Universidade de Lisboa

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

A Aprendizagem da Trigonometria do Triângulo Rectângulo através da Resolução de Problemas

Catarina de Jesus Valado Miranda

Mestrado em Ensino da Matemática

2010

Universidade de Lisboa

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

A Aprendizagem da Trigonometria do Triângulo Rectângulo através da Resolução de Problemas

Catarina de Jesus Valado Miranda

Relatório orientado pela Professora Doutora Leonor Santos

e pela co-orientadora Professora Doutora Susana Nápoles

Mestrado em Ensino da Matemática

2010

Resumo

Este estudo procura compreender de que modo a resolução de problemas contribui para a aprendizagem da Trigonometria do triângulo rectângulo, em alunos do 9.º ano de escolaridade. Assim, pretendeu responder às seguintes questões: Que estratégias usam os alunos para resolver problemas de Trigonometria do triângulo rectângulo? Quais os conhecimentos sobre a Trigonometria do triângulo rectângulo que os alunos põem em prática na resolução de problemas de Trigonometria do triângulo rectângulo? Quais as dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução de problemas de Trigonometria do triângulo rectângulo?

O estudo segue uma metodologia qualitativa de natureza interpretativa. Os instrumentos de recolha de dados são a observação participante, a recolha documental, nomeadamente diversos documentos escritos produzidos pelos alunos, e um questionário.

Os resultados do estudo evidenciam que os alunos, quando confrontados com problemas que envolvem a Trigonometria do triângulo rectângulo, usam estratégias diferenciadas conforme o tipo de problema. A mais utilizada pelos grupos é identificar a informação pretendida, a informação dada e a informação de que se necessita. Quando possível os alunos preferem recorrer a conhecimentos anteriores, como seja, o teorema de Pitágoras e propriedades de triângulos, do que a conhecimentos trabalhados na unidade. As principais dificuldades passam pela utilização de simbologia matemática.

Palavras-chave: Aprendizagem em matemática, Trigonometria do triângulo rectângulo, resolução de problemas, estratégias de resolução.

Résumé

Cette étude cherche à comprendre comment la résolution du problème contribue pour l'apprentissage de la Trigonométrie du triangle rectangle en élèves de 3ème année. L'étude prétend répondre aux questions suivantes: Quelles sont les stratégies utilisées par les élèves à résoudre des problèmes dans la Trigonométrie du triangle rectangle? Quelles sont les connaissances au sujet de la Trigonométrie du triangle rectangle que les élèves mettent en pratique pour résoudre les problèmes de la Trigonométrie du triangle rectangle? Quelles sont les difficultés rencontrées par les étudiants à résoudre les problèmes de la Trigonométrie du triangle rectangle?

L'étude suit une méthodologie qualitative de nature interprétative. Les instruments de collecte de données sont l'observation participante, le recueil de documents, y compris plusieurs documents écrits produits par les élèves, et un questionnaire.

Les résultats de l'étude montrent que les élèves lorsqu'ils sont confrontés avec problèmes qui impliquant la Trigonométrie du triangle rectangle à utiliser des stratégies différentes selon le type de problème. Les plus largement utilisés par les groupes est d'identifier les informations demandées, l'information données et l'information qui est nécessaire. Lorsque les élèves possibles préfèrent utiliser des connaissances préalables, telles que le théorème de Pythagore et les propriétés des triangles, que les connaissances acquises dans l'unité. Les principales difficultés proviennent de l'utilisation correcte des symboles mathématiques.

Mots-clés: L'apprentissage en mathématiques, la Trigonométrie du triangle rectangle, la résolution de problèmes, les stratégies de résolution.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço à minha Orientadora, a Professora Doutora Leonor Santos, pelas observações, comentários e sugestões, pela simpatia e disponibilidade que sempre manifestou ao longo deste trabalho.

À minha Co-orientadora, a Professora Doutora Susana Nápoles, pelos comentários e sugestões ao nível matemático, pela cordialidade e disponibilidade que sempre manifestou.

Ao professor Cooperante, o Professor Nuno Candeias, pelas observações, e indicações feitas antes e depois da leccionação das aulas e por toda a disponibilidade.

Ao Conselho Executivo da Escola Básica do 2.º e 3.º ciclos Vasco Santana por terem permitido a realização desta experiência.

A todos os alunos da turma do 9.º ano que participaram neste estudo, pelo seu carinho, simpatia e boa disposição que transmitiram ao longo das aulas e por tudo o que aprendi com eles.

Ao José e à Rita pelo companheirismo e por todos os momentos de boa disposição que passamos ao longo deste dois anos de mestrado.

A todos os professores que tive que permitiram que chegasse até aqui.

A todos os meus amigos, pela amizade e carinho com que sempre me apoiaram e principalmente por terem acreditado sempre em mim. Obrigada a todos.

Por último, queria agradecer a todos aqueles que directa ou indirectamente contribuíram para a concretização deste estudo.

Índice

Índice de anexos

Índice de figuras

Índice de quadros

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo são apresentadas as motivações que levaram à realização deste estudo. Enuncio o problema e as questões de investigação e termino com a relevância do estudo.

1.1. Motivação

Desde os primeiros anos de escolaridade que sempre gostei de Matemática. Lembro-me de treinar os números, de fazer contas e de escrever várias vezes a tabuada, no fundo foram sempre actividades rotineiras que encheram páginas e páginas de cadernos. No ensino básico o método não se alterou. Nessa altura, eu e os meus colegas fazíamos campeonatos para ver quem acabava primeiro o problema para depois ir ao quadro resolvê-lo. No ensino secundário recordo-me que ajudava os colegas com maiores dificuldades a resolver os problemas propostos. Actualmente, sei que ao longo do meu percurso académico poucos foram os problemas que resolvi, se calhar porque na altura os professores não davam muita importância a isso ou se calhar nem eles próprios sabiam muito bem o que era um problema. Verdade é que, independentemente de exercícios ou problemas, a minha vontade de ser professora de Matemática sempre foi mais forte. Recordo-me que quando referi ao professor de Matemática do 12.º ano de escolaridade essa minha vontade, ele respondeu-me: "A menina não diga isso, pois não sabe onde se vai meter". Facto é que ingressei no ensino superior na licenciatura de Ensino da Matemática e agora estou aqui prestes a acabar o Mestrado e com uma perspectiva completamente diferente do ensino.

O estágio na escola cooperante este ano lectivo tem sido um período de grandes aprendizagens, uma vez que estou mais próxima dos alunos e, portanto, tenho uma maior noção das dificuldades que estes apresentam, enquanto professora. Uma das grandes dificuldades dos alunos pretende-se com a resolução de problemas e, portanto, o professor nesse aspecto tem um papel crucial uma vez que lhe cabe elaborar os problemas que vai propor à turma, mas também gerir a discussão dos resultados com os alunos. Nem sempre, contudo, é fácil fazê-lo para professores em início de carreira.

Com o intuito de incutir nos alunos o gosto pela resolução de problemas e não limitá-los somente à resolução de exercícios, decidi estudar a aprendizagem da Trigonometria do triângulo rectângulo através da resolução de problemas.

1.2. Problema e questões de investigação

Este estudo procura compreender de que forma a resolução de problemas contribui para a aprendizagem da Trigonometria do triângulo rectângulo em alunos do 9.º ano de escolaridade. Pretende-se, nomeadamente, responder às seguintes questões:

- ✓ Que estratégias usam os alunos para resolver problemas de Trigonometria do triângulo rectângulo?

- ✓ Quais os conhecimentos sobre a Trigonometria do triângulo rectângulo que os alunos põem em prática na resolução de problemas de Trigonometria do triângulo rectângulo?

- ✓ Quais as dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução de problemas de Trigonometria do triângulo rectângulo?

Para procurar responder a estas questões elaborei uma proposta pedagógica que aposta na resolução de problemas. Os alunos irão trabalhar em grupo de 3/4 elementos, na resolução das tarefas propostas e em grupo-turma quando houver a discussão dos resultados. A avaliação irá ser feita com base nas tarefas elaboradas, mas também, num teste escrito a realizar no final da unidade didáctica.

1.3. Relevância do estudo

A partir da década de 80, os currículos começaram a dar maior importância à resolução de problemas. A Renovação do Currículo (APM, 1988) indica que no ensino da Matemática, o mais importante "não é a alteração dos conteúdos nem a introdução de novas tecnologias, mas sim a mudança profunda nos métodos de ensino, na natureza das actividades dos alunos" (p. 57). O que este documento nos transmite é que não é a introdução de novos conteúdos ou de novas tecnologias que fará com que o ensino da Matemática melhore. O professor é o principal responsável pela modificação do ensino, deste modo, compete-lhe reflectir sobre o seu método e sobre as tarefas que propõe aos alunos, evitando o ensino centrado na repetição de fórmulas e algoritmos. Segundo este documento o ensino da Matemática

> não está orientado para desenvolver e avaliar os processos e estratégias de raciocínio, nem as capacidades necessárias para enfrentar e resolver problemas novos, designadamente os hábitos de consultar, cooperar, comunicar, discutir, investigar ou produzir. (p. 18)

Com a introdução do Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 1991a), a resolução de problemas começou a ter outra importância na sala de aula. Contudo, não era uma prática muito comum entre os professores a utilização de tarefas que envolvessem a resolução de problemas. O ensino estava centrado no professor e os alunos viam-no como um transmissor de conhecimentos. A resolução de exercícios era a actividade predominante, onde apenas existia um procedimento que estava certo ou errado (APM, 1988).

Actualmente, com o novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins & Oliveira, 2007), a resolução de problemas atinge o seu "auge", uma vez que é uma capacidade transversal que deve ser desenvolvida em todos os ciclos de ensino. O objectivo deste programa não é centrar o conhecimento no professor, mas sim, nos alunos. O professor desempenha somente o papel de moderador, competindo a ele propor "experiências que proporcionem aos alunos oportunidades que estimulem o seu pensamento" (Ponte *et al*., 2007, p. 30). Os alunos ao resolverem problemas estão a desenvolver o raciocínio matemático, levando a um ensino-aprendizagem mais profícuo. Neste ponto de vista, a realização de tarefas que envolvam a resolução de problemas, podem ajudar os alunos não só a aprender com as conclusões, mas também, com os raciocínios e estratégias dos colegas. Assim é fundamental que no final de cada actividade, o professor propicie um ambiente de discussão entre os vários alunos desenvolvendo um contexto rico e propicio à aquisição de novos conhecimentos.

Nesse sentido foi elaborado este estudo que destaca a resolução de problemas no tema Trigonometria do triângulo rectângulo. Segundo a minha experiência enquanto aluna, o tema Trigonometria do triângulo rectângulo era pouco explorado pelos professores. Recordo que o meu professor de Matemática não dedicou muito tempo a este tema, se calhar por ter sido um dos temas que foi deixado para o final do 3.º período. Também após algumas investigações, verifiquei que não é usual os professores e/ou investigadores debruçarem-se sobre este tema ao contrário do que acontece, por exemplo, com a Álgebra ou a Geometria onde existem vários estudos. Contudo, é um tema importante, pois no nosso quotidiano a Trigonometria está muito presente e é muito utilizada na determinação de distâncias inacessíveis, como por exemplo, na topografia, cartografia e astronomia.

Desta forma, decidi elaborar algumas tarefas que conciliassem a Trigonometria do triângulo rectângulo com a resolução de problemas contextualizados, para que os alunos aprendessem Matemática não só de um modo significativo, mas que estas fossem desafiantes e dessem oportunidade aos alunos para “explorar, investigar e analisar situações discutir entre si e com o professor as várias estratégias e processos de trabalho” (APM, 1988, p. 61).

Assim, julgo pertinente realizar este estudo com alunos do 9.º ano de escolaridade na tentativa de compreender quais os conhecimentos, as estratégias e as dificuldades que os alunos apresentam quando confrontados com problemas de Trigonometria do triângulo rectângulo.

Capítulo 2

Enquadramento da Problemática do Estudo

Neste capítulo é apresentada alguma literatura que orientou este estudo e que é essencial sobre o ensino e aprendizagem da Trigonometria do triângulo rectângulo, através da resolução de problemas.

Primeiramente é feita uma abordagem histórica da Trigonometria, com o intuito de perceber a importância deste tema. Seguidamente, são apresentadas várias interpretações do conceito de problema, explicitando à luz deste estudo qual o conceito a ser desenvolvido. Neste estudo faz-se ainda referência à calculadora, uma vez que é um recurso importantíssimo na resolução de problemas. Para finalizar, é feito um levantamento sobre a importância deste tema nos currículos nacionais.

2.1. A Trigonometria e a resolução de problemas no ensino

2.1.1. Fundamentos da Trigonometria

Muitas vezes os alunos questionam os professores porque é que estudam o tema da Trigonometria, quais as implicações da Trigonometria no seu quotidiano? Conhecendo a origem e a evolução do conceito torna-se mais fácil a nós professores contextualizá-lo de forma a facilitar o processo cognitivo dos alunos com a Trigonometria (Junior, 2006).

A palavra Trigonometria tem origem grega e etimologicamente significa medida de triângulos. É a área da Geometria que estuda as relações entre os lados e os ângulos de um triângulo. A Trigonometria surge associada à Astronomia, pois, ao longo dos tempos, esta ciência foi exigindo instrumentos de cálculo mais complexos, passando de cálculos mais simples e métodos geométricos elementares para métodos mais eficazes que implicavam o estabelecimento de relações entre os lados e ângulos de triângulos rectângulos. Os primeiros conceitos de Trigonometria remontam aos egípcios e aos babilónicos que foram excelentes astrónomos influenciando os povos posteriores. Estes calculavam "razões entre dimensões de lados de triângulos semelhantes" (Junior, 2006, p. 27).

Segundo Junior (2006), os egípcios em 1650 a. C, usavam os cálculos da razão entre o afastamento horizontal e a altura para construir pirâmides, relacionavam também a sombra projectada de uma vara com as horas do dia.

Conta-se que Thales de Mileto calculou a altura de uma pirâmide comparando, à mesma hora, a medida do comprimento da sombra de uma vara com a medida do comprimento da sombra da pirâmide. Admitiu que os raios solares, à mesma hora do dia, incidiam paralelamente nos objectos e utilizou a proporcionalidade entre os valores da altura da pirâmide (P), a determinar, e a da sua sombra (SP) e o comprimento de uma vara (V) colocada na vertical e a respectiva sombra (SV) para determinar a altura da pirâmide como é ilustrado na figura 1.

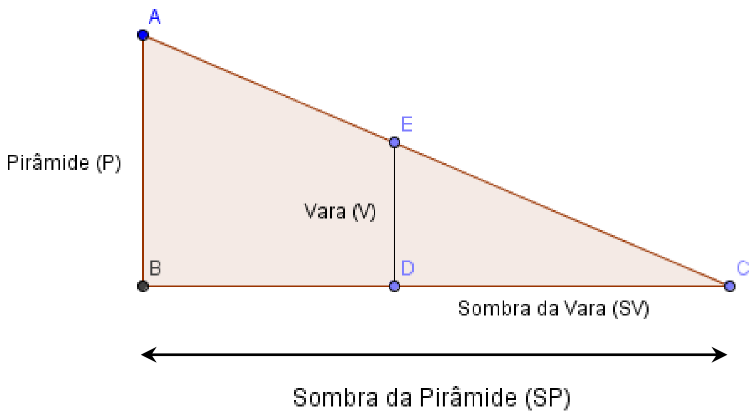


Figura 1. Altura de uma pirâmide

Os triângulos formados são semelhantes pelo critério AA de semelhança de triângulos, pois são rectângulos e têm um ângulo comum. Desta forma, podiam estabelecer a proporção $\frac{P}{SP} = \frac{V}{SV}$ onde V, SP e SV são valores conhecidos, possíveis de serem determinados. Assim, obtinham a altura da pirâmide, a partir do comprimento da sua sombra e da razão entre o comprimento da vara e a respectiva sombra isto é, $P = \frac{V}{SV} \times SP$.

O critério de semelhança AA garante que essa razão só depende do ângulo formado pelas direcções dos raios solares e pela sombra, ou seja, qualquer que seja o comprimento da vara podemos obter sempre a razão $\frac{V}{SV}$ que permitirá calcular a altura da pirâmide.

Segundo Costa (1997), na Grécia, Thales de Mileto com os seus estudos de semelhança, contribuiu com fundamentos teóricos para o desenvolvimento da Trigonometria. Pitágoras que era seu discípulo formalizou o teorema que tem seu nome: "O quadrado da hipotenusa de um triângulo rectângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos" que posteriormente permitiu estabelecer a fórmula fundamental da Trigonometria.

Na China, em 1100 a. C usavam os conceitos de ângulos e de relações trigonométricas do triângulo rectângulo para medir a profundidade e distâncias.

Contudo foram Hiparco de Nicéia e Ptolomeu "os fundadores da trigonometria que, não sendo então ciência autónoma, foi todavia ciência subsidiária dos estudos astronómicos" (Calado, 1960, p. 231).

Segundo Lindegger (2000) e Junior (2006), o astrónomo Hiparco de Nicéia, adoptou a base 60 para contagem e dividiu a circunferência em 360 partes iguais, atribuindo a cada parte o nome de arco de um grau. Pegou nesse arco e voltou-o a dividir em 60 partes iguais, designado cada parte por arco de um minuto. Construiu também, a primeira tabela trigonométrica com valores das cordas de ângulos de 0° a 180°. Os estudos de Hiparco levaram-no à relação entre o comprimento de um arco e o ângulo ao centro correspondente de um círculo arbitrário, o que contribuiu para um avanço enorme da astronomia, conferindo-lhe o título de "Pai da Trigonometria".

A trigonometria surge assim da necessidade de "se possuir uma tabela formada pelos comprimentos das cordas de todos os arcos múltiplos de uma parte alíquota da circunferência" (Calado, 1960, p. 232).

Actualmente, é ensinado nas escolas duas unidades de medida de ângulos: o grau e o radiano, sendo que o grau é a mais utilizada. O radiano é aprendido no ensino secundário e trata-se de uma unidade de medida de ângulos que relaciona a medida de ângulo com a medida de comprimento.

Mais tarde, Ptolomeu relacionou o comprimento da corda com o arco e "forma uma tabela de valores das cordas para arcos de meio em meio grau" (Calado, 1960, p. 232). No século II, Ptolomeu na sua obra Almagesto, inclui uma tabela de cordas que correspondem a diversos ângulos, por ordem crescente e em função da metade do ângulo essa tabela é equivalente a uma tabela de senos. Contudo, a tábua mais antiga sobre senos foi descoberta na Índia. O primeiro aparecimento do seno de um ângulo surgiu no trabalho dos hindus. Os hindus trabalhavam com semi-cordas que chamavam de jiva e que actualmente corresponde ao seno. Então quando efectuavam os cálculos usavam metade da corda de um arco duplo originando assim, a função seno.

A relação da Astronomia com a Trigonometria fez com que a Trigonometria esférica se desenvolvesse mais rapidamente do que a Trigonometria plana, uma vez que era muito utilizada nos cálculos astronómicos e na navegação.

Apesar de os povos antigos utilizarem as razões trigonométricas e fazerem cálculos com elas, só no século XVII, é que surge a palavra co-seno como sendo o seno do complemento de um ângulo.

A descoberta das razões trigonométricas permitiu aos povos o cálculo de distâncias inacessíveis, assim como, aos navegadores que através de instrumentos de medição de ângulos, como o quadrante ou o sextante, conseguiam determinar a distância a que se encontravam da terra, baseando-se na altura da Estrela Polar.

O termo tangente surge em 1583 com Thomas Fincke e, em 1620, Edmund Gunter foi o primeiro a usar o termo co-tangente. Tanto a tangente como a co-tangente foram conceitos importantes para calcular o comprimento da sombra produzida por um determinado objecto, desempenhando assim, um papel fundamental na graduação de relógios de Sol.

Outra das grandes figuras é sem dúvida, Euler que na “Introductio” de 1748 estabeleceu o tratado analítico das funções trigonométricas. Ele usou sistematicamente o círculo trigonométrico de raio unitário e introduziu os conceitos de seno, co-seno e tangente como números ou razões ou coordenadas de pontos, fazendo a transição de razões trigonométricas para funções periódicas.

Com esta descoberta abrem-se as portas da Análise Matemática para a Trigonometria, mas é Fourier com as suas investigações sobre a decomposição de funções periódicas em série trigonométricas convergentes designadas por séries de Fourier que permite obter “valores de seno e de co-seno sem recorrer a construções ou considerações do ponto de vista geométrico” (Lindegger, 2000, p. 62).

Muitos dos fenómenos físicos e sociais que apresentam um comportamento cíclico podem ser modelados usando funções trigonométricas, daí a importância da Trigonometria no estudo da acústica, astronomia, economia, engenharia, medicina etc. Um exemplo de uma situação que pode ser modelada por uma função trigonométrica é a variação da pressão nas paredes dos vasos sanguíneos de um certo indivíduo em função do tempo de colheita. São ainda exemplos de funções periódicas o ciclo menstrual das mulheres, o fenómeno das marés e as fases da lua.

O conhecimento da evolução e da aplicação da Trigonometria, facilita a sua contextualização, conduzindo a um processo de ensino-aprendizagem, que permitirá aos alunos assimilarem melhor os conceitos, encontrando aplicações na resolução de problemas do quotidiano.

2.1.2. Resolução de problemas

Até aos anos 80, a resolução de problemas "não tinha ainda entrado no discurso curricular em Portugal, oficial ou corrente, e a expressão *problem solving* trazida pelos ventos anglo-saxónicos parecia, nesta época, não ter tradução (Guimarães, 2005, p. 153). Em 1982, é realizado um colóquio em homenagem a Sebastião e Silva onde são apresentadas comunicações sobre a resolução de problemas e o seu papel no currículo e na aula de Matemática. Acreditava-se que:

> Os problemas são o instrumento mais poderoso para transformar o estudo da Matemática da coisa rotineira que se faz por obrigação (e por medo de 'chumbar' na coisa viva e estimulante que se faz por gosto. Não será certamente possível abandonar de um momento para o outro o primeiro tipo de ensino e praticar exclusivamente o segundo. Talvez seja uma utópica, um objectivo ideal que na prática nunca será possível alcançar. Mas isso não significa que o professor não possa esforçar-se por conjugar os dois tipos de ensino. (…) Esta é certamente uma das mais urgentes transformações de que está necessitado o ensino da Matemática no nosso país. (Ponte & Abrantes, 1983, p. 202 citado por Guimarães, 2005, p. 152)

Desta forma acreditava-se que os programas estavam vivamente desadaptados, não só para as necessidades dos alunos, mas também, para a sociedade em geral. Com a Renovação do Currículo de Matemática (APM, 1988), a resolução de problemas emerge como uma das orientações curriculares para o ensino da Matemática. Este documento veio abrir caminho aos Novos Planos Curriculares do Ensino Básico e Secundário, aprovados em 1991, contudo, segundo Guimarães (2005, p. 159), "não se tratava ainda dos "programas do nosso contentamento", mas reconhecia-se que continham propostas que muitos professores, em certos casos, já praticavam". Desta forma, é introduzida a resolução de problemas nos currículos nacionais não só nas finalidades mas também nos objectivos gerais estabelecidos para o ensino da Matemática.

Ao longo dos anos, os currículos têm dado grande importância à resolução de problemas como podemos observar pelo exposto. Contudo, a definição de problema não é consensual entre os investigadores desta área.

Para Kantowski (1977, p. 163) "um indivíduo está perante um problema quando se confronta com uma questão a que não pode dar resposta ou com uma situação que não sabe resolver, usando os conhecimentos imediatamente disponíveis".

Segundo Lester (1980), para que uma situação constitua um problema para um determinado indivíduo, é necessário que este conheça a situação, esteja interessado em resolvê-la, não dispondo à partida de um método imediato de resolução e, portanto, tem de fazer várias tentativas para encontrar a solução.

Borasi (1986) apresenta um modelo para classificar diferentes tipos de problemas, a partir da análise de quatro elementos estruturais: o contexto do problema, a formulação do problema, as estratégias que podem ser utilizadas na sua resolução e o conjunto de soluções do problema. Deste modo, Borasi (1986) diferencia sete tipos de problemas:

- Exercício – Não existe contexto, sendo formulado de uma maneira explícita onde as estratégias de resolução são conhecidas (aplicação de regras e algoritmos) conduzindo a uma única solução.

- Problemas de palavras ou *word problems* – Todas as propriedades do exercício se mantêm excepto o contexto que neste caso existe e é explícito.

- Problemas que consistem na prova de uma proposição ou conjectura – Neste caso o contexto é parcialmente definido, sendo necessário o conhecimento de teoremas e de técnicas para provar a conjectura. A formulação do problema é explícita e existem várias estratégias de resolução que levam a uma única solução.

- Problemas tipo puzzle ou *puzzle problems* – Caracterizados por apresentar um contexto explícito que raramente precisa ser explorado e uma formulação que contém toda a informação necessária, onde as estratégias de resolução envolvem sempre uma “ideia luminosa”, conduzindo quase sempre a uma solução única e determinada. Constituem um desafio intelectual para quem os resolve.

- Problemas da vida real – O contexto e a formulação não são completamente explícitos no enunciado, levando o leitor a explorar o contexto do problema de forma a obter informações complementares. As estratégias de resolução passam pela criação ou adaptação de um modelo matemático que traduz a situação, levando à aplicação de diversas técnicas matemáticas, de modo a verificar a sua validade na situação da vida real. Nestes problemas não existe uma única solução, mas sim várias que devem ser confirmadas e validadas.

- Situações problemáticas – O contexto é pouco explícito precisando de ser explorado, além de ser problemático e a formulação vaga. As estratégias de resolução envolvem a exploração do contexto e implicam a reformulação de um ou vários problemas, podendo haver formulação de novos problemas. Neste caso não existe uma solução única.

- Situações ainda não problemáticas – Não existe formulação do enunciado, mas existe um convite à exploração do contexto.

Da análise das diferentes definições de problema, dadas pelos autores anteriormente referidos, podemos verificar que a noção de problema pode ser encarada de diversas maneiras. Segundo Kantowski (1977) e Lester (1980) uma situação pode ser um problema para uma pessoa e não o ser para outra. Neste caso, o foco principal é o indivíduo que lida com uma situação desconhecida para si. Pelo contrário, Borasi (1986) considera que uma situação é um problema, se contiver um conjunto de características que se entendem como problemáticas para um grupo alargado de pessoas, e, portanto, neste caso o foco principal são as características da tarefa.

Segundo Santos (2000), ambas as abordagens são pertinentes, dependendo do contexto em que estamos a trabalhar e dos objectivos que queremos valorizar. Se o objectivo é estudar contextos de aprendizagem, fará mais sentido distinguir quanto às suas características as tarefas a propor aos alunos. Contrariamente, se estamos interessados em estudar uma série de “situações com que se confrontam os seres humanos, fará mais sentido procurar uma noção que contemple de forma decisiva o próprio indivíduo” (pp. 130-131).

Neste estudo, os problemas são utilizados para introduzir e motivar o desenvolvimento do tema da Trigonometria do triângulo rectângulo. Neste caso, entendemos como problema toda a situação para a qual o aluno não dispõe de um caminho imediato para encontrar a solução. O objectivo é levar os alunos a desenvolver estratégias adequadas à resolução de problemas, estimulando o raciocínio do aluno e a sua criatividade na busca da solução. Através desta abordagem, os problemas são valorizados como um meio para aprender Matemática e contribuem para ajudar os alunos em situações da vida futura.

Segundo Borralho (1995, citado por Ribeiro, 2005), existe um conjunto de dez tipos de estratégias gerais que são utilizadas pelos alunos para resolver problemas de Matemática. São elas: “(1) descobrir um padrão; (2) construir uma tabela; (3) dramatizar o problema; (4) utilizar um desenho ou outro modelo; (5) fazer um desenho, um diagrama ou um gráfico; (6) formular e/ou testar uma conjectura; (7) trabalhar do fim para o princípio; (8) seleccionar notação apropriada, reformular o problema; (9) simplificar o problema; (10) identificar a informação pretendida, a informação dada e a informação de que se necessita” (pp. 52-53).

Não existe um único modelo para resolver problemas, contudo o Modelo de Polya (1995) continua a ser a referência quando falamos de resolução de problemas. Este modelo é constituído por quatro fases fundamentais, que são descritas de seguida:

1. *Compreender o problema*

   Nesta fase deve-se compreender e identificar as incógnitas, os dados e as condições a eles impostas. Pode-se desenhar um esquema para ajudar a organizar a informação.

2. *Delinear um plano*

   Nesta fase deve-se pensar num problema semelhante e fazer um paralelismo de um plano já conhecido. Depois, deve-se fazer um diagrama que explique a estratégia de resolução identificando as ferramentas necessárias para a resolução.

3. *Executar o plano*

   É a fase da implementação do plano formulado verificando cada passo da resolução e confirmando se não há erros que afectem a solução final.

4. *Rever os resultados*

   É a fase onde se verificam os resultados obtidos de forma a proceder à validação da solução. Testa-se a consistência dos resultados, considerando casos particulares ou situações limite.

Este modelo é acompanhado por um conjunto de estratégias heurísticas, como seja "explorar analogias", "pensar num problema semelhante mas mais simples", "estabelecer subobjectivos (podendo passar pela decomposição do problema em subproblemas)", "olhar para trás", "examinar casos particulares" e "desenhar esquemas". Estas estratégias formam um conjunto de instrumentos que permitem ao indivíduo resolver problemas.

Os objectivos propostos dentro do grande objectivo geral "Desenvolver a capacidade de resolver problemas", retirados do Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem, para o 3.º Ciclo do Ensino Básico (ME, 1991a) referem que os alunos devem ser capazes de:

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões…)
- Procurar, seleccionar e interpretar informação relativa ao problema;
- Formular hipóteses e prever resultados;
- Seleccionar estratégias de resolução;
- Interpretar e criticar resultados dentro do contexto da situação. (p. 10)

Concluímos assim, que os últimos quatro objectivos vão de encontro ao Modelo de Polya, podendo ser associados respectivamente às seguintes fases: compreender o problema, delinear um plano, executar o plano e rever os resultados.

Hatfield (1978) defende que a resolução de problemas deve ser feita através de métodos heurísticos e caracteriza o ensino da resolução de problemas em três aspectos:

1. O ensino *para a* resolução de problemas onde se analisa o processo de resolução realçando os conceitos e técnicas que os alunos devem saber.

2. O ensino *acerca da* resolução de problemas que está intimamente ligado com o modelo utilizado pelo professor, alertando o aluno para certos procedimentos e estratégias.

3. O ensino *através da* resolução de problemas onde o professor ensina os conteúdos através da resolução de problemas e/ou situações problemáticas.

Este estudo irá incidir sobre o ponto três, uma vez que um dos objectivos do Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 1991a), é dotar os alunos de capacidades para que sozinhos sejam capazes de resolver problemas. Esta perspectiva é também defendida por Polya e Kantowski (1977). Para Polya (1981), os alunos só aprendem a fazer matemática se desenvolverem a capacidade de resolver problemas, logo, o professor tem um papel importante no desenvolvimento dessa capacidade nos alunos.

Não é objectivo deste tipo de ensino, que os alunos só resolvam problemas nas aulas de Matemática, mas sim, que o professor seja capaz de elaborar actividades que constituam para os alunos situações problemáticas, que são necessárias explorar e que despontam diversas formas de raciocínio e processos, como experimentar, discutir, conjecturar e justificar. Deste modo, o ensino através da resolução de problemas, "constituiu um contexto geral de aprendizagem, estritamente ligado ao ambiente de trabalho e à natureza das actividades propostas aos alunos" (Veloso & Leal, 2005, p. 70). Podemos estar a resolver problemas na sala de aula, sem que isso seja explícito para os alunos. O importante é dar aos alunos "oportunidade e tempo para desenvolverem actividades significativas e reflectirem sobre elas" (Veloso & Leal, 2005, p. 79).

Os alunos através da resolução de problemas contactam com situações próximas da realidade, desenvolvendo aspectos importantes da competência matemática. Quando os alunos se confrontam com um problema, podem arranjar várias estratégias para chegar à solução correcta. Nesse aspecto, a calculadora aparece como um instrumento facilitador "aliviando o peso dos cálculos envolvidos no problema e permitindo focalizar a atenção no seu processo de resolução" (Porfírio, 1993, p. 10).

Têm existido vários estudos cujo objectivo é compreender qual o contributo da calculadora na resolução de problemas. Mamede (2001) realizou um estudo com alunos do 4º ano de escolaridade, de forma a perceber qual o papel atribuído à calculadora na resolução de problemas e concluiu que:

> A calculadora parece ter um papel importante na resolução de problemas, quer no estabelecimento e implementação de estratégias de resolução, que implicam a definição de hipóteses e validação das mesmas, quer no desenvolvimento da comunicação, permitindo aos alunos clarificar, organizar, e consolidar ideias, verbalizando os processos de resolução envolvidos nos seus raciocínios. (Mamede, 2001, p. 111)

Segundo Silva (1989), a calculadora contribui para a diversificação de estratégias de resolução de problemas, uma vez que permite fazer muitos cálculos em pouco tempo. O autor refere que permite ainda aos alunos com dificuldades de cálculo que se envolvam no processo de resolução de problemas, facilitando assim a discussão das estratégias, do resultado e de possíveis generalizações.

Reys (1989) apresenta uma perspectiva semelhante. Para a autora, a calculadora ajuda os alunos a desenvolverem a compreensão conceptual, uma vez que estes não estão preocupados na realização dos cálculos.

As calculadoras "facilitam as tarefas de cálculo, mas não compreendem os problemas, não escrevem a expressão de cálculo adequada, não interpretam a solução nem escrevem a resposta apropriada. As calculadoras não compreendem matemática, só executam cálculos eficientes e exactos" (Gilliland, 2002 citado por Mosquito & Ponte, 2008, p. 111). Contudo, proporcionam uma maior liberdade aos alunos, para discutirem as estratégias de resolução assim como os resultados.

2.2. Orientações curriculares

A resolução de problemas assume um papel importante no ensino-aprendizagem da matemática uma vez que à luz do Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 1991a) uma das finalidades é "desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como a memória, o rigor, o espírito crítico e criatividade" (p. 175).

A Organização Curricular e Programas refere que o professor ao desenvolver nos alunos a capacidade de resolver problemas, "proporciona um contexto no qual se constroem conceitos e se descobrem relações" (ME, 1991b, p. 194), permitindo ao aluno contactar com as potencialidades e utilidades da Matemática. A resolução de problemas "estimula o espírito de pesquisa, dando aos alunos oportunidade de observar, experimentar, seleccionar e organizar os dados, relacionar, fazer conjecturas, argumentar, concluir e avaliar" (ME, 1991b, p. 194). Além de que, permite "desenvolver a capacidade de comunicar, a perseverança e o espírito de cooperação" (ME, 1991b, p. 194) dos alunos.

Segundo o documento Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2008), "a resolução de problemas constitui uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática" (p. 57), e portanto, as Normas para a Resolução de Problemas (NCTM, 2008) preconizam que os programas devem preparar os alunos para que sejam capazes de:

1. Construir novos conhecimentos matemáticos através da resolução de problemas;
2. Resolver problemas que surgem em matemática e em outros contextos;
3. Aplicar e adaptar uma diversidade de estratégias adequadas para resolver problemas;
4. Analisar e reflectir sobre o processo de resolução matemática de problemas. (p. 57)

Da mesma forma, o Currículo Nacional do Ensino Básico (ME, 2001a) ao definir as competências a desenvolver nos alunos, refere que estes devem possuir:

> A predisposição para raciocinar matematicamente, isto é, para explorar situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica. (p. 57)

A resolução de problemas é tão importante, que é vista no novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007), como uma capacidade transversal a toda a matemática. Segundo este programa, os alunos devem ser capazes de resolver problemas ou seja, devem ser capazes de:

- ✓ Compreender problemas em contextos matemáticos e não matemáticos e de os resolver utilizando estratégias apropriadas;
- ✓ Apreciar a plausibilidade dos resultados obtidos e a adequação ao contexto das soluções a que chegam;

- ✓ Monitorizar o seu trabalho e reflectir sobre a adequação das suas estratégias, reconhecendo situações em que podem ser utilizadas estratégias diferentes;
- ✓ Formular problemas. (p. 5)

O professor deve, portanto, planear tarefas que incluam problemas, proporcionando aos alunos contextos ricos e diversificados aproveitando "as oportunidades inesperadas, para os usar de modo a cativar os alunos para noções matemáticas importantes" (NCTM, 2008, p. 395). Aquando da resolução de problemas, os alunos devem ter oportunidade para formular, discutir e resolver os problemas. O professor deve encaminhar os alunos nesse processo, levando-os a reflectir sobre os seus raciocínios, mas tendo sempre o cuidado de não estragar a tarefa.

Segundo as Normas para os anos 9.º- 12.º para a Geometria (NCTM, 2008), os alunos deverão utilizar relações trigonométricas para determinar comprimentos e amplitudes de ângulos, assim como, resolver problemas que surjam em matemática e em outros contextos.

O NCTM (2008) refere que "os problemas de aplicação podem proporcionar contextos ricos quer para a utilização de ideias geométricas, quer para a prática na modelação e resolução de problemas" (p. 369). Desta forma, indica que o tema Trigonometria do triângulo rectângulo proporciona contextos ricos de aprendizagem, pois é bastante útil para resolver uma diversidade de problemas práticos.

Além da resolução de problemas, o Programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 1991a) incentiva o uso da calculadora nas salas de aula. Segundo o programa, no que diz respeito às capacidades e aptidões, os alunos devem "utilizar adequadamente a calculadora e sempre que possível meios informáticos tirando partido das suas potencialidades" (p. 11). Salienta-se igualmente a importância deste recurso no Currículo Nacional do Ensino Básico (ME, 2001a). Segundo este documento, os alunos devem utilizar a calculadora na resolução de problemas, nas actividades de investigação e nos projectos. Além que, "todos os alunos devem aprender a utilizar não só a calculadora elementar mas também, à medida que progridem na educação básica, os modelos científicos e gráficos" (p. 71).

Actualmente, o novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007) insiste na importância e obrigatoriedade deste recurso:

> Ao longo de todos os ciclos, os alunos devem usar a calculadoras e computadores na realização de cálculos complexos, na representação de informação e na representação de objectos geométricos. (p. 9)

Destaca ainda que é um recurso com muitas potencialidades, servindo de apoio à resolução de problemas e às tarefas de investigação, evitando a perda de tempo em cálculos demorados:

> O seu uso é particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações, casos em que os cálculos e os procedimentos de rotina não constituem objectivo prioritário de aprendizagem, e a atenção se deve centrar nas condições da situação, nas estratégias de resolução e na interpretação e avaliação dos resultados. (Ponte *et al*., 2007, pp. 9-10)

Capítulo 3

Proposta Pedagógica

Este capítulo inicia-se com a caracterização da escola e dos alunos que foram objecto de estudo. É realizada uma ancoragem da Trigonometria, ao longo do programa de Matemática e explicitados os principais conceitos matemáticos envolvidos no estudo, da unidade didáctica Trigonometria do triângulo rectângulo. De seguida, são explicitadas e justificadas as principais opções tomadas aquando da elaboração da planificação da unidade, visando os principais objectivos das tarefas, a metodologia de trabalho e a forma de avaliação. Por fim, é feita uma breve descrição das aulas realizadas.

3.1. Caracterização da escola

A escola onde o estudo foi desenvolvido pertence ao Agrupamento de Escolas Vasco Santana, o qual é constituído por seis estabelecimentos de ensino, que contemplam os três níveis de ensino básico e pré-escolar:

- Escola Básica do 2.º e 3.º ciclos Vasco Santana
- Escola Básica do 1.º ciclo da Azenha
- Escola Básica do 1.º ciclo da Amoreira
- Escola Básica do 1.º ciclo Professora Maria Costa
- Escola Básica do 1.º ciclo e Jardim de Infância João Villaret
- Escola Básica do 1.º ciclo Eça de Queirós

A escola cooperante é a Escola Básica do 2.º e 3.º ciclos Vasco Santana, situada no Bairro dos Bons Dias, freguesia da Ramada, concelho de Odivelas, numa zona urbana, marcada por um acentuado crescimento demográfico. Devido a esse facto, a escola edificada para uma população de 750 alunos encontra-se superlotada com cerca de 930 alunos, obrigando a um acréscimo de turmas nomeadamente no 2.º ciclo. Segundo o projecto educativo de escola, os alunos provêm na maioria das classes "média alta, média, média baixa e baixa, embora haja alguns casos sociais graves e problemáticos" (projecto educativo, p. 9).

A escola iniciou as suas funções no ano lectivo de 1997/98, com menos de metade das instalações concluídas. Actualmente dispõe de dois blocos interligados, de dois pisos, com 16 salas de aula normal, 6 salas para a área de Expressões e 4 salas/laboratório de Ciências Físico-Naturais. Dispõe ainda, de diversas salas destinadas a outros serviços englobando um refeitório e um buffet. No espaço exterior existem um pavilhão gimnodesportivo e um campo de jogos com o respectivo balneário, onde se realizam as actividades de Educação Física. Havendo também, um anfiteatro descoberto e várias zonas verdes e de lazer. Em 2004 passou a sede do Agrupamento de Escolas Vasco Santana.

O corpo docente é composto por 103 professores, sendo o grupo disciplinar de matemática constituído por sete professores com idades compreendidas entre os 27 e os 53 anos. Destes, três têm redução de horário devido a pertencerem à direcção da escola, um dos professores tem mais de 32 anos de serviço, cinco têm entre 8 e 12 anos de serviço e um dos professores tem apenas 1 ano de serviço. Em relação à antiguidade na escola, a professora que desempenha o cargo de directora encontra-se na escola desde a sua abertura há 13 anos, quatro professores permanecem ali entre os 2 e os 10 anos, havendo só dois professores que se encontram a leccionar pela primeira vez.

Os Encarregados de Educação, embora não revelem um empenho organizado no estudo dos seus filhos, comparecem de um modo geral, às reuniões de Encarregados de Educação, bem como quando solicitados.

3.2. Caracterização da turma

A turma é constituída por 20 alunos, 9 raparigas e 11 rapazes com idades compreendidas entre os 13 e os 15 anos. Existem dois alunos que apresentam necessidades educativas especiais (NEE), abrangidos pelo Decreto-lei n.º 3 de 2008. Segundo o Projecto Curricular de Turma (PCT), existem três alunos que apresentam no seu percurso escolar uma retenção. Em relação ao prosseguimento de estudos, 16,7% dos alunos pretendem seguir o ensino profissional, 22,2% expressam a vontade de acabar o 12.º ano de escolaridade e 61,1% pretendem ingressar no ensino superior. Os encarregados de educação são na sua maioria as mães (90%), cujas habilitações académicas se expressam no quadro 1:

Quadro 1. Habilitações académicas do Encarregado de Educação

Habilitações Académicas	Nº de Encarregados de Educação
4.ª classe ou inferior	2
9.º ano de escolaridade	5
11.º ano de escolaridade	1
12.º ano de escolaridade	8
Licenciatura	3
Doutoramento	1

No mesmo documento, em relação às disciplinas preferidas pelos alunos, onze indicam a Educação Física, oito a Matemática e seis o Francês. Em relação às disciplinas que os alunos apresentam maiores dificuldades, sete elegem o Português, seis o Inglês e quatro a Matemática. Existem treze alunos que praticam uma modalidade desportiva.

No que compete aos modos de trabalho pedagógico, catorze alunos elegem como preferencial o trabalho de grupo ou de pares, onze preferem a utilização de TIC e sete optam pela exposição de temas à turma.

Segundo o Projecto Curricular de Turma (PCT), os professores detectaram, através da avaliação diagnóstica, que a turma apresenta falta de hábitos de trabalho, dificuldades na resolução de problemas e na aplicação de técnicas, assim como, dificuldades de raciocínio lógico e cálculo. Existe ainda falta de autonomia no acesso, selecção e análise de informação necessária ao desenvolvimento dos trabalhos propostos.

Ao nível do aproveitamento, à disciplina de Matemática, considero que a turma é razoável havendo alguns elementos desmotivados que apresentam muitas dificuldades e outros com bons desempenhos, como podemos constatar no quadro 2. Segundo o professor cooperante “não é uma turma muito boa comparada com outras que existem na escola, contudo é uma turma que apresenta um aproveitamento igual à maioria das turmas que se encontram nas escolas. Nesta turma destacam-se a Catarina e o Rafael como os melhores alunos".

Quadro 2. Classificação obtida nos dois primeiros períodos à disciplina de Matemática

	Classificação da disciplina de Matemática				
	Nível 1	**Nível 2**	**Nível 3**	**Nível 4**	**Nível 5**
1.º Período	-	4	10	6	-
2.º Período	-	4	9	5	2

Do 1.º período para o 2.º manteve-se o número de alunos com nível 2. Verificou-se que o número de alunos com nível 3 diminuiu, tal como o número de alunos com nível 4. Contudo o número de alunos com nível 5 aumentou. Da análise do quadro concluo que os alunos revelaram um progresso no aproveitamento escolar, que segundo o professor cooperante poderá dever-se ao facto de no 2.º período terem acabado os capítulos da Álgebra, que são capítulos onde os alunos apresentam algumas dificuldades.

Ao nível do comportamento à disciplina de Matemática, posso dizer que a turma é calma, havendo alguns momentos de agitação por parte de alguns elementos masculinos. Quando questionado sobre o comportamento da turma o professor cooperante refere que "a turma quando veio para o 7.º ano era muito agitada, devido a alguns elementos terem vindo de várias turmas diferentes, onde era normal comportarem-se mal. Contudo, a turma tem melhorado bastante e considero que é uma turma típica de alunos adolescentes".

Da observação directa das aulas de Matemática, considero a turma interessada onde os alunos reagem com empenho aos desafios propostos, quer seja concursos de línguas, campeonatos entre turmas de supertmatik, olimpíadas do ambiente entre outros.

No final do 2.º período, a directora de turma informou que os alunos não estão inscritos em nenhuma actividade extracurricular. No conselho de turma, as maiores dificuldades detectadas nos alunos são ao nível dos conhecimentos e da expressão escrita. No final deste período existem seis alunos que apresentam três ou mais negativas. No conselho de turma do 2.º período, os professores decidiram que ao nível do aproveitamento, a turma é pouco satisfatória, uma vez que existem sete alunos com planos de recuperação e que ao nível do comportamento é satisfatória.

3.3. Ancoragem da Trigonometria no programa de Matemática

Ao longo do 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico, os alunos vão adquirindo noções básicas como segmento, ângulo e triângulo que irão ser desenvolvidas ao longo do seu percurso escolar e que permitirão uma maior compreensão do tema Trigonometria.

Segundo o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 1991a), os alunos começam no 7.º ano de escolaridade a trabalhar intuitivamente a noção matemática de forma e semelhança de figuras. Neste tema observam e constroem ampliações e reduções de figuras, usando diverso material de modo a constatarem "experimentalmente que os ângulos se mantêm e os comprimentos são proporcionais" (p. 22). No caso particular dos triângulos, é desejável que os alunos sejam capazes de reconhecer que dois triângulos são semelhantes, se tiverem dois ângulos iguais e posteriormente, utilizarem esse resultado na resolução de problemas, que impliquem a determinação da altura de árvores, candeeiros e edifícios. No tema "construção de triângulos", os alunos aprendem a desigualdade triangular e os critérios de igualdade de triângulos de forma intuitiva, através da construção de triângulos. Ao fazerem essa construção verificam que em triângulos iguais, os elementos correspondentes, isto é lados e ângulos são iguais. Os critérios de igualdade de triângulos e as relações entre ângulos de lados paralelos, ângulo internos e ângulos externos de um triângulo são utilizados na justificação de raciocínios sobre figuras geométricas. As relações entre ângulos de lados paralelos são aceites com base na experimentação, e a partir delas, os alunos "poderão justificar ou acompanhar a justificação das propriedades relativas ao ângulo externo e à soma dos ângulos internos de um triângulo (ME, 1991a, p. 26).

Em relação ao 8.º ano de escolaridade, o programa preconiza a resolução de puzzles geométricos, como por exemplo o Tangram, que permite aos alunos contactar e conhecer melhor figuras geométricas básicas por composição e decomposição, com o objectivo de dar a conhecer, aos alunos, as propriedades e as relações que se podem estabelecer entre os vários elementos das figuras. Desta forma, surge a demonstração do Teorema de Pitágoras que poderá ser feita por decomposição de um quadrado. É nesta altura que começam a surgir os termos "hipótese", "tese", "teorema" e "demonstração" no vocabulário matemático dos alunos. É recordada a noção de semelhança, alargando o conceito à semelhança de triângulos, onde são estudados de uma forma intuitiva, recorrendo à construção, os critérios de semelhança de triângulos (LLL, LAL, LAA). De modo a aplicar estes conhecimentos é sugerido pelo programa que o professor proponha aos alunos problemas tais como "calcular a altura de um candeeiro de rua, com o auxílio de uma estaca colocada perpendicularmente ao solo, medindo as respectivas sombras" (ME, 1991a, p. 39). São também abordados problemas envolvendo distâncias entre dois pontos, que permitem identificar e reconhecer conjuntos de pontos, como a circunferência e a mediatriz de um segmento de recta.

No 9.º ano de escolaridade é iniciado o estudo da circunferência e das propriedades relativas a ângulos ao centro, inscritos, arcos e cordas que se verificam experimentalmente, sendo utilizadas em raciocínios sobre figuras. Neste ano de escolaridade, surge pela primeira vez uma unidade didáctica dedicada à Trigonometria. Esta unidade é designada por Trigonometria do triângulo rectângulo e permite aos alunos fazer um estudo das razões trigonométricas de ângulos agudos, a partir de triângulos rectângulos semelhantes. Estudam-se algumas relações entre as razões trigonométricas, nomeadamente a fórmula fundamental da Trigonometria e a fórmula que relaciona as três razões trigonométricas (seno, co-seno, tangente), além de serem propostos vários problemas como "determinar valores aproximados do apótema de um hexágono regular, conhecido o lado, e/ou determinar valores aproximados do lado de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência, conhecido o raio" (ME, 1991a, p. 60) e determinar distâncias inacessíveis como a altura de edifícios, janelas ou árvores.

Segundo o Programa de Matemática A para o Ensino Secundário (ME, 2001b), um dos temas que é estudado pelos alunos do 10.º ano de escolaridade é a "Geometria Analítica". Neste tema, os alunos estudam referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no plano e no espaço. Surgem novas noções de "referencial", "coordenadas" e "vectores". Aparecem as correspondências entre o plano e $\mathbb{R}^2$ e entre o espaço e $\mathbb{R}^3$, além de se trabalharem as "equações de rectas/planos paralelos a eixos/planos coordenados ou bissectrizes/planos bissectores de quadrantes/octantes" (ME, 2001b, p. 26).

No 11.º ano de escolaridade, há uma continuidade da geometria estudada no ano anterior e surge uma unidade didáctica denominada, "Geometria no Plano e no Espaço II", onde os alunos aplicam muitos dos conhecimentos que adquiriram anteriormente sobre Trigonometria e geometria do 10.º ano de escolaridade. Nesta unidade generaliza-se a noção de ângulo e arco, bem como das razões trigonométricas. Surge uma nova medida de ângulo, o radiano. São estudadas as funções seno, co-seno e tangente no círculo trigonométrico, além de equações trigonométricas simples que os alunos devem ser capazes de resolver.

No 12.º ano de escolaridade existe uma unidade ligada somente à Trigonometria, que se denomina por "Trigonometria e números complexos". Os objectivos desta unidade são realizar um estudo intuitivo das funções trigonométricas "com base no círculo trigonométrico, tanto a partir de um gráfico particular, como usando calculadora gráfica ou computador" (ME, 2002, p. 7); um estudo intuitivo de $\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x}$; cálculo das derivadas das funções trigonométricas, assim como, a utilização de funções trigonométricas na modelação de situações reais. Relativamente aos números complexos é desejável que os alunos representem números complexos, tanto na forma trigonométrica, como na algébrica, e sejam capazes de fazer a passagem de uma para outra forma. Esta unidade encerra assim o estudo da Trigonometria, que foi realizado ao longo do ensino secundário.

3.4. Conceitos matemáticos envolvidos

No ensino básico, o estudo da Trigonometria restringe-se à Trigonometria do triângulo rectângulo, ou seja, os ângulos que irão ser alvo de estudo são os ângulos agudos, isto é, ângulos que estão compreendidos entre 0º e 90º exclusive.

Normalmente, no ensino básico os conceitos e propriedades essenciais para o desenvolvimento da Trigonometria são feitos de uma forma, elementar e intuitiva sem se estabelecer uma ligação com os estudos geométricos anteriores. Cabe ao professor verificar se os alunos têm os pré-requisitos necessários que lhes permitam desenvolver novos conceitos, estabelecendo as conexões necessárias.

Nesta unidade é fundamental começar por recordar alguns conceitos importantes para o estudo da Trigonometria. É o caso da definição de ângulo e de triângulo.

Podemos definir ângulo como a porção do plano compreendida entre duas semi-rectas com a mesma origem. As semi-rectas são os lados do ângulo e a origem das semi-rectas é o vértice do ângulo. De acordo com a figura 2, temos $\dot{A}B$ e $\dot{A}C$ como os lados do ângulo e o ponto A como o vértice do ângulo.

Sempre que nos referirmos a ângulos estamos a considerar os ângulos convexos. Na figura 1 o ângulo convexo corresponde a α. O outro ângulo designado por β chama-se ângulo côncavo.

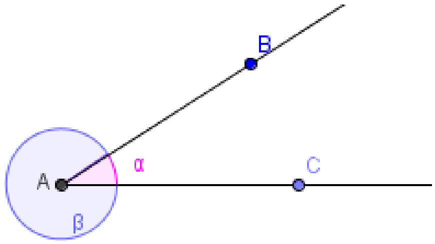


Figura 2. Ângulo

Um triângulo é toda a figura plana limitada por três segmentos de recta consecutivos e não coincidentes, em que cada dois segmentos contêm um extremo comum. Os segmentos são os lados do triângulo e os extremos dos segmentos denominam-se por vértices. Desta forma, $[AB], [BC]$ e $[CA]$ são os lados do triângulo e A, B e C são os vértices, conforme ilustra a figura 3.

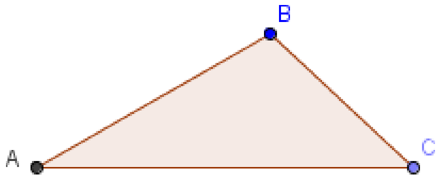
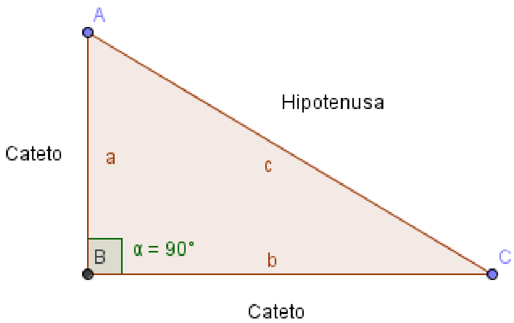


Figura 3. Triângulo

Este estudo é centrado em triângulos que contêm um ângulo interno de 90º e se designam por triângulos rectângulos. Associados a estes triângulos está o famoso Teorema de Pitágoras (Figura 4) que é enunciado em seguida:



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\Downarrow$$

Num triângulo rectângulo, a medida do quadrado da hipotenusa é igual à soma das medidas dos quadrados dos catetos

Figura 4. Teorema de Pitágoras

Deve ainda ser do conhecimento dos alunos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º e que existem três critérios de semelhança de triângulos que passo a enunciar:

- ✓ Critério AA: Dois triângulos são semelhantes se tiverem dois ângulos respectivamente iguais.
- ✓ Critério LAL: Dois triângulos são semelhantes se tiverem dois lados proporcionais e o ângulo por eles formado igual.
- ✓ Critério LLL: Dois triângulos são semelhantes se os três lados de um, forem proporcionais aos três lados do outro.

Após o conhecimento destes conceitos, os alunos estarão em condições de iniciar o estudo das razões trigonométricas de ângulos agudos. Consideremos um triângulo rectângulo $[ABC]$ que possui um ângulo β, como mostra a figura 5:

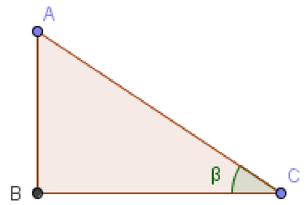


Figura 5. Triângulo rectângulo

Será que se considerarmos outros triângulos as razões entre os seus lados, isto é, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ se mantêm, se o ângulo β se mantiver?

Passando paralelas ao lado $[AB]$ do triângulo rectângulo $[ABC]$, obtemos triângulos semelhantes como ilustra a figura 6:

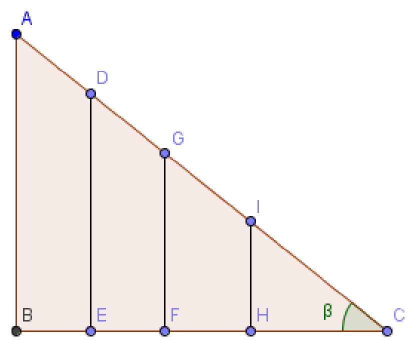


Figura 6. Triângulos semelhantes

Pelo critério de semelhança AA os triângulos são semelhantes entre si pois ambos são rectângulos e todos têm em comum o ângulo β. Desta forma, os lados dos triângulos são directamente proporcionais e podemos escrever as seguintes igualdades:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{GF}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{IH}}{\overline{IC}}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{HC}}{\overline{IC}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{GF}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{IH}}{\overline{HC}}$$

Estas razões são uma função do ângulo β, independentemente da medida dos lados dos triângulos e portanto, são constantes para o ângulo β. Se considerarmos um ângulo diferente as razões também serão diferentes. Desta forma as razões só dependem do ângulo e não dos comprimentos dos lados dos triângulos.

Estas razões como funções do ângulo β designam-se por razões trigonométricas:

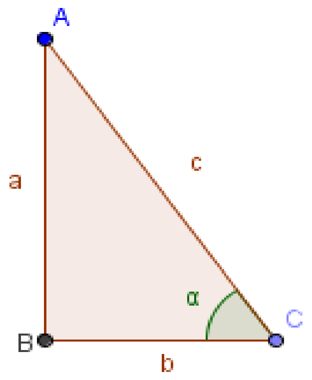
$$sen\ \beta = \frac{Cateto\ oposto\ a\ \beta}{Hipotenusa} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$cos\ \beta = \frac{Cateto\ adjacente\ a\ \beta}{Hipotenusa} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$$tg\ \beta = \frac{Cateto\ oposto\ a\ \beta}{Cateto\ adjacente\ a\ \beta} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

É igualmente importante, os alunos compreenderem que valores podem tomar o seno e o co-seno de um ângulo agudo de um triângulo rectângulo. Como os catetos de um triângulo rectângulo são menores do que a hipotenusa, o seno e o co-seno tomam valores maiores que 0 e menores que 1. Também é importante explicar a relação entre as razões trigonométricas de ângulos complementares, observando que, num triângulo rectângulo, se um cateto se opõe ao ângulo α, então ele é adjacente ao complementar de α, pelo que $sen\ \alpha = \cos(90° - \alpha)$.

Existem ainda duas fórmulas importantes no estudo da Trigonometria no âmbito do ensino básico. Uma delas é a fórmula fundamental da Trigonometria, e que relaciona o seno e o co-seno de um mesmo ângulo. No caso dos ângulos agudos ela pode ser obtida através do teorema de Pitágoras como se exemplifica de seguida.



Considerando os elementos do triângulo podemos calcular o seno e o co-seno:

$$sen\ \alpha = \frac{a}{c} \Leftrightarrow a = c \times sen\ \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b = c \times \cos \alpha$$

Pelo teorema de Pitágoras sabemos que $a^2 + b^2 = c^2$ substituindo agora pelas equações acima obtemos:

$$(c \times sen\ \alpha)^2 + (c \times \cos \alpha)^2 = c^2 \Leftrightarrow c^2 \times sen^2\alpha + c^2 \times cos^2\alpha = c^2$$

$$\Leftrightarrow\ c^2 \times (sen^2\alpha + cos^2\alpha) = c^2 \Leftrightarrow\ sen^2\alpha + cos^2\alpha = \frac{c^2}{c^2}$$

$$\Downarrow$$

Surge assim a fórmula fundamental da Trigonometria

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Esta fórmula é particularmente útil quando não se conhece uma das razões e quer-se descobrir a outra.

A outra é a fórmula que relaciona as três razões trigonométricas isto é a tangente de um ângulo é igual ao quociente entre o seno e o co-seno desse ângulo, ou seja:

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos \alpha}$$

Todos estes conceitos, formulados e estudados para ângulos agudos, são fundamentais para o estudo das funções trigonometrias no ensino secundário.

3.5. Planificação da unidade de ensino

De acordo com a planificação anual do professor cooperante, estão definidos 5 blocos de 90 minutos para o ensino da unidade didáctica Trigonometria do triângulo rectângulo. Como pretendia no final do estudo avaliar os conhecimentos dos alunos foi-me cedido mais um bloco de 90 minutos para o efeito. Desta forma, as aulas tiveram início no dia 9 de Março de 2010 e prolongaram-se até ao último dia do 2.º período de uma forma descontínua, conforme observamos no quadro 3:

Quadro 3. Distribuição das fichas pelas várias aulas

Aulas	Tarefas	Duração (minutos)
9/3/2010	Ficha de trabalho 1	45 min + 45 min
10/3/2010	Ficha de trabalho 2	90 min
12/3/2010	Ficha de trabalho 3	90 min
17/3/2010	Ficha de trabalho 4	90 min
23/3/2010	Ficha de trabalho 5 Questionário	45 min + 45 min
26/3/2010	Teste	60 min

A planificação só foi possível ser cumprida neste curto espaço de tempo, dado a escola dispor de um tempo lectivo semanal adicionar para a disciplina de Matemática designado por Estudo da Matemática. Mas também pela disponibilidade da professora que lecciona o Estudo Acompanhado que me cedeu duas das suas aulas nos dias 9/3 e 23/3 e que coincidiram com os dias da visionação das aulas por partes das professoras orientadoras. Assim, a carga horária da disciplina é de cinco tempos lectivos semanais, distribuídos por dois blocos de 90 minutos e um tempo de 45 minutos. Não foi possível leccionar a unidade de uma forma contínua, por estar agendado o teste de Matemática para o dia 19 e o professor cooperante necessitar de uma aula extra para fazer revisões.

Esta proposta pedagógica destina-se a alunos do 9.º ano de escolaridade e contempla o estudo da unidade didáctica, cujo tema é a Trigonometria do triângulo rectângulo. Este tema está inserido no tópico de Geometria, que se encontra no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 1991a). Segundo o programa, uma das finalidades desta unidade é realizar um estudo das razões trigonométricas de ângulos agudos, a partir de triângulos rectângulos semelhantes, assim como, descobrir estratégias adequadas à resolução de novos tipos de problemas, estando alguns ligados a questões do quotidiano ou à astronomia.

Com base nestas orientações foi elaborada a planificação da unidade (Anexo 2) que tem como objectivos específicos, o desenvolvimento das capacidades de:

- ✓ Determinar razões trigonométricas de um dado ângulo agudo (por construção, utilizando tabelas, usando a calculadora);
- ✓ Determinar um ângulo agudo conhecida uma das suas razões trigonométricas;
- ✓ Determinar uma razão trigonométrica de um ângulo agudo, conhecida outra;
- ✓ Procurar estratégias adequadas para determinar distâncias a locais inacessíveis.

Durante a sua concretização os planos de aula sofreram alguns ajustes, pois após a ficha de trabalho 2, verificou-se que os alunos necessitavam de alguma destreza de cálculo e, nesse sentido, foi proposto pelo professor cooperante realizar alguns exercícios do manual e alguns problemas simples, antes de continuar para a ficha seguinte, de forma a consolidar conhecimentos.

O principal objectivo deste estudo é compreender de que modo a resolução de problemas contribui para a aprendizagem da Trigonometria do triângulo rectângulo. Nesse sentido construi cinco fichas de trabalho que se encontram em anexo, além de terem sido realizados alguns exercícios e problemas do manual adoptado pela escola.

3.5.1. Tarefas

Considerando a importância da diversificação de tarefas na aprendizagem dos alunos, foram elaboradas cinco fichas de trabalho, com recurso a manuais escolares do 9.º ano de escolaridade. Posteriormente, as tarefas foram analisadas e discutidas com as professoras orientadoras, que sugeriram algumas alterações. Após a reunião, foram eliminadas algumas tarefas por não terem um carácter problemático e foram reformuladas e adaptadas outras no sentido de as simplificar. Na elaboração das tarefas, houve a preocupação de ir ao encontro dos conteúdos e objectivos presente no Programa de Matemática para o 9.º ano de escolaridade.

As tarefas elaboradas têm diferentes níveis de dificuldade, permitindo que os alunos coloquem em prática os conhecimentos adquiridos, conduzindo a uma melhor compreensão dos conceitos.

As tarefas foram organizadas e apresentadas aos alunos, através de cinco fichas de trabalho (Anexo 4) que contemplaram três momentos distintos: a introdução da tarefa, a sua exploração em pequenos grupos e depois a sua posterior discussão com toda a turma.

Em algumas aulas, foi ainda utilizado o manual escolar, quer na resolução de alguns exercícios e problemas, quer na consulta de tabelas de valores naturais. O manual foi especialmente útil na resolução de exercícios e problemas para trabalho de casa.

Seguidamente são apresentados alguns dos aspectos gerais de cada ficha de trabalho:

Ficha de trabalho 1 – Descobrindo razões trigonométricas

Para não introduzir o capítulo das razões trigonométricas de uma forma expositiva, elaborei esta tarefa com a finalidade de levar os alunos a estabelecer conexões entre as noções já aprendidas anteriormente e os novos conceitos.

A tarefa que é apresentada visa a introdução dos conceitos de seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo, assim como, a utilização correcta das terminologias de cada uma das razões trigonométricas. Com ela pretendia-se que os alunos construíssem três triângulos rectângulos diferentes mas que todos tivessem em comum um ângulo de 45º e investigassem o que obtêm nas razões: cateto oposto/hipotenusa, cateto adjacente/hipotenusa e cateto oposto/cateto adjacente de forma a formularem uma conjectura e posteriormente uma generalização dos resultados.

O objectivo desta tarefa é levar os alunos a compreender a origem das razões trigonométricas, mas também dar a conhecer a notação para comunicarem matematicamente. Os alunos devem ainda, saber calcular o valor de qualquer razão trigonométrica de um ângulo agudo, de um triângulo rectângulo, conhecendo as medidas dos seus lados. É ainda objectivo desta tarefa promover o raciocínio matemático, formulando e testando conjecturas e generalizações.

A exploração desta ficha de trabalho foi feita com o apoio de algum material, nomeadamente, papel brando, transferidor, régua e calculadora.

Ficha de trabalho 2 – Os telhados das casas

A tarefa 1 pretende que os alunos utilizem conhecimentos anteriores como a soma dos ângulos internos de um triângulo e o teorema de Pitágoras para que depois deduzam as razões trigonométricas do ângulo de 30º e 60º. O objectivo desta tarefa é levar os alunos a compreender como se obtêm os valores correspondentes às razões trigonométricas do ângulo de 30º e 60º.

A tarefa 2 é simplesmente um exercício, cujo objectivo é mostrar desde já aos alunos que é fácil memorizar as três razões trigonométricas dos ângulos de 30º, 45º e 60º.

As tarefas 3, 4 e 5 são problemas simples com contexto real que visam a aplicação dos conhecimentos adquiridos na ficha de trabalho 1. Com estas tarefas pretende-se que os alunos sejam capazes de interpretar diferentes situações, onde o objectivo principal é identificarem a razão trigonométrica que está em jogo e, a partir daí, serem capazes de determinar o ângulo agudo conhecida a razão trigonométrica.

Ficha de trabalho 3 – Os triângulos rectângulos

As tarefas apresentadas têm como objectivo levar os alunos a traduzir enunciados de problemas da linguagem corrente, para linguagem matemática, assim como, serem capazes de estabelecer estratégias adequadas, interpretando e criticando a solução no contexto do problema.

A tarefa 1 é um problema da vida corrente onde os alunos têm que interpretar o enunciado e estabelecer uma estratégia adequada de resolução. Os alunos podem, por exemplo, optar por considerar um triângulo e depois identificar a razão trigonométrica que está subjacente calculando assim a hipotenusa e multiplicam por dois para determinarem o comprimento total da rampa. Podem também considerar simplesmente um triângulo único depois identificar a razão trigonométrica que está subjacente e determinam o comprimento da rampa.

A tarefa 2 é um problema contextualizado, em que os alunos devem ser capazes de interpretar a situação. O objectivo é perceber qual a razão trigonométrica a utilizar e posteriormente determinar o ângulo agudo pretendido.

A tarefa 3 é um problema geométrico que implica a utilização de vários conhecimentos tais como o teorema de Pitágoras, a soma dos ângulos internos de um polígono e o cálculo de áreas de polígonos. Também neste problema os alunos têm que interpretar a figura e adoptar uma estratégia de resolução. Os alunos podem, por exemplo, começar por calcular o ângulo alfa do triângulo e nesse caso podem seguir duas estratégias diferentes. Ou aplicam o facto de que num hexágono os triângulos são todos equiláteros ou aplicam o conhecimento que um ângulo giro têm 360º e dividem por 12 ângulos. Posteriormente calculam a altura do triângulo recorrendo a uma razão trigonométrica e depois voltam a ter várias estratégias de resolução. Podem optar por calcular a área de um triângulo e depois multiplicam por seis uma vez que o hexágono é constituído por seis triângulos equiláteros. Podem também considerar o hexágono dividido em doze triângulos e nesse caso multiplicam por doze.

Na tarefa 4 é também um problema geométrico onde os alunos novamente com os dados fornecidos têm que seguir uma estratégia de resolução. Os conhecimentos aplicados neste problema são a soma dos ângulos internos de um polígono e o cálculo de áreas. Neste problema os alunos podem adoptar a estratégia de determinar a altura do paralelogramo através de uma razão trigonométrica e depois aplicam a fórmula da área do paralelogramo ou podem dividir o paralelogramo num rectângulo e em dois triângulos e, posteriormente, calculam a altura do paralelogramo e, seguidamente, as respectivas áreas, caso não se lembrem da fórmula do paralelogramo.

Ficha de trabalho 4 – Distâncias inacessíveis

O objectivo desta ficha de trabalho é levar os alunos a resolver problemas que envolvem distâncias inacessíveis utilizando razões trigonométricas. Os alunos devem ser capazes de traduzir o enunciado do problema da linguagem corrente para a linguagem matemática, adoptando estratégias adequadas de resolução, de forma a encontrarem uma solução para o problema. Os alunos devem, ainda, saber interpretar e criticar a solução encontrada no contexto do problema.

As tarefas 1 e 2 referem-se a distâncias inacessíveis, isto é, distâncias que só se conseguem medir usando instrumentos próprios como por exemplo, o teodolito.

A tarefa 1 é um problema da vida real que coloca em causa vários conhecimentos que os alunos já devem ter adquirido como determinar razões trigonométricas de um ângulo agudo, resolver um triângulo rectângulo conhecidos um ângulo e um lado e ainda resolver sistemas de equações. Nesta tarefa os alunos podem por exemplo começar por se concentrarem num triângulo e escrever a razão trigonométrica que lhe corresponde depois concentram-se no outro triângulo e fazem o mesmo. E chegam à conclusão, que dispõem de duas equações e duas incógnitas e portanto, o método mais eficaz será utilizar um sistema de equações para calcular a altura da montanha.

A tarefa 2 é do mesmo género que a tarefa 1, mas neste caso o objectivo não é calcular nenhuma distância mas sim descrever o processo que leva à determinação da fórmula que expressa a distância do ponto A ao cimo da árvore. É pretendido que os alunos coloquem em prática todos os conhecimentos que têm vindo a adquirir com a resolução das tarefas anteriores e sejam capazes de, numa pequena composição, expressar o seu raciocínio. O objectivo desta tarefa não é o processo utilizado mas sim, a capacidade que os alunos têm em expressar matematicamente o seu raciocínio.

A tarefa 3 é um problema geométrico onde é pretendido que os alunos calculem a área da superfície sombreada. Pretende-se que os alunos interpretam a figura e sejam capazes de adoptar uma estratégia de resolução. Podem, por exemplo, começar por determinar a base e a altura de um dos triângulos através das razões trigonométricas para calcularem a área de um dos triângulos e depois multiplicam por quatro. Calculam também a área do quadrado e depois é só subtrair à área do quadrado a área dos triângulos. Podem também determinar um dos lados de um dos triângulos pelas razões trigonométricas e depois para determinar o outro lado podem usar o teorema de Pitágoras e repetem o processo acima descrito.

Ficha de trabalho 5 – Relações entre Razões Trigonométricas

Com esta ficha pretende-se que os alunos determinem uma razão trigonométrica de um ângulo agudo conhecida outra e estabeleçam relações entre as razões trigonométricas, como a fórmula fundamental da Trigonometria e a fórmula que relaciona a tangente, o seno e o co-seno.

No exercício 1 pretende-se que os alunos façam uso das razões trigonométricas mostrando alguma manipulação algébrica.

No exercício 2 o objectivo é levar os alunos à manipulação da fórmula, de modo a conseguirem demonstrá-la com base nos conhecimentos que têm sobre a fórmula fundamental da Trigonometria.

3.5.2. Metodologia de trabalho

O trabalho de grupo é referido em vários documentos para o ensino da matemática, como um método a ser desenvolvido em todos os níveis de ensino. No novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al*., 2007), o trabalho de grupo é referido como sendo muito produtivo na resolução de problemas.

Uma vez que o foco principal deste estudo é a resolução de problemas, foi desenvolvida uma metodologia de trabalho de grupo, que tem como objectivo, promover a aprendizagem cooperativa entre os grupos. Segundo Abrantes (1994), a resolução de problemas em grupo proporciona aos alunos a possibilidade de interagirem entre si no confronto e discussão de estratégias de resolução, levando os alunos a aprender pelo facto de falarem, ouvirem, explicarem e pensarem matematicamente com os outros.

Contudo, este tipo de metodologia tem algumas desvantagens, como por exemplo, possibilita a alunos mais desmotivados que copiem pelos colegas, sem se empenharem na tarefa ou que se desliguem totalmente da aula e façam tudo menos participar na actividade.

Após o trabalho de grupo, foi realizada uma discussão com toda a turma “para proporcionar momentos de partilha e discussão bem como para a sistematização e institucionalização de conhecimentos e ideias matemáticas” (Ponte *et al*., 2007, p. 10).

Segundo as Normas profissionais para o ensino da Matemática (NCTM, 1998), a discussão com toda a turma é um processo vantajoso pois permite clarificar ideias e termos, assim como, discutir a validade de várias abordagens e soluções.

3.5.3. Avaliação

A avaliação é uma importante ferramenta no processo de ensino-aprendizagem, pois é através dela que o professor “recolhe informação que lhe permite apreciar o progresso dos alunos” (Ponte *et al*., 2007, p. 11) assim como as suas dificuldades.

Como salienta as Normas profissionais para o ensino da Matemática (NCTM, 1998), a avaliação não se deve centrar num único instrumento, mas sim, em vários que permitam ao professor obter informações de diversas fontes.

Nesse sentido foram utilizados como instrumentos de avaliação, todas as resoluções de fichas elaboradas pelos grupos, os trabalhos de casa e um teste para aferir conhecimentos no final da unidade didáctica.

As resoluções das fichas de trabalho permitiram observar a evolução dos alunos ao longo da unidade didáctica, assim como, perceber quais as suas dificuldades e os erros mais frequentes. As resoluções foram analisadas, comentadas e ainda avaliadas numa escala de 10 pontos. Para cada uma das fichas de trabalho foi elaborada uma tabela onde constam as classificações de cada uma das tarefas realizadas. Posteriormente, essas tabelas foram cedidas ao professor cooperante, que as iria incluir na avaliação final dos alunos. Sempre que possível, as resoluções das fichas com os respectivos comentários eram entregues aos alunos na aula seguinte.

Os trabalhos de casa foram essencialmente exercícios do manual, cujo objectivo era levar os alunos a ganhar algum treino e desembaraço no cálculo de razões trigonométricas. Os trabalhos de casa permitiram compreender as dificuldades individuais de cada aluno, mas também, perceber os erros mais frequentes.

O teste era constituído por questões de escolha múltipla e por alguns problemas, com o objectivo de avaliar o raciocínio matemático dos alunos e a aquisição e aplicação dos conceitos matemáticos aprendidos ao longo da unidade didáctica, assim como, testar a capacidade de resolução de problemas.

3.6. Descrição das aulas

3.6.1. Primeira aula

A aula iniciou-se com os alunos a dividirem-se pelos vários grupos, ao mesmo tempo que indicava que naquela aula iria iniciar-se uma unidade nova de ensino de seu nome Trigonometria. Seguidamente distribui pelos grupos a ficha de trabalho 1 (Anexo 4) e três folhas brancas, indicando que dispunham de 10 minutos para a realização do ponto 1 que correspondia à construção dos três triângulos. Houve grupos que apresentaram algumas dificuldades na construção dos triângulos, contudo, todos conseguiram construir os três triângulos pedidos. Como cada grupo tem o seu ritmo, à medida que iam acabando a construção dos triângulos, fui dando indicações que podiam resolver o resto da ficha de trabalho. Passados 65 minutos, iniciou-se a discussão dos resultados. Com uma tabela construída em acetato, igual à que se apresentava na ficha de trabalho, fui perguntando aos vários grupos os resultados a que tinham chegado para cada razão trigonométrica. Após a construção da tabela, fui questionando os vários grupos sobre as várias questões da ficha de trabalho. Contudo, a abordagem e a forma como conduzi a discussão não foi a melhor. Senti algumas dificuldades em gerir as ideias dos alunos e as conclusões a que chegaram, notando-se a minha inexperiência nesta aula que se centrou no ensino pela descoberta. Devia ter partido dos dados da tabela para questionar os alunos, se estes faziam sentido e, assim, partir para uma discussão mais rica e mais aprofundada, o que não aconteceu. Contudo, os alunos com a realização desta ficha conseguiram determinar razões trigonométricas de um dado ângulo agudo por construção e utilizar a calculadora nesses cálculos.

De seguida, fiz uma pequena introdução histórica da trigonométrica e iniciei uma síntese no quadro construindo um triângulo rectângulo com um ângulo de 45º. Esta forma de sintetizar as razões trigonométricas não foi a melhor, pois devia ter considerado um ângulo genérico para definir as três razões trigonométricas, calculadas na ficha de trabalho.

Após a síntese, escrevi o trabalho de casa no quadro e, como ainda restava tempo, decidi resolver um exercício do manual. Este tempo que restou deveu-se à rápida discussão e ao facto de não ter alertado os alunos para a variação do seno e do co-seno como tinha planeado.

3.6.2. Segunda aula

A planificação desta aula teve que ser reajustada pois após a aula anterior achei que era importante voltar a fazer um resumo das razões trigonométricas, assim como, discutir o exercício que tinham feito no final da aula passada para consolidar conhecimentos. Desta forma, escrevi o sumário e fiz o resumo da aula anterior no quadro e pedi a colaboração dos alunos para escrever as razões trigonométricas de um ângulo agudo de um triângulo rectângulo. De seguida, questionei os alunos sobre eventuais dúvidas no exercício. Apesar de um só aluno ter manifestado dúvidas, resolvi fazer a resolução do mesmo no quadro, pedindo a colaboração dos alunos, uma vez que o exercício tinha dois modos diferentes de ser resolvido.

Após a discussão do exercício, distribui a ficha de trabalho 2 (Anexo 4) e pedi aos alunos para resolverem até ao exercício 2. Os alunos mostraram bastantes dificuldades nestes dois exercícios, talvez por serem bastante abstractos, contudo arranjaram mecanismos de resolução diferentes dos que eram pretendidos. O professor cooperante disse que neste nível de ensino seria pedir muito que eles fizessem de outra maneira e, portanto, eu considerei correcta a estratégia utilizada pelos vários grupos. Como o objectivo do exercício 1 não foi concretizado, o que se revelou no exercício 2, optei por não fazer nenhuma síntese e deixei os alunos avançar na resolução da ficha, deixando a discussão da mesma para a aula seguinte. Houve alunos que conseguiram resolver a ficha até ao problema 3 e só houve um grupo que conseguiu chegar até ao problema 4. Desta maneira, pedi aos alunos que acabassem a ficha em casa.

Com a síntese da aula anterior, e com o atraso desta tarefa, a planificação da próxima aula teve que ser repensada e ajustada às necessidades dos alunos. O professor cooperante sugeriu que na próxima aula se fizesse a discussão da ficha de trabalho 2 e que se resolvessem alguns dos exercícios e problemas do manual, de modo a que os alunos ganhassem alguma destreza no cálculo de razões trigonométricas.

Como referem as Normas profissionais para o ensino da Matemática (NCTM, 1998), “ os professores devem igualmente utilizar as informações respeitantes ao que os alunos compreendem para rever e adaptar as suas planificações a curto e longo prazo, tanto em relação à selecção de actividades como à escolha das abordagens, de forma a orientar o discurso na aula” (p. 65). A aula finalizou-se com a transmissão do sumário.

3.6.3. Terceira aula

A aula começou com a discussão dos dois primeiros exercícios da ficha de trabalho 2. Comecei por perguntar aos alunos quais os valores a que chegaram para cada uma das alíneas, uma vez que os alunos arranjaram mecanismos de resolução diferentes dos que eram pretendidos. Uma vez que os alunos recorreram à calculadora para preencher a tabela do exercício 2, achei oportuno pedir aos alunos para consultarem a tabela de valores naturais existente no manual e aleatoriamente perguntei o valor do seno de 55º e da tangente de 35º. De seguida, foi feito o processo inverso para outros ângulos. Como não havia dúvidas nos restantes problemas, foi proposto aos vários grupos de alunos que resolvessem os exercícios 19.1, 20 e 21 do manual e que entregassem uma resolução por grupo. Como houve grupos mais rápidos, foi pedido aos grupos mais adiantados que resolvessem ainda os problemas 27 e 28 do manual. Esta tarefa demorou mais tempo que o previsto, mas, segundo a opinião do professor cooperante, era necessária para que os alunos ganhassem destreza de cálculo. Após a maior parte dos grupos ter acabado de resolver os exercícios, distribui a ficha de trabalho 3 (Anexo 4) e pedi aos alunos que resolvessem os três primeiros problemas. Como restavam 20 minutos para a aula acabar, decidi deixar os alunos resolverem a ficha de trabalho e iniciar a discussão da mesma na aula seguinte. Os alunos estiveram envolvidos na resolução dos problemas. Houve grupos que encontraram mais que uma estratégia de resolução para um problema. No final da aula havia grupos que tinham conseguido chegar ao problema 3, enquanto outros ficaram-se pelo problema 2. Nesse sentido pedi que acabassem a ficha de trabalho em casa, acabando a aula com a transcrição do sumário.

3.6.4. Quarta aula

Comecei por abrir a lição e perguntar aos alunos se tinham acabado a ficha de trabalho 3. Como esta semana os alunos estavam em época de testes, a maior parte não tinha acabado a ficha em casa e, portanto, foi dado mais uns minutos para terminá-la. Todos os grupos estavam empenhados em resolver os problemas que faltavam, excepto dois alunos (António e Ricardo) que durante estas aulas não manifestaram qualquer interesse pela realização das actividades propostas.

Posteriormente, foi pedido a três grupos que elegessem um elemento para ir ao quadro apresentar a estratégia de resolução do grupo. De seguida iniciou-se a discussão dos resultados do problema 1 e 3, pois foram estes onde surgiram estratégias de resolução diferentes.

Durante a discussão, os vários grupos apresentavam-se atentos, havendo grupos que comparavam a sua resolução com a do quadro e diziam que tinham feito de outra maneira, ao que eu pedia então para eles explicarem à turma qual tinha sido o caminho que tinham seguido.

Depois distribui a ficha de trabalho 4 (Anexo 4) e como se tinha perdido algum tempo a acabar a ficha 3, decidi logo mandar para trabalho de casa o problema 3. E avisei os alunos que deveriam resolver os dois primeiros problemas da ficha. De imediato os alunos começaram a resolver a ficha e a maior parte dos alunos conseguiu acabar o problema 1. Há somente um elemento de um grupo que consegue começar o problema 2. Enquanto os grupos estavam a resolver a ficha, fui circulando pela sala observando o trabalho realizado e como constatei que a maioria dos grupos resolveu sem nenhuma dificuldade o problema e utilizaram todos a mesma estratégia no problema 1 decidi não realizar a discussão dos resultados.

Esta aula inicialmente estava prevista acontecer no dia 19, mas como o professor cooperante adiou o teste para esse dia a aula teve que ser antecipada para o dia 17.

3.6.5. Quinta aula

Iniciei a aula por dizer que iriam estudar naquele dia duas relações entre razões trigonométricas. Desenhei no quadro um triângulo rectângulo e com a colaboração dos alunos fui pedindo que me dissessem como é que escrevíamos o seno e o co-seno do ângulo agudo considerado. De seguida aplicou-se o teorema de Pitágoras, chegando-se à fórmula fundamental da Trigonometria. De seguida, foi mostrado como é que se pode estabelecer uma relação entre a tangente, o seno e o co-seno de um ângulo agudo. Foi dado algum tempo aos alunos para registarem no caderno as conclusões. Após a parte expositiva, distribui pelos vários grupos a ficha de trabalho 5 (Anexo 4), a qual os alunos resolveram com mais ou menos dificuldades.

Passado algum tempo havia grupos que já tinham acabado. Então decidi pedir a alguns elementos que fossem resolver ao quadro cada uma das alínea. De seguida passou-se à discussão da ficha de trabalho, que não foi feita da melhor forma, uma vez que me limitei a olhar para as resoluções no quadro e a corrigi-las sem questionar os alunos do porquê dos erros cometidos. Houve aspectos das resoluções que considerei como adquiridos e que podiam ter sido explorados, como questionar os alunos do porquê de $\frac{1}{\frac{1}{9}} + 1 = 10$. Os alunos recorreram à calculadora para efectuar este cálculo e estavam a cometer erros pois a calculadora tinha dado um resultado diferente do correcto e os alunos não se questionam sobre o resultado, acreditando somente na calculadora. Depois tomei consciência que devia ter explorado com a turma e talvez por considerar demasiado óbvio não o fiz. No exercício 2, houve grupos que demonstraram a fórmula por duas maneiras diferentes e, portanto, pedi ao grupo que tinha feito uma resolução diferente que a explicasse à medida que eu a escrevia no quadro para toda a turma.

Enquanto os alunos resolviam a ficha de trabalho, o professor cooperante questionou-me e lembrou-me que eu ainda não tinha falado entre que valores variam o seno e o co-seno de um ângulo agudo e sugeriu-me que recorre-se à tabela de valores naturais do manual para exemplificar. Após a discussão da ficha de trabalho, resolvi então questionar os alunos sobre esse aspecto. Os alunos responderam que variava entre 1º e 89º entre outras hipóteses que não faziam sentido. No meio daquelas respostas envolvi-me e deixei-me levar pelos alunos induzindo-os em erro, pois eles estavam-se a referir à variação do ângulo o que não era o objectivo. Hoje sei que não o devia ter feito sem antes ter planeado melhor a situação, pois não o fiz da melhor forma, mas na altura achei que devia fazê-lo pelo facto do professor cooperante me ter alertado.

No final da aula distribui pelos alunos um questionário para recolher dados sobre as suas apreciações sobre as aulas leccionadas, mas também, sobre as tarefas realizadas.

3.6.6. Sexta aula

Esta aula foi dedicada à realização do teste, para avaliar os conhecimentos adquiridos ao longo da unidade didáctica Trigonometria do triângulo rectângulo. Contudo, como era o último dia de aulas do 2.º período, houve um aluno que faltou e houve dois que estavam ausentes porque tinham ido participar num concurso de francês na escola.

Capítulo 4

Metodologia

Este capítulo descreve as opções metodológicas tomadas, tendo por base a problemática deste estudo. Começa-se por fundamentar e caracterizar a escolha de uma metodologia de natureza qualitativa. Seguidamente é feita uma caracterização dos participantes no estudo, explicando o método de trabalho utilizado na sala de aula. Por fim são indicados os instrumentos de recolha de dados, assim como, o processo de análise de dados utilizado.

4.1. Opções metodológicas

Este estudo aconteceu em tempo real, num ambiente natural de sala de aula, onde se procurou compreender de que forma a resolução de problemas contribui para a aprendizagem da Trigonometria do triângulo rectângulo. Com esse intuito optou-se por uma metodologia qualitativa de natureza interpretativa. Pretendeu-se assim, observar, analisar e interpretar os processos desenvolvidos pelos alunos na resolução de problemas relativos a situações contextualizadas de Trigonometria do triângulo rectângulo, assim como, os conhecimentos postos em prática, as estratégias utilizadas e as dificuldades manifestadas na execução das fichas de trabalho.

Uma investigação de natureza interpretativa dá "valor aos comportamentos observáveis" (Lessard-Hébert, Goyette & Boutin, 1994, p. 41) e fornece informação acerca do ensino e da aprendizagem, que de outra forma não se podia obter. O objectivo não é generalizar os resultados obtidos, mas sim, encontrar um conjunto de informações, que nos levem a compreender os processos e métodos utilizados pelos alunos, quando resolvem problemas que envolvem a Trigonometria do triângulo rectângulo, de forma a melhorar futuramente o ensino e a aprendizagem deste tema. O objectivo não é provar hipóteses previamente formuladas, mas sim, construir uma explicação para elas. Por fim, este estudo procurou saber, qual a opinião dos alunos acerca do tipo de tarefas e de ensino implementado, de forma a dar significado ao trabalho desenvolvidos pelos alunos.

Segundo Bogdan e Biklen (1994) a investigação qualitativa apresenta cinco características principais: (i) a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o principal instrumento de recolha de dados; (ii) os dados recolhidos são descritivos isto é apresentam-se na forma de palavras ou imagens; (iii) o investigador interessa-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; (iv) os dados são analisados de forma indutiva, ou seja, é como se se reunissem num todo todas as peças de um puzzle; (v) o objectivo é conhecer o significado que os participantes atribuem às suas experiências, ou seja, deseja-se saber o "porquê" e "o quê".

4.2. Participantes no estudo

4.2.1. Escolha da turma

Como o professor cooperante só tinha uma turma do 9.º ano, estava automaticamente escolhido o ano em que se iria desenvolver o estudo. Restava agora decidir qual o tema em que me iria focar. Como tudo se encontra calendarizado e definido na planificação anual foi só verificar no período em que eu iria leccionar, o tema que estava proposto. Deste modo, sucedeu ser o tema da Trigonometria do triângulo rectângulo.

Contrariamente, ao que acontece nos outros estudos de investigação, neste não foi necessário pedir autorização ao Conselho Executivo da Escola, uma vez que o professor cooperante faz parte da comissão executiva. Contudo, para efeitos legais foi solicitada autorização à Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC), para a realização de um questionário (Anexo 6) à turma alvo do estudo, e também, aos Encarregados de Educação dos alunos envolvidos no estudo, para serem objecto de recolha de dados (Anexo 1).

Antes de iniciar a experiência com os alunos, o professor cooperante teve o cuidado de explicar à turma, quais os objectivos deste trabalho e apelou à sua participação. Posteriormente, informei qual a metodologia de trabalho que iria ser seguida naquele bloco de aulas, assim como, a constituição dos grupos de trabalho. Os alunos perante a notícia ficaram entusiasmados, excepto dois alunos que evidenciaram o seu descontentamento por terem ficado em grupos de trabalho diferentes.

4.2.2. Grupos de trabalho

A população deste estudo são os 20 alunos, que constituem a turma, mas apenas 18 alunos é que vão participar no estudo, uma vez que esta turma possui dois alunos que apresentam necessidades educativas especiais e, por isso, desenvolvem actividades específicas indicadas pelo professor cooperante.

Foram formados cinco grupos de trabalho, dos quais três são constituídos por quatro elementos e dois por três elementos. Os critérios para a constituição dos grupos foram definidos por mim e seguiram as seguintes regras: (i) cada grupo possuir um elemento com um bom desempenho à disciplina de Matemática; (ii) cada grupo ser homogéneo em termos de representatividade de género (dois rapazes e duas raparigas); (iii) separar os alunos conversadores e desatentos. Segundo Nunes (1996), vários autores indicam que os grupos devem ser formados pelo professor, de modo a constituir grupos heterogéneos, contemplando os seguintes parâmetros: "a etnia e o sexo, os resultados obtidos a nível de rendimento escolar, as próprias preferências e amizades dos alunos, além de outras características pessoais e de personalidade" (p. 83).

Após a constituição dos grupos, seleccionei um, que na minha opinião seria o mais indicado para se fazer um registo áudio das possíveis discussões, que iriam surgir durante a realização das fichas de trabalho, uma vez que era o grupo mais heterogéneo dentro da sala de aula, tanto a nível de desempenho, como a nível de conhecimentos e atitudes. Este grupo era formado pela Catarina, Susana, Tiago e Vasco. A Catarina é uma das melhores alunas a Matemática da turma, muito empenhada e interessada e por isso, tem nível 5. O Tiago é um aluno que está entre os níveis 3 e 4, é participativo e manifesta as suas ideias e estratégias claramente, contudo, na escrita por vezes salta passos ou não apresenta todas as justificações necessárias. A Susana apresenta muitas dificuldades na resolução de problemas, necessitando de algum apoio para começar a resolver o problema. É uma aluna que está entre os níveis 2 e 3. O Vasco é um aluno muito fraco, e altamente desmotivado para a Matemática. Apresenta nível 2 à disciplina.

Após a primeira aula, constatei que aquele grupo se sentiu inibido por estar a ser gravado, o que levou a uma discussão muito pobre no grupo. Então, resolvi colocar um outro gravador no grupo composto pelo Rafael, Raquel e Rui. Apesar de este grupo ser mais pequeno, existe algum diálogo onde se esclarecem dúvidas. O Rafael é um dos melhores alunos da turma é muito interessado, participativo e curioso, apresentando nível 5 à disciplina de Matemática. Já a Raquel e o Rui são alunos de nível 3 com algumas dificuldades.

O grupo constituído pela Sofia, Bruna, Ivo e Paulo apesar de não ter sido gravado também irá participar no estudo, uma vez que apresenta produções escritas muito ricas. A Sofia e a Bruna são alunas interessadas, contudo com algumas dificuldades. Como são muito amigas, por vezes estão na conversa e não prestam atenção à aula. Ambas apresentam nível 3 à disciplina de Matemática. O Ivo é um aluno com muitas dificuldades ao nível da Matemática e distrai-se com facilidade com os restantes colegas. Apresenta nível 2 à disciplina. O Paulo é um aluno interessado pela matéria e sempre que tem uma dúvida questiona o professor. É um pouco conversador e distrai-se muitas vezes com a colega do lado, contudo, apresenta bons resultados à disciplina de Matemática e, portanto, tem nível 4.

Os alunos encontravam-se na sala distribuídos conforme a figura 7:

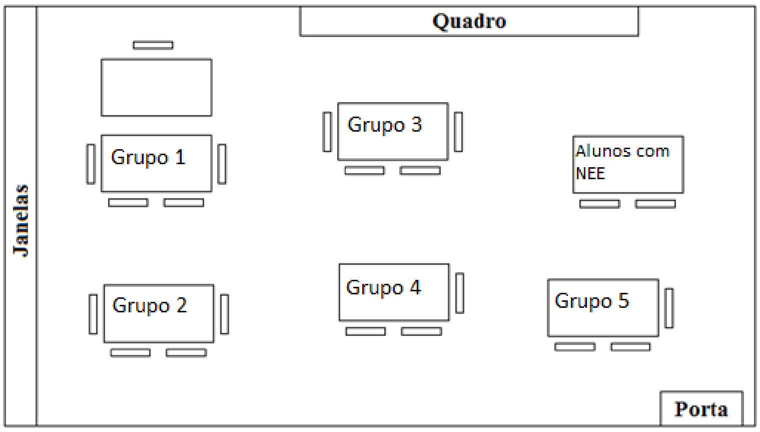


Figura 7. Distribuição dos grupos de trabalho na sala de aula

Assim, os grupos tinham a seguinte constituição:

Grupo 1 – Catarina, Susana, Tiago e Vasco

Grupo 2 – Anabela, António, Beatriz e Ricardo

Grupo 3 – Bruna, Ivo, Sofia e Paulo

Grupo 4 – Rafael, Raquel e Rui

Grupo 5 – Cláudia, André e Francisco

4.3. Instrumentos de recolha de dados

Neste estudo foram utilizados alguns instrumentos de recolha de dados, nomeadamente, a observação participante, recolha documental e um questionário. Como refere Bogdan e Biklen (1994), a maior parte dos estudos qualitativos utiliza uma variedade de fontes de dados e portanto, "embora discutamos diferentes tipos de dados separadamente, é importante salientar que eles raramente se encontram isolados na pesquisa" (p. 149). Desta forma, a utilização de vários instrumentos de recolha de dados, possibilita o cruzamento de informação diversificada, permitindo uma descrição detalhada e o mais completa possível do objecto em estudo.

4.3.1. Observação participante

A observação é um dos instrumentos de recolha de dados mais importantes da investigação qualitativa. Segundo Lüdke e André (2005) é uma ferramenta de trabalho que permite obter informação normalmente inacessível através de outras técnicas. Neste estudo utilizou-se a observação participante do trabalho realizado na sala de aula, pois a professora foi circulando pela sala, observando os processos utilizados, as estratégias e as dificuldades que os alunos apresentavam na resolução das fichas, além de ir esclarecendo eventuais dúvidas. Como salienta Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (1994), esta técnica é adequada ao investigador que ambiciona compreender o meio social que, à partida lhe é desconhecido, e que "lhe vai permitir integrar-se progressivamente nas actividades das pessoas que nele vivem" (p. 155).

No início tinha pensado registar algumas observações que fossem significativas para o estudo em causa, contudo, a professora orientadora alertou-me para a dificuldade que existe em desempenhar simultaneamente o papel de professora e de investigadora, de modo que seria muito complicado ou impossível, observar atentamente e registar no momento as várias situações da aula, assim como, o trabalho dos grupos. Também Bogdan e Biklen (1994) compartilham da mesma opinião salientando que "a tentativa de equilíbrio entre a participação e a observação pode também surgir como particularmente difícil" (p. 127).

Nessa perspectiva, foi sugerido que se recorresse ao registo áudio das aulas, uma vez que poderia registar o desenvolvimento da aula e a interacção com os vários grupos. Nesse sentido, o registo áudio revela-se um poderoso instrumento permitindo registar situações que, por algum motivo, não foram observáveis (Erickson, 1986; Mills, 2000), tais como, interacções entre e fora dos grupos aquando da resolução das fichas de trabalho. Após cada aula, tentei descrever os vários episódios da aula o mais pormenorizadamente possível.

Durante o trabalho de grupo esteve sempre presente um gravador de áudio, na mesa do grupo 1, contudo a partir da segunda tarefa, um segundo gravador foi colocado na mesa do grupo 4, pois na primeira aula o grupo 1 sentiu-se inibido levando a uma discussão pobre dos resultados. Após ter terminado a unidade didáctica, todos os registos áudio foram transcritos. As transcrições permitem confrontar o que foi dito com o que foi realmente elaborado nas produções escritas, fornecendo uma clarificação dos processos e das estratégias utilizados pelos alunos.

4.3.2. Recolha documental

Para responder às questões do estudo, foi feita uma recolha dos documentos produzidos pelos alunos ao longo da unidade didáctica. São eles: as resoluções das tarefas, os trabalhos de casa, alguns exercícios do manual, assim como, o teste de avaliação. Como salienta Lüdke e André (2005), os documentos constituem "uma fonte poderosa de onde podem ser retiradas evidências que fundamentam afirmações e declarações do pesquisador" (p. 39). Com esse intuito, em todas as aulas, era pedido a cada um dos grupos que entregasse uma resolução da ficha de trabalho, de forma a analisar a evolução do grupo ao longo das aulas. Esse documento permitiu analisar os diferentes processos de resolução seguidos pelos vários grupos, evidenciando o tipo de estratégias seguidas, os conhecimentos que dominavam e as dificuldades que apresentavam.

O teste escrito (Anexo 5) procurou verificar se os alunos interiorizaram os conceitos estudados ao longo da unidade didáctica Trigonometria do triângulo rectângulo, identificando estratégias e principais dificuldades na resolução de problemas. O teste é constituído por dois grupos de questões. A primeira parte é constituída por quatro questões de escolha múltipla e a segunda parte é composta por três problemas onde os alunos têm que justificar o seu raciocínio. Para a elaboração deste teste contribuíram algumas das tarefas propostas em manuais do 9.º de escolaridade, que posteriormente após reunião com as professoras orientadoras foram adaptadas e outras alteradas, de forma a atingir todos os objectivos do programa.

Para a caracterização da escola e da turma recorri ao Projecto Educativo de Escola e ao Plano Curricular de Turma respectivamente.

4.3.3. Questionário

Foi criado um questionário (Anexo 6) composto por 6 questões, com o objectivo de recolher elementos sobre a apreciação de cada aluno relativamente às tarefas realizadas e ao tipo de ensino praticado, uma vez que este se centralizou na resolução de problemas.

Segundo Tuckman (2005), um questionário é um processo de recolha de dados, que permite obter informação sobre aspectos não observáveis, de um conjunto de pessoas sobre determinado assunto. Essa informação pode ser recolhida na forma de dados qualitativos ou quantitativos. Quivy e Campenhoudt (1998) referem, também, que o questionário é um instrumento de observação não participante, uma vez que consiste num conjunto de perguntas relativas "às suas opiniões, à sua atitude em relação a opções, (…) às suas expectativas, ao nível de conhecimentos ou de consciência de um acontecimento ou de um problema, ou ainda sobre qualquer outro ponto que interesse os investigadores" (p. 188).

Segundo vários autores, um questionário deve conter vários tipos de questões. De acordo com Ghiglione e Matalon (2005), um questionário deverá conter questões abertas ou fechadas. Tuckman (2005) compartilha da mesma opinião, mas este autor divide as questões em directas ou indirectas, específicas ou não específicas, factos ou opinião, questões ou afirmações e questões com resposta pré-determinada ou com resposta-chave.

Neste questionário foram utilizadas questões abertas e fechadas. As questões fechadas por si só dão pouca informação acerca de determinado assunto e, portanto, decidi associar às questões fechadas, questões abertas de modo a perceber quais os motivos ou justificações que levaram os alunos a optar por determinada questão fechada. Ghiglione e Matalon (2005) referem que as questões fechadas apresentam uma lista de respostas possíveis, sendo solicitado aos participantes que indiquem a que melhor corresponde à sua escolha. Em contrapartida, as questões abertas permitem que o participante responda "utilizando o seu próprio vocabulário, fornecendo os pormenores e fazendo os comentários que considera certos" (p. 115). Deste modo, como salienta Hill e Hill (2005), um questionário desta natureza que contempla estes dois tipos de questões é útil na medida em que obtemos "informação qualitativa para complementar e contextualizar a informação quantitativa" (p. 95) que nos é dada nas questões fechadas.

Na questão 2 inicialmente tinha pensado em fazer uma escala com cinco níveis onde os alunos exprimiam a sua concordância ou discordância, relativamente ao grau de significância de cada ficha de trabalho para a sua aprendizagem. Contudo, após discutir esta questão com a professora orientadora, reflecti e constatei que deveria retirar o nível "não tenho opinião" para obrigar os alunos a dar uma opinião definitivamente positiva ou negativa. Este tipo de resposta é caracterizado por Tuckman (2005) como "resposta por escala" (p. 313).

O questionário foi aplicado na penúltima aula, após a leccionação da unidade didáctica, de forma a perceber até que ponto as tarefas propostas foram significativas para a aprendizagem dos alunos. Foi ainda solicitado que fizessem um balanço das aulas referindo aspectos positivos e negativos, que encontraram no ensino através da resolução de problemas.

4.4. Análise dos dados

A análise de dados implica a utilização dos dados recolhidos para responder às questões do estudo (Tuckman, 2002). Neste caso, a análise de dados incidiu sobre as produções escritas dos vários grupos de alunos, das transcrições das aulas, do questionário e do teste. A análise começou por ser realizada ainda durante as aulas, uma vez que ao corrigir as produções dos alunos fui anotando algumas das dificuldades e dos conhecimentos utilizados. Contudo, teve o seu aprofundamento após a leccionação da unidade didáctica.

Como este estudo se centra numa metodologia qualitativa de natureza interpretativa, a análise de dados assume um carácter descritivo e interpretativo. Como indicam Lüdke e André (2005), num primeiro momento é necessário organizar todo o material dividindo-o em categorias e posteriormente, num segundo momento, procurar relações entre essas categorias. Também Miles e Huberman (citados por Lessard-Hébert, Goyette & Boutin, 1994), indicam que a análise de dados é dividida em três momentos: redução de dados, organização e apresentação dos dados e interpretação/verificação das conclusões.

Depois de todos os dados terem sido recolhidos, foram organizados consoante as fichas de trabalho propostas e foram analisados consoante as resoluções dos grupos. Como este estudo recai sobre a resolução de problemas, só foram alvo de estudo a ficha de trabalho 2 com enfoque nos problemas 3, 4 e 5 e a ficha de trabalho 3 e 4.

Posteriormente, para organizar os dados, foi elaborado um sistema de codificação. Segundo Tuckman (2002), o desenvolvimento de um sistema de codificação envolve várias etapas:

> percorre os seus dados na procura de regularidades e padrões bem como de tópicos presentes nos dados e, em seguida, escreve palavras e frases que representam estes mesmos tópicos e padrões. Estas palavras ou frases são categorias de codificação. (p. 221)

Os dados foram organizados por ficha de trabalho com base em três categorias: conhecimentos colocados em prática, estratégias de resolução e dificuldades dos alunos. Estas categorias pretendem responder às questões formuladas no estudo.

Para organizar os dados do questionário foi elaborado um sistema de codificação, como sugere Tuckman (2002). As respostas foram agrupadas em quadros segundo denominadores comuns, de forma a facilitar a sua interpretação.

Uma vez que foram utilizados vários instrumentos de recolha de dados, houve a necessidade de os relacionar de forma a encontrar pontos comuns que validassem a sua interpretação. A este processo chamamos triangulação dos dados.

Capítulo 5

Análise de Dados

Este capítulo tem como objectivo, mostrar as diferentes estratégias usadas na resolução de problemas que envolvem Trigonometria do triângulo rectângulo, mas também, as principais dificuldades manifestadas pelos alunos quando confrontados com problemas deste tipo. É ainda objectivo deste capítulo dar a conhecer os conhecimentos colocados em prática pelos alunos quando se deparam com problemas que envolvem Trigonometria do triângulo rectângulo.

5.1. Análise dos problemas 3, 4 e 5 da ficha de trabalho 2

No problema 3 da ficha de trabalho 2, o grupo 1 analisa os triângulos representados e aplica os conhecimentos que tem sobre as razões trigonométricas. Constata que na figura são fornecidas a medida do cateto oposto ao ângulo α e a medida da hipotenusa. O grupo evidência conhecer a definição de seno de um ângulo e aplica a fórmula calculando assim o seno do ângulo α. Como o objectivo do problema é determinar o ângulo de elevação que o camião tem que fazer para que a areia caia toda, o grupo após ter determinado o seno do ângulo, faz a função inversa do mesmo e determina assim, o ângulo correspondente:

$$\text{Sen}\,\alpha = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

$$\alpha = \text{Sen}^{-1}(0{,}4) = 23{,}6^{\circ}$$

R: O ângulo terá 23,6°.

Neste problema, o grupo apresenta um raciocínio lógico e coerente e uma linguagem matemática cuidada, contudo, omite a utilização do sinal de equivalente quando passa de uma equação para outra. No final, o grupo aproxima o valor do ângulo, apesar de utilizar o símbolo matemático “igual”.

O grupo 3, no mesmo problema apresenta uma resolução correcta, contudo com algumas lacunas. Começa por identificar a razão trigonométrica a ser utilizada e aplica a fórmula correctamente. Porém, quando passa da substituição dos valores na fórmula para o valor exacto do seno do ângulo α, omite o sinal de equivalente como se as duas equações fossem distintas. De seguida, aplica a função inversa do seno, chegando assim, ao valor do ângulo omitindo novamente o sinal de equivalente entre as equações. No último cálculo, o grupo não escreve correctamente a equação, uma vez que omite a incógnita α. Este grupo, ao contrário do grupo 1, efectuou os cálculos e arredondou o ângulo para um valor exacto, dando ao problema uma solução possível dentro do contexto:

$\text{sen}\,\alpha = \frac{2}{5}$ $\quad$ $\text{sen}\,\alpha = 0{,}4$ $\quad$ $\text{sen}^{-1}(0{,}4) \simeq 24°$

R: o angulo terá $\simeq 24°$

Neste problema, o grupo apesar de apresentar um raciocínio lógico, mostra algumas dificuldades quanto à comunicação matemática, em particular a utilização de símbolos matemáticos.

O grupo 4 interpreta incorrectamente a figura, não distinguindo que estão desenhados dois triângulos rectângulos. Desta forma, o grupo utiliza a razão trigonométrica tangente, para calcular o ângulo de elevação que é necessário fazer para que a areia caia todo do camião. Aplica a fórmula e substitui correctamente os valores, de seguida utiliza a função inversa da tangente e calcula o ângulo correspondente:

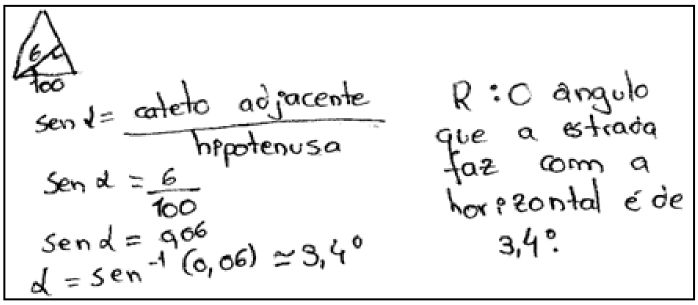
$\text{tg}\,\alpha = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \alpha = \text{tg}^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) \Leftrightarrow \alpha \simeq 21{,}8°$

R: O ângulo terá de ser de 21,8°.

Este grupo utiliza inicialmente a letra grega α que está representada no problema para representar o valor do ângulo, contudo, posteriormente muda para *x* que habitualmente é a letra que está associada às incógnitas. Este grupo evidência o reconhecimento da letra como incógnita.

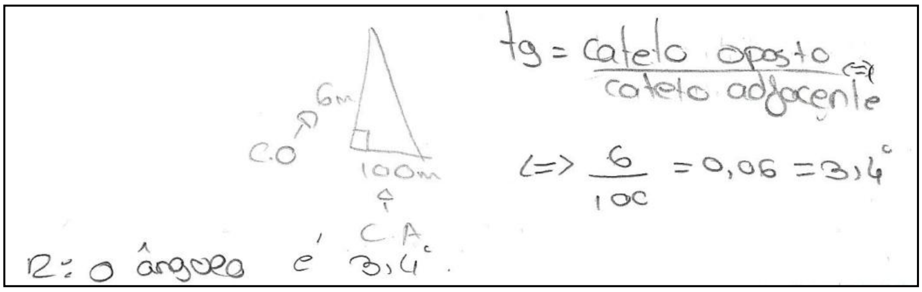
Este grupo utilizou correctamente as razões trigonométricas, contudo num momento inicial interpretou erradamente a figura, levando a que todo o processo de resolução passa-se a estar errado de acordo com o problema.

O grupo 1, no problema 4 da ficha de trabalho 2, faz uma interpretação errada do sinal de trânsito. O grupo começa por assinalar correctamente o ângulo de 90º, contudo quando é para marcar os 6 metros, o grupo marca erradamente num dos catetos do triângulo. Tal situação pode dever-se ao facto de os alunos terem interpretado que como o sinal indica 6% naquele cateto que ilustra uma rampa, então seria o equivalente aos 6 metros que sobe e designaram por 100 a hipotenusa do triângulo como se fosse os 100 metros na horizontal. Desta forma, consideraram o ângulo formado por esses dois lados do triângulo rectângulo. Constataram deste modo, que tinham os dados do cateto adjacente e da hipotenusa e, portanto, deviam aplicar a razão trigonométrica co-seno. Contudo designaram essa razão por seno, o que pode levar a entender que os alunos ainda não dominam bem as razões trigonométricas uma vez que estamos na 2.ª aula sobre este tema. Apesar da incorrecta interpretação e do engano na razão trigonométrica, os alunos substituem correctamente os valores na fórmula. Posteriormente aplicam a função inversa do seno, para calcular o valor do ângulo e dão a resposta ao problema com uma casa decimal:



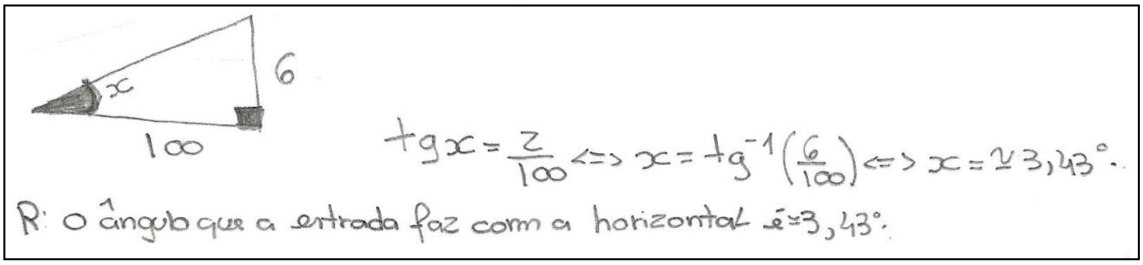
Assim, o grupo 1 apresenta dificuldades em interpretar o enunciado do problema, o que leva a que todo o processo depois se desenvolva erradamente. Apesar de não utilizar o símbolo matemático de equivalente entre as equações, expõe a resolução de forma cuidada e ordenada em coluna.

O grupo 3 interpreta correctamente o problema, desenhando um triângulo rectângulo que não está à escala, onde assinala os dados do enunciado. Embora não indique o ângulo que está a calcular, nomeia os catetos do triângulo, que nos dá uma percepção do ângulo considerado. Seguidamente, usam a razão trigonométrica tangente e substituem na fórmula correctamente os valores. Contudo este grupo omite o símbolo de ângulo quando escreve a razão trigonométrica tangente. E posteriormente, usa o sinal de equivalente erradamente entre a fórmula e a substituição dos valores. Na realidade aquelas duas razões são a mesma e, portanto, o sinal a utilizar deveria ser "igual". Depois aplicam a função inversa da tangente que dá 3,4 arredondado a uma casa decimal e dizem que 0,06 é igual a 3,4º o que é absurdo:



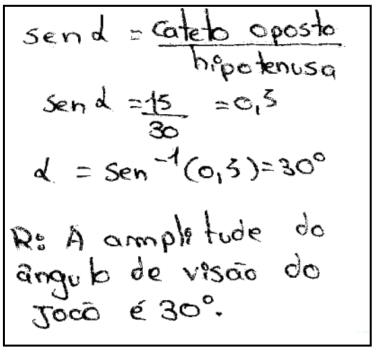
Este grupo apresenta dificuldades ao nível da escrita matemática, uma vez que omite símbolos e outras vezes troca o sinal "equivalente" pelo sinal de "igual", o que prova que não sabem qual a função de cada um deles. Apresentam também, fraco sentido crítico sobre os resultados apresentados.

O grupo 4 interpreta correctamente o enunciado, desenhando um triângulo rectângulo onde assiná-la os dados do enunciado, assim como, o ângulo que queremos determinar. Este grupo como dispõe do cateto oposto ao ângulo e do cateto adjacente ao ângulo utiliza a razão trigonométrica tangente correctamente. Seguidamente substitui erradamente os valores na fórmula, porém aparenta ser um erro de distracção, pois quando aplica a função inversa da tangente usa o valor correcto da razão trigonométrica. Este grupo opta por arredondar o valor do ângulo a duas casas decimais:



Este grupo apresenta um raciocínio correcto e lógico, contudo, a utilização dos símbolos matemáticos, tal como, nos outros grupos não é clara. Este grupo quando quer expressar o valor do ângulo que neste caso denota por x, não é coerente, pois utiliza dois símbolos matemáticos seguidos, o que leva a subentender que não sabe qual deles utilizar.

O grupo 1 no problema 5 da ficha de trabalho 2, interpreta o enunciado e observa que a figura representa um triângulo rectângulo, onde é dada a medida do ecrã que é o cateto oposto ao ângulo de visão do João e o comprimento da hipotenusa. Uma vez que são dadas estas duas medidas, o grupo utiliza de uma forma correcta a razão trigonométrica seno. Depois, substitui os dados na razão e aplica a função inversa do seno, obtendo desta maneira a amplitude do ângulo de visão do João. Mais uma vez, como é hábito deste grupo omite os sinais de equivalência preferindo utilizar uma resolução em forma de coluna:


$sen\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$

$sen\,\alpha = \frac{15}{30} = 0{,}5$

$\alpha = sen^{-1}(0{,}5) = 30°$

R: A amplitude do ângulo de visão do João é 30°.

Após a resolução, o grupo justifica que o João tem uma visão clara do filme uma vez que a amplitude do ângulo de visão do João encontra-se entre os valores para os quais uma pessoa tem uma clara visão do filme:

Como está entre os 26º e 36º, o João tem uma visão clara do filme.

Este grupo percebeu o enunciado do problema, arranjou uma estratégia de resolução e foi capaz de criticar a solução obtida. O seu raciocínio está coerente e bem apresentado.

O grupo 3 interpreta correctamente o enunciado do problema, mas se formos comparar a apresentação desta resolução com a do grupo 1 podemos observar que esta está mais pobre. Este grupo identifica correctamente a razão trigonométrica a ser utilizada e escreve logo a fórmula substituída pelos seus valores. Seguidamente, simplifica a razão anteriormente escrita e aplica a função inversa do seno, obtendo a amplitude do ângulo.

Após determinar a amplitude do ângulo analisa o resultado e indica que como o valor do ângulo pertence ao intervalo de valores para os quais se tem uma visão clara do filme, então essa amplitude de ângulo permite ao João ter uma visão clara do filme:

$\text{Sen}\ \alpha = \frac{15}{30}$

$\text{Sen}\ \alpha = \frac{1}{2}$

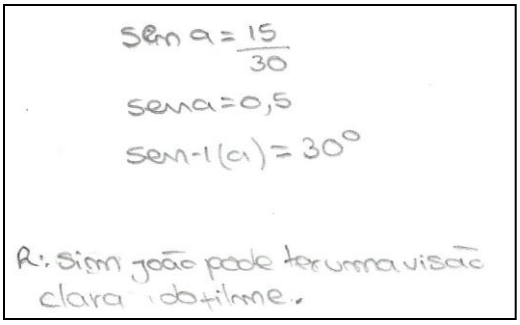
$\text{Sen}^{-1}(0,5) = \alpha = 30^{\circ}$

R: Permite, pois 30º está entre 26º e 36º.

Este grupo opta por fazer uma resolução em coluna tal como o grupo 1 omitindo os sinais de equivalência entre as equações.

O grupo 4 tal como os outros dois grupos interpreta correctamente o enunciado do problema. Escreve a razão trigonométrica seno já com os valores substituídos e seguidamente simplifica a fracção dando o resultado na forma decimal. Depois aplica a função inversa do seno e obtém o ângulo de 30º. Contudo embora o grupo apresente o resultado correcto, a notação encontra-se incorrecta pois o grupo escreve a função inversa do seno de um ângulo “*a*” onde *a* é incógnito. Se o ângulo é desconhecido não podemos aplicar a função inversa do seno.

O grupo depois analisa o resultado e responde que o “João pode ter uma visão clara do filme” mas não explica em que dados baseou tal afirmação:



Este grupo apresenta algumas dificuldades ao nível da utilização de símbolos matemáticos. Quando passam de uma equação para outra, omitem os sinais de equivalência. Na terceira equação também podemos ver que trocam a posição do ângulo com a posição do valor do seno, omitindo mesmo que aquela equação é igual ao ângulo. Podemos constatar que o processo elaborado parece mecânico sem nenhum tipo de sentido crítico.

5.2. Análise da ficha de trabalho 3

O grupo 1 parece entusiasmado em começar a resolver o problema 1 da ficha de trabalho 3. O Tiago começa por ler o enunciado do problema, para os restantes elementos do grupo:

> **Catarina:** Vá como é que se faz este?
> **Tiago:** Tem calma. O acesso a uma das entradas da escola da Rita é feito por uma escada de dois degraus iguais, cada um deles com 10 cm de altura. Com o objectivo de facilitar a entrada na escola a pessoas com mobilidade condicionada, foi construída uma rampa. Para respeitar a legislação em vigor, esta rampa foi construída de modo a fazer com o solo um ângulo de 3º, como se pode ver no esquema que se segue (o esquema não está à escala). Determina, em metros, o comprimento, c, da rampa. Indica o resultado arredondado às décimas e apresenta todos os cálculos que efectuares.

De seguida, os alunos elaboram uma estratégia de resolução que consiste em considerar apenas um dos triângulos. Deste modo, têm que descobrir o valor da hipotenusa de um dos triângulos e depois multiplicar esse valor por 2 para obterem o comprimento total da rampa.

O Tiago quando refere que o cateto adjacente é 20, está a considerar o triângulo cuja hipotenusa é *c*. Contudo, classifica o cateto oposto do triângulo como cateto adjacente, pois está a considerar o ângulo de amplitude 90º como podemos observar na sua última fala. E portanto, a hipotenusa do triângulo é considerada pelos alunos como cateto oposto ao ângulo de amplitude 90º, surgindo assim, a ideia de utilizar a razão trigonométrica tangente. Mas quando vão concretizar, utilizam o ângulo de amplitude 3º nos cálculos, usando um valor aproximado de tangente de 3º:

> **Catarina:** Nós queremos saber a hipotenusa vezes 2.
> **Tiago:** Sim
> **Catarina:** Então temos que achar a hipotenusa.
> **Tiago:** 20 do cateto adjacente. O adjacente é 20.
> **Susana:** Então temos que utilizar a tangente.
> **Catarina:** É a tangente?
> **Tiago:** Eu acho que sim.
> **Catarina:** Então quanto é a tangente de 3?
> **Susana:** 0,052
> **Tiago:** 0,05
> **Catarina:** Então agora é…
> **Tiago:** Sabemos que o cateto adjacente é 20 cm.
> **Susana:** Sabemos que o cateto adjacente é 20 cm?
> **Tiago:** Sim. Então tens aqui os 10 cm mais os 10 cm este é o cateto adjacente…faz um ângulo de 90º.

Os alunos resolvem a equação em ordem a *x* e obtêm o valor da hipotenusa de um dos triângulos que dá 0,52 aproximadamente. De seguida, a Catarina multiplica por 2 obtendo assim, o comprimento total da rampa que é 1,04 metros e questiona os colegas sobre a viabilidade do resultado obtido:

> **Catarina:** Então são 6º ou não?
> **Tiago:** Não são 3.
> **Catarina:** É mais fácil pôr aqui 10 e depois multiplicares por 2
> **Tiago:** Dá o mesmo
> **Catarina:** Pois dá, mas é mais simples.
> **Susana:** Isto fica x igual a 10 vezes tangente né?
> **Catarina:** 10 vezes a tangente de 3.
> **Catarina:** Quanto é que é…
> **Susana:** 0,52
> **Catarina:** Tem 1,04 m
> **Catarina:** Está certo? Pode ser não pode?
> **Susana:** Não sei.

Quando me aproximo do grupo, o Tiago dá a resposta ao problema e a Catarina questiona-me sobre o resultado obtido passando a explica a estratégia de resolução que seguiram:

Tiago: A hipotenusa é igual a 1 metro e 4 centímetros.
Catarina: Aqui dá 1,04 m professora?
Professora: Não.
Catarina: Nós primeiro fizemos a hipotenusa só de um e depois multiplicamos por 2 para saber o total.
Professora: Mas não é a tangente. Vejam lá bem.
Susana: Não é a tangente?
Professora: Porque é que vocês dizem que é a tangente?

Quando confrontados pelo facto de terem usado a razão trigonométrica tangente na resolução do problema, é referido pela Catarina que usaram porque têm que achar a hipotenusa. Após serem questionados sobre os dados que são fornecidos no enunciado, os alunos respondem da seguinte forma:

Catarina: Então, temos que achar a hipotenusa.
Professora: Sim e vocês têm que dados?
Tiago: Temos o cateto adjacente e temos o ângulo.
Catarina: O cateto oposto.
Professora: Ok tem o cateto oposto e querem saber a hipotenusa, então qual é a razão trigonométrica que utilizam?
Catarina: O seno.
Tiago: O cateto oposto não é este?
Susana: O cateto oposto é o 10 cm.
Tiago: Então o adjacente é o outro?

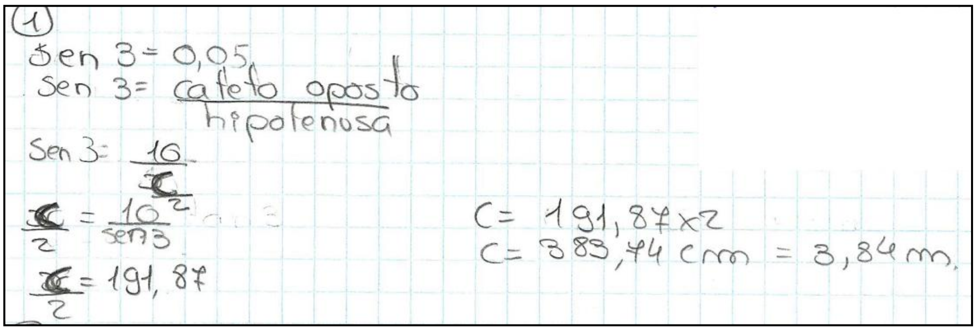
Pelo diálogo podemos verificar que o Tiago, não sabe identificar a diferença entre cateto oposto e cateto adjacente de um triângulo rectângulo. A Catarina identifica na figura o cateto oposto e quando questionada sobre qual a razão que deve ser utilizada, tem presente que será a razão trigonométrica seno.

De imediato a Catarina com a ajuda da Susana começa a resolver o problema, utilizando a razão trigonométrica correcta:

Catarina: Quanto é que é o seno de 3? 0,05
Catarina: O seno é que fórmula?
Susana: Cateto oposto a dividir pela hipotenusa.
Catarina: Cateto oposto que é 10 a dividir por x.
Catarina: x dá 10 a dividir por seno de 3
Catarina: Quanto é que é 10 a dividir por seno de 3?
Susana: Não pode ser. Dá 191,07
Catarina: Isso é em centímetros.

Tiago: 191 centímetros é um metro e noventa e um.
Catarina: Stôra? Isto está certo?
Professora: O que é que é o x?
Catarina: É a hipotenusa.
Professora: Mas aqui no enunciado a hipotenusa é c.
Susana: Eish!!! oh stôra.
Catarina: Ah…mas é igual.
Professora: Vocês estão a calcular o seno deste ângulo não é?
Tiago: Sim
Professora: Então o seno de 3º é igual ao cateto oposto que é 10 a dividir pela hipotenusa. Mas neste caso a hipotenusa não é c como vocês estão a calcular aqui, não é? Então tem que se o quê?
Catarina: c sobre 2.
Professora: Muito bem.
Susana: Dá quanto?
Catarina: 383,74 centímetros. Vamos passar para metros.
Tiago: Dá 3,83.
Catarina: 3,84 metros.
Tiago: Mas isso é bué da grande para uma rampa.

A Catarina começa por calcular o valor do seno de 3º. Escreve a fórmula da razão trigonométrica seno e substitui os valores na mesma, ficando com uma equação do 1.º grau para resolver. Depois resolve a equação em ordem a *x* obtendo no final *x* = 191,07. Como podemos verificar na produção escrita do grupo ao transcreverem para o papel enganam-se a escrever resultado final da incógnita *x* e escrevem *x* = 191,87:

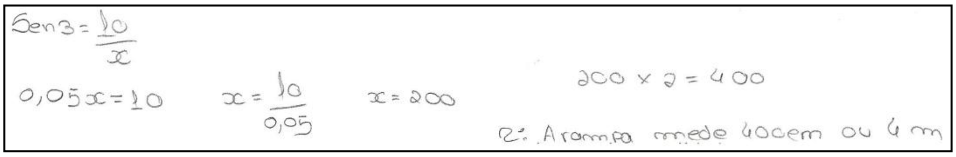


Quando observei a resolução do problema, questionei o grupo sobre o significado da incógnita *x*, ao que a Catarina respondeu que correspondia à hipotenusa do triângulo. Então voltei a questionar o grupo, que no enunciado não existia nenhuma incógnita *x*. Foi então que perceberam que tinham que usar $\frac{c}{2}$ uma vez que estavam a considerar um dos triângulos e, portanto, metade da rampa, de imediato corrigiram na produção escrita como podemos observar. Depois multiplicaram por 2 para calcularem o comprimento total da rampa e reduziram a metros como pede o enunciado. O Tiago não tinha arredondado correctamente o resultado, pelo que foi chamado à atenção pela

Catarina. Finalmente, indicam o comprimento total da rampa com duas casas decimais, quando o problema indica para o fazerem arredondado às décimas.

Este grupo interpretou o enunciado do problema, desenvolveu uma estratégia de resolução errada, mas quando questionados foram capazes de rever a estratégia utilizada e modificá-la para uma estratégia apropriada. Manifestam manipulação algébrica aquando da resolução de equações. Por fim, não dão resposta ao problema e manifestam algumas dificuldades no uso de símbolos matemáticos, uma vez que omitem a sua utilização (sinal de equivalência entre equações, sinal indicativo de grau e sinal de aproximado).

O grupo 3 interpreta o problema e usa uma estratégia de resolução diferente da utilizada pelo grupo 1. Este grupo também considera apenas um triângulo rectângulo, onde o cateto oposto ao ângulo mede 10, contudo, contrariamente ao grupo 1 designa o comprimento da hipotenusa por x. Neste caso, este grupo apenas se concentra num triângulo. Escreve a razão trigonométrica seno, já substituída pelos respectivos valores e, de seguida, começa a resolver a equação. Primeiramente, inverte a operação de divisão, ficando com $0{,}05x = 10$ e, no passo seguinte, inverte a operação da multiplicação. Efectua o cálculo e chega à solução da equação:


$\text{Sen}3 = \frac{10}{x}$

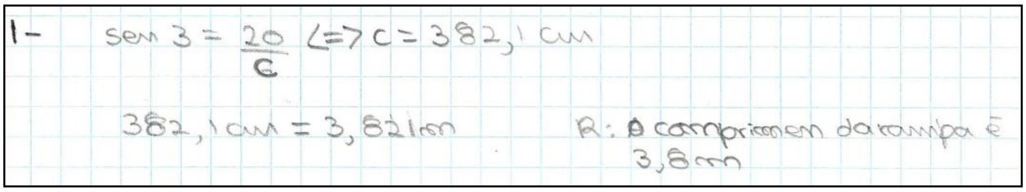
$0{,}05x = 10 \qquad x = \frac{10}{0{,}05} \qquad x = 200 \qquad 200 \times 2 = 400$

R: A rampa mede 400cm ou 4 m

A solução da equação corresponde a metade da rampa, então o grupo multiplica esse valor por 2, de forma a obter o comprimento total da rampa. No final, quando responde ao problema indica o comprimento da rampa tanto em centímetros como em metros.

Do exposto, podemos afirmar que o grupo 3 interpreta correctamente o problema, elabora uma estratégia de resolução e utiliza a manipulação algébrica para chegar à solução do problema. Apesar de apresentar um raciocínio lógico, o grupo manifesta algumas dificuldades, nomeadamente, na utilização de símbolos, omitindo entre as equações o sinal de equivalência, e o sinal indicativo de ângulo, assim como, quando calcula o comprimento total da rampa não designa esse valor por c. O grupo utiliza um valor aproximado de seno de 3º, porém, ao longo dos cálculos admite esse valor como exacto, não utilizando em momento algum o sinal de “aproximadamente”. O grupo também não é capaz de criticar a solução do problema, uma vez que no enunciado é pedido para arredondar o resultado às décimas e o grupo não se questiona do porquê do seu resultado não apresentar casas decimais.

O grupo 4 interpreta o problema e utiliza uma estratégia completamente diferente das já apresentadas pelos outros grupos. Este grupo analisa a figura e observa que é capaz de formar um outro triângulo, que engloba os dois triângulos da figura. Desta forma, o cateto oposto ao ângulo mede 20 centímetros que é a soma dos dois catetos opostos de cada um dos triângulos (10 cm +10 cm), e a hipotenusa do triângulo corresponde ao comprimento *c*. O grupo utiliza a razão trigonométrica seno, já substituída pelos seus valores. Depois salta alguns passos e passa directamente para a solução da equação. Ao resolver a equação, o aluno utiliza o valor exacto do seno de 3º. Depois reduz para metros a solução e dá a resposta ao problema, indicando o resultado arredondado às décimas:


1- $sen\ 3 = \frac{20}{c} \Leftrightarrow c = 382,1$ cm

382,1 cm = 3,821m

R: A comprimen da rampa é 3,8m

Assim, o grupo interpreta o problema, formula uma estratégia de resolução e apresenta uma solução correcta. Este grupo tal como os outros grupos omite o sinal de grau.

A Catarina um dos elemento do grupo 1 começa a ler o problema 2 da ficha de trabalho 3, para o restante grupo. A Susana quando ouve que é para calcular o ângulo de abertura, indica “tem-se que utilizar o menos 1” na realidade o que a aluna está a dizer é que temos que utilizar a função inversa da razão trigonométrica. Contudo, os colegas não entendem o que ela está a tentar dizer, de modo que ela exemplifica com a calculadora usando um exemplo concreto:

> **Catarina:** Num jogo de futebol, um jogador está na marca de grande penalidade prestes a rematar à baliza. Sabendo que a distância entre os dois postes da baliza é 7,3 m e que a distância da marca da penalidade à linha da baliza é de 11 m. Qual o ângulo de abertura supondo que a bola vai rasteira?
> **Susana:** Atenção para saber os ângulos tem-se que utilizar o menos 1.

Tiago: Ah?
Susana: Para saber ângulos tem-se que utilizar o menos 1.
Catarina: Isso dá 10
Susana: Não. Por exemplo meter tangente menos 1 e o valor.
Susana: Imagina que era a tangente de 3.

A Catarina, após ler o enunciado do problema, começa por fazer um desenho que ilustre a situação descrita. Depois, com a ajuda do professor cooperante, o grupo analisa o desenho e marca o ângulo de 90º. Contudo, o Tiago ao observar o triângulo considera-o equilátero e então indica que o ângulo de abertura é 60º. O professor cooperante questiona o grupo sobre "o que é a abertura?" e pergunta aos alunos quais os dados que precisam ter para calcular o ângulo de abertura:

Catarina: Então?
Tiago: Da linha de grande penalidade à baliza são 11 metros.
Catarina: Stôr pode chegar aqui sff?
Professor cooperante: No 2 não há desenho, o melhor é fazer o desenho.
Catarina: Mas eu já fiz. Fica assim não é? E agora faz assim.
Professor cooperante: Exactamente. Muito bem.
Catarina: Mas aqui não tem 90º.
Professor cooperante: Tem aqui.
Catarina: E então, o que é que nós queremos saber?
Professor cooperante: É o ângulo de abertura supondo que a bola vai rasteira.
Tiago: Isto aqui é 60º.
Professor cooperante: O que é a abertura?
Catarina: Então mas queremos saber este e como é que nos vamos saber?
Professor cooperante: O que é que precisamos ter para saber este?
Catarina: Nós sabemos…
Professor cooperante: O que tu tens aí é um triângulo rectângulo certo?
Catarina: 7, 3 a dividir por 2
Catarina: Dá 3,65 aqui e aqui…
Catarina: Stôr e agora?
Catarina: Nós queremos saber a hipotenusa ou seja é a tangente não é?
Tiago: A hipotenusa? É
Catarina: Não.
Tiago: Não. Não é.
Catarina: É o seno.
Tiago: A tangente é para o cateto oposto e adjacente

A Catarina começa por dividir o ângulo de abertura em duas partes iguais, originando dois triângulos rectângulos iguais, cada um com 3,65 *m* que corresponde a metade da abertura da baliza. De seguida, a Catarina perde-se e pensa que o objectivo é calcular a hipotenusa do triângulo e começa a questionar o Tiago, se quando queremos calcular a hipotenusa se usa a razão trigonométrica tangente. Num momento inicial pensam que sim, mas depois tomam consciência que não é a tangente, mas sim o seno.

Se analisarmos o diálogo seguinte constatamos que existe uma confusão entre os alunos sobre o objectivo concreto do problema. Apesar do problema pedir para os alunos calcularem a amplitude do ângulo de abertura, os alunos insistem em calcular o valor da hipotenusa do triângulo (falas 9-10, 19, 26, 29-31). O professor cooperante através do questionamento tenta que os alunos percebam qual o significado dos dados do problema, porém, apesar de saberem o que significa, não entendem como os vão utilizar para calcular o ângulo de abertura (falas 2-18, 23-25, 29, 32-34). Deste modo, argumentam que necessitam de calcular a hipotenusa para depois calcular o ângulo (fala 29). A certa altura a Susana ainda tenta concretizar, dizendo "é a tangente de…" mas a Catarina diz-lhe que não dá, porque desconhecem o valor do ângulo, até que com a ajuda do professor cooperante chegam à conclusão que têm de escrever uma equação:

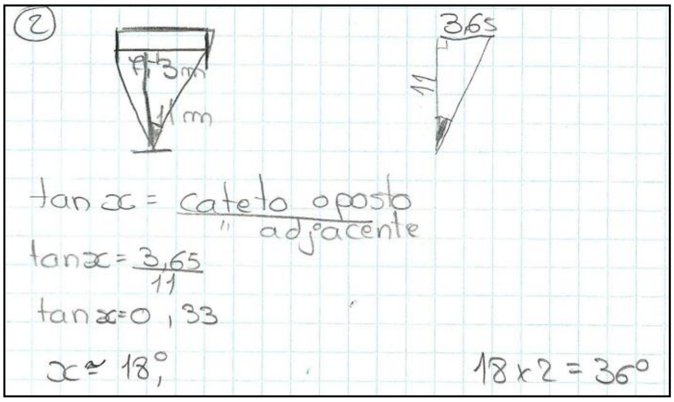
1 - Catarina: Stôr? Nos sabemos que aqui é 3,65 e aqui é 11 e agora?
2 - Professor cooperante: E agora? Como é que podemos saber o ângulo?
3 - Catarina: Este aqui?
4 - Professor cooperante: Qual é o ângulo que tu queres?
5 - Catarina: Este.
6 - Professor cooperante: É esse?
7 - Catarina: E como é que nós sabemos?
8 - Professor cooperante: O quê?
9 - Catarina: Então nós primeiro temos que saber a medida aqui ou não?
10 - Professor cooperante: Tens que saber a hipotenusa?
11 - Professor cooperante: O que é que tu tens aí? Tens um triângulo rectângulo e 3,65 é o quê?
12 - Catarina: É o quê? É metade do coiso da baliza. Da medida.
13 - Professor cooperante: Metade do comprimento da baliza não é? Mas em relação a esse triângulo é o quê?
14 - Professor cooperante: É o cateto…
15 - Catarina: Oposto
16 - Professor cooperante: Oposto ao ângulo que queres descobrir. E o 11 é o quê?
17 - Catarina: 11 é o cateto adjacente.
18 - Professor cooperante: A esse ângulo. Então? Cateto oposto, cateto adjacente.
19 - Catarina: Queremos saber a hipotenusa.
20 - Professor: Quero saber o ângulo.
21 - Susana: É a tangente.
22 - Professor cooperante: É a tangente.
23 - Catarina: Já tinha chegado a essa conclusão mas depois o que é que isso vai ajudar a fazer aqui?
24 - Professor cooperante: Responder à questão.
25 - Susana: Mas se é para descobrir o ângulo.
26 - Catarina: Ou a hipotenusa?
27 - Professor cooperante: Qual é a questão?
28 - Susana: Qual é o ângulo?
29 - Catarina: O ângulo de abertura supondo que a bola vai rasteira. Mas como é que vamos saber o ângulo se não sabemos a hipotenusa?
30 - Susana: O que é que vamos descobrir agora? Não é a hipotenusa?
31 - Catarina: Sim

32 - Catarina: Mas é a tangente de quê?
33 - Susana: É a tangente de…
34 - Catarina: Mas nós não sabemos o ângulo.
35 - Professor cooperante: Boa. Então quando nós não sabemos uma coisa como é que nós costumamos fazer?
36 - Susana e Catarina: Uma equação.

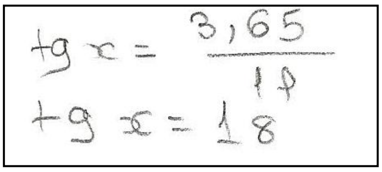
De seguida a Catarina começa a escrever a definição de tangente, substitui pelos respectivos valores e calcula o valor dessa razão (falas 37-39). Posteriormente, o professor cooperante alerta o grupo que poderão saber o valor do ângulo, através de uma tabela de valores naturais, existente no manual ou através da calculadora (fala 40-42, 51):

37 - Catarina: Então vai ser…
38 - Professor cooperante: Tangente de x vai ser igual a…
39 - Catarina: Ao oposto que é 3,65 a dividir por 11
40 - Professor cooperante: Muito bem. Agora como é que a gente sabe o ângulo tendo o valor?
41 - Susana: Não era menos 1
42 - Professor cooperante: Não era menos 1 ou não poderemos ir a tabela? Será que na tabela também pode estar?
43 - Catarina: Como é que pode estar na tabela?
44 - Susana: Não vai lá estar 0,33
45 - Professor cooperante: Não sei vê lá. Tangente.
46 - Tiago: Tangente.
47 - Professor cooperante: Agora procura lá o 0,33
48 - Tiago: 0,33? Não tem. Só tem 0,32. Ah está aqui.
49 - Professor cooperante: Um valor aproximado não é?
50 - Tiago: É a tangente de 18
51 - Professor cooperante: É a tangente de 18 graus aproximadamente. E se for na calculadora? Como fazemos na calculadora?
52 - Tiago: Fazemos assim.
53 - Professor cooperante: É tan menos 1 não é?
54 - Susana: Mas como é que isso se faz? Eu tentei fazer ai e não deu.

Uma das dificuldades que se evidencia neste diálogo é o facto da Susana não saber utilizar a calculadora para determinar o ângulo, sabendo o valor da tangente. (falas 51-54). Como podemos observar na produção escrita deste grupo, após determinarem o valor do ângulo, multiplicam por dois para obterem o ângulo de abertura da baliza. Nesta produção verificamos que os alunos no desenho que fazem, embora pintem o ângulo que estão a considerar, não o designam por nenhuma incógnita. Continuam a seguir uma resolução em coluna, omitindo os sinais de equivalência entre as equações. Nota-se ainda que no final da resolução não dão resposta ao problema:



Ao analisar a produção do grupo 3, verifica-se que o grupo não recorreu aparentemente a um desenho, passando directamente para a resolução da equação. O grupo através dos dados, percebeu que devia utilizar a razão trigonométrica tangente e escreve a fórmula já com os valores substituídos. Uma vez que o grupo coloca no numerador o valor 3,65, podemos concluir que o grupo está a considerar metade da distância entre os dois postes da baliza. No passo seguinte, não se percebe como é que os alunos chegam a $tg\,x = 18$, até porque se calcularem a razão $\frac{3{,}65}{11}$ obtêm $tg\,x \simeq 0{,}33$. Este grupo não termina a resolução da equação e, consequentemente, não acaba a resolução do problema. Aparentemente este grupo apresenta algumas dificuldades na elaboração de uma estratégia adequada de resolução, além de não ser capaz de concluir a resolução da equação:



O grupo 4 não é tão participativo como o grupo 1, como um dos elementos é um dos melhores alunos da turma é ele que toma a liderança do grupo e, portanto, é ele que comunica com a professora, enquanto os outros dois elementos prestam atenção e tiram apontamentos.

Como podemos observar pelo diálogo seguinte, o Rafael começa por fazer um esboço do possível desenho que ilustra o enunciado do problema (fala 1). Desenha um triângulo que é isósceles, uma vez que a distância da marca de grande penalidade à linha da baliza é igual como a seguir ele refere (fala 2). Depois, como o Rafael não sabe o que está a ser pedido no enunciado, peço-lhe para voltar a ler o enunciado e afasto-me dando-lhe algum tempo para reflectir (falas 3-5):

1 - Rafael: Oh professora este triângulo que está a dizer aqui é um triângulo assim?
2 - Rafael: Assim isósceles pronto, aqui tem a mesma distância.
3 - Professora: E queres saber o quê?
4 - Rafael: Quero saber se a bola vai rasteira supostamente deve ser a altura não?
5 - Professora: Não. Lê lá o enunciado.

Passado algum tempo, o Rafael volta-me a chamar já com uma estratégia de resolução formulada. Para o Rafael como o jogador está na marca de grande penalidade, está ao meio da baliza, logo, o ângulo formado na sua perspectiva é de 90º. O Rafael chega mais longe e refere que "se for real este problema é 90º", aqui constatamos que o Rafael tem noção que muitos dos problemas não são reais e, portanto, não têm significado na vida real. O Rafael ao fazer aquela afirmação está a recorrer a um tipo específico de triângulo isósceles, que é o usual triângulo que possui dois ângulos de 45º e um ângulo de 90º, esquecendo que um triângulo pode ser isósceles e possuir outros valores de ângulos:

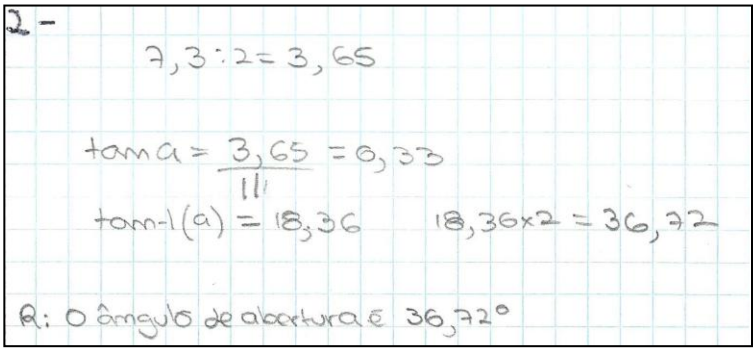
Rafael: Oh stôra?
Rafael: Se ele está na marca de penalidade supostamente está a 90 graus. Faz um triângulo de 90º se está na marca de penalidade está ao centro da baliza
Professora: Não sei vê lá bem. Aqui o enunciado diz que a distância entre os postes é 7,3 m e que a distância da marca de grande penalidade ao centro da baliza é 11 m e queremos calcular o ângulo de abertura.
Rafael: Mas se for real este problema é 90º.
Professora: Tens que fazer os cálculos para ver se tens razão ou não.

O Rafael não estava decididamente a perceber o erro que estava a cometer. Então tive que o questionar de forma a que ele conseguisse descobrir outra estratégia de resolução. O Rafael começa por dividir o triângulo ao meio, obtendo dois triângulos rectângulos, depois identifica a razão trigonométrica que relaciona os dois catetos que neste caso é a tangente.

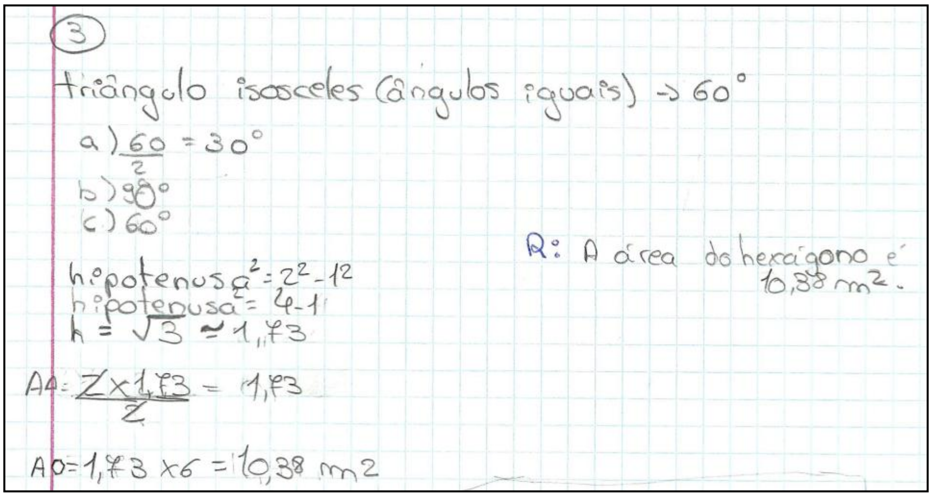
Rafael: Oh stôra?
Rafael: Não estou a ver
Professora: Esta medida é sempre 7,3 e esta aqui é 11 e tu queres saber o ângulo então como é que tu fazes?
Rafael: Ele é rectângulo supostamente aqui e aqui
Professora: Tu aqui não tens a certeza se ele é, mas tens aqui. Então como é que tu achas este ângulo? Tu tens em relação a este ângulo o cateto quê?
Rafael: O adjacente

Professora: Tens o adjacente e este é qual?
Rafael: O oposto.
Professora: Então que razão trigonométrica vais utilizar aqui?
Rafael: A tangente
Rafael: Então aqui é 3,65 né?
Professora: Sim
Rafael: Tangente de a é igual a 11.
Professora: A tangente é igual a quê?
Rafael: Cateto oposto a dividir pelo adjacente então 3,65 a dividir por 11.
Professora: Sim.
Rafael: Agora é tangente menos 1 disto.
Professora: Exacto.
Rafael: Agora é 18,36 vezes 2.

A produção escrita a seguir, além de confirmar, complementa também o diálogo anterior. Nesta produção constatamos algumas das dificuldades ao nível da escrita matemática. O aluno entre as equações não utiliza o sinal de equivalência, assim como, não indica o valor de aproximado, quando utiliza valores arredondados. Na 2.ª equação quando está a fazer a função inversa da tangente, o objectivo do aluno é determinar o ângulo a contudo escreve $tan^{-1}(a) = 18{,}36$, como se pudesse calcular a função inversa de um valor desconhecido. Também nesta nomenclatura o aluno não coloca o *-1* na posição de expoente, o que pode levar a concluir, que o aluno não perceber o conceito que está ali envolvido, limitando-se a fazer o cálculo de uma forma mecanizada:



Na resolução do problema 3 da ficha de trabalho 3, o grupo 1 coloca em prática o conhecimento que tem, sobre um hexágono ser formado por 6 triângulos equiláteros e, portanto, cada ângulo desses triângulos é 60º. Depois consideram metade do triângulo equilátero [ABC], obtendo um triângulo rectângulo e escrevem o valor dos três ângulos desse triângulo. Desta forma, escrevem o ângulo α = 30º, o ângulo C = 60º e o outro ângulo que designam por b = 90º. Após determinarem o valor dos ângulos do triângulo rectângulo, constatam que essa não é uma estratégia apropriada e, portanto, optam por colocar em prática outra estratégia que consiste em utilizar o teorema de Pitágoras para determinar a altura h. Depois calculam a área do triângulo [ABC] e multiplicam por 6 que são os 6 triângulos que constituem o hexágono, obtendo assim, a área total do hexágono. A resolução acaba com os alunos a dar a resposta ao problema, arredondando o resultado às centésimas:


3

triângulo isosceles (ângulos iguais) -> 60°

a) $\frac{60}{2} = 30°$

b) 90°

c) 60°

hipotenusa$^2 = 2^2 - 1^2$

hipotenusa$^2 = 4-1$

$h = \sqrt{3} \simeq 1,73$

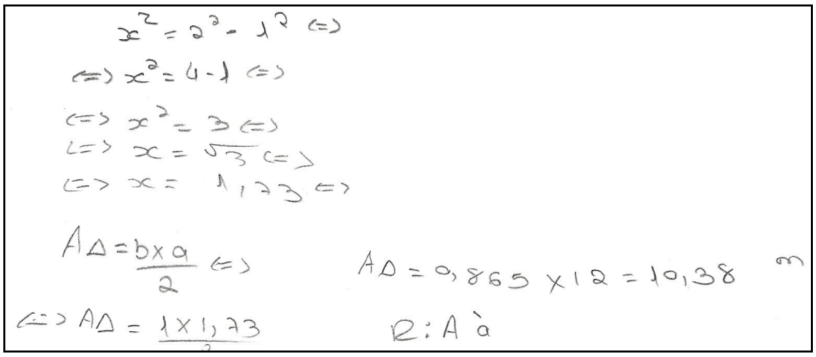
A△: $\frac{2 \times 1,73}{2} = 1,73$

Ah $= 1,73 \times 6 = 10,38$ m2

R: A área do hexágono é 10,38 m².

Após analisarmos a resolução do problema pelo grupo 1, podemos constatar que existe alguns erros de nomenclatura, nomeadamente os alunos indicam que um triângulo isósceles é aquele que tem os lados todos iguais. Depois quando começam a calcular a altura do triângulo, designam essa altura por hipotenusa o que está errado contudo desenvolvem correctamente a equação em ordem a altura h.

O grupo 3 opta por uma estratégia diferente. Este grupo começa logo a calcular a altura do triângulo [ABC], utilizando o teorema de Pitágoras. Contudo, designa por x a altura quando na figura do enunciado é designada por h. Após calcular a altura do triângulo o grupo calcula a área de metade do triângulo [ABC], através da fórmula $\frac{base \times altura}{2}$ e chegam à conclusão que é 0,865. De seguida, observam o hexágono e constatam que é constituído por 12 desses triângulos, então multiplicam por 12, chegando assim, ao resultado final do problema, que é a área do hexágono. Porém, não dão resposta ao problema:


$x^2 = 2^2 - 1^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 = 4 - 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{3} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 1,73 \Leftrightarrow$
$A\Delta = \frac{b \times a}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A\Delta = \frac{1 \times 1,73}{2}$
$A\Delta = 0,865 \times 12 = 10,38$ m
R: A à

Através da produção escrita da resolução do problema 3, podemos verificar algumas dificuldades, nomeadamente na escrita matemática. Embora na figura do enunciado, os alunos tenham a altura do triângulo designada por h aquando dos cálculos preferem utilizar a incógnita x que é a letra mais utilizada pelos alunos quando resolvem equações. Os alunos quando passam de $x = \sqrt{3}$ para $x = 1{,}73$, omitem a solução negativa de x. Neste caso podemos admitir que os alunos omitem porque estão a trabalhar com distâncias positivas e, portanto, não existem alturas negativas, contudo, estaria mais correcto se estes apresentassem as duas soluções da equação. Quando estão a calcular a área do hexágono, erradamente colocam a simbologia $A\Delta$ e no final apresentam erradamente o resultado da área na unidade de medida metros.

Antes de iniciar a resolução do problema 3, o Rafael do grupo 4 questiona-me sobre a fórmula para calcular a área de um triângulo e explica a estratégia que pensa seguir para resolver o problema. A estratégia consiste em determinar a área do triângulo [ABC] e depois multiplicar por 6 triângulos, para obter a área do hexágono:

Rafael: Stôra a área do triângulo é base vezes altura a dividir por 2 não é?
Professora: Sim.
Rafael: Aqui não é só fazer base vezes altura a dividir por 2?
Professora: Não sei. Aí é pedido a área do hexágono não é?
Rafael: Sim. Ia fazer a área disto e depois ia multiplicar.

Através do questionamento, o Rafael observa que a figura apresenta os dados do cateto oposto e do cateto adjacente. Neste caso, o cateto adjacente é a altura do triângulo que ele quer determinar. Desta forma utiliza a razão trigonométrica tangente para calcular a altura do triângulo [ABC]:

Professora: Mas tu para saberes a área do triângulo o que é que tu precisas?

Rafael: Para saber a área deste preciso da base que é 2 e da altura.
Professora: Então tens que achar a altura, não tens a altura não é?
Rafael: Mas eu também não tenho mais nada.
Professora: Então não tens? Tens este ângulo tens este lado e este lado é o que em relação ao ângulo?
Rafael: É o oposto.
Professora: E este aqui é qual?
Rafael: É o adjacente.
Professora: Então qual a razão que podes utilizar?
Rafael: A tangente.
Rafael: Tangente igual a um sobre h não é? É o oposto sobre o adjacente. Então isto é equivalente….

Contudo o Rafael começa a fazer os cálculos sem considerar nenhum ângulo, o que é impossível e, portanto, ele verifica que falta determinar o ângulo. Porém quando questionado, verifica-se que ele tem conhecimentos, mas gosta de chamar frequentemente a professora para validar os resultados. Neste diálogo, ele considera o ângulo giro e como tem 6 triângulo faz 360º : 6 = 60º, mas não é o ângulo ABC que ele quer calcular, logo, volta a dividir por 2 para obter o ângulo α, desta forma já pode calcular a tangente de 30º e resolver a equação:

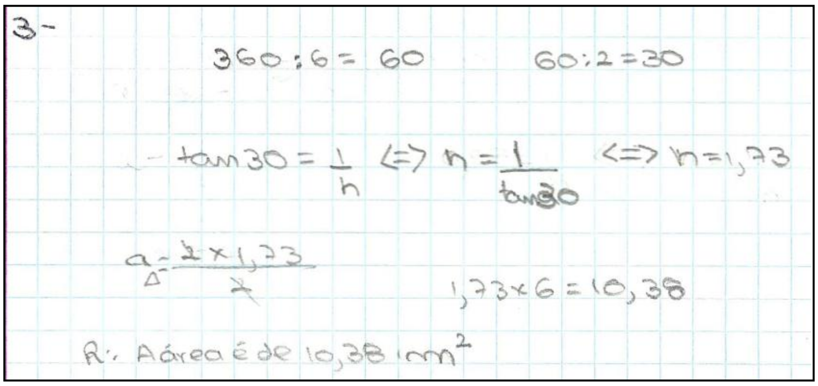
Rafael: Oh stôra e agora?
Professora: Agora isto aqui é um ângulo não é?
Rafael: Sim 360 graus.
Professora: Então sabes que este todo é 360 graus.
Rafael: Sim posso dizer que isto aqui é 360 e agora a dividir por 6 e depois a dividir por 2.
Rafael: Dá 30. Então é igual a 30.
Rafael: Quanto é a tangente de 30?
Rui: 0,5773…
Rafael: Arredondado.
Rui: 0,58

De seguida, o Rui começa a ter dúvidas na manipulação algébrica da equação e começa a questionar o Rafael sobre a resolução da equação. O Rafael explica-lhe que para resolver a equação em ordem à altura, se a tangente esta a multiplicar, passa a dividir obtendo $h = \frac{1}{\tan 30°}$.

Rui: Olha lá. Depois é a tangente vezes um metro não é?
Rafael: O quê?
Rui: A tangente de 30 vezes…
Rafael: A dividir
Rui: Ah é a dividir.
Rafael: Um a dividir por tangente de 30. É 1,73 aproximadamente.
Rui: O que é que dá no final depois de tudo?

Rafael: O quê? Qual final?
Rui: O resultado final na área do hexágono.
Rafael: A área do hexágono ainda não fiz estou a fazer. É 1,73 vezes…
Rafael: Dá 10,38

Após o Rafael determinar a altura, calcula a área do triângulo e depois multiplica esse valor por 6, para obter a área do hexágono, como podemos observar na produção escrita:


3-

$360:6=60 \qquad 60:2=30$

$\tan 30 = \frac{1}{h} \Leftrightarrow h = \frac{1}{\tan 30} \Leftrightarrow h = 1,73$

$a_\Delta = \frac{2 \times 1,73}{2} \qquad 1,73 \times 6 = 10,38$

R: A área é de 10,38 m^2

Através deste excerto podemos observar que o aluno embora no diálogo com a professora tenha referido correctamente os graus, o mesmo não se passa quando comunica matematicamente por escrito. Primeiro calcula o ângulo α mas não faz referência a ele. Deste modo, a primeira linha simboliza somente o cálculo de números, porque o aluno omite o sinal de grau. Novamente, na resolução da equação, volta a omitir o símbolo de grau e quando calcula o valor de *h*, embora no diálogo tenha dito que é um valor aproximado no excerto não utiliza o símbolo de igual. Após calcular a área do triângulo, calcula a área do hexágono e mais uma vez não indica que cálculo está a efectuar. Finalmente, quando escreve a resposta indica que "a área é de 10,38 m^2" mas não indica qual área.

Na resolução do problema 4 da ficha de trabalho 3, o grupo 1 pede ao Vasco para ler o enunciado do problema (falas 1-5) e a Catarina desenha um paralelogramo e dividi-o em dois triângulos e um rectângulo (falas 6-8), depois a estratégia adoptada pelo grupo passa por calcular os ângulos de um dos triângulos (falas 10-20):

1 - Susana: Vasco já estas a ler o 4.
2 - Vasco: Porquê? Eu não percebo nada disto.
3 - Catarina: Exactamente. Estas a ver.

4 - Vasco: Então posso ler?
5 - Vasco: Um campo relvado tem a forma de um paralelogramo com 130 m de comprimento por 32 m de largura. Um dos ângulos obtusos do paralelogramo mede 120º. Qual é a área do campo?
6 - Catarina: Então vou fazer um desenho. Como isto é um coiso.
7 - Susana: Não é um coiso.
8 - Catarina: É um paralelogramo isto faz aqui um triângulo e um triângulo aqui. Para depois formar um rectângulo aqui. Então nós temos que saber qual é este ângulo e aqui é 90 graus e temos que achar este ângulo, este ângulo e depois este e depois este.
9 - Susana: Isso é muito ângulo.
10 - Catarina: São muitos ângulos?
11 - Susana: Então não são?
12 - Catarina: Não. Porque este aqui é igual a este e este aqui é igual a este.
13 - Susana: Ah…muito bem. Como é que isso se faz?
14 - Catarina: Quando é rectângulo não tem que ser todos os ângulos 90 graus?
15 - Susana: Tem.
16 - Catarina: Exactamente então este aqui é 90 graus. Ou seja temos que fazer 120 menos 90.
17 - Tiago: 120 menos 90?
18 - Catarina: 30. Agora é assim fazemos 180 menos 30 menos 90.
19 - Susana: Dá 60.
20 - Catarina: Ou seja este aqui é 60. E ou seja este aqui é 30 e este aqui é 90 e este é 60.
21 - Susana: Eu percebi.
22 - Catarina: E agora temos que achar a área dos triângulos e depois juntamos e somamos.

De seguida, a estratégia adoptada pelo grupo é determinar através das razões trigonométricas, a altura e a base do triângulo, como podemos observar pelo diálogo a seguir:

Catarina: Temos que achar quanto mede isto.
Professora: Sim
Catarina: E que mais?
Professora: Então tu sabes o ângulo e sabes a hipotenusa.
Catarina: A hipotenusa é 32.
Professora: Então sabes a hipotenusa tens que achar o outro cateto.
Catarina: Ahhhh!!!
Catarina: Então mas eu não sei a medida deste aqui.
Professora: Então mas não precisas.
Catarina: Ai não?
Professora: Sabes uma medida, sabes o ângulo. Então vá este ângulo aqui é 30 não é? Então tu queres calcular este cateto. Então este lado é o quê em relação a este ângulo?
Catarina: É o oposto.
Professora: Então, qual é a razão trigonométrica que vais utilizar?
Catarina: É o seno.
Professora: Então vá, escreve isso.
Catarina: Já sei como é que é.
Susana: É o quê?
Catarina: Seno
Susana: Do quê? De 120? 90? 30?
Catarina: Seno de 30.

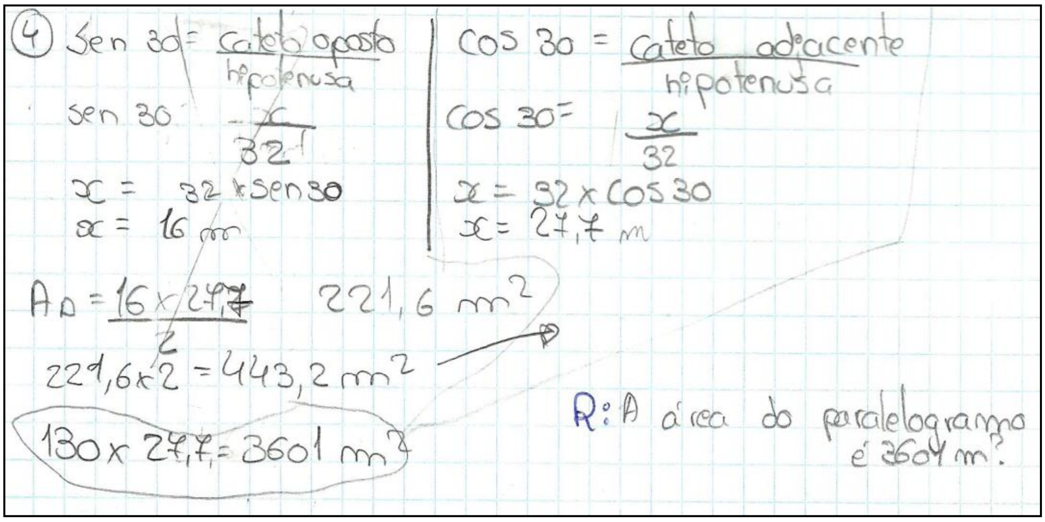
Susana: Seno de 30 é igual…
Catarina: Igual ao cateto oposto sobre a hipotenusa. E agora podemos por os valores.
Catarina: Seno de 30 igual…
Susana: Qual é o cateto oposto?
Catarina: É x sobre 32.
Catarina: E agora temos que isolar o x. Fica x igual a 32 vezes seno de 30 não é?
Susana: Sim.
Susana: Dá 16.
Catarina: Que é igual a 16 ou seja, a medida aqui é 16.
Professora: O que é que é 16?
Catarina: Aquela medida aqui.
Catarina: E agora nós temos que saber a altura também. Para depois fazermos base vezes altura a dividir por 2. Então vamos ter que fazer outra vez o co-seno.
Professora: Sim.
Catarina: Agora co-seno de 30 igual a cateto adjacente sobre a hipotenusa. Agora substituis os valores. X sobre 32, agora x é igual a 32 vezes co-seno de 30.
Catarina: Metam 27,7

O grupo 1 quando questionado sobre o resultado a que chegou para a área total do paralelogramo, explica que usou a estratégia de decompor o paralelogramo em três polígonos (2 triângulos e um rectângulo). Depois calculou as áreas respectivas e somou as três, como podemos observar pelo diálogo:

Catarina: É assim fizemos a área do triângulo que é 16 vezes 27,7 a dividir por 2 dá 221,6
Professora: Que é a área deste triângulo?
Catarina: Sim. Depois multiplicamos por 2 para saber os 2 triângulos. Depois fizemos a área do rectângulo que é 130 vezes a altura do triângulo que é 27,7 dá 3601
Professora: Sim.
Catarina: E depois somamos 443,2 mais 3601.
Professora: Mas essa estratégia não está bem, revejam o que fizeram.

Se analisarmos o diálogo e o excerto observamos que os alunos seguiram uma estratégia que não os levou à resposta final do problema, então tiveram que rever a estratégia utilizada:

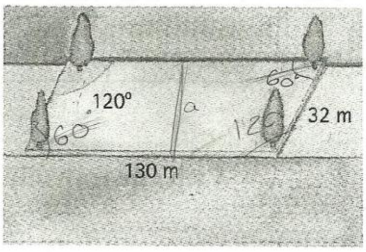
Professor cooperante: Chegaram à resposta ao problema?
Catarina: Não
Professor cooperante: Não chegaram certo? Portanto o que é que tiveram que fazer a seguir? Como não chegaram à resposta ao problema o que é que fizeram?
Catarina: Fomos buscar outra hipótese.
Professor cooperante: Pronto. Por este caminho chegam até à resposta final por este não chegaram até à resposta final.
Professor Cooperante: Então qual é a resposta?
Susana: A resposta é a área do paralelogramo é 3601.



O grupo após ter revisto a estratégia anteriormente utilizada chegou à conclusão que bastava calcular a altura do paralelogramo que era 27,7 *m* e depois multiplicar pelo comprimento do paralelogramo que era 130 *m*. Podemos verificar através da produção, que os alunos riscaram a estratégia que estava errada e que se encontra do lado esquerdo. Novamente nesta produção, os alunos omitem o sinal indicativo de grau e voltam a apostar na resolução em forma de coluna, evitando o uso os sinais de equivalência entre as equações.

O grupo 3 utiliza uma estratégia diferente da do grupo 1, porém não chega a acabar a resolução do problema. Este grupo considera o paralelogramo e começa por calcular os ângulos desconhecidos. Como um dos dados do enunciado é o valor de um dos ângulos internos do paralelogramo, os alunos usam o facto de num paralelogramo os ângulos opostos serem iguais para obterem o valor do ângulo oposto ao ângulo de 120º. Depois usam a definição da soma dos ângulos internos de um quadrilátero e subtraem a esse valor os 240º obtendo assim, o valor dos outros dois ângulos. Após saberem o valor de todos os ângulos do paralelogramo, utilizam a razão trigonométrica seno para calcular a altura do paralelogramo:

4. Um campo relvado tem a forma de um paralelogramo com 130 m de comprimento por 32 m de largura. Um dos ângulos obtusos do paralelogramo mede 120º.
Qual é a área do campo?



(Retirado de Matemática 9º ano – 2ª parte)

$120 + 120 = 240$

$360 - 240 = 120$

$\frac{120}{2} = 60° \rightarrow$ ângulos dos outros dois lados.

$\text{Seno } 60 = \frac{x}{32} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}866 = \frac{x}{32} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0{,}866 \times 32 \Leftrightarrow$

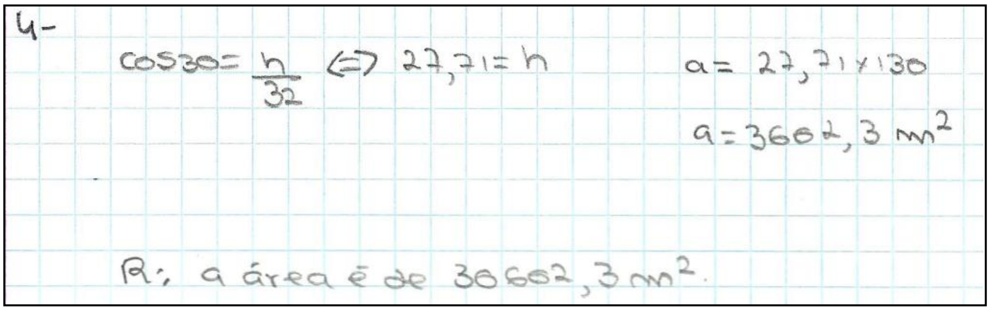
$\Leftrightarrow x = 27{,}7$

Podemos observar nos dois primeiros cálculos, que os alunos não utilizam o símbolo indicativo de grau. Depois quando começam a resolver a equação, arredondam o valor do sen 60º às milésimas não trabalhando com valores exactos, logo o resultado final já vem alterado.

O grupo 4 para resolver o problema 4 utiliza uma outra estratégia diferente das anteriores. Inicialmente começa por calcular os ângulos internos do paralelogramo e depois, divide o paralelogramo num triângulo e num trapézio. Calcula os ângulos internos desse triângulo e de seguida, utiliza a razão trigonométrica co-seno para determinar a altura do paralelogramo. Após determinar a altura do paralelogramo, utiliza a fórmula da área do paralelogramo para chegar ao resultado final do problema como podemos constatar através do diálogo e do excerto:

Rafael: Estes têm 120. Os opostos têm 60, então agora fazemos acho este triângulo assim daqui até aqui e depois os cálculos.
Rafael: Então isto aqui é 30 graus.
Raquel: De onde vem os 30?
Rafael: É metade de 60 graus.
Professor cooperante: Exactamente.
Rafael: Isto aqui é 90 então eu tenho 30 e quero saber este.
Professor: E tens a inclinação.
Rafael: Sim. E tenho a inclinação e a hipotenusa que é 32. Então é fazer o co-seno.
Rafael: Co-seno de 30 é igual a h sobre 32.
Rui: Depois é co-seno de 30 vezes ou a dividir?

Rafael: O 32 está a dividir passa a multiplicar e portanto é co-seno de 30 vezes 32.
Rui: Olha lá nós queremos saber o quê agora?
Rafael: Tu tens aqui o paralelogramo então queres saber a altura para fazeres a área que é base vezes altura.
Rafael: Então tu usas aqui o co-seno para calculares a altura depois fazes 130 vezes esse resultado que é a altura e dá-te.
Raquel: Ah…assim já percebi.
Rui: 27,71 esse valor vezes 130.


4-

$\cos 30 = \frac{h}{32} \Leftrightarrow 27{,}71 = h$

$a = 27{,}71 \times 130$

$a = 3602{,}3\ m^2$

R: a área é de 30602,3 m^2.

Através do diálogo, podemos observar que o Rui manifesta algumas dificuldades no que toca à manipulação algébrica de equações. No excerto constatamos novamente a falta de cuidado na nomenclatura, uma vez que omitem o sinal de grau, assim como, o sinal de aproximadamente. Ao darem a resposta ao problema apresentam o resultado com uma casa decimal e com um erro de escrita, dizendo que a área é 30602,3 m^2 em vez de 3602,3 m^2. Os alunos apresentam ainda pouco sentido crítico na análise do resultado, uma vez que podiam apresentá-lo arredondado às unidades.

5.3. Análise da ficha de trabalho 4

Como é habitual, o grupo 1 pede a um dos elementos que leia o enunciado do problema 1. Após a leitura, a Susana explica a sua estratégia de resolução ao grupo, mas a Catarina indica que essa estratégia não é a mais correcta, porque o que eles querem determinar são coisas diferentes:

Catarina: Lê Tiago.
Tiago: Para medir a altura do cume C da montanha, um topógrafo escolheu dois pontos A e B, do mesmo plano horizontal. Com um teodolito, apoiado num tripé, mediu os ângulos de elevação em A e B. Atendendo aos dados da figura, calcula, alínea a) a altura da montanha.
Susana: Posso dar a minha ideia?
Susana: Eu vou explicar atenção. Nós já sabemos que este lado aqui mede 100 certo, sabemos o ângulo que mede 16 ou seja temos o cateto adjacente e um ângulo. E nós

queremos saber este da hipotenusa. Então podemos usar o co-seno o que é que vocês acham?
Catarina: Nós queremos saber a altura.
Susana: Sim. Então mas escuta se souberes esta agora depois podes calcular qual é esta e podes saber qual é esta.
Catarina: Mas tu queres saber aqui e aqui.
Susana: Está bem, pronto então diz lá qual é a tua ideia.

A Catarina e o Tiago indicam que a estratégia passa por determinar primeiro o *h* e depois somar 1,5 para obter a altura da montanha (falas 1-3). Quando tentam concretizar, demonstram alguma dificuldade em interpretar alguns dados da figura (falas 5-7). A professora ao ver a dificuldade dos alunos, começa a questioná-los levando os alunos a perceber quais os elementos do triângulo que estão ali envolvidos (falas 8-15). Os alunos chegam à conclusão que necessitam de utilizar a razão trigonométrica tangente nos dois triângulos, para determinar a altura *h* (falas 16-21). Quando confrontada com duas equações a Catarina mostra-se um pouco apreensiva, mas após ser questionada, afirma que irá recorrer a um sistema de equações para determinar a altura da montanha (falas 21-23):

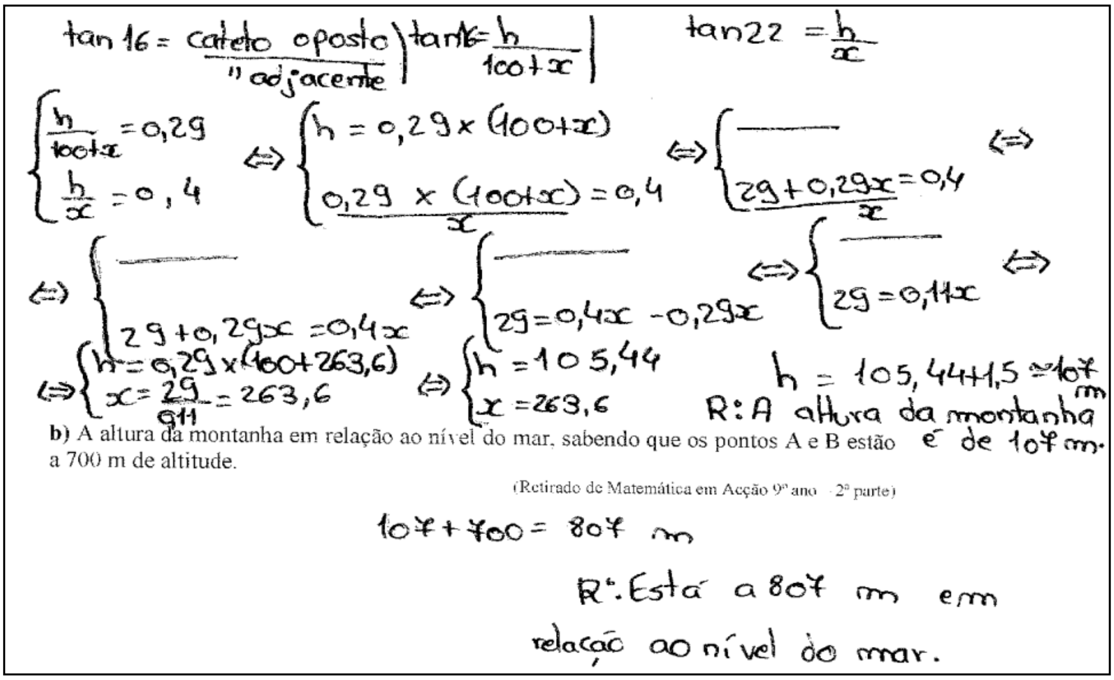
1 - Catarina: Então temos que achar este h certo?
2 - Tiago: Certo.
3 - Catarina: E depois somamos mais um e meio.
4 - Professora: Então, como vai isso?
5 - Catarina: Esta medida aqui não devia de dar para os dois triângulos?
6 - Professora e Tiago: Não.
7 - Tiago: Estas a ver.
8 - Professora: Isto é muito fácil só têm que olhar para os triângulos. Vocês têm aí quantos triângulos?
9 - Catarina e Tiago: Dois.
10 - Professora: Então vocês querem saber a altura.
11 - Catarina: Temos que achar este e depois somamos mais este.
12 - Professora: Exacto. Então e como é que vocês vão determinar a altura? Considerando este triângulo grande têm o ângulo cuja amplitude é 16º.
13 - Tiago: Temos um de 90 e temos um incógnito.
14 - Professora: Sim. Vocês têm o h e este cateto é qual?
15 - Catarina: É o adjacente
16 - Professora: Então vão utilizar que razão trigonométrica?
17 - Susana: A tangente.
18 - Professora: Exacto.
19 - Catarina: Stôra agora como é que eu ponho?
20 - Professora: Ambos os triângulos têm a mesma altura então agora vai ser dá mesma maneira. Agora a tangente de 22 vai ser…
21 - Catarina: Igual a h sobre x e agora como é que eu faço?
22 - Professora: Então se vocês têm duas incógnitas e duas equações como é que vocês vão resolver?
23 - Catarina: Pelo sistema de equações.

Aquando da resolução do sistema de equações, os alunos apresentam algumas dificuldades na manipulação algébrica. Os alunos num primeiro momento pedem ajuda ao professor cooperante para resolver o sistema de equações (fala 24). A Catarina indica que a tangente de 16º é 0,29, mas depois não consegue desenvolver a equação $\frac{29+0,29x}{x} = 0,4$, uma vez que no numerador e no denominador têm-se a incógnita x (fala 25). Após a indicação do professor cooperante, a Catarina percebe que deve multiplicar o segundo membro da equação por x, e desenvolve a equação (falas 26-28). A Susana mostra algum desconforto na manipulação algébrica, pois parece que precisa das explicações da Catarina para continuar a resolver o sistema de equações (falas 29-32). No momento em que estão a resolver a equação $h = 0,29 \times (100 + 263,6)$, a Susana sugere que se aplique a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, mas a Catarina ignora a sugestão da colega e afirma, “Temos que resolver primeiro o que está entre parênteses”, quando no fundo ambas as sugestões são correctas (falas 33-35):

24 - Susana: Oh stôr como é que isto se faz?
25 - Catarina: Isto aqui dá 0,29 e agora como é que eu saio daqui?
26 - Professor cooperante: Se isto esta a dividir pelo x…
27 - Catarina: $29 = 0,4x - 0,29x$. Agora $29 = 0,11x$. Agora $x = \frac{29}{0,11}$.
28 - Catarina: Dá 263,6.
29 - Susana: E agora?
30 - Catarina: E agora temos que substituir aqui. Fica h igual 0,29 vezes entre parênteses 100 mais este número.
31 - Susana: E agora? Continua.
32 - Catarina: Agora 100 mais…
33 - Susana: Catarina, tens que fazer este vezes este e este vezes este.
34 - Catarina: Não. Temos que resolver primeiro o que está entre parênteses.
35 - Susana: Ah prontos. Desculpa então.
36 - Catarina: Que dá 362,6 e agora…
37 - Susana: Continua.
38 - Susana: h igual.
39 - Catarina: 105,44
40 - Professora: Então vão aonde?
41 - Catarina: Deu-nos isto mas acho que está mal.
42 - Professora: Isso não é a altura isso é o x. O que vocês querem saber é o h. Agora têm que substituir este…
43 - Susana: Já substituímos cá em baixo.
44 - Catarina: Agora temos que somar à altura mais 1,5.
45 - Professora: Exacto.
46 - Catarina: Agora aqui é 105,44 + 1,5.
47 - Susana: Dá aproximadamente 107 metros.
48 - Tiago: Agora na alínea b, temos que calcular a altura da montanha em relação ao nível do mar sabendo que os pontos A e B estão a 700 m de altitude.

49 - Catarina: Então temos que adicionar aos 107 metros da montanha, mais 700 metros.
50 - Susana: Dá 807 metros.

Neste excerto podemos observar a produção do grupo 1. Nota-se um défice na utilização da simbologia, nomeadamente na utilização do símbolo de grau. Os alunos quando chegam aos resultados das duas incógnitas, admite o valor como exacto usando o simbolo indicativo de igual, quando na realidade deviam utilizar o sinal de aproximadamente, pois tratam-se de valores aproximados:



$\tan 16 = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{" adjacente}}$ | $\tan 16 = \frac{h}{100+x}$ | $\tan 22 = \frac{h}{x}$

$$\begin{cases} \frac{h}{100+x} = 0{,}29 \\ \frac{h}{x} = 0{,}4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 0{,}29 \times (400+x) \\ \frac{0{,}29 \times (400+x)}{x} = 0{,}4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ \frac{29+0{,}29x}{x} = 0{,}4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 29+0{,}29x = 0{,}4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 29 = 0{,}4x - 0{,}29x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 29 = 0{,}11x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = 0{,}29 \times (400+263{,}6) \\ x = \frac{29}{0{,}11} = 263{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 105{,}44 \\ x = 263{,}6 \end{cases}$$

$h = 105{,}44 + 1{,}5 \approx 107$ m

R: A altura da montanha é de 107 m.

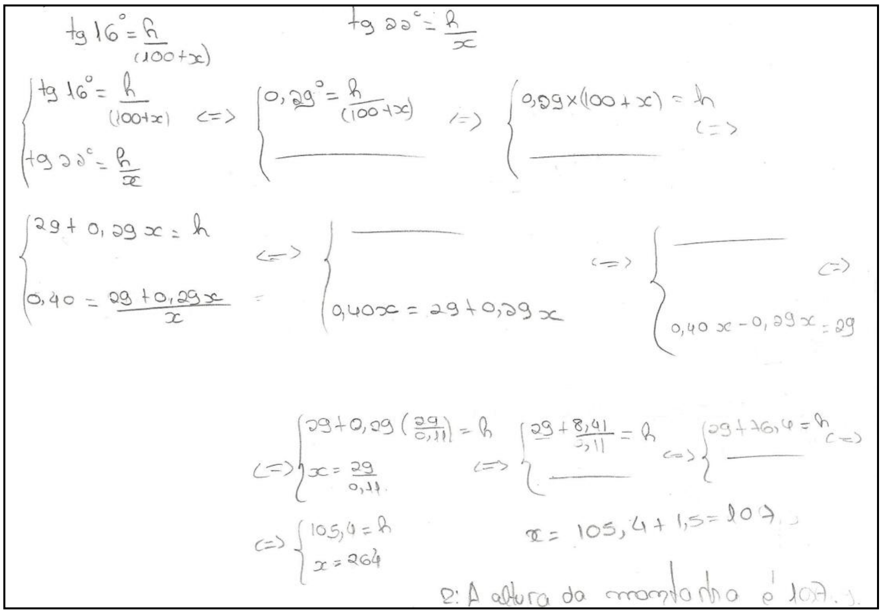
b) A altura da montanha em relação ao nível do mar, sabendo que os pontos A e B estão a 700 m de altitude.

(Retirado de Matemática em Acção 9º ano – 2º parte)

$107 + 700 = 807$ m

R: Está a 807 m em relação ao nível do mar.

O grupo 3 resolve o problema através de um sistema de equações. Este grupo opta por desenvolver a 1.ª equação em ordem a *h*. Depois substitui essa expressão na 2.ª equação e desenvolve-a até encontrar o valor de *x*. De seguida, substitui *x* na 1.ª equação chegando a solução do problema, que é descobrir o valor de *h*. Finalmente para obter a altura da montanha adiciona 1,5 a *h* e apresenta o resultado arredondado às unidades:


$\operatorname{tg} 16° = \frac{h}{(100+x)}$ $\operatorname{tg} 22° = \frac{h}{x}$

$\begin{cases} \operatorname{tg} 16° = \frac{h}{(100+x)} \\ \operatorname{tg} 22° = \frac{h}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,29° = \frac{h}{(100+x)} \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,29 \times (100+x) = h \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 29 + 0,29x = h \\ 0,40 = \frac{29+0,29x}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ 0,40x = 29 + 0,29x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ 0,40x - 0,29x = 29 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 29 + 0,29\left(\frac{29}{0,11}\right) = h \\ x = \frac{29}{0,11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 29 + \frac{8,41}{0,11} = h \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 29 + 76,4 = h \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$

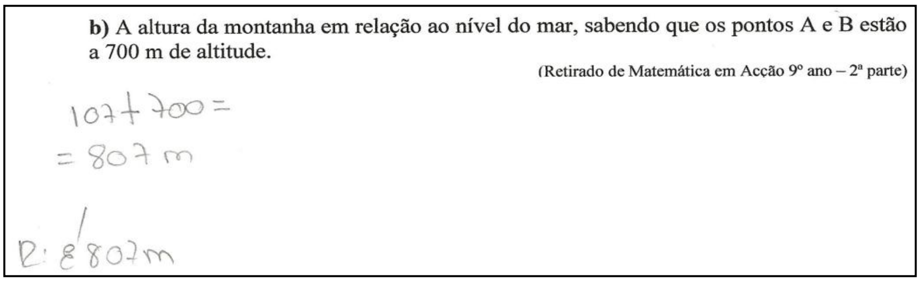
$\Leftrightarrow \begin{cases} 105,4 = h \\ x = 264 \end{cases}$ $x = 105,4 + 1,5 = 107$

R: A altura da montanha é 107.

Nesta resolução encontram-se um erro de arredondamento pois os alunos ao efectuarem o cálculo $\frac{8,41}{0,11} \simeq 76,45$ arredondam erradamente para 76,4 e, portanto, as duas últimas equações encontram-se erradas. Aquando da resposta, os alunos representam por x a altura total da montanha o que não é correcto, uma vez que no sistema de equações já existe uma incógnita com a mesma letra, desta forma, os alunos deviam ter escolhido outra letra para representar a altura total da montanha. Estes alunos manifestam falta de rigor matemático, uma vez que não dão importância aos símbolos matemáticos que utilizam.

O grupo desde o início que utiliza valores aproximados, portanto, quando chega à resposta final do problema o valor já não é o correcto, pois já sofreu vários arredondamentos.

Na resolução da alínea b), o grupo 3 utilizou o mesmo raciocínio que o grupo 1. Ao valor calculado na alínea a) acrescentou 700 metros, obtendo assim, a altura da montanha em relação ao nível do mar:


b) A altura da montanha em relação ao nível do mar, sabendo que os pontos A e B estão a 700 m de altitude.

(Retirado de Matemática em Acção 9º ano – 2ª parte)

107 + 700 =
= 807 m

R: ~~8~~ 807m

O grupo 4, tal como os anteriores, utilizou a mesma estratégia de resolução como podemos observar pelo diálogo seguinte:

Rafael: Stôra venha cá sff.
Rafael: Contamos com que coiso para fazer aqui a altura?
Professora: A altura é isto certo?
Rafael: Até aqui?
Professora: Sim
Rui: Stôra aqui sabemos que é 1,5.
Rafael: Mas agora como é que eu faço? Não estou a perceber bem isto agora. Eu só tenho um ângulo. Dois ângulos pronto.
Professora: Vocês aqui têm dois triângulos e querem descobrir a altura da montanha que é isto. Vocês têm o ângulo de 16 e têm este cateto. Este cateto é o quê em relação ao ângulo de amplitude 16º?
Raquel: É o oposto.
Professora: E este?
Raquel: Adjacente.
Professora: Então vão utilizar que razão trigonométrica?
Rafael e Rui: A tangente.
Professora: Então tangente de 16 vai ser igual ao quê?
Rafael: Igual a h sobre 100+ x.
Professora: Muito bem. Agora tens que fazer a mesma coisa para o outro.
Raquel: Então fica tangente de 22 igual a h sobre x.
Professora: Agora tens duas incógnitas e duas equações como é que vais resolver?
Rafael e Raquel: Sistema.
Professora: Muito bem.

Este grupo escolheu a 2.ª equação para resolver em ordem a *h* e depois substituiu-a na 1.ª equação. Desenvolveu a equação através da manipulação algébrica e chegou ao valor de *x*. De seguida substituiu esse valor na 2.ª equação e calculou o valor de *h*. Finalmente somou os 1,5 metros e obteve a altura total da montanha:

1 - Rui: Esta aqui é mais fácil para isolar o x ou o h.
2 - Rafael: Sim eu isolei também nessa. Fica 0,4 vezes x.
3 - Raquel: Não podemos por 0,40 tem que ser 0,4?
4 - Rafael: É mais fácil 0,4.
5 - Rafael: Oh stôra. Agora passa este aqui a dividir e este a multiplicar e fica x a dividir por x.
6 - Professora: Não. Agora é mais fácil este vezes este que fica igual àquele.
7 - Rafael: Como?
8 - Professora: Então é aplicar a propriedade distributiva 100 vezes este mais x vezes este.
9 - Professora: 100 vezes 0,29…
10 - Rafael: Fica 29 + 0,29x = 0,4x
11 - Rui: Mede quanto a altura da montanha?
12 - Raquel: Dá 105, 452 + 1,5.
13 - Rafael: 106,94.
14 - Rafael: Oh stôra já acabei.

$$\begin{cases} \tan 16 = \frac{h}{100+x} \\ \tan 22 = \frac{h}{x} \end{cases} \begin{cases} 0{,}29 = \frac{h}{100+x} \\ 0{,}4 \times x = h \end{cases} \begin{cases} 0{,}29 = \frac{0{,}4 \times x}{100+x} \\ \text{———} \end{cases} \begin{cases} 29 + 0{,}29x = 0{,}4x \\ \text{———} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 29 = 0{,}4x - 0{,}29x \\ \text{———} \end{cases} \begin{cases} 29 = 0{,}11x \\ \text{———} \end{cases} \begin{cases} 263{,}6 = x \\ \text{———} \end{cases} \begin{cases} \text{———} \\ 0{,}4 \times 263{,}6 = h \end{cases} \begin{cases} x = 263{,}6 \\ h = 105{,}44 \end{cases}$$

$105{,}44 + 1{,}5 = 106{,}94$ R: a altura da montanha é 106,94

Através do diálogo observamos algumas das dificuldades destes alunos. Na primeira fala da Raquel, podemos constatar que ela apresenta algumas dificuldades no que diz respeito ao sentido do número, uma vez que escrever 0,4 ou 0,40 para ela são coisas distintas (fala 3). O Rafael neste excerto do diálogo também demonstra algumas dificuldades em resolver o sistema de equações, nomeadamente na manipulação algébrica da equação $0{,}29 = \frac{0{,}4 \times x}{100+x}$ (falas 5-9). O Rafael nesta equação como tinha tanto no numerador como no denominador a incógnita *x*, pensava simplificar a fracção eliminando os dois *x* o que é impossível (fala 5). Pelo contrário, devia ter multiplicado o 1.º membro da equação por 100 + x e depois então, aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição fazendo $0{,}29 \times 100 + 0{,}29 \ \times x$.

Neste excerto podemos observar novamente um défice na utilização da simbologia, nomeadamente na utilização do símbolo de grau e de metros.

Na resolução da alínea b) como podemos ver pelo diálogo, o aluno Rafael não estava a interpretar correctamente o enunciado e, portanto, teve que ser ajudado pelo professor cooperante:

Rafael: Mas agora a b) os pontos A e B ainda estão mais abaixo. Já não é esta altura ainda é mais este bocado não?
Professor cooperante: O A e B estão a 700 metros de altitude
Rafael: Então estão mais abaixo do que eu calculei. Eu calculei até aqui.
Professor cooperante: Sim. Mas agora repara esta altura aqui é 700.
Rafael: Sim até ai eles estão a 700 metros.
Professor cooperante: Isto aqui é 700 certo? Logo tu queres saber isto tudo mais 700.
Rafael: Ah ok
Rui: Agora tens que somar esse valor mais 700.
Raquel: Dá 806,94.

A Catarina interpreta a figura e constata que existem dois triângulos que têm em comum o mesmo cateto. A partir daí utiliza a razão trigonométrica seno em cada um dos triângulos e determina a altura da árvore $\overline{DC}$. Iguala as duas equações e através da manipulação algébrica obtém a expressão enunciada:

Na figura estão representados 2 triângulos rectângulos, em que o cateto oposto é o mesmo.
Assim, através da fórmula do seno de cada triangulo consegue-se saber o valor da hipotenusa ($\overline{AD}$) que falta.

$Sen\,40 = \frac{\overline{DC}}{\overline{AD}}$

$\overline{DC} = sen\,40 \times \overline{AD}$

$Sen\,60 = \frac{\overline{DC}}{10}$

$\overline{DC} = sen\,60 \times 10$

$sen\,40 \times \overline{AD} = sen\,60 \times 10$

$\overline{AD} = \frac{sen\,60 \times 10}{sen\,40}$

Nesta resolução a aluna omite somente o sinal indicativo de grau.

A Sofia analisou a figura e através da manipulação das razões trigonométricas, chegou à expressão que era dada no enunciado. Primeiramente, considerou o triângulo rectângulo [DCA] e através da utilização da razão trigonométrica seno, determinou a altura da árvores, depois considerou o triângulo [DCB] e novamente utilizando a razão trigonométrica seno determinou a altura. De seguida, igualou as duas equações que obteve e através da manipulação algébrica chegou á fórmula $\overline{AD} = \frac{10\,sen\,60°}{sen\,40°}$:

$Sen\,40° = \frac{h}{\overline{AD}} \Leftrightarrow h = \overline{AD} \times sen\,40°$

$Sen\,60° = \frac{h}{10} \Leftrightarrow h = 10 \times sen\,60°$

$\overline{AD} \times sen\,40° = 10 \times sen\,60° \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{10\,sen\,60°}{sen\,40°}$

A aluna em vez de explicar o raciocínio do Miguel através de uma pequena composição como era pedido no enunciado do problema, começou por resolver o problema até chegar à fórmula do enunciado.

Se analisarmos a produção da Raquel, observamos que ela elabora uma composição na qual não explica o raciocínio do Miguel, mas sim tenta justificar a expressão dado no enunciado:

o Raquel dividiu em dois triângulos rectângulos e para determimar $\overline{AD}$, fiz 10 m (a hipotenusa) × Sen 60° e dividiu depois tudo pelo sen°40, como a sua hipotemusa também e 10, e descobriu assim a altura da árvore (h).

$$\frac{\text{sem } 60° = \frac{x}{10}}{\text{Sen } 40°} = x = \frac{\text{sen } 60° \times 10}{\text{Sen } 40°} = \text{altura}.$$

Nesta produção verifica-se que a Raquel não está muito familiarizada com as razões trigonométricas, uma vez que perante uma situação de distâncias inacessíveis não é capaz de manipular as razões trigonométricas, de forma a chegar à expressão dada no enunciado do problema.

O problema 3 ficou para trabalho de casa e só a Catarina é que o entregou resolvido, desta forma vamos analisar a estratégia utilizada pela aluna.

A Catarina através da utilização das razões trigonométricas, calcula a altura e a base de um dos triângulos, depois calcula a área do triângulo através da fórmula $\frac{base \times altura}{2}$. Após saber a área de um dos triângulos multiplica por 4 para obter a área dos quatro triângulos. Finalmente, calcula a área do quadrado grande e subtrai a essa área, a área dos quatro triângulos obtendo assim, a área da superfície sombreada:

$\text{Sen } 30 = \frac{x}{4}$
$x = \text{sen}30 \times 4$
$x = 2$

$\cos 30 = \frac{x}{4}$
$x = \text{sen}30 \times 4$
$x = 3{,}5$

$A\Delta = \frac{2 \times 3{,}5}{2}$
$A\Delta = 3{,}5$
$A4\Delta = 3{,}5 \times 4 = 14$
$A\square = 4 \times 4 = 16$
$A▫ = 16 - 14 = 2$

R: A área da superfície sombreada é de 2.

Em relação ao grupo 3 apenas a Sofia e a Bruna resolveram este problema. Como apresentam a mesma resolução consideremos a resolução da Sofia.

Esta aluna começa por calcular a área do quadrado grande. De seguida usa a razão trigonométrica seno para calcular a base de um dos triângulos. Calculada a base, utiliza o teorema de Pitágoras para determinar o valor da altura do triângulo. Após saber estas duas medidas utiliza a fórmula $\frac{base \times altura}{2}$ para calcular a área de um dos triângulos. Depois multiplica por 4 para obter a área dos quadros triângulos e finalmente, à área total do quadrado grande subtrai a área dos quatro triângulos obtendo assim, a área da superfície sombreada:

$$A_{\square} = L \times L \Leftrightarrow A_{\square} = 4 \times 4 \Leftrightarrow A_{\square} = 16$$
$$\text{Sen } 30^\circ = \frac{b}{4} \Leftrightarrow b = 4 \times \text{Sen } 30^\circ \Leftrightarrow b = 4 \times 0{,}5 \Leftrightarrow b = 2$$
$$x^2 = 4^2 - 2^2 \Leftrightarrow x^2 = 16 - 4 \Leftrightarrow x^2 = 12 \Leftrightarrow x = \sqrt{12} \Leftrightarrow x = 3{,}5$$
$$A_{\triangle} = \frac{b \times a}{2} \Leftrightarrow A_{\triangle} = \frac{2 \times 3{,}5}{2} \Leftrightarrow A_{\triangle} = 3{,}5 \text{ m}^2 \Leftrightarrow \quad A_{\triangle} = 3{,}5 \times 4 = 14 \text{ m}^2$$
$$A_{\blacklozenge} = A_{\square} - A_{\triangle(\text{todos})} = 16\text{m}^2 - 14 \text{ m}^2 = 2 \text{ m}^2$$

Apesar de no enunciado do problema não haver nenhuma indicação a aluna optou por indicar a área da superfície em metros quadrados.

Os três alunos do grupo 4 resolveram o problema 3 contudo irei considerar a resolução do Rafael pois este aluno seguiu uma estratégia diferente das já enunciadas.

O aluno começa por usar a razão trigonométrica seno para determinar a altura do triângulo [AHB], depois utiliza o teorema de Pitágoras para determinar a base do triângulo. Como um dos lados do quadrado pequeno faz parte do comprimento da base do triângulo, o aluno ao comprimento da base do triângulo subtrai a altura do triângulo, obtendo assim, o comprimento do lado do quadrado pequeno. Por fim, com essa medida calcula a área do quadrado e indica a área da superfície sombreada arredondada às centésimas:

$$\text{sen}30 = \frac{x}{4} \Leftrightarrow 2 = x$$
$$x^2 = 4^2 \; 2^2$$
$$x^2 = 12$$
$$x = \sqrt{12}$$
$$x \approx 3{,}46$$
$$3{,}46 - 2 = 1{,}46$$
$$1{,}46 \times 1{,}46 \simeq 2{,}13 \text{ cm}^2$$

O Rafael interpreta o problema elabora uma estratégia de resolução correcta, mas no final não dá resposta ao problema. Após calcular a área da superfície sombreada, utiliza a unidade de medida, centímetros apesar do enunciado não referir qualquer unidade de medida.

5.4. Análise do teste de avaliação

Antes de iniciar a análise do teste de avaliação, é necessário informar que um dos alunos faltou no dia do teste e, portanto, somente 17 alunos o realizaram. A ficha de avaliação era constituída por duas partes. A primeira tinha quatro perguntas de resposta múltipla e a segunda incluía três tarefas para resolver (Anexo 5).

Analisadas as respostas dadas à primeira parte, constatei que a maioria dos alunos sabe identificar a razão trigonométrica seno, daí 94,1% dos alunos ter acertado na 1.ª questão (Quadro 4). A segunda questão já envolve um conhecimento das várias razões trigonométricas, mas também é necessário que os alunos interpretem a figura, uma vez que esta encontra-se em várias posições, daí quando confrontados com esta questão, apenas 47% dos alunos conseguem responder correctamente (Quadro 4). Da análise destas duas questões podemos concluir, que os alunos que responderam correctamente à questão 1 mas erraram a questão 2, ainda não sabem utilizar as razões trigonométricas, pois quando confrontados com contextos diferentes não souberam aplicá-las. Na questão 3 houve dez alunos que responderam correctamente, contudo, como a questão diz "Das seguintes afirmações indica quais as verdadeiras." alguns desses alunos foram levados em erro e assinalaram sempre mais que uma resposta, o que levou a apenas 17,6 % ter acertado esta questão (Quadro 4). Na questão 4, apenas 23,5% dos alunos responderam correctamente (Quadro 4). Muitos alunos foram levados em erro e escolheram a primeira resposta ou a última que relaciona a tangente com o seno e o co-seno.

Quadro 4. Número de alunos que respondeu correctamente às questões da primeira parte do teste de avaliação

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**
Número de alunos (%)	16 (94,1%)	8 (47%)	3 (17,6%)	4 (23,5%)

Na segunda parte do teste, na questão 1.1 (Quadro 5) 10 alunos responderam correctamente. Contudo, todos os alunos à excepção de dois, utilizaram o teorema de Pitágoras para resolver a alínea, porém, nem todos o fizeram correctamente, como podemos observar pelo excerto seguinte:

$$a^2 = 12^2 - 11^2$$
$$a^2 = 144 - 121$$
$$a^2 = 23$$
$$a = \sqrt{23}$$
$$a = 4{,}79$$

As dificuldades mais sentidas nesta questão foram os arredondamentos, a omissão do sinal de equivalência entre as equações, assim como, o sinal de aproximadamente. Os alunos ao resolverem a alínea, utilizaram uma resolução em coluna.

Na questão 1.2 houve seis alunos (35,3%) que a resolveram correctamente (Quadro 5). Os alunos utilizaram a função inversa do seno ou da tangente conforme os dados que estavam a considerar.

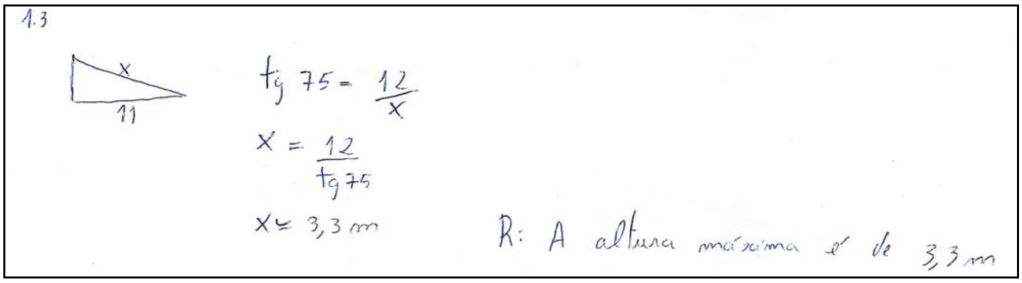
1.2) $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{11}{12} \simeq 0{,}92$

$\text{sen}\,\alpha^{-1}(0{,}92 \simeq 66{,}9.$ R: O α vale $66{,}9^{\underline{o}}$

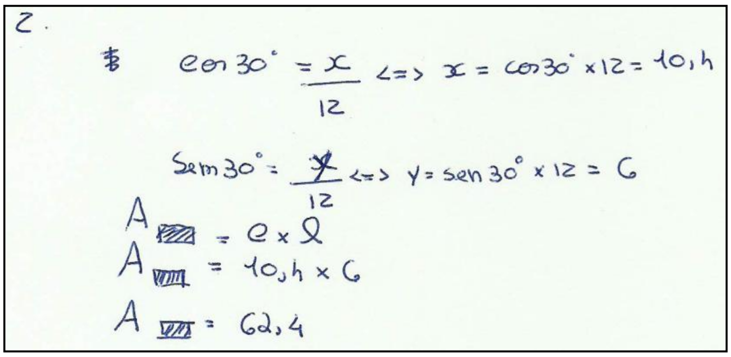
Como podemos observar no excerto, alguns alunos apresentam dificuldades na comunicação matemática, nomeadamente, na utilização de símbolos matemáticos, tais como, o símbolo de grau e de equivalente. É ainda notório que houve dificuldades em passar da razão trigonométrica para a função inversa. Alguns alunos mostraram dificuldades nos arredondamentos. Houve apenas dois alunos, o Vasco e o Ricardo que não resolveram esta questão.

Na questão 1.3, apenas cinco alunos responderam correctamente (Quadro 5). Esses alunos interpretaram a situação e utilizaram correctamente a razão trigonométrica seno, para determinar a altura máxima que se pode alcançar com a escada. Houve dois alunos que decidiram desenhar uma figura que ilustrasse a situação, contudo, a figura desenhada continha os dados errados, levando a que os alunos utilizassem erradamente a razão trigonométrica tangente como podemos ver no excerto:



Os alunos manifestaram ainda dificuldades, nos arredondamentos e na utilização de símbolos matemáticos, tais como o símbolo de grau e de equivalente, como também se pode observar neste excerto. Alguns também omitiam nas respostas a unidade de medida que estavam a utilizar. É ainda de salientar que cinco alunos deixaram esta questão em branco.

Na questão 2, oito alunos responderam correctamente (Quadro 5). A maior parte dos alunos utilizou a mesma estratégia de resolução, que passou por utilizar a razão trigonométrica seno e co-seno para determinar a largura e o comprimento do rectângulo. Depois aplicaram a fórmula da área do rectângulo e chegaram ao resultado pretendido, como podemos observar na produção escrita:



Muitos dos alunos foram penalizados, devido aos arredondamentos incorrectos, mas também, devido à dificuldade que apresentaram na manipulação algébrica de equações. Alguns alunos continuam a omitir o sinal de grau.

Por último, na questão 3, apenas quatro alunos (23,5%) conseguiram resolvê-la correctamente (Quadro 5). A estratégia de resolução consistiu em considerar os dois triângulos separadamente e para cada um deles, escrever a razão trigonométrica tangente. Após determinarem a distância de cada barco ao ponto P, subtraíram as distâncias e determinam a distância entre os dois barcos:

3

$tg\,33 = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{" adjacente}}$

$tg\,33 = \frac{125}{x}$

$x = \frac{125}{tg33}$

$x \simeq 192{,}5$

$tg\,53 = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{" adjacente}}$

$x = \frac{125}{tg53}$

$x \simeq 94{,}2$

$192{,}5 - 94{,}2 \simeq 98{,}3$ m

R: os barcos encontram-se a 98,3 m de distancia.

A maioria dos alunos apresentou dificuldades na interpretação do enunciado do problema, o que levou a que desenvolvessem uma estratégia de resolução errada. Essa estratégia passou pelo uso incorrecto de razões trigonométricas, tais como, o seno. Outra dificuldade manifestada pelos alunos foi os arredondamentos mal feitos. O uso de símbolos matemáticos, nomeadamente o sinal de grau e de equivalência, continuam a ser omissos, como podemos observar no excerto acima.

De seguida, são apresentadas no quadro 5, o número de respostas correctas obtidas nas várias questões da segunda parte do teste.

Quadro 5. Número de alunos que respondeu correctamente às questões da segunda parte do teste de avaliação

Questão	**1**			**2**	**3**
	1.1	**1.2**	**1.3**		
Número de alunos (%)	10 (58,8%)	6 (35,3%)	5 (29,4%)	8 (47,1%)	4 (23,5%)

Para finalizar a classificação do teste foi dividida em quatro categorias. São elas: insuficiente que vai até 49%, suficiente que varia entre 50% e 69%, bom que varia entre 70% e 89% e por último, muito bom que vai desde 90% até 100%. Como podemos observar no quadro 6 as classificações do teste distribuíram-se da seguinte forma:

Quadro 6. Classificações obtidas no teste de avaliação

Classificação	**Insuficiente**	**Suficiente**	**Bom**	**Muito Bom**
Percentagem de alunos	11,8%	47%	29,4%	11,8%

Da análise do quadro, podemos constatar que as classificações foram razoáveis, havendo somente duas negativas. A maior parte das notas centrou-se na classificação suficiente.

5.5. Análise das respostas do questionário

Com o objectivo de recolher informação sobre o modo como os alunos encararam as tarefas na sua aprendizagem, foi-lhes colocado um primeiro grupo de questões (1 até 4), incluídas no questionário realizado no final das aulas (Anexo 6). A grande maioria dos alunos (83,3%), indica que as tarefas propostas foram interessantes para a sua aprendizagem (Quadro 7).

Quadro 7. Importância das tarefas para a aprendizagem

	N.º Alunos	%
Sim	15	83,3
Não	3	16,7
Total	**18**	**100**

Os alunos justificam que as tarefas foram interessantes para a sua aprendizagem, porque "foi em trabalho de grupo o que estimula mais interesse". Há um aluno que refere, "serviu para aprendermos melhor a matéria que estava no programa, ou seja, trigonometria. Eu pessoalmente, preferi as aulas dadas assim acho que foi um bom método de ensino, por mim devíamos continuar" (Quadro 8).

Quadro 8. Justificação da importância ou não das tarefas

Opinião	N.º Alunos	%
Sim:		
Tarefas boas e explícitas	1	5,6
Foi em grupo	2	11,1
Aprendemos coisas novas e ajudaram a estudar para o teste	2	11,1
Aprendemos melhor a matéria	4	22,2
Não responde ao que é pedido	6	33,3
Não:		
Não percebi a matéria	1	5,6
Fichas eram confusas	1	5,6
Não respondeu	1	5,6
Total	**18**	**100**

Em relação à segunda questão do questionário, foi pedido aos alunos que fizessem uma avaliação das fichas de trabalho, de modo a saber se tinham sido, significativas na sua aprendizagem. A avaliação foi feita numa escala de 4 níveis. No quadro 9 podemos observar as respostas dos alunos.

Quadro 9. Opinião dos alunos sobre quais as fichas de trabalho mais significativas para a aprendizagem

	Discordo Totalmente	Discordo Parcialmente	Concordo Parcialmente	Concordo Totalmente
Ficha de trabalho 1	-	-	5 (27,8%)	13 (72,2%)
Ficha de trabalho 2	-	-	13 (72,2%)	5 (27,8%)
Ficha de trabalho 3	-	1 (5,6%)	8 (44,4%)	9 (50%)
Ficha de trabalho 4	-	1 (5,6%)	9 (50%)	8 (44,4)
Ficha de trabalho 5	-	2 (11,1%)	7 (38,9)	9 (50%)

Da análise do quadro 9, podemos concluir que todas as fichas de trabalho de uma forma ou de outra foram significativas para a aprendizagem dos alunos. A ficha que, na opinião dos alunos foi a mais significativa para a sua aprendizagem, foi a ficha de trabalho 1 com 13 votos (72,2%) na categoria "Concordo Totalmente". Seguindo-se a fichas de trabalho 3 e 5 com nove votos (50%) cada. Apenas um aluno (5,6%) refere que tanto a ficha de trabalho 3 como a 4 foram pouco significativas para a sua aprendizagem. A ficha de trabalho 5 foi pouco significativa para dois dos alunos (11,1%). Quando questionados sobre a escolha das fichas, os alunos referem que escolheram o ponto 4 "Concordo Totalmente" pois "Foi a que mais gostei e percebi melhor" ou "Foi a mais significativa para a minha aprendizagem". Uma aluna indica que concordou totalmente na ficha 1 pois "… foi onde aprendemos as noções básicas de Trigonometria logo para mim foi a mais importante".

No questionário é notório que os alunos não sabem a distinção entre ficha de trabalho e tarefa. Quando confrontados sobre qual a tarefa que contribui mais para a sua aprendizagem, indicam as fichas de trabalho que realizaram. Desta forma, existe uma percentagem elevada de alunos (61,1%), que não responde correctamente à questão (Quadro 10).

Quadro 10. Tarefa que contribui mais para a tua aprendizagem

Tarefa	**N.º Alunos**	**%**
Todas	7	38,9
Não responde ao que é pedido	11	61,1
Total	**18**	**100**

Os alunos referem que todas as tarefas contribuíram para a sua aprendizagem, pois permitiram aplicar os conhecimentos adquiridos, através de exercícios importantes. Um aluno refere ainda que, “as tarefas foram boas “bases” para a matéria futura” (Quadro 11).

Quadro 11. Justificação do contributo da tarefa para a aprendizagem

Opinião	**N.º Alunos**	**%**
Realização de exercícios importantes para a aprendizagem	3	42,9
Aplicar conhecimentos	1	14,3
Boas bases para a matéria futura	1	14,3
Não respondeu	2	28,6
Total	**7**	**100**

Como podemos observar no quadro 12, a maioria dos alunos (77,8%) necessitou de apoio na realização das tarefas.

Quadro 12. Necessidade de apoio na realização das tarefas

	N.º Alunos	**%**
Sim	14	77,8
Não	4	22,2
Total	**18**	**100**

Após analisar as respostas, constatei que, as fichas 4 e 5 foram as indicadas pelos alunos como as fichas de trabalho onde precisaram de mais apoio, com respectivamente 57% e 42,7% (Quadro 13). Provavelmente, os alunos sentiram mais dificuldades nestas duas fichas, pois são fichas mais abstractas que envolvem uma certa manipulação algébrica na resolução dos exercícios e dos problemas.

Quadro 13. Tarefas em que os alunos necessitam de apoio

Tarefa	N.º Alunos	%
4	2	14,3
5	4	28,6
4 e 5	1	7,1
3, 4 e 5	1	7,1
2, 3, 4 e 5	1	7,1
Todas	1	7,1
Não responde ao que é pedido	4	28,6
Total	**14**	**100**

Grande parte dos alunos (42,9%), indica a resolução de exercícios e/ou problemas como a fonte de dificuldade na resolução das tarefas. Apenas 21,4% dos alunos, indica ter tido dificuldades nas relações entre razões trigonométricas. (Quadro 14).

Quadro 14. Dificuldades sentidas na resolução das tarefas

Opinião	N.º Alunos	%
Relações entre razões trigonométricas	3	21,4
Resolver os exercícios e/ou os problemas	6	42,9
Não responde/não responde ao que é pedido	5	35,7
Total	**14**	**100**

Quando confrontados com as dificuldades mencionadas no quadro 14, apenas 35,7% dos alunos, indica ter pedido o auxílio dos professores e/ou colegas para resolver a questão ou necessitaram de uma nova explicação da matéria para continuar a tarefa (Quadro 15).

Quadro 15. Tipo de apoio

Opinião	N.º Alunos	%
Ajuda dos professores e/ou dos colegas	5	35,7
Explicação da matéria	5	35,7
Não responde	4	28,6
Total	**14**	**100**

De seguida, com o objectivo de retirar informação sobre os aspectos positivos que estas aulas tiveram para os alunos e quais as dificuldades sentidas por estas aulas, foi-lhes colocado um segundo grupo de questões (5 e 6), incluídas também no questionário (Anexo 6).

A maior parte dos alunos (38,9%), responde que um dos aspectos positivos destas aulas foi o trabalho de grupo. Contudo, 27,8% dos alunos, indica que um dos aspectos positivos foi terem aprendido a resolver problemas (Quadro 16).

Quadro 16. Aspectos positivos das aulas para a aprendizagem

Aspectos positivos	N.º Alunos	%
Boas fichas	3	16,7
Trabalhar em grupo	7	38,9
Adquirir novos conhecimentos	1	5,6
Aprendi a resolver problemas	5	27,8
Não responde/Não responde ao que é pedido	2	11,1
Total	**18**	**100**

Das opiniões dos alunos, podemos salientar que "a resolução de problemas foi interessante porque foi em grupo" e, portanto, como indica um aluno "quando não se apanha alguma coisa, há outra pessoa que apanha e nos ajuda". Um aluno refere que o trabalho de grupo possibilitou a sua aprendizagem, uma vez que "aprendi mais, percebi as dificuldades dos outros colegas e diversos métodos de resolução" (Quadro 17). Estes alunos através das suas opiniões, demonstram a importância de trabalhar em grupo e o espírito de entre ajuda, que se desenvolve entre os membros do grupo.

Alguns alunos (25%) referem que o facto de as fichas serem boas, permitiu praticarem mais e adquirir novos conhecimentos (Quadro 17).

Quadro 17. Opinião dos alunos sobre os aspectos positivos das aulas

Opinião	N.º Alunos	%
Boas fichas		
Praticar e adquirir novos conhecimentos	4	25
Trabalhar em grupo		
É divertido	1	6,25
Entre ajuda entre os colegas	1	6,25
Percebi as dificuldades dos colegas e vários métodos de resolução	1	6,25
Não responde	5	31,25
Adquirir novos conhecimentos		
Não responde	1	6,25
Aprendi a resolver problemas		
São as minhas principais dificuldades	1	6,25
Foi em grupo	1	6,25
Não responde	1	6,25
Total	16	100

Quando confrontados com as dificuldades que sentiram durante estas aulas, 22,2% dos alunos, indicam a resolução de problemas. Houve também dificuldades em acompanhar o ritmo da aula, por 11,1% dos alunos, assim como, perceber a matéria que foi leccionada (Quadro 18).

Quadro 18. Dificuldades sentidas nas aulas

Dificuldades	N.º Alunos	%
Nenhumas	4	22,2
Resolução de problemas	4	22,2
Acompanhar o ritmo das aulas	2	11,1
Interacção do grupo	1	5,6
Perceber a matéria	2	11,1
Não responde	5	27,8
Total	**18**	**100**

De acordo com o quadro 18, quatro alunos (22,2%) indicam que não tiveram dificuldades, pois "os professores ajudavam e explicavam mais que uma vez". Um aluno indica que "percebi bastante bem a matéria, logo não tive dificuldades".

A resolução de problemas é uma das principais dificuldades referidas pelos alunos nestas aulas. Um aluno refere que "não conseguia dar o primeiro passo na resolução de problemas" e outro afirma que "os problemas eram complicados".

Dois alunos (22,2%) mencionam que não perceberam a matéria, porque "era muito difícil" e "muito complicada" (Quadro 19).

Quadro 19. Opinião dos alunos acerca das dificuldades

Opinião	**N.º Alunos**	**%**
Resolução de problemas		
Complicados	1	11,1
Não conseguia dar o 1.º passo	1	11,1
Não estive com atenção	1	11,1
Não responde	1	11,1
Acompanhar o ritmo		
Não responde	2	22,2
Interacção do grupo		
Não responde	1	11,1
Perceber a matéria		
Difícil	2	22,2
Total	**9**	**100**

Capítulo 6

Conclusões Finais

Este capítulo inicia-se com uma conclusão final, onde se procura dar resposta às questões inicialmente formuladas, tendo por base o enquadramento teórico realizado. São referidas as limitações que foram consideradas mais relevantes, assim como, sugeridas algumas recomendações para estudos futuros. Por fim, termino com uma reflexão pessoal sobre este estudo, onde refiro as aprendizagens e as implicações na minha prática profissional.

6.1. Conclusões do estudo

Neste estudo, o ensino da unidade didáctica Trigonometria do triângulo rectângulo foi feito através da resolução de problemas Hatfield (1978). Nestas aulas o tema Trigonometria do triângulo rectângulo foi ensinado através da elaboração de fichas de trabalho que continham problemas, isto é, toda a situação para a qual o aluno não dispõe de um caminho imediato para encontrar a solução.

Este tipo de ensino proporcionou um contexto de trabalho cooperativo entre os alunos, o que facilitou a exploração, compreensão e aprendizagem dos vários conceitos matemáticos envolvidos no tema da Trigonometria do triângulo rectângulo.

Com base na análise de dados posso concluir que os grupos 1 e 3 em algumas tarefas utilizaram o modelo de Polya e cumpriram com os objectivos pretendidos no Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem para o 3.º ciclo do Ensino Básico (ME, 1991a) para a resolução de problemas, uma vez que perante um problema interpretaram a informação que lhes foi fornecida, elaboraram uma estratégia de resolução e colocaram-na em prática. Quando chegavam a uma solução que não era a correcta, reviam a estratégia e por fim, criticavam a solução obtida. O grupo 4 contudo não criticava a solução do problema admitindo sempre que estava correcta.

Para resolver problemas os alunos necessitam de elaborar estratégias de resolução, como indica Borralho (1995, citado por Ribeiro, 2005). Segundo pude observar pela análise de dados, a estratégia mais utilizada pelos três grupos na resolução de problemas é identificar a informação pretendida, a informação dada e a informação de que se necessita. Quando confrontados com problemas geométricos, os alunos seguem a estratégia de utilizar o desenho para compreenderem melhor a informação que lhes é dada. Se confrontados com problemas que não dispõem de nenhuma imagem, então aí a estratégia de resolução passa por fazer um desenho para visualizar melhor a situação.

Quando a resolução de um problema pode ser feita por dois caminhos distintos, um utilizando a Trigonometria do triângulo rectângulo e outro utilizando conhecimentos anteriormente adquiridos, os alunos escolhem o caminho em que são utilizados os conhecimentos anteriores. Os grupos, conforme o problema, utilizaram os conhecimentos anteriores que tinham sobre decomposição de figuras, classificação de triângulos, ângulos internos de um triângulo, teorema de Pitágoras, área de um polígono e sistema de equações.

Na resolução de problemas, os alunos colocaram em prática alguns dos conhecimentos que foram adquirindo sobre a Trigonometria do triângulo rectângulo. Inicialmente, os alunos identificam o triângulo rectângulo e observam os elementos do triângulo que lhes são dados, (cateto oposto ao ângulo que estão a considerar, cateto adjacente ao ângulo considerado e hipotenusa). Quando são fornecidas algumas medidas do triângulo rectângulo e o objectivo é determinar o valor de um ângulo, os alunos mediante os dados de que dispõem utilizam as definições de razões trigonométricas seno, co-seno e tangente. Depois, para determinarem o valor do ângulo aplicam a função inversa da razão trigonométrica. Quando o objectivo é determinar um dos elementos do triângulo rectângulo, os alunos utilizam os conhecimentos que têm sobre as razões trigonométricas e depois mediante manipulação algébrica descobrem o elemento desconhecido.

Os alunos usufruíram da calculadora nas aulas de Matemática. Este recurso revelou-se um instrumento de cálculo importantíssimo nestas aulas de resolução de problemas, pois permitiu efectuar cálculos com maior facilidade, que de outra forma se tornariam morosos, dando mais tempo aos alunos para se focarem nas estratégias de resolução (Porfírio, 1993; Silva, 1989). Contudo, este manuseamento necessário da calculadora leva a que os alunos muitas vezes confiem no resultado obtido não se questionando sobre a sua veracidade.

As maiores dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução de problemas não estiveram propriamente ligadas ao tema da Trigonometria do triângulo rectângulo, pois, os alunos sabiam as definições das razões trigonométricas e dada uma determinada situação eram capazes de aplicá-las. As dificuldades estavam mais concentradas em conhecimentos que os alunos já deviam ter adquirido. Por exemplo, nos três grupos verificou-se uma fraca utilização dos símbolos matemáticos. Em todos os grupos em algumas resoluções é omisso o símbolo de equivalência entre equações, assim como, o símbolo de grau e de aproximadamente. O arredondamento dos números, também se manifesta uma dificuldade para alguns dos alunos. Contudo, após serem chamados à atenção para esse facto, continuam a cometer o mesmo erro o que demonstra que não é um erro de distracção, mas que não sabem fazer um arredondamento. O grupo 3 numa das resoluções apresenta dificuldades ao nível da escrita matemática, omitindo a solução negativa de uma equação do 2.º grau e omitindo as unidades de medida no cálculo de uma área. Quando confrontados com um sistema de equações, alguns grupos mostraram dificuldades na manipulação algébrica de equações.

Através deste método pude observar que alguns alunos com um marcado insucesso a Matemática se entusiasmaram pelo trabalho de grupo, apesar de alguns deles continuarem a ter grandes dificuldades, o que é facto é que passaram a participar mais nas aulas, manifestando a sua vontade para ir ao quadro mostrar a sua estratégia de resolução e procurar perceber as questões que lhe são colocadas (Abrantes, 1994). Deste ponto de vista, foi uma vitória para mim ter proporcionado a estes alunos momentos em que estiveram interessados e empenhados a fazer Matemática (NCTM, 2008, Ponte *et al.*, 2007, Veloso & Leal, 2005). Comprovou-se depois no teste num momento de avaliação individual, que o esforço valeu a pena pois conseguiram ter positiva (a única) desde o início do ano lectivo.

Contudo, alguns alunos ainda evidenciam dificuldades em resolver de uma forma correcta os problemas que lhe são apresentados, como pude observar pelas aulas e pelos dados das tarefas e do teste escrito. Esses alunos, o Vasco e o Ricardo foram aqueles que desde o início não se mostraram minimamente interessados, o que se veio a agravar ao longo das aulas e culminou nas duas únicas negativas no teste escrito. No teste escrito houve um grande número de alunos que conseguiu mostrar uma certa compreensão dos problemas propostos e procurar estratégias adequadas de resolução, contudo foi notória uma certa dificuldade na resolução do problema 3, que implicava aplicar a razão trigonométrica tangente a cada um dos barcos e depois, subtrair os valores para obter a distância entre os barcos. Neste problema, houve alunos que não fizeram uma interpretação correcta do enunciado, levando por isso a uma estratégia de resolução errada.

Da análise do questionário, também se pode concluir que os alunos gostaram deste método de ensino, principalmente do modo como trabalharam em grupo, uma vez que fazem referência a isso ao longo do questionário. Salientam ainda, que o trabalho de grupo ajudou na aprendizagem, pois permitiu partilhar ideias e conhecimentos, assim como, ter conhecimento de várias estratégias de resolução (Abrantes, 1994; Nunes, 1996). Permitindo ainda perceber as dificuldades dos colegas. Segundo a opinião dos alunos, a ficha mais significativa para a aprendizagem foi a primeira, pois foi a ficha de iniciação do tema, logo representa as “bases”. A ficha onde tiveram mais dificuldades foi a ficha de trabalho 5, talvez por ser uma ficha que envolvesse alguma abstracção, mas também, alguma manipulação algébrica.

Numa perspectiva geral poder-se-á afirmar que as aulas proporcionadas pelo estudo foram ricas, permitindo que os alunos raciocinassem matematicamente sobre os problemas e possibilitaram o desenvolvimento da aptidão para explicitar oralmente o raciocínio utilizado, na procura de uma solução para o problema e para representar por escrito as ideias matemáticas, criando oportunidades para os alunos desenvolverem a comunicação escrita e oral, tanto com os colegas, como com a professora. Além de terem contacto com um vasto leque de estratégias de resolução para um problema, e passarem a ter consciência que não existe apenas um caminho para chegar à solução mas sim vários (APM, 1988).

6.2. Limitações e recomendações

Como todos os estudos, este também esteve condicionado por vários factores, quer internos, quer externos à investigação.

Uma das limitações iniciais deste estudo foi encontrar referências que possibilitassem um estudo aprofundado sobre o tema da Trigonometria do triângulo rectângulo. A selecção de boas tarefas que possibilitasse aos alunos desenvolver o raciocínio e a comunicação na resolução de problemas, no tema Trigonometria do triângulo rectângulo também se revelou de difícil escolha. Após esta investigação tenho consciência que houve tarefas que deviam ser modificadas, pois eram demasiado abstractas para aquela turma, naquele nível de ensino, o que revelou a certa altura uma desmotivação por parte dos alunos.

O facto de se ter estudado uma turma que é seguida pelo mesmo professor desde o 7.º ano de escolaridade, num determinado contexto, pode também constituir uma limitação, uma vez que os alunos apresentam hábitos de trabalho próprios. Embora algumas vezes trabalhem em grupo na sala de aula, não é o modo de trabalho predominante. Durante este estudo notou-se em alguns grupos pouco trabalho cooperativo. Apesar de os alunos estarem a trabalhar em grupo, notou-se que alguns elementos estavam a trabalhar individualmente e outros estavam completamente desligados do trabalho de grupo, nessa perspectiva em futuras investigações é desejável que já exista um ambiente de trabalho cooperativo entre os alunos.

Devemos ainda ter em conta, que se tratou de uma turma do 9.º ano de escolaridade, cuja planificação anual já estava definida e onde teve que haver uma alteração na ordem pelo qual estavam programados os conteúdos, pelo facto do tema Trigonometria do triângulo rectângulo sair no 2.º teste intermédio. Desta forma, apesar de a experiência ter durado os 5 blocos como estava planeado na planificação anual, mais 60 minutos para a realização do teste foi muito pouco tempo, para familiarizar os alunos com este tipo de aulas e, posteriormente, tirar conclusões mais relevantes e fundamentadas. Quando os alunos começaram a tornar-se mais empenhados e activos, foi quando a experiência teve de terminar. Deste modo, torna-se pertinente a recomendação que em investigações futuras se procure estudar a evolução dos alunos por um período de tempo mais alargado, dando mais tempo aos alunos para se relacionarem com este tipo de tarefas e metodologias.

Após a realização da experiência, uma outra limitação que senti foi perante uma enorme quantidade de dados, a grande dificuldade no manuseamento e organização e posteriormente na categorização e na análise dos mesmos.

Em conclusão, considero importante continuar com este tipo de investigação, uma vez que permite aos professores ter um conhecimento mais profundo dos raciocínios envolvidos e das dificuldades dos alunos. Desta forma, os professores poderão adaptar a sua prática profissional de modo a ir ao encontro das necessidades dos alunos.

Este trabalho foi apenas um começo do muito do que se pode estudar em torno do tema matemático escolhido. Outras questões poderão vir no futuro a ser estudadas, como seja:

- ✓ Que tipo de tarefas utilizadas na sala de aula poderão trazer contributos importantes para o desenvolvimento do tema Trigonometria do triângulo rectângulo?
- ✓ Qual a evolução dos alunos e que tipo de conexões são capazes de estabelecer entre este tema e a trigonometria do 11.º de escolaridade?
- ✓ Sendo as aulas centradas na resolução de problemas que tipo de avaliação será mais apropriada a este tipo de metodologia?
- ✓ Qual o contributo destas experiências nas concepções matemáticas dos alunos?

6.3. Reflexão final

A realização deste trabalho contribuiu de um modo significativo para a minha aprendizagem, enquanto futura professora de Matemática. Antes de mais, foi um passo importante na minha vida académica, pois foi o momento em que passei de aluna a professora, como sempre desejei e sonhei. Como é de esperar antes do estudo estava ansiosa por conhecer a turma, mas também, receosa das reacções dos alunos. Qual a reacção dos alunos? Será que me vão aceitar como mais uma professora na sala de aula? estas e muitas mais questões passaram-me pela cabeça. Porém, todo este processo desenvolveu-se com normalidade, e os alunos desde o primeiro dia que se mostraram receptivos e disponíveis para me colocarem dúvidas e questões. Encararam-me como mais uma professora, que estava ali para ajudá-los a obter sucesso à disciplina de Matemática. Foi gratificante para mim trabalhar com estes alunos, pois desde o inicio que se mostraram muito cooperantes e empenhados, atendendo sempre aos pedidos que lhes era solicitado. Mesmo numa altura em que andavam cansados e preocupados com a avaliação em outras disciplinas, muitos deles traziam sempre os trabalhos de casa que eram pedidos.

O facto de elaborar a planificação a médio prazo fez com que reflectisse e fosse capaz de decidir os pontos que queria focar em cada uma das aulas. Depois, a elaboração dos planos de aula permitiram pensar nos objectivos que queria atingir com cada uma das aulas, assim como, organizar a aula por várias fases de acordo com o tempo disponível. Agora tenho consciência que nem todas as escolhas que realizei foram as melhores. Em relação às fichas propostas, actualmente modificaria na ficha de trabalho 2, o exercício 1 pois mostrou-se demasiado complexo para aquela turma, naquele nível de ensino, o que levou a uma certa desmotivação por parte dos alunos. A ficha de trabalho 5 também é um pouco abstracta e envolve alguma manipulação algébrica, o que levou a que os alunos tivessem alguma dificuldade em resolvê-la. Desta forma, cabe ao professor elaborar fichas de trabalho que vão de encontro às necessidades e dificuldades não só dos alunos, mas também da turma. Na elaboração dos planos de aula tive sempre presente a preocupação de dividir as aulas no mínimo em dois momentos. Num primeiro momento onde é dado um certo tempo para os alunos desenvolverem as tarefas propostas e, um segundo momento, que era dedicado à discussão em grande grupo. Os planos de aula ao longo da unidade tiveram que ser reajustados de forma a irem ao encontro das necessidades e do ritmo dos alunos.

Durante as aulas, senti alguma dificuldade na gestão da discussão dos resultados entre os vários grupos. Houve situações que podia ter aproveitado, nas resoluções efectuadas no quadro pelos alunos para chamar a atenção de certos aspectos que estavam errados, mas limitei-me a corrigi-los, não questionando os alunos do porquê de terem feito determinado erro. Após ter passado pela experiência, é que verifico que não é de todo fácil gerir as ideias dos alunos e as suas conclusões. Essa dificuldade pode-se dever a minha inexperiência no ensino e, em particular, no ensino pela descoberta.

Apesar das dificuldades que enfrentei na leccionação das aulas, os comentários e as sugestões das professoras orientadoras foram muito importantes para mim. Levaram-me a reflectir sobre os aspectos negativos das minhas aulas para que eu possa evoluir enquanto futura professora de Matemática.

Como futura professora constatei que a resolução de problemas é muito importante no ensino da Matemática, pois possibilita o desenvolvimento do raciocínio e da comunicação matemática. Os alunos ao trabalharem em grupo sentiram-se mais motivados e empenhados nas tarefas. Este método de trabalho possibilitou que os alunos partilhassem ideias e tivessem contacto com outras estratégias de resolução. A fase de discussão permite aos alunos desenvolverem a comunicação matemática, uma vez que têm que explicar o seu raciocínio aos restantes colegas de turma e à professora.

Enquanto futura professora, a realização deste estudo permitiu-me ter uma noção mais profunda e real das estratégias, dos conhecimentos e das dificuldades dos alunos no tema Trigonometria do triângulo rectângulo.

Numa perspectiva geral, considero que o balanço deste estudo é bastante positivo, apesar de ter consciência que podia ter feito mais e melhor. Tenho um longo caminho cheio de aprendizagens por fazer, mas o fundamental é percebermos os erros cometidos e aprendermos com eles.

Referências

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática - experiência do projecto MAT 789* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa.

APM (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics, 17 (2)*, 125-141.

Calado, J. J. G. (1960). *Compêndio de Trigonometria*. Lisboa: Empresa literária fluminense Lda.

Costa, N. M. L. (1997). *A história da Trigonometria*. Retirado em Maio, 24, 2010, de http://www.prof2000.pt/users/amma/af33/trf1/histtrigon.pdf

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York: Macmillan.

Exemplos práticos da aplicação das funções trigonométricas. Retirado em Maio, 20, 2010, de http://www.profgarcia.xpg.com.br/Aplicacoes_praticas_da_Trigonometria.htm

Guimarães, H. (2005). A resolução de problemas no ensino da Matemática – Alguns passos do seu percurso no discurso curricular em Portugal. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas – Actas do encontro internacional em homenagem a Paulo Abrantes* (pp. 145-166). Lisboa: APM.

Ghiglione, R. & Matalon, B. (2005). *O Inquérito: teoria e prática*. Oeiras: Celta Editora.

Hatfield, L. (1978). Heuristical emphases in the instruction of mathematical problem solving. In L. L. Hatfield & D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving: Papers from a research workshop*. Columbus: ERIC/SMEAC.

Hill, M. M. & Hill, A. (2005). *Investigação por questionário*. Lisboa: Edições Sílabo.

Jean-Baptiste Joseph Fourier. Retirado em Maio, 20, 2010, de http://pt.wikipedia.org/wiki/Jean- Baptiste_Joseph_Fourier

Junior, C. S. (2006). *Um estudo exploratório sobre o uso da informática na resolução de problemas trigonométricos* (dissertação de mestrado, UNESP, Bauru, Brasil). Retirado em 15 de Dezembro de 2009 de http://www2.fc.unesp.br/BibliotecaVirtual/DownloadDocumentoAction.do?idDocumento=5

Kantowski, M. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal of Research in Mathematics Education, 8 (3),* 163-180.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G. & Boutin, G. (1994). *Investigação qualitativa: fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Lester, F. (1980). Problem solving: is it a problem?. In M. M. Lindquist (Ed.), *Selected issues in mathematics education* (pp. 29-45). Reston: NCTM.

Lindegger, L. R. M. (2000). *Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta a partir da manipulação de modelos* (dissertação de mestrado, PUC- São Paulo, Brasil). Retirado em 20 de Dezembro de 2009 de http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/luiz_lindegger.pdf

Lüdke, M. & André, M. (2005). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Mamede, E. (2001). O papel da calculadora na resolução de problemas exploratórios: Uma experiência no 1.° ciclo. In D. Moreira, C. Lopes, I. Oliveira, J. M. Matos & L. Vicente (Eds.), *Matemática e comunidades: A diversidade social no ensino-aprendizagem da Matemática* (pp. 105-111). Lisboa: SEM-SPCE.

Ministério da Educação (1991a). *Plano de organização do ensino-aprendizagem.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Ministério da Educação (1991b). *Organização curricular e programas. Volume I*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Ministério da Educação (2001a). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Ministério da Educação (2001b). *Matemática A – 10.º ano.* Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Ministério da Educação (2002). *Matemática A – 12.º ano*. Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Mills, G. E. (2000). *Action research: A guide for the teacher researcher*. New Jersey: Prentice-Hall.

Mosquito, E. & Ponte, J. P. (2008). A calculadora e o computador nas práticas profissionais dos professores de matemática do 3.º ciclo do ensino básico. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Eds.), *Tecnologias e educação matemática* (pp. 135-147). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

NCTM (1998). *Normas profissionais para o ensino da Matemática.* Lisboa: APM.

NCTM (2008). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Neves, M. A. F., Guerreiro, L. & Neves, A. (2007). Matemática 9.º - 2.ª parte. Porto: Porto Editora.

Nunes, F. (1996). Será de ir em grupos na aprendizagem da matemática?. In A. Roque & M. J. Lagarto (Eds), *Actas do Profmat 96* (pp. 79-91). Lisboa: APM.

Passos, I. C. & Correia, O. F. (2004). Matemática em Acção - Caderno de Actividades 9.º. Lisboa: Lisboa Editora.

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery*. New York: Jonh Wiley and Sons.

Polya, G. (1995). *A arte de resolver problemas: Um novo aspecto do método matemático*. Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Porfírio, J. (1993). *A resolução de problemas na aula de matemática no 7º ano de escolaridade* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa.

Quivy, R. & Campenhoudt, L. V. (1998). *Manual de investigação em ciências sociais*. Lisboa: Gradiva.

Reys, B. J. (1989). A calculadora como uma ferramenta para o ensino e a aprendizagem. *Educação e Matemática, 11*, 19-22.

Ribeiro, D. (2005). *A resolução de problemas e o desenvolvimento da comunicação matemática: um estudo no 4.º ano de escolaridade* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa

Santos, L. (2000). *A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: Um estudo com três professoras do ensino secundário* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa.

Silva, A. (1989). Calculadoras na educação matemática: Contributos para uma reflexão. *Educação Matemática, 11*, 3-6.

Trigonometria. Retirado em Janeiro, 29, 2010, de http://anamixa.tripod.com/index.html

Tuckman, B. W. (2005). *Manual de investigação em educação: como conceber e realizar o processo de investigação em educação.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Veloso, E. & Leal, L. C. (2005). Experiência matemática. In H. M. Guimarães, A. Silva, J. P. Ponte, L. Santos, M. Abrantes & P. Abrantes (Eds.), *Paulo Abrantes – Intervenções em Educação Matemática* (pp.67-144). Lisboa: APM.

Anexos

Anexo 1 - Autorização dos Encarregados de Educação

PEDIDO DE AUTORIZAÇÃO AOS ENCARREGADOS DE EDUCAÇÃO

Ramada, 2 de Março de 2010

Ex.$^{mo(a)}$ Sr.$^{(a)}$

Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a)

____

N.º _____ da turma A do 9º Ano da Escola Básica 2º e 3º ciclos Vasco Santana.

Eu, Catarina de Jesus Valado Miranda, professora estagiária de Matemática do 9.º A, venho por este meio comunicar, que no período de 9 de Março a 24 de Março, do presente ano, pretendo realizar com esta turma um projecto de investigação em educação intitulado "A Aprendizagem da Trigonometria do Triângulo Rectângulo através da Resolução de Problemas".

Este projecto insere-se no âmbito de uma investigação individual, que culminará na minha dissertação de Mestrado. Tem como objectivo compreender de que forma a resolução de problemas contribui para a aprendizagem do tema Trigonometria do triângulo rectângulo.

O trabalho a realizar terá por base os seguintes dados sobre o desempenho dos alunos, devidamente autorizado:

i) Fotocópias das tarefas realizadas pelos alunos em sala de aula;

ii) Observação com registo áudio de discussões entre alunos durante a realização de problemas na sala de aula;

iii) Questionário a aplicar aos alunos sobre a sua opinião acerca das tarefas realizadas.

Todos os dados recolhidos serão apenas utilizados no âmbito desta investigação, não sendo divulgados por nenhum meio os nomes dos alunos participantes, salvaguardando o seu anonimato.

Agradecendo, desde já, a colaboração prestada de V. Ex.ª, solicito que autorize o seu educando a participar neste estudo assinando a declaração em baixo, devendo posteriormente destacá-la e devolvê-la.

Com os melhores cumprimentos,

____

(Catarina de Jesus Valado Miranda)

✂--

Eu, encarregado de educação do aluno ____, n.º ____, da turma A, do 9º ano de escolaridade, declaro que tomei conhecimento dos objectivos do projecto de investigação em educação e __________________________ (autorizo/não autorizo) a participação do meu educando.

Ramada, ______/_______/___________

Assinatura

____

Anexo 2 - Planificação da Unidade

AULA	ESPECIFICAÇÃO DO TÓPICO	OBJECTIVOS ESPECÍFICOS	TAREFA	MODOS DE TRABALHO	RECURSOS
9/3/2010 **90 min**	Razões trigonométricas de ângulos agudos	Determinar razões trigonométricas de um dado ângulo agudo (por construção); Usar a calculadora para calcular razões trigonométricas.	Ficha de trabalho 1 Descobrindo Razões Trigonométricas	Grupo de 3/4 elementos e Grande grupo	Material de escrita Tarefa Transferidor Régua Papel Acetato e canetas Manual Calculadora Retroprojector Quadro Giz
10/3/2010 **90 min**	Razões trigonométricas de ângulos agudos (continuação)	Determinar um ângulo agudo conhecida uma das razões trigonométricas (usando a calculadora); Interpretar tabelas de valores naturais.	Ficha de trabalho 2 Os telhados das casas		Material de escrita Tarefa Calculadora Manual Giz Quadro
12/3/2010 **90 min**	Resolução de triângulos rectângulos	Resolver um triângulo rectângulo conhecidos um ângulo e um lado; Resolver problemas simples que envolvam razões trigonométricas; Traduzir o enunciado de um problema da linguagem corrente para a linguagem matemática; Procurar estratégias adequadas para resolver o problema; Interpretar e criticar a solução no contexto do problema.	Ficha de trabalho 3 Os triângulos rectângulos		

17/3/2010 **90 min**	Distâncias inacessíveis	Resolver problemas envolvendo distâncias a locais inacessíveis utilizando razões trigonométricas; Traduzir o enunciado de um problema da linguagem corrente para a linguagem matemática; Procurar estratégias adequadas para determinar distâncias inacessíveis; Interpretar e criticar a solução no contexto do problema.	Ficha de trabalho 4 Distâncias inacessíveis	Grupo de 3/4 elementos e Grande grupo	Material de escrita Calculadora Tarefa Manual Giz Quadro
23/3/2010 **90 min**	Relações entre razões trigonométricas Questionário	Determinar uma razão trigonométrica de um ângulo agudo conhecida outra; Estabelecer relações entre as razões trigonométricas, tais como: ✓ $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ✓ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	Ficha de trabalho 5 Relações entre Razões Trigonométricas		Material de escrita Calculadora Tarefa Manual Giz Quadro Questionário
26/3/2010 **60 min**	Teste de avaliação	Determinar razões trigonométricas de um dado ângulo agudo; Determinar uma razão trigonométrica de um ângulo agudo conhecida outra; Resolver um triângulo rectângulo conhecidos um ângulo e um lado; Resolver problemas envolvendo distâncias a locais inacessíveis utilizando razões trigonométricas; Estabelecer relações entre as razões trigonométrica.	Teste de Avaliação	Individualmente	Teste

Anexo 3 - Planos de Aulas

Plano de aula 1

Data: 9 de Março 2010

Tema: Geometria

Unidade didáctica: Trigonometria do Triângulo Rectângulo

Pré-requisitos:

- Triângulo rectângulo (hipotenusa, cateto, cateto);
- Construir triângulos rectângulos;
- Critérios de semelhança de triângulos.

Objectivos específicos:

- Determinar razões trigonométricas de um dado ângulo agudo (por construção);
- Usar a calculadora para calcular razões trigonométricas.

Objectivos ao nível dos valores e atitudes:

- Desenvolver a confiança em si próprio, isto é, ser capaz de exprimir e fundamentar as suas opiniões assim como, reflectir e formular juízos sobre situações com que é confrontado.
- Desenvolver hábitos de trabalho e persistência, isto é, realizar a tarefa de forma organizada, assim como, revelar preocupação na apresentação das actividades e empenhar-se nas suas tarefas levando-as até ao fim.
- Desenvolver o espírito de tolerância e de cooperação, ou seja, colaborar nos trabalhos de grupo partilhando saberes e responsabilidades, ao mesmo tempo que respeitam as opiniões dos outros e aceitam as diferenças.

Objectivos ao nível das capacidades e aptidões:

- Desenvolver o raciocínio, tirando conclusões a partir de figuras para desenvolver o conceito de seno, co-seno e tangente, assim como, fazer e validar conjecturas recorrendo a propriedades e relações. Deve-se ainda discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

- Desenvolver a capacidade de comunicação, isto é expressar-se com correcção e clareza ao utilizar terminologia adequada para descrever processos de resolução.
- Desenvolver a capacidade de utilizar a matemática na interpretação e intervenção no real, isto é utilizar a calculadora tirando partido das suas potencialidades assim como, instrumentos de medição e de desenho.

Recursos: Material de escrita, régua, transferidor, papel, acetato, caneta de acetato, tarefa, manual, calculadora, retroprojector, giz, quadro.

Forma de trabalho: Trabalho em grupo de 3/4 elementos e em grande grupo.

Desenvolvimento da aula

Fase I: Construção dos triângulos (10 minutos).

A professora divide os alunos em grupos de 3/4 elementos e distribui a tarefa e três folhas brancas pelos vários grupos. Seguidamente, diz aos alunos que dispõem de 10 minutos para construir os triângulos.

Passados os 10 minutos, se houver grupos que não tenham conseguido acabar a construção, a professora distribui por esses grupos, triângulos já construídos, de modo a que o grupo possa continuar a resolver a tarefa.

Fase II: Realização da tarefa (30 minutos).

Após a construção dos triângulos, a professora refere que os grupos têm 30 minutos para resolver a tarefa. Durante a realização da tarefa, a professora desloca-se pela sala de aula, observando o trabalho desenvolvido pelos alunos. Caso surjam dúvidas no decorrer da tarefa, a professora questiona o grupo remetendo sempre que possível as dúvidas para o grupo.

Fase III: Discussão da tarefa (25 minutos).

Após os grupos resolverem a tarefa, segue-se a discussão com toda a turma. Nesta fase, a professora já tem construída uma tabela em acetato e começa a questionar os vários grupos sobre os valores a que chegaram para cada uma das razões trigonométricas. À medida que os grupos vão respondendo, a professora vai preenchendo a tabela. Após o preenchimento da tabela, a professora questiona os grupos sobre as conclusões a que chegaram do preenchimento do quadro da ficha de trabalho. E qual a conjectura que formularam com base nos resultados obtidos e a justificação para essa conjectura. Nesta fase, a professora assume um papel moderador, questionando e solicitando justificações, de forma a desenvolver nos alunos a argumentação matemática.

Fase IV: Síntese dos resultados obtidos (20 minutos).

A professora inicia a síntese, com uma pequena introdução histórica sobre a Trigonometria e o seu significado. Explica, que as três razões calculadas na ficha de trabalho chamam-se razões trigonométricas do ângulo de 45º e que cada uma tem um determinado nome. Introduzindo desta forma a definição e nomenclatura de seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo. Os alunos são ainda alertados que tanto o seno como o co-seno de qualquer ângulo agudo pode tomam valores entre zero e um.

Fase V: Indicação do trabalho de casa e do sumário (5 minutos).

No final da aula, a professora indica que o trabalho de casa são os exercícios 3, 5 e 9.1 das páginas 73, 74 e 75 respectivamente. Refere ainda que o trabalho deve ser entregue na aula seguinte. A aula termina com a transmissão do sumário.

Plano de aula 2

Data: 10 de Março 2010

Tema: Geometria

Unidade didáctica: Trigonometria do Triângulo Rectângulo

Pré-requisitos:

- Calcular ângulos num triângulo (soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo);
- Operar com valores exactos;
- Utilizar o teorema de Pitágoras num triângulo rectângulo;
- Determinar razões trigonométricas de um ângulo agudo (usando a calculadora).

Objectivos específicos:

- Determinar um ângulo agudo conhecida uma das razões trigonométricas (usando a calculadora).
- Interpretar tabelas de valores naturais.

Objectivos ao nível dos valores e atitudes:

- Desenvolver a confiança em si próprio, isto é, ser capaz de exprimir e fundamentar as suas opiniões assim como, reflectir e formular juízos sobre situações com que é confrontado.
- Desenvolver hábitos de trabalho e persistência, isto é, realizar a tarefa de forma organizada, assim como, revelar preocupação na apresentação das actividades e empenhar-se nas suas tarefas levando-as até ao fim.
- Desenvolver o espírito de tolerância e de cooperação, ou seja, colaborar nos trabalhos de grupo partilhando saberes e responsabilidades, ao mesmo tempo que respeitam as opiniões dos outros e aceitam as diferenças.

Objectivos ao nível das capacidades e aptidões:

- Desenvolver a capacidade de resolver problemas, ou seja, compreender o enunciado do problema, de forma a seleccionar uma estratégia de resolução sendo capaz de criticar o resultado dentro do contexto da situação.
- Desenvolver a capacidade de comunicação, isto é expressar-se com correcção e clareza ao utilizar terminologia adequada para descrever processos de resolução.
- Desenvolver a capacidade de utilizar a matemática na interpretação e intervenção no real, isto é utilizar a calculadora tirando partido das suas potencialidades.

Recursos: Material de escrita, calculadora, tarefa, manual, giz e quadro.

Forma de trabalho: Trabalho em grupo de 3/4 elementos e em grande grupo.

Desenvolvimento da aula

Fase I: Focalização de alguns conceitos importantes da aula anterior (20 minutos).

A professora abre as lições e escreve o sumário da aula anterior. De seguida é feito um resumo no quadro com a ajuda dos alunos, sobre algumas das conclusões a que chegaram na aula anterior. É ainda discutido o exercício 8, da página 74 do manual, que foi proposto no final da aula anterior.

Fase II: Realização dos dois primeiros exercícios da tarefa (30 minutos).

A professora distribui a tarefa pelos grupos, indicando que os grupos dispõem de 30 minutos para resolverem os dois primeiros exercícios da tarefa. Durante a realização da tarefa, a professora desloca-se pela sala de aula, observando o trabalho desenvolvido pelos vários grupos e intervindo sempre que solicitada. As dúvidas são sempre remetidas para o grupo.

Fase III: Síntese (10 minutos).

Nesta fase a professora faz um ponto da situação, alertando os alunos para a tabela que preencheram no ponto 2. A professora pede aos alunos para abrirem o manual na página 140 e aleatoriamente, pergunta a alguns alunos por exemplo, qual o valor do sen 20º, cos 50º e a tg 80º. De seguida, é feito o processo inverso. É dado o valor do sen 75º e é pedido que indiquem o valor do ângulo. Desta forma como preconiza o programa, o objectivo não é insistir na leitura de tabelas de valores naturais, mas dar conhecimento aos alunos e oportunidade de estes serem capazes de ler e interpretar uma tabela de valores naturais.

Fase IV: Realização do problema 3 da tarefa (15 minutos).

Após a síntese, a professora dá 15 minutos aos grupos para resolverem o problema 3 da tarefa. Caso os alunos consigam acabar o problema antes do tempo, a professora poderá propor a resolução do problema 4. A professora alerta os grupos que só tira dúvidas concretas e se estas forem dúvidas do grupo e não de um elemento em particular.

Fase V: Discussão do problema 3 (10 minutos).

A professora pede a um dos grupos que apresente os seus resultados no quadro, questionando a turma se houve estratégias de resolução diferentes ou se existem dúvidas em relação à resolução dos colegas.

Fase VI: Indicação do trabalho de casa e do sumário (5 minutos).

No final da aula, a professora indica que o trabalho de casa é o problema 4 e 5 da ficha, referindo que este deve ser entregue na aula seguinte. A aula termina com a transmissão do sumário.

Plano de aula 3

Data: 12 de Março 2010

Tema: Geometria

Unidade didáctica: Trigonometria do Triângulo Rectângulo

Pré-requisitos:

- Determinar razões trigonométricas de um ângulo agudo;
- Determinar um ângulo agudo conhecida uma das razões trigonométricas;
- Calcular ângulos num polígono convexo;
- Calcular áreas de polígonos.

Objectivos específicos:

- Resolver um triângulo rectângulo conhecidos um ângulo e um lado;
- Resolver problemas simples que envolvam razões trigonométricas;
- Traduzir o enunciado de um problema da linguagem corrente para a linguagem matemática;
- Procurar estratégias adequadas para resolver o problema;
- Interpretar e criticar a solução no contexto do problema.

Objectivos ao nível dos valores e atitudes:

- Desenvolver a confiança em si próprio, isto é, ser capaz de exprimir e fundamentar as suas opiniões, assim como, reflectir e formular juízos sobre situações com que é confrontado.
- Desenvolver hábitos de trabalho e persistência, isto é, realizar a tarefa de forma organizada, assim como, revelar preocupação na apresentação das actividades e empenhar-se nas suas tarefas levando-as até ao fim.
- Desenvolver o espírito de tolerância e de cooperação, ou seja, colaborar nos trabalhos de grupo partilhando saberes e responsabilidades, ao mesmo tempo que respeitam as opiniões dos outros e aceitam as diferenças.

Objectivos ao nível das capacidades e aptidões:

- Desenvolver a capacidade de resolver problemas, ou seja, compreender o enunciado do problema, procurando seleccionar e interpretar informações relativas ao problema, de forma a seleccionar uma estratégia de resolução sendo capaz de criticar o resultado dentro do contexto da situação.
- Desenvolver a capacidade de comunicação, isto é expressar-se com correcção e clareza ao utilizar terminologia adequada para descrever processos de resolução.
- Desenvolver a capacidade de utilizar a matemática na interpretação e intervenção no real, isto é utilizar a calculadora tirando partido das suas potencialidades.

Recursos: Material de escrita, calculadora, tarefa, manual, giz e quadro.

Forma de trabalho: Trabalho em grupo de 3/4 elementos e em grande grupo.

Desenvolvimento da aula

Fase I: Discussão do problema 1 e 2 da ficha da aula anterior (15 minutos).

A aula começa com a discussão do exercício 1 e 2 da ficha da aula anterior. No exercício 1, a professora começa por perguntar aos alunos quais os valores a que chegaram para cada uma das alíneas, uma vez que os alunos arranjaram mecanismos diferentes para resolver o exercício dos que estavam anteriormente pensados. No exercício 2, a professora pede aos alunos para consultarem a tabela que se encontra na página 140 do manual e aleatoriamente pergunta a alguns alunos qual o valor do sen 30º, cos 45º e da tg 60º. De seguida é feito o processo inverso. É dado o valor do sen 75º e é pedido que indiquem o valor do ângulo. Os alunos são ainda questionados se houve dúvidas nos outros problemas.

Fase II: Realização dos exercícios 19.1, 20 e 21 do manual (20 minutos).

Nesta fase a professora indica que os alunos deverão resolver os exercícios 19.1, 20 e 21 da página 82 e 83 do manual, para que os alunos ganhem confiança na utilização das razões trigonométricas. Após 15 minutos, a professora pergunta aos alunos se existiu alguma dúvida na resolução dos exercícios. Caso haja, a professora poderá resolver no quadro com a ajuda dos alunos algum exercício.

Fase III: Realização dos 3 primeiros problemas (35 minutos).

A professora distribui a tarefa pelos vários grupos, indicando que dispõem de 35 minutos para resolver os três primeiros problemas. A professora alerta os grupos que só tira dúvidas concretas e se estas forem dúvidas do grupo e não de um elemento em particular. Os alunos são ainda avisados que no final da aula a professora irá recolher para avaliação uma tarefa por grupo. Caso os alunos consigam resolver os três problemas antes do tempo, a professora irá propor que resolvam também o problema 4. Durante a realização da tarefa, a professora desloca-se pela sala de aula, observando o trabalho desenvolvido pelos alunos. Ao mesmo tempo que vai entregando o trabalho de casa corrigido.

Fase IV: Discussão da tarefa (19 minutos).

Ao deslocar-se pela sala, durante a resolução da tarefa, a professora pôde observar as diferentes estratégias utilizadas. Dessa forma, no momento da discussão a professora selecciona alguns grupos que utilizaram estratégias distintas. De cada um desses grupos será chamado um elemento para apresentar a resolução no quadro. Seguidamente, a professora pergunta à turma se entenderam as estratégias apresentadas pelos colegas. Caso haja dúvidas a professora explica a resolução feita pelos alunos. Contrariamente, se todos os grupos optarem por uma estratégia semelhante, a professora escolhe um grupo e solicita a um elemento desse grupo, que vá ao quadro apresentar a estratégia, para que os outros colegas possam validar os seus resultados.

Fase V: Indicação do trabalho de casa e do sumário (1 minuto).

No final da aula, a professora indica que o trabalho de casa será o problema 4 da ficha. Caso os alunos tenham conseguido acabar a ficha, a professora irá propor os problemas 27 e 28 da página 89 do manual. A aula termina com a transmissão do sumário.

Plano de aula 4

Data: 17 de Março 2010

Tema: Geometria

Unidade didáctica: Trigonometria do Triângulo Rectângulo

Pré-requisitos:

- Determinar razões trigonométricas de um ângulo agudo;
- Resolver um triângulo rectângulo conhecidos um ângulo e um lado;
- Calcular áreas de polígonos;
- Resolver problemas trigonométricos simples.

Objectivos específicos:

- Resolver problemas envolvendo distâncias a locais inacessíveis utilizando razões trigonométricas;
- Traduzir o enunciado de um problema da linguagem corrente para a linguagem matemática;
- Procurar estratégias adequadas para determinar distâncias inacessíveis;
- Interpretar e criticar a solução no contexto do problema.

Objectivos ao nível dos valores e atitudes:

- Desenvolver a confiança em si próprio, isto é, ser capaz de exprimir e fundamentar as suas opiniões assim como, reflectir e formular juízos sobre situações com que é confrontado.
- Desenvolver hábitos de trabalho e persistência, isto é, realizar a tarefa de forma organizada, assim como, revelar preocupação na apresentação das actividades e empenhar-se nas suas tarefas levando-as até ao fim.
- Desenvolver o espírito de tolerância e de cooperação, ou seja, colaborar nos trabalhos de grupo partilhando saberes e responsabilidades, ao mesmo tempo que respeitam as opiniões dos outros e aceitam as diferenças.

Objectivos ao nível das capacidades e aptidões:

- Desenvolver a capacidade de resolver problemas, ou seja, compreender o enunciado do problema, procurando seleccionar e interpretar informações relativas ao problema, de forma a seleccionar uma estratégia de resolução sendo capaz de criticar o resultado dentro do contexto da situação.
- Desenvolver a capacidade de comunicação, isto é expressar-se com correcção e clareza ao utilizar terminologia adequada para descrever processos de resolução.
- Desenvolver a capacidade de utilizar a matemática na interpretação e intervenção no real, isto é utilizar a calculadora tirando partido das suas potencialidades.

Recursos: Material de escrita, calculadora, tarefa, manual, giz e quadro.

Forma de trabalho: Trabalho em grupo de 3/4 elementos e em grande grupo.

Desenvolvimento da aula

Fase I: Terminar a resolução da ficha de trabalho 3 (10 minutos).

A professora começa por abrir a lição no quadro e pergunta aos alunos se acabaram a ficha de trabalho em casa. Caso os alunos não tenham acabado a ficha, será dado 10 minutos para fazê-lo.

Fase II: Discussão da ficha de trabalho 3 (20 minutos).

Na aula passada, a professora pôde observar que dois grupos utilizaram estratégias diferentes, na resolução dos dois primeiros problemas da ficha de trabalho. Nesta fase, a professora selecciona esses dois grupos e pede a um dos elementos, que explique a sua estratégia à restante turma, ao mesmo tempo a professora vai registando no quadro cada uma das estratégias. Em relação ao problema 3 e 4 só serão discutidos se a turma apresentar dúvidas. Caso contrário, a professora recolhe as fichas corrigindo-as em casa.

Fase III: Realização da ficha de trabalho 4 (40 minutos).

A professora distribui a tarefa, pelos vários grupos, indicando que dispõem de 40 minutos para resolver os dois primeiros problemas. É referido ainda, que os alunos devem escrever as suas conclusões na respectiva ficha. A professora só tira dúvidas concretas e se estas forem dúvidas do grupo. No final da aula, a professora irá recolher todas as fichas para avaliação. Durante a realização da tarefa, a professora desloca-se pela sala de aula, observando o trabalho desenvolvido pelos alunos, encorajando-os, questionando-os, remetendo as dúvidas para o grupo e observando as várias estratégias de resolução. Caso os alunos resolvam antes do tempo os dois problemas, será proposto que resolvam o problema 3.

Fase IV: Discussão da ficha de trabalho 4 (15 minutos).

Ao deslocar-se pela sala, durante a resolução da tarefa, a professora pôde observar as diferentes estratégias utilizadas pelos vários grupos. Assim nesta fase, a professora pedirá a colaboração de alguns dos grupos para resolver o problema 1 e 2 no quadro.

Fase V: Indicação do trabalho de casa e do sumário (5 minutos).

A aula acaba com a professora a referir que os alunos deverão entregar na próxima aula o trabalho de casa que é fazer o problema 3 da ficha. Caso os alunos tenham resolvido o problema 3 da ficha será pedido que entreguem os exercícios 36, 41 e 46 das páginas 91, 92 e 93 respectivamente. De seguida é transmitido o sumário.

Plano de aula 5

Data: 23 de Março 2010

Tema: Geometria

Unidade didáctica: Trigonometria do Triângulo Rectângulo

Pré-requisitos:

- Determinar razões trigonométricas de um ângulo agudo;
- Resolver equações;
- Usar a calculadora para calcular razões trigonométricas.

Objectivos específicos:

- Determinar uma razão trigonométrica de um ângulo agudo conhecida outra;
- Estabelecer relações entre as razões trigonométricas, tais como:
  - ✓ $\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
  - ✓ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

Objectivos ao nível dos valores e atitudes:

- Desenvolver a confiança em si próprio, isto é, ser capaz de exprimir e fundamentar as suas opiniões assim como, reflectir e formular juízos sobre situações com que é confrontado.
- Desenvolver hábitos de trabalho e persistência, isto é, realizar a tarefa de forma organizada, assim como, revelar preocupação na apresentação das actividades e empenhar-se nas suas tarefas levando-as até ao fim.
- Desenvolver o espírito de tolerância e de cooperação, ou seja, colaborar nos trabalhos de grupo partilhando saberes e responsabilidades, ao mesmo tempo que respeitam as opiniões dos outros e aceitam as diferenças.

Objectivos ao nível das capacidades e aptidões:

- Desenvolver o raciocínio, validando conjecturas, experimentando, recorrendo a factos conhecidos, propriedades e relações.
- Desenvolver a capacidade de comunicação, isto é expressar-se com correcção e clareza ao utilizar terminologia adequada para descrever processos de resolução.
- Desenvolver a capacidade de utilizar a matemática na interpretação e intervenção no real, isto é utilizar a calculadora tirando partido das suas potencialidades.

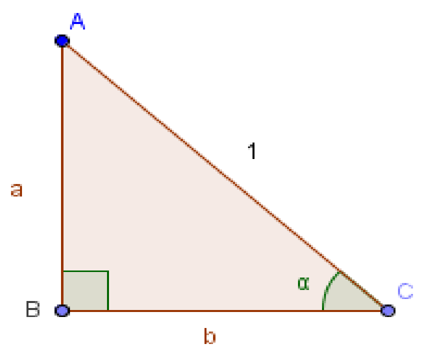
Recursos: Material de escrita, calculadora, tarefa, manual, giz, quadro.

Forma de trabalho: Trabalho em grupo de 3/4 elementos e grande grupo.

Desenvolvimento da aula

Fase I: Exposição da matéria (30 minutos).

A professora começa a aula por abrir a lição. Demonstra a fórmula fundamental da Trigonometria, considerando um triângulo rectângulo cujo valor dos catetos é a e b e cuja hipotenusa é 1.



A professora pergunta aos alunos como se pode determinar o $sen\,\alpha$ e o $\cos\alpha$. O objectivo é chegar as expressões: $sen\,\alpha = \frac{a}{1} \Leftrightarrow a = sen\,\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{b}{1} \Leftrightarrow b = \cos\alpha$$

Depois aplicando o teorema de Pitágoras, surge a fórmula fundamental da Trigonometria. A professora indica uma das vantagens de se utilizar a fórmula fundamental da Trigonometria, nomeadamente, quando se conhece o valor do sen α e quer-se saber o valor do cos α quando não se tem calculadora. De seguida, a professora pergunta aos alunos como se pode determinar a $tg\,\alpha$. Os alunos irão dizer que será $tg\,\alpha = \frac{a}{b}$, substituindo depois iremos obter que $tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$.

Fase II: Realização da tarefa (35 minutos).

Seguidamente, a professora distribui a tarefa pelos vários grupos e indica que dispõem de 35 minutos para resolvê-la. Durante a resolução da tarefa, a professora vai circulando pelos vários grupos, observando o trabalho desenvolvido, ao mesmo tempo que distribui o trabalho de casa corrigido. Caso a professora comece a notar dificuldades generalizadas na resolução da tarefa, poderá propor a resolução conjunta no quadro.

Fase III: Discussão da tarefa (10 minutos).

Caso não haja resolução conjunta no quadro. Após os alunos resolverem a tarefa, a professora inicia no quadro a correcção da tarefa pedindo a colaboração dos vários grupos. Iniciando-se assim a discussão com toda a turma.

Fase IV: Resolução de um questionário (15 minutos).

No final da aula, a professora distribui um questionário pelos alunos, que tem por objectivo saber as opiniões dos alunos sobre as tarefas desenvolvidas ao longo da unidade didáctica Trigonometria do triângulo rectângulo. Enquanto os alunos respondem ao questionário, a professora escreverá no quadro o sumário, assim como, o trabalho de casa que será o problema 40 e 41 da página 92 do manual.

Plano de aula 6

Data: 26 de Março 2010

Tema: Geometria

Unidade didáctica: Trigonometria do Triângulo Rectângulo

Objectivos específicos:

- Determinar razões trigonométricas de um dado ângulo agudo;
- Determinar uma razão trigonométricas de um ângulo agudo conhecida outra;
- Resolver um triângulo rectângulo conhecidos um ângulo e um lado;
- Resolver problemas envolvendo distâncias a locais inacessíveis utilizando razões trigonométricas;
- Estabelecer relações entre as razões trigonométricas.

Objectivos ao nível dos valores e atitudes:

- Desenvolver a confiança em si próprio, isto é, ser capaz de exprimir e fundamentar as suas opiniões assim como, reflectir e formular juízos sobre situações com que é confrontado.
- Desenvolver hábitos de trabalho e persistência, isto é, realizar a tarefa de forma organizada, assim como, revelar preocupação na apresentação das actividades e empenhar-se nas suas tarefas levando-as até ao fim.

Recursos: Material de escrita, calculadora, teste de avaliação.

Forma de trabalho: Trabalho individual.

Desenvolvimento da aula

Fase I: Entrega do teste de avaliação (60 minutos).

Os alunos foram divididos pelas várias mesas de modo a ficar um por mesa e foram distribuídas os testes de avaliação. Passados os 60 minutos os alunos entregaram o teste.

Anexo 4 - Fichas de Trabalho Propostas

Ficha de trabalho 1 – Descobrindo Razões Trigonométricas

1. Constrói três triângulos rectângulos diferentes mas que todos tenham um ângulo agudo de 45º. Seguidamente mede o comprimento dos lados dos triângulos e completa o quadro abaixo. Apresenta os resultados das razões com duas casas decimais.

	Triângulo A	Triângulo B	Triângulo C
Hipotenusa			
Cateto oposto ao ângulo de 45º			
Cateto adjacente ao ângulo de 45º			
$\dfrac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}}$			
$\dfrac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$			
$\dfrac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}}$			

1.1. Da observação do quadro o que podes concluir? Formula uma conjectura tendo em conta o que foi observado.

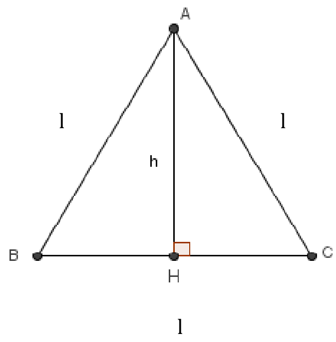
1.2. Tenta encontrar uma explicação que te permita afirmar ou não a conjectura formulada.

1.3. Enuncia uma generalização.

Ficha de trabalho 2 – Os telhados das casas

1. O Ivo e os pais mudaram-se recentemente para a ilha da Madeira. A casa deles é grande e mantém o traço das casas típicas desta ilha.

1.1. Consideremos o telhado da casa do Ivo que, observando de frente, tem a forma de um triângulo equilátero de lado l como se pode ver na figura:



a) Calcula os ângulos $H\hat{A}C$ e $A\hat{C}H$.

b) Determina a altura do triângulo em função do lado.

c) Para o ângulo $H\hat{A}C$ determina:

i) sen $H\hat{A}C$

ii) cos $H\hat{A}C$

iii) tg $H\hat{A}C$

d) Faz o mesmo processo para o ângulo $A\hat{C}H$.

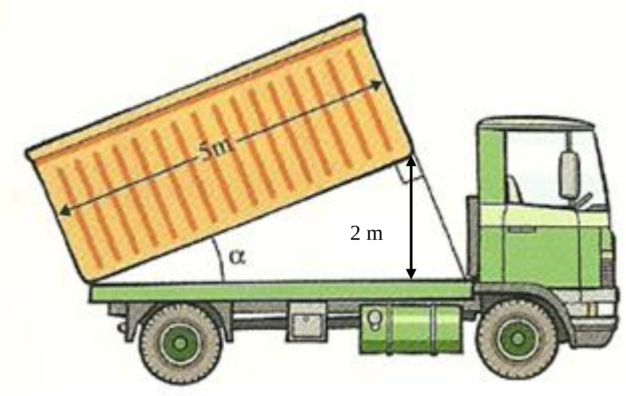
1.2. Em dias de chuva, os pais do Ivo notavam que existia infiltrações devido à má construção do telhado. Então, resolveram construir uma casa, cujo telhado tem uma inclinação superior em 20% que a casa anterior.

Sabendo que os pais do Ivo querem manter a mesma frente, (manter o comprimento da fachada da casa), que altura deverá ter o telhado?

2. Com base nos ângulos que calculaste anteriormente, completa a tabela abaixo.

x	30º	45º	60º
$\operatorname{sen} x$			
$\cos x$			
$\operatorname{tg} x$			

3. O Sr. Manuel tem um camião que transporta areia para uma firma de construção civil. Quando chega à obra o Sr. Manuel tem que descarregar a areia do camião.



Sabendo que o Sr. Manuel teve que levantar até à altura de 2 m o contentor, para despejar a areia, que valor terá o ângulo de elevação para que a areia caia toda do camião?

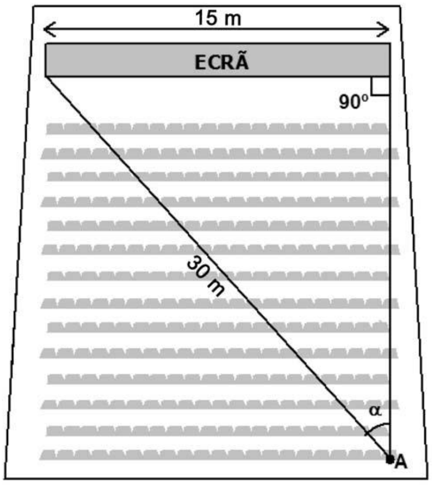
(Adaptado de Matemática em Acção 9.º ano – Parte 2)

4. O sinal de trânsito representado na figura indica que se sobe 6 m por cada 100 m na horizontal.
Qual é o ângulo que a estrada faz com a horizontal?

(Retirado de Matemática 9.º ano – 2ª parte)

5. A figura representa uma sala de cinema. O João sentou-se no último lugar da última fila, assinalado, na figura, pelo ponto A. O ângulo de vértice A é o seu ângulo de visão para o ecrã. No cinema, as pessoas que se sentam no lugar em que o João está sentado devem ter um ângulo de visão de, pelo menos, 26º, sendo o ideal 36º, para que possam ter uma visão clara do filme.

Tendo em atenção as medidas indicadas na figura, determina a amplitude do ângulo de visão do lugar do João.



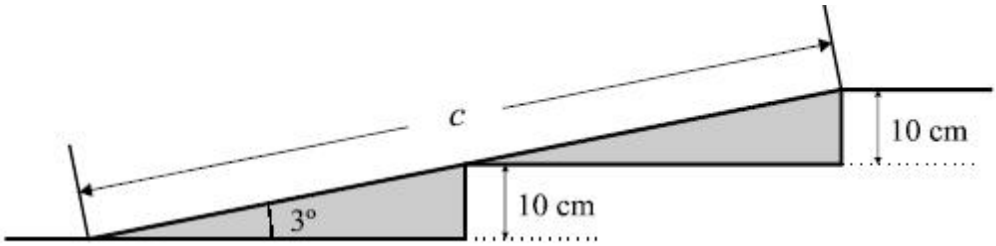
Na tua resposta, apresenta os cálculos que efectuares e explica se a amplitude obtida permite uma visão clara do filme.

(Retirado do Exame Nacional do Ensino Básico de 2008 – 1ª chamada)

Ficha de trabalho 3 – Os triângulos rectângulos

1. O acesso a uma das entradas da escola da Rita é feito por uma escada de dois degraus iguais, cada um deles com 10 cm de altura. Com o objectivo de facilitar a entrada na escola a pessoas com mobilidade condicionada, foi construída uma rampa.

Para respeitar a legislação em vigor, esta rampa foi construída de modo a fazer com o solo um ângulo de 3º, como se pode ver no esquema que se segue (o esquema não está à escala)



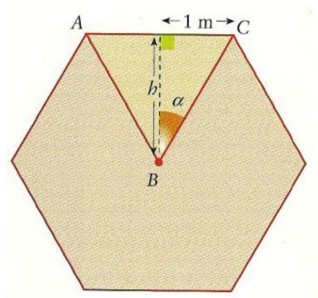
Determina, em metros, o comprimento, c, da rampa. Indica o resultado arredondado às décimas e apresenta todos os cálculos que efectuares.

(Retirado do Exame Nacional de Matemática do Ensino Básico de 2005 - 1ª chamada)

2. Num jogo de futebol, um jogador está na marca de grande penalidade prestes a rematar à baliza. Sabendo que a distância entre os dois postes da baliza é 7,3 m e que a distância da marca da penalidade à linha da baliza é de 11 m. Qual o ângulo de abertura supondo que a bola vai rasteira?

3. A figura representa um hexágono regular de 2 m de lado.

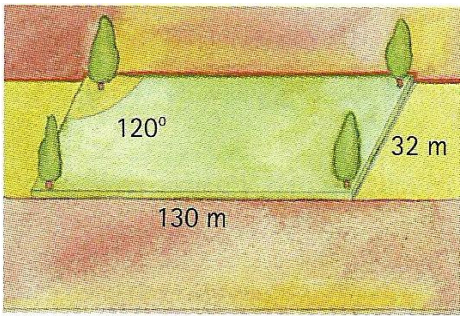
Qual é a área do hexágono?



(Retirado de Matemática 9º ano – 2ª parte)

4. Um campo relvado tem a forma de um paralelogramo com 130 m de comprimento por 32 m de largura. Um dos ângulos obtusos do paralelogramo mede 120º.

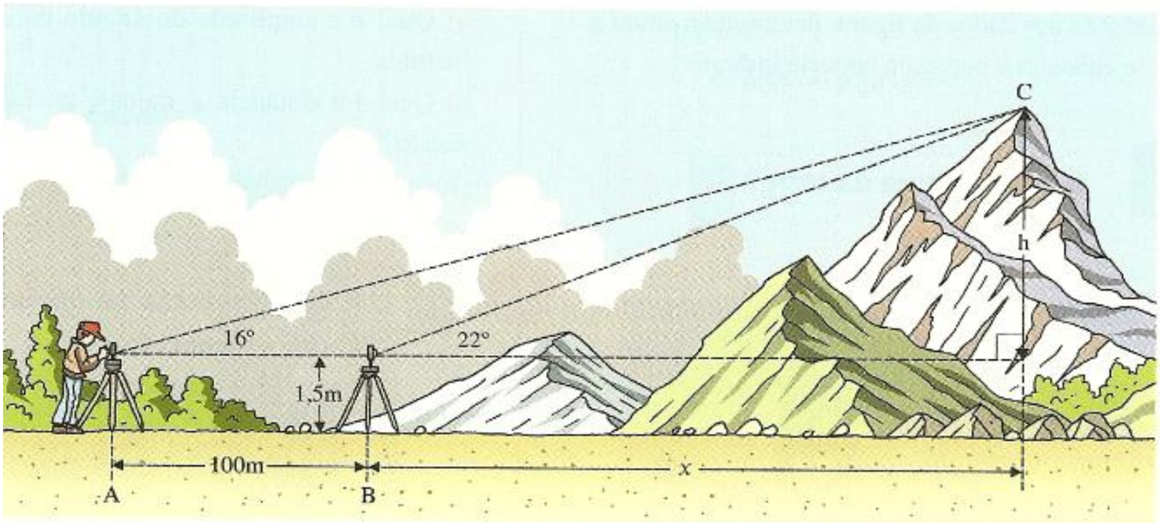
Qual é a área do campo?



(Retirado de Matemática 9º ano – 2ª parte)

Ficha de trabalho 4 – Distâncias Inacessíveis

1. Para medir a altura do cume C da montanha, um topógrafo escolheu dois pontos A e B, do mesmo plano horizontal. Com um teodolito, apoiado num tripé, mediu os ângulos de elevação em A e B.



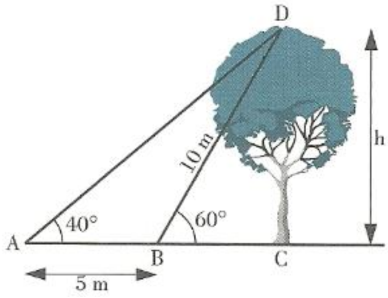
Atendendo aos dados da figura, calcula:

a) A altura da montanha.

b) A altura da montanha em relação ao nível do mar, sabendo que os pontos A e B estão a 700 m de altitude.

(Retirado de Matemática em Acção 9º ano – 2ª parte)

2. A Mariana e o Miguel posicionaram-se a 5 m um do outro para determinarem a altura da árvore e a distância do ponto A ao cimo da árvore. O Miguel posicionou-se no ponto A e a Mariana no ponto B, que se encontra a 10 m do cimo da árvore.



O Miguel chegou à conclusão que a distância do ponto A ao cimo da árvore é dada pela expressão:

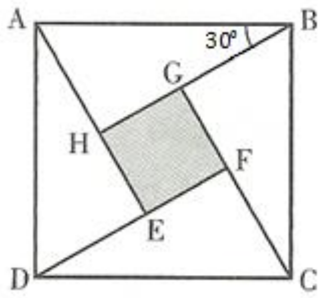
$$\overline{AD} = \frac{10\ sen\ 60°}{sen\ 40°}$$

Numa pequena composição, explica o raciocínio do Miguel.

(Retirado de Caderno de Exercícios – Matemática 9ºano)

3. Observando a figura ao lado temos:

- ✓ [ABCD] é um quadrado de lado 4;
- ✓ [AHB], [BGC], [CFD] e [DEA] são triângulos rectângulos iguais;
- ✓ A amplitude do ângulo $H\hat{B}A$ é 30º.

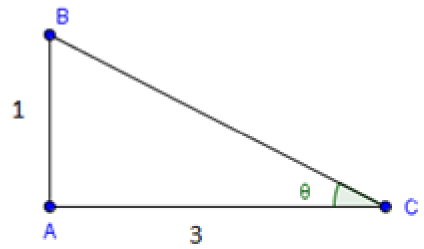


Determina a área da superfície sombreada.

(Adaptado de Caderno de Exercícios – Matemática 9ºano)

Ficha de trabalho 5 – Relações entre Razões Trigonométricas

1. Considera os dados do triângulo abaixo.



1.1. Usa a fórmula seguinte para determinar o $sen\ \theta$.

$$1+\frac{1}{tg^2\theta}=\frac{1}{sen^2\theta}$$

1.2. Agora que já sabes o valor do $sen\ \theta$ determina sem usar a calculadora o $cos\ \theta$.

1.3. Verifica 1.1. e 1.2 usando a calculadora.

1.4. Calcula com duas casas decimais $3\,\mathrm{tg}\,\theta-\mathrm{sen}\,\theta+2\cos\theta$.

(Adaptado de Matemática 9º ano – 2ª parte)

2. Utilizando a fórmula fundamental da Trigonometria mostra que:

$$2\mathrm{sen}^2\alpha+2\mathrm{cos}^2\alpha=2$$

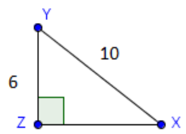
Anexo 5 - Ficha de Avaliação

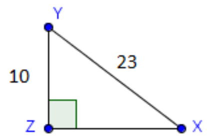
Ficha para avaliação

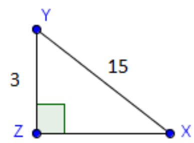
1ª Parte

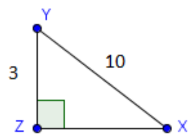
As questões que se seguem são de escolha múltipla. Deves, para cada uma delas, seleccionar o quadrado que correspondente à resposta correcta.

1. Qual o triângulo em que $\text{sen}\, X = 0{,}3$?









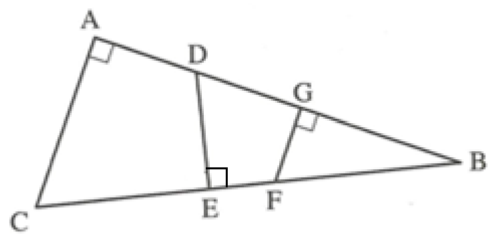
2. Quais são as igualdades verdadeiras?

$tg\ \hat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

$sen\ \hat{B} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$

$tg\ \hat{B} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EB}}$

$cos\ \hat{B} = \frac{\overline{FG}}{\overline{FB}}$



(Adaptado de Caderno de Actividades – Matemática em Acção 9.º)

3. Das seguintes afirmações indica quais as verdadeiras.

O seno de um ângulo agudo pode ser maior que 1.

A tangente de um ângulo agudo pode ser maior que 1.

O seno de um ângulo agudo é sempre diferente do co-seno desse ângulo.

A tangente de um ângulo agudo é sempre igual à razão entre o co-seno e o seno.

4. Sendo α um ângulo agudo:

☐ $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = 1$

☐ $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

☐ $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 + \cos^2\alpha$

☐ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

2ª Parte

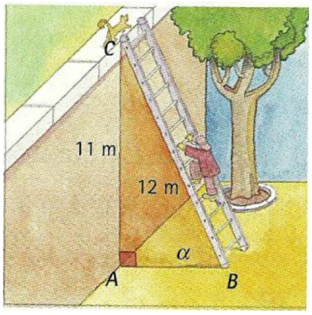
Apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiveres de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

1. Uma escada está encostada a uma parede com 11 m de altura. A escada tem 12 m de comprimento e faz um ângulo α com o plano do chão.

1.1. Determine a distância, $\overline{AB}$, da escada à base da parede.

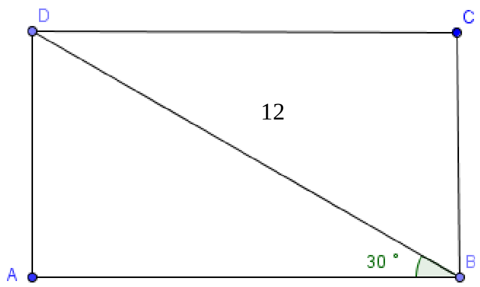
1.2. Determina α. Apresenta o resultado, com uma casa decimal.

1.3. Por razões de segurança, o ângulo que a escada faz com o solo não deve ser superior a 75º. Qual a altura máxima que, em segurança, se pode alcançar com a escada representada na figura?



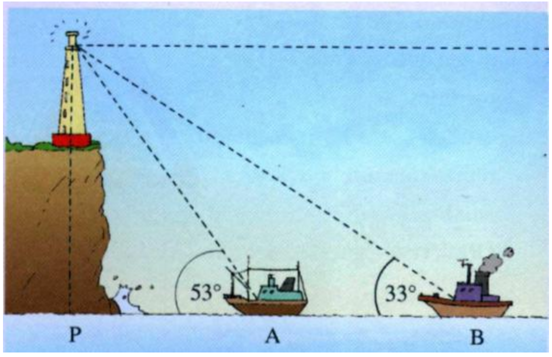
(Retirado de Matemática 9.º)

2. Na figura [ABCD] é um rectângulo, [BD] uma diagonal cujo comprimento é 12 e $A\hat{B}D =$ 30º.



Calcula a área do rectângulo.

3. Os tripulantes dos barcos A e B avistam o topo do farol segundo ângulos de 53º e 33º respectivamente. Sabendo que o farol se encontra a 125 m de altura, determina a distância entre os dois barcos.



Bom Trabalho! ☺

Anexo 6 - Questionário Aplicado aos Alunos

Questionário

A elaboração deste questionário tem por objectivo perceber qual a opinião dos alunos acerca das tarefas realizadas na sala de aula, sobre o tópico Trigonometria do triângulo rectângulo, assim como, quais as principais dificuldades que os alunos sentiram nestas aulas, que incidiram sobretudo na resolução de problemas. Este questionário serve para o professor reflectir sobre a adequação ou não das tarefas propostas, mas também sobre o seu método de ensino.

Data: ____/___/____

1. Achas que as tarefas propostas foram interessantes para a tua aprendizagem?

Sim ❐ Não ❐

Porquê?____
____
____
____
____

2. Considerando o conjunto das fichas de trabalho que foram realizadas, indica qual ou quais foram as mais significativas para a tua aprendizagem.

Para cada ficha de trabalho, assinala com um X o grau de concordância que lhe atribuis, considerando que todas as opções de resposta utilizam a seguinte escala:

Discordo Totalmente	Discordo Parcialmente	Concordo Parcialmente	Concordo Totalmente
1	2	3	4

Ficha de trabalho 1 – Descobrindo Razões Trigonométricas | 1 | 2 | 3 | 4 |

Ficha de trabalho 2 – Os Telhados das Casas | 1 | 2 | 3 | 4 |

Ficha de trabalho 3 – Os Triângulos Rectângulos | 1 | 2 | 3 | 4 |

Ficha de trabalho 4 – Distâncias Inacessíveis | 1 | 2 | 3 | 4 |

Ficha de trabalho 5 – Relações entre Razões Trigonométricas | 1 | 2 | 3 | 4 |

Justifica a tua escolha.

____

3. Tendo em conta o conjunto de tarefas que realizaste, qual a tarefa que contribuiu mais para a tua aprendizagem?

Justifica a tua resposta.

4. Sentiste em algum momento que necessitavas de mais apoio em alguma das tarefas?

Sim ❒ Não ❒

Se sim, em qual das tarefas? ____

Quais as dificuldades que sentiste? E que tipo de apoio necessitaste?

5. Ao longo destas aulas o ensino centrou-se na resolução de problemas. Quais os aspectos positivos que estas aulas tiveram para a tua aprendizagem? Porquê?

6. E quais as dificuldades que sentiste durante estas aulas? Porquê?

Obrigada pela tua colaboração