



CONSTRUÇÃO DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Guilherme Fernando Ribeiro (Fundação Araucária) – Fecilcam, guilherme.ribeiro91@hotmail.com

Prof^a. Me. Talita Secorun dos Santos (Fundação Araucária) – Fecilcam, tsecorun@hotmail.com

Prof^o. Me. Luciano Ferreira (Fundação Araucária) – Fecilcam, lulindao66@hotmail.com

RESUMO: Este trabalho teve como objetivo elaborar atividades para o ensino e aprendizagem do conteúdo de Geometria Hiperbólica utilizando o *software* GeoGebra. Ele é parte de um trabalho maior que visa elaborar atividades a cerca do conteúdo de Geometria Hiperbólica. Neste artigo iremos descrever cada uma das atividades elaboradas e apresentar as análises da construção da 14^a atividade que trata da construção do H_Triângulo. Para este trabalho, analisamos com base na Engenharia Didática como os alunos passaram a pensar com base na construção do H_Triângulo no GeoGebra a ideia da soma dos ângulos internos de um triângulo. A ideia de estudar a Geometria Hiperbólica surge após o conteúdo de Geometria Não-Euclidiana ser incluso no Currículo da Educação Básica por meio das DCE, Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica, no final de 2006. Afinal essa inclusão torna-se questionável ao considerarmos as reais condições para o desenvolvimento desse conteúdo em sala de aula. A coleta de dados foi feita por meio de dois questionários: o primeiro, com o objetivo de colher informações para delinear o perfil de cada participante e fornecer indícios sobre o conhecimento que estes participantes tinham inicialmente sobre as Geometrias Não-Euclidianas e o segundo, com o objetivo de coletar informações sobre os participantes após a realização das atividades.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana. Geometria Não-Euclidiana. Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica.

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho teve como objetivo elaborar atividades para o ensino e aprendizagem do conteúdo de Geometria Hiperbólica. Buscou-se desenvolver atividades de Geometria Hiperbólica utilizando o *software* Geogebra.

A ideia de estudar a Geometria Hiperbólica surge após o conteúdo de Geometria Não-Euclidiana ser incluso no Currículo da Educação Básica por meio das Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica (DCE) no final de 2006.



A escolha do conteúdo resulta da preocupação do pesquisador com o ensino e aprendizagem da Geometria Não-Euclidiana em especial a Geometria Hiperbólica.

Uma análise das DCE aponta que para o Ensino Fundamental e Médio, o Conteúdo Estruturante Geometrias se desdobra em quatro conteúdos específicos, entre eles, noções básicas de geometrias não-euclidianas.

No que diz respeito ao Ensino Fundamental, as DCE dizem que o aluno neste nível de ensino deve compreender:

[...] noções de geometrias não-euclidianas: geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noção de geometria dos fractais (PARANÁ, 2008, p. 56).

No que diz respeito ao Ensino Médio, as DCE dizem que neste nível de ensino os alunos:

[...] realizam análises dos elementos que estruturam a geometria euclidiana, através da representação algébrica, ou seja, a geometria analítica plana. Neste caso, é imprescindível o estudo das distâncias entre pontos, retas e circunferências; equações da reta, do plano e da circunferência; cálculos de área de figuras geométricas no plano e estudo de posições (PARANÁ, 2008, p. 56).

A importância de se trabalhar a Geometria Hiperbólica no Ensino Médio é ressaltada pelas DCE. Tal documento aponta que o estudo das noções de geometrias não-euclidianas aprofunda-se ao abordar a geometria dos fractais, geometria hiperbólica e elíptica (PARANÁ, 2008).

De forma mais objetiva em relação à Geometria Hiperbólica, as DCE, destacam que:

Para abordar os conceitos elementares da geometria hiperbólica, uma possibilidade é através do postulado de Lobachevsky (partindo do conceito de pseudo-esfera, pontos ideais, triângulo hiperbólico e a soma de seus ângulos internos) (PARANÁ, 2008, p. 57).

Destacam ainda as DCE segundo Paraná (2008, p. 57) que “as abordagens das Geometrias: fractal, hiperbólica e elíptica não se encerram, unicamente, nos conteúdos aqui elencados”. Sendo assim, o professor tem a total liberdade de investigar e realizar outras abordagens contanto que o mesmo explore conceitos



básicos, conceitos esses que são fundamentais para os alunos, pois além de ampliar o seu conhecimento, contribui ainda para sua formação e o seu pensamento geométrico.

Referindo aos meios que serão utilizados para transpor o conhecimento aos alunos, Paraná (2008) aponta que “É importante a utilização de recursos didático-pedagógicos e tecnológicos como instrumentos de aprendizagem”.

Como este trabalho trata da Geometria Não-Euclidiana, mais especificadamente a Geometria Hiperbólica, nas DCE o Conteúdo Estruturante GEOMETRIAS têm como Conteúdos Básicos as Geometrias Não-Euclidianas e referente ao tema desta pesquisa nossos objetivos é que os alunos:

- ✓ percebam a necessidade das Geometrias Não-Euclidianas para a compreensão de conceitos geométricos, quando analisados em planos diferentes do plano euclidiano;
- ✓ compreendam a necessidade das Geometrias Não-Euclidianas para o avanço das teorias científicas;
- ✓ conheçam os conceitos básicos da Geometria Hiperbólica.

O conteúdo de Geometria Hiperbólica foi inserido nas DCE sem cuidados especiais. Essa inclusão torna-se questionável ao considerarmos as reais condições para o desenvolvimento desse conteúdo em sala de aula.

Assim, é aqui que surge a idéia desta pesquisa, que é a busca para superar as dificuldades, ou seja, o pouco material existente sobre a Geometria Hiperbólica voltada para o ensino. Os professores da rede estadual de ensino apresentam dificuldades em aceitar as Geometrias Não-Euclidianas alegando conhecer somente a Geometria Euclidiana.

Caldatto (2011) apresenta um discurso mencionado por um dos professores participantes de sua pesquisa, sendo que este professor participou no processo de elaboração das DCE de Matemática. Este professor apresenta que a inclusão torna-se questionável, pois:

Um dos conteúdos que provavelmente vai ser deixado de ensinar é a geometria não euclidiana, porque falta formação para o professor e o professor não se sente seguro para trabalhar esse conteúdo, falta tempo para o professor trabalhar todos os conteúdos indicados pelas DCE e falta material que auxilie o professor a trabalhar esse conteúdo, porque grande parte dos livros didáticos não contempla as geometrias não euclidianas. E com certeza, se o professor precisar fazer uma seleção dentro de um rol de conteúdos, considerando o que ele pensa ser importante para trabalhar com seu aluno, a geometria não euclidiana vai ser um conhecimento deixado de lado (CALDATTO 2011, p. 239).



Lovis (2009) coloca que Bonete (2000), Cabariti (2004), Santalo (2006) e Santos (2009) afirmam que parte significativa dos professores de matemática que atuam na Rede Estadual de Ensino do Paraná não possuem o conhecimento necessário para trabalhar com a Geometria Não-Euclidiana. Esses pesquisadores colocam que as dificuldades do professor em ensinar/trabalhar com a Geometria Não-Euclidiana acontece devido a falta de conhecimento do assunto e de formação necessária.

Visando amenizar as dificuldades apresentadas até aqui, elaboramos atividades no *software* Geogebra envolvendo conteúdos de Geometria Hiperbólica.

Essas atividades foram preparadas dentro das fases da Engenharia Didática que é uma metodologia utilizada para planejar e organizar um projeto bem como colocá-lo em prática. Neste artigo iremos descrever cada uma das atividades elaboradas e apresentar as análises da 14ª Atividade: Construindo o H_triângulo.

Considerando a inclusão das Geometrias Não-Euclidianas e a falta de conhecimento de parte dos professores para trabalhar com estas, esse trabalho é parte de um trabalho maior que visava elaborar atividades a cerca do conteúdo de Geometria Hiperbólica. A elaboração dessas atividades visa contribuir com o professor afim de que ele possa trabalhar com Geometria Hiperbólica.

2 METODOLOGIA

A aplicação das atividades foi realizada na cidade de Campo Mourão, na Universidade Estadual do Paraná - Campus de Campo Mourão, no ano de 2011. Os sujeitos participantes da pesquisa foram 16 alunos do 3º ano do curso de Licenciatura de Matemática da Universidade Estadual do Paraná - Campus de Campo Mourão.

A aplicação das atividades foi realizada no decorrer das aulas de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática Estágio Supervisionado I. Essa aplicação visou contribuir com a disciplina curricular, pois, a mesma, tem como um dos seus objetivos desenvolver atividades visando o estabelecimento de uma consistente base conceitual para os futuros professores de Matemática, ou seja, além do interesse científico, a de contribuir com a formação de futuros professores.



Foi solicitado que cada aluno trouxesse seu próprio notebook com o *software* GeoGebra instalado.

O pesquisador junto com a sua orientadora realizou uma explicação acerca da História da Geometria, fazendo uma breve viagem histórica desde a construção da Geometria Euclidiana até o surgimento das Geometrias Não-Euclidianas. Foram apresentadas brevemente a Geometria Elíptica, a Geometria dos Fractais, a Geometria Topológica, a Geometria Projetiva e por fim a Geometria Hiperbólica.

Como forma de familiarização do sujeito com o *software* GeoGebra, foram aplicadas cinco atividades. A 1ª Atividade tratava da representação do primeiro postulado de Euclides que diz que: Para todo ponto A e todo ponto B diferente de A, existe uma única reta a que passa por A e B. A 2ª Atividade tratava do segundo postulado de Euclides que diz que: Um segmento retilíneo pode sempre ser prolongado. Já a 3ª Atividade era a representação do terceiro postulado de Euclides que diz que: Existe uma única circunferência com centro e raio dado. Para a 4ª Atividade ficou a representação do quarto postulado de Euclides que diz que: Todos os ângulos retos são iguais. Na 5ª Atividade sugerimos a representação do quinto postulado de Euclides que diz que: Se uma reta c corta duas outras retas a e b (no mesmo plano) de modo que a soma dos ângulos interiores (α e β) de um mesmo lado de c é menor que dois retos, então a e b, quando prolongadas suficientemente, se cortam daquele lado de c.

Baseado em Ferreira (2011), os sujeitos participantes da pesquisa construíram as ferramentas necessárias para a elaboração do Plano de Poincaré. A 6ª Atividade tratou da construção da ferramenta H_reta. A 7ª Atividade ficou com o título Testando a ferramenta H_reta. A 8ª Atividade a construção da ferramenta H_segmento. A 9ª Atividade Testando a ferramenta H_segmento. A 10ª Atividade a construção da ferramenta H_distância. E por fim a 11ª Atividade ficou como Testando a ferramenta H_distância. As construções de macro ferramentas e seus respectivos testes de funcionamento foram necessários para a construção do modelo do Plano de Poincaré. Essa etapa exigiu dos sujeitos muita atenção e um bom tempo para as construções.

A 12ª Atividade tratou da construção do axioma hiperbólico. Santos (2011, p. 24) apresenta o Axioma Hiperbólico que segundo Greenberg (1973, p.148) diz que: “Na Geometria Hiperbólica existe uma reta l e um ponto P, não pertencente a l , tal que existe pelo menos duas retas que passam por P e são paralelas a reta l ”. A 13ª Atividade tratou da comprovação desse Axioma Hiperbólico. Essas duas atividades foram a que os sujeitos mais sentiram dificuldades.



A 14ª Atividade que tinha como nome Construindo o H_triângulo, teve como objetivo fazer um comparativo com a soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Euclidiana e na Geometria Hiperbólica. Existe um teorema da Geometria Euclidiana que fala acerca da soma dos ângulos internos de triângulos: “A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo ABC é igual a 180 graus”. Essa atividade visava investigar a validade desse teorema na Geometria Hiperbólica.

Por fim aplicamos o 2º Questionário, que teve como objetivo levantar informações sobre o conhecimento do sujeito da pesquisa a cerca da disciplina Geometria Não-Euclidiana, em particular a Geometria Hiperbólica após a realização das atividades.

Nesse trabalho iremos analisar/investigar como e se os alunos aceitaram a 14ª Atividade: Construindo o H_triângulo, ou seja, se eles aceitaram que ao construir o H_triângulo a soma dos ângulos internos não é 180º.

Para a preparação das informações da pesquisa foram analisados dois questionários e uma atividade. Os quais nomeamos de QI, QF e atividade.

Após realizar a prática com os alunos participantes da pesquisa organizamos o material, separando o QI, as atividades e o QF de cada um dos participantes. Como o número de participante foi um total de 16 temos então que os participantes foram codificados de 1 a 16, ou seja, A.1 (aluno um) para as respostas do primeiro participante, A.2 (aluno dois) para o segundo participantes,... , A.16 (aluno dezesseis). Representando assim as respostas dos sujeitos participantes da atividade. Essa codificação foi realizada de maneira aleatória. Vale lembrar que cada participante teve a mesma codificação no decorrer da análise.

3 ANÁLISE DOS DADOS

3.1 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO INICIAL (QI)

A coleta de dados foi feita por meio de dois questionários, o primeiro ou Questionário Inicial (QI), tinha como objetivo colher informações para delinear o perfil de cada participante e fornecer indícios sobre o conhecimento que estes participantes tinham inicialmente sobre as Geometrias Não-Euclidianas



O QI era constituído de 6 (seis) questões abertas, no qual visamos identificar o conhecimento do aluno sobre o conteúdo de Geometria Não-Euclidiana em especial a Geometria Hiperbólica até o presente momento, ou seja, uma análise antes de realizar a aplicação das atividades. Ele foi aplicado no dia quinze de Junho de dois mil e onze, não estipulamos um tempo máximo para a realização do mesmo. O primeiro aluno demorou quinze minutos para devolver o QI respondido enquanto que o último a entregar demorou vinte e dois minutos. Na aplicação do QI o total de participantes foram de 16 alunos.

Traçando o perfil dos 16 alunos participantes das atividades, identificou-se que:
- dos 16 participantes 9 lecionam ou já lecionou alguma disciplina;

Entre os que lecionam ou lecionaram: 3 lecionam ou lecionaram apenas no Ensino Fundamental; 1 lecionou apenas no Ensino Médio; 3 lecionam ou lecionaram no Ensino Fundamental e Médio; 1 lecionam ou lecionaram no Ensino Fundamental, Médio e Educação Especial; 1 lecionam ou lecionaram no Ensino Médio e Ensino Superior.

Na primeira questão do QI, indagamos os acadêmicos o que eles conheciam sobre as Geometrias Não-Euclidianas percebemos que em geral, poucos alunos tiveram contato com a Geometria Não-Euclidiana, os que relataram já conhecer, esse contato só aconteceu no curso Superior. (A.2 – *“Ouvi muito pouco a respeito de geometria não-euclidiana, apenas em apresentações em eventos da UEPR, como o ENIEDUC e o EPCT.”*); (A.3 – *“Sim, tive contato com esse tema aqui na faculdade em alguns mini-cursos.”*); (A.11 – *“Sinceramente não sei te explicar.”*).

Na segunda questão do QI, indagamos os acadêmicos se em sua opinião é possível trabalhar com a Geometria Não-Euclidiana no Ensino Fundamental e Ensino Médio. A maioria dos alunos respondeu que sim. (A.12 – *“Penso que sim, mais em particular eu não saberia explicar.”*);

Na terceira questão do QI, indagamos os acadêmicos se existem diferenças entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Não-Euclidiana. Muitos alunos responderam que sim, porém o único que conseguiu responder corretamente foi: (A.7 – *“A geometria não-euclidiana não obedece aos postulados de Euclides.”*).

Na quarta questão do QI, indagamos se os participantes conhecem a Geometria Hiperbólica, três alunos disseram que: (A.4 *“Deve ter alguma coisa a ver com hipérbole.”*); (A.5 *“Alguma coisa haver com hipérbole.”*); (A.8 *“Não, conheço apenas a Hipérbole.”*); Os demais alunos disseram que não.



Na quinta questão do QI, indagamos se os acadêmicos conhecem algum material didático, *software* ou atividades que poderiam auxiliar a trabalhar com a Geometria Hiperbólica. Apenas um aluno citou o *software* GeoGebra (A.13 – “*Não conheço nenhum específico, porém já vi o software geogebra trabalhando com uso da geometria.*”). Esperava-se com esta pergunta que todos os alunos citassem este *software*, pois são acadêmicos do terceiro ano de Matemática e o GeoGebra é um *software* gratuito de Geometria dinâmica que pode ser utilizado em ambiente de sala de aula que reúne geometria, álgebra e cálculo.

Na última questão do QI, questionamos se os acadêmicos participantes da pesquisa conheciam o Plano de Poincaré. E, como era esperado, nenhum aluno conhecia o Plano Hiperbólico de Poincaré. (A.2 – “*Nunca ouvi! O que é isso?*”); (A.5 – “*Poincaré? O que é isso?*”); (A.11 – “*Não. Nunca vi na minha vida.*”).

3.2 ANÁLISE DA ATIVIDADE CONSTRUINDO O H_TRIÂNGULO

3.2.1 ANÁLISE A PRIORI

Nessa atividade pretendíamos que os alunos fizessem uma comparação com a soma dos ângulos interno de um triângulo na Geometria Euclidiana e na Geometria Hiperbólica. E a partir daí passassem a aceitar a existência de uma Geometria Não-Euclidiana que possibilita que a soma dos ângulos internos de um triângulo ser menor que 180° .

Esperávamos encontrar uma resistência natural em aceitar o H_Triângulo já que a Geometria Euclidiana é posta na escola como uma verdade única e incontestável. No entanto esperávamos também que a utilização do *software* facilitaria a aceitação de tal fato pelos sujeitos participantes da pesquisa.

Durante a apresentação da parte histórica houve um repúdio dos alunos no sentido de aceitar um triângulo cuja a soma fosse menor que 180° . Para nós o uso do *software* poderia contribuir para o entendimento do H_Triângulo.

Ao propor esta atividade tínhamos a intenção de verificar o que os alunos entendiam por reta no plano Euclidiano e se possuíam alguma idéia ou concepção da reta no plano hiperbólico. Para responder as questões no final da atividade os alunos



utilizaram seus conhecimentos e suas estratégias, para apresentar definições e exemplificando quando necessário.

Conforme Almouloud (2007), uma atividade deve permitir aos alunos desenvolver certas competências e habilidades. Competência no sentido de auxiliar o aluno na construção do seu conhecimento, e habilidade como, por exemplo, a de saber ler, conseguir interpretar e desenvolver o raciocínio.

3.2.2 ANÁLISE DA QUESTÃO DA ATIVIDADE CONSTRUINDO O H_TRIÂNGULO

Ao entregar a décima quarta atividade aos alunos e após expor o que seria realizado, solicitamos que ao término desta atividade os alunos salvassem o arquivo com o nome “14ª Atividade – Construindo o H_Triângulo”. Nessa atividade os alunos tiveram a oportunidade de calcular qual a soma dos ângulos internos de um triângulo e um H_triângulo. Puderam comparar o resultado observando a figura, e movimentando suas retas.

Não estipulamos um tempo máximo para realização, visto que cada acadêmico participante já tinha constituído certa habilidade em relação ao *software* GeoGebra. Habilidade no sentido de manusear as ferramentas.

Ao término da 14ª Atividade – Construindo o H_Triângulo os alunos depararam com 1 (uma) questão que diz: *No H_Triângulo a soma dos ângulos internos é igual a 180º? E no triângulo euclidiano? Como você explica esse acontecimento?* A Tabela 1 indica a análise da questão indagada na Construção do H_Triângulo.

Buscamos relacionar o número de aluno que chegaram a basicamente uma mesma resposta, em seguida foi realizada a divisão, de acordo com uma resposta mais específica. Na Tabela 1 apresentam-se também alguns excertos de respostas dadas pelos sujeitos. Por fim, na última coluna têm-se os comentários.

Tabela 1: análise da questão da Construção do H_Triângulo.

1 – No H_Triângulo a soma dos ângulos internos é igual a 180º? E no triângulo euclidiano? Como você explica esse acontecimento?			
Respostas dos	Justificativa dada	Excertos de respostas dadas	Comentários

alunos de acordo com a codificação	pelos acadêmicos	pelos sujeitos	
<p>Quatro alunos afirmaram que o resultado da soma dos ângulos internos de um H_Triângulo é menor que 180°. Disseram que no triângulo euclidiano a soma dos ângulos internos é igual a 180°.</p> <p>A.3 – A.6 – A.13 - A.16</p>	<p>Dois não souberam explicar a resposta.</p> <p>A.3 – A.16</p> <p>Um explicou que seria por os lados não serem retos. A.6</p> <p>Um Explicou que no plano euclidiano as retas tem um formato diferente que no hiperbólico. A.13 -</p>	<p>A.3 - “No <i>H_Triângulo a soma dos ângulos interno é menor que 180°. E no triângulo euclidiano é igual a 180°.</i>”</p> <p>A.13 – “No <i>H_Triângulo a soma foi de 132,76° portanto menor que 180° e no triângulo euclidiano foi de 180°. Isso ocorre porque no plano euclidiano as retas tem um formato diferente que no hiperbólico.</i>”</p>	<p>Estes alunos conseguiram de alguma forma aceitar a existência de retas com um formato diferente da reta Euclidiana. Eles aceitaram o triângulo cuja soma dos ângulos internos era menos que 180°. Precisamos evidenciar aqui que esse aceite se deu apenas depois da construção no software, já que durante a apresentação oral os alunos apresentavam muita resistência em aceitar as retas hiperbólicas.</p>
	<p>Dois não souberam explicar a resposta.</p>	<p>A.1 - “<i>Não a soma dos ângulos</i>”</p>	

<p>Dez alunos colocaram que a soma dos ângulos internos no H_Triângulo não é igual a 180°. Que no triângulo euclidiano é 180°.</p> <p>A.1 - A.2 - A.5 - A.7 - A.8 - A.9 - A.10 - A.12 - A.14 - A.15</p>	<p>A.14 - A.15</p> <p>Cinco explicaram que como a reta é uma curva, a soma dos ângulos formados varia. A.1 - A.2 - A.9 - A.10 - A.12</p> <p>Dois explicaram que no triângulo euclidiano a soma dos ângulos internos do triângulo é 180° e no triângulo não-euclidiano isso não acontece necessariamente. A.5 - A.8</p> <p>Um explicou que a soma é diferente pelo fato dos ângulos serem calculados através das aberturas de retas tangentes. A.7</p>	<p><i>estará variando, no triângulo Euclidiano a soma dos ângulos é de 180°. Este acontecimento ocorre devido a curvatura que as retas apresentam.”</i></p> <p>A.8 - “No Triângulo Euclidiano a soma dos ângulos interno é 180° obrigatoriamente. Já no triângulo, digo H_triângulo, essa soma não necessita ser 180° para ser considerado um triângulo.”</p> <p>A.10 - “Não, sim, acho que porque as linhas são curvas”.</p>	<p>As respostas destes alunos mostram ainda uma certa insegurança em relação ao que eles estão vendo na tela do computador e o que eles conhecem por retas.</p>
<p>Dois alunos declararam não saber o que responder.</p>		<p>A.4 - “Não sei.”</p>	<p>Isso mostra que ainda existiam alunos que não compreendiam a</p>



A.4 – A.11			construção da reta hiperbólica.
------------	--	--	---------------------------------

3.2.3 ANÁLISE A POSTERIORI

Mesmo os alunos estando familiarizados com o *software* GeoGebra, eles apresentaram dificuldade para realizar a 14^o atividade. Alguns alunos se mostravam atentos e motivados, já outros demonstravam certo desinteresse.

Todos os participantes precisaram de ajuda, cada um deles chamou para esclarecer alguma dúvida, uns referente a construção, outros referente as teorias que envolviam a construção. O objetivo dessa atividade era construir um H_Triângulo e verificar a sua soma dos ângulos internos, bem como fazer o comparativo com o triângulo euclidiano.

É uma construção não tão simples de realizar, envolvendo muita atenção. Para realizar está atividade o sujeito necessitava da ferramenta H_Segmento já criada.

Para a construção do H_Triângulo os acadêmicos utilizaram ferramentas do *software* e conceitos como eixo, ponto, círculo, reta tangente, segmento definido por dois pontos, ângulos e vértices foram utilizados.

Essas ferramentas e esses conceitos devem ser concebidas de modo a permitir ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir, podendo ele então adquirir novos conhecimentos.

Após a construção da 14^a atividades percebemos que todos os alunos participantes da pesquisa conseguiram visualizar que a soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Hiperbólica é menor que 180°, porém nem todos aceitaram essa geometria.

3.2.4 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO FINAL (QF)

O segundo questionário ou Questionário Final (QF) era constituído das mesmas questões do QI e tinha como o objetivo coletar informações sobre os participantes após a realização das atividades.

Na primeira questão do QF, todos os alunos responderam conhecer as Geometrias Não-Euclidianas em especial a Geometria Hiperbólica. (A.4 – “Agora eu



conheço uma parte dela, a Geometria Hiperbólica.”); (A.5 – “Depois da realização das atividades pude conhecer um pouco melhor.”); (A.7 – “Depois destas atividades, considero ter uma pequena noção do que é essas geometrias. Sendo que é muito mais do que eu sabia.”); (A.11 – “Agora conheço. Antes só conhecia a Geometria Euclidiana. Agora com as construções no GeoGebra pude aprender a Geometria Não Euclidiana que pode ser aplica em superfícies curvas (Geometria Hiperbólica).”); (A.12 – “Sim, é a geometria que não admite os cinco postulados de Euclides.”).

Percebemos nessa primeira questão do QF uma grande diferença em relação ao QI. Os alunos estavam mais preparados para responder a questão, bem como tiveram argumentos para responder a mesma.

Na segunda questão do QF, oito acadêmicos disseram ser possível trabalhar com a Geometria Não-Euclidiana no Ensino Fundamental e Ensino Médio, e oito colocaram que não seria possível trabalhar. Alguns excertos dos participantes que disseram ser possível: (A.2 – “Sim. Quanto mais cedo aprender, mais tempo terá para se aprofundar no assunto. Penso que ao menos alguns conceitos básicos deveriam ser ensinados.”); (A.10 – “Sim. Acredito que seja possível, porém não saberia criar meios para ensiná-la ou utilizá-la no ensino.”); (A.11 – “Nossa seria muito interessante poder levar esses conteúdos para os alunos.”); (A.12 – “Possível acho que é, só que a maneira que deve ser aplicado não sei como iria fazer.”).

Alguns excertos dos participantes que disseram não ser possível: (A.3 – “Eu acredito que é possível comentar que existem outras geometrias para os alunos, mas trabalhar é mais difícil, pois nós que estamos no 3º ano de matemática tivemos dificuldade para compreender a geometria não-euclidiana.”); (A.4 – “Eu acho complicado entender, imagina uma criança do ensino fundamental.”); (A.6 – “Não, por ser um conteúdo de difícil compreensão até mesmo para nós do ensino superior.”). (A.7 – “Penso que seria muito difícil, pois é um conteúdo novo, e o professor precisa ser muito preparado e conhecer o conteúdo.”);

Percebemos a grande diferença dessa segunda questão no QF em relação ao QI. Enquanto no QI todos os participantes colocaram que seria possível trabalhar com as Geometrias Não-Euclidianas, no QF apenas 50% colocaram que sim. Tanto os alunos que responderam ser possível trabalhar, quanto os que disseram não ser possível tiveram argumentos suficientes para justificar sua resposta.

A terceira questão do QF, todos os alunos responderam existir diferença entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Não-Euclidiana. Enquanto no QI todos os acadêmicos responderam ter diferença e apenas um conseguiu justificar, no QF todos



conseguiram de uma forma ou de outra justificar sua resposta. (A.2 – “*Sim. A Geometria euclidiana, ao contrário da não-euclidiana aceita o 5º postulado de Euclides.*”); O acadêmico A.7 sendo o único ter respondido corretamente no QI, aqui no QF também, onde colocou que: (A.7 – “*Existem sim. Essas diferenças devem-se à negação de alguns postulados de Euclides.*”).

Na quarta questão do QF, todos os acadêmicos responderam conhecer a Geometria Hiperbólica. Notamos a diferença em relação a essa questão no QI. Além dos alunos responderem conhecer a Geometria Hiperbólica os mesmos tiveram conceitos suficiente para justificar sua resposta. (A.3 – “*Sim. É a geometria que aceita os quatro postulados de Euclides e nega o quinto.*”); (A.4 – “*Sim. A Geometria Hiperbólica não admite o quinto postulado de Euclides.*”).

Na quinta questão do QF, todos os alunos responderam como meio pra auxiliar a trabalhar com a Geometria Hiperbólica o *software* GeoGebra. Nota-se a grande diferença em relação ao QI, onde apenas um aluno citou o GeoGebra, aqui no QF, todos os participante citaram o mesmo. (A.13 – “*Conheço o geogebra.*”); (A.15 – “*Sim, o geogebra.*”).

Na última questão do QF, apesar de todos os alunos responderem conhecer o Plano Hiperbólico de Poincaré, apenas alguns deles conseguiram responder corretamente a questão. Dentre os que conseguiram justificar apresentamos (A.3 – “*Sim, eu conheço. O plano Hiperbólico de Poincaré é delimitado por um círculo.*”); (A.15 – “*Sim. É a circunferência que é o plano.*”).

Após a análise do QF percebemos que os alunos que não tinham uma contato com a Geometria Não-Euclidiana, em especial a Geometria Hiperbólica passaram a entender pelo menos simples conceitos e aceitar a H_Reta, bem como a soma dos ângulos internos de um H_Triângulo.

4 CONCLUSÕES

É possível concluir que o objetivo da pesquisa foi alcançado, uma vez que, apresentamos brevemente as atividades elaboras bem como a análise da 14ª atividade – Construindo o H_Triângulo.

Escolheu-se o GeoGebra pois é um *software* gratuito de geometria dinâmica *free* e ainda o mesmo esta implantado na rede Paraná Digital, que é um projeto de inclusão digital das escolas públicas do Estado do Paraná. Este projeto visa



disponibilizar meios educacionais por meio de computadores e da Internet, com o objetivo de melhorar a qualidade do ensino.

Após a realização da atividade H_Triângulo esperava-se, na questão indagada referente a atividade, que todos os alunos respondessem corretamente. O que não aconteceu, pois dois alunos declararam não saber o que responder.

Após as análises do questionário, conseguimos concluir que apesar dos alunos conseguirem visualizar que a soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria Hiperbólica é menor que 180° nem todos aceitaram essa geometria.

REFERÊNCIAS

ALMOULOU, Saddo Ag. **Fundamentos da Engenharia Didática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Piaget, p. 193-217, 1996.

BONETE, Izabel P. **As Geometrias Não-Euclidianas em Cursos de Licenciatura: Algumas Experiências**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Unicamp, Campinas, 2000. 240 f.

BRITO, Arlete de Jesus. **Geometrias Não-Euclidianas: Um estudo histórico-pedagógico**. 187 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, 1995.

CABARITI, Eliane. **Geometria Hiperbólica: uma proposta didática em ambiente informatizado**. 131 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

CALDATTO, Marlova Estela. **O processo coletivo de elaboração das Diretrizes Curriculares para a Educação Básica do Paraná e a inserção das Geometrias Não Euclidianas**. 261 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, 2011.

EUCLIDES. **Os Elementos/Euclides**; tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009.

FERREIRA, Luciano. **Uma proposta de ensino de Geometria Hiperbólica: “construção do Plano de Poincaré” com o uso do software Geogebra**. 293 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, 2011.



LOVIS, K. A. **Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica: o que pensam e o que fazem os professores.** Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Paraná 2009. 147f.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Educação Matemática.** Uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2008.

PARANÁ, SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO DO. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica.** Curitiba, p. 84, 2008.

SANTALO, Luis A. Matemática para não-matemáticos. In: PARRA, Cecilia; SAIZ, Irma (Org.). **Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas.** Tradução: Juan Acuna Llorens. Porto Alegre: Artes Médicas, 2006.

SANTOS, Talita Secorun dos. **A inclusão das Geometrias não-euclidianas no currículo da Educação Básica.** 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e Ensino de Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, 2008.