

**UNIVERSIDADE DE LISBOA**  
**INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE**  
**LISBOA**



**RELATÓRIO DA PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA**

**Resolução de problemas envolvendo**  
**Sistemas de Equações de 1.º grau a duas**  
**incógnitas**

**-um estudo com alunos do 8.º ano-**

Vanessa Isabel Oliveira Santos

**MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

**2012**



**UNIVERSIDADE DE LISBOA**  
**INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE**  
**LISBOA**



RELATÓRIO DA PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA

**Resolução de problemas envolvendo**  
**Sistemas de Equações de 1.º grau a duas**  
**incógnitas**

**-um estudo com alunos do 8.º ano-**

Vanessa Isabel Oliveira Santos

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Orientador: Professor Doutor Henrique Manuel Guimarães

Coorientador: Professora Doutora Suzana Nápoles

2012



## *Resumo*

O presente estudo tem como objetivo identificar e compreender as estratégias adotadas pelos alunos, bem como as dificuldades que manifestam na resolução de problemas envolvendo sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas. De forma a desenvolver este estudo procurou-se responder a duas questões: (1) Que dificuldades os alunos evidenciam na interpretação dos enunciados dos problemas, nomeadamente no que se refere a aspetos de tradução da linguagem corrente para a linguagem matemática e reciprocamente? e (2) Que estratégias são utilizadas pelos alunos na resolução de problemas envolvendo sistemas de equações e que dificuldades manifestam?

A investigação foi levada a cabo na turma A do 8.º ano de escolaridade da Escola Básica 2,3 Maria Alberta Menéres. Para tentar responder às questões acima referidas, procedi à recolha de dados através dos seguintes métodos: recolha de produções escritas dos alunos, gravação áudio das interações orais em dois grupos escolhidos criteriosamente e observação de aulas feita por mim própria e por interposta pessoa.

Ao longo das aulas foram realizadas atividades vistas como favoráveis à identificação de possíveis dificuldades na tradução da linguagem corrente para a linguagem matemática e reciprocamente. Estas atividades concentraram-se sobretudo na resolução de problemas envolvendo sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas. A análise das produções dos alunos e discussões respetivas, no que diz respeito à resolução de problemas, indica que os alunos revelam uma grande dificuldade na compreensão dos mesmos. Também é evidente a dificuldade que manifestam na expressão da linguagem corrente, quer escrita quer oral.

Relativamente às estratégias de resolução de problemas, este estudo permitiu constatar que os alunos, inicialmente, optam pelo método de tentativa e erro mas, em geral, rapidamente o abandonam, optando por recorrer a equações de 1.º grau a uma incógnita ou sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas.

**Palavras-chave:** Sistemas de equações, Resolução de problemas, estratégias e dificuldades, Aprendizagem



## *Abstract*

The present study aimed at identifying and understanding student's strategies and difficulties in solving problems involving systems of two linear equations in two unknowns, considering the following research questions: (1) What are the student's difficulties regarding the interpretation of mathematical problems (specifically while translating mathematical vocabulary into common language and vice versa)? and (2) What are the major strategies used by the students in order to solve that kind of problems, and what difficulties do they show?

The study was carried out in an 8th grade class in Maria Alberta Menéres Elementary School [Lisboa, Portugal]. To data collection I used students' written productions in solving problems, audio recording of oral interactions in two groups and classroom observation made by myself and by my colleague.

Problem solving tasks involving systems of two linear equations in two unknowns were used to better identify and understand student's difficulties in translating from everyday language to mathematical language and vice versa. Data analysis of both the students' written productions and the audio-recordings showed that these students had great difficulties in understanding problems statements also showing poor reading and writing skills as well as lacking an appropriate ability to justify and clearly explain their arguments.

Additionally, I found that while solving problems students initially preferred the trial by error method but, in general, rapidly switched to an approach using first-degree equations with one unknown or simply chose systems of linear equations in two unknowns directly.

**Key words:** systems of equations, problem solving, learning, learning strategies and difficulties.





## *AGRADECIMENTOS*

Em primeiro lugar queria agradecer a Deus e à minha família, em particular aos meus pais e irmão que sempre me apoiaram e sempre acreditaram no meu trabalho.

Ao Rui pela compreensão, pela confiança, pelo apoio incondicional, por ter acreditado em mim, pela cumplicidade, pelo incentivo, pela ajuda, por tudo o que passamos juntos e pelo Amor que nos une.

Ao Professor Henrique Manuel Guimarães, o meu orientador, pelas sugestões, conselhos e críticas pertinentes para superar as dificuldades sentidas.

À professora Suzana Nápoles, a minha coorientadora, pelas críticas e orientação nos conceitos matemáticos.

À professora Teresa Marques, pela paciência, disponibilidade, confiança, conselhos e por me abrir as portas das suas aulas.

À Escola Básica 2,3 Maria Alberta Menéres, que me possibilitou o desenvolvimento da investigação.

Aos alunos da turma envolvida no estudo, pelo interesse, esforço, colaboração e participação.

Aos meus colegas de Mestrado, em particular Ana, Filipe e Joana, pelos momentos que passámos juntos, pela ajuda prestada, colaboração, compreensão, amizade e interesse demonstrados.



# INDICE

<b>Capítulo I</b> .....	1
Introdução.....	1
<b>Capítulo II</b> .....	5
Enquadramento Curricular e Didático.....	5
<b>Capítulo III</b> .....	21
A Unidade de Ensino.....	21
1-Caraterização da escola e da turma.....	21
2-Enquadramento no programa.....	27
3-Estratégias e recursos.....	32
4-Conceitos e propriedades matemáticas.....	35
5-Síntese das aulas.....	38
<b>Capítulo IV</b> .....	45
Métodos e procedimentos de recolha de dados.....	45
<b>Capítulo V</b> .....	49
Apresentação e Análise de Dados.....	49
<b>Capítulo VI</b> .....	75
Reflexão sobre o trabalho realizado.....	75
<b>Referências</b> .....	83
<b>Anexos</b> .....	87

## **INDICE DE ANEXOS**

<b>ANEXO I - Planos de aula</b> .....	87
Planificação da 1ª aula.....	87
Planificação da 2ª aula.....	91
Planificação da 3ª aula.....	93
Planificação da 4ª aula.....	95
Planificação da 5ª aula.....	98
<b>ANEXO II – Tarefas em aula</b> .....	101
Ficha S.E.1.....	101
Ficha S.E.2.....	102
Tarefas do manual.....	104
Ficha S.E.3.....	105
Ficha S. E.4.....	105
<b>ANEXO III – Tarefas para casa</b> .....	107
T.P.C.1.....	107
T.P.C.2.....	108
<b>ANEXO IV – Mini teste</b> .....	109
<b>ANEXO V – Autorização Paternal</b> .....	111
<b>ANEXO VI – Autorização Direção</b> .....	113

## *INDICE DE QUADROS*

<b>Quadro 1:</b> George Pólya; A Arte de Resolver Problemas.....	12
<b>Quadro 2:</b> Guzmán, percurso na resolução de problemas.....	13
<b>Quadro 3:</b> Capacidades transversais trabalhadas nas aulas lecionadas.....	29
<b>Quadro 4:</b> Quadro resumo das aulas lecionadas.....	30

## *INDICE DE FIGURAS*

<b>Figura 1:</b> Variação de idades dos alunos da turma, por sexo.....	22
<b>Figura 2:</b> Habilitações dos pais dos alunos da turma.....	23
<b>Figura 3:</b> Notas de Matemática dos alunos, do 1.ºPeríodo.....	24
<b>Figura 4:</b> Notas de Matemática dos alunos, do 2.ºPeríodo.....	24
<b>Figura 5:</b> Comparação das notas de Matemática dos alunos nos 1.º Período e 2.º Período.....	25
<b>Figura 6:</b> Notas de Matemática dos alunos no 3.º Período.....	26
<b>Figura 7:</b> Evolução dos alunos ao longo do ano.....	26
<b>Figura 8:</b> Resolução do grupo X ao problema 1 da ficha S.E.1.....	51
<b>Figura 9:</b> Resolução do grupo Y ao problema 1 da ficha S.E.1.....	51
<b>Figura 10:</b> Resolução do grupo Y ao problema 2 da ficha S.E.1.....	53
<b>Figura 11:</b> Resolução do grupo X ao problema 2 da ficha S.E.1.....	54
<b>Figura 12:</b> Resolução do grupo Y ao problema 3 da ficha S.E.1.....	56
<b>Figura 13:</b> Resolução de um grupo ao problema 3 da ficha S.E.1.....	57
<b>Figura 14:</b> Resolução do grupo Y ao problema 1 do manual.....	60
<b>Figura 15:</b> Resolução do grupo Y ao problema 2 do manual.....	61
<b>Figura 16:</b> Resolução do grupo Y ao problema 3 do manual.....	62
<b>Figura 17:</b> Resolução do grupo Y ao problema 5 do manual.....	63
<b>Figura 18:</b> Resolução de um par do grupo X da ficha S.E.3.....	65

<b>Figura 19:</b> Resolução de um par do grupo Y da ficha S.E.3.....	67
<b>Figura 20:</b> Resolução do par do grupo Y ao problema 1 da ficha S.E.4.....	69
<b>Figura 21:</b> Resolução do par do grupo Y ao problema 2 da ficha S.E.4.....	70
<b>Figura 22:</b> Resolução do par do grupo Y ao problema 3 da ficha S.E.4.....	71
<b>Figura 23:</b> Resolução do par do grupo Y ao problema 4 da ficha S.E.4.....	72





# CAPITULO I

## INTRODUÇÃO

Este estudo tem como objetivo identificar e compreender as estratégias adotadas pelos alunos, bem como as dificuldades que manifestam na resolução de problemas envolvendo sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas, ou seja, compreender a forma como os alunos interpretam os enunciados dos problemas que envolvem sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas, as estratégias que adotam, como utilizam os seus conhecimentos e as dificuldades que evidenciam. Foi desenvolvido no âmbito da lecionação do tópico de equações, em particular sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas que se insere no tema de Álgebra numa turma do 8.º ano do 3.º ciclo do Ensino Básico entre 16 e 30 de abril de 2012.

O meu estudo centrou-se na aprendizagem relativa ao subtópico Sistemas de Equações do 1.º grau a duas incógnitas, incidindo também em duas capacidades transversais indicadas pelo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (PMEB) (DGIDC, 2007) – Resolução de problemas e Comunicação matemática. Estes aspetos foram estudados de forma integrada através de atividades realizadas em pequenos grupos na sala de aula com incidência particular na resolução de problemas e na comunicação matemática. Para este estudo formulei duas questões:

- Que dificuldades os alunos evidenciam na interpretação dos enunciados dos problemas, nomeadamente no que se refere a aspetos de tradução da linguagem corrente para a linguagem matemática e reciprocamente?
- Que estratégias são utilizadas pelos alunos na resolução de problemas envolvendo sistemas de equações e que dificuldades manifestam?

Para tentar dar respostas a estas questões utilizei produções escritas dos alunos, gravação áudio das interações orais em dois grupos e registos de observação de aulas, realizados por interposta pessoa, bem como notas reflexivas após aula elaboradas por mim. O modo de trabalho mais habitual em sala de aula foi o trabalho em pequenos grupos e em pares com o objetivo de favorecer e incentivar a interação, partilha e discussão entre alunos na resolução de problemas e criar oportunidades para analisar como os alunos pensam e comunicam entre si durante o trabalho autónomo.

A escolha do tema de investigação deveu-se não só à calendarização mas também ao meu gosto pessoal por resolução de equações e sistemas de equações. A escolha da problemática deveu-se ao facto de anteriormente ter sido uma das minhas dificuldades na aprendizagem da matemática, e ao mesmo tempo sentir-me desafiada e também por se tratar de uma dificuldade muito comum dos alunos que se tem vindo a deparar e devido ao insucesso escolar na resolução de problemas. Outro motivo para esta escolha é o facto de considerar a resolução de problemas e a comunicação matemática duas capacidades muito importantes na aprendizagem desta disciplina. Por estes motivos achei que seria um estudo interessante e útil para o meu futuro como professora de Matemática.

A resolução de problemas e a comunicação matemática são indicadas pelo Programa de Matemática do Ensino Básico como formas de desenvolver nos alunos a capacidade de pensar matematicamente e exprimir, justificar e argumentar ideias matemáticas. A resolução de problemas é uma das capacidades transversais mais importantes na aprendizagem da Matemática porque permite a aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente e desenvolver novas aprendizagens.

Neste relatório apresento um enquadramento teórico do tema e da problemática em estudo, faço uma breve caracterização da escola e da turma envolvida, apresento uma resumida planificação da unidade de ensino e também os planos e síntese das aulas lecionadas. Além destes capítulos, menciono os métodos de recolha de dados escolhidos por mim e uma breve justificação desta escolha. Apresento, ainda, uma breve análise dos dados recolhidos durante a minha

intervenção, tal como procuro responder às questões de investigação, de uma forma reflexiva.



# *CAPITULO II*

## *ENQUADRAMENTO CURRICULAR E DIDÁTICO*

O Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) é um documento onde surgem finalidades e objetivos gerais para o ensino da Matemática, sendo que estes “definem as principais metas para esse ensino e que são comuns aos três ciclos do ensino básico” (p. 1). Neste programa, a Matemática é referida como sendo “uma ciência que no início era somente contagens e medições tendo-se tornado muito mais abrangente com a decorrer dos anos”. Atualmente, é bastante visível a importância que a resolução de problemas, a formulação e teste de conjeturas, a generalização, a demonstração, a elaboração e refinamento de modelos têm em toda a atividade matemática (DGIDC, 2007, p. 2).

Segundo o programa, ao longo dos três ciclos da escolaridade básica, o ensino da Matemática deve ser orientado por duas finalidades fundamentais. A primeira reside na promoção da aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática, tal como no desenvolvimento da capacidade da sua integração e da sua mobilização em contextos diversificados. Tem ainda como finalidade o desenvolvimento de atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de aprender esta ciência.

Para além das finalidades, há que ter em conta os objetivos gerais. Os alunos devem conhecer os factos e procedimentos básicos da Matemática; desenvolver uma compreensão da Matemática; ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas representações; ser capazes de comunicar as suas ideias e interpretar as ideias dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento matemático; ser capazes de raciocinar matematicamente usando os conceitos, representações e procedimentos matemáticos; ser capazes de resolver problemas; ser capazes de

estabelecer conexões entre diferentes conceitos e relações matemáticas e também entre estes e situações não matemáticas; ser capazes de fazer Matemática de modo autónomo e ser capazes de apreciar a Matemática (DGIDC, 2007, p. 4-6).

O PMEB apresenta a Álgebra como um dos quatro grandes temas do ensino de Matemática, referindo dentro deste tema o pensamento algébrico, como sendo essencial na aprendizagem da Matemática, nomeadamente na resolução de problemas.

Segundo o programa de Matemática do Ensino Básico, o estudo do tema Álgebra no 3.º ciclo tem como objetivo “desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos (DGIDC, p. 55). Dentro do pensamento algébrico, é referido a importância das relações entre objetos para o desenvolvimento deste, uma vez que este passa, também, pela interpretação de algumas situações matemáticas, situações essas que são expressas através de objetos matemáticos como equações, expressões algébricas, utilizando sempre uma notação algébrica bastante rica.

Para Kieran (2004), o desenvolvimento do pensamento algébrico no ensino básico envolve o recurso a tarefas onde podem ser usados os símbolos e letras algébricas como uma ferramenta importante na resolução dessas tarefas. Já para Kaput (1999), o pensamento algébrico manifesta-se no estabelecimento de generalizações e relações matemáticas.

Segundo Nabais (2010), atualmente recorre-se também à utilização das tecnologias na aprendizagem da Álgebra o que torna os alunos elementos mais participativos, ativos e intervenientes na sala de aula.

Ponte, Branco & Matos (2009) afirmam que o pensamento algébrico inclui três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas. Representar diz respeito a:

- Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais;

- Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação e vice-versa;
- Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.

Na vertente raciocinar é importante:

- Relacionar;
- Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras;
- Deduzir.

A vertente de resolver problemas requer:

- Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

De acordo com o programa de Matemática, “a aprendizagem da simplificação de expressões algébricas, deve ser progressiva e recorrer a situações que permitam aos alunos compreender a manipulação simbólica envolvida, por exemplo, efetuando cálculos a partir de expressões algébricas substituindo as letras por valores numéricos. É conveniente usar expressões algébricas para representar problemas, usando letras para designar incógnitas ou variáveis, e introduzir expressões com variáveis ligadas a um contexto” e na resolução de equações e de sistemas de equações, “os alunos devem fazer uma transição progressiva da linguagem natural para a linguagem matemática” (DGIDC, 2007, p. 55).

As Normas do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) é um documento que cobre toda a escolarização desde o pré-escolar até aos doze anos de escolaridade e tem como finalidade apoiar os professores de Matemática na sua prática letiva com o intuito de garantir que a aprendizagem da matemática seja conseguida de forma equilibrada e com qualidade (NCTM, 2009). Este documento

apresenta ideias, orientações, propostas, sugestões e esclarecimentos no ensino de cada tema do programa de matemática bem como as capacidades transversais para o ensino da Matemática, promovendo a perspectiva de uma Matemática para todos.

Segundo o NCTM (2009), os alunos até ao 8.º ano de escolaridade devem ser capazes de: compreender padrões, relações e funções; representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos; usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas e analisar a variação em diversos contextos. Para que isto aconteça, o professor deve proporcionar, frequentemente, momentos em que os alunos possam resolver problemas, analisar e refletir sobre as suas próprias resoluções e/ou resoluções de outros colegas.

“O professor deve dar atenção aos raciocínios dos alunos, valorizando-os, procurando que eles os explicitem com clareza, que analisem e reajam aos raciocínios dos colegas. A comunicação deve ter também um lugar destacado na prática letiva do professor. Através da discussão oral na aula, os alunos confrontam as suas estratégias de resolução de problemas e identificam os raciocínios produzidos pelos seus colegas. Através da escrita de textos, os alunos têm oportunidade de clarificar e elaborar de modo mais aprofundado as suas estratégias e os seus argumentos, desenvolvendo a sua sensibilidade para a importância do rigor no uso da linguagem matemática”.(NCTM, 2009, p.9)

O objetivo do meu estudo visa a identificação e compreensão das estratégias que os alunos usam e as dificuldades que manifestam na resolução de problemas envolvendo sistemas de equações de 1.º grau com duas incógnitas que se insere no tema álgebra. Para isso, será dedicado algum tempo das minhas aulas para o desenvolvimento das capacidades transversais do PMEB: Comunicação Matemática e Resolução de problemas.

De acordo com o PMEB, é através da comunicação matemática que os alunos exprimem e confrontam ideias com os colegas e professor. A comunicação matemática pode ser oral ou escrita, sendo a primeira desenvolvida através do questionamento oral. A prática e desenvolvimento da comunicação leva os alunos a melhorar outras capacidades como, por exemplo: interpretar, discutir, argumentar,



justificar e descrever. Cabe ao professor proporcionar momentos de elaboração de textos usando notação matemática adequada (DGIDC, 2007, p.63).

Em relação à resolução de problemas, esta surge como uma questão relevante no Programa de Matemática do Ensino Básico na medida em que é promovido a uma das capacidades transversais a desenvolver nos alunos no ensino da Matemática, sendo considerada muito importante desde os primeiros anos do ensino básico, uma vez que promove uma maior aprendizagem por parte dos alunos e é “fundamental na construção, consolidação e mobilização de conhecimentos matemáticos”(DGIDC, 2007, p. 62). Segundo o Programa de Matemática, “as tarefas a propor aos alunos devem privilegiar a resolução de problemas e a modelação de situações, usando conceitos e procedimentos algébricos de complexidade crescente, sem perder de vista a consolidação dos procedimentos algébricos de rotina” (DGIDC, 2007, p. 56).

Os alunos devem “desenvolver a sua capacidade de resolver problemas em contextos matemáticos, adaptando, concebendo e pondo em prática estratégias variadas, discutindo as soluções encontradas e os processos utilizados” (DGIDC, 2007, p. 62). Confrontados com um certo problema, os alunos devem ser capazes de compreendê-lo e aplicar, justificando, estratégias adequadas a esse problema. Os problemas podem defrontar situações próximas da vida quotidiana dos alunos, associados a outras áreas disciplinares ou a situações puramente matemáticas.

Segundo o Programa de Matemática do Ensino Básico, uma experiência continuada com diversos tipos de problemas pode desenvolver nos alunos autoconfiança e autonomia no trabalho. O mesmo documento defende ainda que a discussão de problemas em grupo estimula a reflexão dos alunos e conduz à sistematização de ideias e processos matemáticos. Para além disso, os alunos poderão aprender ou aprofundar alguns conceitos novos da Matemática através da resolução de problemas, contudo, estes devem ser muito bem selecionados de forma a que seja possível aplicar a Matemática noutros contextos.

A resolução de problemas apresenta várias potencialidades para os alunos. Os alunos angariam “modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas, que lhes serão muito úteis fora da aula de Matemática” (NCTM, 2009, p.57), para um melhor futuro pessoal e profissional.

O primeiro passo, e passo fundamental, para uma boa aplicação dos princípios orientadores do PMEB sobre a resolução de problemas reside no esclarecimento e na compreensão do verdadeiro significado de um problema matemático. Existem várias definições para problema, sendo importante que haja confusão entre problemas e exercícios. Segundo Newel & Simon (1972), “um problema é uma situação na qual um indivíduo deseja fazer algo, porém desconhece o caminho das ações necessárias para concretizar a sua ação” e segundo Chi & Glaser (1983), “um problema é uma situação na qual um indivíduo atua com o propósito de alcançar uma meta utilizando para tal alguma estratégia em particular”.

Para Pires (2001, p.141), um problema é “uma tarefa com um objetivo bem definido e um método de resolução desconhecido”, já para Ponte (2005) um problema é uma tarefa fechada porque “é claramente dito o que é dado e o que é pedido” (p.7,8) e desafiante devido à dificuldade que tem quem a resolve. De acordo com estas definições, estamos perante um problema quando sabemos que dados utilizar, que tipo de resposta queremos obter mas não sabemos que percurso tomar.

Conforme referido por Pereira (2001), Silveira apresenta uma definição mais intuitiva de problema matemático, exprimindo-a como toda a situação requerendo a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para a pessoa que tenta resolvê-lo e/ou a invenção de uma demonstração de um resultado matemático dado.

A partir das diferentes conceções mencionadas anteriormente, podemos dizer que estamos perante um problema quando há um objetivo a ser alcançado e não sabemos como atingi-lo. Segundo Pereira (2001), para um problema ser considerado um bom problema, tendo como objetivo o processo ensino-aprendizagem, é importante que:

- Tenha enunciado acessível e de fácil compreensão;
- Exercite o pensar matemático do aluno;
- Exija criatividade na resolução;
- Possa servir de “trampolim” para a introdução ou consolidação de importantes ideias e/ou conceitos matemáticos;
- Não seja muito fácil ou muito difícil e sim natural e interessante.

Resnick (1996), referido por Pereira (2001), distinguiu alguns tipos de problemas com diferentes características:

1- Sem algoritmização: o caminho da resolução é desconhecido, ao menos em boa parte;

2- Complexos: precisam de vários pontos de vista;

3- Exigentes: a solução só é atingida após intenso trabalho mental: embora o caminho possa ser curto, ele tende a ser difícil.

4- Necessitam de lucidez e paciência: um problema começa com uma aparente desordem de ideias e é preciso adotar padrões que permitirão construir o caminho até à solução.

5- Nebulosos: nem sempre todas as informações necessárias estão aparentes; por outro lado, pode existir conflito entre as condições estabelecidas pelo problema.

6- Não há resposta única: normalmente ocorre se existirem várias maneiras de se resolver um dado problema; no entanto, pode acontecer de não existir uma melhor solução ou até de não haver solução- ou seja, resolver um problema não é o mesmo que achar a resposta.

Existe, muitas vezes, uma grande dificuldade em distinguir exercícios de problemas matemáticos. Ponte e Sousa afirma que “uma dada questão constituirá um problema ou um exercício para um dado indivíduo, conforme ele disponha, ou não, de um processo que lhe permita resolver rapidamente essa questão. Por isso, num dado momento, uma certa questão pode constituir um problema para um certo indivíduo, mas, num outro momento, não passar de um simples exercício” (2010, p.30). Existem problemas que são mais indicados para a introdução de um conceito novo e existem outros problemas que são destinados à consolidação de conceitos já adquiridos.

Pólya, (1978) defende que “resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, esquiar ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática. (...) se você quer aprender a nadar você tem de ir à água e se você quer se tornar um bom ‘resolvedor de problemas’, tem que resolver problemas” (p. 65).

Pólya defende ainda que “uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema” (Pólya, 2003, p.11). Assim o professor deve “desafiar a curiosidade” dos alunos, “apresentando-lhes problemas adequados aos seus conhecimentos” permitindo “despertar neles o gosto pelo pensamento independente e proporcionar-lhes alguns meios para o concretizarem” (Pólya, 2003, *idem*).

Segundo Pólya (2003), existem quatro etapas na resolução de problemas: o primeiro passo é compreender o problema interpretando o enunciado, identificando os dados, as condições e o que se pretende; o segundo consiste em definir e construir uma estratégia ou plano de resolução, formulando uma estratégia e o apuramento dos procedimentos a efetuar para obter a resposta, fazendo possíveis relações entre o que queremos e o que temos, recorrendo a experiências e conhecimentos adquiridos anteriormente. O terceiro passo na resolução de problemas, segundo o mesmo autor, é executar a estratégia definida anteriormente e por fim proceder à verificação do resultado final obtido, tal como se verifica no quadro seguinte (Quadro 1):

**Quadro 1-** George Pólya; A Arte de Resolver Problemas.

Como resolver um problema	
<p><b>PRIMEIRO:</b>  <b>É preciso compreender o problema.</b></p>	<p><b>compreensão do problema</b>            Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?            Trace uma figura. Adote uma notação adequada.            Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?</p>
<p><b>SEGUNDO</b>  <b>Encontre a conexão entre os dados e a incógnita.</b>  <b>É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata.</b>  <b>É preciso chegar afinal a um plano para a resolução.</b></p>	<p><b>Estabelecimento de um plano</b>            Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?            Conhece um problema do mesmo tipo ou sobre o mesmo assunto?            Conhece um problema que lhe poderia ser útil?            Considere a incógnita! E procure pensar num problema do mesmo tipo que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.            Eis um problema do mesmo tipo e já resolvido anteriormente. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?            É possível reformular o problema? É possível reformula-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.            Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema do mesmo tipo. É possível imaginar um problema</p>

	parecido mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira, que fiquem mais próximos entre si? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta com todas as noções essenciais implicadas no problema?
<b>TERCEIRO</b> <b>Execute o seu plano.</b>	<b>Execução do plano</b> Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?
<b>QUARTO</b> <b>Examine a solução obtida.</b>	<b>Retrospectiva</b> É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

As fases da resolução de problemas, tal como Pólya as considera, contribuem não só para uma maior autonomia dos alunos, como também desenvolver a capacidade de resolver problemas e a capacidade de pensar matematicamente (Pires, 2001), tal como contribui para uma maior vontade de progredir e aprofundar o conhecimento matemático (NCTM, 2008).

Segundo Guzmán (1990, p.13), para resolver problemas em Matemática devemos percorrer um percurso idêntico ao defendido por Pólya. Este autor apresenta quatro fases na resolução de problemas defendendo que primeiro é preciso entender, depois procurar estratégias para resolver o problema seguido de uma exploração da estratégia pensada e por fim examinar o percurso seguido. Em seguida, surge um quadro síntese deste percurso de resolução de problemas segundo Guzmán (Quadro 2):

**Quadro 2-** Guzmán, percurso na resolução de problemas.

A	<b>Antes de fazer, tentar entender</b>
B	<b>À procura de estratégias:</b> Procura semelhanças com outros jogos e problemas

	<p>Começar pelo fácil torna fácil o difícil</p> <p>Experimenta e procura regularidades, temas</p> <p>Faz um esquema e, se vier a calhar..., pinta-o às cores</p> <p>Modifica o problema, muda qualquer coisa no enunciado, para ver se assim te ocorre um caminho possível</p> <p>Escolhe uma boa notação</p> <p>Explora a simetria...se puderes</p> <p>Suponhamos que não...aonde é que isso nos leva?</p> <p>Suponhamos o problema resolvido</p> <p>Pensa em técnicas gerais: indução, descida, processo diagonal, princípio do pombal...</p>
<b>C</b>	<p><b>Explora a tua estratégia</b></p> <p>Explora as melhores ideias que te tenham ocorrido na fase B. uma a uma. Não as mistures ao princípio</p> <p>Não desistas facilmente. Mas também não teimes demais com uma só ideia.</p> <p>Se as coisas se complicarem de más, haverá provavelmente outro caminho</p> <p>Resultou? De certeza? Olha para a tua solução com mais cuidado.</p>
<b>D</b>	<p><b>Extraí o sumo do jogo e da tua experiência</b></p> <p>Examina a fundo o caminho que seguiste. Como chegaste à solução? Ou, porque é que não chegaste à solução?</p> <p>Tenta perceber não só que a coisa de facto funciona, mas também porque tem de funcionar assim</p> <p>Agora vê se consegues fazê-lo de maneira mais simples</p> <p>Vê até onde pode ir o método que seguiste, para ver se o podes utilizar noutras circunstâncias</p> <p>Reflete um pouco sobre o teu próprio processo de pensamento e tira consequências para o futuro</p>

Para resolver problemas podemos recorrer a diversas estratégias como: utilização de esquemas, utilização de padrões, listagem de todas as possibilidades, a experimentação de valores, o trabalho do fim para o início, a tentativa e erro e simplificação do problema. A aplicação destas diferentes estratégias depende não só

do tipo de problema em questão mas também do tipo de aluno. Existem alunos que preferem usar um método e outros alunos optam por utilizar outros métodos porque os alunos são todos diferentes e há uma relação com a sua personalidade.

A resolução de problemas em sala de aula é encarado como um desafio para os alunos e também para os professores. Os professores têm de saber selecionar bons problemas e existe uma grande diversidade de problemas que podemos realizar em sala de aula: realidade, semi-realidade e Matemática pura (Skovsmosc, 2008).

O professor pode fazer da resolução de problemas uma parte integrante da atividade matemática das suas turmas, ao selecionar problemas interessantes que integre as ideias matemáticas mais importantes do currículo. De forma a ajudar os alunos a desenvolverem uma tendência para a resolução de problemas, os professores poderão deixá-los escolher ou criar alguns dos problemas a ser resolvidos (...) poderão desafiar-los com problemas com mais do que uma resposta (NCTM, 2008, p. 305)

Pólya defende que o professor deve tentar motivar e despertar interesse nos alunos; assim o papel do professor é muito importante e exige muita dedicação, tempo, experiência e boas práticas.

O estudante deve adquirir tanta experiência de trabalho independente quanta for possível. Mas se for deixado sozinho com um problema, sem qualquer ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não faça qualquer progresso. Se o professor ajudar de mais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve ajudar, nem de mais nem de menos, mas de tal forma que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho. (Pólya, 2003, p.23)

Pólya defende ainda que quando o professor questiona o aluno tem que ter dois objetivos: ajudar o aluno a resolver o problema e também de desenvolver o trabalho autónomo dos alunos na resolução de futuros problemas. (2003, p.25) Assim os alunos ao conseguirem resolverem um problema com um pequeno “empurrão” do professor também estão a desenvolver a capacidade de resolução.

Um problema matemático pode ser trabalhado das mais diversas formas indo de acordo ao que o Programa de Matemática defende relativamente à aprendizagem geral da Matemática.

“o trabalho em grupo também pode ser muito produtivo na resolução de um problema (...) o trabalho coletivo em turma é muito importante para proporcionar momentos de partilha e discussão bem como para a sistematização e institucionalização de conhecimentos e ideias matemáticas, devendo o professor criar condições para uma efetiva participação da generalidade dos alunos nestes momentos de trabalho (...) o trabalho individual é importante, tanto na sala de aula como fora dela. O aluno deve ler, interpretar e resolver tarefas matemáticas sozinho, bem como ler, interpretar e redigir textos matemáticos” (DGIDC, 2007, p.10).

Outro dos objetivos do meu estudo assenta na análise das dificuldades evidenciadas pelos alunos no trabalho com sistemas de equações do 1.º grau a duas incógnitas, recorrendo à resolução de determinados problemas matemáticos. A interpretação do enunciado do problema e a explicitação das estratégias de resolução de problemas representam alguns dos grandes entraves à aprendizagem significativa por parte dos alunos.

Sendo a Álgebra uma área tão rica e importante da Matemática, é nela que residem algumas das maiores dificuldades dos alunos aquando da sua aprendizagem. Os alunos têm dificuldades na passagem da Aritmética para a Álgebra. Segundo Ponte, Branco & Matos (2009, p. 74), as principais dificuldades dos alunos na passagem da Aritmética para a Álgebra são:

- Ver a letra como representando um número ou um conjunto de números;
- Pensar numa variável como significando um número qualquer;
- Atribuir significado às letras existentes numa expressão;
- Passar informação da linguagem natural para a algébrica;
- Compreender as mudanças de significado, na Aritmética e na Álgebra, dos símbolos  $+$  e  $=$ , em particular, distinguir adição aritmética (como por exemplo,  $7+3$ ) da adição algébrica (como por exemplo,  $x+3$ ).



Na aprendizagem da Álgebra os alunos sentem um pouco desconforto quando surgem as letras. Kuchemann (1981) aponta algumas interpretações para as letras que são utilizadas na aprendizagem da Álgebra:

- *Letra como incógnita*, representando um número específico mas desconhecido, com o qual é possível operar diretamente. Esta interpretação está intimamente relacionada com a resolução de equações como  $x+3=6$ , por exemplo.
- *Letra como número generalizado*, situação em que o aluno a vê como representante de vários números ou, pelo menos, como podendo ser substituída por mais do que um valor.
- *Letra como variável*, caso em que esta é vista como representante de um conjunto de valores e pode ser usada para descrever relações entre dois conjuntos.

Outra das grandes dificuldades evidenciadas pelos alunos consiste na tradução da linguagem natural, ou corrente, para a linguagem algébrica, ou matemática, e tal como o recíproco. A compreensão do conceito de variável, a interpretação de símbolos, a manipulação e simplificação de expressões algébricas são outras das dificuldades evidenciadas pelos alunos durante a aprendizagem de temas inseridos dentro da Álgebra.

Na resolução de equações do 1.º grau, em particular na resolução de sistemas de equações, surgem também dificuldades por parte dos alunos. Ponte et al. (2009, p.98-102) aponta algumas destas que surgem com maior frequência:

- Adição incorreta de termos semelhantes;
- Adição incorreta de termos não semelhantes e interpretação incorreta do sinal de “=”;
- Interpretação incorreta do monómio de 1.º grau;
- Separação entre parte literal e a parte numérica numa expressão algébrica;

- Resolução incorreta de uma equação do tipo “ $ax = b$ ”;
- Uso do pressuposto intuitivo e raciocínio pragmático sobre um sistema de notações não familiar;
  - Estabelecimento de analogia com sistemas simbólicos usados no cotidiano, noutras áreas da matemática ou noutra disciplina;
- Interferência de outras aprendizagens em matemática;
- Influência de materiais e estratégias de ensino pouco adaptadas.

No que diz respeito aos sistemas de equações, estes são ferramentas muito comuns e fundamentais na resolução de problemas em várias áreas como a Matemática, a Química, a Física e a Engenharia. Segundo Ponte, Branco & Matos (2009, p. 148), os sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas “proporciona aos alunos um amplo conjunto de ferramentas para a modelação de situações da realidade (...) contribui para desenvolver a sua capacidade de utilizar linguagem algébrica, o seu raciocínio matemático e a sua capacidade de resolver problemas.”

É importante realçar que na resolução de sistemas de equações os alunos devem compreender também a conjunção de condições bem como a sua interpretação geométrica. Os alunos, à partida, devem ter trabalhado, anteriormente, com equações de 1.º grau quer na aprendizagem de funções como nas equações literais. Na aprendizagem das equações literais com apenas duas incógnitas os alunos devem ter trabalhado o tipo de solução como sendo um par e que existe uma infinidade de soluções. Para uma melhor compreensão da noção de solução é vantajoso que se resolva os sistemas de equações pelo método de substituição em simultâneo com a resolução gráfica.

Segundo Ponte, Branco & Matos (2009, p. 151) existem três grandes grupos de dificuldades específicos no trabalho com sistemas de equações:

- Compreender a noção de sistema e a natureza da solução de um sistema de equações;
- Compreender os processos de resolução de sistemas de equações e ser capaz de os executar corretamente até obter a solução;

- Ser capaz de resolver problemas dados por enunciados verbais, traduzindo as condições dadas por um sistema de equações e interpretando a solução do sistema de acordo com as condições dadas.

“As dificuldades dos alunos na tradução de situações dadas em linguagem natural para sistemas de equações são em grande medida idênticas às que apresentam em casos que conduzem a outros tipos de condições (...) a falta de compreensão dos enunciados em linguagem natural, o desconhecimento das regras de sintaxe da linguagem algébrica, o estabelecimento de relações incorretas entre as duas linguagens, a simples distração ou o foco em pistas enganadoras (...) a noção de conjunção de condições”(Ponte et al, 2009, p.151).

Em problemas que são desconhecidos dois valores recorrendo à utilização de sistemas de equações simplifica-se bastante o problema e aumenta a compreensão do próprio além de que torna-se mais exequível. Neste tipo de problemas os alunos têm de entender qual a relação entre os dois valores desconhecidos. O professor deve ter o cuidado de selecionar problemas com contextos familiares e diversos com o intuito de envolver os seus alunos nas atividades propostas e será mais rico se os discutir, em turma, no final, que é “uma boa forma de promover o desenvolvimento de capacidade de resolução de problemas e da comunicação matemática, por parte dos alunos” ( Ponte et al, 2009, p. 151).

A resolução de sistemas de equações não coloca grandes dificuldades aos alunos quando estes sabem resolver equações do 1.º grau com alguma facilidade, pois aplicando os princípios de equivalência de equações na resolução de sistemas de equações, os alunos conseguem chegar facilmente à solução do sistema em si. No entanto, na resolução de problemas é que surgem as dificuldades com a resolução de sistemas de equações, ao terem que traduzir da linguagem natural para a linguagem matemática na forma de um sistema de equações. Outra dificuldade que surge é o facto de que, ao se familiarizarem com a resolução de sistemas os alunos facilmente

encontram a solução do sistema, e na resolução de problemas com sistemas de equações há que ter em atenção se a solução do sistema é também solução do problema, se esta faz algum sentido no contexto do problema apresentado.

# *CAPITULO III*

## *UNIDADE DE ENSINO*

O estudo deste relatório recai sobre Sistemas de Equações dentro do tópico das Equações de 1.º grau inserido no tema Álgebra, trabalhado no 3.º ciclo na turma A do 8.º ano de escolaridade da Escola E.B. 2,3 Maria Alberta Menéres, concelho de Sintra.

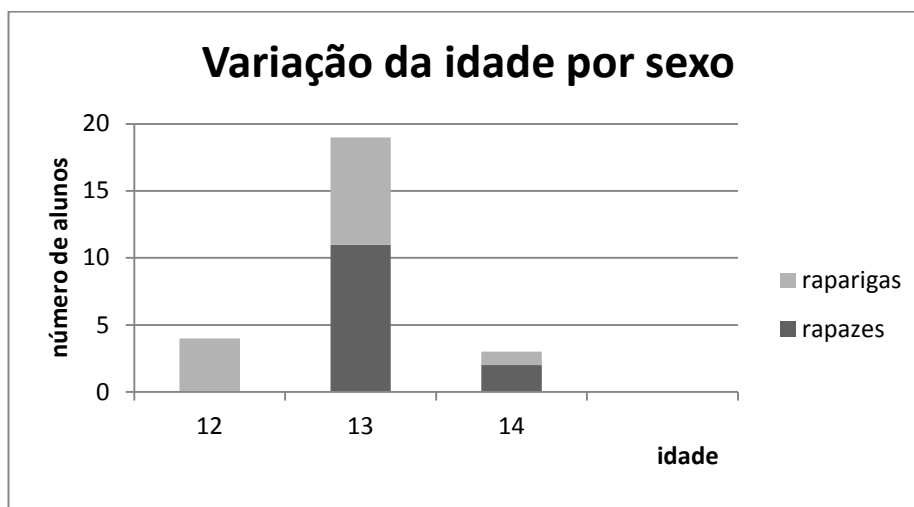
### **1- CARACTERIZAÇÃO DA ESCOLA E DA TURMA**

O estudo foi feito na Escola Básica E.B. 2,3 Maria Alberta Menéres. A escola situa-se no concelho de Sintra e distrito de Lisboa e pertence a um agrupamento de escolas do 1.º ano ao 9.º ano, sendo que esta escola tem alunos do 5.º ano ao 9.º ano. Inicialmente foi uma escola piloto e atualmente já está inserida na rede normal.

A escola está inserida num meio socioeconómico médio/baixo e é caracterizada por ser uma escola com uma forte diversidade cultural, étnica e linguística. Tem também uma unidade de ensino organizada para os alunos com Necessidades Educativas Especiais, havendo uma preocupação com a aprendizagem destes alunos, respeitando os diferentes ritmos de aprendizagem e motivações. Uma das grandes preocupações desta escola é, acima de tudo, a transmissão de direitos e deveres, estimulando a cidadania e socialização.

O estudo foi realizado numa turma do 8.º Ano de escolaridade do Ensino Básico, que foi submetida a um estudo no ano anterior. Para este estudo procedeu-se à autorização dos encarregados de educação dos alunos da turma em estudo bem como à direção da escola (ANEXOS V e VI). A turma é constituída por 26 alunos,

sendo 13 rapazes e 13 raparigas, com idades compreendidas entre os 12 e os 14 anos (Figura 1).

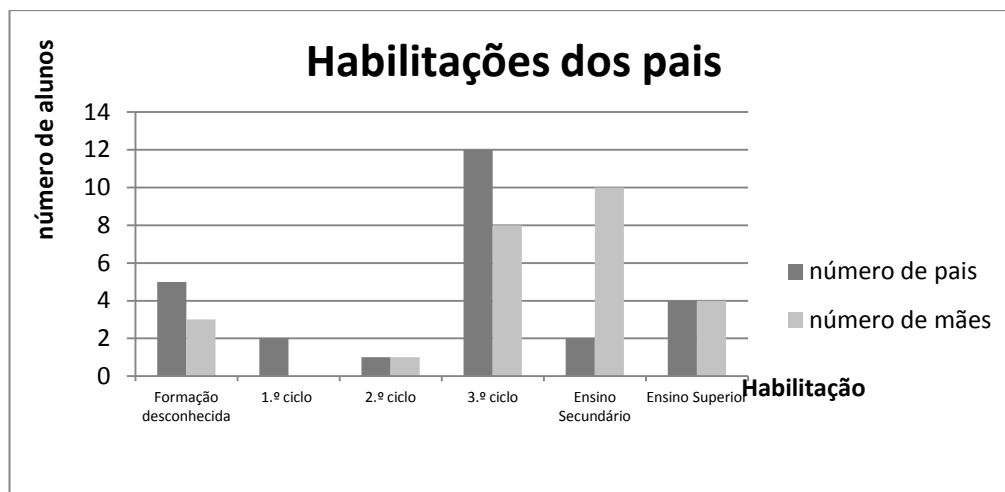


**Figura 1-** Variação de idades dos alunos da turma, por sexo

Pela análise do gráfico, podemos constatar que a maioria dos alunos têm treze anos de idade, não existindo alunos do sexo masculino com doze anos. Nesta turma há mais raparigas com catorze anos do que rapazes.

Esta turma é bastante heterogénea a nível de aprendizagem, situação socioeconómica e afetiva, e quanto a expectativas de futuro. A turma, em geral, é razoável, apresentando algumas dificuldades na aprendizagem da Matemática, embora existam alunos que se interessam pela aprendizagem da disciplina. No entanto, a nível de comportamento é uma turma que evidencia um modo de estar na aula bastante razoável.

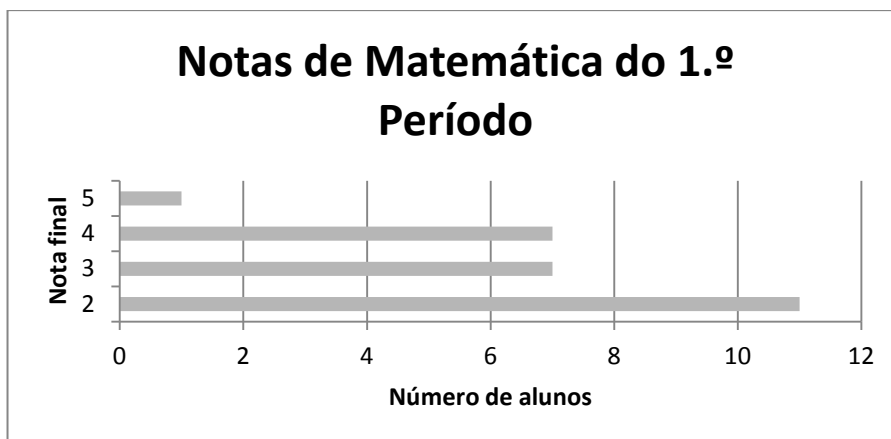
É importante ter conhecimento sobre o agregado familiar, nomeadamente a situação económica, profissão e escolaridade dos pais, mas também com quem os alunos vivem. A informação sobre as habilitações dos pais dos alunos da turma é retratada através da seguinte figura (Figura 2):



**Figura 2-** Habilitações dos pais dos alunos da turma

Observando o gráfico podemos afirmar que a maioria dos pais possui habilitações literárias acima do 3.º ciclo e que grande número de mães têm o ensino secundário como habilitação mínima. Catorze alunos da turma vivem com os pais e irmãos e os restantes com a mãe ou avós, sendo que oito deles se encontram abrangidos pelo escalão A. Existem dois alunos com necessidades educativas especiais, sete alunos com dificuldades visuais e seis alunos repetentes, dois dos quais apresentando um histórico de duas retenções.

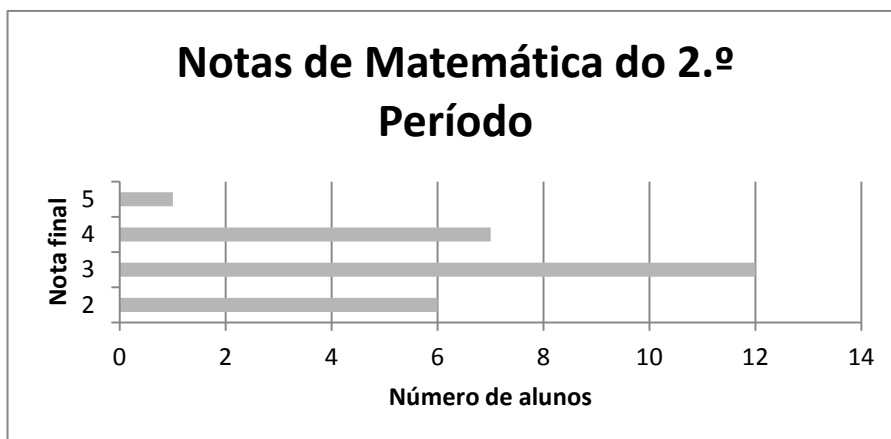
No fim do primeiro período, o aproveitamento da turma foi considerado bom, tendo sido atribuídos seis planos de recuperação (aos alunos que têm três ou mais negativas). Houve dois alunos que também obtiveram mais do que duas negativas, mas por serem alunos com necessidades educativas especiais não têm este plano porque são sempre acompanhados por um profissional. Treze alunos da turma não obtiveram classificações negativas no final do primeiro período. No gráfico seguinte são apresentadas as notas finais da disciplina de Matemática da turma (Figura 3):



**Figura 3-** Notas de Matemática dos alunos no 1.º Período

Relativamente à disciplina de Matemática, onze alunos tiveram nível de aproveitamento igual ou inferior a dois e mais de metade dos alunos da turma obteve uma classificação entre três e quatro. É possível ainda verificar que na turma em questão houve apenas um aluno que obteve a classificação máxima (nota 5). Com este gráfico podemos constatar que esta turma do 8.º ano apresenta algumas dificuldades relativamente à disciplina de Matemática.

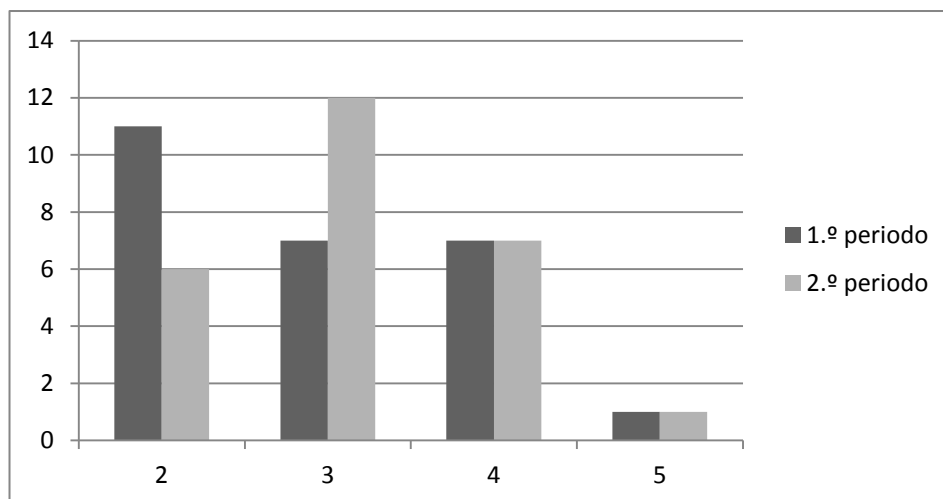
As notas dos alunos da turma na disciplina de Matemática do final do 2.º período estão representadas no seguinte gráfico (Figura 4):



**Figura 4-** Notas de Matemática dos alunos no 2.º Período



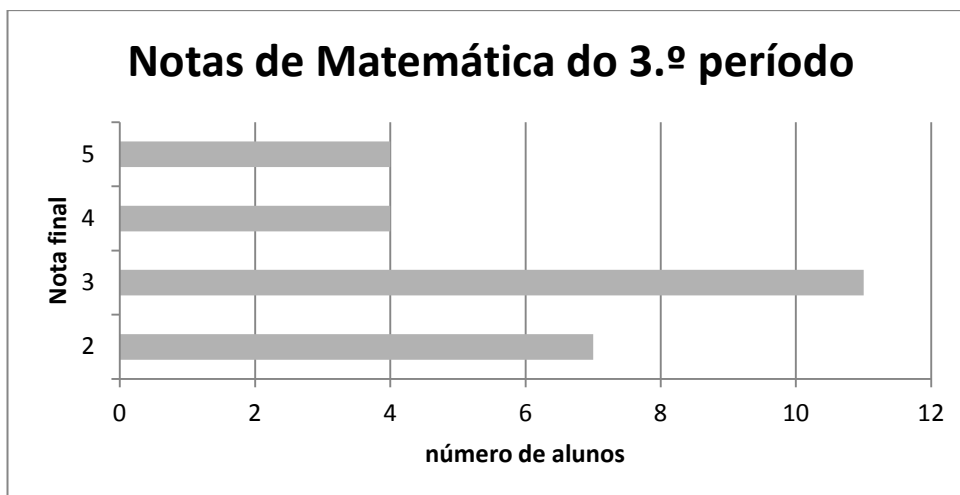
De acordo com o gráfico, no segundo período houve seis notas negativas à disciplina de Matemática, havendo um aluno com nota máxima e um maior número de alunos com nota igual a 3. Na figura seguinte, está ilustrada a comparação entre as classificações dos alunos a Matemática nos dois primeiros períodos (Figura 5).



**Figura 5-** Comparação das notas de Matemática dos alunos nos 1.º Período e 2.º Período

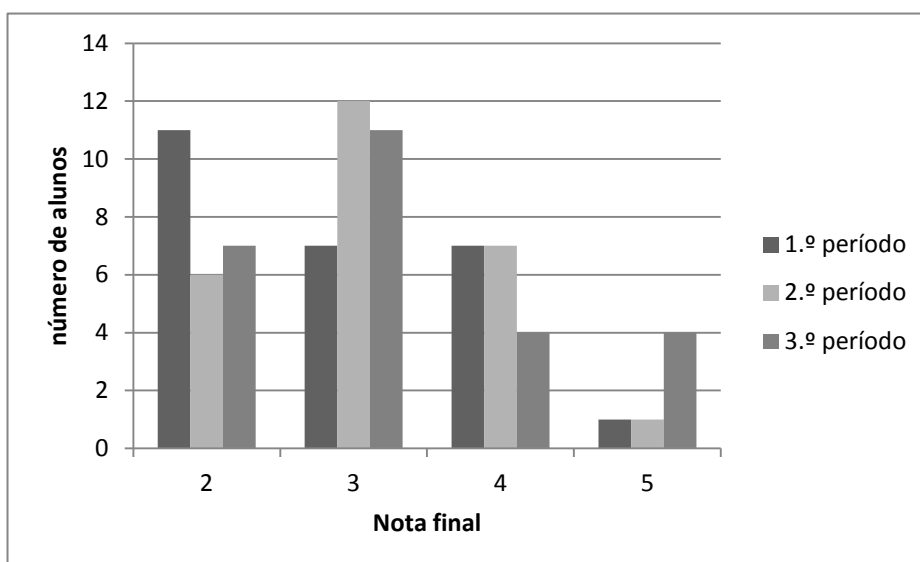
No final do 2.º período, verificou-se que alguns alunos que tinham nota 2 no final do primeiro período melhoraram, conseguindo obter nota 3 neste período. Verificou-se ainda que o número de alunos com nota igual a 5 e com nota igual a 4 mantiveram-se.

No final do 3.º período, as classificações da disciplina de Matemática foram as seguintes (Figura 6):



**Figura 6.** Notas de Matemática dos alunos no 3.º Período

De acordo com o gráfico, no terceiro período houve sete notas negativas à disciplina de Matemática, havendo quatro alunos com nota máxima e um maior número de alunos com nível três. Na figura seguinte, estão ilustradas as classificações à disciplina de Matemática ao longo do ano, ou seja, ao longo dos três períodos (Figura 7).



**Figura 7-** Evolução dos alunos ao longo do ano

Pela análise do gráfico podemos verificar que inicialmente existiam muitos alunos com nível dois e depois houve uma melhoria no 2.º período. No entanto, houve um aluno que tornou a baixar no 3.º período. Verificou-se também que no final do ano houve uma subida significativa nas classificações de nível máximo, pois alguns alunos foram melhorando ao longo do ano, e estes tendo nota igual a quatro no 2.º período subiram para nível cinco no 3.º período.

A professora da turma considera que os alunos apresentam algumas capacidades na aprendizagem da Matemática e que poderão conseguir um bom desempenho futuramente. Durante a observação direta das aulas da turma, pude verificar que, em geral, os alunos mostram gosto e dedicação no trabalho em sala de aula, apesar de revelarem alguma falta de autonomia, pois solicitam a professora frequentemente para pedirem ajuda na interpretação e concretização de tarefas bem como confirmação de resultados e resoluções. Constatei ainda que os alunos estão pouco habituados a trabalhar em pequenos grupos, apesar de mostrarem algum interesse. Os alunos mostram-se curiosos e participativos quando se introduzem conhecimentos novos.

## **2- ENQUADRAMENTO NO PROGRAMA**

O estudo foi desenvolvido na unidade Sistemas de Equações de 1.º grau a duas incógnitas, no 8.º ano de escolaridade, do tema Álgebra e tópico de equações de 1.º grau a duas incógnitas. Esta leção seguiu as orientações do *Programa de Matemática do 3.º ciclo do Ensino Básico (2007)*. No plano a longo prazo que se encontra definido para o 8.º ano em questão, esta subunidade surge depois das equações de 1.º grau cuja temática não foi trabalhada no ano anterior, pelo que foi explorada antes do estudo dos sistemas de equações com a professora titular da turma.

Segundo o *Programa de Matemática do Ensino Básico*, esta subunidade tem como objetivos:

- Compreender o que é um sistema bem como a sua importância e utilidade;
- Resolver sistemas de equações pelo método de substituição;
- Classificar sistemas de equações;
- Resolver graficamente e interpretar as soluções obtidas de um sistema de equações;
- Resolver e formular problemas envolvendo sistemas de equações;
- Explicitar e justificar ideias, processos e resultados matemáticos;
- Traduzir relações de linguagem natural para linguagem matemática e vice-versa;
- Expressar ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando notação, simbologia e vocabulário próprios.

Durante a planificação das aulas lecionadas por mim, decidi, por motivos de tempo e em concordância com a professora titular da turma, não abordar a classificação de sistemas de equações bem como a sua representação gráfica. Assim sendo, de acordo com o programa, a minha leção tinha como objetivos:

- Compreender o que é um sistema bem como a sua importância e utilidade;
- Resolver sistemas de equações pelo método de substituição;
- Resolver e formular problemas envolvendo sistemas de equações;
- Explicitar e justificar ideias, processos e resultados matemáticos;
- Traduzir relações de linguagem natural para linguagem matemática e vice-versa;
- Expressar ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando notação, simbologia e vocabulário próprios.

Foquei-me principalmente na resolução de problemas, tendo que ensinar o método de resolução de sistemas de equações de 1.º grau com duas incógnitas. Através da resolução de problemas, tentei analisar também a tradução, por parte dos alunos, da linguagem corrente para a linguagem matemática e vice-versa, tal como a forma de comunicação dos alunos durante o trabalho autónomo. Assim sendo, dei importância às capacidades transversais presentes no Programa de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007): Comunicação Matemática e Resolução de problemas (Quadro 3).

**Quadro 3-** Capacidades transversais trabalhadas nas aulas lecionadas.

Tópicos	Objetivos específicos
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Resolução de problemas               <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Compreensão do problema</li> <li>○ Conceção, aplicação e justificação de estratégias</li> </ul> </li>   <li>• Comunicação matemática               <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Interpretação</li> <li>○ Representação</li> <li>○ Expressão</li> <li>○ Discussão</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar os dados, as condições e o objetivo do problema.</li> <li>• Conhecer e pôr em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados.</li> <li>• Formular problemas a partir de situações matemáticas e não matemáticas</li>   <li>• Interpretar informação, ideias e conceitos representado de diversas formas, incluindo textos matemáticos.</li>   <li>• Representar informação, ideias e conceitos de diversas formas.</li>   <li>• Traduzir relações de linguagem natural para linguagem matemática e vice-versa.</li>   <li>• Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.</li> </ul>

A minha prática letiva foi desenvolvida durante cinco aulas, entre 16 e 30 de abril, no decorrer do 3.º Período, sendo que procurei seguir o programa de Matemática em vigor na elaboração das planificações das aulas a lecionar. Durante a lecionação, a planificação das aulas teve um papel muito importante pois tive mais noção do tempo, possíveis imprevistos, algumas orientações para a discussão em aula e senti-me mais confiante no decorrer da aula. Nos meus planos de aula, (ANEXO I) tive em atenção o tempo do decorrer da aula, as possíveis dificuldades dos alunos, os imprevistos que poderiam ocorrer e escrevi algumas notas extra em certos momentos da aula. As minhas planificações a curto prazo eram abertas e flexíveis de forma a que fosse impossível fazer pequenas alterações ou reajustes consoante o decorrer das aulas e tendo em conta alguns imprevistos.

Segundo Paulo Abrantes (1985) no processo de ensino-aprendizagem é importante considerar o conteúdo do programa, as características da turma, os recursos de que o professor dispõe, a relação do professor com os alunos, etc. Este autor defende que ao planificar uma unidade tenta-se responder às seguintes questões: o que se vai estudar? (conteúdo); para que deve servir esse estudo? (objetivos); para quem se organiza? (alunos); como se vai realizar? (estratégia); com que apoios se vai contar? (recursos) e em que medida se conseguiu o que se pretendia? (avaliação).

O quadro seguinte mostra resumidamente os objetivos das aulas (Quadro 4):

**Quadro 4-** Quadro resumo das aulas lecionadas

Aulas		Objetivo
16 de abril (90 minutos)	Resolução de problemas em grupo  Discussão em turma  Introdução dos sistemas de equações de 1.º grau	-Revelar espírito crítico nos raciocínios; -Expressar e fundamentar as opiniões, recorrendo a linguagem matemática; -Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticas adequados para resolução de

		<p>problemas;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Selecionar estratégias de resolução de problemas;</li> <li>-Interpretar e criticar resultados no contexto do problema;</li> <li>-Validar conjecturas.</li> <li>-Compreender o que é um sistema de equações.</li> </ul>
18 de abril (45 minutos)	Método de substituição na resolução de sistemas de equações	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Resolver sistemas de equações pelo método de substituição;</li> <li>-Verificar, sem resolver o sistema, se um par ordenado é ou não solução do mesmo.</li> </ul>
19 de abril (90 minutos)	Ficha de trabalho com resolução de sistemas de equações	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Resolver sistemas de equações pelo método de substituição;</li> <li>-Compreender a noção de sistemas equivalentes e forma canónica de sistemas.</li> </ul>
26 de abril (90 minutos)	<p>Resolução de problemas em grupo envolvendo sistemas de equações</p> <p>Discussão em turma</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Revelar espírito crítico nos raciocínios;</li> <li>-Expressar e fundamentar as opiniões, recorrendo a linguagem matemática;</li> <li>-Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos adequados para resolução de problemas;</li> <li>-Selecionar estratégias de resolução de problemas;</li> <li>-Interpretar e criticar resultados no contexto do problema;</li> <li>-Validar conjecturas.</li> <li>-resolver sistemas de equações.</li> </ul>
30 de abril	Passagem da linguagem matemática para a	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Resolver sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas;</li> </ul>

(90 minutos)	linguagem corrente.  Resolução de problemas a pares.	-Passagem da linguagem matemática para a linguagem corrente; -Resolver problemas envolvendo sistemas de equações.
--------------	---	--

Os planos de aulas foram feitos com o objetivo de abordar a resolução de problemas no subtema sistemas de equações, não trabalhando a resolução gráfica e classificação de sistemas. Foi pensado com a professora cooperante que seria melhor ela abordar a resolução gráfica e classificação de sistemas depois da minha intervenção, para que os alunos tivessem mais tempo para resolverem problemas usando sistemas de equações de 1.º grau com duas incógnitas.

### **3- ESTRATÉGIAS E RECURSOS**

Durante a minha intervenção, procurei utilizar tarefas motivadoras, diversificadas, com objetivos diferentes que contribuíssem para uma melhor aprendizagem dos alunos. As tarefas propostas ao longo das aulas (ANEXO II) foram de caráter exploratório, exercícios e problemas.

Na primeira intervenção, preocupei-me em que os alunos resolvessem problemas usando estratégias diversas sem que estes tivessem qualquer contato com sistemas de equações. Esta estratégia tinha como objetivo que os alunos adotassem estratégias de resolução, usando conhecimentos já adquiridos pelos alunos. Nesta primeira aula foi fundamental a discussão feita em turma, pois dela resultou a introdução do subtema sistemas de equações.



“Os alunos poderão aprender e aprofundar a sua compreensão sobre conceitos matemáticos, através da resolução de problemas criteriosamente selecionados e que permitam a aplicação da matemática em outros contextos” (NCTM, 2008, p. 302)

Na aula seguinte, através de um problema com idades escrito no quadro, de forma expositiva, apresentei, explicando, o processo de resolução de sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas designado por método de substituição. De seguida os alunos praticaram a resolução analítica de sistemas de equações a pares e desempenhei um papel de orientadora e apelavam-me para a confirmação dos procedimentos do método apresentado. Na apresentação da solução de cada sistema optei por seguir a convenção de que a solução de um sistema de equações de 1.º grau a duas incógnitas representa-se como um par ordenado em que a ordem é a ordem alfabética das incógnitas envolvidas uma vez que os alunos tinham trabalhado anteriormente as equações literais com duas incógnitas, tendo aprendido desta forma uma vez que seguiam pelo manual e neste constava esta convenção.

Depois de introduzir os sistemas de equações, os alunos poderiam resolver os problemas recorrendo aos sistemas de equações. Durante as aulas foi bastante importante a discussão da resolução de problemas, apesar de ser uma tarefa por vezes difícil.

Na minha intervenção letiva assumi papéis diversificados. Durante o trabalho autónomo dos alunos desempenhei um papel de orientadora e um pouco de questionadora, quando solicitada pelos alunos. Nesta altura tentei ter também um papel de observadora; analisando as resoluções feitas pelos alunos para seleccionar questões ou resoluções para a discussão em turma. Durante a discussão assumi também um papel bastante importante, pois tive de gerir as discussões feitas e questionar os alunos de forma a justificarem e argumentarem resultados obtidos e processos de resolução. Na resolução de exercícios, o meu papel foi de confirmar procedimentos e resultados bem como ajudar na resolução dos mesmos.

Durante as aulas, recorri a algumas estratégias de ensino distintas. Durante a minha leccionação houve um momento expositivo onde defini sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas, sistemas de equações equivalentes e onde apresentei o

método de substituição. Procurei também promover o trabalho autónomo dos alunos em sala de aula diversificando entre trabalho a pares, grupo ou individual; bem como discussão em turma na apresentação das resoluções dos problemas propostos e fiz questão de sintetizar conceitos aprendidos antes de realizarem o mini teste. Na primeira aula, apresentei-lhes problemas, considerados familiares para os alunos, de forma a introduzir o subtema sistemas de equações. Os alunos, em grupo, podiam utilizar as estratégias de resolução que achassem mais conveniente para cada problema e o objetivo era permitir a existência de mais do que uma estratégia de resolução nos problemas propostos, sendo que neste tipo de tarefa o trabalho em grupo é mais rico. Desta forma, tentei ligar este novo conceito a outros já conhecidos pelos alunos, como por exemplo, as equações de 1.º grau, assim os alunos interiorizam mais rapidamente novas aprendizagens.

A discussão em turma foi fundamental para posteriormente chegarmos aos sistemas de equações devido à riqueza e diversidade de estratégias de resolução por parte dos alunos que fez com que estes chegassem praticamente sozinhos à necessidade de trabalhar com mais de uma equação ao mesmo tempo, facilitando a introdução ao tema dos sistemas de equações.

Decidi reservar uma aula para a resolução analítica de sistemas de equações pelo método de substituição com o intuito de os alunos praticarem pois é importante que os alunos também pratiquem a parte mais algébrica dos sistemas de equações. Outro motivo para ter reservado esta aula, deveu-se ao facto dos alunos terem iniciado há pouco tempo o estudo das equações de 1.º grau, não tendo tido muito tempo para interiorizar e praticar os métodos de resolução de equações. Os alunos tiveram duas aulas de resolução de problemas utilizando sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas a fim de praticarem a passagem da linguagem corrente para a linguagem natural e interpretação de problemas, pois este tipo de atividade é considerado o mais exigente por parte dos alunos e eles sentem uma maior dificuldade.

No que diz respeito à organização e modo de trabalho, optei por colocar os alunos a trabalhar a pares ou em pequenos grupos de forma a favorecer o espírito crítico, argumentação, justificação e colaboração. Para além disso, este tipo de

trabalho desenvolve também nos alunos a capacidade de comunicar matematicamente.

Durante a leção forneci fichas de trabalho elaboradas por mim e os alunos também usaram o livro para resolverem alguns problemas. O quadro de giz foi bastante utilizado em sala de aula nos momentos de discussão e confirmação de resultados.

## 4- CONCEITOS E PROPRIEDADES MATEMÁTICAS

No processo ensino aprendizagem, as definições e conceitos matemáticos cumprem um papel fundamental. O objetivo das aulas lecionadas consistiu na compreensão do que é uma sistema de duas equações do 1º grau em duas incógnitas e na resolução deste tipo de sistemas.

Explicitam-se em seguida os conceitos matemáticos envolvidos (Compêndio de Álgebra, J. Sebastião e Silva e J. Silva Paulo, 1968)

- **Equação do 1º grau em duas incógnitas x e y**

Toda a equação em x e y que, pela aplicação dos princípios de equivalência, se pode reduzir à forma  $ax + by = c$  sendo os valores de a, b e c números reais em que a e b não são simultaneamente nulos.

Exemplo:  $2x - y = 5$

- **Solução de uma equação do 1º grau em duas incógnitas x e y**

Todo o agrupamento de números que, como valores das incógnitas, transformam a equação numa igualdade numérica verdadeira.

Exemplo: A equação  $-x + 2y = -7$  tem uma infinidade de soluções, uma das quais 3 é o valor de  $x$  e 2 é o valor de  $y$ .

As outras soluções são possíveis obter atribuindo um valor a uma das incógnitas e descobrir o valor da outra incógnita.

- **Sistema de duas equações do 1º grau em duas incógnitas**

Dois equações do 1º grau em duas incógnitas formam um sistema de equações quando se pretende determinar os agrupamentos de números que as satisfazem simultaneamente. Estes agrupamentos são as soluções do sistema.

- **Sistema possível de duas equações do 1º grau em duas incógnitas**

Quando tem pelo menos uma solução.

Os sistemas de duas equações do 1º grau em duas incógnitas podem ser determinados ou indeterminados consoante têm uma solução ou uma infinidade de soluções.

Exemplos:

1. 
$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

Obtendo-se a solução do sistema atribui-se a  $x$  o valor 13 e a  $y$  o valor 7.

Este é um sistema possível determinado.

2. 
$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 4x + 2y = 20 \end{cases}$$

O sistema tem uma infinidade de soluções, logo é um sistema possível indeterminado.

- **Sistema impossível de duas equações do 1º grau em duas incógnitas**

Quando não tem solução

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -4x - 6y = -5 \end{cases}$$

Este sistema não admite solução, logo é um sistema impossível.

- **Equivalência de sistemas**

Dois sistemas de duas equações do 1º grau em duas incógnitas nas mesmas variáveis são equivalentes se toda a solução de um deles é solução do outro e reciprocamente.

- **Resolução de sistemas**

Para obter as soluções dos sistemas de equações do 1º grau em duas incógnitas pode usar-se o **método de substituição** que faz uso do princípio que segue.

Princípio de substituição: Se num dado sistema de duas equações do 1º grau em duas incógnitas resolvermos uma equação com respeito a uma das incógnitas e substituímos na outra equação essa incógnita pela expressão em função da outra incógnita obtém-se um sistema equivalente ao proposto.

Exemplo de utilização do método de substituição:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ - \end{cases} \Rightarrow \{(1 + y) + y = 3\} \Rightarrow \{1 + 2y = 3\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{2y = 3 - 1\} \Rightarrow \{y = \frac{2}{2}\} \Rightarrow \{y = 1\} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 1 \\ - \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

## 5- SÍNTESE DAS AULAS

As aulas lecionadas foram pensadas de forma a poder dar resposta às questões deste estudo, não esquecendo os objetivos específicos da subunidade. Durante a leção foram atingidos os objetivos, anteriormente definidos, apesar dos planos de aula não terem sido todos concretizados.

### 3.3.1- Primeira aula: 16 de abril de 2012 (90 minutos)

Esta primeira aula foi planificada de forma a introduzir o subtema de sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas. Iniciei a aula dizendo que íamos escrever o sumário no início da aula seguinte ou no fim desta e distribuí uma ficha de trabalho com problemas (ANEXO II) para resolverem em grupo.

Durante o trabalho autónomo dos alunos, ia circulando para observar as estratégias adotadas por cada grupo, tentando não influenciar na resolução dos alunos, quando solicitada, esclarecendo dúvidas sobre o enunciado. Os alunos começaram logo a tentar resolver os problemas e notei que estavam bastante envolvidos no trabalho. Nesta aula, selecionei, antecipadamente, dois grupos para proceder a gravação áudio, tendo em conta não só a aprendizagem dos alunos anteriormente e a capacidade de raciocínio dos alunos mas também o ritmo de trabalho dos alunos envolvidos.

A maioria dos alunos resolveu sem dificuldades os problemas propostos, mostrando algum receio na implementação das estratégias e processos de resolução. Pedi que cada grupo me entregasse um exemplar da tarefa resolvida por eles antes da discussão para posteriormente fazer a análise para este estudo.

Durante a discussão em turma, decidi selecionar dois grupos com resoluções diferentes para cada problema para as apresentarem no quadro. As resoluções que selecionei foram escolhidas com base nas diferentes estratégias, pois o objetivo desta aula era verificar as diversas estratégias que os alunos adotaram. Por este motivo, tentei selecionar duas estratégias diferentes em cada problema e houve algumas muito próximas da resolução de sistemas de equações.

A discussão foi bastante interessante porque os alunos acompanharam sem dificuldade e com curiosidade as resoluções dos outros grupos e mostravam-se interessados em querer ver os diferentes modos de resolução. Durante este momento, os alunos questionavam e participaram bastante.

Terminada a discussão da ficha, peguei no primeiro problema e introduzi os sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas. Defini duas incógnitas e lendo o enunciado em conjunto questionei os alunos sobre as equações que iríamos obter. Os alunos participaram e queriam dar a sua opinião de como achavam que iam ficar as duas equações. Em seguida, escrevi as duas equações na forma de um sistema no quadro, dando-lhes a conhecer os sistemas de equações. Nesta altura os alunos diziam: "Ah...então isso é fácil...É só isso?" Perante estas questões, informei-os de que na aula seguinte iriam aprender um método para resolver os sistemas de equações.

Como ainda tínhamos tempo, pedi aos alunos que tentassem escrever os sistemas relativos aos outros problemas da ficha, pedido esse que tinha previsto no meu plano de aula. Neste momento da aula, os alunos demonstraram alguma dificuldade na passagem do enunciado das tarefas para um sistema de equações, ou seja, da linguagem natural para a linguagem matemática, tendo solicitado bastante ajuda por parte dos professores.

Terminei a aula escrevendo o sumário e informando que na aula seguinte iriam aprender a resolver sistemas. Senti que os alunos ficaram bastante curiosos e estavam interessados. Esta aula foi bastante importante para introduzir um novo tema matemático recorrendo a outros já familiares dos alunos.

### **3.3.2- Segunda aula: 18 de abril de 2012 (45 minutos)**

Dando continuidade à aula anterior, optei por iniciar a aula escrevendo no quadro um pequeno problema, de idades, que deveria ser resolvido recorrendo a sistemas, aproveitando para lhes ensinar o método de substituição. Os alunos participaram bastante na resolução deste problema, mas alguns utilizavam estratégias diferentes e outros resolveram-no "*de cabeça*". Eu questionei sobre o que queríamos

saber e o que era desconhecido, os alunos iam dizendo e eu ia escrevendo no quadro. Quando chegámos à parte de escrever o sistema, os alunos estavam à vontade para dizer, quase em coro, quais eram as equações do sistema.

Com o sistema definido, expliquei passo a passo o método de substituição de resolução de sistemas de equações e ao mesmo tempo os alunos iam interrompendo e questionando durante a resolução. Depois de ter dado a conhecer o método de resolução, questionei os alunos de como faria a verificação do resultado e os alunos queriam todos responder. Em seguida, expliquei a noção de solução no sistema de equações e depois de resolvido o sistema, pedi aos alunos que confirmassem se a solução fazia sentido, tanto no sistema como no problema.

De seguida, peguei nos problemas da aula anterior e escrevi, em conjunto com os alunos, os sistemas dos respetivos problemas, uma vez que no fim da aula anterior tinham ficado algumas dúvidas por esclarecer e não queria deixar de as esclarecer para que os alunos não ficassem com essa resolução errada.

Anteriormente tinha planeado para esta aula a resolução de um sistema de equações do manual, mas depois de ter verificado, na primeira aula, as dificuldades existentes na passagem do enunciado para um sistema, resolvi retomar essa aula e assim não houve tempo para os alunos pegarem no manual, deixando este sistema de equações para ser resolvido como trabalho de casa.

Nesta aula fiquei com a sensação de que os alunos acompanharam facilmente o método de resolução de sistemas, tendo recebido *feedback* positivo por parte deles. O objetivo desta aula foi cumprido, uma vez que os alunos aprenderam a resolver sistemas.

### 3.3.3- **Terceira aula: 19 de abril de 2012 (90 minutos)**

Iniciei a aula a perguntar quem tinha feito o TPC e apontei os que tinham feito. Solicitei a uma aluna que fosse ao quadro para a correção do TPC, no entanto esta tinha a sua resolução com alguns erros, o que acabou por ser interessante pois aproveitei para discutir com os alunos.



No momento seguinte, distribui uma ficha de trabalho (ANEXO II) a cada aluno para realizarem a pares que tinha como objetivo a verificação da validade de uma solução e a resolução, propriamente dita, de sistemas de equações pelo método de substituição.

Os alunos tiveram muitas dificuldades nesta tarefa porque cometiam bastantes erros de cálculo e nas operações com termos semelhantes. Nesta fase, os alunos chamaram-me bastantes vezes devido ao grande número de erros existentes nas suas resoluções. Deste modo, os alunos acabaram por demorar mais tempo do que estava previsto.

Os alunos estavam bastante agitados nesta aula, falavam muito, e alto, voltavam-se constantemente para trás, o que eu não estava à espera pois não tinha sucedido nas duas primeiras aulas, acabando por sentir necessidade de interromper a aula e chamá-los à atenção para que tudo voltasse ao normal.

A correção da primeira questão foi oralmente uma vez que fui vendo e notei que não tiveram dificuldades. A correção da questão seguinte, que se tratava de resolver sistemas de equações pelo método de substituição, foi feita no quadro por alunos escolhidos previamente durante o trabalho autónomo dos alunos. Ao longo da correção, fui chamando à atenção sobre alguns erros comuns que fui observando e os alunos foram colocando várias questões sobre as operações com termos semelhantes e sobre o sinal menos antes de uma fração ou parênteses. Devido às dificuldades sentidas, apenas dois alunos conseguiram terminar a ficha de trabalho.

Esta aula foi uma aula para praticar a resolução de sistemas. Os alunos precisavam de tempo para praticar este tópico novo no seu percurso de aprendizagem.

No fim desta aula, senti-me um pouco preocupada devido às dificuldades sentidas pelos alunos nas operações e verifiquei que os alunos precisavam de praticar mais a resolução de sistemas. Entreguei uma minificha (ANEXO III) com um problema para trabalho de casa que deveria ser entregue na aula seguinte com o objetivo de perceber se os alunos conseguiam resolver naquele momento problemas recorrendo aos sistemas de equações, ou seja, se estariam minimamente preparados para a aula seguinte que seria dedicada à resolução de problemas.

### 3.3.4- Quarta aula: 26 de abril de 2012 (90 minutos)

Escrevi o sumário no quadro e recolhi os trabalhos de casa para posteriormente analisá-los. Nesta aula, os alunos resolveram quatro problemas do manual e trabalharam em grupo (ANEXO II). Os grupos mantiveram-se os mesmos da primeira aula e coloquei os gravadores de áudio nos mesmos que tinha selecionado anteriormente.

Durante a realização da tarefa, os alunos chamaram-me bastante devido à dificuldade na interpretação do enunciado dos respetivos problemas, mostrando algumas dificuldades em perceber os enunciados. Notei que alguns não leem corretamente o enunciado e pedem imediatamente auxílio porque estão habituados a questionar logo o professor, nem tentam fazer sozinhos a tarefa quando esta é menos direta.

Ao circular pela sala de aula, fui tomando nota dos grupos que tinham resoluções interessantes para mais tarde apresentar à turma durante a discussão em turma. Antes de iniciar a discussão, recolhi uma produção escrita de cada grupo e, em seguida, pedi aos grupos tinham anotado para irem corrigir as tarefas ao quadro e explicar aos restantes elementos da turma como tinham pensado. Uma vez mais notou-se o envolvimento dos alunos na discussão, através de uma participação ativa e bastante rica ao nível da Matemática.

Como os alunos tiveram dificuldades na interpretação do enunciado, os tempos previstos não foram cumpridos, sendo obrigada a abandonar o plano de aula inicial e a dar mais tempo para que os alunos pudessem avançar mais. Com esta alteração, a discussão da tarefa resumiu-se somente a dois problemas, havendo a necessidade de concluir a tarefa na aula seguinte.

No final, pedi que concluíssem em casa os problemas e distribui outra minificha (ANEXO III) com um problema para entregar na aula seguinte, com o objetivo de verificar se existiu alguma evolução por parte dos alunos da primeira para a segunda minificha.

### 3.3.5- Quinta aula: 30 de abril de 2012 (90 minutos)

Iniciei a última aula com os problemas (ANEXO II) que tinham ficado por resolver na aula anterior, tendo sido logo informada da existência de bastantes dúvidas por parte dos alunos. Para rentabilizar o tempo e com o objetivo de esclarecer o máximo de dúvidas possível, optei por ser eu a corrigir no quadro com a ajuda dos alunos, questionando-os sempre sobre cada passo. Mesmo assim, depois de corrigir os problemas senti que alguns alunos não ficaram completamente convencidos, tendo optado nesse momento por ir ao pé desses para esclarecer as suas dúvidas, enquanto os restantes elementos da turma trabalhavam numa ficha que entreguei para ser resolvida a pares(ANEXO II).

Esta ficha continha um sistema de equações, sendo pedido aos alunos que inventassem um enunciado de um problema que fosse representado por aquele sistema. Coloquei, novamente, gravadores em dois pares de alunos com o objetivo de perceber quais as dificuldades que sentem neste tipo de tarefa e como pensam.

Uma vez mais, os alunos demonstraram ter algumas dificuldades no significado da incógnita e na passagem da linguagem matemática para a linguagem corrente, faltando-lhes até imaginação para criar um contexto para o sistema de equações apresentado. Depois de terminarem a tarefa, recolhi as suas produções para uma análise posterior, procurando compreender as dificuldades sentidas bem como o modo de pensar dos alunos.

Em seguida, os alunos iniciaram uma segunda ficha de trabalho que continha problemas (ANEXO II) um pouco mais acessíveis que os da aula anterior com o intuito de fazer uma breve revisão para o mini teste a realizar na aula seguinte.

Durante o trabalho autónomo dos alunos, na resolução de problemas, mostraram ter menos dificuldades e estarem mais familiarizados com a resolução de problemas. Em seguida, os alunos foram solicitados a ir ao quadro corrigir e explicar as tarefas. No final da aula, os alunos entregaram as suas resoluções da ficha de trabalho e saíram da sala.

Nesta aula, os alunos evidenciaram terem compreendido os problemas e colocaram algumas questões relacionadas com a respetiva correção. Notou-se que os

alunos já se sentiam mais familiarizados com a resolução de problemas envolvendo sistemas de equações, tal como com a resolução de sistemas, recorrendo ao método de substituição.

# *CAPITULO IV*

## *MÉTODOS E PROCEDIMENTOS DE RECOLHA DE DADOS*

Tendo em conta as questões deste estudo e com vista a respondê-las, selecionei os instrumentos de recolha de dados que considere mais apropriados e os quais me ajudariam a tirar mais informação para este estudo. Neste capítulo vão ser apresentados os métodos utilizados bem como os instrumentos de recolha de dados.

A observação de aulas foi o instrumento privilegiado na minha lecionação incidindo sobre as aprendizagens dos alunos, em particular as dificuldades que os mesmos manifestam e as estratégias que utilizam na resolução de problemas envolvendo sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas.

Para a investigação sobre o tema que escolhi, tendo como preocupação um acompanhamento mais próximo dos alunos de forma a conseguir obter uma boa perceção das dificuldades sentidas na resolução de problemas envolvendo sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas bem como das estratégias utilizadas, utilizei dois gravadores que distribui por pequenos grupos de alunos, e/ou somente por pares, seleccionados previamente tendo em conta o desempenho dos alunos.

Em relação à constituição dos grupos, procedi a esta procurando que estes fossem marcados pela sua heterogeneidade dentro do grupo. Esta seleção foi bem pensada, se por um lado pretendia que os grupos tivessem alunos com algumas dificuldades de forma a poder recolher e identificar dificuldades dos alunos na resolução de problemas, nomeadamente na passagem da linguagem corrente para a linguagem matemática e reciprocamente. Por outro lado, também me interessava seleccionar alunos com alguma criatividade e autonomia para poder identificar estratégias na resolução de problemas antes de terem contato com os sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas.

Os dois grupos selecionados para a gravação áudio foram os mesmos em todas as aulas para que a posterior análise permitisse padrões de comparação e evolução dos alunos. A seleção destes dois grupos em causa teve em consideração a necessidade de existirem nele alguns alunos com dificuldades, para que fosse possível recolher mais informação no que diz respeito às dificuldades evidenciadas pelos alunos na resolução de problemas, e também estava interessada que existissem alguns alunos no grupo que fossem esforçados, colaborativos e que fossem alunos que não trabalhassem sozinhos pois os alunos com estas características poderiam não contribuir com estratégias de resolução interessantes a abordar e para a existência de diálogo dentro do grupo. Assim sendo, a seleção dos grupos foi feita tendo em conta todos estes aspetos e fatores.

A utilização de gravadores de áudio teve como propósito reter o máximo de informação possível das intervenções dos alunos sobre as possíveis dificuldades dos alunos nos grupos na resolução de problemas, a utilização de estratégias durante o trabalho autónomo e o contributo de cada aluno na discussão em pequeno grupo e, posteriormente, em turma.

Estes gravadores de áudio foram utilizados tanto no decorrer da primeira aula como das duas últimas onde predominou com temática a resolução de problemas. Na primeira aula, recorri a dois gravadores, a fim de captar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas bem como as dificuldades na interpretação dos enunciados dos mesmos problemas. Durante as duas aulas de resolução de problemas envolvendo sistemas de equações também recorri aos gravadores de áudio de forma a obter informação que me ajudasse a compreender como os alunos interpretam os enunciados dos problemas e que tipo de dificuldades os alunos sentiam perante este tipo de tarefas, em particular na passagem da linguagem natural para a linguagem matemática.

Durante as aulas, recolhi também diversas produções escritas realizadas pelos alunos, sendo que em algumas tarefas recolhi produções dos grupos e noutras recolhi produções individuais dos alunos. Para evitar alterações, as produções escritas foram sempre recolhidas antes de proceder à correção e respetiva discussão em turma. Também pedi aos alunos que nunca apagassem nada e que se quisessem modificar alguma coisa riscassem por cima para se perceber como tinham pensado

anteriormente, uma vez que seria interessantes e importante compreender as várias tentativas de resolução dos alunos ao longo da realização das tarefas.

A meu pedido, a minha colega de mestrado tomou notas durante a minha intervenção para este estudo, em especial durante os momentos de discussão, acerca da resolução de problemas, em grande grupo. Pedi-lhe, também, que registasse alguns diálogos que considerasse importantes para o meu estudo. Para além destas notas gerais da turma, ela focou-se mais num grupo de alunos para conseguir tirar mais informação sobre as dificuldades e estratégias pensadas pelos alunos no trabalho em pequeno grupo.

Durante a minha lecionação, eu própria fui tirando também alguns apontamentos, fui registando algumas coisas importantes da aula numa folha que tinha na mão e no final de cada uma das minhas intervenções registei alguns momentos da aula que me recordava para que não ficassem esquecidos. A professora cooperante da turma também forneceu-me algumas notas que tinha registado no decorrer da aula. Para além disso, em algumas aulas houve um momento de reflexão com os professores que assistiam às minhas aulas e as ideias gerais discutidas nesse momento também contribuíram bastante para o meu trabalho.





# *CAPITULO V*

## *APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE*

### *DADOS*

De forma a ser responder às questões formuladas neste estudo, apresento seguidamente à análise de algumas atividades desenvolvidas em sala de aula durante o período de lecionação, consideradas convenientes para o estudo. Tendo em conta os objetivos e questões do trabalho, procuro identificar os aspetos que se salientam no trabalho dos alunos aquando da resolução de tarefas em fichas de trabalho, tarefas retiradas do manual e finalmente num momento individual de trabalho (mini teste) (ANEXO IV).

Algumas destas atividades foram desenvolvidas em pequenos grupos ou a pares com o objetivo de promover a comunicação matemática, uma vez que este tipo de trabalho favorece o desenvolvimento e permite avaliar a capacidade de argumentação, justificação e raciocínio dos alunos. Ao mesmo tempo, a análise do mini teste serviu para efetuar outro tipo de avaliação, na qual é possível verificar a aprendizagem individual dos conceitos aprendidos durante a lecionação.

Optei por estudar com mais detalhe dois grupos, selecionados por mim previamente, de forma a compreender de forma mais aprofundada a evolução da aprendizagem dos alunos durante as aulas e as dificuldades sentidas. Estes grupos foram selecionados tendo em conta o nível de aprendizagem e as características evidenciadas pelos alunos tendo sido escolhidos os que mostravam ser mais comunicativos, demonstravam interesse e vontade de aprender nesta disciplina e participavam bastante nas aulas observadas anteriormente.

Ao longo das aulas lecionadas os alunos resolveram diversas fichas de trabalho, procurei que estes adquirissem novos conhecimentos e promovessem o pensamento e comunicação matemática. Por este motivo serão aqui apresentadas

algumas resoluções dos grupos em estudo, bem como alguns relatos de discussões feitas em grupo. Também serão apresentadas, pontualmente, algumas resoluções consideradas interessantes para o estudo, provenientes de outros alunos da turma fora dos grupos escolhidos.

### **Ficha S.E.1 de 16 de abril de 2012**

A primeira ficha, (ANEXO II), teve como objetivo de estudo identificar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas e foi resolvida no primeiro dia de aulas da subunidade, em pequenos grupos (3 e 4 alunos). Uma vez que os alunos haviam estudado anteriormente as equações de 1.º grau, era esperado que resolvessem os problemas recorrendo às equações de 1.º grau.

As questões apresentadas na ficha tinham como propósito que os alunos resolvessem problemas recorrendo a estratégias que não envolvessem ainda a noção de sistema de equações. A ficha é constituída por três problemas, um de cada tipo: um relativo a números (do tipo “pensei num número”), outro geométrico e outro de contexto real.

#### **Problema 1.**

Neste problema os alunos tinham que determinar dois números em que a soma fosse 68 e tivessem entre si uma diferença de duas unidades.

Alguns grupos resolveram o problema pelo método de tentativa e erro, e outros recorrendo às equações de 1.º grau. O grupo X teve alguma dificuldade em definir rapidamente uma estratégia, tendo ensaiado várias. A seguir transcrevo a discussão relativa à última abordagem feita pelo grupo X, assim como a resolução que o grupo apresentou (Figura 8):

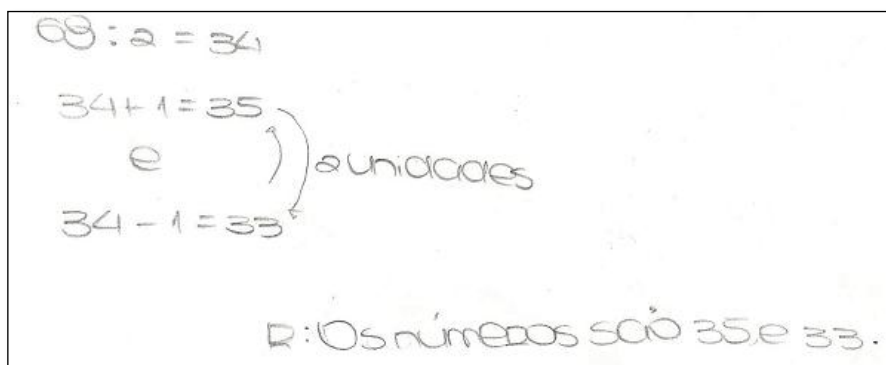
**Aluno A:** Se diferem em duas unidades...Fazemos  $68:2$ ...e tiramos 2

**Aluno B:**  $68:2$ ? Dá 34.

**Aluno A:** Se tirarmos 2 do 34... dá 32 e o 36.

**Aluno C:** 2 unidades!... Assim são 4 unidades...

**Aluno A:** Ah, sim... Então tira um do 36 e mete no 32. Assim fica 33 e 35.



$68 : 2 = 34$   
 $34 + 1 = 35$   
e  
 $34 - 1 = 33$  } 2 unidades  
R: Os números são 35 e 33.

**Figura 8-** Resolução do grupo X ao problema 1 da ficha S.E.1.

Outro grupo (grupo Y) utilizou uma estratégia diferente: optou por recorrer a equações do 1.º grau, como surge descrito no diálogo e figura seguintes (Figura 9):

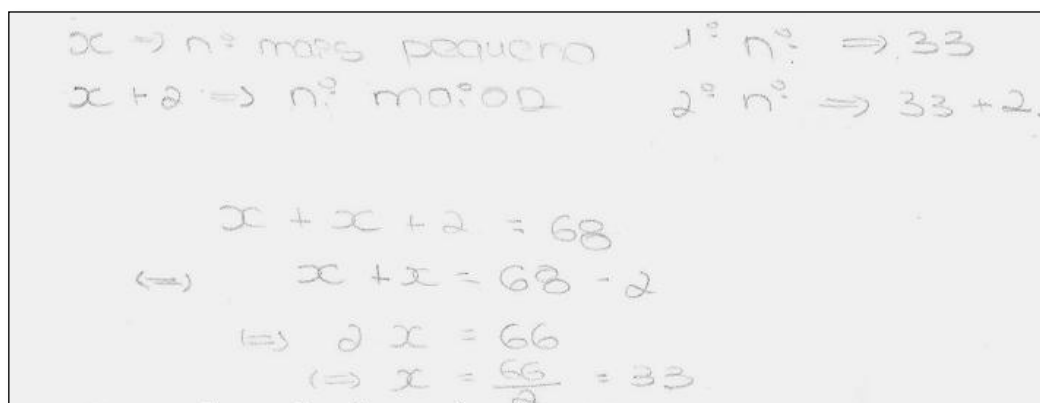
**Aluno E:** É  $x$ ... logo  $x+2$ .

**Aluno F:** Segundo os dados  $x+x$  tem que dar 68

**Aluno G:** Não. É  $x+x+2=68$

**Aluno F:** Pronto... eu enganei-me. Assim era o mesmo número. Era  $34+34=68$ ...

**Aluno G:** Dá 33 e...35. Agora falta dar a resposta.



$x \Rightarrow n^{\circ}$  mais pequeno      1.º  $n^{\circ} \Rightarrow 33$   
 $x + 2 \Rightarrow n^{\circ}$  maior      2.º  $n^{\circ} \Rightarrow 33 + 2$   
 $x + x + 2 = 68$   
 $\Leftrightarrow x + x = 68 - 2$   
 $\Leftrightarrow 2x = 66$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{66}{2} = 33$

**Figura 9-** Resolução do grupo Y ao problema 1 da ficha S.E.1.

Pode notar-se que a resolução do grupo Y está de acordo com os objetivos pré-estabelecidos para esta tarefa pois para além de definirem uma estratégia, mobilizam os conhecimentos de equações de 1º grau, já adquiridos. Existe uma preocupação de definição do significado da incógnita (x representa o número mais pequeno). Os alunos conseguiram resolver o problema sem recorrer à utilização de duas incógnitas o que, dada a existência de apenas uma equação, dificultaria a resolução da equação. Para além de utilizarem corretamente os princípios de equivalência, os alunos não apresentam como resposta ao problema a solução da equação, o que demonstra compreensão do problema proposto.

Tanto o primeiro como o segundo diálogo mostram que só participaram três alunos do grupo na resolução dos problemas e que um dos alunos não participou na resolução e discussão.

### **Problema 2.**

O segundo problema da ficha S.E.1 consistia em determinar dois valores de um certo triângulo, de modo que esse triângulo fosse equilátero. A seguir apresento dois exemplos de resolução (Figura 10 e Figura 11) dos grupos Y e X respetivamente:

#### **Grupo Y:**

**Aluno F:** Isto é igual a isto. E isto é igual a isto.

**Aluno E:** É muito fácil. Deve ter alguma rasteira...

**Aluno H:** Sim...certeza que tem uma rasteira...

**Aluno F:**  $3y-9=y+5 \Leftrightarrow \dots$  (fazem os cálculos)  $\Leftrightarrow y=7$   
y dá 7. Então se fizer  $y+5=2x$ , tenho o y e descubro o x.

**Aluno G:** Assim temos  $x=6$  e o  $y=7$ .

O aluno refere que  $3y-9=y+5$  e que  $y+5=2x$ . Os alunos acham o problema muito fácil e ficaram desconfiados se estariam a fazê-lo corretamente.

Triângulo equilátero tem os lados todos iguais ou seja  $3y-9=y+5=2x$

$$\begin{array}{l}
 3y-9=y+5 \\
 3y-y=9+5 \\
 2y=14 \\
 y=\frac{14}{2}=7
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 y+5=2x \quad (1) \\
 (1) \quad 7+5=2x \quad (1) \\
 =12=2x \quad (1) \\
 -2x=-12 \quad (1) \\
 x=\frac{-12}{-2} \\
 x=6
 \end{array}
 \right.$$

**Figura 10-** Resolução do grupo Y ao problema 2 da ficha S.E.1.

Existe uma preocupação por parte dos alunos em demonstrar o conhecimento das propriedades de um triângulo equilátero referindo-as no início da sua resolução. Sem utilizar formalmente um sistema de equações a duas incógnitas, a resolução anteriormente apresentada tem subjacente o método de substituição pois os alunos determinam o valor de uma das incógnitas e utilizam-no para posteriormente achar o valor da segunda incógnita.

### Grupo X:

**Aluno A:** Isto é um triângulo equilátero.

**Alunos:** Têm os lados todos iguais.

**Aluno A:**  $2x=3y-9=y+5...$

**Aluno B:** Não, porque vamos ter duas letras...

**Aluno C:** Então estes são todos iguais, então...

**Aluno B:** Não podemos ter  $2x=$  a isto e igual a isto outra vez...

**Aluno A:** E se escrever o perímetro igual a isto tudo.  $P=...$

**Aluno B:** Assim vais fazer uma equação cheia de letras.

**Aluno A:** Ah... Podemos fazer primeiro os que têm y. Fica  $3y-9=y+5...$  (fazem os cálculos). Dá  $y=7$ . Agora descobrimos o lado  $7+5=12$  ou  $3 \times 7-9=12$ . O lado do triângulo é 12.

**Aluno B:** Então  $x=12:2=6$ .

$3y - 9 = y + 5 \quad (=)$   
 $3y - y = 5 + 9 \quad (=)$   
 $2y = 14$   
 $\frac{14}{2} = 7$   
 $y = 7$   
 $x = 6$

$2x = 7$   
 Um triângulo equilátero tem  
 todos os lados iguais.  
 $3 \times 7 =$   
 $3 \times 7 - 9 = 12$   
 $7 + 5 = 12$   
 Todos os lados do triângulo = 12  
 ~~$12 \div 2 = x = 6$~~   
 $x = 12 \div 2 = 6$

~~$x = 6$~~   
 Resposta:  $x = 6$   
 $y = 7$

**Figura 11-** Resolução do grupo X ao problema 2 da ficha S.E.1.

Os alunos do grupo X apresentam uma estratégia de resolução semelhante ao grupo anterior. No entanto, não escrevem a expressão inicial onde são igualadas as medidas dos três lados do triângulo. Após a resolução das equações, existe a preocupação de verificação pois sabem que as três expressões devem originar o mesmo resultado. Neste diálogo verifica-se que existem dois alunos que concretizam a discussão, nota-se uma participação maior de dois dos alunos do grupo em questão.

### Problema 3.

O terceiro problema era um pouco mais complexo, no sentido em que o enunciado envolvia uma situação de contexto real que geralmente exige mais esforço para a sua compreensão. Os alunos tinham de descobrir o número de crianças e adultos que visitaram um museu sabendo que fizeram uma receita de 325 euros e que cada bilhete de adulto custava 2 euros e de criança 50 cêntimos. Relativamente a este problema destacam-se as resoluções do grupo Y e a de um outro grupo onde não foi feita gravação áudio por apresentar uma estratégia diferente dos outros grupos. Segue-se o diálogo entre os alunos do grupo Y ao problema:

**Aluno F:** O número de crianças é 325-b...ou -a, neste caso.

**Aluno E:** Então é a...

**Aluno F:** Já percebi...é 325-b crianças

**Aluno G:** Ah, meu deus! Odeio quando tem muitas incógnitas.

**Aluno F:** Então 325-b

**Aluno E:** b?????

**Aluno G:** a é igual ao número de bilhetes de crianças, neste caso

Os alunos até a este momento evidenciam alguma dificuldade na definição de relações entre as incógnitas não tendo definido o significado de cada uma delas.

**Aluno F:** Isso é óbvio

**Aluno G:** Isso é a mesma coisa de eu escrever  $a+c=325$ ....

**Aluno E:** Não pá...temos que ter aqui o 3.

**Aluno F:** Porque é o triplo, não é?

**Aluno E:** Ya...

**Aluno F:** Então é 2 entre parênteses  $3a$ ...

**Aluno G:** Prof diga se está certo?

**Aluno F:** O que significa 325-a?

**Aluno E:** Pois...não sei...

**Professora:** 325 euros menos o número de adultos?

**Aluno F:** Ahhhhh...não pode ser assim.

**Professora:** O número de adultos é o triplo do número de crianças. Se o número de crianças é a, então quantos vão ser os adultos?

(...)

**Professora:** Se forem 4 crianças, quantos adultos vão ser?

**Alunos:** 12

**Professora:** Então se forem a crianças, quantos adultos vão ser?

**Aluno F:** Ahhhh. Então vai ser  $a+3a=325$ ...

**Aluno E:** Não, porque 325 não é número de pessoas.

**Aluno F:** Os adultos é o a, as crianças é  $3a$

**Aluno E:** Não pode ser...temos de trocar o nome o a vai ser o número de crianças e  $3a$  o número de adultos.

Neste momento da resolução do problema, os alunos aperceberam-se de que tinham definido incorretamente o significado das incógnitas.

**Aluno F:** Prof, fica  $a+3a$ ...

**Professora:** Se cada criança paga 50 cêntimos, quanto pagam as crianças no total?

**Alunos E e F :**  $2(3a)$

**Professora:** Se cada adulto paga 2 euros, quanto pagam os adultos, no total?

**Aluno E:**  $0,5a$

**Aluno F:** Ah! Então é  $0,5a$  e  $2(3a)$

**Aluno E:**  $6a...$

**Aluno F:** Espera...

(fazem os cálculos)

**Aluno G:**  $a=50$

**Aluno E:** adultos 50

**Aluno F:** Não. É o contrário. As crianças é que são 50.

**Aluno G:** O  $a$  é as crianças, não é?

**Aluno F:** É 50 e os adultos é 150.

The image shows a handwritten solution on a piece of paper. It starts with defining variables:  $a$  for the number of children tickets and  $3a$  for the number of adult tickets. A crossed-out line indicates that  $a$  was initially thought to be the number of adult tickets. The equations are:  $2(3a) + 0,5a = 325$ , which simplifies to  $6a + 0,5a = 325$ , then  $6,5a = 325$ . Solving for  $a$  gives  $a = \frac{325}{6,5} = 50$ . The final results are: Children = 50, Adults =  $50 \times 3 = 150$ . The conclusion states: "R.: Foram vendidos 50 bilhetes para crianças e 150 bilhetes para adultos."

**Figura 12-** Resolução do grupo Y ao problema 3 da ficha S.E.1.

O Grupo Y começou por abordar o problema recorrendo a duas incógnitas mas, os alunos apercebem-se pouco depois que existe uma relação entre o número de adultos e o número de crianças e que uma incógnita é suficiente para resolver o problema. Os alunos revelaram alguma dificuldade na atribuição de um significado à incógnita escolhida, depois de alguma interação com a professora este fica esclarecido e na resolução escrita (Figura 12) os alunos indicam-no corretamente.

Tal como referido, foi selecionada a resolução de um grupo cuja discussão não foi retirada em aula, por ser distinta, inesperada e bastante clara (Figura 13). Nesta resolução como os alunos sabiam que o número de adultos era o triplo do número de crianças experimentaram com uma criança, duas crianças, e assim



sucessivamente, registrando os cálculos parciais da receita total ao lado, até que atingisse o valor de 325 euros.

a	C	
3	1	$3 \times 2 + 1 \times 0,5 = 6,5$
6	2	$6 \times 2 + 2 \times 0,5 = 13$
9	3	$9 \times 2 + 3 \times 0,5 = 19,5$
12	4	$12 \times 2 + 4 \times 0,5 = 26$
15	5	$15 \times 2 + 5 \times 0,5 = 32,5$
18	6	$18 \times 2 + 6 \times 0,5 = 39$
21	7	$21 \times 2 + 7 \times 0,5 = 45,5$
24	8	$24 \times 2 + 8 \times 0,5 = 52$
27	9	$27 \times 2 + 9 \times 0,5 = 58,5$
30	10	$30 \times 2 + 10 \times 0,5 = 65$
33	11	$33 \times 2 + 11 \times 0,5 = 71,5$
36	12	$36 \times 2 + 12 \times 0,5 = 78$
39	13	$39 \times 2 + 13 \times 0,5 = 84,5$
42	14	$42 \times 2 + 14 \times 0,5 = 91$
45	15	$45 \times 2 + 15 \times 0,5 = 97,5$
48	16	$48 \times 2 + 16 \times 0,5 = 104$
51	17	$51 \times 2 + 17 \times 0,5 = 110,5$
54	18	$54 \times 2 + 18 \times 0,5 = 117$
57	19	$57 \times 2 + 19 \times 0,5 = 123,5$
60	20	$60 \times 2 + 20 \times 0,5 = 130$
63	21	$63 \times 2 + 21 \times 0,5 = 136,5$
66	22	$66 \times 2 + 22 \times 0,5 = 143$
69	23	$69 \times 2 + 23 \times 0,5 = 149,5$
72	24	$72 \times 2 + 24 \times 0,5 = 156$
75	25	$75 \times 2 + 25 \times 0,5 = 162,5$
78	26	$78 \times 2 + 26 \times 0,5 = 169$
81	27	$81 \times 2 + 27 \times 0,5 = 175,5$
84	28	$84 \times 2 + 28 \times 0,5 = 182$
87	29	$87 \times 2 + 29 \times 0,5 = 188,5$
90	30	$90 \times 2 + 30 \times 0,5 = 195$
93	31	$93 \times 2 + 31 \times 0,5 = 201,5$
96	32	$96 \times 2 + 32 \times 0,5 = 208$
99	33	$99 \times 2 + 33 \times 0,5 = 214,5$
102	34	$102 \times 2 + 34 \times 0,5 = 221$
105	35	$105 \times 2 + 35 \times 0,5 = 227,5$
108	36	$108 \times 2 + 36 \times 0,5 = 234$
111	37	$111 \times 2 + 37 \times 0,5 = 240,5$
114	38	$114 \times 2 + 38 \times 0,5 = 247$
117	39	$117 \times 2 + 39 \times 0,5 = 253,5$
120	40	$120 \times 2 + 40 \times 0,5 = 260$
123	41	$123 \times 2 + 41 \times 0,5 = 266,5$
126	42	$126 \times 2 + 42 \times 0,5 = 273$
129	43	$129 \times 2 + 43 \times 0,5 = 279,5$
132	44	$132 \times 2 + 44 \times 0,5 = 286$
135	45	$135 \times 2 + 45 \times 0,5 = 292,5$
138	46	$138 \times 2 + 46 \times 0,5 = 300$
141	47	$141 \times 2 + 47 \times 0,5 = 306,5$
144	48	$144 \times 2 + 48 \times 0,5 = 314$
147	49	$147 \times 2 + 49 \times 0,5 = 320,5$
150	50	$150 \times 2 + 50 \times 0,5 = 325$

R: foram vendidos 150 bilhetes aos adultos e 50 bilhetes os crianças.

$$\begin{cases} a = 3c \\ 2a + 0,5c = 325 \end{cases}$$

**Figura 13-** Resolução de um grupo ao problema 3 da ficha S.E.1.

Os alunos parecem aperceber-se que o número de crianças e o número de adultos é bastante superior aos primeiros valores experimentados e rapidamente optam por valores mais elevados. A resolução do problema recorrendo a um sistema de equações de duas incógnitas surge após a resposta ao problema, o que sugere a existência de uma interação com outros grupos ou com a professora, facto que não pode ser confirmado dada a inexistência de gravação áudio.

Como já foi referido, esta primeira ficha tinha como objetivo identificar estratégias de resolução de problemas. As resoluções que foram apresentadas pertenciam a grupos que tinham sobre as suas mesas um gravador áudio, com exceção desta última. Para além destes grupos, constatei que os restantes recorreram a estratégias de resolução dos problemas semelhantes. Os alunos resolveram os problemas propostos recorrendo a equações do 1.º grau, como se previa e, em

minoria, por tentativa e erro, experimentação de valores e, no caso da última resolução, listagem de possibilidades.

Um aspecto predominante da fase de trabalho autónomo foi a demora por parte dos alunos em iniciar o trabalho, não sabendo muitas vezes como fazê-lo. Os alunos começavam por experimentar valores, falavam do próprio enunciado de forma a percebê-lo e discutiam a forma de resolver o problema. Em alguns casos foi necessário uma orientação por parte da Professora. Não se verificaram grandes dificuldades na interpretação dos enunciados.

### **Problemas do Manual - 26 abril de 2012**

No dia 26 de abril os alunos resolveram problemas do manual (Matemática 8, p. 185) (ANEXO II), envolvendo sistemas de equações. É de salientar que, ao contrário da ficha S.E.1, neste momento os alunos já tinham tido contato com sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas.

Na primeira ficha o objetivo central era identificar e compreender as estratégias de resolução de problemas utilizadas pelos alunos, já o objetivo da resolução destes problemas do manual era analisar as possíveis dificuldades manifestadas pelos alunos na interpretação dos enunciados e na passagem da linguagem natural para a linguagem matemática.

Uma vez que alguns dos problemas do manual tinham textos complexos e pouco diretos, selecionaram-se apenas quatro dos seis problemas apresentados numa das páginas, tendo em conta o fator tempo e as dificuldades dos alunos. Os alunos tiveram muitas dificuldades na interpretação dos enunciados dos problemas e consequentemente na passagem da linguagem natural para a linguagem matemática. Quanto à interpretação dos enunciados, os alunos revelaram dificuldades na compreensão do vocabulário utilizado no próprio enunciado dos problemas e também na interpretação do contexto e da situação descrita no enunciado. Um dos grupos cuja discussão foi gravada apenas resolveu completamente o problema 1 e iniciou o problema 2. Optou-se por apresentar apenas algumas resoluções do grupo

que resolveu todos os problemas propostos. As resoluções do problema 1 destes dois grupos não vão ser comparadas pois são bastante semelhantes.

Assim apresento a discussão e posterior resolução (Figura 14):

### **Problema 1.**

**Aluno E:** mete x

**Aluno F:** É a Ana, né? E o y é o João. Fica x mais 3 igual a y. É assim, né? Ou x igual a  $y+3$ .

**Aluno E:** O sistema é x menos três igual a y. O segundo é y menos 2...

**Aluno F:** mais 2.

**Aluno E:** Não. Menos 2. Y menos 2 igual a  $3x$ .

**Aluno F:** Só isto?

**Aluno E:** Acho que sim.

**Professora:** Se a Ana dá 3 berlindes ao João, ele fica com os que ele tinha?

**Aluno E:** mais 3. Só isso...

**Professora:** E aqui também. É o triplo de quê?

**Aluno E:** Ah...falta mais 2

(cálculos)

**Professora:** A Ana ficou com o triplo dos berlindes do João. E aqui o que é que vocês têm?

**Aluno F:** Ah...está ao contrário...

**Aluno E:** A de baixo está ao contrário...

(cálculos)

Res. 105

1.  $a \rightarrow$  n.º de berlindos da Ana  
 $b \rightarrow$  n.º " do João

$$\begin{cases} a - 3 = b + 3 \\ b + 2 = a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 6 \\ b + 2 = a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 6 \\ b + 2 = b + 6 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 6 \\ b + 2 = b + 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 6 \\ -2b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 6 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 + 6 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 3 \end{cases}$$

R.: A Ana tem 9 berlindos e o João tem 3 berlindos

Figura 14- Resolução do grupo Y ao problema 1 do manual.

As letras utilizadas pelos alunos durante o diálogo diferem das apresentadas na resolução escrita pois estas últimas são uma opção do elemento do grupo que a entregou.

Tanto na discussão como na resolução escrita a primeira preocupação dos alunos é a definição do significado das incógnitas. No entanto, os alunos do grupo em questão tiveram alguma dificuldade em passar da linguagem corrente para a linguagem matemática, problema que foi geral para os restantes grupos. Dadas as dificuldades sentidas, no decurso desta tarefa, a Professora foi bastante solicitada no sentido de esclarecer o enunciado, e a forma como o mesmo se traduzia matematicamente. Apesar das dificuldades na apropriação do problema, os alunos resolveram corretamente o problema após a orientação da Professora. Neste problema foi notório a falta de participação de dois dos elementos do grupo.

**Problema 2.**

- Aluno F:** Agora x mais y
- Aluno E:** x é as moedas de 1 euro e o y é o 2

**Aluno F:** x mais y igual a 40...fica x igual a 65...não vai dar numero inteiro!!

**Aluno E:** Pode ser 2x..

**Aluno G:** Há mais moedas de 1 euro do que de 2. Isso tenho a certeza. Há pra aí umas 15 ou 20...

**Aluno E:** 25...Então acho que o sistema está certo.

**Aluno G:** Acho que não...

**Professora:** Se trocarmos moedas de 2 euros por moedas de 1 euro quantas vão ficar dessas?

**Aluno G:** Fica o dobro...logo 2x

**Aluno E:** Então fica 2y mais x igual a 65.  
(cálculos)

2.  $x \rightarrow$  moedas de 1€  
 $y \rightarrow$  " " " 2€

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ 2y + x = 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 - y \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 2y + 40 - y = 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 2y - y = 65 - 40 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 - 25 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 25 \end{cases} \Rightarrow (15, 25)$$

Verificação:  $15 \times 1 + 25 \times 2 = 15 + 50 = 65 \text{€}$   
R.: Há 25 moedas de 2€ e há 65€ no todo.

**Figura 15-** Resolução do grupo Y ao problema 2 do manual.

Neste problema os grupos revelaram maior dificuldade na compreensão da segunda frase do enunciado e impossibilitando-os de avançar sem orientação da Professora. As dificuldades apresentadas são semelhantes às do problema anterior: compreensão do enunciado e, principalmente, passagem da linguagem natural para linguagem simbólica (Figura 15).

### Problema 3.

**Aluno F:** Então...8x igual a y menos 5

**Aluno E:** Não...

**Aluno F:** y balões, x crianças. 8x que é igual a...

**Aluno E:** Acho que não é isso....

**Professora:** Se cada criança recebe 8 balões e são x crianças, quantos balões serão?

**Aluno G:** 8x

**Professora:** E sobram 5, então quantos balões existem ao todo?

**Aluno E:** então é 8x mais 5 igual a y. Então a de baixo é igual.

3.  $y \rightarrow$  balões  
 $x \rightarrow$  crianças

$$\begin{cases} 8x + 5 = y \\ 7x + 11 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = -8x - 5 \\ \text{---} \\ 7x + 11 = +8x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ 7x - 8x = -11 + 5 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ -x = -6 \\ x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = -8 \times 6 - 5 \\ \text{---} \\ -y = -48 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ y = 53 \\ x = 6 \end{cases}$$

$h = (6, 53)$

**Figura 16-** Resolução do grupo Y ao problema 3 do manual.

Este problema não levantou grandes dificuldades. De uma forma geral, os grupos resolveram-no corretamente e sem orientação da Professora. Uma possível explicação para esta facilidade é a existência de uma correspondência de letras (x e y) a quantidades desconhecidas (número de crianças e número de balões) feita no enunciado. A fase de explicitação dos significados das incógnitas foi identificada anteriormente como uma das dificuldades mais frequentes, tornam-se por vezes um obstáculo à resolução do problema.

### Problema 5

**Aluno E:** 3 euros por cada cesto, 3n

**Aluno F:** menos 5t... acho que é menos 5t

**Aluno E:** E isso é igual a quê?

**Aluno F:** É igual a 400

**Aluno E:** Então é 3n menos 5t igual a 400. Então e a segunda, professora?

**Professora:** Então quantos cestos foram fabricados?

**Aluno E:** Ah...é n mais t igual a 160.  
(cálculos)

$$\begin{cases} 3n - 5t = 400 \\ n + t = 160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ n = 160 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(160 - t) - 5t = 400 \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 480 - 3t - 5t = 400 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8t = -480 + 400 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8t = -80 \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-80}{-8} \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ n = 160 - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ n = 150 \end{cases}$$

$$B = (150, 10)$$

R: Há 10 cestos com defeito.

**Figura 17-** Resolução do grupo Y ao problema 5 do manual.

Mais uma vez notou-se que dois dos elementos do grupo não participaram na discussão em grupo durante a resolução do problema. Os alunos tiveram bastantes dúvidas durante a interpretação do enunciado deste problema o que originou um momento de discussão coletiva para tentar superar essas dificuldades. Uma vez que por cada cesto sem defeito ganhavam-se 3 euros e por cada cesto com defeito perdiam-se 5 euros, alguns alunos consideraram que o artesão obteria um lucro de 2 euros por cada cesto. Perante esta interpretação a Professora decidiu intervir para a turma e analisar coletivamente o enunciado do problema. Esta discussão foi liderada pela Professora que procurou garantir que os alunos identificavam as quantidades conhecidas e definiam incógnitas. A explicitação das relações entre as incógnitas e a resolução do sistema daí resultante ficou à responsabilidade dos grupos.

Com este conjunto de problemas do manual foi possível identificar as fases de resolução onde os alunos apresentam maior dificuldade. A atribuição de um significado a cada incógnita é a primeira dificuldade sentida pela maioria dos alunos. Em todos os problemas, com exceção daquele em que as incógnitas são definidas no enunciado, nota-se a existência de dúvidas e hesitações na definição do significado de cada incógnita, tanto através dos diálogos como das resoluções escritas. Outra

dificuldade frequentemente detetada é a compreensão da situação descrita no enunciado do problema. Perante os enunciados com frases mais longas e complexas verifica-se uma maior solicitação da ajuda da Professora. Os erros de interpretação têm como consequência erros na passagem de linguagem natural para a linguagem matemática, ou seja, os alunos estabelecem de forma incorreta as relações entre as incógnitas.

### **Ficha S.3 de 30 de abril de 2012**

Esta tarefa tinha como objetivo identificar as dificuldades manifestadas pelos alunos na passagem da linguagem matemática para a linguagem natural. Este é um tipo de atividade menos frequente em sala de aula. A metodologia adotada foi o trabalho a pares e foram gravadas as interações de dois pares, compostos por elementos que integravam os dois grupos estudados nas atividades anteriores.

Pretendia-se que, a partir de um sistema de equações 1.º grau a duas incógnitas, os alunos inventassem uma situação, para integrar o enunciado de um problema.

As interações e a resolução escrita (Figura 18) do par cujos elementos pertenciam ao grupo X são apresentados de seguida:

**Aluno A:** x igual a 2 e este...y igual a 3 e tipo...Agora aqui em baixo 3 vezes 2, 6 e 4 vezes 2, 8.

**Aluno B:** Mas temos de fazer um enunciado.

**Aluno A:** Por cada x crianças recebem 2y de bolas...

**Aluno B:** Ok. E depois pra fazer esta?

**Aluno A:** Por cada 3 crianças recebe...

**Aluno B:** Não pode ser. Como é que...

**Aluno A:** Se calhar temos de calcular isso.

**Aluno B:** Não. Temos um sistema e temos de...

....

**Professora:** Vocês têm que primeiro pensar o que será o x e o y.

**Aluno A:** Então o x é crianças e o y bolas. Então cada criança recebe...



**Aluno B:** Não. Não pode ser assim. O enunciado tem que levar a descobrir o sistema.

**Aluno A:** O triplo de x com o quádruplo de y...

**Aluno B:** Temos de escrever um enunciado...

**Aluno A:** A soma de x com o...

**Aluno B:** Não metas assim. Mete a soma de chocolates com qualquer coisa...ou assim...

**Aluno A:** Então a soma das gomas do Manel com as da Maria é 8. Sabe-se que as gomas da Maria são o dobro...se as gomas do Manel fossem o triplo das da Maria ia ser igual a 18. Assim já fica um sistema...

**Professora:** Mas assim seria x mais y e aqui temos x mais 2y.

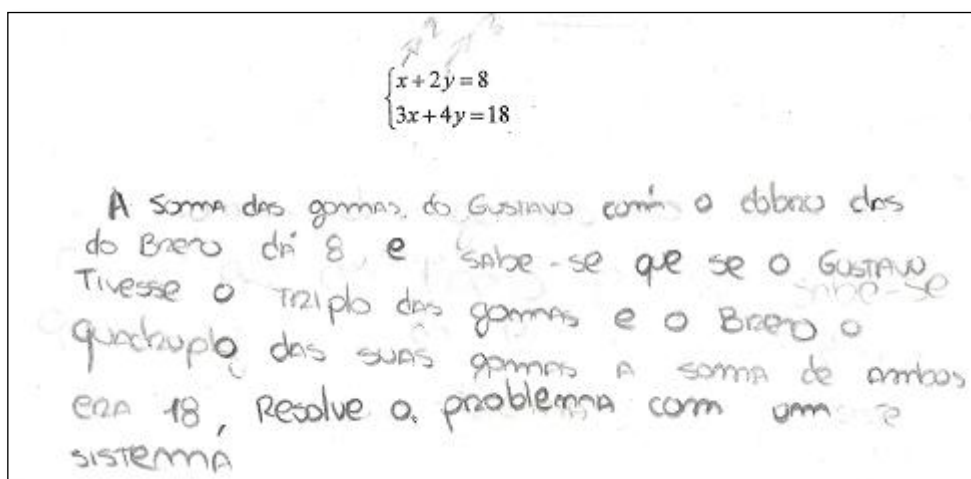
**Aluno A:** É o triplo?

**Professora:** 2y?

**Aluno B:** É o dobro.

**Professora:** E como escrevia esta última parte...vejam lá melhor.

**Aluno B:** Pois...não está muito bem. Então fica.....(o que está escrito)



**Figura 18-** Resolução de um par do grupo X da ficha S.E.3.

Os alunos tiveram bastante dificuldade em escrever de imediato um enunciado que pudesse corresponder ao sistema de equações dado. A primeira dificuldade foi em definir o que podia representar cada uma das incógnitas e a segunda em definir um contexto para esse mesmo sistema de equações. A resolução representada na figura 18 mostra que os alunos revelam dificuldade em criar uma situação real.

Em baixo apresentam-se a discussão e a resolução escrita (Figura 19) referente ao par com elementos que constituíam o grupo Y:

**Aluno E:** Eu sou x. Escreve x...y és tu

**Aluno F:** Não...inventa lá um nome...

**Aluno E:** Conceição...

**Aluno F:** Considera y Gertrudes

**Aluno E:** Não. Um rapaz.

**Aluno F:** Ó pá! Vamos ficar meia hora só para os nomes?  
(discutiram ainda os nomes)

**Aluno E:** A Conceição...não...Numa competição...

**Aluno F:** Não...

**Aluno E:** O Alberto tinha o dobro de berlindes da Conceição.  
Não, assim não dá...

**Aluno F:** Ao todo eles tinham 8 berlindes...sendo que...

**Aluno E:** O Alberto tinha mais, porque tinha o dobro...

**Aluno F:** Então os dois participaram numa competição e a Conceição ganhou o triplo dos berlindes...

**Aluno E:** E ele vai ter o dobro do dobro que já tinha.

**Aluno F:** Assim...entraram numa competição, a Conceição ganhou o triplo dos que inicialmente tinha.

**Aluno E:** O Alberto ganhou o dobro do que já tinha. Ele tinha isto...é o dobro...

**Professora:** O que é o x e o y para vocês? Ao todo tinham 8?

...

**Professora:** x mais y é igual a 8 é o que lá está?

**Aluno F:** Ah...é o dobro da Conceição.

**Aluno E:** A Conceição não é o x?

**Aluno F:** Assim ficava 2x.

**Professora:** Exatamente.

**Aluno F:** Então é o 2y.

**Professora:** Temos a soma de quê?

**Aluno F:** Então... A soma dos berlindes...(texto)

$$\begin{cases} x+2y=8 \\ 3x+4y=18 \end{cases}$$

Considera  $x$  como nº de berlines da Conceição e  $y$  como o nº de berlines do Albarde.

A soma dos berlines da Conceição com o dobro de berlines do Albarde é 8.

No final duma competição eles ganharam mais berlines, sendo que a soma do triplo de berlines da Conceição com o quádruplo dos berlines do Albarde é 18.

Quantos berlines tem cada um, antes e depois da competição.

**Figura 19-** Resolução de um par do grupo Y da ficha S.E.3.

Os alunos demonstraram mais uma vez alguma dificuldade em iniciar o trabalho, não sabendo como começar a invenção de um enunciado. Mas ao contrário do outro grupo, este grupo teve logo a preocupação em definir o que representava cada uma das incógnitas constituintes do sistema de equações apesar de despenderem muito tempo para o fazer. Depois de definidas as incógnitas os alunos rapidamente pensaram numa situação que representasse o sistema e não manifestaram dificuldade na passagem da linguagem matemática para a linguagem natural.

Na turma em geral, a primeira dificuldade sentida pelos alunos foi a atribuição de um significado a cada uma das incógnitas presente no sistema. As dificuldades sentidas pelos alunos podem dever-se ao facto de estes estarem pouco habituados a tarefas desta natureza uma vez ser mais frequente a passagem da linguagem natural para a linguagem matemática do que o recíproco.

Os alunos tendem a referir-se às incógnitas como  $x$  e  $y$  e apenas descrevem a relação entre as letras. Uma vez compreendida a necessidade de atribuir um significado real a cada incógnita, os alunos demonstraram dificuldade na composição de um contexto para as mesmas. No final da resolução, em que se pretendia que os alunos escrevessem com linguagem natural as relações entre as incógnitas verificaram-se também algumas limitações. Estas limitações foram superadas através

da confirmação, isto é, para conferir se o enunciado escrito poderia ser descrito pelo sistema apresentado, os alunos realizavam o exercício habitual de resolução de problemas.

### **Ficha S.4 de 30 de abril de 2012**

A ficha S.E.4 foi a última ficha resolvida pelos alunos antes do mini teste. Assim sendo, a tarefa é constituída por problemas, embora não tão complexos quanto os do manual. Para poder realizar uma revisão dos conteúdos e esclarecer as dúvidas dos alunos foram escolhidos problemas de tipos e contextos diversificados e com uma linguagem acessível.

Nesta fase, devido à grande semelhança das resoluções apresentadas pelos dois pares em estudo, seleccionou-se apenas as resoluções de um deles para analisar as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de problemas.

#### **Problema 1.**

**Aluno E:** Com estes números eu não gosto!

**Aluno F:** É não é?

**Aluno E:** Então sandes é s...

**Aluno F:** Mas sumos também é...

**Aluno E:** Vamos por x e y.

**Aluno F:** Não. Vamos por a e b.

**Aluno E:** a mais 3 mais b é igual...

**Aluno F:** Não é...

**Aluno E:** Eu acho que é a mais 3, senão era o triplo de a...

**Aluno F:** Ya.

**Aluno E:** igual a 4,6. Porque é que tem vírgula!!!

**Aluno F:** O outro é 0,8...

**Aluno E:** oitenta. Vais por oito ou oitenta.

**Aluno F:** É igual. Vou por oito.

**Aluno E:** 0,5a mais 0,3b igual a quanto???

**Aluno F:** Pois...isso é que é o problema!

**Aluno E:** igual a a mais b.

**Aluno F:** Não, não é.

**Professora:** Que relação existe entre o numero de sandes e o de sumos?

**Aluno F:** É mais 3!

**Professora:** O que é que é mais 3?

**Aluno F:** O quê?

**Professora:** Escrevo mais 3?

**Aluno F:** O b é igual a a mais 3.

**Professora:** Há mais 3 sandes do que sumos...

**Aluno F:** a mais 3 igual a b.

**Professora:** O b é o numero de sumos, quer dizer que há mais sumos? Suponham que tenho 2 sumos, quantas sandes vou ter?

**Aluno E:** Vamos ter 2 mais 3 que é 5 sandes. Ah, então é a igual a b mais 3.

(cálculos)

$a = \text{n}^\circ \text{ de sandes}$   
 $b = \text{n}^\circ \text{ de sumos}$

$$\begin{cases} a = b + 3 \\ 0,8a + 0,3b = 4,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 3 \\ 0,8(b + 3) + 0,3b = 4,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 3 \\ 0,8b + 2,4 + 0,3b = 4,6 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 3 \\ 0,8b + 0,3b = 4,6 - 2,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 3 \\ 1,1b = 2,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 3 \\ b = \frac{2,2}{1,1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 + 3 \\ b = 2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases} \quad \text{R. Há 5 sandes e 3 sumos.}$$

**Figura 20-** Resolução do par do grupo Y ao problema 1 da ficha S.E.4.

Os alunos começaram por definir o significado das incógnitas (Figura 20) e mostraram um certo desconforto em trabalhar com números não inteiros, manifestando uma maior dificuldade na passagem do enunciado para um sistema de equações de 1.º grau a duas incógnitas. Revelaram também alguma dificuldade em definir a relação existente entre o número de sandes e o número de sumos.

### Problema 2.

**Aluno C:** Isto é preciso sistemas? Então fazemos este mais este mais este igual a 180. E o segundo...este mais este que é igual a ...180.

**Aluno D:** Já temos um sistema, tótó!

**Aluno C:** Pois...

(cálculos)

**Aluno D:** Agora vamos ver se está certo. O x é quanto? É 60. 60 mais 20 mais 80 mais 20...é 180. Sempre está bem!

**Aluno C:** Então a resposta é....

$$\begin{cases} x+20 + y+80 = 180 \\ x+y+80 = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+100 - 80 - 2y \\ x = 100 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100 - 2y + 20 + y + 80 = 180 \\ -2y + y = 180 - 100 - 80 - 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = -20 \\ y = 20 \end{cases}$$

$$x = 100 - 2 \times 20 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 \\ y = 20 \end{cases}$$

$$b = (60, 20)$$

$$R: \begin{cases} x = 60^\circ \\ y = 20^\circ \end{cases}$$

**Figura 21-** Resolução do par do grupo Y ao problema 2 da ficha S.E.4.

Na resolução deste problema os alunos não revelaram grandes dificuldades e conseguiram imediatamente escrever o sistema representativo da situação (Figura 21). Depois de resolverem o sistema de equações de 1.º grau a duas incógnitas, pelo método de substituição, e obterem a solução do sistema os alunos tiveram a preocupação de verificar se era solução do problema.

### Problema 3.

**Aluno E:** Então m de mulheres e qual é a outra letra?

**Aluno F:** h...

**Aluno E:** Mas porquê?

**Aluno F:** De homem!!!!

**Aluno E:** Ya.

**Aluno F:** Então...sistema m mais h igual a 40. Menos 40 menos 7...

**Aluno E:** menos 40???

**Aluno F:** 7 menos 40

**Aluno E:** Não. 40 menos 7...igual a 2...

**Aluno F:** m

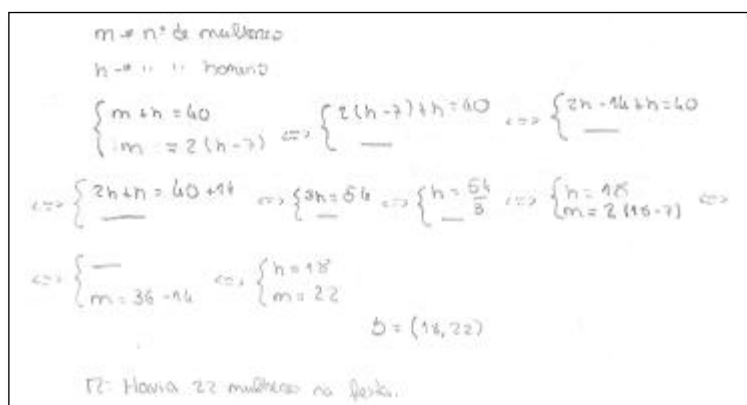
**Aluno E:** h

**Aluno F:** Não. Opá não sei...

**Aluno E:** Professora, aqui diz que o número de mulheres passou a ser o dobro de homens. É 2m ou 2h?

**Professora:** Então se...primeiro saíram 7 homens, se haviam h homens, quantos passaram a haver?

**Aluno E:** 33 pessoas.  
**Professora:** Sim. E quantos homens?  
**Aluno E:** h menos 7...  
**Professora:** Depois diz que o número de mulheres passou a ser o dobro de homens, depois de eles terem saído.  
**Aluno E:** Mulheres vai ser o dobro de homens menos 7...  
**Aluno F:** Então, h menos 7 igual a 2 vezes h menos 7.  
**Aluno E:** 2m...aqui não falta o m? É assim professora?  
**Professora:** Vejam lá...o que é h menos 7?  
**Aluno E:** Número de homens...  
**Professora:** Então...o número de homens é o dobro de número de homens?  
**Aluno E:** Talvez seja m igual 2h menos 7  
**Aluno F:** Falta parênteses. Porque é o dobro dos homens que ficaram.  
**Aluno E:** Ah, ok. M igual a 2 abre parêntese h menos 7 e fecha parêntese.  
(cálculos)  
**Aluno E:** Qual é que vem primeiro? h ou m?  
**Aluno F:** É h.



$m = n^{\circ} \text{ de mulheres}$   
 $h = \dots \dots \text{homens}$   
 $\begin{cases} m + h = 40 \\ m = 2(h - 7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(h - 7) + h = 40 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2h - 14 + h = 40 \\ \dots \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 3h + h = 40 + 14 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3h = 54 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{54}{3} \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 18 \\ m = 2(18 - 7) \end{cases} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ m = 36 - 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 18 \\ m = 22 \end{cases}$   
 $S = \{18, 22\}$   
R: Havia 22 mulheres no festa.

**Figura 22-** Resolução do par do grupo Y ao problema 3 da ficha S.E.4.

Mais uma vez, a primeira preocupação dos alunos foi a definição do significado das incógnitas e novamente revelaram algumas dificuldades na definição de relações existentes entre o número de homens e o número de mulheres. Os alunos mostraram ter o cuidado de dar resposta ao problema proposto (Figura 22).

#### Problema 4.

**Aluno E:** Então x mais y é 74. Certo?

**Aluno F:** Calma... Agora 6x mais 8y igual a 50

**Professora:** Qual a altura das tábuas de 6mm?

**Aluno E:** 6mm!!!(risos)

**Professora:** Qual a altura das tábuas de 8 mm?

**Aluno E:** 8mm!!!(com um ar desconfiado)

**Professora:** Então quanto é que tem que ser a altura total das tábuas todas?

**Aluno E:** 50!

**Professora:** 50 quê?

**Aluno E:** 50 cm.

**Professora:** Será?

**Aluno F:** Acho que sim.

**Professora:** cm?

**Aluno E:** Ahhh. É 500

**Professora:** 500? Porquê?

**Aluno F:** Porque temos de passar para milímetros.

**Professora:** Isso mesmo.  
(cálculos)

$$\begin{cases} x + y = 74 \\ 6x + 8y = 500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 74 - y \\ - \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} - \\ 6(74 - y) + 8y = 500 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 444 - 6y + 8y = 500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ -6y + 8y = 500 - 444 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 2y = 56 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ y = \frac{56}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ y = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 74 - 28 \\ - \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 46 \\ y = 28 \end{cases} \Rightarrow (46, 28)$$

R. Há 28 tábuas de 8mm.

**Figura 23-** Resolução do par do grupo Y ao problema 4 da ficha S.E.4.

Os alunos não demonstraram grande dificuldade na resolução deste problema. Contudo estes não se aperceberam que a altura de cada tábua estava expressa em milímetros que a altura total das tábuas estava expressa em centímetros. Pode dever-se a uma pequena falta de atenção na concretização do problema.



A resolução desta ficha constituída por problemas mostra que os alunos têm como preocupação inicial a escolha das letras que representarão as quantidades desconhecidas em cada problema demorando, por vezes, bastante tempo nesta fase. Revela ainda que existiam algumas dificuldades na interpretação do enunciado dos problemas e na sua transcrição para linguagem matemática.

A realização do mini teste (ANEXO IV) serviu de verificação à aquisição dos conhecimentos base e ao cumprimento dos objetivos definidos nos planos de aula. Em geral, constatou-se que os alunos aprenderam a resolver sistemas pelo método de substituição, apesar de cometerem alguns dos erros referidos por Ponte, Branco e Matos (2009), tais como adição de termos não semelhantes e operações com números inteiros. No que diz respeito aos problemas, os alunos mostraram poucas dificuldades e perceberam os enunciados.

Na semana seguinte, a professora cooperante realizou um teste de avaliação que incidia sobre os tópicos: funções, equações de 1.º grau e sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas. Os alunos mostraram ter adquirido os conhecimentos necessários dentro do subtema de sistemas de equações. Em geral os alunos aplicaram corretamente o método de substituição na resolução de sistemas de equações de 1.º grau e nos problema que pressupunham a sua formulação. Não revelaram grande dificuldade na resolução de problemas pois conseguiram interpretá-los e traduzir a linguagem natural para linguagem matemática. Neste teste, o subtema de sistemas de equações foi aquele onde se registou um maior número de respostas corretas. Este facto permite-me afirmar que, de uma forma geral, foram cumpridos os objetivos delineados para o período de lecionação em estudo.



# *CAPITULO VI*

## *REFLEXÃO SOBRE O TRABALHO*

### *REALIZADO*

Procurei dar resposta às duas questões formuladas no início do estudo apoiando-me na literatura consultada e analisando os diversos materiais produzidos pelos alunos. Todo o trabalho de pesquisa juntamente com a análise das interações e resoluções dos alunos suscitaram em mim uma maior consciência dos vários aspetos relativos ao ensino da Matemática. Optei por fazer incidir o foco da investigação na resolução de problemas do subtema de sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas, em particular nas dificuldades que os alunos evidenciam na interpretação dos seus enunciados, nomeadamente no que se refere a aspetos de tradução da linguagem corrente para a linguagem matemática e reciprocamente. As estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas integram também um aspeto de análise importante deste estudo. Assim, procuro dar resposta às seguintes questões:

- Que dificuldades os alunos evidenciam na interpretação dos enunciados dos problemas, nomeadamente no que se refere a aspetos de tradução da linguagem corrente para a linguagem matemática e reciprocamente?
- Que estratégias são utilizadas pelos alunos na resolução de problemas envolvendo sistemas de equações e que dificuldades manifestam?

As conclusões deste estudo assentam, em grande parte, no estudo de dois grupos de quatro alunos selecionados previamente. A análise destes dois grupos permitiu responder às questões do estudo.

## **DIFICULDADES NA TRADUÇÃO DA LINGUAGEM CORRENTE PARA A LINGUAGEM MATEMÁTICA E RECIPROCAMENTE**

A resolução de problemas tem um papel fundamental para a compreensão dos sistemas de equações, na presente subunidade didática.

Os problemas propostos durante as aulas lecionadas foram majoritariamente problemas tradicionais em que existem relações que pode ser representadas por um sistema de equações de 1.º grau a duas incógnitas.

Nos diversos problemas propostos em sala de aula, foram várias as dificuldades manifestadas pelos alunos. Os alunos revelam dificuldades na passagem da linguagem corrente para a linguagem matemática e reciprocamente. Quanto a problemas que envolvam a passagem da linguagem corrente para a linguagem matemática, os alunos, em geral, têm como primeira dificuldade a interpretação dos enunciados, tanto a nível da linguagem e vocabulário usados como a compreensão e interpretação da situação descrita no enunciado. Uma segunda dificuldade evidenciada pelos alunos durante o trabalho autónomo é em explicitar ou atribuir um significado às incógnitas.

Depois dos alunos atribuírem significado às incógnitas referentes ao problema, mostram alguma fragilidade na explicitação das relações existentes entre as incógnitas e a concretização da escrita dessas relações matematicamente.

Já na passagem da linguagem matemática para a linguagem corrente a primeira dificuldade evidenciada pelos alunos é na definição ou atribuição de um significado a cada incógnita presente no sistema de equações de 1.º grau a duas incógnitas. Os alunos perguntavam constantemente: "O que é o x? E o y?", o que torna bem visível esta dificuldade apresentada. Depois de terem definido o significado de cada incógnita, os alunos demonstram dificuldades em criar um contexto que possa ser traduzido pelo sistema de equações dado e por fim escrevê-lo tendo em conta as relações existentes entre as incógnitas.

## **ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE 1.º GRAU A DUAS INCÓGNITAS**

Na primeira aula distribui uma ficha com alguns problemas e os alunos não tinham conhecimento prévio da existência dos sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas. O objetivo era perceber que estratégias os alunos recorriam para resolver esses problemas.

Durante o trabalho autónomo dos alunos apercebi-me de que despunham de algum tempo para a definição de uma estratégia para a resolução dos problemas propostos. Alguns grupos tentavam resolver os problemas pelo método tentativa e erro e experimentação de valores mas, em geral, de imediato abandonavam essa estratégia e optavam por recorrer a equações de 1.º grau (com uma incógnita) e houve um grupo que optou por recorrer à listagem de possibilidades.

Em suma, a utilização de equações de 1.º grau na resolução de problemas foi a estratégia mais utilizada pelos alunos; embora tenha existido grupos a recorrerem ao método de tentativa e erro, experimentação de valores e listagem de possibilidades.

### **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Nas fichas propostas aos alunos tentei diversificar o tipo de problemas para permitir que os alunos estabeleçam contato com uma grande diversidade de situações e desenvolvam uma aprendizagem o mais completa possível, mas na verdade tal não aconteceu. Todos os problemas presentes na ficha S.E.4 de 30 de abril acabaram por incluir questões do mesmo tipo, o que vim a aperceber-me na forma como os alunos resolviam os problemas uma vez que faziam automaticamente a passagem do enunciado para um sistema de equações e resolviam-no, não tendo o cuidado de ver o

que se pretendia ou a resposta que se queria. Esta situação pode dever-se ao facto de eu ter tido como primeira preocupação diversificar o contexto dos problemas e assim não ter o cuidado de diversificar o tipo de questões formuladas.

Assim sendo, deveria ter colocado questões diferentes através dos problemas propostos, como por exemplo:” Qual o maior valor...?”, “Qual a diferença entre os valores...?”, etc. assim, se eu tivesse tido um maior cuidado neste aspeto, sinto que talvez proporcionaria aos alunos uma experiência mais rica e diversificada formulando questões de diferentes tipos. Tomei consciência deste facto durante o trabalho autónomo dos alunos e nos momentos de discussão em turma. Durante a análise dos dados foi possível confirmar esta situação. Para identificação das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas, o foco de investigação deve ser a tarefa apresentada na primeira aula (ficha S.E.1, 16 de abril), pois incluía um conjunto de problemas a serem resolvidos pelos alunos numa fase em que estes não tinham qualquer contato com sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas.

Na primeira ficha os alunos evidenciaram alguma demora em decidir qual a estratégia de resolução a utilizar. A maioria dos grupos resolveu os problemas recorrendo às equações de 1.º grau, provavelmente porque os alunos tinham este tema ainda bastante presente, uma vez que havia sido abordado muito recentemente. Porém, houve alguns alunos que optaram pelo método tentativa e erro, experimentação de valores e listagem de todas as possibilidades, o que pode revelar que existem alunos que, apesar de se encontrarem à vontade com as regras práticas de resolução de equações e saberem resolvê-las, não se servem das mesmas para efetuar a tradução de linguagem corrente para a matemática, não reconhecendo, aparentemente, a sua utilidade e vantagem que pode ter na facilitação da resolução de problemas.

De forma a perceber as dificuldades evidenciadas pelos alunos na interpretação dos enunciados dos problemas, nomeadamente no que se refere a aspetos de tradução da linguagem corrente para a linguagem matemática, centrei-me fundamentalmente nos problemas do manual. Estes foram os problemas aos quais dei mais importância por incluírem frases mais complexas e menos diretas. Apercebi-me da importância de refletir antecipadamente sobre a dificuldade dos exercícios a abordar, de forma a selecionar os mais adequados à turma com a qual se está a

trabalhar. Neste caso, a atitude positiva revelada pelos alunos e a facilidade de assimilação dos métodos de resolução de sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas permitiu elevar um pouco o nível de dificuldade dos problemas apresentados.

Com a análise das resoluções dos alunos, bem como das suas discussões em grupo, tirei algumas conclusões. Os alunos manifestaram algumas dificuldades na resolução dos problemas, no que diz respeito às fases da resolução de problemas identificadas por Pólya (2003), sendo que a principal dificuldade é revelada na fase de *compreensão do problema*. Em algumas situações, os alunos revelaram que têm dificuldades na compreensão do enunciado do problema bem como na compreensão do próprio problema, o que condiciona os alunos no restante processo de resolução, porque ao não perceberem os enunciados, não os conseguem traduzir em linguagem matemática e posteriormente avançarem a sua resolução.

Durante as aulas verifiquei que os alunos têm muita dificuldade em expressar-se na linguagem corrente tanto através da escrita como oralmente e, conseqüentemente, têm também muitas dificuldades na passagem da linguagem natural para a linguagem matemática, aspeto que se verifica claramente nas resoluções dos alunos e respetivas discussões em grupo.

Verifiquei ainda que, raramente os alunos passam pela quarta fase de resolução de problemas mencionada por Pólya, ou seja a fase de verificação ou retrospeção. Os alunos depois de compreenderem o problema definem um plano de resolução, executam-no mas, geralmente, não o verificam. Apenas houve dois grupos que num dos problemas fez a verificação mas os restantes grupos não o fizeram. Por vezes, nem questionam as soluções obtidas tendo em conta o enunciado e o contexto do problema, embora durante o trabalho autónomo tenha presenciado dois casos onde os alunos obtiveram valores negativos e mostraram perceber que tal não era possível acontecer no contexto daquele problema, tendo assim questionado as suas resoluções e resultados.

Na passagem da linguagem matemática para a linguagem corrente, uma das primeiras dificuldades manifestadas pelos alunos foi na identificação das incógnitas, outra foi a criação de um contexto para o problema a formular. No final do processo,

mais uma vez os alunos revelaram dificuldades na tradução das relações entre as incógnitas de expressão algébrica para linguagem corrente. Os alunos despenderam muito tempo com a criação de um contexto investindo menos na tradução das expressões algébricas. Este facto pode demonstrar não só alguma falta de autonomia, como também o receio que muitos alunos têm de “fazer mal”, e serem castigados através de uma má classificação por aquilo que fizeram de forma livre não estar dentro dos procedimentos usuais, preferindo não fazer/escrever nada.

Quanto ao meu desempenho durante a lecionação apercebi-me de que deveria ter feito problemas envolvendo questões mais diversificadas e com mais interesse. Não deveria ter só questões do tipo “Quantos...?”, mas também algumas questões do tipo “Qual a soma ...?” ou “Qual o maior valor...?”, de forma a fornecer aos alunos uma experiência mais rica em termos de aprendizagem. Senti também que os momentos de discussão não foram muito interessantes, apesar da maioria dos alunos desta turma ter alguma dificuldade em manifestar as suas opiniões e expor as suas resoluções, mas como docente deveria ter encontrado forma de contornar este facto. Nestes momentos os alunos resistiam à justificação e argumentação pois quando a sua participação era solicitada estes limitavam-se a ler o que haviam escrito. As aulas não decorreram como eu tinha pensado inicialmente, não só por ter pouco tempo disponível para cumprir os planos elaborados mas também devido a um imprevisto da escola e da professora cooperante, o que fez com que eu tivesse menos uma aula de 90 minutos e outra de 45 minutos.

Os planos de aula foram uma grande ajuda e serviram de orientação na minha lecionação. A planificação foi importante na medida em que nos orienta a gerir o tempo de cada momento da aula, de algumas notas importantes para o professor guiar a sua aula, seja no trabalho autónomo dos alunos ou discussões em turma. Ajuda-nos também para possíveis imprevistos que possam ocorrer em aula e para o professor sentir-se mais seguro e confiante. Durante as aulas, os planos foram cumpridos e soube gerir bem o tempo ou pensar no momento formas de o cumprir, aquando um imprevisto, apesar de ter de ajustar um pouco em algumas aulas.

O balanço final que faço das aprendizagens realizadas pelos alunos durante a lecionação desta subunidade é bastante positivo, uma vez que os alunos, em geral, demonstraram ter atingido os objetivos definidos. Enquanto professora destes alunos,



naquele momento, senti-me satisfeita com as participações dos alunos bem como os resultados obtidos por eles.

A realização deste trabalho foi bastante gratificante pois permitiu-me refletir sobre a minha prática letiva bem como o ensino da Álgebra e as dificuldades inerentes a este tema. E assim contribuiu fortemente para enriquecer o meu património como professora de Matemática.

Como futura professora, este relatório contribuiu para vários aspetos. Este estudo permitiu-me refletir sobre a seleção de tarefas apropriadas tendo em conta alguns objetivos a serem atingidos e a forma como se deve conduzir cada aula. Tive a consciencialização da importância de uma boa planificação de cada aula a ser lecionada. Outro aspeto a indicar é o facto de ter tido a oportunidade de perceber as estratégias de resolução de problemas a que os alunos, normalmente, recorrem e as dificuldades dos alunos na tradução da linguagem natural para linguagem matemática e reciprocamente, bem como as complicações no manuseamento de expressões algébricas.

Este trabalho pode contribuir para outros professores de Matemática pois é um estudo sobre algumas questões muito frequentes na aprendizagem dos alunos na aula de Matemática. Neste trabalho outros professores poderão perceber que estratégias, normalmente, os alunos recorrem bem como as dificuldades sentidas pelos alunos na tradução da linguagem natural para a linguagem matemática e reciprocamente.



# CAPITULO VII

## REFERÊNCIAS

- Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: ME-DEB.
- Abrantes, P., (1985). *Planificação no ensino da Matemática*. Texto de apoio à disciplina de Didáctica da Matemática II.
- Bodgan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Brito, L. (2008). Ler e resolver problemas. *Educação e Matemática*. 99, 40-44
- Canavarro, A. (2007). *O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos*. *Quadrante*, 6(2), 81-118.
- GTI; 2010; *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino*; Associação de Professores de Matemática.
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new álgebra with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Orgs.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp.133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

- Kieran, C. (2004). *Algebraic thinking in the early grades: What is it?* *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.
- Kuchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed) *Children's understanding of mathematics*: 11-16 (pp. 102-119). London: Murray.
- Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.
- Ministério da Educação. (1991a). *Organização curricular e programas: Ensino Básico-3.º ciclo* (vol.I). Lisboa: Direção Geral do Ensino Básico e Secundário.
- Ministério da Educação (1991b). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem: 3.º ciclo do ensino básico*. (vol. II). Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.
- Ministério da Educação; 2007; *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DEB.
- Nabais, M. (2010). *Equações do 2.º grau: Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9.º ano*. Tese de Mestrado. (Universidade de Lisboa).
- NCTM; 2008; *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*; Associação de Professores de Matemática.
- Neves, Maria Augusta Ferreira; Silva, António Pinto; Raposo, Maria José; Silva, Jorge Nuno. (2011). *Matemática 8*; Porto Editora

- PEREIRA, Antônio Luiz. (2001) *Motivação para a disciplina MAT450 – Seminários de Resolução de Problemas*; São Paulo, IME-USP, 17p.
- Pires, M. (2001). *A diversificação de tarefas em Matemática no ensino secundário: Um projecto de investigação-acção* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).
- Pólya, G. (1978) *a arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.
- Pólya, G. (2003). *Como resolver problemas* (Trad.). Lisboa: Gradiva (Obra original publicada em 1945)
- Ponte, J., N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC-ME.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (Ficheiro pdf) Recuperado de [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/05-Ponte\\_GTI-tarefas-gestao.pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/05-Ponte_GTI-tarefas-gestao.pdf)
- RESNIK, L. & COLLINS, Allan. Cognición y Aprendizaje. En *Anuario Psicología*. Nº 69, pp 189-197., Barcelona, Grafiques 92, S.A, 1996.
- Silva, J.S. & Paulo, J. S. (1968) *Compêndio de Álgebra 1.º Tomo*. Braga: Livraria Cruz
- Silva, J.S. & Paulo, J. S. (1968) *Compêndio de Álgebra 2.º Tomo*. Braga: Livraria Cruz
- SILVEIRA, J. F. P. *O que é um problema matemático?* Site: <http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/resu1.html>

- Skovsmose, O. (2008). Cenários para investigação. In O. Skovsmose (Ed.). *desafios da reflexão em educação matemática crítica* (pp. 15-40). (Trad.). São Paulo: Papyrus.

# ANEXOS

## ANEXO I

### PLANIFICAÇÕES

#### *Planificação da 1ª aula (16 de abril de 2012)*

**Tema:** Álgebra

**Tópico:** Equações

**Subtópico:** Sistemas de equações

<p><b>Sumário:</b> Resolução de problemas - trabalho em grupo. Discussão das estratégias adotadas pelos alunos. Introdução ao estudo do tema: “<i>Sistemas de equações</i>”.</p>	<p><b>Data:</b> 16 de Abril de 2012</p> <p><b>Sala:</b> 12</p> <p><b>Hora:</b> 10:05 – 11:35</p>
--	--

#### OBJETIVOS

- Gerais:
  - Revelar espírito crítico nos raciocínios;
  - Expressar e fundamentar as opiniões, recorrendo a linguagem matemática;
  - Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticas adequados para resolução de problemas;
  - Seleccionar estratégias de resolução de problemas;
  - Interpretar e criticar resultados no contexto do problema;
  - Validar conjecturas.
- Específicos:
  - Compreender o que é um sistema de equações.

## PRÉ-REQUISITOS

- Equações de 1.º grau a uma incógnita;
- Equações literais;

## DESENVOLVIMENTO DA AULA

- **1º MOMENTO – ENTRADA (10min.)** 10:05 – 10:15
  - Informa que escreve-se o sumário na próxima aula ou no fim desta;
  - O professor informa os alunos sobre a metodologia de trabalho e tempo de resolução (35/40 min);
  - Fazem-se as alterações convenientes na disposição dos alunos;
  - É distribuída uma ficha por cada aluno do grupo;
  - São dadas indicações relativamente ao desenrolar da aula:
    - Fases de trabalho;
    - Tempo disponível para cada uma delas.

- **2º MOMENTO – RESOLUÇÃO DA FICHA (40 min)** 10:15 – 10:55
  - Os alunos trabalham em grupo;
  - O professor circula pela sala dirigindo-se aos alunos;
  - O professor regista interações entre alunos, questões que lhe são colocadas e algumas produções de alunos que considere interessantes para a discussão.

NOTA: Se os alunos não conseguirem iniciar sozinhos podemos dar uma orientação.

Se alguém terminar mais cedo explora os problemas 18 e 21 das pág. 190 e 191.

- **3º MOMENTO – CORRECÇÃO E DISCUSSÃO DA FICHA(30 min.)** 10:55 – 11:25
  - Recolha de produções dos grupos para análise;
  - É eleito, pelo professor, os representantes para a correção no quadro;
  - O professor intervém para:
    - Incentivar os grupos a participar na discussão de forma a complementarem o trabalho dos colegas e apresentarem resoluções alternativas;
    - Promover/Dinamizar a discussão solicitando justificações fundamentadas;
    - Melhorar a clareza e o rigor no discurso.



- O professor deve ter em atenção se:
  - São apresentadas todas as resoluções distintas que existam (tentativas, equações, etc);
  - Ficam esclarecidas as dúvidas dos alunos;
  - É apresentada pelo menos uma resolução/solução das tarefas propostas.

NOTA: Se não houver tempo não se discute todos os problemas.

SE HOUVER TEMPO OU NO INICIO DA AULA SEGUINTE:

- **4º MOMENTO – ENCERRAMENTO (10 min) 10:25 – 10:35**
  - Através dos problemas propostos, apresentar uma estratégia diferente e dar a conhecer a existência e importância dos sistemas de equações, sem resolver analiticamente.

**NOTA:** facilita na resolução de alguns problemas.

- Informar os alunos de que na próxima aula vão aprender o método de resolução analítica de sistemas de equações.

## **METODOLOGIA DE TRABALHO**

- Trabalho em pequenos grupos de 3 / 4 alunos escolhidos pelo professor;
- Discussão em grande grupo
  - O aluno terá um papel de comunicador, explicitando e justificando as estratégias utilizadas;
  - O professor terá um papel orientador, garantindo a existência de:
    - Intervenções ordeiras;
    - Rigor de linguagem;
    - Síntese dos principais conteúdos.

## **RECURSOS**

- Papel e material de escrita
- Ficha de trabalho

## **FORMAS E MOMENTOS DE AVALIAÇÃO**

### **Avaliação formativa**

- Grelha de observação do trabalho dos alunos

- Questões feitas pelos alunos
- Erros mais frequentes
- Diferentes resoluções
- Recolha de produções de cada grupo

## *Planificação da 2ª aula (18 de abril de 2012)*

**Tema:** Álgebra

**Tópico:** Equações

**Subtópico:** Sistemas de equações

<b>Sumário:</b>  Resolução analítica de sistemas de equações – método de substituição.	<b>Data:</b> 18 de Abril de 2012  <b>Sala:</b> 14  <b>Hora:</b> 12:30 – 13:15
--	---

### **OBJETIVOS**

- Específicos:
  - Resolver sistemas de equações pelo método de substituição;
  - Verificar, sem resolver o sistema, se um par ordenado é ou não solução do mesmo.

### **PRÉ-REQUISITOS**

- Equações de 1.º grau;
- Equações literais.

### **METODOLOGIA DE TRABALHO**

- Trabalho autónomo;
- Exposição do método de substituição.

### **DESENVOLVIMENTO DA AULA**

- **1º MOMENTO – ENTRADA (30min.) (12:30 – 13:00)**
  - O professor dita o sumário;
  - Relacionar com a aula anterior:
    - Escrever um enunciado de um problema simples no quadro:

- ***A soma da minha idade com a do meu irmão é 39. A minha idade é o dobro da idade do meu irmão. Qual a idade do meu irmão?***

- Explicitar o método de resolução analítica de sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas, no quadro;
  - Dar a noção de solução de sistema de equações, verificando a solução obtida deste problema.
- 
- **2º MOMENTO – RESOLUÇÃO DA TAREFA (10 min) (13:00 – 13:10)**
    - Os alunos trabalham a pares na resolução de sistemas de equações do livro da pág.177 – 1.5 e 1.4;
    - O professor circula pela sala dirigindo-se aos alunos, confirmando e orientando o trabalho.
  - **3º MOMENTO – CORRECÇÃO E DISCUSSÃO DA TAREFA (5 min.) (13:10 – 13:15)**
    - Correção de um sistema.

## **RECURSOS**

- Papel e material de escrita
- Ficha de trabalho

## **FORMAS E MOMENTOS DE AVALIAÇÃO**

### **Avaliação formativa**

- Grelha de observação do trabalho dos alunos
  - Questões feitas pelos alunos
  - Erros mais frequentes
  - Diferentes resoluções

## *Planificação da 3ª aula (19 de abril de 2012)*

**Tema:** Álgebra

**Tópico:** Equações

**Subtópico:** Sistemas de equações

<b>Sumário:</b>  Sistemas de equações equivalentes. Resolução de sistemas de equações. Ficha de trabalho.	<b>Data:</b> 19 de Abril de 2012  <b>Sala:</b> 15  <b>Hora:</b> 11:45 – 13:15
---	---

### **OBJETIVOS**

- Específicos:
  - Resolver sistemas de equações pelo método de substituição;
  - Compreender a noção de sistemas equivalentes.

### **PRÉ-REQUISITOS**

- Equações de 1.º grau;
- Equações literais;

### **METODOLOGIA DE TRABALHO**

- Trabalho a pares;
- Correção no quadro.

### **DESENVOLVIMENTO DA AULA**

- **1º MOMENTO – ENTRADA (15min.) (11:45 – 12:00)**
  - O professor escreve o sumário;
  - O professor informa os alunos sobre a metodologia de trabalho;
  - É distribuída uma ficha por cada aluno.

- **2º MOMENTO – RESOLUÇÃO DA FICHA (40 min) (12:00 – 12:40)**
  - Os alunos trabalham a pares;
  - O professor circula pela sala dirigindo-se aos alunos, orientando-os.

NOTA: O professor deve estar preparado para as dificuldades :

- Método de substituição na resolução de sistemas de equações;
  - Simplificação de expressões;
  - Resolução de equações.
- Caso seja necessário, interromper a aula e orientar a turma.

- **3º MOMENTO – CORRECÇÃO E DISCUSSÃO DA FICHA (30 min.) (12:40 – 13:10)**
  - A correção é feita pelos alunos no quadro;
  - O professor intervém para:
    - Definir sistemas de equações equivalentes;
    - Classificar os sistemas resolvidos.
- **4º MOMENTO – ENCERRAMENTO (5 min) (13:10 – 13:15)**
  - Distribuir TPC para entregarem numa folha à parte na próxima aula.
    - Pág. 181 – ex 2.1

## RECURSOS

- Papel e material de escrita
- Ficha de trabalho

## FORMAS E MOMENTOS DE AVALIAÇÃO

### Avaliação formativa

- Grelha de observação do trabalho dos alunos
  - Questões feitas pelos alunos
  - Erros mais frequentes
  - Diferentes resoluções

## *Planificação da 4ª aula (26 de abril de 2012)*

**Tema:** Álgebra

**Tópico:** Equações

**Subtópico:** Sistemas de equações

<b>Sumário:</b>  Resolução de problemas envolvendo sistemas de equações.	<b>Data:</b> 26 de Abril de 2012  <b>Sala:</b> 12  <b>Hora:</b> 10:05 – 11:35
--	---

### **OBJETIVOS**

- Gerais:
  - Revelar espírito crítico nos raciocínios;
    - Expressar e fundamentar as opiniões, recorrendo a linguagem matemática;
    - Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos adequados para resolução de problemas;
    - Selecionar estratégias de resolução de problemas;
    - Interpretar e criticar resultados no contexto do problema;
    - Validar conjecturas.
- Específicos:
  - resolver sistemas de equações.

### **PRÉ-REQUISITOS**

- Equações de 1.º grau;
- Equações literais.

### **METODOLOGIA DE TRABALHO**

- Trabalho em grupo;
- Discussão em grande grupo
  - O aluno terá um papel de comunicador, explicitando e justificando as estratégias utilizadas;
  - O professor terá um papel orientador, garantindo a existência de:
    - Intervenções ordeiras;
    - Rigor de linguagem;
    - Síntese dos principais conteúdos.

## DESENVOLVIMENTO DA AULA

- **1º MOMENTO – ENTRADA (10min.) 10:05 – 10:15**
  - O professor escreve o sumário;
  - Recolha do TPC;
  - O professor informa os alunos sobre a metodologia de trabalho;
  - Informa que é para resolverem os problemas 1, 2, 3 e 5 da pág. 185 do manual;
  - Fazem-se as alterações convenientes na disposição dos alunos;
  - São dadas indicações relativamente ao desenrolar da aula:
    - Fases de trabalho;
    - Tempo disponível para cada uma delas.
  
- **2º MOMENTO – RESOLUÇÃO DA TAREFA (40 min) 10:15 – 10:55**
  - Os alunos trabalham em grupo;
  - O professor circula pela sala dirigindo-se aos alunos;
  - O professor regista interações entre alunos, questões que lhe são colocadas e algumas produções de alunos que considere interessantes para a discussão.  
NOTA: os alunos que acabarem mais cedo poderão fazer os problemas 4 e 6 da mesma pág.
  
- **3º MOMENTO – CORRECÇÃO E DISCUSSÃO DA TAREFA (30 min.) 10:55 – 11:25**
  - Recolha de produções dos grupos para análise;
  - É eleito, pelo professor, os representantes para a correção no quadro;
  - O professor intervém para:
    - Incentivar os grupos a participar na discussão de forma a complementarem o trabalho dos colegas e apresentarem resoluções alternativas;
    - Promover/Dinamizar a discussão solicitando justificações fundamentadas;
    - Melhorar a clareza e o rigor no discurso.
  - O professor deve ter em atenção se:
    - São apresentadas todas as resoluções distintas que existam;
    - Ficam esclarecidas as dúvidas dos alunos;
    - É apresentada pelo menos uma resolução/solução das tarefas propostas.
  
- **4º MOMENTO – ENCERRAMENTO (5 min) 11:25 – 11:35**
  - Distribuição do TPC para entregar numa folha à parte na próxima aula:
    - Resolver 1 problema numa ficha a entregar.



## **RECURSOS**

- Papel e material de escrita.

## **FORMAS E MOMENTOS DE AVALIAÇÃO**

### **Avaliação formativa**

- Grelha de observação do trabalho dos alunos
  - Questões feitas pelos alunos
  - Erros mais frequentes
  - Diferentes resoluções e recolha.

## *Planificação da 5ª aula (30 de abril de 2012)*

**Tema:** Álgebra

**Tópico:** Equações

**Subtópico:** Sistemas de equações

<b>Sumário:</b>  Correção do T.P.C. Resolução de problemas envolvendo sistemas de equações. Ficha de trabalho.	<b>Data:</b> 30 de Abril de 2012  <b>Sala:</b> 12  <b>Hora:</b> 10:05 – 11:35
---	---

### **OBJETIVOS**

- Gerais:
  - Revelar espírito crítico nos raciocínios;
    - Expressar e fundamentar as opiniões, recorrendo a linguagem matemática;
    - Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticas adequados para resolução de problemas;
    - Seleccionar estratégias de resolução de problemas;
    - Interpretar e criticar resultados no contexto do problema;
    - Validar conjecturas.
- Específicos:
  - Resolver sistemas de equações de 1.º grau a duas incógnitas;
  - Resolver problemas envolvendo sistemas de equações.

### **PRÉ-REQUISITOS**

- Equações de 1.º grau;
- Equações literais.

### **METODOLOGIA DE TRABALHO**

- Trabalho a pares;
- Discussão em grande grupo
  - O aluno terá um papel de comunicador, explicitando e justificando as estratégias utilizadas
  - O professor terá um papel orientador, garantindo a existência de:
    - Intervenções ordeiras
    - Rigor de linguagem

- Síntese dos principais conteúdos.

## DESENVOLVIMENTO DA AULA

- **1º MOMENTO – ENTRADA (15min.) 10:05 – 10:20**
  - O professor escreve o sumário;
  - Recolha do TPC;
  - Correção dos dois problemas da aula anterior;
  - O professor informa os alunos sobre a metodologia de trabalho;
  - É distribuída uma ficha por cada aluno (um sistema em que os alunos terão de sugerir um enunciado de um problema);
  - São dadas indicações relativamente ao tempo disponível para a tarefa.
- **2º MOMENTO – RESOLUÇÃO DA 1ª FICHA (15 min) 10:20 – 10:35**
  - Os alunos trabalham a pares na ficha S.E\_3;
  - O professor circula pela sala dirigindo-se aos alunos;
  - Recolha das produções para análise.
- **3º MOMENTO – RESOLUÇÃO DA 2ª FICHA (35 min) 10:35 – 11:10**
  - Resolução da ficha S.E\_4 a pares;
  - O professor circula pela sala dirigindo-se aos alunos;
  - O professor regista interações entre alunos, questões que lhe são colocadas e algumas produções de alunos que considere interessantes para a discussão.
- **4º MOMENTO – CORRECÇÃO E DISCUSSÃO DA 2ª FICHA (15 min.) 11:10 – 11:25**
  - Recolha de produções dos pares para análise;
  - É eleito, pelo professor, os representantes para a correção no quadro ou o professor.
- **4º MOMENTO – ENCERRAMENTO (10 min) 11:30 – 11:35**
  - Síntese como preparação para a ficha de avaliação.

## RECURSOS

- Papel e material de escrita
- Fichas de trabalho S.E\_3 e S.E\_4.

## FORMAS E MOMENTOS DE AVALIAÇÃO

### Avaliação formativa

- Grelha de observação do trabalho dos alunos

- Questões feitas pelos alunos
- Erros mais frequentes
- Diferentes resoluções
- Recolha de produções dos pares.

# ANEXO II

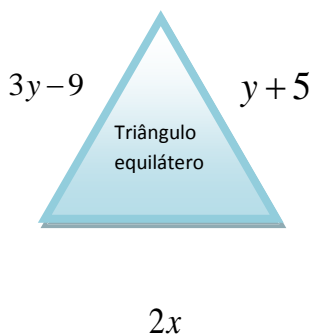
## TAREFAS

1ª aula (16 de abril de 2012)

### Ficha S.E.1.

Resolve os seguintes problemas usando a estratégia que considerares adequada:

1. Pensei em dois números. A soma desses dois números é 68. Sabendo que um é maior que o outro em duas unidades, quais os números em que pensei?
2. Observe a figura e descubra os valores de  $x$  e  $y$ .



3. Um museu recebeu 325 euros pela venda de bilhetes, durante um dia. Nesse dia o número de bilhetes vendidos para adultos foi o triplo do número de bilhetes vendidos para crianças. Os bilhetes de adulto custavam 2 euros e os bilhetes de criança 50 cêntimos. Quantos bilhetes foram vendidos para crianças e quantos foram vendidos para adulto?

(Adaptado de Exame Nacional)

**Ficha S.E.2.**

1. Sem resolveres o sistema, assinala com uma X, a opção que é solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = -6 \end{cases}$$

(2;8)

(2;-8)

(-2;8)

(-2;-8)

2. Resolve algebricamente cada um dos seguintes sistemas:

a. 
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} -x + y = -2 \\ 2x - 5y = 1 \end{cases}$$

c. 
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$$

d. 
$$\begin{cases} 2 - \frac{x-y}{2} = 4 \\ -2(x-y) = 2y+2 \end{cases}$$

3. A minha prima reparou que tem menos 15 euros do que o dobro do dinheiro do seu irmão. Verificou ainda que tem mais 15 euros do que o seu irmão. Representando por  $x$  o dinheiro da minha prima e por  $y$  o dinheiro do seu irmão, assinala com uma X a opção do sistema que corresponde ao problema:

$$(A) \begin{cases} y = 2x - 15 \\ y = x + 15 \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} x = 2y - 15 \\ y = x + 15 \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} x - 2y = -15 \\ x - y = 15 \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} x - 2y = 15 \\ x - y = 15 \end{cases}$$

Problemas do manual

Atividades de aplicação 10

1. Trocas entre amigos

Se a Ana der três berlindes ao João ficam ambos com o mesmo número de berlindes.

Se o João der dois berlindes à Ana esta fica com o triplo dos berlindes do João.

Quantos berlindes têm, ao todo, os dois amigos?



2. As moedas

Num saco estão 40 moedas de 1 e 2 euros.

Se trocarmos as moedas de 2 euros por moedas de 1 euro ficamos com 65 moedas.

Quantas moedas de 2 euros há no saco?

Quanto dinheiro há no saco?

3. Divisão dos balões

$y$  balões foram divididos por  $x$  crianças.

Se cada criança receber 8 sobram 5.

Se cada criança receber 7 sobram 11.

Quantos balões há para dividir?



4. Um problema de mistura

A uma empresa foi feita uma encomenda de 12 litros de uma solução de ácido sulfúrico a 30%.

A empresa tem no armazém soluções a 20% e a 50%.

Pretendemos saber quantos litros de cada uma das soluções, de 20% e de 50%, se deve misturar para se obter 12 litros de solução a 30%.

5. Os cestos

Um artesão faz cestos de palha.

Ganha 3 euros por cada cesto que fabrica sem defeito e perde 5 euros por cada cesto que fabrica com defeito.

Numa semana fabricou 160 cestos e obteve um lucro de 400 euros.

Quantos cestos com defeito foram produzidos?



6. Num triângulo isósceles

Na figura ao lado, o triângulo  $[ABC]$  é isósceles.

O perímetro do triângulo  $[ABC]$  é 11 cm.

$$\overline{AC} = \overline{CB};$$

As medidas estão expressas em centímetros.

Quais são as medidas dos lados do triângulo?





5ª aula (30 de abril de 2012)

### Ficha S.E.3

Escreve o enunciado de um problema que possa ser traduzido pelo seguinte sistema:

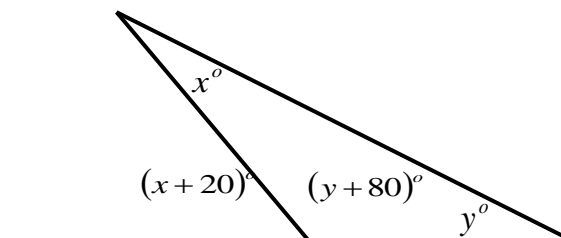
$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$$

### Ficha S.E.4.

Resolve os seguintes problemas, recorrendo aos sistemas de equações:

- 1- Se eu for à mercearia da minha aldeia e comprar mais três sandes do que sumos e no fim tiver de pagar 4,60 euros, quantos sumos e quantas sandes compro se cada sandes custa 0,80 euros e cada sumo 0,30 euros?

- 2- Observa a figura e determina os valores de  $x$  e  $y$ .



3- Na minha festa de aniversário havia 40 pessoas. Saíram 7 homens e o número de mulheres passou a ser o dobro do número de homens. Quantas mulheres estavam na minha festa?

4- Um carpinteiro recebeu 74 tábuas. Algumas com 6 mm de espessura e outras com 8 mm de espessura. Quando foram empilhadas, atingiram a altura de 50 cm. Quantas tábuas de 8 mm ele recebeu?

# ANEXO III

## TAREFAS PARA CASA

### T.P.C.1

Resolve o seguinte problema:

1- Na confeitaria:

**Cliente** - Bom dia Sr. Joana. Quero três rissóis de carne e cinco empadas de galinha.

**Comerciante** - São 4,75 euros.

Voltando à loja, um pouco depois, o cliente diz:



**Cliente** - Peço desculpa, enganei-me. Queria 5 rissóis de carne e 3 empadas de galinha.

**Comerciante** - Não tem problema! Eu devolvo-lhe 30 cêntimos e fica o assunto resolvido.

Qual o preço de cada rissol e de cada empada?

## T.P.C.2

Resolve o seguinte problema:

Um cavalo e um burro caminhavam juntos levando sacos muito pesados, todos com o mesmo peso. Lamentava-se o cavalo da sua pesada carga quando o burro lhe disse:



Quantos sacos levava cada animal?

# ANEXO IV

## MINI TESTE

1- Observa o sistema:

$$\begin{cases} x - 5 = 6(6 + y) \\ y - 2x + 16 = 0 \end{cases}$$

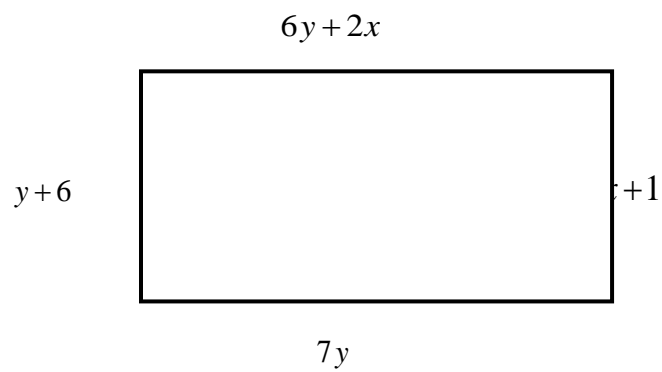
Verifica se o par ordenado  $(-1; -6)$  é ou não solução do sistema.

2- Resolve analiticamente os seguintes sistemas:

a. 
$$\begin{cases} 9 + x = y \\ x + 2y = 12 \end{cases}$$

b. 
$$\begin{cases} 3x - \frac{1-y}{2} = 4 \\ 7 - 2(x-5) = y \end{cases}$$

3- Observe a figura seguinte e determine x e y:



4- Num estacionamento havia carros e bicicletas num total de 43 veículos e 150 rodas. Quantos carros estavam estacionados.

# ANEXO V

## AUTORIZAÇÃO PATERNAL

Ex<sup>mo</sup>. Sr. Encarregado de Educação

Informo que, no âmbito de um trabalho de investigação orientado pelo professor Henrique Guimarães (Instituto de Educação da Universidade de Lisboa), no presente ano letivo estou a desenvolver um estudo relacionado com a minha prática letiva. Para isso, entre 15 de abril e 2 de Maio as aulas de Matemática da turma do 8.º A serão por mim lecionadas, com orientação da professora Teresa Marques.

Para a realização deste trabalho pretendo obter gravações áudio de algumas das aulas por mim lecionadas, a alguns dos alunos da turma. Fica desde já garantida a privacidade do seu educando. Em qualquer situação de apresentação pública ou de publicação serão usados nomes fictícios para identificação dos diferentes intervenientes. A Direção da Escola foi informada deste trabalho e dos procedimentos necessários relativos às gravações.

Para o efeito, solicito a sua autorização para proceder às gravações, manifestando inteira disponibilidade para prestar qualquer esclarecimento que considere necessário.

Agradeço a sua atenção

(Vanessa Isabel Oliveira Santos)

4 de Janeiro de 2012





# ANEXO VI

## AUTORIZAÇÃO DIREÇÃO

Ex<sup>m</sup>. Sr.

Diretor da Escola Básica 2, 3 Maria Alberta Menéres

Informo que, no âmbito de um trabalho de investigação orientado pelo professor Henrique Guimarães (Instituto de Educação da Universidade de Lisboa), no presente ano letivo estou a desenvolver um estudo relacionado com a minha prática letiva. Para isso, entre 16 de abril de 2012 e 2 de maio de 2012 as aulas de Matemática da turma do 8.º A serão por mim lecionadas, com orientação da professora Teresa Marques.

Para a realização deste trabalho pretendo obter gravações em áudio de algumas das aulas por mim lecionadas. Fica desde já garantida a privacidade dos alunos. Em qualquer situação de apresentação pública ou de publicação serão usados nomes fictícios para identificação dos diferentes intervenientes.

Alunos e respetivos Encarregados de Educação foram informados destes procedimentos. aguardo a sua permissão para solicitar a autorização dos Encarregados de Educação para proceder às referidas gravações. Tenho inteira disponibilidade para prestar qualquer esclarecimento.

Com os melhores cumprimentos.

(Vanessa Isabel Oliveira Santos)

4 de Janeiro de 2012