



O ensino de geometria não euclidiana na educação básica

Maria Aparecida da Silva de **Carvalho**

Colégio Estadual Vicente Rijo EFMP

Brasil

marryyaa@gmail.com

Ana Márcia Fernandes **Tucci** de Carvalho

Universidade Estadual de Londrina

Brasil

tucci@uel.br

Resumo

O presente trabalho apresenta considerações sobre a aprendizagem das Geometrias não – Euclidianas, em particular da Geometria Esférica, obtidas a partir de uma pesquisa aplicada a alunos do Ensino Fundamental e Médio de um Colégio Estadual Público da cidade de Londrina, cujo objetivo foi investigar a possibilidade de inserir no currículo de Matemática, a partir da 5ª série do Ensino Fundamental, tópicos relacionados a outras Geometrias, além da Euclidiana, conforme proposta das Diretrizes da Rede Pública de Educação Básica do Estado do Paraná (SEED, 2009).

Palavras chave: educação matemática, ensino de geometria, geometria não euclidiana, educação básica.

Ao longo dos anos, o trabalho com o espaço e as figuras geométricas vem sendo negligenciado no ensino fundamental e pouco explorado no ensino médio. Ele pode e deveria ser iniciado nos primeiros anos do ensino fundamental, com exploração de macro espaços e figuras tridimensionais. Deve ser continuamente desenvolvido e ampliado com o estudo de propriedades de figuras geométricas e pequenos estudos axiomáticos.

Embora a Geometria de Euclides, pouco privilegiada pelos professores em suas aulas, pelo rigor de suas demonstrações e por ser facilmente aceita pelos nossos sentidos, se caracterize como modelo para a maioria das Ciências, muitos problemas do cotidiano só são resolvidos pelas Geometrias não Euclidianas.

Modelo mais simples da Geometria Elíptica, a Geometria Esférica permite ao professor conduzir suas aulas interdisciplinarmente e aos alunos proporciona o contato com tecnologias atuais, dentre as quais o GPS.

Introdução

Sabe-se que um dos ramos da Matemática mais importantes, a geometria, teve suas origens no Antigo Egito e na Babilônia, sendo seu conhecimento formado a partir de regras práticas obtidas a partir da experimentação. Infelizmente o que se vê atualmente é que o ensino da geometria e suas múltiplas abordagens acabam relegados ao segundo plano.

Vários autores apontam a grande dificuldade que muitos docentes têm em ministrar conteúdos de geometria para os alunos do Ensino Fundamental e Médio (Pavanelo, 93; Lorenzato, 95 ; Almouloud, 2004).

Ao analisarmos os conteúdos desenvolvidos nas aulas de geometria no estado do Paraná, verificamos que ao elaborar seus planejamentos, grande parte dos professores desconsidera as indicações curriculares oficiais que apontam para estes níveis de ensino a importância de se trabalhar noções básicas de Geometrias não – Euclidianas (Paraná, 2009).

Acreditamos que os professores seguem as indicações curriculares de se trabalhar noções de Geometrias não- Euclidianas, não por estarem em desacordo com elas, mas porque as dificuldades são ainda maiores, pois raramente os professores conhecem este conteúdo específico, uma vez que não foi contemplado durante a formação acadêmica do mesmo, como também, uma análise das diversas coleções de livros didáticos utilizadas comumente pelas escolas públicas permite inferir que são raríssimos os autores que tratam do tema.

No âmbito da Educação Matemática, há autores (Martos, 2002; Soliani, 2008; Carvalho & Carvalho, 2010) que tem mostrado interesse pelo tema e desenvolvido atividades e pesquisas a ele relacionadas.

Este trabalho objetiva apresentar resultados de estudos teóricos e práticos para o ensino da Geometria Esférica na Educação Básica, realizado junto a alunos da 5ª série do Ensino Fundamental e do 3ºano do Ensino Médio, numa escola da rede pública no município de Londrina, no Paraná.

As atividades selecionadas procuram explorar os conceitos e as definições da Geometria Plana quando comparadas com os axiomas e postulados da Geometria Esférica. De caráter investigativo, envolveram os conceitos de ponto e reta em superfícies planas e esféricas, as relações entre os lados e os ângulos de triângulos e quadriláteros e suas transformações na superfície esférica. A transposição destes conceitos para referenciais na superfície da Terra, por meio de conceitos geográficos, como meridianos, paralelos, latitude e longitude – fundamentais para localizar cidades, traçar rotas de aviões e navios - permite aos alunos enxergarem a ligação entre a Geometria que se aprende na escola e sua aplicação na vida cotidiana, facilitando a aprendizagem. Neste trabalho apresentamos uma das atividades propostas, delimitando suas potencialidades e limitações.

O ensino das geometrias não- euclidianas

Enquanto objeto de aprendizagem, a matemática é comumente considerada como a mais abstrata, racional e descontextualizada das disciplinas. Como consequência, a ela é atribuída a responsabilidade pela exclusão escolar, ilustrada nos índices de evasão e repetência, contrapondo-se ao seu sentido mais amplo, no qual é entendida como atividade humana, considerada um corpo de conhecimentos que responde a problemas práticos e teóricos propostos

pela humanidade ao longo da história, com diversas ferramentas conceituais e operacionais criadas para tal fim.

Apesar de ser um dos ramos da matemática que mais permite a aproximação com o mundo real, na Educação Básica, especificamente no Ensino Fundamental, nossa experiência atesta que o ensino de geometria ainda mostra-se consideravelmente reduzido. Pavanelo (1993) e Lorenzato (1995) apontam essa ausência, ou quase ausência, neste nível de ensino, como consequência do despreparo da grande maioria dos professores, que geralmente dão preferência pelos conteúdos da Álgebra ou da Aritmética, evidenciando a formação deficiente em conteúdo e metodologia para desenvolver e efetivar o ensino de Geometria.

A geometria pode desenvolver habilidades ligadas à forma, espaço, distância, percepção entre outros, permitindo uma maneira de compreender, descrever e representar organizadamente, o mundo no qual vivemos, bem como estabelecer aplicações práticas nas atividades cotidianas.

Corroborando com este ponto de vista, Pavanelo (1993) argumenta que “*A ausência do ensino de geometria e a ênfase na álgebra pode estar prejudicando a formação dos alunos por privá-los da possibilidade do desenvolvimento integral dos processos de pensamentos necessários à resolução de problemas matemáticos. (p.16)*”

Sobre o ensino de geometria, pesquisadores apontam que:

Grande parte dos professores que hoje estão em atividade teve formação básica muito precária em geometria. Além disso, os cursos de formação inicial de professores, tanto os cursos de magistério como os de licenciatura, continuam não dando conta de discutir suficientemente com seus alunos, futuros professores, propostas mais eficientes para o ensino de geometria, e, também as modalidades de formação continuada, postas em ação nos últimos anos, basicamente na forma de cursos de reciclagem, não têm atingido (ainda) o objetivo de mudar a prática na sala de aula em relação ao ensino de Geometria. (Almouloud, 2004).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) corroboram as afirmações, pois atestam que o ensino de geometria proporciona ao aluno a compreensão do mundo em que vive, tornando-se apto a descrevê-lo, a representá-lo e a localizar-se nele.

As Diretrizes Curriculares do Paraná (2008) orientam que os conteúdos geométricos abordados no ensino fundamental devem contemplar o espaço como referência, de modo a permitir que o aluno consiga analisá-lo, percebendo seus objetos e então representá-los.

Sem estudar geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade elas, dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da geometria como fator altamente facilitador para a compreensão de questões de outras áreas de conhecimento humano. (Lorenzato, 1995, p. 13)

Quando lidamos com Geometria Euclidiana, há inúmeros avanços. A grande parte dos livros didáticos adotados já traz atividades de cunho geométrico não mais localizadas na parte final (prática muito comum há alguns anos), o que permite que o assunto seja tratado com a importância e o merecimento devido. Todavia, embora as Diretrizes Curriculares do Paraná (2008) apontem explicitamente que o tópico Geometria Não-Euclidiana também faz parte da grade curricular, isso não se verifica. Ainda é raro o livro didático tratar o tema e mais raro um professor atrever-se a abordá-lo.

A própria história da Geometria Não-Euclidiana é recente, comparada com a Geometria Euclidiana que ainda hoje é estudada nas escolas. Segundo STRUIK (1989), no final do século XVIII e início do século XIX, os matemáticos, estimulados pelas afirmações de alguns filósofos, como Kant, argumentaram que: “se há a possibilidade apenas de uma única geometria, certos postulados ou noções comuns seriam teoremas, isto é, seriam uma consequência lógica de proposições primeiras” (STRUIK, 1989, p.92). O quinto Postulado de Euclides tornou-se uma obsessão. Nas tentativas de prová-lo criaram-se as novas geometrias, tão consistentes quanto a Euclidiana.

O quinto postulado do livro I (a relação entre “axiomas e postulados” não é muito clara em Euclides) é equivalente ao chamado “axioma das paralelas”, de acordo com o qual, por um ponto passa uma recta dada e uma só. As tentativas de reduzir esse axioma a um teorema conduziram, no século XIX, a uma apreciação completa da sensatez do ponto de vista de Euclides ao adaptá-lo como um axioma e levaram à descoberta das chamadas geometrias não euclidianas (Struik, 1989, p.92)

Martos (2002) argumenta que, a partir das grandes descobertas no século XV, surgiram inúmeros problemas concernentes às medidas geométricas, por exemplo, constatou-se que, para algumas medidas e distâncias, os conceitos da Geometria Euclidiana respondiam satisfatoriamente (problemas que envolviam as pequenas medidas) porém, para medidas de grande escala, os conhecimentos não se mostravam suficientes. O homem buscou nos meios científicos respostas para tais problemas e as ideias sobre as Geometrias não-Euclidianas tomaram corpo.

Como é de conhecimento matemático atual, de acordo com a substituição que se faz do postulado das paralelas surgem dois tipos clássicos de Geometria não- Euclidianas: a Geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica.

Na Geometria Hiperbólica, o Postulado de Euclides é substituído pelo que afirma que, por um ponto dado P, fora de uma reta r, existe mais de uma paralela a esta reta r, enquanto que na Geometria Elíptica, postula-se que não existe nenhuma paralela (Coutinho, 2001, p.36).

As primeiras sistematizações realizadas por gregos como Platão e Eudoxo, muito contribuíram para que a geometria ocupasse lugar de destaque como ramo da matemática, mas foi com Euclides, por volta de 300 A.C, que esse conhecimento foi sistematizado. Com o texto de matemática mais bem sucedido de todos os tempos – *Os Elementos*, Euclides deu à Geometria, forma, coesão e lógica, formalizando o conhecimento geométrico da época e dando-lhe cientificidade. “*A geometria de Euclides foi a primeira teoria matemática a ser axiomatizada, sendo por cerca de dois mil anos considerada como a única geometria possível*” (COUTINHO 2001, p.35).

Em *Os Elementos*, Euclides enuncia *Definições*, *Noções Comuns* e *Postulados*, nos quais baseia-se para sistematizar as proposições que demonstra.

“Postulados

1. *Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.*

2. *Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.*
3. *E, com todo centro e distancia, descrever um círculo*
4. *E serem iguais entre si todos os ângulos retos.*
5. *E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores que dois retos.*

Noções Comuns

1. *As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.*
2. *E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.*
3. *E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.*
- [4. *E, caso iguais sejam adicionados a desiguais, os todos são desiguais.*
5. *E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.*
6. *E as metades da mesma coisa são iguais entre si.]*
7. *E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.*
8. *E o todo [é] maior do que a parte.*
9. *E duas retas não contêm uma área.” (Euclides, 2009)*

Ao final do século XVIII e início do século XIX, os matemáticos, estimulados pelas afirmações de alguns filósofos, dentre eles Kant, questionaram os argumentos de Euclides, “se há a possibilidade apenas de uma única geometria, certos postulados ou noções comuns seriam teoremas, isto é, seriam uma consequência lógica de proposições primeiras” (Coutinho, 2001, p.36). Dentro desse raciocínio, das tentativas de provar o 5º Postulado de Euclides, criaram-se novas geometrias, tão boas e consistentes quanto a Euclidiana.

O quinto postulado do livro I (a relação entre “axiomas e postulados” não é muito clara em Euclides) é equivalente ao chamado “axioma das paralelas”, de acordo com o qual, por um ponto passa uma recta paralela a uma recta dada e uma só. As tentativas de reduzir esse axioma a um teorema conduziram, no século XIX, a uma apreciação completa da sensatez do ponto de vista de Euclides ao adoptá-lo como um axioma e levaram à descoberta das chamadas geometrias não euclidianas. (STRUICK, 1989, p.92)

Segundo Boyer (1974), até o século XIX, a Geometria Plana descrevia o mundo com aproximação. Martos afirma que,

A partir das grandes descobertas e invenções o homem tem buscado nos meios científicos, respostas para problemas concernentes às medidas geométricas. A partir dessa busca, tem constatado que, para algumas medidas, os conceitos da Geometria Euclidiana respondem satisfatoriamente, para os problemas que envolvam as pequenas medidas, mas para as medidas de grande escala, são necessários os conceitos de Geometrias não - Euclidianas.(Martos, 2002, p. 212).

De uma forma mais ampla, Coutinho (2001) escreve que de acordo com a substituição que se faz do postulado das paralelas surgem dois tipos clássicos de geometria não - euclidianas: a

Geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica.

Na Geometria Hiperbólica, o Postulado de Euclides é substituído pelo que afirma que, por um ponto dado P , fora de uma reta r , existe mais de uma paralela a esta reta r , enquanto que na Geometria Elíptica, postula-se que não existe nenhuma paralela. (Coutinho, 2001, p.36)

Essas geometrias começaram a serem estudadas por Girolamo Saccheri (1667- 1733) com a publicação de teoremas concluindo que havia chegado a uma contradição do quinto postulado de Euclides.

O húngaro János Bolyai (1802- 1860) e o russo Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1792 – 1856), publicaram a construção de uma *nova* geometria que negava o postulado das paralelas proposto por Euclides. Essa nova geometria recebeu o nome de Geometria Hiperbólica. Esta Geometria admite todos os postulados de Euclides, exceto o 5º, ou o das paralelas, que é substituído por “*Por um ponto P fora de uma reta r passa mais de uma reta paralela à reta r* ”.

Em uma conferência sobre Fundamentos de Geometria, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826- 1866) mudou radicalmente o conceito de espaço, objeto de estudo da geometria. Nesta ocasião, Riemann apontou as possibilidades de novas geometrias, e conseqüentemente, novos espaços. Na Geometria de Riemann, a reta não é mais infinita, como na Geometria Euclidiana, e sim ilimitada. Para ele, as retas seriam geodésicas (curvas que determinam em uma superfície, a menor distância entre dois pontos dados sobre a superfície) enquanto os planos deveriam ser de dimensão 2. A Geometria Elíptica (ou riemaniana) tem como um de seus axiomas o que estabelece, que não existem paralelas a uma reta dada, contrapondo-se ao 5º postulado de Euclides.

Quando se trata de aplicar estes conhecimentos nas aulas regulares de matemática, há enormes relutâncias, tanto por parte dos professores quanto por parte dos alunos. Alguns raros trabalhos (LÉNÁRT, 1996; COUTINHO, 2001; MARTOS, 2002) defendem que este conteúdo pode ser explorado junto às crianças e adolescentes, no ensino fundamental.

A pesquisa

O estudo principal de desenvolvimento do projeto foi realizado junto a dois grupos de alunos de uma única escola pública, no município de Londrina, no Paraná.

O primeiro grupo constituiu-se de alunos freqüentando a 5ª série do ensino regular e o outro, o 3º ano do ensino médio. Nesta escola, os alunos do primeiro grupo enquadram-se na faixa etária entre 12 e 15 anos e o segundo, na faixa de 16 a 18 anos. Os grupos foram assim escolhidos por representarem, no sentido a seguir, extremos nos ciclos educacionais: de um lado, o primeiro ano do segundo ciclo do ensino fundamental e do outro lado, o último ano do ensino médio, último ciclo da Educação Básica.

O conteúdo curricular escolhido, como já apontamos, foi o de Geometria Não-Euclidiana.

Especificamente, abordamos a Geometria Esférica, pois essa tem sido recomendada para a prática educacional por pesquisadores como Lénart (1996), Coutinho (2001) e Martos (2002) e foi possível aplicar atividades que já foram previamente estudadas e analisadas, além do que, como é um modelo mais simples da Geometria Elíptica, a Geometria Esférica tem importantes aplicações na navegação e na astronomia.

As atividades selecionadas englobaram o estudo da esfera e seus elementos e suas associações com o globo terrestre, abordando conceitos geográficos como paralelos, meridianos, latitudes, longitudes e fusos horários. Apresentamos situações-problemas contidas em fichas com descrições de atividades a serem desenvolvidas com a utilização de materiais manipuláveis, como bolas de isopor, mapas e globos terrestres, esferas, transferidor.

Conforme proposto por Martos (2002), iniciamos o estudo da Geometria Esférica, também chamada elíptica ou riemana, com o conceito de reta, explorando suas propriedades na superfície esférica estabelecendo comparações com suas propriedades no plano. A atividade que apresentamos abaixo foi extraída de Lénart (1996) e foi explorada também por Martos (2002)

Exemplo de atividade : “Qual a cor do urso?”

Como já dissemos anteriormente, a atividade foi aplicada a dois grupos distintos de alunos: um, iniciando o segundo ciclo do Ensino Fundamental e o outro concluinte da Educação Básica. Para os dois grupos o tempo para realizar esta atividade foi de uma aula (50 minutos).

Objetivo desta atividade foi comparar as retas traçadas nas superfícies planas e esféricas, bem como verificar a inexistência de retas paralelas na esfera. Com os alunos dispostos em grupos, de três ou quatro alunos, solicitou-se que fizessem as atividades da Ficha 1. A formação dos grupos ocorreu de forma espontânea, permitindo que os mesmos fossem formados por afinidade. Utilizou-se como material auxiliar bolas de isopor, bexiga, folha sulfite, régua.

Atividade 1. Qual é a cor do urso?

Um urso saiu de sua casa e caminhou 100 km ao sul. Depois virou ao oeste e caminhou por 100 km. Então virou novamente e caminhou 100 km ao Norte. Qual não foi a sua surpresa, quando descobriu que voltara novamente para a sua casa! Qual é a cor do urso?

1) Desenhe na folha de sulfite a viagem do urso. Comente com os colegas de seu grupo as conclusões a que vocês chegaram e anote-as abaixo.

Investigue

2) É possível para um urso chegar ao mesmo lugar em que ele iniciou uma caminhada como a descrita acima?

Construção sobre esfera.

3) Esboce sobre sua esfera o desenho da viagem do urso. Relate as conclusões a que chegaram.

Análise da atividade

Houve assimetria entre os resultados obtidos nas séries aplicadas, como esperado. De modo geral, notou-se que os alunos mostraram-se dispersos, não se concentrando na atividade propriamente dita.

Para os alunos do ensino fundamental, a discussão oral resumiu-se a descobrir qual a cor do urso, sem atentar-se para os aspectos geométricos que poderiam auxiliar na descoberta desta cor. Para alguns alunos da 5ª série, a cor do urso estava associada à cor da bexiga distribuída, a qual era branca. Entre os alunos do ensino médio, o processo de resposta encontrou-me mais intrinsecamente relacionado aos dados obtidos nas investigações realizadas. Os alunos concluíram que o urso tinha a cor branca após traçarem, como solicitado na atividade, as trajetórias sobre a superfície esférica, chegando a conclusão que de o urso deveria ser um urso polar.

Quanto ao tempo destinado para a realização da atividade, nem todos alunos da 5ª série conseguiram completar a atividade inteiramente, já os do ensino médio, sim. Possivelmente, no que concerne aos alunos da educação fundamental, interferiu na realização completa da atividade a falta de hábito em trabalhar em grupos e escrever nas aulas de matemática.

A atividade também objetivava a percepção de diferenças ao traçar curvas na esfera e no plano com relação à construção de poligonais fechadas. Alguns grupos conseguiram descrever a trajetória no plano e perceber a diferença na esfera; verificando que na superfície esférica o urso conseguiria retornar ao local de origem (construindo uma curva fechada), mesmo realizando apenas três movimentos, o que seria impossível no plano, mantendo-se as direções Sul, Oeste e Norte como determinadas. Esta percepção ocorreu tanto no ensino fundamental quanto no médio, embora, como também era esperado, o auxílio da professora tenha sido mais efetivo na 5ª série.

Considerações finais

Com relação ao ensino de Geometrias, sabemos que proporciona ao aluno o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento que permite uma maneira de compreender, descrever, representar e localizar-se no mundo em que vive. Seu ensino pode contribuir para a aprendizagem de números, medidas e álgebra, uma vez que estimula a observar e perceber semelhanças e diferenças, a identificar regularidades na análise de uma forma e no reconhecimento de formas em diferentes representações e dimensões. Porém, sendo seu ensino abordado de forma expositiva e pouco compreensível, sem manipulações de objetos e descontextualizada do mundo real, poderá levar o aluno a sentir-se incapaz de aprender, e a ansiedade poderá manifestar-se na forma de desinteresse. Porém, sendo seu ensino abordado de forma expositiva e pouco compreensível, sem manipulações de objetos e descontextualizada do mundo real, poderá levar o aluno a sentir-se incapaz de aprender, e a ansiedade poderá manifestar-se na forma de desinteresse.

Verificamos que ao proporcionar aos alunos atividades que permitem a manipulação de objetos, as mesmas são resolvidas prazerosamente. Os alunos do Ensino Fundamental gostaram dessas aulas “*diferentes*”, pois ao responder as atividades, podiam escolher resolve-las sentados ou em pé. Essa liberdade facilitou a troca de ideias, permitindo aos grupos compararem os

resultados obtidos na folha de papel (tomada como modelo de superfície plana) e na bola de isopor esfera (modelo de superfície esférica).

Assumimos as turmas no mês de agosto de 2010 devido ao afastamento de 100% da carga horária previsto na legislação do PDE (Programa de Desenvolvimento Educacional).

Especificamente em relação aos alunos da 5ª série, o rompimento dos laços afetivos criados com o professor anterior contribuiu para o aumento da indisciplina. Além disso, esse grupo de alunos não estava acostumado a trabalhar em grupos. Após várias tentativas e mudanças de estratégias, os alunos perceberam que o trabalho em grupo facilitava a resolução da atividade, facilitando a comunicação, permitindo que todos os alunos, mesmo os alunos com defasagem em conteúdos “normais” de Matemática, expressassem suas ideias, auxiliando a aprendizagem.

Ainda em relação aos alunos do Ensino Fundamental, verificamos que a atividade escolhida para iniciar a implementação do projeto deveria ter sofrido alterações. Alguns alunos preocupados em descobrir qual a cor do urso, associaram essa cor com a cor da bexiga utilizada para traçar a trajetória do urso. Para esse grupo deveria ter sido usado uma bexiga de outra cor, vermelha, por exemplo, evitando assim essa associação.

Com relação a aprendizagem de tópicos de Geometria Não Euclidiana, os resultados obtidos nos dois níveis de ensino, permitem inferir que uma sequência de ensino pautada na construção de conceitos básicos tanto na Geometria Plana, quanto na Esférica (escolhida por sua aproximação com o mundo real) pode, e deve, ser iniciada já nas séries iniciais da Educação Básica). Dessa forma, procurando colaborar com professores e alunos no ensino e aprendizagem de Geometria Esférica, elaboramos esse trabalho.

Bibliografia e referências

- Almouloud, S. A. A Geometria na escola básica: que espaços e formas têm hoje? Disponível em: http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/_mr21-Saddo.doc Acesso em: 22/01/2011.
- Alves, S. (2007). A Geometria do Globo Terrestre. In: Programa de Iniciação Científica da OBMEP, v 6.
- Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental Matemática. - Brasília : MEC/ SEF, 1998.
- Carvalho A.S. & Carvalho.A.M.F.T. (2010). A Questão da Ansiedade no Ensino e Aprendizagem das Geometrias não Euclidianas. Anais... X Encontro de Educação Matemática - ENEM, SBEM, Salvador (BA), 07 – 09 de julho.
- Coutinho, L.(2001). Convite às geometrias não – euclidianas. Rio de Janeiro: Interciência.
- Franco, V. S; Introdução às Geometrias não – Euclidianas.
- Kaleff, A. M. M. R. (2004). Atividades Introdutórias às Geometrias não Euclidianas: o exemplo da Geometria do Taxi. Boletim – GEPEN, Rio de Janeiro, nº 44, p. 11- 42.
- Lénárt, I. (1996). Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere – activities comparing planar and spherical geometry. USA: Key Curriculum Press .
- Lorenzato, S. (1993). *Os “porques Matemáticos dos alunos e as Respostas dos Professores”*, Proposição, vol. 10, Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, 1993.

Lorenzato, S.(1995). Por que não ensinar Geometria?, *Educação em Revista* – Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBM, ano 3, n. 4, p.13.

Martos, Z.G. (2002). Geometrias Não Euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental. Rio Claro, 2001. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista.

Paraná. (2008). Secretaria de Estado da Educação. Departamento de Educação Básica. Diretrizes Curriculares de matemática para as séries finais do ensino fundamental e para o ensino médio. Disponível em: <http://www.matematica.seed.pr.gov.br/>. Acesso em 19 mar 2010.

Pavanello, R. N. (1993). O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. *Revista Zetetiké*, ano 1, n. 1, p. 7-17. UNICAMP.

Struik, D.J.(1989) História Concisa das Matemáticas. Gradiva.