

A segunda concepção mais identificada na categorização dos dados foi a relacional nome-símbolo, com 28,4%. Lembramos que consideramos que um aluno está demonstrando esta concepção quando escreve que o significado do símbolo “=” é “igual”, “igualdade”, sugerindo apenas o reconhecimento da relação entre o símbolo “=” e o seu nome, igualdade. Apresentamos o protocolo **instrumento1/57** como um exemplo da concepção relacional nome-símbolo referente ao significado do símbolo “=” em $2x + 8 = y$.

c) $2x + 8 = y$

1) Como você explica essa expressão? equação do 2º grau.

2) Qual o significado do símbolo “=” nessa expressão? igualdade

Quadro 2 – Protocolo (instrumento1/57)

A concepção igualdade relacional foi identificada em 9,8% das respostas dos alunos. Um aluno com esta concepção compreende o “=” como um símbolo relacional, que indica uma comparação, em termos de igualdade, entre os lados esquerdo e direito deste símbolo, como podemos observar na resposta do aluno representada no protocolo abaixo.

c) $2x + 8 = y$

1) Como você explica essa expressão? multiplicam por 2 um número não conhecido e somando o resultado com 8 para ser igual a um outro número desconhecido.

2) Qual o significado do símbolo “=” nessa expressão? Estabelece uma relação de igualdade entre as expressões.

Quadro 3 – Protocolo (instrumento1/98)

Como podemos observar, o aluno quando explica a expressão realiza apenas uma leitura da expressão. Sobre o significado do sinal de igualdade, ele deixa explícito que compreende este símbolo como uma *relação de igualdade* entre as expressões. Provavelmente, o aluno escreve o termo “expressões” para se referir aos lados esquerdo e direito da igualdade.

Prosseguindo, verificamos que 7,8% dos alunos interpretaram o símbolo “=” como um símbolo separador, tal como demonstramos no quadro a seguir.

c) $2x + 8 = y$

1) Como você explica essa expressão? Uma equação onde tem duas variáveis (x e y) e não se sabe o valor.

2) Qual o significado do símbolo “=” nessa expressão? Separar o 1º termo do 2º termo.

Quadro 4 – Protocolo (instrumento1/66)

Neste protocolo, o aluno explica que a expressão $2x + 8 = y$ é uma equação com duas variáveis que não se sabe o valor. Já sobre o sinal de igualdade, a idéia de separar é bem evidente. Podemos entender que o aluno está considerando “ $2x + 8$ ” como um termo e “ y ” como um outro termo, os quais são separados pelo símbolo “=” . Portanto, em nossa análise, o sinal de igualdade está sendo entendido como um símbolo separador.

A concepção operacional sintático, por sua vez, obteve um percentual de 6,9% das respostas. Em outras palavras, este percentual corresponde aos alunos que interpretaram o

sinal de igualdade como um símbolo que dá o resultado, não da expressão que vem antes dele ($2x + 8$), mas sim das letras, no caso, x e y .

c) $2x + 8 = y$

1) Como você explica essa expressão? *Dois incógnitas, x e y , primeiro descobre-se uma incógnita, isola a mesma, para descobrir a outra.*

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? *que $2x + 8$ é de assim, como y/x que é um valor que será descobri-*

Quadro 5 – Protocolo (instrumento1/75)

A classificação deste protocolo não foi uma tarefa simples. O aluno quando fala do sinal de igualdade se refere, num primeiro momento, ao y como valor a ser encontrado. Apenas esta informação poderia sugerir uma concepção operacional uma vez que o y também corresponde, nesta concepção, ao resultado da expressão $2x + 8$. Por outro lado, o aluno relaciona, indiretamente, a descoberta de uma incógnita a partir da outra, sugerindo uma concepção funcional.

No entanto, entendemos que, em linhas gerais, o aluno está considerando a expressão $2x + 8 = y$ como algo que deve ser resolvido achando o valor das incógnitas x e y e, portanto, classificamo-lo como concepção operacional sintático. Outro motivo para optarmos em classificar este protocolo como concepção operacional sintático é que quando o aluno explica que primeiro descobre-se uma incógnita e *isola-se* a mesma para que seja possível descobrir a outra está, na verdade, utilizando conhecimentos associados aos aspectos sintáticos comumente presentes na resolução de equações e, realçados em sua resposta pela utilização do termo “isola-se”.

Por último, a concepção equivalência em igualdade condicional surgiu, mas apenas em 1,0% das respostas, representada a seguir, no protocolo **instrumento1/82**.

c) $2x + 8 = y$

1) Como você explica essa expressão? _____
FUNÇÃO AFIM $Ax + B = y$

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? _____
ISOLAÇÃO DAS RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA.

Quadro 6 – Protocolo (instrumento1/82)

No quadro 6, embora o aluno reconheça a expressão $2x + 8 = y$ como uma função,

quando ele se refere ao significado do símbolo “=” demonstra a concepção equivalência em igualdade condicional deixando explícito compreender o “=” como uma relação de equivalência.

Na análise dos resultados obtidos no item **c** do instrumento 2, identificamos as mesmas concepções que foram discutidas em relação à expressão $2x + 8 = y$, ou seja, as concepções: operacional, igualdade relacional, operacional sintático, relacional nome-símbolo, equivalência em igualdade condicional e símbolo separador. Ressaltamos que também não conseguimos categorizar respostas como concepção funcional que, conforme nossa hipótese, é a que corresponderia ao significado do símbolo “=” no contexto das funções.

Concepções	Expressão	Funções $y = 2x + 8$
Relacional nome-símbolo		39,8%
Operacional sintático		12,6%
Símbolo separador		11,6%
Igualdade relacional		9,8%
Operacional		8,7%
Equivalência em igualdade condicional		1,0%
Funcional		0%
Não identificada		13,6%
Não respondeu		2,9%
Total		100%

Tabela 2 – Funções (Instrumento 2)

As respostas não identificadas corresponderam a 13,6% e as não respondidas à 2,9%. Na categorização das respostas deste item, a maior parte, isto é, 39,8%, foi identificada como concepção relacional nome-símbolo. O protocolo abaixo corresponde a uma resposta categorizada como concepção relacional nome-símbolo.

c) $y = 2x + 8$

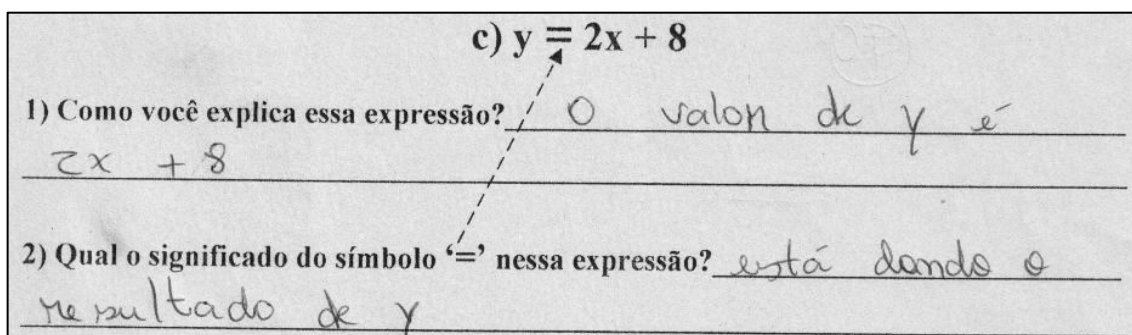
1) Como você explica essa expressão? Equação do 2º grau

2) Qual o significado do símbolo “=” nessa expressão? representa o
valor de igualdade

Quadro 7 – Protocolo (instrumento2/11)

No quadro 7, o aluno interpreta a expressão $y = 2x + 8$ como uma equação do segundo grau. Já o significado do símbolo "=", nesta expressão, ele escreveu que "representa o sinal de igualdade". Na presente resposta não há nenhuma evidência sobre a relação entre o significado do sinal de igualdade e o contexto no qual está inserido. Em verdade, podemos perceber que esta resposta sugere que o aluno está apenas reconhecendo a relação entre o símbolo "=" e seu nome, "sinal de igualdade". Assim, classificamos este protocolo como concepção relacional nome-símbolo.

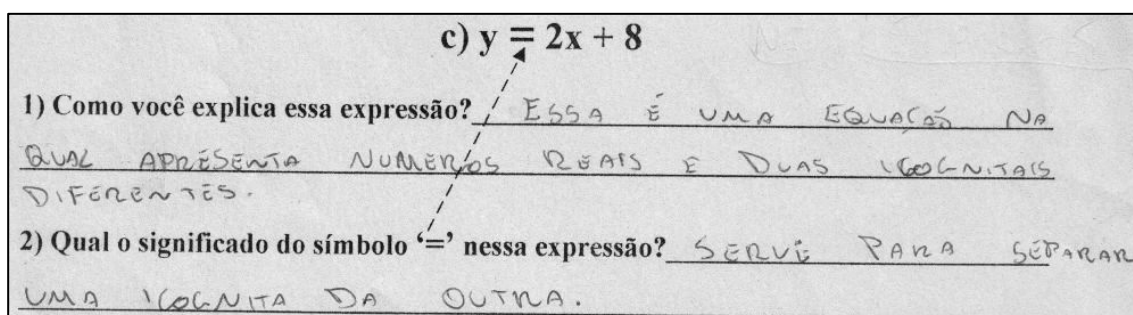
Continuando, um percentual de 12,6% dos alunos compreendeu o significado do símbolo "=", na expressão $y = 2x + 8$, como indicando a resposta/valor/resultado da(s) incógnita(s). As respostas deste tipo, tal como demonstramos no protocolo **instrumento2/75**, foram categorizadas como concepção operacional sintático.



Quadro 8 – Protocolo (**instrumento2/75**)

Neste protocolo, o aluno explica a expressão $y = 2x + 8$ como "o valor de y é $2x + 8$ ", não a reconhecendo como uma função. Nesta explicação, podemos dizer que a partícula "é" está representando o símbolo "="". Porém, o aluno é prescritivo e claro quando afirma que o significado do símbolo "=", na expressão $y = 2x + 8$, é dar "o resultado de y". Neste sentido, consideramos tal idéia como demonstração da concepção operacional sintático.

Em ordem decrescente, levando-se em conta os percentuais obtidos na categorização dos dados, a próxima concepção é a símbolo separador, que obteve um percentual de 11,6%. Como símbolo separador, consideramos a concepção do aluno que reconhece o "=" como um símbolo para separar, por exemplo, os membros da igualdade, os números, as letras, etc.



Quadro 9 – Protocolo (**instrumento2/83**)

No protocolo **instrumento2/83**, o aluno não reconheceu $y = 2x + 8$ como uma função, mas sim como uma equação com números e duas incógnitas. Já sobre o significado do símbolo “=”, o aluno considerou-o como um símbolo para separar uma incógnita da outra. Esta idéia, como temos discutido, corresponde à concepção que denominamos de símbolo separador.

Na análise do item **c** do instrumento 2, expressão $y = 2x + 8$, o percentual correspondente à concepção igualdade relacional foi de 9,8%. Lembramos que nesta concepção, o aluno identifica o “=” como um símbolo relacional que indica, por exemplo, mesma coisa, igualdade entre os membros, mesmo valor, conforme podemos observar no quadro 10.

c) $y = 2x + 8$

1) Como você explica essa expressão? *Que a ~~uma~~ multiplicação da incógnita x por 2 mais o número 8 é igual a incógnita y.*

2) Qual o significado do símbolo “=” nessa expressão? *~~igual~~ simboliza a igualdade entre os dois lados da expressão.*

Quadro 10 – Protocolo (**instrumento2/50**)

No protocolo **instrumento2/50**, o aluno quando explica a expressão $y = 2x + 8$, utiliza o termo “é igual” no lugar do “=”. Então, o aluno esclarece em seguida que este símbolo “simboliza a igualdade entre os dois lados da expressão”.

Se no item **c** do instrumento 1 ($2x + 8 = y$) o maior percentual de respostas foi respectivo à concepção operacional, no item **c** do instrumento 2 ($y = 2x + 8$) o percentual correspondente à esta concepção, no caso 8,7%, foi o segundo mais baixo. Nesta concepção, os alunos compreendem o sinal de igualdade como um sinal de fazer algo, dar a resposta, indicar o resultado, etc.

c) $y = 2x + 8$

1) Como você explica essa expressão? *o valor da soma de dois números*

2) Qual o significado do símbolo “=” nessa expressão? *é o resultado da soma de dois números*

Quadro 11 – Protocolo (**instrumento2/99**)

No protocolo **instrumento2/99**, o aluno considera $y = 2x + 8$ como uma expressão do valor da soma de dois números. Nesse sentido, o aluno compreende o símbolo “=” associado ao resultado da soma de dois números, que no caso, provavelmente seriam $2x$ e 8 . Todos os elementos neste protocolo apontam para uma concepção operacional do sinal de igualdade.

Finalmente, ressaltamos que também identificamos, em 1% das respostas, a concepção equivalência em igualdade condicional. Esta concepção envolve além de uma compreensão relacional do sinal de igualdade, a vinculação direta com o conceito de equivalência.

The image shows a handwritten student response to a math problem. At the top, the expression $c) y = 2x + 8$ is written. Below it, two questions are asked in Portuguese. The first question asks for an explanation of the expression, and the student's answer is "que um valor equivale a duas vezes outro valor somado a 8." The second question asks for the meaning of the equals sign, and the student's answer is "equivalência". A dashed arrow points from the equals sign in the expression to the student's answer for the second question.

c) $y = 2x + 8$

1) Como você explica essa expressão? que um valor equivale a duas vezes outro valor somado a 8.

2) Qual o significado do símbolo “=” nessa expressão? equivalência

Quadro 12 – Protocolo (**instrumento2/75**)

Como podemos observar na resposta do aluno, ilustrada no quadro 12, o aluno reconhece diretamente, o significado do símbolo “=” como equivalência. Dessa maneira, podemos dizer que quando o aluno explica a expressão $y = 2x + 8$, ele acaba utilizando, no lugar do “=”, a palavra equivalência, demonstrando que o aluno está mobilizando idéias referentes à concepção equivalência em igualdade condicional.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A finalidade deste trabalho foi discutir alguns resultados que foram obtidos em nossa pesquisa de mestrado sobre as concepções dos alunos do 3º ano do Ensino Médio acerca do significado do símbolo “=” em contextos aritméticos e algébricos. Ressaltamos que os resultados ora discutidos corresponderam apenas ao contexto das funções.

No contexto das funções, partindo do princípio de que os participantes da pesquisa são alunos do último ano do Ensino Médio e que provavelmente já estudaram o conceito de função, esperávamos identificar principalmente a concepção funcional, que definimos a

priori como a que corresponderia, mais adequadamente, aos aspectos dinâmicos correspondentes à relação causal entre as variáveis dependente e independente.

Entretanto, por estranho que pareça, identificamos, na análise dos resultados, seis concepções dos alunos sobre o significado do símbolo “=” (relacional nome-símbolo, operacional, símbolo separador, igualdade relacional, operacional sintático e equivalência em igualdade condicional), enquanto que a concepção funcional não foi identificada.

Observamos que a maioria dos alunos reconheceu as expressões $2x + 8 = y$ e $y = 2x + 8$ como operações, somas, equações, etc. e, apenas alguns as consideraram como representações do conceito de função sem, contudo, observarem os aspectos relativos à dependência entre variáveis. Foi possível evidenciar também que em relação à estrutura da expressão (operação antes do símbolo “=”), como em $2x + 8 = y$, a maior parte dos protocolos foi categorizada como concepção operacional enquanto que em relação à estrutura (operação depois do “=”), como em $y = 2x + 8$, a maior parte dos protocolos foi categorizada como concepção relacional nome-símbolo. Isto quer dizer que a estrutura da expressão configurou-se como um elemento importante na compreensão dos alunos sobre o significado do símbolo “=”.

Por último, argumentamos que houve um desencontro entre as concepções dos alunos e o significado do símbolo “=” no contexto das funções. Isto é, se por um lado a concepção (funcional), que definimos a priori para este contexto, não foi identificada, por outro lado, evidenciamos que os alunos mobilizaram concepções características dos contextos das operações aritméticas, das igualdades aritméticas e das equações. Tais concepções identificadas no contexto das funções podem ser consideradas como concepções inadequadas por não serem compatíveis com o significado e atributos do símbolo “=” neste contexto. Nesse sentido, sugerimos que outros estudos podem ser realizados para investigar as possíveis razões que motivam este desencontro, entre os quais destacamos pesquisas envolvendo a Transposição Didática e o Contrato Didático.

REFERÊNCIAS

CAVALCANTI, J. D. B. **Concepções de alunos do 3º ano do ensino médio acerca dos significados do símbolo “=” em contextos aritméticos e algébricos**. Dissertação de mestrado. Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2007.

FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. Mathematics education Library. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1983.

GINSBURG, H. **Children’s arithmetic: how they learn it and how you teach it**. Texas: PROED, Inc, Austin, 1977.

GODINO, J. D., e FONT, V. Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Matemáticas y su didáctica para maestros. **Manual para el estudiante**, Edición Febrero,

2003. disponível em <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros/>

HAFSTROM, J. E. **Basic concepts in modern mathematics**. Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 1961.

JONES, I., e PRATT, D. Three utilities for the equal sign. Em: H. L. Chick e J. L. Vicent (Eds.), **Proceedings of the 29th conference of the international group for the psychology of mathematics education**, Vol. 3 (pp. 185-192). Melbourne: PME, 2005.

MEIRA, L. Aprendizagem e ensino de funções. In: SCHLIEMANN, A. D. **Estudos em Psicologia da Educação Matemática (2ª ed.)**. Ed. UFPE, Recife, 1997.

MOLINA, M. **Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria**. Tesis doctoral. Universidad de Granada, 2006.

PONTE, J. P. Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), **Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE, 2006.

ROJANO, T. Mathematics learning in the junior secondary school: Students' access to significant mathematical ideas. In L. D. English (Ed.), **Handbook of international research in mathematics education** (Vol. 1, pp. 143-163). Mahwah, NY: Lawrence Erlbaum Associates, 2002.