

TRIGONOMETRIA, CÁLCULO, ENSINO E APRENDIZAGEM

*Steffani Maiara Colaço Miranda
PIBID - UNIOESTE – Cascavel
steffani_miranda@hotmail.com*

*Susana Lazzaretti Padilha
PIBID - UNIOESTE – Cascavel
Susana.lap@hotmail.com*

*Andréia Büttner Ciani
PIBID - UNIOESTE – Cascavel
andbciani@gmail.com*

Resumo:

Neste pôster abordamos as nossas dificuldades no curso de Licenciatura em Matemática advindas da disciplina Cálculo I. Percebemos que grande parte delas é oriunda dos conhecimentos superficiais em Trigonometria apreendidos durante a vida escolar. Nossas experiências como alunas de Ensino Médio geraram dificuldades na Graduação. O estudo e reflexão de nossas dificuldades, experiências no curso e a participação no PIBID vieram a fazer com que nos debruçássemos a estudar Trigonometria, e a refletir sobre as formas de ensiná-la. A História da Matemática pode ser vista como uma fonte motivadora para a aprendizagem, e geradora de situações problemas para o ensino. Primeiramente concluímos que uma abordagem mais completa sobre tópicos da Trigonometria se faz necessária antes da vida acadêmica em Ciências, Matemática, Engenharia ou Física. Na tentativa de sintetizar a relação mais íntima entre o Cálculo e a Trigonometria esbarramos nos significados de tangente, coeficiente angular, inclinação e ângulo.

Palavras-chave: Ensino de Trigonometria; História da Trigonometria; Tangente; Ensino de Cálculo; Coeficiente Angular.

1. Introdução

Este relato de experiência diz respeito à nossa trajetória acadêmica, estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, e nossas dificuldades no primeiro ano do curso, as quais se fizeram mais fortes na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Atribuímos a principal razão de nossas dificuldades no curso e, em especial nesta disciplina, ao nosso Ensino Médio.

Passamos da condição de simplesmente atribuir culpas ao sistema de ensino, aos professores ou aos colegas; para a condição de futuras professoras de Matemática. Desta

forma, passamos a refletir e a discutir de que modo faríamos como professoras para que nossos alunos não viessem a enfrentar os mesmos problemas e angústias, os quais nos deparamos desde que ingressamos na Universidade.

2. Aprendizagem trazida

Ao ingressarmos na Licenciatura em Matemática, já estávamos conscientes de que seria difícil obter um bom desempenho no curso, pois não havíamos desenvolvido o hábito de estudar de maneira sistemática. Nosso Ensino Médio, todo realizado em escola pública, não exigira o estudo e a aprendizagem exigidos na Universidade. Naquele a reprovação ocorria somente em casos extremos. Não queremos dizer que ela seria uma garantia de que os alunos, se reprovados, aprenderiam, mas acreditamos que se ela ocorresse, com mais frequência nos casos mais graves, pelo menos os alunos seriam obrigados a demonstrar maior interesse e até, quem sabe, estudariam mais, obtendo assim, algum resultado.

Também o desinteresse dos próprios alunos, pode ter desmotivado alguns professores a não ensinar os conteúdos necessários com a devida profundidade. Quando os professores tentavam, de fato, ensinar determinado conteúdo de forma a contemplá-lo intimamente, alguns obstáculos interpostos pelos alunos atrapalhava os professores. Nestes momentos, quando o professor insistia em ensinar, muitas vezes não conseguia ministrar uma aula de boa qualidade. Parece que a repetição sistemática do impedimento de ensinar, e a recusa em aprender, por parte dos estudantes, acabavam desestimulando os professores na elaboração das aulas. Eles iam perdendo a motivação de ensinar. Além disso, após toda avaliação havia uma recuperação e, fazendo muito pouco, já era o suficiente para obter a nota para ser promovido.

Portanto, talvez pelas razões por nós percebidas, ou até por outras que não fomos capazes de perceber ainda, não houve a efetivação do desenvolvimento do hábito de estudar, ele não se consolidara, nem com o final do Ensino Médio. Assim, ao ingressar na Universidade, o sentimento negativo, “choque”, advindo do impacto da ruptura com o modelo da Educação Básica e o contraste com o modelo da Universidade, aconteceu conosco nos primeiros dias de aula e, principalmente, nas aulas de Cálculo I.

3. Como aprender Cálculo sem Trigonometria?

Mesmo tomando consciência rapidamente das mudanças, e nos esforçando no estudo, algumas dificuldades foram inevitáveis. Um fato que pode ser tomado como

exemplo é o ocorrido na disciplina de Cálculo Diferencial Integral I. Nas primeiras aulas, os conceitos abordados nos eram conhecidos, e muitos já em parte compreendidos, tudo estava sendo apreendido de forma clara. Porém, em certo momento, não distante das primeiras aulas, o professor abordou um assunto que nos solicitava o conhecimento em TRIGONOMETRIA, aí o que achávamos saber mostrou-se insuficiente. A princípio, parecia um assunto que nos era conhecido, que fora tratado na 8ª série (9º ano) e também no Ensino Médio. Naquela época parecia muito fácil, então pensávamos que Trigonometria já era um assunto dominado intelectualmente. Porém, estávamos totalmente enganadas, chegamos à conclusão de que sabíamos pouquíssimo dessa área, pois o que eu havíamos visto nos últimos anos, fora de maneira superficial, um conteúdo muito resumido e simples, que abrangia parte ínfima do conhecimento historicamente adquirido da Trigonometria. Muito do que aprendemos no Ensino Médio formaram conceitos generalizados por fórmulas e tabelas, o que nos permitia, por exemplo, resolver uma equação trigonométrica, mas não explicava o porquê da possibilidade de tal resultado a partir de tais operações. Toda a Trigonometria que sabíamos poderia ser resumida em uma tabela com os valores mais conhecidos de seno cosseno e tangente, e as relações fundamentais no triângulo retângulo.

Inicialmente, o professor de Cálculo fez uma pequena revisão de conceitos e definições trigonométricas. Nela, o professor apresentou algumas relações tais como $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$; $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \sin y \cdot \cos x$; $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \pm \sin x \cdot \sin y$, que não fizeram muito sentido, pois eram apenas para serem “lembradas”. Mas como podemos lembrar de algo que nunca fora visto ou não fora aprendido? Mais problemático do que não conhecê-las é lembrar, sem nunca ter compreendido a sua justificativa ou origem. Durante o período de revisão percebemos a desproporcionalidade da expectativa do professor em relação ao nosso conhecimento, com o que realmente sabíamos.

Posteriormente, outros conteúdos trabalhados no curso de cálculo foram exigindo conhecimentos prévios em Trigonometria. O livro indicado pelo professor traz um capítulo sobre as funções trigonométricas, com uma abordagem pautada em demonstrações. Mas não houve tempo suficiente para a abordagem deste capítulo em sala.

Há conceitos e definições que são de eminente importância no estudo do Cálculo. As fórmulas apresentadas de soma e subtração de arcos para seno e cosseno não deveriam ser apresentadas antes da construção de uma delas, para evitar que o estudante fique com uma ideia da Matemática como algo pronto e acabado, mas algo a ser construído.

Outra dificuldade que grande parte de nossos colegas dos cursos de exatas enfrentam, nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral, diz respeito ao estudo de derivadas das funções trigonométricas, pois, para que aprendamos uma nova operação com determinadas funções, é necessário o conhecimento de maneira suficientemente grande delas e suas propriedades. Como chegamos a Universidade com saberes não suficientemente constituídos e dominados, a aprendizagem se torna ainda mais difícil, pois é falta de domínio do saber torna-se obstáculo epistemológico. A dificuldade na aprendizagem e no ensino se tornam intransponíveis com os tópicos: Integrais Trigonométricas, Técnicas de integração por Substituição Trigonométrica, Derivadas das Funções Trigonométricas Inversas e suas respectivas Integrais, estudados posteriormente.

Além disso, outros tópicos estudados no curso de Cálculo I, ainda os que não apareça mencionado no título do tópico as funções trigonométricas, podem evocá-las no texto do conteúdo, pois o Cálculo trata de funções definidas no conjunto dos reais, e todas as funções trigonométricas e suas inversas estão ali definidas. Então podemos estudá-las, por exemplo, no capítulo das derivadas de logaritmos ou exponenciais, ou no capítulo geral de técnicas de integração. Enfim, questões sobre trigonometria permeiam qualquer livro de Cálculo Diferencial e Integral.

Quando se fez necessário o saber de alguns conceitos de Trigonometria para o cálculo de limites e de derivadas, por exemplo, a nossa aprendizagem passou a ser cada vez mais rara, ficando cada vez mais evidente, para nós, a necessidade de dominar os conteúdos de Trigonometria. Dessa forma, era preciso a busca por aprender o que havia ficado para trás. Pois, certamente, necessitaríamos muito deste conhecimento para nossa vida acadêmica e, principalmente para nossa vida profissional de professoras de Matemática.

4. Estudar “mais” Trigonometria da mesma maneira ajuda na compreensão do Cálculo?

Em um primeiro momento, acreditamos que tantas dificuldades eram devidas à falta de conteúdo e que talvez o tempo destinado às aulas de Matemática no Ensino Médio, duas ou três aulas semanais, seria o culpado pelas nossas dificuldades.

No entanto, ao avançarmos em nossos estudos, nas disciplinas do primeiro ano de nosso curso e nas reuniões do PIBID, é que percebemos que talvez mais tempo para o estudo de Matemática na escola não implicasse em mais aprendizagem de qualidade.

A utilização de materiais manipuláveis seria uma alternativa para a compreensão dos conteúdos. Tal afirmativa se sustenta em nossa própria experiência com aulas realizadas no Laboratório de Ensino de Matemática, curso realizado no nosso primeiro ano da graduação, no qual as professoras utilizaram diversos materiais, o que nos auxiliou a aprender certos conceitos matemáticos que deveríamos ter aprendido no Ensino Médio. No entanto, lá não tivemos tais experiências com materiais, o que poderia ter nos auxiliado no conhecimento e aprendizagem de alguns conteúdos. Por exemplo, a utilização do Teodolito, um objeto construído para a mediação e visualização de ângulos, possibilita que o aluno possa visualizar a situação problema envolvendo ângulos, relações e propriedades trigonométricas não somente pela capacidade de criar figuras mentais.

As demonstrações também são de suma importância, pois elas nos ajudaram na compreensão de relações e propriedades na Trigonometria, e deveriam ser aderidas pelos professores do Ensino Fundamental e Médio, pois os alunos assam a compreender a lógica da construção do conhecimento matemático e percebem que aquilo não veio pronto.

Como futuras professoras de Matemática, pensamos que deveriam ser oferecidas, aos professores da Educação Básica, mais alternativas para contornarem tantos percalços, como cursos de capacitação. Compreendemos que, hoje em dia, muitos dos fracassos dos alunos que chegam a Universidade são justificados como culpa dos professores da rede pública de ensino, mas há muitas “curvas” pelo caminho que justificam esses problemas.

5. Buscando caminhos para aprender e ensinar Trigonometria

Talvez uma abordagem histórica da Trigonometria possa auxiliar no rompimento da crença dos estudantes de que a Matemática é algo descoberto por gênios, ou inventada por alguns estudos abstratos, desvinculados do mundo prático e útil. Bastian e Almouloud (2003) defendem esta perspectiva no ensino da trigonometria. Eles partem da contextualização histórica para a abordagem do teorema de Pitágoras, utilizando a sua história para reforçar o seu caráter utilitário, em uma sequência didática conseguiram trabalhar com os estudantes de maneira eles deixassem de entender o teorema como uma fórmula a ser memorizada. Costa (2003, p. 2) afirma que a Trigonometria, “[...] mais que qualquer ramo da matemática, desenvolveu-se no mundo antigo a partir de necessidades práticas, principalmente ligadas a Astronomia, Agrimensura e Navegação”.

Segundo Costa (2003), as origens da trigonometria são imprecisas e podemos encontrar problemas que envolvem a cotangente de um ângulo diedro da base de uma

pirâmide no papiro egípcio de Rhind, datado de 1650 a.C, sendo também possível encontrar na tábua cuneiforme babilônica, Plimpton 322, uma tábua de secantes. Daí, percebemos quão antigas as ideias da trigonometria o são. Eves (1995) apud Costa (2004, p. 5) afirma que somente Hiparco, em 180 a.C, foi quem introduziu na Grécia a divisão do círculo em 360° , talvez a partir da divisão do zodíaco em 360 partes, realizada por Hipsícles. Hiparco teria então generalizado esta divisão para o círculo. Hiparco construiu a primeira tabela trigonométrica.

Segundo Costa (2003), os primeiros indícios de rudimentos de trigonometria surgiram no Egito e na Babilônia, a partir de cálculos envolvendo razões entre os lados de triângulos semelhantes. Surgiu no Egito o relógio de sol chamado de Gnômon, criado utilizando conhecimentos trigonométricos, ele associava a sombra projetada por uma vara vertical a sequências numéricas, relacionando seu comprimento com as horas do dia. Costa (2003) considera que essas ideias dos babilônios e egípcios anunciavam a chegada das funções Tangente e Cotangente. Ainda encontramos em Costa (2003) que os Babilônios foram excelentes astrônomos, construíram o calendário astrológico em 747 a.C, também construíram a tábua de eclipses lunares que utilizamos até os dias atuais, usando conceitos trigonométricos. Houve também uma trigonometria primitiva no Oriente, na China onde o triângulo retângulo era usado para medir distância, comprimento e profundidade. (EVES, 1995 apud COSTA, 2003).

Hsiang (1993) discute o seno e o cosseno, na sua origem histórica como razões entre os lados de um triângulo retângulo, mas acrescenta que, de um ponto de vista funcional moderno, é mais natural considerar as funções seno e cosseno como funções definidas no círculo unitário, pois movimentos circulares são muito úteis, como o movimento de rodas. Um exemplo bastante comum é o problema de expressar o movimento de uma roda gigante, como a altura de uma cadeira em função do tempo.

Watanabe (1996) discorre sobre as dificuldades de compreensão advindas da transição das razões trigonométricas para as funções periódicas, discutindo a função seno e o porquê de ora em graus ora em radianos.

Simionato e Pacheco (2007) relatam experiências em sala de aula, e indicam um desinteresse para aprender e ensinar Trigonometria. Consideram imprescindível conhecer a história da Matemática a fim de compreender os conceitos, e de fundamental importância que se estabeleça um vínculo com a realidade, de se saber como surgiu, saber que aquilo nem sempre existiu daquela maneira. Consideram ainda importante a utilização de

materiais manipuláveis. Uma atividade proposta em seu trabalho diz respeito a um suposto asteroide que estaria se aproximando da Terra e, se não for encontrada uma maneira eficaz para desviá-lo de sua rota, este irá chocar-se com o nosso planeta. Este material contém tópicos da história da Trigonometria e situações em que ela está sendo aplicada atualmente. Os autores demonstram então que é possível trabalhar a História, a Geografia e a Matemática de maneira interdisciplinar com a contextualização da Trigonometria.

Por fim, o trabalho de Baldino et al. (1997) tematiza sobre as relações entre tangente e derivada; derivada e inclinação; inclinação e ângulo; ângulo e coeficiente angular; questiona e instiga a reflexão e discussão entre “uma tal” tangente do Cálculo e uma tangente da Trigonometria, da Geometria Analítica, e questiona qual a relação entre elas. O artigo parte do relato de uma estudante de Pós-Graduação, presente em uma sessão coordenada pelo professor Roberto Ribeiro Baldino, relata a dificuldade de uma aluna do primeiro ano da Graduação em Matemática que, se recusava a estudar e aprender Cálculo, nas aulas de recuperação paralela, pois achava fundamental primeiro saber Trigonometria. É apresentada uma proposta de trabalho para o Ensino Médio com problemas do tipo: expresse os coeficientes angulares das retas secantes à curva $y = x^2$ passando pelo ponto (2, 4), em função de x . A resolução de um problema como este pode ser realizada por alunos do ensino médio, pois envolve o conhecimento de coeficiente angular de uma reta, de tangente e a ideia de função, não exige a linguagem sofisticada dos limites. Algumas ideias do Cálculo Diferencial e Integral, associadas à Trigonometria podem ser trabalhadas no Ensino Médio a partir de uma linguagem matemática presente no currículo do Ensino Médio.

6. Conclusões provisórias

Refletindo mais sobre a postura dos professores em relação à “cobrança” do estudo, pensamos que mesmo se os professores quisessem realizar uma cobrança mais efetiva para avaliar a qualidade de seus conhecimentos, o quanto o estudo de cada um foi aprofundado e seus efeitos na aprendizagem, a fim de orientar o ensino; tal avaliação não seria coerente com o ensino predominante das aulas, pois o ensino não priorizava o aprofundamento nos conteúdos.

Somos “ensinados” que a nota e a promoção independem do conhecimento e do esforço, e acabamos nos acostumando a isso. Infelizmente, não criamos e nem desenvolvemos o hábito de estudar, sendo que a escola deveria ser o lugar mais adequado

para o cultivo deste hábito tão importante. Por incrível que possa parecer, não aprendemos a estudar na escola, esta não é uma prática comumente ensinada na Educação Básica, e ainda que muitos, já acadêmicos, costumam a acreditar na sua necessidade, é necessário o desenvolvimento e a incorporação em sua rotina acadêmica.

Procuramos descrever neste texto alguns dos obstáculos que encontramos em nosso processo de aprendizagem, pontos que nos chamaram a atenção nessa mudança de ponto de vista, de alunas para futuras professoras. Pois, antes de alcançar a graduação em um curso de licenciatura, víamos os problemas educacionais focados no professor, no colégio, no sistema de ensino. Não que a visão que hoje temos seja de grandeza intelectual, mas houve alguma mudança para um novo horizonte, que aos poucos vamos desvendando, associada às experiências e aos conhecimentos construídos.

Pretendemos continuar a investigar as relações entre História da Matemática e sua função didática, para compreender melhor os conceitos e a forma como se constrói Matemática; as relações entre a Trigonometria e Geometria Analítica do Ensino Médio com o Cálculo Diferencial e compreender porquê problemas do tipo presentes em Baldino et al. (1997) ainda não aparecem em livros didáticos e como poderíamos propor novas situações de aprendizagem de “Pré-Cálculo” no Ensino Médio.

7. Referências

BASTIAN, Irma Verri; ALMOULOU, Saddo Ag. O teorema de Pitágoras: uma abordagem enfatizando o caráter necessário/suficiente. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo: SBEM, n. 14, p. 45-53, 2003.

BALDINO, Roberto Ribeiro et al. Do coeficiente angular da reta ao conceito de diferencial: crítica ao ensino atual e proposta alternativa, **Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática**, vol.6, n.1, p. 29-50, 1997.

COSTA, Nilce Meneguelo Lobo da. A história da trigonometria. **Educação Matemática em Revista**, Chapecó, n. 10, p. 60-69, 2003.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: UNICAMP. 1995.

HSIANG, Wu-yi. Funções trigonométricas e leis da trigonometria. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 23, p. 23-34, 1993.

SIMIONATO, Ivane Marcarini; PACHECO, Edilson Roberto. **Um olhar histórico à trigonometria como fonte de motivação em sala de aula**. Programa de Desenvolvimento Educacional da Secretaria de Estado da Educação – PDE - SEED/PR, 2007.

WATANABE, Renate Compertz. Seno de 30 é um meio? **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 30, p. 26-32, 1996.