Um Estudo sobre Contribuições de Noções de Topologia Geométrica para um Grupo de Mestrandos.

Erilúcia Souza da Silva[1]
José Carlos Pinto Leivas[2]

GD7 – Formação de Professores que Ensinam Matemática.

RESUMO

Este artigo tem como finalidade apresentar uma pesquisa, em andamento, no Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática do Centro Universitário Franciscano – UNIFRA. O objetivo da pesquisa é investigar contribuições de abordagens intuitivas de noções de Topologia Geométrica, um dos ramos mais recentes da Geometria, por meio de uma oficina pedagógica realizada com um grupo de mestrandos do mestrado citado anteriormente. A Topologia muitas vezes é conhecida como Geometria Elástica ou Geometria das Deformações, por estudar propriedades geométricas conservadas mesmo quando figuras geométricas são submetidas a transformações tão bruscas que todas suas propriedades métricas são perdidas, sendo mantidas apenas as propriedades topológicas. A pesquisa tem metodologia de cunho qualitativo e faremos uso dos seguintes instrumentos de pesquisa questionários, análises de documentos, vídeos e observação participante na oficina pedagógica, a qual foi oferecida no primeiro semestre letivo do ano de 2012, envolvendo 12 alunos, todos professores em exercício nas redes de ensino. A pesquisa se encontra na fase de análise dos documentos e ainda não há conclusões.

Palavra-chave: Topologia. Geometria. Ensino. Intuição.

1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, educadores matemáticos veem sentindo a necessidade de reformulações no Ensino da Geometria. Segundo Leivas e Cury (2009), a Geometria desenvolve habilidades básicas no educando, destacando-se a capacidade de comunicação, de percepção espacial, de análise e reflexão, bem como de abstração e generalização.

As primeiras noções geométricas não são euclidianas, já que não têm a ver com medidas, segundo Dienes e Goldinn (1977). A uma criança interessa primeiro, por exemplo, se ela pode ou não sair de uma sala, a qual pode estar com a porta fechada ou aberta; se ela pode tirar os bombons de dentro de uma caixa que está fechada. Essas

---

[1] Mestranda de Matemática do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática – UNIFRA. Especialista em Docência da Matemática das Séries Finais do Ensino Fundamental – Faculdade Thahiri. Professora da Rede Pública Municipal de Manaus – Amazonas. - erilúcia_souza@yahoo.com.br.
[2] Professor Doutor orientador no Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática da UNIFRA, e-mail leivasjc@unifra.br.

noções são ditas de natureza topológica. Piaget e Inhelder (1993) afirmam que a geometria da criança não é a de Euclides, a sua intuição geométrica é mais topológica do que euclidiana.

Em alguns cursos de licenciatura do Rio Grande do Sul são constantes as disciplinas apenas com ênfase na Geometria Euclidiana, não sendo abordados tópicos de geometrias não euclidianas, o que é constatado por Leivas (2009), sendo que apenas dois projetos de cursos de licenciatura de oito universidades gaúchas em sua pesquisa abordam noções topológicas.

Diante do exposto, percebe-se a pouca ênfase dada aos ramos da Matemática de natureza intuitiva e que não são euclidianas. Este trabalho trata, como objeto principal de estudo, sobre as contribuições que as noções topológicas de vizinhança, interior, exterior, aberto, fechado, continuidade e descontinuidade trazem para o ensino da Geometria. Pode-se dizer que a esta pesquisa não interessam as propriedades métricas dos objetos, como na Geometria Euclidiana, e sim suas propriedades qualitativas, estudo que pertence à Topologia.

A Topologia é um dos ramos mais recentes da Matemática. Segundo Courant e Robbins (2000), ela estuda as propriedades das figuras geométricas que persistem mesmo quando as figuras são submetidas a deformações tão drásticas e todas as suas propriedades métricas e projetivas são perdidas. De fato, em uma transformação topológica, as propriedades métricas, como forma e tamanho, podem ser destruídas, mas propriedades como interior e exterior, ou vizinhança não são.

Deste modo tomamos como objetivo desta pesquisa investigar contribuições de noções de Topologia Geométrica, por meio de uma oficina pedagógica, para a formação de um grupo de mestrandos do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática do Centro Universitário Franciscano – UNIFRA.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 TOPOLOGIA

Ao falarmos em Topologia nos vem à mente assuntos relacionados ao estudo da Matemática Pura, geralmente constante dos cursos de Análise, mais especificamente, a topologia da reta. Conforme Papas (1995), a Topologia surgiu, no século XVIII, a partir das tentativas de solução do problema das pontes de Königsberg, problema este que veio a ser resolvido por Euler (1707-1783), quando usou uma parte da Topologia que é conhecida hoje por teoria dos grafos.

Dienes e Golding (1977) definem Topologia como sendo “o estudo das propriedades do espaço não afetadas por deformações contínuas”. Por isso, sugerimos iniciar o estudo da Geometria por noções topológicas e não pelas medidas, como é usualmente feito hoje. Dentre os elementos topológicos que serão abordados intuitivamente, neste trabalho, citamos: fronteira, vizinhança, interior, exterior, continuidade, descontinuidade e ordem.

Courant e Robbins (2000, pp. 292-293) apresentam a definição de um importante conceito para a o estudo de Topologia, como segue:

> [...] uma transformação topológica de uma figura geométrica A em outra figura A’ é dada por qualquer correspondência
>
> $$p \rightarrow p'$$
>
> entre os pontos p de A e os pontos p’ de A’, e que tem as duas propriedades seguintes:
> 1. A correspondência é bijetora. Isto significa que a cada ponto p de A corresponde apenas a um ponto p’ de A’, e vice-versa.
> 2. A correspondência é contínua em ambas as direções. Isto significa que se tomarmos dois pontos quaisquer p e q de A e deslocarmos p de modo que a distância entre ele e q se aproxime de zero, então a distância entre os pontos correspondentes p’ e q’ de A’ também se aproximará de zero, a recíproca é verdadeira.

Podemos exemplificar uma transformação topológica usando um balão cheio de ar, se o achatarmos levemente sem furá-lo, a vizinhança dos pontos será preservada. Porém, se furarmos o balão, deixaremos de ter uma transformação topológica, já que as propriedades acima expostas não serão respeitadas. Outro exemplo de transformação topológica é apresentado abaixo:

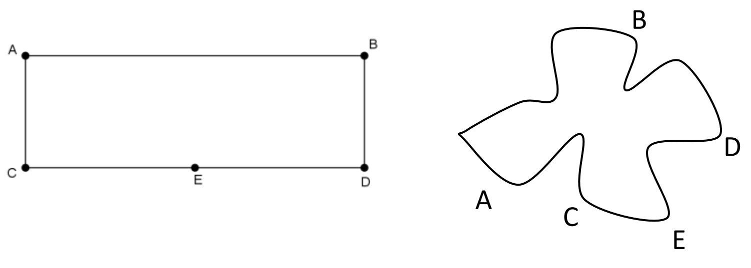

Figura 1: transformação topológica do retângulo na figura à direita.

Observe que, apesar de os lados e os ângulos do retângulo terem sofrido alterações, em ambas as figuras, os pontos C, E e D permanecem, respectivamente, entre os pontos A e E, C e D, E e B. Embora a distorção sofrida pela transformação, o ponto E, que se encontra entre os pontos C e D, permanece entre A e D, após a transformação, mostrando que "estar entre" é propriedade topológica, ou seja, o que é caracterizado como "relação de ordem".

2.2. GRAFOS

No século XVIII, os habitantes da cidade de Königsberg criaram um problema folclórico que consistia em questionar se era possível fazer um passeio por todas as sete pontes que existiam na cidade, mas passando apenas uma vez em cada uma delas. O problema só foi solucionado, em 1736, quando o matemático suíço Leonhard Euler curvou-se sobre ele para resolvê-lo, segundo Sampaio (2008).

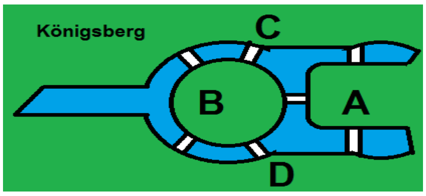

Figura 2: pontes de Königsberg.

Euler desenhou um diagrama em que transformou os caminhos em arcos e as intersecções em vértices. Ele criou talvez o primeiro grafo da história. Percebeu que, para solucionar o problema, seria preciso que o grafo tivesse apenas dois vértices ímpares, sendo um para iniciar, e outro para finalizar o caminho ou a uni-los. O grafo das pontes de Königsberg tem quatro vértices ímpares e não pode ser percorrido. Portanto, o problema das sete pontes de Königsberg não tem solução.

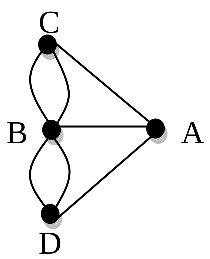

Figura 3: grafo das Pontes de Königsberg.

A Teoria dos Grafos é uma das áreas da Matemática bastante presente na vida real, pois apesar de ter uma enorme complexidade e tratar de problemas de difícil solução, faz-se compreensível aos alunos do ensino básico quando tratada ou estudada por meio de uma abordagem informal e lúdica, conforme colocam Feiteira e Pires (2011).

2.3. TEOREMA DAS QUATRO CORES

O problema das quatro cores surgiu por volta de 1852, quando o jovem matemático Francis Guthrie coloria um mapa dos territórios da Inglaterra. Durante a pintura do mapa o jovem tomava cuidado para não colorir com a mesma cor países que tinham fronteiras em comum e percebeu, com isso, que apenas quatro cores eram suficientes para colorir esse mapa. Posteriormente, coloriu, experimentalmente, outros mapas com apenas quatro cores sem, entretanto, conseguir formalizar sua descoberta mostrando que quatro cores eram suficientes para colorir qualquer mapa. Este problema gerou um teorema que passou a ser denominado Teorema das Quatro Cores.

Figura 4 – Mapa dos territórios da Inglaterra
Fonte: http://oseuropeusap.blogspot.com/2009/01/inglaterra-inglaterra-uma-das-naes.html

O teorema só foi demonstrado, segundo Sampaio (2008), em 1976, por Hakene e Appel, que tiveram auxílio de computadores de grande porte. Em 1990, foi publicada na revista *Scientific American* uma demonstração mais simples do teorema desenvolvida por quatro matemáticos, Neil Robertson, Dan Sanders, Paul Seymour e Robin Thomas, a qual também teve o uso de computadores.

2.4 FAIXA DE MÖEBIUS E A GARRAFA DE KLEIN

A Faixa de Möebius é uma superfície importante para a Topologia e foi descoberta pelo matemático alemão Augustus Möebius (1790-1868), daí a origem de seu nome. Ela é extraordinária por ser uma superfície que apresenta apenas uma face. Para verificar isso basta percorrer toda a faixa, construída com uma tira de papel, com um lápis sem o levantar do mesmo e perceberemos que conseguimos realizar todo o percurso sem enfrentar nenhuma fronteira. Esse procedimento ilustra de forma intuitiva a relação topológica de continuidade. Para percorrer uma faixa comum, que apresenta duas faces, é necessário atravessar de uma para outra por meio de uma fronteira.

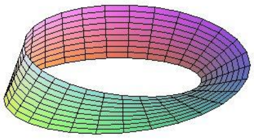

Figura 5: faixa de Möebius. Construída no Maple.

A Faixa de Möebius, também é encontrada na literatura como Banda de Möebius e, de acordo com Pappas (1995, p. 45), "A banda de Möebius tem aplicações interessantes na indústria, tal como no caso das correias de ventoinha dos carros ou em correias de outros dispositivos mecânicos, visto que sofrem um desgaste mais uniforme do que as correias convencionais".

A Garrafa de Klein é outra superfície topológica e foi inventada pelo matemático alemão Félix Klein (1849-1925). A garrafa tem a propriedade de não ter distinção entre o seu exterior e o seu interior, da mesma forma que a Faixa ou Banda de Möebius, e poderíamos verificar isso derramando água em um dos furos, que sairia pelo mesmo lugar por onde entrou.

Figura 6: Garrafa de Klein.
Fonte: http://outrodoutro.wordpress.com/2009/10/04/a-garrafa-de-klein/.

A Garrafa de Klein e a Faixa de Möebius estão relacionadas, pois podemos formar uma Garrafa de Klein com duas Faixas de Möebius.

3 INTUIÇÃO

O uso da intuição, por vezes, pode parecer arriscado e uma forma ilegítima de substituir uma demonstração rigorosa. Segundo Leivas (2009), este tema tem sido estudado e discutido desde a Crise dos Fundamentos, constituindo-se em uma corrente filosófica na Educação Matemática. Ainda, conforme o mesmo autor, um dos primeiro intuicionista foi Leopoldo Kronecker e suas ideias foram estabelecidas e apresentadas, no final do século XIX, em oposição ao logicismo de Russel. Brouwer foi quem elaborou um sistema filosófico para contemplar essa corrente e deu sua contribuição ao construtivismo matemático, abordando especialmente algumas noções sobre Topologia.

Para Piaget e Inhelder (1993) destacam a importância na construção das formas a partir das relações topológica elementares e o interesse nas operações constitutivas do espaço ocorre dentre outras pelo

> [...] interesse dessas operações, consideradas geneticamente, é introduzir um fato novo no debate clássico que atiça a intuição e a lógica: é que, na medida em que as ações se interiorizam em operações, as intuições perceptivas e práticas do início tornam-se coerentes e racionais antes mesmo de serem formalizadas. (p. 470)

Davis e Hersh (1985) apresentam algumas definições e usos da palavra intuição:

> (2) Intuitivo significa visual. Assim, a topologia ou geometria intuitiva diferem da topologia ou geometria rigorosa em dois aspectos. Por outro lado, a versão intuitiva tem um significado, um correspondente no domínio das curvas e superfícies visualizadas, que está excluído da versão rigorosa [...]. Nesse respeito, o intuitivo é superior; pois possui uma qualidade que falta à versão rigorosa. [...]
> (3) Intuitivo significa plausível ou convincente na ausência de demonstração. Uma significação relacionada é "o que se esperaria que fosse verdade neste tipo de situação, baseando-se na experiência geral com situações semelhantes ou assuntos relacionados." "Intuitivamente plausível" significa razoável como uma conjectura, isto é, como um candidato a demonstração.
> [...]
> (5) Intuitivo significa apoiar-se sobre um modelo físico, ou em alguns exemplos importantes. Nesse sentido, é quase a mesma coisa que heurístico. (p. 435)

Sobre o que é intuição, Poincaré (1995, p. 22) afirma em uma mensagem célebre:"Nós temos muitas espécies de intuições; inicialmente o apelo aos sentidos e à imaginação, depois a generalização por indução calcada, por assim dizer, nos procedimentos das ciências experimentais; temos finalmente a intuição do número puro". A intuição geométrica, base do trabalho de pesquisa de que estamos tratando e que tem um papel relevante na mesma, é o que Piaget e Inhelder (1993) consideram como a primeira das considerações descritas acima por Poincaré. Ela será a principal ferramenta que usaremos para explorar, abordar e analisar a Topologia e suas propriedades nas atividades da oficina pedagógica.

4 METODOLOGIA

A pesquisa em andamento tem cunho qualitativo usaremos conjecturas da observação participante, visto que a pesquisadora estará presente no contexto observado, ou seja, na execução da oficina pedagógica proposta. Para Alves-Mazzotti (1999, p. 147) as pesquisas qualitativas devido a sua diversidade e flexibilidade "não admitem regras precisas, aplicáveis a uma ampla quantidade de casos. Além disso, as pesquisas qualitativas diferem bastante quanto ao grau de estruturação prévia, isto é, quanto aos aspectos que podem ser definidos já no projeto".

Já para Lüdke e André (1986, p.11), "a pesquisa qualitativa supõe contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada, via de regra, através do trabalho intensivo de campo".

Os instrumentos de coleta de dados que utilizaremos nesta pesquisa são: a observação participante, vídeo, questionários, assim como os documentos produzidos pelos alunos na resolução das atividades propostas durante a oficina.

5 OFICINA PEDAGÓGICA

A oficina pedagógica oferecida aos participantes da pesquisa foi divida em três módulos e aplicada em duas reuniões de três horas. No primeiro módulo inicialmente construímos e exploramos intuitivamente as propriedades da Faixa de Möebius. No segundo módulo construímos e exploramos, novamente de forma intuitiva, a Garrafa de Klein. No terceiro módulo, no primeiro momento, propusemos atividades sobre grafos, em que fizemos uso do problema das pontes de Königsberg. No segundo momento deste módulo abordamos o Teorema do Mapa das Quatro Cores e o Teorema de Euler aplicado a Teoria dos Grafos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Topologia, apesar de ser um dos ramos bem recentes da Matemática e, mesmo com seu valor já estudado e demonstrado por vários pesquisadores, conforme demonstrado na pesquisa de Leivas (2009), ela quase não é contemplada na maioria dos cursos de Matemática do Rio Grande do Sul. Ante ao exposto, percebe-se a pouca ênfase dada aos ramos da Matemática de natureza intuitiva e que não são euclidianas. É nesse processo contínuo de aprendizagem que pretendemos inserir, apresentar e investigar sobre as contribuições que as noções Topológicas trazem para o ensino da Geometria.

Cabe ressaltar que nossa pesquisa encontra-se em andamento e, desta forma, os documentos e resultados obtidos com a oficina pedagógica que foi oferecida ao grupo investigado encontra-se em estruturação e análise de dados.

7 REFERÊNCIAS

ALVES-MAZZOTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais:** Pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira, 1999.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Ed. Ciência Moderna Ltda., 2000.

DIENES, Z. P.; GOLDING, E. W. **Exploração do espaço e prática da medição.** São Paulo: E.P.U., 1977.

FEITEIRA, R.; PIRES, P. O ensino da teoria de grafos em Portugal. **Educação e Matemática.** p. 19 – 23, mar/abr. 2011.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, intuição e visualização:** a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

LEIVAS, J. C. P.; CURY, H. N. Transposição didática: Exemplos em Educação Matemática. **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA – RS.** v. 10, n. 20, p. 65-74, 2009.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. **Pesquisa em educação:** Abordagens Qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

PAPPAS, T. **Fascínios da Matemática:** a descoberta da matemática que nos rodeia. Lisboa: Editora Replicação, 1995.

PIAGET, Jean; INHELDER, Bärbel. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

POINCARÉ, H. **O valor da ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

SAMPAIO, J. C. V. **Uma introdução à topologia geométrica:** passeios de Euler, superfícies e o teorema das quatro cores. São Carlos: EdFSCar, 2008. 145 p.