CECÍLIA FUKIKO KAMEI KIMURA

O JOGO COMO FERRAMENTA NO TRABALHO COM NÚMEROS NEGATIVOS: UM ESTUDO SOB A PERSPECTIVA DA EPISTEMOLOGIA GENÉTICA DE JEAN PIAGET

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
SÃO PAULO
2005

CECÍLIA FUKIKO KAMEI KIMURA

O JOGO COMO FERRAMENTA NO TRABALHO COM NÚMEROS NEGATIVOS: UM ESTUDO SOB A PERSPECTIVA DA EPISTEMOLOGIA GENÉTICA DE JEAN PIAGET

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação do* ***Prof. Dr. Michael Otte*** *e co-orientação da* ***Profa. Dra. Sandra Maria Pinto Magina***

PUC/SP
SÃO PAULO
2005

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ______________________________________ **Local e Data:** ______________

Aos meus pais ***Mitsuio*** *e* ***Siotiro*** *(in memorian)*
que me ensinaram os valores da vida.

Às minhas irmãs ***Aparecida*** *e* ***Maria***

Ao meu esposo ***Jorge****.*

AGRADECIMENTOS

Aos Professores Doutores ***Michael Otte*** e ***Sandra Maria Pinto Magina***, pela amizade, paciência e entusiasmo, pela orientação firme e segura na concretização deste trabalho.

Às Professoras Doutoras ***Anna Franchi***, ***Circe Mary Silva da Silva Dynnikov*** e ***Tânia Maria Mendonça Campos***, pelas sugestões, comentários e críticas, que tanto contribuíram para a elaboração e evolução deste trabalho.

A todos os ***professores***, ***funcionários*** e ***colegas*** do curso de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP, pelo incentivo e apoio oferecidos de diversas maneiras.

À ***CAPES***, pela bolsa de estudos, que permitiu uma maior dedicação ao Programa de Pós-Graduação.

Aos professores do ***Departamento de Educação/ICHS/CUR***, pelo incentivo e apoio ao meu afastamento, que permitiu uma maior dedicação ao programa de Pós-Graduação.

Aos ***colegas e amigos do Mestrado***, pela cumplicidade e companheirismo.

Aos ***colegas e amigos do Doutorado***, pela amizade, companheirismo e pelo valioso auxílio durante este processo.

Aos professores do Ensino Fundamental da ***rede pública estadual de Rondonópolis/MT***, que gentilmente participaram desta pesquisa empírica. A todos esses ***professores***, meu carinho e respeito.

À minha amiga ***Luzia***, companheira de curso e de estudo, por sua amizade, incentivo, auxílio e socorro nos momentos de adversidade.

Ao amigo e secretário ***Francisco***, que colaborou e forneceu todo o apoio necessário.

Aos companheiros da ***Fundação Espírita "Lar de Nazaré"***, pelo apoio, incentivo e compreensão pela ausência nas minhas tarefas.

À minha ***família***, especialmente a meu ***marido*** e ao meu ***filho***, que não só durante todo este processo, mas em todos os momentos, apoiaram-me e compreenderam a minha ausência.

Enfim, a ***todas as pessoas*** que de alguma forma contribuíram e me ajudaram para a conquista e a realização deste trabalho.

A Autora

RESUMO

O tema central deste trabalho é o estruturalismo construtivista, em que destacamos a importância da estrutura matemática para a aquisição do conhecimento lógico-matemático. Começamos nosso estudo apresentando um breve resumo sobre a vida e obra de Piaget, a teoria do conhecimento expondo os argumentos teóricos do racionalismo (Leibniz), do empirismo (Locke), do interacionismo (Kant) e o construtivismo piagetiano. Os temas abordados mostram as diferentes formas de compreender a origem do conhecimento. Devido à sua importância para o nosso trabalho fizemos um estudo sobre o estruturalismo piagetiano e estruturalismo matemático. Pelo fato de o estruturalismo piagetiano apresentar um caráter dinâmico relacionado com a atividade, organização, transformação, coordenação de ação e construção buscamos um modelo que atendesse a esses requisitos. Neste sentido, optamos pelo estudo do jogo na visão piagetiana, pois se apresenta como um modelo adequado das estruturas algébricas ou da Matemática em geral, assim para representar esses modelos fizemos um estudo sobre semiótica em Peirce e Piaget, pois o jogo apresenta uma ligação direta com a representação. No nosso trabalho apresentamos dois estudos: no primeiro, um estudo exploratório com questionário semi-estruturado e, no segundo, aplicamos o jogo do *tabuleiro de xadrez* com atividades sobre os números negativos; as atividades foram desenvolvidas com dez professores de escola pública da rede estadual de ensino que atuam na 6ª. série do Ensino Fundamental. O estudo conclui que o jogo é uma boa ferramenta, pois apresenta mais claramente a estrutura dos números negativos e oferece diferentes formas de representação.

Palavras-Chave: Teoria do conhecimento. Construtivismo piagetiano. Estruturalismo. Jogos. Semiótica, números negativos. Educação Matemática.

ABSTRACT

The central theme of this work is the structuralism construtivist, in that detached the importance of the mathematical structure for the acquisition of the logical-mathematical knowledge. We began our study presenting an abbreviation summary on the life and work of Piaget, the theory of the knowledge exposing the theoretical arguments of the rationalism (Leibniz), of the empiricism (Locke), of the interacionismo (Kant) and the constructivism piagetian. The approached themes show the different forms of understanding the origin of the knowledge. Due to your importance for our work made a study about the structuralism piagetiano and mathematical structuralism. For the fact of the structuralism piagetiano to present a dynamic character related with the activity, organization, transformation, action coordination and construction looked for a model to assist her/it those requirements. In this sense, we opted for the study of the game in the vision piagetian, because he comes as an appropriate model of the algebraic structures or of the Mathematics in general. Thus, for understanding the shape to represent those models we made a study on semiotics in Peirce and Piaget, because the game presents a direct connection with the representation. In our work we presented two studies: the first was an exploratory study with semi-structured questionnaire and, in the second, we applied the game of the chess board with activities on the negative numbers; the activities were developed with ten teachers of public school of the state net of teaching that act in the 6a. series of the Fundamental Teaching. The study concludes that the game is a suitable tool, as it presents the structure of the negative numbers as well as it offers and different representation forms more clearly.

Keywords: Theory of the knowledge. Constructivism piagetian. Structuralism. Games. Semiotic. Negative numbers. Mathematical education.

Sumário

APRESENTAÇÃO

PROBLEMÁTICA E OBJETIVO

Este trabalho tem como objetivo desenvolver um estudo referente à construção do conhecimento e das estruturas necessárias, para auxiliar a orientação do aprendizado de números negativos. Neste sentido, abordaremos os números inteiros, destacando a construção de diferentes processos algorítmicos, a reflexão sobre o zero, a compreensão da adição envolvendo números positivos e negativos, a compreensão das regras de sinais e das propriedades de números inteiros positivos e negativos. A construção do conceito de números negativos pode ser uma ampliação dos naturais, porém, para seu aprendizado, não basta entender as propriedades, mas aplicá-las a outro contexto com novos significados.

Desse modo, pretendemos investigar o desenvolvimento dos números e seu significado, ou seja, a contradição representada pela subtração a-b, onde $b > a$ no conjunto dos números naturais, cuja solução é encontrada pela integração em um sistema mais abrangente (negativos/positivos).

A busca da compreensão desse fato terá como suporte a epistemologia genética piagetiana que, durante toda a sua vida, teve um grande inimigo: o empirismo, combatido por Piaget sistematicamente e que ainda hoje tem presença marcante nas escolas.

A origem da pesquisa que pretendemos desenvolver tem como base a nossa experiência como professora de Metodologia da Matemática das séries iniciais do Ensino Fundamental. Assim, a nossa preocupação como docente sempre foi trabalhar com o construtivismo piagetiano; por isso as atividades têm sido desenvolvidas com o uso de material concreto para ajudar na compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos. Os professores e alunos do 1º. ciclo do Ensino Fundamental acharam excelente trabalhar com esses recursos, pois grande parte dos alunos conseguiu um bom aproveitamento e parecia que estava aprendendo muito bem.

Entretanto, um fato chamou a nossa atenção e passou a ser foco de observação e questionamento: a partir do 2º. ciclo do Ensino Fundamental já aparecem as primeiras dificuldades, no momento em que as crianças passam a operar com a multiplicação e a divisão. No entanto, os professores continuaram a trabalhar com as atividades de forma concreta, porém, para sua surpresa, quando retiravam os materiais, muitas vezes, as crianças não conseguiam chegar a um resultado satisfatório na resolução dos problemas propostos.

Nesse momento, iniciavam-se as dificuldades e os questionamentos de nossa parte: por que essa dificuldade, se os professores trabalharam com o uso dos procedimentos construtivistas? Por que as crianças em sua maioria não conseguiam 'aprender', se a intervenção estava sendo executada com atividades e recursos variados, na busca de novas alternativas metodológicas?

Para responder a estas indagações, inicialmente estudaremos a epistemologia construtiva de Jean Piaget, que destacou dois processos: o primeiro, referente à abstração empírica, cujas ações estão ligadas aos objetos (conhecimento físico) relacionados às suas características físicas. Nesse sentido, a atividade a ser executada vai ocorrer com o emprego de materiais concretos; por exemplo, o professor pode pedir para classificar, seriar diferentes objetos (fig. 1).

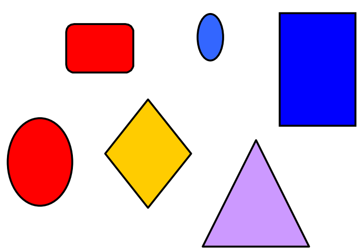


Figura 1

Com os objetos da figura 1, podemos executar diferentes ações, tais como: classificar as figuras pela forma, cor, tamanho, colocar em ordem e quantificar, o que podemos considerar como ações do conhecimento físico. Quando a criança coloca esses elementos em certa ordem e percebe que pode contar da direita para a esquerda e da esquerda para a direita, e consegue obter o mesmo resultado, significa que implicitamente utilizou a propriedade comutativa. A ordem encontrada pela criança não está nos objetos, porém ela agiu sobre os objetos, o que lhe possibilitou chegar à ‘descoberta’ de uma novidade: a propriedade comutativa.

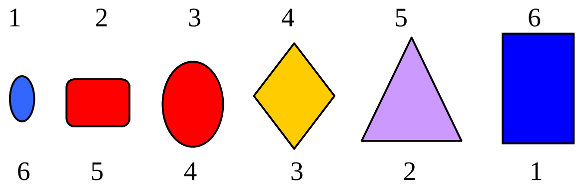


Figura 2

A propriedade comutativa refere-se a uma abstração de segundo nível (abstração de abstração), e podemos atingir esse nível por meio da atividade, porém para chegar a esta conclusão a criança precisou observar a estrutura dessa ordenação.

Assim, analisando a estrutura da ordenação efetuada, de um lado, percebeu que os objetos estão colocados na ordem crescente e, de outro, observando pelo lado oposto, conseguiu deduzir que os mesmos objetos agora estão colocados na ordem decrescente. Notou ainda que os objetos que aí se encontram, são os mesmos, modificando-se apenas a sua organização. Ou seja, contando-se da esquerda para direita ou da direita para a esquerda, obtêm-se os mesmos resultados.

O exemplo acima evidencia que, no processo de construção do conhecimento, não é suficiente entender e aplicar os conceitos de abstração empírica e abstração reflexiva, pois é preciso unir o estruturalismo ao construtivismo, que pode ajudar em sua organização. Neste sentido, o próprio Piaget utilizou a noção de estrutura para designar as formas de organização do raciocínio. Assim sendo, além da construção da novidade, no caso a propriedade comutativa, é preciso vincular o construtivismo com o estruturalismo, particularmente na Matemática, pois Piaget não busca o conhecimento de objetos, porém das estruturas; por isso destacou tanto a importância do estruturalismo.

O jogo pode ser uma atividade que ajuda a evidenciar as estruturas no campo da Matemática. Assim, ao utilizarmos jogos, estruturamos e definimos problemas, imaginamos como resolvê-los e, para isso, recorremos ou inventamos abordagens originais.

O jogo permite criar situações para o pensamento em geral e, sobretudo, para a construção do próprio conhecimento matemático. Por ser um campo imaginário, temos a possibilidade de elaborar diferentes estratégias que favorecem o desenvolvimento do raciocínio, prognósticos, diferentes combinações, propriedades, regras de sinais etc., que facilitam a criatividade, inventando verdadeiros modelos para ajudar a resolver problemas, porque se trata de um campo imaginário. Nesse sentido, o jogo constitui-se em um campo de experimentação, verificação e de confirmação e, para a Matemática, é muito fértil.

QUESTÃO DE PESQUISA

A pesquisa tem como foco o estudo dos pressupostos teóricos, como forma de auxiliar na compreensão da construção do conhecimento e das possibilidades oferecidas pelo jogo, a fim de ajudar na construção das estruturas matemáticas necessárias para a compreensão dos números negativos. Dentro dessa perspectiva, nossa questão é:

- **Como poderemos desenvolver as estruturas dos números inteiros, sejam eles positivos, sejam negativos, se o empirismo continua sendo um dos maiores obstáculos em seu processo ensino-aprendizagem?**

Com o objetivo de fornecer subsídios necessários para responder à nossa questão de pesquisa, estabelecemos algumas questões específicas:

Por que o empirismo pode ser considerado obstáculo para a aprendizagem dos números inteiros negativos?

Por que o estruturalismo foi tão importante para Piaget?

Por que os jogos podem ajudar na construção da estrutura dos números inteiros?

Para responder à questão de pesquisa, inicialmente, fizemos estudos teóricos sobre a teoria do conhecimento, construtivismo piagetiano, estruturalismo, o jogo na visão piagetiana e a teoria da representação em Piaget e Peirce. Em seguida apresentamos duas pesquisas empíricas de caráter exploratório que efetuamos com professores de 6as. séries do Ensino Fundamental. A primeira, para levantar dados sobre a formação e a metodologia do ensino e, a segunda, por meio do jogo, averiguamos que tipo de estrutura matemática, em relação aos números negativos, o professor consegue perceber no ato de jogar.

Para tanto, no primeiro estudo realizamos entrevistas com dez professores da rede pública estadual e, no segundo estudo, utilizamos o jogo do ‘Tabuleiro de Xadrez’, como alternativa de ensino para os números negativos.

DESCRIÇÃO DA TESE

Na introdução, apresentamos o que nos motivou a desenvolver este estudo, assim como expomos a questão de pesquisa.

No capítulo I discorremos sobre alguns dados biográficos de Piaget referentes à sua formação biológica, psicológica, filosófica, lógica, psicanalítica e epistemológica, enfim, uma formação de caráter interdisciplinar. Nos estudos que desenvolveu, sua preocupação central foi saber: *como é possível chegar a algo novo, como se formam nossos conhecimentos? Como se desenvolvem*? Comentamos ainda a sua produção dos anos de 1920 e as produções realizadas nos anos de 1930 a 1940, destacando as obras de nosso interesse, tais como: *O nascimento da inteligência na criança* e a *Formação do símbolo na criança*, de particular interesse para este trabalho. Das obras escritas nas décadas de 50, 60, 70 e 80 do século XX, destacamos a *Epistemologia genética* e o *Estruturalismo*, obras importantes para este estudo. Piaget fundou o Centro de Epistemologia Genética, no qual congregou diferentes cientistas, dando continuidade à sua pesquisa de caráter interdisciplinar.

Nos três capítulos subseqüentes fazemos uma abordagem teórica.

No capítulo II, constam as teorias dos conhecimentos referentes ao racionalismo, empirismo e interacionismo.

Inicialmente, destacam-se os argumentos teóricos do racionalismo, em que o conhecimento tem sua origem na razão, é inato e nega a experiência sensível.

O racionalismo tem como característica primordial o seu ideal de ciência dedutiva e, como resultado, apresenta o modelo matemático que, de um lado, manifesta a convicção de que o domínio da razão e do pensamento é necessário. Por exemplo, se os 'três ângulos de um triângulo valem necessariamente dois retos', dessa relação pode-se deduzir a natureza do triângulo. De outro lado, a crença de que o domínio do pensamento corresponde ao âmbito da realidade.

Um dado curioso é que a maioria dos representantes do racionalismo procede da Matemática, em função da necessidade lógica e validade universal. Para o nosso estudo, destacamos Leibniz (1646-1716), pois ele estudou a obra de Locke, fazendo uma crítica em relação à sua teoria.

Leibniz defendeu que os conceitos existem em nós em forma de germens potenciais, e por isso não é necessário recorrer à experiência. Não aceita a idéia de que o conhecimento em sua origem proceda só da percepção, porém aceita que não pode ser totalmente evitada.

Destacamos como ponto fraco do racionalismo a ausência de uma perspectiva genética, pois nele tudo é pré-formado, a razão é necessária, por isso não sofre desmentidos nem exige confirmações e mantém estritas relações com as Ciências Naturais e Exatas, devido ao interesse do pensamento moderno pela experiência.

Contrapondo esta teoria, enfocamos o empirismo, que advoga que o conhecimento é tudo o que vem do mundo do objeto, do meio físico ou social que o sujeito recebe passivamente por meio das sensações ou experiências.

No empirismo, temos como destaque Locke (1632- 1704) que defendeu a teoria do conhecimento que deriva da prática. Compara a mente a uma 'tábula rasa', uma folha de papel em branco, e todos os dados da mente derivam da experiência. Destacou que todas as nossas idéias provêm de duas fontes: da sensação (impressão do mundo exterior) e da reflexão (operações).

O elo de ligação entre o empirismo e as ciências ocorre pelo método indutivo, e o grande equívoco dessa teoria foi considerar o dado externo como a única fonte de conhecimento.

As teorias racionalistas e empiristas apresentam idéias contraditórias e não conseguiram chegar a um consenso. Assim, para resolver este dilema, Kant (1724-1804) propôs a teoria da interação.

Na teoria da interação, Kant expôs que o conhecimento não é reprodução passiva de um objeto, porém construção ativa do objeto por parte do sujeito, retratando a síntese das duas correntes filosóficas da modernidade: racionalismo e empirismo.

Kant percebeu também a contradição existente na Matemática. De um lado, os geômetras puros que cultivavam o ideal da dedução *a priori* e, de outro, os observadores que tinham a indução como o seu único fio condutor. Assim, tentando resolver essa contradição, desenvolveu uma teoria do conhecimento matemático, o pilar da *Crítica da Razão Pura.*

O método de Kant é a *crítica,* isto é, a análise reflexiva. Na concepção de ciência, ele evidenciou a importância do conhecimento *a priori* (por exemplo 'dois mais dois é igual a quatro'); trata-se de um conhecimento que não pode ser adquirido diretamente da experiência. Destacou ainda os *juízos analíticos* referentes àquele em que o predicado está contido no sujeito; por exemplo, um triângulo é uma figura de três ângulos. Os *juízos sintéticos* referem-se àquele em que o atributo enriquece o sujeito; por exemplo, o lápis é verde, *a posteriori*, só sei que o lápis é verde porque vi.

Neste sentido, para este pensador a Matemática e as Ciências, em geral, são formadas por juízos sintéticos *a priori*, que são universais, os quais possibilitam ao predicado traduzir algo de novo. Destacou ainda que a Matemática ocupa-se de objetos e conhecimentos que podem ser representados pela intuição, pois a intuição pode ser dada de forma *a priori.*

No capítulo III enfocamos a teoria construtivista piagetina que subsidiou este estudo, destacando três pontos: o empirismo, a pré-formação e o construtivismo.

Piaget faz objeção à teoria empirista que tende a considerar como a única fonte de conhecimento humano a experiência adquirida em função do meio físico, mediada pelos sentidos, sem que uma atividade do sujeito fosse necessária à sua constituição.

Piaget concordou com o empirismo pelo fato de afirmar que o conhecimento vem da experiência, porém destacou a insuficiência da interpretação 'empírica' da experiência.

Na pré-formação, a razão é considerada como a fonte e origem dos conhecimentos que estão predeterminados no indivíduo. Piaget discordou desta posição, defendendo que o conhecimento é uma construção perpétua, por permuta entre o pensamento e o objeto.

A concepção construtivista contrapõe-se ao inatismo, que colocou como centro da produção do conhecimento o próprio sujeito, e ao empirismo, que contrariamente vê a realidade exterior ao sujeito como a fonte de todo o conhecimento. O inatismo e o empirismo, embora opostos entre si, apresentam em comum a passividade do sujeito, enquanto no interacionismo o sujeito é ativo. No construtivismo piagetiano o conhecimento se constrói na interação do sujeito com o objeto. As estruturas não estão pré-formadas dentro do sujeito e nem estão dadas na realidade exterior, elas são construídas.

As estruturas são construídas por interação entre as atividades do indivíduo e as reações dos objetos. Assim, na construção das estruturas cognitivas, a abstração desempenha um papel significativo. Na abstração empírica as informações são retiradas dos próprios objetos (cor, forma, tamanho etc.) e levam a formação de conceitos empíricos, enquanto a abstração reflexiva conduz à formação de conceitos, partindo de propriedades de ações ou operações tais como os conceitos lógicos e matemáticos em sua grande maioria.

Pela abstração reflexiva, algumas estruturas de comportamento são projetadas a um nível superior (reflexo), e este, em conjunto com o que vai encontrar no patamar superior, vai dar origem a novas combinações (reflexão), um ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi assim transferido do inferior, e estas são projetadas em novo patamar indefinidamente.

A abstração reflexiva constitui uma ação de segundo grau ou de segunda potência e apóia-se sobre as atividades cognitivas do sujeito, tais como: coordenações de ações, operações, estruturas etc. Assim sendo, o que o sujeito retira por abstração representa apenas aquilo que seus esquemas cognitivos (ações mentais susceptíveis de serem exercidas sobre os objetos) de assimilação permitem retirar naquele momento. E os esquemas disponíveis formam as sínteses das experiências anteriores, ou seja, das abstrações empíricas e reflexivas passadas.

Para Piaget a assimilação significa a integração de elementos de fora nas estruturas em desenvolvimento, por isso a assimilação não se reduz "a uma simples identificação, mas é construção de estruturas ao mesmo tempo incorporação de coisas as essas estruturas"[1].

Assim, a assimilação enfatiza a atividade do sujeito no processo de conhecimento, pois é a atividade assimiladora que vai conferir uma significação aos objetos.

Neste sentido, os objetos do conhecimento apresentam propriedades e particularidades que nem sempre são assimiladas (incorporadas) pelos esquemas já estruturados no sujeito, por ser muito geral.

Piaget chamou de acomodação à ampliação ou modificação de um esquema de assimilação, que só é possível graças à atividade do sujeito. O conteúdo das assimilações e acomodações variará ao longo do processo de desenvolvimento cognitivo, e a articulação entre assimilação e acomodação vai completar o processo a que Piaget chamou de adaptação. A cada adaptação realizada um novo esquema assimilador se torna estruturado e disponível, permitindo ao sujeito realizar novas acomodações e assim sucessivamente.

O que promove este movimento é o processo de equilibração, conceito central na teoria construtivista. Diante de um desafio, de um estímulo, de uma lacuna no conhecimento, o sujeito se 'desequilibra' intelectualmente, fica curioso, instigado, motivado e, por meio de assimilações e acomodações, procura restabelecer o equilíbrio que é sempre dinâmico, pois é alcançado por meio de ações físicas e mentais. Assim, o pensamento vai se tornando cada vez mais complexo e abrangente, interagindo com objetos de conhecimento cada vez mais abstratos e diferenciados.

No capítulo IV, apresentamos um estudo sobre o estruturalismo, destacando o aspecto matemático e algumas idéias sobre o estruturalismo.

[1] PIAGET, 1975. O nascimento da inteligência na criança, p. 387.

O estruturalismo é um campo de objetos, constitui-se numa estrutura de relações e faz referência a outros objetos e não às suas características particulares. No sentido piagetiano a noção de estrutura pode ser utilizada para designar formas de organização de raciocínio. As estruturas são as leis que formam os axiomas.

O estruturalismo matemático normalmente está associado ao platonismo, porque eles não construíram os objetos, sua objetividade pode ser explicada como uma construção que ocorre de forma rigorosa.

O uso da axiomática não se limita ao campo da demonstração, permite também construir modelos simplificados do real, fornecendo a este estudo os instrumentos de dissecação.

O estruturalismo matemático constitui-se numa axiomática que permite a passagem de uma representação para outra, e por isso o objeto e o conceito realizam-se como objeto do pensamento matemático. Para o matemático os objetos existem, por isso buscam-se as características e as relações. O estruturalismo matemático apresenta-se sob forma estática e mostra-se intimamente ligado ao platonismo, pela autonomia da Matemática quanto à experiência física.

Ao contrário, o estruturalismo piagetiano é construtivo, porque as estruturas devem ser construídas por meio da atividade do sujeito. Constitui-se num processo de formação em que ocorre a passagem de um menor conhecimento a um superior. Apresenta um caráter dinâmico que se relaciona com a atividade, organização, transformação, coordenação de ações e a construção.

Para Piaget o estruturalismo é um construtivismo, uma vez que as estruturas não são inatas, tendo sua origem nas atividades. Portanto às características essenciais de uma estrutura podem ser consideradas as atividades e as transformações, como, por exemplo, os números constituem um campo de transformação (números naturais, números fracionários, números inteiros - positivos e negativos -, números reais etc.). As transformações, nestes casos, referem-se ao aspecto operativo, uma vez que as estruturas operativas são móveis, reversíveis e permitem transformações entre duas situações.

No capítulo V, discorremos questões relacionadas ao jogo na visão de Piaget, uma vez que o jogo mantém uma relação estreita com a construção do conhecimento e possui influência como elemento motivador no processo de ensino e aprendizagem.

Piaget estruturou os jogos em três categorias: jogo de exercício, jogo simbólico e jogo de regras. A atividade lúdica, inicialmente, surge a partir de uma série de exercícios motores. No jogo de exercício a criança repete uma determinada situação por puro prazer, tais como: agitar braços, sacudir objetos, emitir sons, caminhar, pular, correr etc. Embora estes jogos comecem na fase maternal e se estendam até por volta dos 2 anos, podem se manter durante toda a infância até a fase adulta.

Os jogos simbólicos surgem em torno dos 2-3 e 5-6 anos. Com esses jogos, a criança passa a reproduzir as relações predominantes do seu meio ambiente, assimila dessa maneira essa realidade e a sua forma de se auto-expressar. Os jogos simbólicos satisfazem a necessidade da criança, não somente de relembrar mentalmente o acontecido, porém de executar a representação (jogos de ficção ou de imaginação). Por exemplo, a criança trata “X”como se fosse “Y”e vice-versa. Faz parte deste tipo de jogo.

O jogo de regras começa a se manifestar por volta dos 5 anos, desenvolve-se principalmente na fase dos 7 aos 12 anos. Este tipo de jogo continua durante toda a vida do indivíduo (esportes, trabalho, jogos de xadrez, baralho etc.).

Os jogos de regras são transmitidos socialmente de criança para criança e, por conseqüência, vão aumentando de importância de acordo com o progresso de seu desenvolvimento social.

O que caracteriza o jogo de regras é a existência de um conjunto de leis imposto pelo grupo, sendo seu descumprimento normalmente penalizado, e há uma forte competição entre os indivíduos.

O jogo não deve ser concebido como uma atividade sem propósito, uma vez que possibilita uma ampla estrutura para uma mudança da necessidade e de consciência. O jogo inicialmente apresenta um simples papel funcional, passando pela representação mental e pela convenção social.

Pelo fato de o jogo permitir a integração do conhecimento num nível representativo, tem despertado na esfera da educação matemática um interesse investigativo em relação à sua aplicabilidade como estratégia de ensino. Atualmente, muitos educadores matemáticos têm se voltado para a questão do jogo como possível elemento pedagógico.

O jogo sempre foi fonte de interesse e historicamente foi abordado com diferentes percepções, e, a partir do final do Século XX, vários estudos sobre o jogo e aprendizagem matemática têm sido foco de interesse na educação matemática, o que exemplificamos com alguns pesquisadores ao longo do contexto histórico. Neste estudo, fazemos a descrição do 'Tabuleiro de Xadrez' que utilizamos como objeto desta pesquisa empírica.

No capítulo VI, fazemos uma abordagem em relação à representação, porque esta tem uma função importante no domínio da linguagem matemática. Neste sentido a representação para Piaget tem um significado amplo, já que se refere a um objeto simbólico construído por meio da ação do sujeito, tratando de uma transformação e não de uma imitação-cópia que nada acrescenta. Apresentamos a classificação de signo em Peirce e em Piaget e da representação no sentido piagetiano e matemático,

Peirce apresenta a divisão dos signos em Ícone, Índice e Símbolo. Para este estudioso, Ícone é algo que se dá à contemplação, por isso o seu objeto é sempre uma simples possibilidade, conjectura ou hipótese. Daí o seu alto poder de sugestão. Haja vista o exemplo: $a_1x = b_1 = n_{1;}$ na matemática a possibilidade é muito importante, assim como no jogo, porque ambos trabalham com possibilidades.

Como seu próprio nome diz, o Índice é um signo que como tal funciona, porque indica uma outra coisa com a qual apresenta uma conexão factual. Por exemplo, a flor 'onze horas', ao abrir, indica que são onze horas ou pode indicar os vértices de um triângulo A,B,C. O símbolo representa um tipo geral. Seja exemplo: a palavra mesa se refere a todas as mesas e não a um tipo particular de mesa, refere-se a um objeto geral e não particular.

Piaget tratou a função semiótica utilizando a seguinte divisão: índices que representam significados não diferenciados de seus significantes, no sentido de que ele consiste em uma parte ou num aspecto e estão ainda muito ligados a ações e objetos.

Os símbolos são substitutos (representações) dos objetos e permitem criar uma realidade virtual que liberta a mente e o pensamento da realidade concreta.

Os signos são arbitrários convencionais tais como a linguagem e construídos socialmente.

No capítulo VII, apoiando-nos na apresentação da fundamentação teórica (teoria do conhecimento, construtivismo piagetiano, estruturalismo, representação e o jogo), destacamos alguns dados da pesquisa empírica que realizamos com professores de 6ªs. séries do Ensino Fundamental da rede Estadual de Ensino do município de Rondonópolis-MT.

A pesquisa foi efetuada em dois momentos: entrevistas com questionário semi-estruturado e outra de caráter intervencionista com a aplicação do jogo do ‘Tabuleiro de Xadrez’.

A escolha da escola e dos professores entrevistados foi aleatória, o único critério preestabelecido para a escolha do participante é ser professor atuante na 6ª. série do Ensino Fundamental. Com esta finalidade, aplicamos inicialmente um questionário contendo 35 questões que foi respondido individualmente por 10 professores. Posteriormente, fizemos o estudo intervencionista com a aplicação do jogo do tabuleiro de xadrez.

Neste capítulo, descrevemos a metodologia utilizada neste estudo. Iniciamos com uma breve discussão sobre a metodologia da pesquisa de caráter exploratório. Em seguida, apresentamos a descrição da pesquisa empírica, o desenvolvimento do trabalho de campo e a análise dos dados. Para facilitar a compreensão do experimento, dividimos esta seção em duas grandes partes:

1. Primeira, aplicação de um questionário a ser respondido individualmente.
2. Segunda, aplicação do jogo do ‘Tabuleiro de Xadrez’.

No capítulo VIII, fazemos as nossas considerações finais, respondendo à questão de pesquisa. Ainda, neste capítulo, propomos algumas sugestões para futuras pesquisas. Por fim, no capítulo IX, listamos em ordem alfabética as referências bibliográficas utilizadas na edificação do presente estudo.

BREVE ESTUDO SOBRE A VIDA E OBRA DE PIAGET

1.1 DADOS DE FORMAÇÃO

Os trabalhos de Piaget revolucionaram a epistemologia e a psicologia de sua época, pela visão peculiar de introduzir *um antes* e *um depois* na maneira de estudar e entender o cognitivo. Na atividade científica, Piaget destacou-se como psicólogo infantil, porém sua preocupação teve um caráter de interesse científico, mais precisamente pela capacidade do conhecimento humano e seu desenvolvimento.

No estudo da inteligência infantil, Piaget descobriu que a biologia vincula-se à filosofia das ciências naturais. Esse fato permitiu que ele, simultaneamente, desenvolvesse os seus trabalhos tanto na psicologia empírica como na teoria do conhecimento, disciplina fundamentalmente filosófica e não empírica. Com base nessa compreensão, apresentamos alguns dados biográficos do autor que relatam como as investigações iniciais lançaram-se nos estudos da Biologia com a Filosofia, para se chegar a uma epistemologia genética que foi a preocupação central de seu estudo.

JEAN PIAGET nasceu em 9 de agosto de 1896, na Suíça. Seu pai, Arthur, foi autor de diversos trabalhos científicos sobre escritos medievais. Professor de Literatura e Diretor do Arquivo Público foi um homem altamente conceituado em sua cidade. Aprendeu com o seu pai o valor do trabalho sistemático, mesmo em pequenos detalhes. Sua mãe, Rebeca Suzanne, recebeu educação luterana, muito inteligente, enérgica, bondosa e de temperamento neurótico, o que motivou Piaget a abandonar muito cedo os folguedos, dedicando-se ao trabalho sério, imitando o pai. Conforme o desejo da mãe, Piaget fora batizado e iniciado como aluno nos ensinamentos luteranos. Neste sentido, a diferença de perspectiva religiosa entre o pai e a mãe desde cedo gerou o conflito entre ciências e religião. Isso o motivou a interessar-se pela psicanálise e psicoterapia, sendo as duas importantes para o início da elaboração de uma teoria própria.

Também manteve interesse pela mecânica, depois por pássaros, mais tarde, por fósseis e conchas marinhas e, prematuramente, passou a escrever. Aos dez anos de idade, publicou um artigo sobre a observação de um pardal albino em um jornal de História Natural (1907). Após essa publicação escreveu para o diretor do Museu de História Natural, Paul Gödet (1836-1911), solicitando permissão para estudar suas coleções de pássaros, fósseis e conchas. Com a aceitação de seu pedido, passou a assessorá-lo como *famulus* nas atividades ligadas à coleção de moluscos. Durante quatro anos, duas vezes por semana, Piaget foi introduzido nos segredos da pesquisa sobre malacologia. Por ocasião da morte de Gödet (1911), publicou uma série de artigos sobre moluscos da Suíça e, em pouco tempo, tornou-se especialista de renome internacional.

Na idade entre dez e vinte anos sofre uma série de crises de ordem afetiva, intelectual (assinaladas por intensa problemática religiosa) e de saúde. A crise religiosa encaminhou o jovem pesquisador a refletir sobre questões de ordem filosóficas, mudando o foco de sua carreira naturalista. Piaget, após a obtenção do título de doutor em Ciências Naturais (1918), por recomendação médica, fez uma interrupção do trabalho passando alguns meses na montanha.

Em 1916 já tinha publicado 35 artigos em revistas científicas e jornais especializados, estudos esses muito importantes para seu desenvolvimento científico. Nos escritos biológicos, dois fatores básicos desempenharam papel decisivo em sua obra sobre a Psicologia do Desenvolvimento.

1º - seus estudos verificaram como as lesmas lacustres adaptam-se ao meio físico na cor, na forma e no comportamento, cuja preocupação central foi a evolução, tendo como objetivo descobrir "se as mudanças na organização e no comportamento biológico podem ser transmitidos à descendência"[2].

[2] KESSELRING, Jean Piaget. 1993, p. 19.

2º - a tarefa de Piaget ligada à Biologia, nas investigações sobre lesmas lacustres, limitava-se aos exames das formas de conchas, que despertaram seu interesse pela questão filosófica da existência das classes biológicas. Devido à grande variedade de formas semelhantes, foi difícil separar a distinção das espécies puras com caracteres hereditários e variações, pois suas propriedades podem ser alteradas em função do meio. Piaget tendeu a admitir a ocorrência de uma transição entre os caracteres hereditários e flutuantes.

Entre 1912/1914, entrou em contato com o polonês Dr. W. Roszkowski que estava mais informado a respeito da pesquisa da teoria evolucionista. Além do mais, conhecia também as leis de Mendel[3] que explicava a hereditariedade por meio da recombinação de unidades genéticas, contradizendo a idéia lamarckiana. Para Lamarck[4], a transformação da espécie realiza-se por meio de alteração orgânica fenotipicamente[5] adquirida e transmitida por herança ao descendente. Lamarck defendia que a forma estrutural e funcional do ser vivo era organizada pela adaptação ativa à diversa condição da vida (por exemplo, a membrana interdigital dos palmídeos formada pela necessidade de nadar). Esse caráter pouco a pouco adquirido seria fixado por hereditariedade, que era a forma conhecida por Piaget.

A discussão mantida com Roszkowski influenciou muito na resolução de Piaget, para ocupar-se das questões relativas à genética. A explicação teórica em relação à mudança da espécie, baseada na hipótese de que ela acontece realmente, na natureza, por meio da estabilidade relativamente sólida da espécie biológica, adquiriu acentuada relevância.

Assim, no campo da Biologia, este questionamento seria alvo de preocupação do futuro psicólogo do desenvolvimento: "de que modo se desenvolvem, não obstante a sua relativa estabilidade, as estruturas do pensamento e do conhecimento humano?"[6]

---

[3] Mendel (1822-1884). Padre e botânico austríaco, formulou a *Lei de Mendel*, realizou experiências sobre hibridacão das plantas e hereditariedade entre vegetais.

[4] Lamarck (1744-1829). Naturalista francês, considerado autor de duas teorias: *geração espontânea* e *transformismo.*

[5] Fenotipicamente refere-se à característica de um indivíduo, determinada pelo seu genótipo e pelas condições ambientais.

[6] KESSELRING. Jean Piaget. 1993, p. 21.

No verão de 1912, foi convidado por seu padrinho, o escritor francês Samuel Cornut, para passar as férias junto ao lago de Annecy, pois ele estava espantado com essa especialização exclusiva. O objetivo do convite foi colocá-lo em contato com estudos de diferentes perspectivas do desenvolvimento das espécies biológicas. Cornut tinha a pretensão de 'curar' o jovem especialista em moluscos de sua unilateralidade, descortinando novos horizontes de pensamento. Com este propósito, colocou-o em contato com uma das principais obras de Henri Bergson[7], intitulada *A Evolução Criadora* (1907). Nesta obra, em seu primeiro capítulo, o autor discutia as diferentes explicações das mudanças das espécies. Em sua explanação, fez uma abordagem sobre o *élan vital,* idéia que impressionou muito Piaget. A leitura de Bergson teve o impacto de uma revelação, sendo dominado pela certeza de que Deus era a vida, sob a forma de um impulso vital, o que permitiu ver na Biologia a explicação de todas as coisas. No campo intelectual, auxiliou-o a encontrar respostas aos problemas deparados no decorrer da sua formação; o problema epistemológico (conhecimento) repentinamente lhe apareceu sob uma nova perspectiva.

Neste sentido, a leitura de Bergson fez com que Piaget buscasse na Biologia o campo em que religião e ciências se encontrassem. 'A unidade interior fora, pois, encontrada', em direção a um imanentismo que satisfaz de uma forma cada vez mais racional. "A influência de Bergson poderia ser também atribuída à concepção piagetiana de ser a própria vida um processo criativo, bem como o seu crescente interesse pela gênese do novo"[8].

À medida que o problema do conhecimento (chamado de problema espistemológico) surge sob uma perspectiva inteiramente nova, Piaget consagra a sua vida toda à sua explicação biológica do conhecimento.

A evolução origina-se de uma sucessão de mutações nas quais as causas não se acham no interior dos seres vivos, e o desenvolvimento das espécies não é simplesmente casual. Na doutrina de August Weismann[9] sobre a impossibilidade de uma transmissão hereditária de caracteres adquiridos individualmente (fenotípicas), o plasma somático

[7] Bergson (1859-1941). Filósofo francês, concebeu a intuição como o único meio de conhecimento da duração e da vida.
[8] KESSELRING. Jean Piaget. 1993, p. 22.
[9] Weismann (1814-1914). Biólogo alemão estabeleceu a independência precoce da linhagem celular germinativa do embrião.

(corpo) não pode influenciar o plasma genético. Mesmo não sendo possível a comprovação empírica direta, a doutrina de Weismann, por várias décadas, foi o argumento principal do neodarwinismo contra o lamarckismo. "O psicólogo do desenvolvimento volta repetidas vezes às questões biológicas com ela relacionada pertinente à teoria do conhecimento: A questão é se e como a experiência se reflete sobre o desenvolvimento da matemática e da lógica"[10].

Piaget também se interessou pela leitura de Bergson a respeito das questões ligadas ao desenvolvimento das diferentes formas do conhecimento e pensamento científico. Daí seu interesse não só pela Biologia, mas também pela Filosofia, que passa a figurar como significativa, vindo a ser destacada, com ênfase, área de seu interesse.

Além da leitura e influência de Bergson no campo da Filosofia, quem o estimulou foi o seu professor e lógico Arnold Reymond (l874 - l958), que desempenhou papel fundamental na formação filosófica de Piaget. Participou de um grupo de estudo que Reymond costumava discutir em particular e que permitiu ao jovem pesquisador refletir melhor, fazendo-o superar a dicotomia bergnosiana do vital e do lógico-matemático. Essa reflexão leva-o à descoberta de que a lógica da vida se inseria facilmente na do grande Aristóteles[11], cuja noção de *forma* era precisamente concebida como regendo o pensamento que correspondia exatamente às estruturas do organismo. Desta forma, estava pronto para seguir Reymond no estudo da Lógica e da Filosofia Matemática. Assim, passou a compreender as Matemáticas por meio dessa filosofia, bem como pela leitura em relação à teoria dos conjuntos de La Vallée-Poussin.

Reymond era um filósofo por vocação e, pelo grande esforço despendido em filosofia matemática, tornou-se também uma autoridade em matéria epistemológica. Piaget foi influenciado e encorajado por Reymond para prosseguiu uma carreira essencialmente filosófica, especializando-se em filosofia biológica. Avança nos estudos sobre a epistemologia, voltados à teoria do conhecimento, porém sob o ângulo biológico, por isso necessitando de estudos na área de Psicologia.

---

[10] KESSELRING, Jean Piaget. 1993, p. 22.

[11] Aristóteles (384-322 bAC). Filósofo grego fundador da lógica formal em *Organon,* é autor de grande número de tratados de lógica, política, história natural e física.

Na visão de Piaget, duas idéias centrais são delineadas: a primeira é de que todo o organismo possui uma estrutura permanente que pode ser modificada sob a influência do meio, porém, não é destruída como estrutura de conjunto, pois todo conhecimento é sempre *assimilação.*

Na segunda, os fatores normativos do pensamento correspondem biologicamente a uma necessidade de equilíbrio por auto-regulação; desta forma, a lógica no sujeito corresponderia a um processo de equilibração[12]. Porém, para um estudo sério sobre a epistemologia, foi preciso escolher os estudos entre Filosofia e Psicologia, porque na epistemologia genética explica-se a ordem em que diferentes capacidades cognitivas são construídas. Manteve interesse especial pela Filosofia, havia mergulhado nas leituras de Bergson, Comte[13], Spencer[14], Kant[15]. Essas leituras, aliadas à Biologia, deram-lhe a convicção de que se pode relacionar Biologia com problemas epistemológicos.

Desse modo, observa-se que a ligação entre biologia e filosofia no pensamento de Piaget caracterizou-se tanto pelas idéias evolucionistas de Darwin[16], quanto pelo construtivismo epistemológico de Kant, pois:

> [...] o conhecimento só se dá na relação entre o sujeito e o objeto e através dela. Entregue a si mesmo, o sujeito, por maiores que sejam as potencialidades hereditárias, nada é; da mesma forma, o objeto não tem como manifestar suas características. Na relação, ambos são ativos e têm partes indispensáveis[17].

Em 1915, após a conclusão do segundo grau, Piaget estudou Biologia e prosseguiu em sua formação interdisciplinar, tendo como destaque os estudos filosóficos. Participou como membro ativo da Associação Cristã da Suíça e, por recomendação médica em 1916, retirou-se para uma estação de tratamento em Leysin, lá escreveu um longo texto denominado *Recherche,* publicado como livro em 1918. Parte da obra é de caráter autobiográfico e parte de ensaio, na qual descreve suas atividades ligadas à leitura

---

[12] Equilibração – As perturbações cognitivas provocam um desequilíbrio que engendra regulações. As regulações visam compensar as perturbações, mas fazendo isto geram novas construções. A busca de um equilíbrio intelectual cada vez melhor.

[13] Comte (1798-1857). Filósofo francês é considerado por alguns como o pai da Sociologia e fundador do positivismo.

[14] Spencer (1820-19030). Filósofo inglês, fundador da filosofia evolucionista.

[15] Kant (1724-1804). Filósofo alemão, fundador do *criticismo* e criador da *teoria da interação*.

[16] Darwin (1809-1882). Naturalista e biólogo inglês, seu trabalho versa sobre a origem das espécies por meio da seleção natural.

[17] MATUI. Construtivismo. 1995, p. 42.

filosófica. Estes escritos também já falavam das questões ligadas ao *equilíbrio – desequilíbrio,* idéias básicas para seus estudos posteriores sobre a psicologia do desenvolvimento.

Piaget, em 1918, entregou como tese de doutorado um trabalho sobre os moluscos do Cantão Suíço. Também tinha como projeto um segundo trabalho de doutorado sobre questões filosóficas ligadas à Biologia, o qual foi planejado por ele com seu professor Reymond; no entanto jamais conseguiu concretizar tal projeto.

Nesse mesmo ano, viajou para Zurique, para realizar seus estudos de Psicologia Experimental com F.G. Lipps, entrou em contato com a psicanálise por intermédio de E. Bleuler e C.G. Jung[18], Característica de um indivíduo, determinada pelo seu genótipo e pelas condições ambientais. Entusiasmou-se pelos estudos psicanalíticos e também assistiu às conferências de Jung.

Para dar continuidade aos estudos epistemológicos, Piaget realizou estudos em diversos laboratórios e centros da Europa, destacando-se sua permanência em Zurique, onde manteve contato com o método clínico, que consiste em conversar livremente com a criança sobre um determinado tema dirigido.

Em 1919, deixa Zurique com o objetivo de libertar-se de sua antiga paixão pela filosofia e da tendência à introspecção: “Sentia necessidade de voltar a tratar dos problemas concretos, a fim de impedir que enveredasse por graves desvios de rumo”[19].

No outono de 1919 voltou a Paris, onde freqüentou um curso de psicologia com P. Janet, de psicopatologia com G. Dumas, H. Pieron e H. Delacroix. Na área da Lógica e Filosofia das Ciências, foi discípulo de A.Lalandee de L. Brunschvicg[20]. Na Biblioteca Nacional, Piaget fez leituras da *Álgebra da lógica,* de Couturat, da moderna lógica matemática (Peano, Frege e Russell). Trabalhou na padronização do teste de Burt às crianças parisienses no laboratório de Alfred Binet[21].

---

[18] Jung (1875-1961). Psiquiatra e psicólogo suíço, um dos fundadores da psicanálise.

[19] PIAGET, citado por KESSELRING. Jean Piaget. 1993, p. 27.

[20] Brunschvicg (1869-1944). Filósofo francês, dedicou-se à filosofia das ciências.

[21] Binet (1857-1911. Psicólogo francês, estudou psicologia fisiológica e psicologia experimental. Seus trabalhos são a origem do método de testes mentais (escala Binet-Simon).

Piaget ficou impressionado com os processos pelos quais as crianças conseguiam chegar às respostas, pois o objetivo era descobrir algo a respeito do processo de raciocínio, a expressão de um pensar independente, comum a todas as crianças. Surgem seus primeiros escritos sobre a Psicologia do Desenvolvimento.

Ficou surpreso ao perceber que a simples tarefa de raciocinar, envolvendo a inclusão de uma parte no todo ou a coordenação de relações ou a *multiplicação* de classes (encontrar a parte comum a todos) para crianças normais de nove e dez anos de idade, apresentava dificuldades que o adulto nem suspeitava. Por exemplo, o não-entendimento de que *um ramalhete de flores não é amarelo*, quando só em parte é composto de *flores amarelas*. As crianças também não conseguiam perceber a diferença entre as proposições *todas as flores são amarelas* e *algumas das minhas flores são amarelas*.

O desenvolvimento do estudo das relações entre todo e parte por processos experimentais e a análise dos processos psicológicos que envolvem operações lógicas permitiram evidenciar a observação de Piaget de que a Lógica não é inata, porém desenvolvida, inclinando-se sobre as idéias de formação do equilíbrio direcionadas para a evolução das estruturas mentais. A oportunidade de estudar o problema da lógica vincula-se aos antigos interesses filosóficos. Assim, o objetivo de descobrir a embriologia da inteligência vai ao encontro do treino biológico de Piaget.

A Psicologia explica os fatos em termos de casualidade, e a Lógica descreve as formas de um equilíbrio ideal (psicologia do pensar).

Piaget permaneceu apenas um ano e meio em Paris, o que foi muito significativo para sua biografia intelectual. A princípio, teve a possibilidade de desenvolver estudos em diferentes domínios das ciências: Psicopatologia, Psicanálise, Lógica e Filosofia, e depois produziu sua atividade de pesquisa na Psicologia Infantil, citado por ele em sua autobiografia:

> Finalmente, era meu objetivo descobrir uma espécie de embriologia da inteligência, adequada à minha formação biológica. Desde o início de minhas reflexões teóricas, estava convencido de que o problema das relações entre o organismo e o meio ambiente também se apresenta no domínio cognitivo e ali aparece como problema das relações entre o sujeito operatório e pensante e os objetos de sua experiência. Eu tinha a oportunidade de examinar esse problema à luz das noções de psicogênese (= o desenvolvimento das faculdades psíquicas e intelectuais). Afinal descobrira meu campo de investigação [22].

Piaget interessa-se pela psicologia, porque:

> Na Psicologia ainda nos é dado descortinar um campo de trabalho tão desconhecido que a qualquer tempo e com rapidez se pode nele descobrir algo novo. De outra parte, a biologia se sobressai por estar um século à frente da psicologia, de sorte que se faz necessário maior trabalho para conquistar novos espaços no campo da biologia [23].

Assim, a descoberta do novo era um prazer intelectual, bem como era seu tema primordial: “Como é possível atingir o que há de novo? Isto poder ser meu questionamento central”[24].

A Psicologia do Desenvolvimento está diretamente relacionada com os domínios de interesse mais significativos de Piaget: a biologia e a teoria do conhecimento. Para caracterizar a epistemologia – o estudo do conhecimento, empregou as teses centrais: como se formam nossos conhecimentos? Como se desenvolvem? Estes problemas foram sempre tratados pela Filosofia, cuja abordagem foi realizada unicamente por meio da reflexão, por isso a epistemologia sempre foi e ainda é, em grande parte, objeto de especulação pura. Daí o mérito de Piaget, porque a situou no campo da experiência científica, seu estudo não é saber o que é o conhecimento, mas trata-se da questão múltipla: como aumentam os conhecimentos? Situando-o em dois níveis: interdisciplinar e genético.

Deste modo, a epistemologia genética busca em sua origem apreender a gênese do conhecimento dentro da visão de que não há conhecimento predeterminado nem mesmo nas estruturas do sujeito, visto que estas são resultantes de uma construção efetiva e contínua, nem *nos caracteres preexistentes do objeto*, já que estes são conhecidos pelos elementos fornecidos pelos sentidos.

---

[22] PIAGET, citado por KESSELRING. Jean Piaget. 1993, p. 29
[23] BRINGUIER. Conversando com J. Piaget. 1993, p. 15.
[24] Ibid., p. 33.

Nesse contexto, o interacionismo piagetiano admite que o conhecimento não pode ser o resultado só do objeto externo nem só do sujeito, porém da interação entre o sujeito e objeto. Assim, “no interacionismo, cada um dos pólos - sujeito e objeto - entra com sua parte: o sujeito com a ‘forma’ de pensamento e o objeto, com o ‘conteúdo’ da matéria. A síntese da ação dos dois é que produz, por construção, tanto a mente como o conhecimento”[25].

1.2 OBRAS PSICOGENÉTICAS DE JEAN PIAGET

1.2.1 Trabalhos realizados nos anos de 1920

Em termos de publicação de livros, sua produção é surpreendente, além de inúmeros artigos. Assim, para dar continuidade às suas pesquisas sobre o estudo do desenvolvimento do pensamento, elaborou um plano no qual estudaria por dois ou três anos o pensamento da criança e, posteriormente, retomaria às origens da vida mental. Primeiro precisava adquirir conhecimentos sobre as estruturas elementares da inteligência objetiva e indutiva, para depois se dedicar ao problema do pensamento geral e construir uma Epistemologia Psicológica e Biológica.

Para alcançar tal pretensão, foi preciso estudar empiricamente o desenvolvimento do pensamento por si mesmo. Desta forma, organizou suas pesquisas na Maison des Petits do Instituto J. J. Rousseau (em Genebra, destinado à formação de professores), iniciou a investigação pela linguagem e meio social, sem perder de vista sua meta: atingir o mecanismo psicológico da operação lógica e o raciocínio causal. Deste trabalho, resultou a publicação de obras sobre a Psicologia Infantil, contendo as observações, interpretações e conclusões dessas conversações: *Le language et la pensée chez l’enfant* (1923) (A linguagem e pensamento na criança); *Le jugement et le raisonnement chez l’enfant* (1924) (O julgamento moral na criança); *La représentation du monde chez l’enfant* (1927) (A representação do mundo na criança); *La causalité physique chez l’enfant* (1927) (A causalidade física na criança).

Os livros foram lidos e discutidos para surpresa do autor, que os considerava apenas como um trabalho preliminar que serviria mais como documentação para uma

[25] MATUI. Construtivismo. 1995, p. 148.

síntese posterior. Em função de seu sucesso, recebeu inúmeros convites (França, Bélgica, Holanda, Inglaterra, Estados Unidos, Escócia, Espanha, Polônia etc.) para apresentar suas idéias e discuti-las. No entanto, faz uma crítica a respeito de suas publicações, na qual ele explicitou que esses livros são pouco adolescentes e, por isso, não apresentavam ainda uma teoria do conjunto das operações, apesar de já ter previsto o papel da reversibilidade

Destacou os pontos falhos da pesquisa por se restringir à linguagem e ao pensamento expresso, acreditava que a interação verbal levaria ao entendimento da lógica da criança. Na compreensão da gênese das operações intelectuais, verifica que são importantes a experiência e a manipulação de objetos.

Nos anos de 1920, Piaget dedicou-se às pesquisas relacionadas com a linguagem e o pensamento, enfatizando o aspecto do pensamento socializado (egocentrismo e reversibilidade). Observou que o motor interno do desenvolvimento cognitivo é a *equilibração,* que possibilita a busca de um equilíbrio intelectual e não o amadurecimento do sistema nervoso. A manifestação do equilíbrio ocorre na tomada de consciência de contradições e em sua eliminação; porém só na década de 50 retomou a idéia de equilíbrio, a espinha dorsal de sua teoria.

Além dessas atividades, começou a lecionar Psicologia, História da Ciência e Sociologia em Neuchâtel (1925) e assumiu o Gabinete Internacional de Educação, dedicado a estudos pedagógicos.

1.2.2 Trabalhos realizados nos anos de 1930 a 1940

Para dar continuidade às investigações sobre a fase do lactente realizada nos anos de 1920, Piaget fez observações detalhadas de seus próprios filhos e, como resultado dessa investigação, publicou 3 livros: o primeiro livro, *La naissance de l’intelligence chez l’enfant* (1936) (O nascimento da inteligência na criança). Nesta obra, descreveu o desenvolvimento dos reflexos inatos, os primeiros comportamentos, hábitos aprendidos e juízos até l8 meses.

O segundo livro, *La construction du réel chez l’enfant* (1937) (A construção do real na Criança), tratou da questão do objeto no desenvolvimento intelectual da criança (consciência do objeto, experiência espaço-temporal e representação de causa e efeito).

No terceiro livro, *La formation du symbole chez lénfant* (1946) (A formação do símbolo na criança), escreveu como a representação e o pensamento interagem, obra de interesse particular ao nosso estudo, porque retrata o campo da formação da imaginação.

Estas investigações complementam as lacunas deixadas nas pesquisas realizadas nos anos de 1920. Após esses estudos fez uma revisão sobre as concepções anteriores das diferentes fases do desenvolvimento, compreendendo quatro pontos. Em primeiro lugar, retomou com mais intensidade a questão dos fundamentos biológicos do conhecimento. Em segundo lugar, constatou que muito antes de surgir a linguagem primária, o lactente e a criança em idade pré-escolar revelam modos de comportamentos que possibilitam identificar processos cognitivos precoces.

A descoberta da existência de certo paralelismo entre o desenvolvimento pré-verbal e as fases posteriores do desenvolvimento que sobre ela seriam construídos, fez Piaget supor que as "seqüências essenciais do desenvolvimento ocorrem ciclicamente em diferentes níveis"[26].

Em terceiro lugar, "o modo de pensar subjacente à manipulação de objetos concretos" com lactente pode se estender às crianças de qualquer idade. Aquelas de faixa etária de sete e oito anos de idade apresentam dificuldades para realizar determinadas tarefas lógicas, sobretudo as ligadas à classificação e seriação, porém conseguem realizar as atividades propostas com o apoio de material ilustrativo e manipulativo. As crianças fracassaram nestas tarefas, quando realizaram de forma puramente abstrata. Este aspecto constitui-se em uma das características do estágio pré-operatório, entre 2 e 7 anos de idade, período da atividade representativa e simbólica, em que não ocorre qualquer tipo de operação lógica e do pensamento lógico-formal.

A partir dos 11 e 12 anos, existe um nível organizacional de operações concretas essencialmente lógicas. Por exemplo, a criança de oito anos é capaz de concluir que A<C, se ela tiver visto três objetos sob a forma B>A e B<C, mas não consegue realizar essa mesma operação no plano abstrato, sem apoio do material ilustrativo manipulativo.

Desta forma, a existência de um plano intermediário permite à criança raciocinar de forma coerente, se o conteúdo no qual se baseia o raciocínio for exposto

[26] KESSELRING. Jean Piaget. 1993, p. 39.

concretamente. A interpretação dada por Piaget a essa passagem do plano das operações concretas para as operações formais assemelha-se ao período do lactente no plano das ações motoras (idade entre zero e um ano e meio) ao plano da aquisição da linguagem primária.

Em quarto lugar, a atenção de Piaget voltou-se para o questionamento: de que modo a ação e o pensamento se organizam em diferentes níveis. Os dados obtidos em suas observações de que as crianças pequenas preferem se orientar por meio de configurações fizeram com que se interessasse pela Psicologia Gestáltica, porque o objeto de pesquisa desta Psicologia é a *configuração* da *forma*.

Para o gestaltista, o todo é maior do que a soma das partes, e a composição dos elementos não depende da disposição de suas partes (sistemas operacionais lógico-matemáticos). Para Piaget, as *formas* são formas inferiores de equilíbrio, e as composições aditivas, formas superiores de equilibração (caracterizam a organização do pensamento lógico).

Nesse período, as atividades e responsabilidades assumidas pelo pesquisador tornam-se mais importantes. Em 1929, retornou à Universidade de Genebra como professor de História do Pensamento Científico e como Diretor Assistente do Instituto J. J. Rousseau. Quatro anos mais tarde, Diretor do Instituto Rousseau que, em 1933, foi incorporado à Universidade de Genebra, como Instituto de Psicologia e Ciências da Educação. Em 1936 lecionou Psicologia Experimental na Universidade de Lausanne e História do Pensamento Científico em Genebra até 1939.

De 1929 até 1967, foi dirigente do Gabinete Internacional de Educação em Genebra, organizou as conferências anuais e redigiu os relatórios finais. Amplia o número de governos participantes das conferências anuais (Alemanha, Polônia, Equador e o Cantão de Genebra), totalizando 45 países. O Gabinete Internacional de Educação é uma instituição interestatal, cuja finalidade é o aprimoramento dos métodos pedagógicos em geral.

Entre 1940 e 1943, presidiu a Sociedade Suíça de Psicologia, editando a *Revista Suíça de Psicologia.* Em 1940, assumiu a cátedra e foi Diretor do Laboratório de Psicologia, como sucessor de Claparède[27].

Vem um período rico no desenvolvimento de suas atividades científicas, ocorreu entre 1929 e 1939, uma vez que o curso de História do Pensamento Científico, ministrado na Faculdade de Ciências de Genebra, permitiu o avanço firme em direção de uma epistemologia baseada no desenvolvimento mental.

A partir de 1937, contou com a colaboração de Bärbel Inhelder e Alina Szeminska, quando pesquisas importantes foram realizadas sobre o problema dos números e das quantidades físicas.

Com B. Inhelder que havia escrito seu trabalho de conclusão de curso sobre o desenvolvimento do entendimento infantil da conservação quantitativa, Piaget propôs escrever um livro a respeito do mesmo tema. Após quatro anos publicou a monografia sobre *Le développment des quantités chez l'enfant:* conservation et atomisme (1941) (O Desenvolvimento das Noções de Quantidade Física na Criança), em que tratou das quantidades físicas, especialmente a da conservação de substância, do peso e volume dos objetos materiais.

Com Aline Szeminska, Piaget publicou *La genèse du nombre chez l'enfant* (1941) (A gênese do número na criança), no qual descreveu o estudo da quantidade e número e introduziu as noções de invariante sob uma transformação (invariante física ou invariante numérica) e suporte da correspondência termo a termo ou bijeção. Depois a noção de agrupamento[28], estruturas operatórias próximas dos *grupos matemáticos,* que ajudaram Piaget na análise psicológica. Finalmente, abordou as relações quantitativas entre as partes e o todo.

Efetuou pesquisas sobre a concepção da criança no que tange ao movimento, velocidade, aceleração e tempo e, em 1946, publicou os livros: *La formation du symbole chez l'enfant, Le développement de la notion de temps chez l'enfant* (O desenvolvimento

[27] Claparéde (1873-1940). Psicólogo que conduziu pesquisas exploratórias nos campos da psicologia infantil, psicologia educacional, formação de conceitos, solução de problemas e observações sobre o sono e os sonhos.

[28] Agrupamento se constitui nos grupos e redes que não atingiram o nível operatório, segundo o modelo conhecido pelos matemáticos.

da noção de tempo na criança), *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant* (A noção do movimento e da velocidade na criança).

No livro *A formação do símbolo na criança,* retomou os problemas do pensamento infantil do primeiro período, em que mostra como a criança passa de uma inteligência sensório-motora para a representativo-simbólica. Estudou também a gênese da representação (imitação e jogo) que constitui uma trilogia básica para a compreensão da psicologia genética. Nesta obra tratou da função simbólica, em geral, de que a linguagem é certamente uma manifestação maior, porém, apesar disso, particular.

Na obra *O desenvolvimento da noção de tempo na criança,* abordou as experiências que visam detectar a gênese do conceito de tempo (seriação dos acontecimentos um após outro e das relações de sucessão e de simultaneidade). Experiências relacionadas com o envelhecimento e finalmente experiências relacionadas com o sentimento do tempo.

Em 1947, publicou o livro *La psychologie de l'intelligence* (Psicologia da inteligência), que foi escrito com base em conferências realizadas no Collège de France, abordando aspectos das aquisições relacionadas tanto às operações como à teoria da inteligência.

Neste período, Piaget também realizou pesquisas ligadas à compreensão do espaço e da geometria pela criança e, como resultado, publicou dois volumes: *La représentation de l'espace chez l'enfant* (O desenvolvimento do pensamento espacial na criança), escrito em conjunto com B. Inhelder; e *La géometrie spontanée de l'enfant* (A geometria natural da criança), escrito em parceria com A. Szeminska e B. Inhelder, ambos de 1948. Também participaram da produção desses livros outros colaboradores, entre os quais Hans Aebli, que escreveu como tese de doutorado *Didática Psicológica,* a partir da qual iniciou uma série de trabalhos baseados em Piaget, publicados em alemão.

Após os quarenta anos de idade, iniciou a formulação das leis do pensamento que embasam a inteligência infantil, inspirado na obra de Nicolas Bourbaki, pseudônimo de uma equipe de matemáticos franceses, que em sua publicação explana sobre as estruturas básicas de diferentes disciplinas Matemáticas. Piaget transferiu o conceito matemático de *grupo* para o campo da Psicologia do pensamento e introduziu a noção de *agrupamento* para caracterizar logicamente as *operações concretas*.

Piaget constatou que a cooperação nas crianças pode ser revelada, ao mesmo tempo em que se verifica a capacidade das operações matemáticas, o que o levou a supor que entre operação e cooperação existe relação não só etimológica, e que a ligação existente entre as duas pode ser comandada pelo desenvolvimento de agrupamentos.

Em 1950, publicou em três volumes a obra *Introduction à L'épistemologie Génétique* (Introdução à epistemologia genética), em que sintetiza todas as investigações realizadas durante trinta anos. Iniciou seu trabalho sobre Psicologia do Desenvolvimento e comparou o desenvolvimento mental da criança com a história da ciência, desenvolvendo sua fundamentação apoiada nos escritos dos anos de 1929/1939, o que representou o fechamento dos trabalhos realizados no campo da Biologia, Sociologia e Teoria do Conhecimento.

Piaget foi nomeado presidente da Comissão Suíça da UNESCO[29], no ano de sua fundação (1945), e posteriormente integrou o Conselho Executivo.

1.2.3 0bras posteriores – entre 1950 e 1980

Em 1952, lecionou na Sorbonne de Paris, o que fez com que seus trabalhos desenvolvidos nos anos 50 do século XX fossem direcionados às relações entre desenvolvimento cognitivo e desenvolvimento afetivo, visto que na década de 40 deu um novo enfoque às relações entre operações lógicas e cooperação social.

Piaget, ao elaborar a comparação entre desenvolvimento intelectual e emocional, percebeu, nos sentimentos, emoções e disposições, a inteligência como a mola propulsora no comando da ação, porém nem todos os sentimentos são moldados por atos cognitivos. A vontade foi uma espécie de operação, uma "operação afetiva", porque possibilitou uma escolha racional.

Em 1955, fundou em Genebra um Centro de Epistemologia Genética (*Centre Internationale d'Épistemologie Génétique*), que conseguiu criar com a ajuda financeira da

---

[29] UNESCO - Organização das Nações Unidas para a educação, ciência e cultura.

Fundação Rockefeller estadunidense. O *Centre* era destinado a realizar pesquisa cooperativa interdisciplinar. Para desenvolver esse trabalho cooperativo, foram convidados especialistas de diversas áreas, tais como psicólogos, físicos, filósofos, matemáticos, especialista em cibernética, lingüistas, biólogos e embriologistas. Nos trabalhos do *Centre*, alguns estudiosos participavam ativamente das investigações empíricas, no decorrer do ano, outros apenas das reuniões anuais de conclusão dos trabalhos.

Desse modo, nas segundas-feiras pela manhã, apresentava em forma de seminário o resultado e os procedimentos adotados na pesquisa empírica. Em fins de junho, realizou-se um *simpósio* com cinco dias de duração. Até sua morte foram editados 36 volumes dos *Études* e mais dois posteriormente.

Contou com colaboradores como o filósofo belga Léo Apostel e o físico argentino Rolando Garcia, discípulos de Rudolf Carnap. O trabalho em conjunto que realizaram, possibilitou rever a posição original em relação ao empirismo lógico, quando ambos entram em contato com o grupo de pesquisa de Genebra: Apostel, nos anos de 1950, na área da lógica, e Garcia, na década de 70 na área de ciências naturais, passando a desenvolver trabalhos teórico-históricos. Alguns empiristas em contato com Piaget chegaram a mudar de convicção, pelo fato de que "Piaget contestou com meios empíricos o empirismo"[30].

Por meio da experiência, demonstrou que o conhecimento humano não se alicerça somente na percepção do sentido, nem na percepção e linguagem, porém, com igual intensidade, no fazer e agir concretos.

Citaremos alguns dos principais especialistas notáveis que se ligaram à pesquisa do "*Centre*": Dr. Berleyne e Brunner (Psicologia); Beth (Lógica); Gonseth (Matemática e Filosofia); Kuhn (História das Ciências); Naess (Filosofia e Ecologia); Papert (Matemática, Psicologia e Cibernética); Prigogine (Física); Haddington (Embriologia); e Weiss (Biologia). Participavam como membros do conselho consultivo do "*Centre*" o filósofo de Harvard Quine, que era membro do comitê do 'Centre' e o filósofo das Ciências Naturais Hempel, que integrava o conselho consultivo dos Études.

[30] KESSELRING. 1993, p. 50.

Os colaboradores de Piaget chamavam-no de *patron*, porque se relacionava de forma paternal com a maioria, distinguindo a todos, pesquisadores e colaboradores, com *igual consideração e igual benevolência.* Sem deixar de fazer elevadas exigências indistintamente, foi um trabalhador incansável, escolhia muito bem os colaboradores, exigindo deles talvez a mesma dedicação.

Quando era criticado por algum cientista, Piaget procurava de forma competente envolvê-lo nas atividades do *Centre.* Um dos casos interessantes foi o que ocorreu com o lógico belga Beth, que publicou 'contundentes críticas das formulações piagetianas do pensamento infantil'. Piaget escreveu uma carta propondo para escreverem um livro em co-autoria, Beth aceitou a proposta e, em 1961, foi publicado o livro *Épistemologie Mathématique et Psychologie.*

Com Rolando Garcia, físico argentino, escreveu *Psychogenèse et histoire des sciences* (1983) (Psicogênese e história das ciências), concluído pouco tempo antes de sua morte. Nesta obra, são descritos os três grandes períodos da evolução da matemática: o realismo grego, as transformações algébricas do século XVII e as estruturas da Matemática moderna. Os autores mostram como cada período surge do outro, por meio de um processo de reorganização de dados novos e construtivos, a *abstração reflexiva.*

As publicações e obras divulgadas na década de 50 foram: *Introduction à L'épistemologie Génétique* (Introdução a epistemologia genética), que retratou a divulgação da primeira síntese sobre a teoria do conhecimento. Após quase trinta anos de investigação, comparou o desenvolvimento mental da criança com a história da ciência.

A UNESCO editou os escritos de Piaget: *O direito à educação no mundo atual* (1950), uma introdução à obra seleta do pedagogo Comenius (1957), *Epistemologie des sciences de l'homme* (1970) (Epistemologia das Ciências do Homem – um capítulo foi traduzido para o português: A psicologia) e *Ou va l'education?* (1971) (Para onde vai o nosso sistema educacional?).

Nos anos de 1960, Piaget contava com uma equipe de colaboradores mais numerosa, chegando a ter de 60 a 80 assistentes e 400 estudantes inscritos para trabalhar com ele. Esse aspecto caracteriza seu trabalho interdisciplinar e corresponde ao princípio segundo o qual o pensar e o conhecer se fundamentam no agir.

Em 1963, J. H. Flavell publicou o livro *The Developpemental Psychology of Jean Piaget* (A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget), no qual apresenta a idéia mestra de Piaget de um sujeito ativo, desafiando a psicologia behaviorista norte-americana vigente, que explicava o comportamento humano por meio das relações entre os estímulos e as respostas do sujeito, e, por isso, obteve uma receptividade eufórica nos Estados Unidos da América (EUA).

Piaget escreveu também dois livros teóricos: *Sagasse et illusion de la philosophie* (1965) (Sabedoria e Ilusões da Filosofia) e a introdução ao *Le structuralisme* (1968) (O esturturalismo), de interesse especial para o nosso trabalho, porque seu estruturalismo é construtivista, isto é, implica uma gênese de estruturas construídas umas a partir das outras. O estruturalismo piagetiano é, portanto, um método de apreensão do sujeito e do objeto ao mesmo tempo, método profundo que permite progressos.

Piaget concluiu a complementação de duas grandes séries de investigação empírica, uma delas referente à *Representação Mental* (1966a) e a outra sobre o *Desenvolvimento da Memória* (1968a). Publicou também o livro *Biologie et connaissance* (1967) (Biologia e conhecimento), obra mais importante do período de maturidade, pois possibilitou uma nova reorientação da pesquisa, cuja abordagem relacionou-se com os mecanismos de regulação e desenvolvimento do conhecimento.

Em 1967, publicou uma coletânea de 1.340 páginas, que contou com 19 colaboradores das mais diferentes disciplinas, desde o físico De Broglie ao marxista Goldmann, e dos especialistas em inteligência artificial Papert e Mandelbrot.

Em 1969, sob a orientação de Hermina Sinclar, foi instituída em Genebra uma equipe de pesquisa de psicolingüística genética.

Piaget desde a criação do "*Centre*" tinha o encargo das publicações dos *Études.* Os primeiros volumes abordavam a questão de natureza programática e da análise do empirismo lógico. Em um dos números lançados em 1957, Piaget publicou um artigo expondo sua teoria do equilíbrio. Posteriormente, quatro volumes sobre a teoria da aprendizagem, sete sobre temas lógico-matemáticos, quatro sobre espaço e tempo e um sobre a teoria do conhecimento e cibernética. Nos anos compreendidos entre 1968 e 1973, oito volumes foram editados sobre investigações empíricas de diferentes problemas particulares.

Nos anos de 1970, Piaget reiniciou um novo programa baseado no livro *Biologia e Conhecimento* (1967), abordando-o sob três planos: o do comportamento; a reflexão mental e consciência; e a organização biológica.

No decorrer dos anos de 1970, deixou de exercer algumas funções, aposentando-se em 197l. Proferiu conferências e participou de discussões em países estrangeiros. Realizou uma série de preleções na Universidade de Colúmbia, em 1970, participou de debates com N. Chomsky sobre a pergunta se e até que ponto a capacidade lingüística é inata (1975).

Em 1976 pela passagem do seu 80º aniversário, Piaget defendeu perante um júri internacional composto de colaboradores e estudantes seu livro sobre a *Equilibração,* publicada em 1975.

Em 1977, pediu a um de seus colaboradores a efetivação da tradução para o francês de parte da *Fenomenologia do Espírito* de Hegel, dada a clareza em relação à semelhança de sua teoria do desenvolvimento cognitivo com o programa de que se ocupara Hegel. Os conceitos básicos do pensamento hegeliano, tais como: *reflexão, abstração, negação da negação, contradição e dialética,* tornaram-se muito importantes para Piaget, embora não os utilize de forma semelhante às de Hegel. Para ambos a idéia de desenvolvimento é central. Para Piaget o desenvolvimento inteligente consiste em percorrer a trajetória do *egocentrismo* para a *descentração* e para Hegel, em superar o *imediato* pela *mediação.*

Os anos de 1977 e 1978 foram dedicados a importantes trabalhos no *Centre* sobre *Dialética*. Também houve uma preocupação quanto aos questionamentos de ordem estritamente filosófica. Em 1978/1979, fez parte do programa de pesquisa, *A lógica dos Significados* e, em 1979/1980, *O Desenvolvimento da Fundamentação Racional.*

Embora a saúde de Piaget estivesse abalada em junho de 1980, realizou-se o vigésimo quinto simpósio, o último do *Centre Internationale d'Épistemologie Génétique* de Genebra, cujo tema foi *O desenvolvimento da fundamentação racional*.

Nesse ano, ainda ocorreu um evento significativo para Piaget, pois o trabalho conjunto com o físico Rolando Garcia, iniciado nos anos de 1970, objetivava comparar o desenvolvimento mental da criança no plano da ação e a história da ciência no plano da formação teórica dos conceitos de ação. Piaget já havia concluído seus capítulos sobre o desenvolvimento intelectual. Garcia, no entanto, terminou os capítulos referentes à história da ciência a tempo de Piaget tomar conhecimento de seu manuscrito. Este livro foi publicado três anos após a morte de Piaget, sob o título de *Psicogênese e História das Ciências.*

Na manhã de 16 de setembro, numa clínica particular de Genebra, com 84 anos, morreu Piaget. Seu ideal foi "delinear uma imagem do homem como ser criativo e inventivo, que se desenvolve, não enquanto pensa e reflete, mas enquanto age e se engaja"[31].

[31] KESSELRING. Jean Piaget. 1993, p. 63.

PRESSUPOSTOS FILOSÓFICOS

2.1 INTRODUÇÃO

A preocupação com a problemática do valor do conhecimento humano e do método mais apropriado para seu desenvolvimento adequado tem centralizado reflexões em relação ao problema do conhecimento - a teoria do conhecimento ou epistemologia - problema tão antigo que se constitui em verdadeiro quebra-cabeça entre filósofos.

No processo do conhecimento, existem dois pólos: o sujeito cognoscente (sujeito que conhece) e o objeto conhecido. Esta questão tem sido debatida ao longo do tempo pelos filósofos, cuja finalidade é o alcance da verdade, ou seja, como é possível chegar-se ao conhecimento verdadeiro. Nos tempos modernos, surgem duas correntes principais, a Racionalista (Descartes[32] e Leibniz[33]) e a Empirista (Locke[34] e filósofos ingleses), que desenvolveram respostas a essa questão, divergindo, em especial, na forma de conceber o papel da experiência.

Kant tentou resolver essa divergência por meio da filosofia da interação. Desta forma, é o primeiro teórico do interacionismo. Assim sendo, este capítulo foi subdividido em três partes em que estudamos na primeira, o racionalismo; na segunda parte, o empirismo e, na terceira parte, interacionismo kantiano. Para ilustrar as diferentes formas

[32] Descartes (1596-1650). Filósofo, matemático e físico francês, criador da *geometria analítica*, também descobriu os *princípios de óptica geométrica*. Sua contribuição científica baseia-se no emprego de um método e de uma metafísica.

[33] Leibniz (1646-1716). Filósofo e matemático alemão. Elaborou uma teoria dos máximos e dos mínimos, do infinitamente pequeno e da passagem ao limite, constituindo o *cálculo infinitesimal*.

[34] Locke (1632-1704). Filósofo inglês, rejeitou as idéias inatas, a fonte de nossos conhecimentos seria a experiência, isto é, a sensação ajudada pela reflexão. Para ele a fonte do conhecimento é a *sensação*.

de percepção em relação à teoria do conhecimento, apresentamos as posições defendidas por Leibniz, Locke e Kant.

2.2 RACIONALISMO, EMPIRISMO E INTERACIONISMO

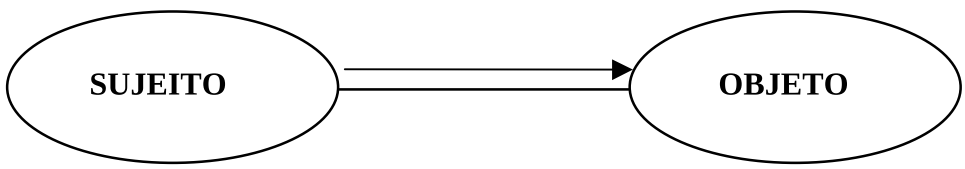
Ao longo do tempo, filósofos têm debatido e indagado como se pode alcançar a verdade ou o conhecimento. Para responder a esta problemática, as correntes empirista e racionalista desenvolveram respostas, porém apresentavam divergências em relação à concepção e ao papel da experiência. Kant, com sua teoria da interação, sintetizou as correntes empirista e racionalista.

2.2.1 Racionalismo (Leibniz)

Racionalismo é uma posição filosófica que sustenta a primazia da razão, da capacidade de pensar, de raciocinar em relação ao sentimento e à vontade. Acredita na superioridade da forma (o pensamento) em relação à matéria (os conteúdos ou objetos do pensamento).

No racionalismo, o objeto de conhecimento não é algo concreto, porém trata-se de um objeto do pensamento, cuja construção teórica efetua-se pela razão. Destacamos como características da razão o rigor e a precisão.

O equívoco do racionalismo foi justamente considerar a razão e o pensamento como únicas fontes do conhecimento. Podemos representar a relação sujeito e objeto da seguinte forma:



No racionalismo, o sujeito confere ao objeto o conhecimento prévio que traz consigo.

Figura 3

Portanto, para o racionalismo, razão, pensamentos claro e lógico constituem as condições necessárias e suficientes para o conhecimento da verdade; no entanto sua fraqueza é justamente a falta de uma perspectiva genética, pois tudo está pré-formado.

O termo racionalismo pode ter significados diferentes, de acordo com a esfera de aplicação, mas, primordialmente, refere-se à corrente filosófica do século XVII a que pertencem Descartes e Leibniz etc. Na filosofia racionalista, a razão é considerada a fonte e origem dos conhecimentos, negando-a aos sentidos.

Como característica fundamental do racionalismo, podemos destacar seu ideal de ciência dedutiva, tendo como resultado o modelo matemático que se manifesta de um lado em relação à convicção de que é necessário o domínio da razão e do pensamento. Para ilustrar, apresentamos o exemplo em que os 'três ângulos de um triângulo valem necessariamente dois retos' e de tal propriedade deduz-se necessariamente a natureza do triângulo. Nesse sentido, o raciocínio matemático é produzido como uma cadeia em que tudo é como tem de ser e não pode ser de outro modo. De outro lado, existe a convicção de que o domínio do pensamento corresponde exatamente ao âmbito da realidade.

Segundo Hessen, a posição epistemológica que vê no pensamento e na razão a fonte principal do conhecimento humano, chama-se racionalismo (de ratio = razão). Explicita ainda que na opinião do racionalismo:

> [...] um conhecimento só merece na realidade este nome quando é logicamente necessário e universalmente válido. Quando a nossa razão julga que uma coisa tem de ser assim e que não pode ser de outro modo, que tem de ser assim, portanto sempre e em todas as partes, então, e só então, nos encontramos ante um verdadeiro conhecimento. Um conhecimento desse tipo apresenta-se-nos, por exemplo, quando formulamos o juízo o 'todo é maior do que a parte', ou o juízo 'todos os corpos são extensos'. Em ambos os casos vemos com evidência que tem de ser assim e que a razão se contradizia a si mesma se quisesse sustentar o contrário. E porque tem de ser assim, é sempre e em todas as partes assim. Estes juízos possuem, pois, uma necessidade lógica e uma validade universal rigorosa[35].

Para os racionalistas, todo conhecimento verdadeiro fundamenta-se no pensamento, que é a verdadeira fonte e base do conhecimento humano.

[35] HESSEN. Teoria do conhecimento, 1987, p. 60-61.

Neste sentido, Córdon & Martínez consideram que:

> Os dois traços da modernidade realizam-se de modo pleno pela primeira vez no racionalismo: por um lado, a razão constitui-se em princípio supremo e único no qual fundamenta o saber; por outro, são as matemáticas que exemplificam os ideais de saber que se pretende instaurar[36].

Os autores acima defendem que a nova ciência tem como ideal a construção de um sistema dedutivo, no qual as leis são deduzidas, baseadas em determinados princípios e conceitos primeiros. Assim sendo, nosso conhecimento a respeito da realidade pode ser construído dedutivamente, partindo de certas idéias e princípios evidentes, que são inatos de quem os possui em si mesmo à margem de qualquer experiência sensível.

Para os racionalistas, não é da experiência que procedem as idéias e princípios com base nos quais se devem construir dedutivamente nosso conhecimento da realidade, porém, do entendimento de quem as possui em si próprio. Portanto, o racionalismo pode ser considerado uma posição filosófica que sustenta a superioridade da razão, da capacidade de pensar e raciocinar em relação ao sentimento e à vontade.

A razão é mais poderosa do que a experiência sensorial, porque possibilita saber, com certeza, muitas verdades que a observação sensorial não poderia averiguar, pois sensações não são mais do que idéias confusas, porém o universo segue uma ordem harmoniosa segundo a razão ou a ordem patenteada pela Matemática. Obedece a leis uniformes que o homem pode detectar e formular, por isso a razão deve ser crítica, exploratória e demonstrativa, à qual se referiu Descartes:

> perfeitamente, pelo menos o melhor que podia; além de que, ao pô-lo em prática, sentia que o meu espírito se habituava pouco a pouco a conceber mais nítida e distintamente Estas longas cadeias de razões, completamente simples e fáceis, de que os geômetras costumam servir-se para chegar às suas mais difíceis demonstrações tinham-lhe sugerido que todas as coisas que podem cair sob o conhecimento do homem se encadeiam da mesma maneira e que, com a condição de simplesmente nos abstermos de aceitar como verdadeira alguma que não o seja, ou de observarmos sempre a ordem necessária para as deduzir umas das outras, nenhuma pode haver tão afastada a que por fim não se chegue nem tão ocultas que não se descubram. E não me foi muito difícil procurar por quais era preciso começar: pois já sabia que devia ser pelas mais simples e mais fáceis de conhecer e, considerando que, entre todos os que até aqui procuraram a verdade nas ciências, só os matemáticos puderam encontrar algumas demonstrações, isso é, algumas razões certas e evidentes, não duvidei de

[36] CÓRDON & MARTÍNEZ. História da filosofia. 1950, p. 53.

> que deveria começar pelas mesmas que eles examinaram; embora não esperasse delas nenhuma outra utilidade a não ser a de habituarem o meu espírito a alimentar-se de verdades e a não se contentar com falsas razões. [...] Mas, o que mais me contentava neste método era que, por meio dele, tinha certeza de usar em tudo a própria razão, se não os seus objectos, e que, não o tendo submetido a nenhuma matéria particular, prometia a mim próprio aplicá-lo tão utilmente às dificuldades das outras ciências e como o aplicaria às da álgebra[37].

A ligação Matemática com a razão é destacada por Descartes, porque uma formulação matemática, além de ser exploratória, ainda pode ser demonstrativa no plano concreto e no plano das idéias como realidade objetiva e ato mental.

Para Hessen (1987), o conhecimento matemático é um conhecimento predominantemente conceptual e dedutivo, destaca que, na geometria, por exemplo, todos os conhecimentos derivam de alguns conceitos e axiomas supremos. No entanto, o pensamento impera com absoluta independência de toda a experiência, seguindo somente suas próprias leis. Como no exemplo do teorema matemático em que afirma 'os três ângulos de um triângulo valem dois retos', obedece a leis claras, sem contradição e pode ser facilmente demonstrado. Esta propriedade é deduzida, necessariamente, da natureza do triângulo, assim, o raciocínio matemático desenvolve-se como uma cadeia, em que tudo é como tem de ser e não pode ser de outro modo.

Observamos que quase todos os representantes do racionalismo procedem da Matemática, pela necessidade lógica e validade universal, e para o nosso estudo destacamos Leibnz dentre os vários representantes desta escola.

Em 1646, nasceu em Lipsia Gottfried Wilhelm Leibniz e morreu em 1716. Na Universidade de Lipsia, familiarizou-se com o pensamento aristotélico, platônico, escolástico e com a filosofia de Descartes. Aos 19 anos, doutorou-se em direito, dedicando, grande parte de sua atividade às carreiras política e diplomática. Quando morou na França, conheceu os trabalhos matemáticos de Pascal[38]. Em 1676, inventou o cálculo infinitesimal; conheceu Espinosa[39] em uma viagem pela Holanda, bem como outros cientistas e filósofos da época. Deixou uma ampla e interessante correspondência e inúmeros livretos, dos quais

[37] DESCARTES.O discurso do método, 1987, p. 38-39.

[38] Pascal (1623-1662). Nasceu em Clermont dedicou-se aos estudos da matemática, física e religião. Inventou a máquina calculadora e escreveu um *tratado das secções cônicas.*

[39] Espinosa (1632-1677). Filósofo holandês, A sua filosofia funda-se numa concepção panteísta da realidade, na qual está bem patente nas suas concepções metafísicas, éticas e políticas.

se destacam *O Discurso da Metafísica, O Sistema Novo da Natureza e a Comunicação entre as Substâncias e Monadologia*, escrita já no final de sua vida. As obras mais importantes são *Novos Ensaios acerca do Entendimento Humano* (em que analisa, pormenorizadamente, o Ensaio de Locke) e *Ensaios de Teodicéia*.

O pesquisador germânico explicitou que "o empirismo não está errado, ele é tão só um ponto de vista parcial e limitado, que impede responder as questões mais fundas de legitimidade e de fundamentação"[40] Esclareceu ainda que todo pensamento que começa com a experiência não responde à questão da natureza do pensamento e da verdade, pretensão natural de qualquer sujeito pensante. Segundo o pesquisador germânico, o empirismo não é sequer válido como explicação psicológica, visto que não compreende o dinamismo imanente ao pensar.

Da leitura, estudo e análise da obra sobre o Ensaio de Locke, Leibniz escreveu notas que foram publicadas sob o título de *Novos Ensaios sobre o Entendimento Humano*, após a morte de Locke. O livro inicia fazendo a distinção entre verdade da razão (necessárias) e verdade de fato: *vérités de fait; vérités de raison*.

Para o estudioso alemão (1993), a prova originária das verdades da razão (necessárias) origina-se do mero entendimento, e as outras verdades vêm das experiências ou das observações dos sentidos. Assim, a respeito das verdades da razão, ele opõe as verdades de facto. Nesse sentido:

> [...] deve dizer-se que toda aritmética e toda a geometria são inatas e estão em nós de uma maneira virtual, de modo que se podem encontrar aí considerando atentamente e ordenando o que já se tem no espírito, sem recorrer a nenhuma verdade aprendida por via da experiência ou pela tradição de outrem, como Platão mostrou num diálogo, onde apresenta Sócrates conduzindo uma criança a verdades abstrusas por meio das simples interrogações, sem lhe ensinar nada[41]. Pode-se, portanto, fabricar essas ciências no seu gabinete e mesmo de olhos fechados, sem aprender pela vista ou mesmo pelo tacto as verdades de que tem necessidade; embora seja verdade que nunca considerariam as idéias em causa se nunca se tivesse visto nem tocado em nada[42].

[40] LEIBNIZ. Novos ensaios sobre o entendimento humano. 1993, p. 10.
[41] Ibid., p. 40.
[42] Ibid., p. 49.

Segundo Leibniz, os conceitos existem em nós, em forma de germens potenciais, sem ser necessário recorrer à experiência; assim, o pensamento continua sendo a única fonte do conhecimento. No racionalismo, o pensamento impera com absoluta independência de toda a experiência, seguindo apenas suas próprias leis e diferencia-se pelas características de necessidade lógica e da validade universal. Neste sentido;

> Ao demonstrar que os três ângulos de um triângulo são iguais a dois rectos, encontram-se alguns outros ângulos que se vê serem iguais tanto aos três ângulos do triângulo como a dois rectos. § 3. Essas idéias que fazemos intervir chamam-se *provas,* e a disposição do espírito para as encontrar é a sagacidade. § 4. E mesmo quando se encontram, não é sem esforço, nem por uma única vista passageira que se pode adquirir tal conhecimento; de facto, é preciso embrenhar-se numa progressão de idéias, feitas pouco a pouco e por graus, § 5, e a dúvida antecede a demonstração. §6 [...] E, embora cada passo que a razão dá ao demonstrar seja um conhecimento intuitivo ou de simples vista, não obstante, como nessa longa série de provas a memória não conserva tão exactamente a referida ligação de idéias, os homens tomam frequentemente falsidades por demonstrações[43].

Em relação ao exemplo, explicitou que:

> [...]pelo facto de ter os ângulos de um triângulo na imaginação, nem por isso, se têm idéias claras a seu respeito. A imaginação não poderia fornecer-nos uma imagem comum aos triângulos acutângulos e obtusângulos, todavia a idéia do triângulo é-lhes comum; assim, a referida idéia não consiste nas imagens e não é tão fácil como se poderia pensar entender a fundo os ângulos de um triângulo[44].

Para Leibniz, Locke não diferenciou a origem das verdades necessárias, cuja fonte reside no entendimento das verdades de facto, que derivam das experiências dos sentidos e mesmo das percepções confusas que estão em nós[45], e em relação a este aspecto ele afirmou:

> [...] creio que todos os pensamentos e ações da nossa alma vêm do seu próprio fundo, sem poderem ser-lhe dadas pelos sentidos. [...] se pode dizer que num certo sentido, que os sentidos externos são em parte causa dos nossos pensamentos. [...] há idéias e princípios que de modo algum nos vêm dos sentidos, e que encontramos em nós sem os formarmos, se bem que os sentidos nos dêem ocasião para nos apercebermos deles[46].

[43] LEIBNIZ. Novos ensaios sobre o entendimento humano. 1993, p. 259.
[44] Ibid., p. 265.
[45] Ibid., p. 47.
[46] Ibid., p. 46-47.

Leibniz é totalmente contrário à idéia de que o conhecimento origina-se só da percepção, mas aceita que esta não pode ser totalmente evitada.

Portanto, podem ser destacados dois pontos do racionalismo, que indicam a aceitação das Matemáticas como o modelo do saber: o primeiro reporta-se ao ideal de ciência dedutiva, que destaca a convicção de que o domínio da razão, do pensamento é necessário, tais como no exemplo já citado 'os três ângulos de um triângulo valem necessariamente dois rectos', pois tal propriedade é deduzida necessariamente da natureza do triângulo. O segundo ponto refere-se à convicção de que o domínio do pensamento corresponde ao campo da realidade; essa crença faz com que a experiência seja desconsiderada e, por isso, não precisa recorrer a ela, já que o pensamento por si é capaz de descobrir a estrutura da realidade. Assim sendo, para o racionalismo, o pensamento possui idéias e princípios inatos não extraídos da experiência.

Como ponto fraco do racionalismo, podemos destacar a ausência de uma perspectiva genética, pois nele tudo é pré-formado. Na tese do racionalismo, a razão é necessária, por isso não sofre desmentidos nem exige confirmações; além disso, mantém estritas relações com as Ciências Naturais e Exatas, isto em função do interesse do pensamento moderno pela experiência. A Filosofia é influenciada pelo grande desenvolvimento e aplicação destas ciências e foi atraída, especialmente, pelo ideal físico-matemático e quantitativo-mecânico.

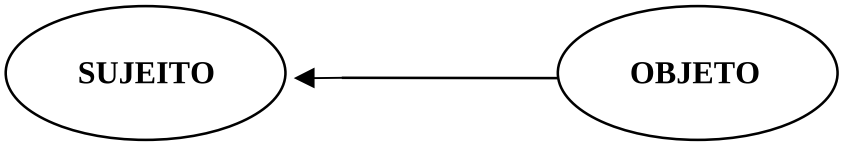
Na primeira parte deste capítulo, abordamos a primeira corrente da Idade Moderna, o Racionalismo, e na segunda parte, vamos nos ocupar do Empirismo, que constitui o segundo grande movimento da Filosofia Moderna.

2.2.2 Empirismo (Locke)

Empirismo ou filosofia da experiência é uma corrente filosófica que considera a experiência como a única fonte do conhecimento. A proposta do empirismo é explicar os conceitos e juízos universais mediante a pura experiência; por isso nega o caráter necessário do pensamento, bem como o caráter absoluto da verdade que é acessível ao homem. Reconhece que toda a verdade deve e pode ser colocada à prova, e esta poderá ser corrigida, modificada ou abandonada.

O empirismo caracteriza-se pelo puro fenomenismo sensível, em que tudo deriva da subjetividade do sentido. Considera o conhecimento como algo que vem de fora por meio dos sentidos ou das experiências. O sujeito ao nascer é como uma *lousa limpa*, nada contém, é passivo e receptivo e, ao longo da vida, o meio, a experiência e o estímulo vão sendo incorporados à medida que ele cresce.

O conhecimento é tudo o que vem do mundo do objeto, do meio físico ou social, sendo o mundo do objeto determinante do sujeito. Esta relação pode ser representada da seguinte forma:



No empirismo, o conhecimento vem do objeto que o sujeito recebe passivamente por meio das sensações ou experiências.

Figura 4

O enfoque maior para os empiristas é o teste da experiência, não aceita nada que não tenha passado pela experiência. Para Piaget, o empirismo “tende a considerar a experiência como algo que se impõe por si mesmo, como se ela fosse impressa diretamente no organismo sem que uma atividade do sujeito fosse necessária a sua constituição”[47].

Assim, o grande equívoco dessa teoria foi considerar o *objeto* (dado externo) como a única fonte do conhecimento, considerado como pecado reducionista, uma doença letal do empirismo. O reducionismo é uma tendência que explica as teorias complexas por uma de suas características ou aspectos. Vejamos, por exemplo, quando nós medimos algum objeto, podemos conhecer uma relação (entre objeto e medida), isso significa que mesmo para o conhecimento do tamanho de um objeto, sua fonte não se encontra só no objeto.

Portanto, o empirismo é uma corrente filosófica que considera a experiência como a única fonte do conhecimento e procura explicar os conceitos e juízos universais por meio da experiência pura. A ligação que existe entre empirismo e ciências refere-se ao aspecto dos métodos indutivo e experimental.

[47] PIAGET. O nascimento da inteligência na criança. 1975, p. 339.

Para Hessen, “o espírito humano está por natureza vazio, é uma tábua rasa, uma folha em branco, em que a experiência escreve todos os nossos conceitos, incluindo os mais gerais e abstractos, procedem da experiência”[48].

O empirismo, em relação à idéia do conhecimento, parte dos fatos concretos e, como forma de justificar sua posição, recorre à evolução do pensamento e do conhecimento humano. Assim:

> A criança começa por ter percepções concretas. Com base nessas percepções chega, paulatinamente, a formar representações gerais e conceitos. Estes nascem, por conseguinte, organicamente da experiência. Não se encontra nada semelhante a esses conceitos que existem completos nos espíritos ou se formam com total independência da experiência. A experiência apresenta-se, pois, como a única fonte do conhecimento[49].

No empirismo, a experiência é de suma importância na produção do conhecimento. Hessen afirma que a história do empirismo revela que seus defensores procedem quase sempre das ‘ciências naturais’. Isto é compreensível, pois:

> [...] nas ciências naturais a experiência representa o papel decisivo. Nelas trata-se, sobretudo, de comprovar exactamente os factos mediante uma cuidadosa observação. O investigador está completamente entregue à experiência. É muito natural que quem trabalha de preferência ou exclusivamente com estes métodos das ciências naturais tenha tendência para de antemão colocar o factor empírico sobre o racional[50].

Desse modo, os empiristas tendem a considerar a experiência como fonte e base de todo o conhecimento. O próprio Locke cita: parece-me que o “conhecimento” não é outra coisa senão “a percepção da conexão e do acordo, ou desacordo e da oposição em quaisquer das nossas idéias”[51]. Continua mencionando que “onde esta percepção estiver, há conhecimento, e onde não estiver, nós não podemos chegar ao conhecimento, embora possamos imaginar, conjecturar ou acreditar”[52].

O pesquisador inglês menciona:

[48] HESSEN. Teoria do conhecimento. 1987, p. 68-69.
[49] HESSEN. Teoria do conhecimento. 1987, p. 69
[50] Ibid, p. 69.
[51] LOCKE. Ensaio sobre o entendimento humano. 1999, p. 719.
[52] Ibid., p. 719.

> [...] quando estamos extremamente convencidos da demonstração que os três ângulos de um triângulo são iguais a dois rectos, nós não fazemos outra coisa senão perceber que a igualdade com dois ângulos rectos necessariamente concorda com os três ângulos de um triângulo, de que é inseparável[53].

Por outro lado, afirma que o espírito, quando foi alguma vez convencido, "retém a memória da convicção sem as provas". Assim:

> [...] um homem que se lembre com certeza que viu uma vez a demonstração de que os "três ângulos de um triângulo são iguais a dois rectos", está certo de que conhece a verdade desta proposição, porque não pode duvidar dela. [...] A imutabilidade das mesmas relações entre as mesmas coisas imutáveis é agora a idéia que lhe mostra que se os três ângulos de um triângulo foram uma vez iguais a dois ângulos rectos, eles serão sempre iguais a dois rectos. E daqui se segue certamente que o que foi uma vez verdadeiro é sempre verdadeiro no mesmo caso [...] É sobre esta base que as demonstrações particulares em matemática garantem um conhecimento geral[54].

O autor ainda faz referência ao conhecimento matemático, e, graças à demonstração, o resultado é confirmado passo a passo, podendo ser absolutamente certo, e estas demonstrações são verdadeiras e válidas; inclusive, tratando-se de coisas reais existentes, reduz o conhecimento matemático à experiência, como única fonte do conhecimento.

Os filósofos ingleses do século XVII sentem vivamente a problemática da Filosofia Moderna, a questão ligada ao valor do conhecimento humano e do método para seu desenvolvimento mais adequado.

Diante do fato, o problema epistemológico que a Filosofia inglesa procura saber, consta da seguinte indagação: como é possível, apoiada na experiência de fatos singulares, chegar às leis universais, que garantam o retorno à esfera dos acontecimentos concretos das experiências individuais.

Dentro desse contexto, John Locke interessa-se pelos problemas gnosiológicos e políticos, porém defende uma posição em que não compartilha nem com o empirismo radical nem com seu absolutismo irreversível.

---

[53] LOCKE. Ensaio sobre o entendimento humano. 1999, p. 719-720.
[54] Ibid., p. 726-727.

Locke nasceu na Inglaterra em 1632, tendo morrido em 1704; seu estudo foi realizado parte na própria família e, parte na Universidade de Oxford. Dedicou-se ao estudo das ciências experimentais, especialmente a medicina. A partir de 1670-1671, interessa-se pela Filosofia. Durante uma discussão com amigos, conclui a respeito da inutilidade da seqüência ao debate, enquanto não fosse estabelecido o valor do conhecimento, determinando quais coisas a mente é apta a conhecer e quais não, tendo, desde então, se dedicado por mais de vinte anos ao estudo da problemática do conhecimento.

Sua obra principal *Ensaio Sobre Entendimento Humano* (*Essay Concerning Human Understanding*), divide-se em quatro livros, cujos temas abordados são: das idéias inatas; do processo de conhecimento; da linguagem; e do valor do conhecimento.

O pressuposto fundamental de sua obra é o empirismo, porque impõe as pretensões da razão humana com benéfica moderação dentro de seus limites. Faz uma crítica das idéias inatas (não provenientes da experiência), que não existem, porque não são pensadas, sendo consideradas por ele como insustentáveis, já que: 1) contradizem a experiência (não são apresentadas na mente das crianças e do selvagem); 2) sua verdade não pode ser averiguada nem pode estabelecer confronto com a experiência, a única forma de distinguir se algo é verdadeiro ou falso; 3) os argumentos sobre os quais a teoria do inatismo fundamenta-se não têm valor de prova, são o consenso universal e não se referem à origem das idéias.

Examina o processo do conhecimento (cognitivo); nossa inteligência é, por origem, como uma 'tábula rasa', sem nenhuma idéia. No conhecimento humano, a experiência fornece as idéias, é iniciado pela experiência sensível: *nihil est in intellectu quod non fuerit in sensu* (nada há no intelecto que não tenha estado antes no sentido). Desta forma, idéias não resultam de uma espontaneidade criadora do intelecto humano, porém, de sua passividade perante a realidade.

A teoria do conhecimento de Locke denomina-se 'Sensualismo', em que todas as idéias complexas, bem como a idéia de substância, surgem da experiência pelas sucessivas abstrações, generalizações e associações. Com seu empirismo, limita a possibilidade de nosso conhecimento. Assim, pela primeira vez o problema do conhecimento humano é tratado sob o ponto de vista crítico em seus fundamentos e com extensão.

De acordo com Locke:

> [...] o segundo grau do conhecimento habitual pertence àquelas verdades de que o espírito, quando foi alguma vez convencido, 'retém a memória da convicção sem as provas'. [...] Por exemplo, nesta proposição: 'os três ângulos de um triângulo são iguais a dois rectos', todo aquele que viu e percebeu claramente a demonstração desta verdade sabe que esta proposição é verdadeira mesmo quando tal demonstração se apagou de seu espírito; de maneira que agora ela não está presente no seu espírito e possivelmente não poderá ser lembrada, mas ele conhece isso de uma maneira diferente daquilo que conhecia anteriormente. Percebe o acordo das duas idéias que estão juntas nesta proposição, mas é por intervenção de outras idéias diferentes daquelas que produziram essa percepção. Ele lembra-se, isto é, ele conhece (pois a lembrança não é outra coisa senão a renovação de um conhecimento passado) que uma vez teve a certeza da verdade desta proposição que os três ângulos de um triângulo são iguais a dois ângulos rectos. [...] Se a percepção não for suficientemente estabelecida no conhecimento de que as mesmas idéias devem *eternamente* ter os mesmos hábitos e relações, então não poderia haver nenhum conhecimento de proposições gerais na matemática, pois qualquer demonstração matemática não seria senão particular. E quando um homem tivesse demonstrado uma proposição respeitante a um triângulo ou a um círculo, o seu conhecimento não se estenderia além desse diagrama particular[55].

A experiência sensível é a única fonte de conhecimentos racionais com valor objetivo e, fixo para o entendimento do homem os limites dentro dos quais sua atividade pode legitimamente exercer-se e, para tal, determina como se edificam nossos conhecimentos e como a natureza do saber deve ser explicada pela sua procedência para o espírito.

A reflexão lockeniana baseia-se na idéia de que o conhecimento se reduz aos fenômenos observáveis, e que estes fenômenos do conhecimento interligam-se, segundo correlações que se podem observar. Assim, toda análise assenta-se em uma constatação da experiência, e todas as nossas idéias provêm de duas fontes: da sensação e da reflexão. O estudioso inglês entende por sensação a função da consciência que nos permite apreender impressões vindas do mundo exterior e, por reflexão, o ato pelo qual o espírito conhece suas próprias operações. Assim sendo, a filosofia de Locke não é puramente especulativa nem proveniente de preocupações práticas que visam à solução de problemas práticos. Foi

[55] LOCKE. Ensaio sobre o entendimento humano. 1999, p. 726-728.

um filósofo da experiência, profundamente estranho às especulações *a priori* dos dogmáticos.

Como já explicitamos, há dois pólos no processo do conhecimento: o sujeito e o objeto conhecido e também duas maneiras de concebê-los. Assim, para os racionalistas, o sujeito confere ao objeto o conhecimento prévio que traz consigo e, para os empiristas, o conhecimento vem do objeto que o sujeito recebe passivamente por meio das sensações ou experiências. Pela teoria da interação, Kant resolveu o antagonismo dessas duas tendências, tema que passamos a estudar.

2.2.3 Interacionismo (Kant)

Paralelamente à retomada política ocorrida na Alemanha no Século XVIII, também acontece o renascimento cultural no campo da literatura, da música e da filosofia. No campo filosófico, destacam-se Fichte[56], Schelling[57], Hegel[58], Schopenhauer[59] e, sobretudo, Kant. Para este, a atividade humana representa a interação entre sujeito e objeto, sendo ainda a fonte de todo o conhecimento. Podemos representar esta relação da seguinte forma:

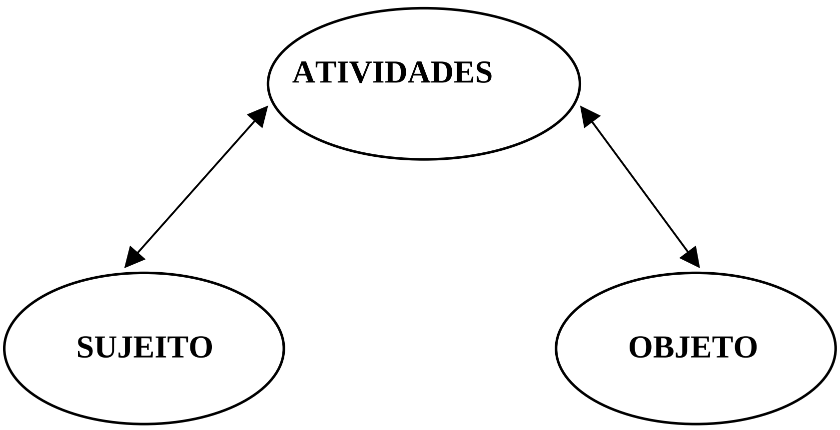


Figura 5

56 Fichte (1762-1814). Filósofo alemão, discípulo de Kant e mestre de Schelling. Seu sistema, derivado inicialmente de Kant, transformou-se em idealismo absoluto, em que a única realidade é o *eu.*

57 Schelling (1755-1854). Filósofo alemão, autor de um sistema de idealismo objetivo.

58 Hegel (1770-1831). Filósofo alemão, a sua filosofia, o *hegelianismo*, identifica o ser e o pensamento como um princípio único, a *idéia,* que se desenvolve em três fases: *tese, antítese* e *síntese.*

59 Schopenhauer (1788-1860). Filósofo alemão. Em sua obra, *O mundo como vontade e como representação*, expõe seu pessimismo, baseado na oposição entre a *vontade*, substrato dos fenômenos, e a *representação* do mundo na inteligência.

A grande descoberta de Kant foi que o conhecimento não é a reprodução passiva de um objeto, mas construção ativa do objeto por parte do sujeito, com base no ponto de vista da interação sujeito-objeto. Nesta perspectiva, o conhecimento não é fruto nem do sujeito nem do objeto, mas representa a síntese da ação combinada do sujeito e do objeto. Assim sendo, a teoria da interação de Kant retrata a síntese das duas correntes filosóficas da modernidade: o empirismo e o racionalismo.

A obra kantiana não está limitada apenas a essa síntese superadora, pois o autor também caracteriza-se como teórico do conhecimento e como filósofo daí ser considerado um construtivista, porém, na realidade, quis se reconciliar com as tendências divergentes, alertando-nos sobre a importância do objeto. Dessa forma, ele explicitou que:

> [...}para conhecer um objeto é necessário poder provar a sua possibilidade (seja pelo testemunho da experiência a partir da sua realidade, seja *a priori* pela razão). Mas posso pensar no que quiser, desde que não entre em contradição comigo mesmo, isto é, desde que o meu conceito seja um pensamento possível, embora não possa responder que, no conjunto de todas as possibilidades, a esse conceito corresponda ou não também um objecto. Para atribuir, porém, a um tal conceito validade objectiva (possibilidade real, pois a primeira era simplesmente lógica) é exigido mais. Mas essa qualquer coisa demais não necessita de ser procurada nas fontes teóricas do conhecimento, pode também encontrar-se nas fontes práticas[60].

Segundo o estudioso germânico, os objetos do nosso conhecimento devem conformar-se à nossa estrutura cognitiva, e não o conhecimento à natureza do objeto. Por isso, considerou a Matemática uma ciência sintética em vez de analítica (só dependendo da análise dos significados de conceitos).

Immanuel Kant

Kant nasceu em Königsberg, Prússia, em 1724. De origem humilde recebeu educação religiosa, pois sua família era protestante. Matriculou-se na Faculdade de Filosofia, dedicando-se aos estudos filosóficos; conforme orientação de Leibniz e Wolff, estudou também Física e Matemática. Em 1755, consegue por promoção a *habilitação de livre-docência*, após apresentar um *Esboço Sumário de Algumas Meditações Sobre o Fogo* e a sua *Nova Explicação dos Primeiros Princípios do Conhecimento Metafísico. E*xerce

60 KANT. Crítica da razão pura. Nota de rodapé, 1994, p. 25.

esse cargo durante 14 anos, quando conquista o posto de professor *ordinário* ou titular com a Dissertação sobre *a Forma e os Princípios do Mundo Sensível e do Mundo Intelegível* e, em 1781, publica a *Crítica da Razão Pura*.

Era um professor escrupuloso e muito estimado pelos alunos. Embora tenha recebido convites vantajosos, jamais quis deixar a universidade de Koenisgsberg. Foi membro do senado universitário por diversas vezes, reitor decano da Faculdade de Filosofia e de toda a Academia (1792). A Academia de Berlim elegeu-o como sócio, em 1786, a de São Petesburgo, em 1794, e a de Viena, em 1798. Morreu em 12 de fevereiro de 1804 em sua cidade natal.

A filosofia contemporânea inicia-se com Kant, o fundador do criticismo, que recebeu este nome em função de se constituir em uma investigação preliminar sobre as possibilidades da razão, cuja origem tem seus fundamentos no racionalismo e no empirismo.

Os empiristas consideravam como única fonte do conhecimento a experiência, dado externo que está no objeto, e a ciência é a soma progressiva da experiência. Entretanto, para os racionalistas, a única fonte do conhecimento verdadeiro é a razão, que é um dado interno, está no sujeito e admite a idéia inata. Sua análise é suficiente para se descobrir toda a verdade, que são os juízos analíticos, puramente explicativos.

Neste contexto, a ciência racional pode ser resumida por três disciplinas: aritmética pitagórica, geometria euclidiana e a física newtoniana, objetos da crítica kantiana. As duas primeiras são as mais antigas e conquistaram alto grau de perfeição, e a terceira surgiu no século XVII no Renascimento.

Podemos perceber entre esses dois campos do saber a existência da demarcação entre mundo inteligível e mundo sensível, visto que a aritmética e a geometria constituem o domínio das verdades da razão, do número e das formas puras, e a física, como ciência da realidade exterior, pode ser vista de forma confusa pelos sentidos.

Kant também observou no interior da própria Matemática a existência de dois problemas entre as duas tendências. O primeiro deles é o dos geômetras puros, tais como Descartes ou Leibniz, que cultivavam o ideal da dedução *a priori* e procuraram fazer da Física uma extensão da Matemática, substituindo o mundo das representações sensíveis por um tecido de verdades abstratas. O segundo problema, representado por Galileu[61] e Newton[62], é o dos observadores, que buscam na indução o único fio condutor que os levaria às fórmulas da Física, estabelecendo relações mais amplas do que a razão de forma espontânea poderia produzir.

Assim, diante de teses extremistas, Kant procurou solucionar a problemática, fugindo ao mesmo tempo à deformação dogmática do racionalismo e à estreiteza do empirismo inglês. Por isso, como primeiro passo de sua obra, desenvolveu uma teoria do conhecimento matemático, o pilar da *Crítica da Razão Pura*, revelando-nos a natureza dos axiomas matemáticos que conduzia à interpretação do espaço e do tempo.

Neste sentido, o ponto de partida da obra kantiana é a própria geometria, que procura explicar por que ela não é só uma obra pura da razão, não é só ciência das figuras virtuais idealmente concebidas, mas é a ciência das figuras reais construídas efetivamente.

O pesquisador germânico explicitou que o conhecimento matemático é o conhecimento racional por *construção de conceitos* e, por isso, requer uma intuição *não empírica*. Ele próprio escreve que:

> [...] construo um triângulo, apresentando o objecto correspondente a um conceito, seja pela simples imaginação na intuição pura, seja de acordo com esta, sobre o papel, na intuição empírica, mas em ambos os casos completamente *a priori*, sem ter pedido o modelo a qualquer experiência. A figura desenhada é empírica e contudo serve para exprimir o conceito sem prejuízo da generalidade deste, pois nesta intuição empírica considera-se apenas o acto de construção do conceito, a qual muitas determinações como as de grandeza, dos lados e dos ângulos, são completamente indiferentes e, portanto, abstraem-se estas diferenças, que não alteram o conceito de triângulo[63].

Também esclareceu que:

[61] Galileu (1564-1642). Físico e astrônomo italiano. Foi um dos fundadores do método experimental. Descobriu a lei das pequenas oscilações do pêndulo, a lei da queda dos corpos, enunciou o princípio da inércia e da lei da composição das velocidades. Defensor da teoria do sistema do mundo proposto por Copérnico.

[62] Newton (1642-1727). Matemático, físico, astrônomo e filósofo inglês. Formulou em 1642 a teoria da composição da luz e descobriu as leis da atração universal.

[63] KANT, A crítica da razão pura. 1994, A714-B742.

> [...] apenas o conceito de grandeza se pode construir, isto é, expor a priori na intuição; mas as qualidades não se podem representar na intuição empírica. Por isso, um conhecimento racional destas qualidades só pode ser possível por conceitos[64].

Neste sentido, a forma circular poderá se tornar objeto de intuição sem nenhuma ajuda empírica, apenas baseada no conceito, mas a cor desse círculo deverá ser dada, previamente, em uma ou outra experiência.

Segundo Kant, a concepção da ciência não é formada só de juízos analíticos *a priori*, como declaram os racionalistas, também não é só formada por juízos sintéticos *a posteriori*, como declaram os empiristas. A Matemática e as ciências, em geral, são formadas por juízos sintéticos *a priori*, que são juízos universais, nos quais o predicado exprime algo de novo. Tanto os racionalistas como os empiristas não levaram em consideração a existência dos juízos sintéticos *a priori*, e é justamente nesse ponto que a ciência torna-se impossível, pois, ao considerar como fonte do conhecimento apenas os juízos analíticos, nega o 'elemento de novidade' e a importância da construção.

Apresentamos um exemplo extraído do próprio Kant, considerando a seguinte proposição: 'a soma dos ângulos é 180º em qualquer triângulo'. Ele escreveu que, para analisar o conceito de triângulo,

> [...} pode analisar e tornar claro o conceito de linha reta ou de ângulo ou do número três, mas não chegará a outras propriedades que não estejam contidas nestes conceitos. Mas que o geômetra tome esta questão. Começa imediatamente a construir um triângulo. Porque sabe que dois ângulos rectos valem juntamente tanto como todos os ângulos adjacentes que podem traçar-se de um ponto tomado numa linha recta, prolonga um lado do seu triângulo e obtém dois ângulos adjacentes que conjuntamente são iguais a dois rectos. Divide em seguida o ângulo externo, traçando uma linha paralela ao lado oposto do triângulo e vê que daí resulta um ângulo adjacente que é igual a um ângulo interno etc. Consegue desta maneira, graças a uma cadeia de raciocínios guiados sempre pela intuição, a solução perfeitamente clara e ao mesmo tempo universal do problema[65]

Observamos não ser suficiente analisar o conceito de 'triângulo', porém para chegar a essa propriedade é preciso construir um diagrama como este:

[64] KANT. A crítica da razão pura. 1994, A715-B743.
[65] Ibid., A761-B744.

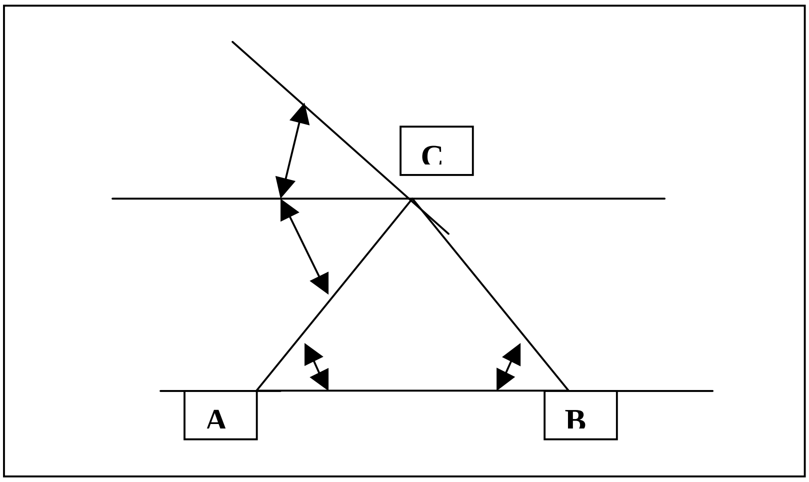


Figura 6

Para descobrir o fato buscado, este diagrama não é solicitado pela análise dos conceitos envolvidos, mas depende da criatividade da própria atividade. Neste sentido, Kant observou que o conhecimento não é formado nem do sujeito, nem do objeto,porém da interação sujeito/objeto, por meio da atividade construtora do sujeito. Assim, ele explicitou que a Matemática é uma atividade, e não há atividade sem contexto objetivo. O conhecimento matemático, como o conhecimento dos objetos, depende da intuição. Nesse sentido, este pensador cita que "sem a intuição faltam objectos a todo o nosso conhecimento e este seria, por isso, totalmente vazio"[66].

As considerações acima podem sugerir para a realidade que o objeto é o ponto de partida, pois compreendeu por intuição o metacognitivo, e esta problemática situa-se no processo de desenvolvimento, por exemplo, na relação entre conhecimento e aplicação do conhecimento. Assim, um conceito matemático, tal como o conceito de triângulo ou função, não existe independente da totalidade de sua representação possível, porém não deve ser confundido com uma delas. Um sistema formal pode ser representado por diferentes meios, e o teorema deve ser invariante em seu conteúdo real, mesmo que ocorra a mudança de representação.

Para o estudioso germânico, a Matemática pura fundamenta-se nos princípios *a priori*, e a este respeito afirmou que:

[66] KANT. A crítica da razão pura. 1994, A89.

> Dos conhecimentos *a priori*, são puros aqueles em que nada de empírico se mistura. Assim, por exemplo, a proposição, segundo a qual toda mudança tem uma causa, é uma proposição *a priori*, mas não é pura, porque mudança é um conceito que só pode extrair-se da experiência[67].

Portanto, os conhecimentos *a priori* são aqueles em que se verifica absoluta independência de toda e qualquer experiência, são axiomas fecundos e pertencem à categoria dos juízos sintéticos que permitem a construção indefinida de novos esquemas abstratos e de novas cadeias de símbolos. Neste sentido, a Matemática oferece-nos um exemplo brilhante do quanto se pode ir longe no conhecimento *a priori* que independe da experiência que é a *razão pura que se estende por si própria*. A Matemática ocupa-se de objetos e conhecimentos que podem ser representados pela intuição, pois a intuição pode ser dada de forma *a priori*, que é distinta de um simples conceito puro, e, diante desta prova, a razão não vê limites para seu desenvolvimento.

As proposições matemáticas são sempre *juízos a priori* e não empíricos, porque implicam necessidades que não são tiradas da experiência. O próprio Kant escreveu que "limitarei a minha tese à 'matemática pura', cujo conceito já de si exige que não contenha conhecimento empírico, mas conhecimento puro e *a priori*"[68].

Assim, a proposição:

> [...] 7 + 5 = 12 é uma proposição simplesmente analítica resultante, em virtude do princípio da contradição, do conceito da soma de sete e cinco. Porém, quando se observa de mais perto, verifica-se que o conceito da soma de sete e de cinco nada mais contém do que a reunião dos dois números em um só, pelo que, de modo algum, é pensado qual é esse número único que reúne os dois. O conceito de doze de modo algum ficou pensado pelo simples facto de se ter concebido essa reunião de sete e cinco e, por mais que analise o conceito que possuo de uma tal soma possível, não encontrarei nele o número doze. Temos de superar estes conceitos, procurando a ajuda da intuição que corresponde a um deles, por exemplo, os cinco dedos da mão ou (como Segner na sua aritmética) cinco pontos, e assim acrescentar, uma a uma, ao conceito de sete, as unidades do número cinco dadas na intuição. Com efeito, tomo o número sete e com a ajuda dos dedos da minha mão para intuir o conceito de cinco, adicionei-lhes uma, mediante este processo figurativo, as unidades que primeiro juntei para perfazer o número cinco e vejo assim surgir o número doze[69].

[67] IKANT. A crítica da razão pura. 1994., B3.
[68] Ibid., B15.
[69] Ibid., B15-B16.

A proposição aritmética é sempre sintética isso pode ser percebido melhor com números maiores, ficando provado que, por mais que vire ou revire, nunca encontraremos a soma pela simples decomposição dos números ou conceitos, sem o auxílio da intuição.

Kant também afirmou que "nenhum princípio da geometria pura é analítico"[70]. Assim, a proposição "a linha reta é mais curta entre dois pontos"[71] é sintética, porque o conceito de reta não tem nada de quantitativo, mas é apenas uma qualidade. O conceito de *mais curta* é acrescentado e não pode ser retirado de nenhuma análise do conceito de *linha reta*, é preciso recorrer à intuição, a única forma que possibilita a síntese.

Só algumas pressuposições dos geômetras são proposições analíticas. Por exemplo: $a = a$, o todo é igual a si mesmo, ou $(a + b) > a$, o todo é maior do que sua parte; essas proposições são admitidas na Matemática, porque podem ser representadas pela intuição.

Ao contrário do empirismo, que viu na Matemática uma aproximação grosseira da realidade, Kant considerou-a uma incorporação ao mecanismo de nosso pensamento. Assim, ao lado dessa Matemática pura, que trata dos conceitos e das operações aritméticas, existe um domínio de transição para a realidade concreta, que é representada pela geometria, a ciência do espaço.

Na introdução à *Crítica da Razão Pura*, Kant trata do problema da justificação da ciência, reconhecendo a realidade dos princípios universais e necessários, proporcionados pelo intelecto como queria o racionalismo, concomitante a um conteúdo sensível, que é a matéria, pois "forma sem matéria é vazia, assim como a matéria sem a forma é cega, irracional"[72]. Assim, o sistema kantiano provocou uma profunda transformação crítica do pensar, afetando todas as esferas da reflexão filosófica. Em relação a esta transformação, a filosofia kantiana apareceu como um ponto de referência obrigatório e, ao mesmo tempo, como um embaraço do qual despontam novas superações.

Conforme o exposto, Kant criou a teoria da 'interação', porém podemos observar que o mundo ocidental não atribuiu um valor significativo à sua epistemologia.

---

[70] KANT. A crítica da razão pura. 1994, B-16.
[71] Ibid., B-16.
[72] Ibid., A165.

Por isso as filosofias racionalistas e empiristas continuam prevalecendo, e as discussões e argumentações continuaram.

Em relação à teoria do conhecimento, racionalistas e empiristas assumem posições contraditórias. Assim, os primeiros postularam que não é da experiência que as idéias e princípios dão origem ao conhecimento, mas da razão. Neste sentido, Leibniz citou que ‘os três ângulos de um triângulo valem necessariamente dois rectos’, pois essa propriedade pode ser deduzida da natureza do triângulo.

Os segundos defenderam que o conhecimento é tudo que vem do mundo do objeto, do meio físico ou social. Neste sentido, Locke sustentou que, quando lembramos com ‘certeza a demonstração de que os três ângulos de um triângulo são iguais a dois rectos, eles serão sempre iguais a dois rectos’. Ele também asseverou que, quando o sujeito é convencido de alguma coisa, retém na memória, com convicção, mesmo sem as provas.

As duas tendências justificam o mesmo problema de forma contraditória, os racionalistas usando o recurso da dedução e os empiristas, o da experiência sensível. No entanto elas são complementares porque o conhecimento não pode ser só dedução, pois mesmo a dedução precisa do auxílio da percepção. O conhecimento não pode ser só percepção (sensação), pois mesmo a percepção precisa da dedução para concatenar suas idéias. Neste sentido, Kant postulou que o conhecimento não é uma reprodução passiva (só experiências) ou só dedução, porém a construção ativa do objeto por parte do sujeito, por meio da interação, que representou a síntese das correntes racionalistas e empiristas.

Assim sendo, conforme as posições acima, Piaget propôs um *tertium*, por meio da epistemologia genética (construtiva), tornando-se o criador do construtivismo, que pode ser considerado hoje como a reformulação do interacionismo de Kant. A essa reformulação, somamos a visão genética e transformista (dialética), que passamos a apresentar no próximo capítulo.

CONSTRUTIVISMO PIAGETIANO

3.1 INTRODUÇÃO

Em suas observações sobre a psicogênese do conhecimento, Piaget formulou três pontos de vista sobre o modo de aquisição do conhecimento: empirismo, pré-formação *(inatismo*) e seu próprio construtivismo na relação entre sujeito e objeto, em que salientou a importância do processo da abstração reflexiva, destacando os conceitos de adaptação, assimilação e acomodação.

Em seus estudos psicogenéticos relativos à aquisição do conhecimento, Piaget afirmou que:

> [...] não existem conhecimentos resultantes de um registro simples de observações, sem uma estruturação devida às actividades do sujeito. Mas também não existem (no homem) estruturas cognitivas a *priori* ou inatas: só o funcionamento da inteligência é hereditário e só engendra por uma organização de acções sucessivas exercidas sobre objectos. Daqui resulta que uma epistemologia conforme com os dados da psicogênese não poderia ser nem empirista nem pré-formista, mas consiste apenas num construtivismo, com a elaboração contínua de operações e de estruturas novas. O problema central é, então compreender como se efectuam estas criações e porque, visto resultarem de construções não prédeterminadas, se podem tornar logicamente necessárias, durante o desenvolvimento[73]

Destacou a importância da atividade do sujeito e, baseado nisso, afirmou que o conhecimento é uma construção contínua de operações e estruturas novas pelo processo da abstração, não sendo só o resultado do registro de simples observação ou do inatismo. Neste sentido, mostraremos a posição piagetiana a respeito do empirismo.

---

[73] PIAGET & CHOMSKI. Teorias da linguagem, teorias da aprendizagem. 1987, p. 51.

3.2 O EMPIRISMO NA VISÃO PIAGETIANA

As afirmações de Piaget sobre a inadequação do empirismo fizeram com que muitos concluíssem que ele deveria ser racionalista. Conclusão equivocada, porque o estudioso suíço insiste igualmente na inadequação do racionalismo, postulando que a capacidade de raciocinar é inata. Defendeu a posição de que o conhecimento é construído e que a interação entre experiência sensorial e raciocínio é indissociável.

Em relação à crítica ao empirismo, esclarece que "não consiste em negar o papel da experimentação, porém o estudo 'empírico' da gênese dos conhecimentos, mostra sem dificuldade a insuficiência da interpretação 'empírica' da experiência"[74].

O empirismo tem a tendência de:

> [...] considerar a experiência como algo que se impõe por si mesmo, sem que o sujeito tenha de organizá-la, isto é, como se ela fosse impressa diretamente no organismo, sem que uma atividade do sujeito seja necessária a sua constituição[75].

Neste sentido, Piaget (1975) menciona que essa:

> [...] dupla crença na existência de uma experiência autônoma e na sua pressão direta sobre o espírito do sujeito explica, afinal de contas, por que o empirismo é necessariamente associacionista: toda e qualquer outra forma de registro da experiência, além da associação sob as suas diferentes formas, supõe, com efeito, uma atividade intelectual que participa na construção da realidade exterior percebida pelo sujeito[76].

Portanto, a experiência não é recepção, mas ação e construção progressivas. Defendeu ainda que nenhum conhecimento se deve apenas às percepções, porque elas são sempre dirigidas e enquadradas por esquemas de ações. Neste sentido, o conhecimento procede da ação e toda a ação repete-se ou se generaliza por aplicação a novos objetos. Nesta perspectiva, o pesquisador genebriano elucidou que:

> [...] ligação fundamental constitutiva de todo o conhecimento não é, pois, uma simples *associação* entre objectos, porque esta noção negligência a parte de actividade devida ao sujeito, mas é a *assimilação* dos objectos a esquemas deste sujeito. Aliás, este processo prolonga as diversas formas de 'assimilações' biológicas, cuja assimilação cognitiva é um caso

[74] PIAGET & CHOMSKY. Teorias da linguagem, teorias da aprendizagem. 1987, p. 51.
[75] PIAGET. O nascimento da inteligência na criança. 1975, p. 339.
[76] Ibid., p. 340.

> particular enquanto processo funcional de integração. Por outro lado, quando os objectos são assimilados aos esquemas de ação, há obrigação de uma ‘acomodação’ às particularidades destes objectos (cf. os acomodados fenotípicos em biologia), e esta acomodação resulta, com efeito, de dados exteriores, logo, da experiência[77].

De fato, o conhecimento não é uma simples ‘associação’ ou transmissão/exposição de conhecimento, pois este não é uma cópia da realidade, porém uma atividade por parte do sujeito que constrói seu conhecimento, à medida que, interage com a realidade. Essa construção ocorre mediante os processos de ‘assimilação’ e ‘acomodação’. O estudioso suíço mencionou que:

> [...] empregamos o termo assimilação no sentido de integração a estruturas prévias [...] que podem permanecer invariáveis ou são mais ou menos modificadas por esta própria integração, mas sem descontinuidade com o estado precedente. [...] a assimilação é o único a conferir significação ao que é percebido ou concebido[78].

A noção de assimilação apresenta dois pontos fundamentais: o primeiro, a noção de significação, pois todo conhecimento refere-se a significações (índices ou sinais perceptivos). O segundo, pelo fato de que todo conhecimento está ligado a uma ação, e conhecer um objeto significa utilizá-lo, assimilando-o a esquemas de ação.

Portanto, o sujeito incorpora a nova informação, tornando-a parte de seu conhecimento. A assimilação é necessária, pois assegura a continuidade e a integração de novos elementos a estas estruturas. Na acomodação, o sujeito transforma a informação que já tinha em função da nova, representando uma acomodação ativa e não um simples registro passivo. Para explicitar, Piaget afirmou que:

> [...] é este mecanismo exógeno que converge com o que existe de válido na tese empirista, mas (e esta reserva é essencial) a acomodação não existe no estado “puro” ou isolado, já que é sempre a acomodação de um esquema de assimilação: portanto, é esta que continua a ser o motor do ato cognitivo[79].

Desde o nascimento, estes mecanismos são perceptíveis e gerais, e podem ser notados nos diferentes níveis do pensamento científico. Assim sendo, no processo da:

---

[77] PIAGET & CHOMSKY. Teorias da linguagem, teorias da aprendizagem. 1987, p. 51-52.
[78] PIAGET. Biologia e conhecimento. 1996, p. 13-14.
[79] PIAGET & CHOMSKY. Teorias da linguagem, teorias da aprendizagem. 1987, p. 52.

> [...] assimilação reconhece-se porque um "observável" ou um "facto" são desde o princípio, da utilização de quadros lógico-matemáticos tais como o estabelecimento de relações ou de correspondência, de vizinhanças ou de separações, das quantificações conducentes, mais ou menos, às medidas, em suma, necessita de toda uma conceptualização devida ao sujeito e que exclui a existência de "factos" puros, enquanto inteiramente exteriores às atividades deste sujeito[80].

O empirismo considerou o organismo, até certo ponto, inteiramente sujeito à eventualidade do meio, pois o conhecimento é como uma cópia subjetiva de algo que é simplesmente dado no mundo externo.

Para Piaget, o conhecimento em todos os níveis é uma relação dinâmica. Ele faz o possível para demonstrar que até mesmo o tipo mais elementar de conhecimento perceptivo decorre da atividade construtiva do organismo em interação com os dados sensoriais.

Assim sendo, enquanto os empiristas fazem do espírito cognoscente um ser passivo que responde a estímulos, Piaget insiste na atividade organizadora do sujeito por coordenações sucessivas. É por assimilação do meio, segundo um esquema ***S*** → organismo organizador → ***R*,** que o sujeito conhece. Adotou uma perspectiva genética e situou o problema epistemológico (conhecimento) em nível da interação entre sujeito e objeto, que permitiu seguir as fases sucessivas da construção progressiva do conhecimento.

3.3 PRÉ-FORMAÇÃO

Piaget esclareceu com relação à pré-formação que o conhecimento não pode ser uma cópia, pois:

> [...] o objeto só existe, para o conhecimento, nas suas relações com o sujeito e, se o espírito avança sempre e cada vez mais à conquista das coisas, é porque organiza a experiência de um modo cada vez mais ativo, em vez de imitar de fora uma realidade toda feita: o objeto não é um *dado*, mas o resultado de uma construção[81].

[80] PIAGET & CHOMSKY. Teorias da linguagem, teorias da aprendizagem. 1987, p. 52.
[81]PIAGET. O nascimento da inteligência na criança. 1975, p. 351.

Assim, partindo deste pressuposto, restringiu sua crítica à hipótese das predeterminações e, ao considerar os fatos da psicogênese, constatou a existência de estádios que demonstram uma construção contínua.

Em relação ao período sensório-motor, Piaget (1978) destacou que é anterior à linguagem, vê constituir-se uma lógica das ações e das relações de ordem, ajustamento dos esquemas, intersecções, estabelecimento de correspondências etc. fecunda em descobertas e até em invenções (objetos permanentes, organização do espaço, da causalidade etc.).

Neste período a inteligência apresenta-se sob a forma totalmente prática e refere-se à manipulação dos objetos. Basicamente, utiliza-se de percepções e movimentos organizados em *esquema de ação,* ao invés de palavras e conceitos. A técnica instintiva corresponde ao impulso instintivo elementar ligado à alimentação, que compreende a coordenação sensorial e motora, mas que nada têm de passividade mecânica, pois há descoberta e invenção de meio novo por combinação mental.

Para Piaget:

> [...] o conhecimento não é nem uma cópia do objeto, nem uma tomada de consciência de formas, *a priori*, que sejam predeterminadas no indivíduo, é uma construção perpétua, por permutas, entre o organismo e o meio, do ponto de vista biológico, e entre o pensamento e o objeto, do ponto de vista cognitivo[82].

Assim, para o autor citado o organismo que conhece, é em todos os níveis um agente muito ativo que se defronta com o ambiente, retirando as informações dele, e este, em contato com as estruturas já construídas, é reorganizado pelo processo da abstração reflexiva, nosso próximo tema a ser abordado.

3.4 CONSTRUTIVISMO PIAGETIANO E A RELAÇÃO ENTRE SUJEITO E OBJETO

A construção do conhecimento pelo homem foi objeto de estudo de Piaget que defendeu que a fonte do conhecimento é interna e não externa aos sujeitos. Portanto, ele não aceitou que o conhecimento seja o resultado de um conjunto de registros perceptivos, associações motoras, descrições verbais etc., que apenas ajudam na produção de uma cópia

[82] BRINGUIER. Conversando com Jean Piaget. 1993, p. 155.

figurativa dos objetos. Neste caso, o conhecimento seria passivo, não passaria do registro sistemático de informações de objetos externos ao sujeito. Assim, o conhecimento vem de fora e as coordenações surgem em função da linguagem e de instrumentos simbólicos.

Piaget defendeu que "para conhecer os objetos o sujeito deve agir sobre eles e, portanto, transformá-los: deve deslocá-los, ligá-los, combiná-los, dissociá-los e reuni-los novamente"[83]. Nesta perspectiva, o conhecimento permanece constantemente, ligado a ações ou operações (transformações), desde as atividades mais simples como o ato de empurrar e puxar até as operações intelectuais que representam as ações interiorizadas, tais como associar, ordenar, classificar, seriar etc. que são efetuadas mentalmente. Neste sentido, o limite entre o sujeito e o objeto não se encontra predeterminado e, também, não é estável; ao contrário, é dinâmico, pois verifica-se em permanente transformação. O conhecimento não vem dos objetos nem do sujeito, mas da interação entre o sujeito e esses objetos. O problema do conhecimento ou epistemológico não deve ser pensado de forma desvinculada do desenvolvimento intelectual, pois "ele reduz à análise de como o sujeito se torna progressivamente capaz de conhecer os objetos adequadamente, isto é, como ele se torna capaz de alcançar o conhecimento objetivo"[84].

Desse modo, se a objetividade não é uma propriedade inicial, como afirmam os empiristas, a conquista da objetividade envolve uma série sucessiva de constructos, representando a segunda idéia central da teoria: a de construção. O conhecimento objetivo tem a sua origem na interação sujeito e objeto e não no registro de informações externas. Conseqüentemente, envolve "dois tipos de atividades – de um lado a coordenação das próprias ações e de outro lado a introdução de inter-relações entre os objetos"[85], representando duas atividades interdependentes, porque só podem se manifestar por meio da ação.

O conhecimento objetivo torna-se dependente das estruturas de ação resultantes de uma construção, que não são dadas nem no objeto nem no sujeito, porém é o resultado de uma ação que o sujeito deve aprender a coordenar, porque não está programada hereditariamente.

[83] PIAGET. A teoria de Piaget. 1975, p. 72. In: CARMICHAEL, L. Psicologia da criança.
[84] Ibid., p. 72.
[85] Ibid., p. 73

Para exemplificar, citamos a estrutura do “grupo de deslocamentos no sentido geométrico: **a)** o deslocamento AB + BC = AC; **b)** os deslocamentos AB + BA = 0; **c)** AB + O = AB; **d)** AC + CD = AB + BD”[86]. A ação desenvolvida implica retorno a uma posição inicial ou rodeio de um obstáculo (a e d). Esta disposição é construída pelo sujeito por meio de uma série de coordenações (retorno e rodeio), possibilitando a estruturação objetiva do movimento do objeto, a qual pode ser traçada em função de seu deslocamento e posição sucessiva.

Piaget esclareceu que “a construção do grupo de deslocamento supõe ao mesmo tempo a experiência física e informação empírica. Mas também implica algo mais, pois depende também das coordenações das ações do sujeito”[87]; daí decorre a importância da atividade do sujeito.

Um outro exemplo é aquele em que as ações primitivas transformam-se em operações e são “ações interiorizadas (por exemplo, a adição que pode, tanto ser executada física como mentalmente), reversíveis (a adição tem seu inverso na subtração) e formam um conjunto teórico de estrutura (tais como ‘agrupamento’ lógico aditivo ou grupos algébrico)”[88].

O atomismo inventado pelos gregos é um belo exemplo envolvendo operações dependentes da atividade do sujeito. Assim, no experimento fundamentado na dissolução de pedaços de açúcar em um copo de água, podemos abordar dois aspectos: primeiro, a respeito da conservação da matéria dissolvida e segundo, sobre a conservação de seu peso e volume.

Segundo Piaget, o mesmo processo pode ser observado sob diferentes ângulos assim: antes dos 7-8 anos, a criança pensa que ocorreu a dissolução do açúcar, acarretando sua destruição; entre 7-8 anos, acredita que o açúcar é conservado em forma de pequenos grãos invisíveis sem peso e volume. Aos 9-10 anos, acredita que o peso é mantido mesmo após ser dissolvido e dos 11-12 anos, percebe que o volume é mantido. Estas diferentes reações indicam que não basta a realização de experimentos para explicar o aparecimento da estrutura, pois sua construção depende da atividade do sujeito, já que envolve uma composição aditiva.

---

86 PIAGET. A teoria de Piaget. 1975, p. 74. In: CARMICHAEL, L. Psicologia da criança.
87 Ibid., p. 75.
88 Ibid., p. 75.

Assim sendo, mesmo indicando que os grãos visíveis no ato da dissolução tornam-se menores:

> [...] ultrapassa de longe o que pode ser visto pelo sujeito e implica construção passo a passo, correlativa àquela das operações aditivas. Temos, assim, um novo exemplo da origem do conhecimento, que não está somente no objeto e nem no sujeito, mas antes numa interação indissociável entre os dois, de tal modo que aquilo que é dado fisicamente é integrado numa estrutura lógico-matemática implicando a coordenação das ações do sujeito. A decomposição do todo em suas partes (aqui invisível) e a recomposição destas partes num todo são de fato o resultado de construções lógicas ou lógico-matemáticas e não só de experimentos físicos[89].

Neste caso, a soma acontece por operações e não por uma simples observação, o que torna fundamental a atividade do sujeito. Neste sentido, a experiência com objeto pode ser analisada sob dois aspectos diferentes: o empírico e o lógico-matemático.

No primeiro caso, as propriedades dos objetos já existem antes da ação do sujeito, tais como peso, cor, forma etc., que permitem constatar as propriedades inerentes aos objetos.

No segundo caso, é o resultado da ação do sujeito exercida sobre o objeto, por meio das ações de reunir, agrupar, ordenar etc., que são ações que dependem da atividade do sujeito, portanto são construídas. Assim sendo, se as estruturas lógico-matemáticas não estão pré-formadas, quais serão os mecanismos que asseguram as construções de um nível a outro? A esta questão, o pesquisador genebriano distinguiu três tipos diferentes de abstrações: a abstração empírica a abstração lógico-matemática e a abstração refletida ou pensamento reflexivo.

3.5 ABSTRAÇÃO EMPÍRICA, ABSTRAÇÃO LÓGICO-MATEMÁTICA E ABSTRAÇÃO REFLETIDA

Segundo Piaget, a abstração empírica é “aquela que se debruça sobre os objetos físicos exteriores ao sujeito”[90] e representa o primeiro tipo de abstração. Neste tipo de abstração, as informações são provenientes dos próprios objetos que são percebidos ou *descobertos* quando o sujeito age sobre eles, com base nas informações perceptivas. As

[89] PIAGET. A teoria de Piaget. 1975, p. 75. In: CARMICHAEL, L. Psicologia da criança.
[90] PIAGET & CHOMSKY. Teorias da linguagem, teorias da aprendizagem. 1987, p. 54.

propriedades são *descobertas* por meio das experimentações ou ações individuais, tais como pegar, jogar, empurrar, tocar etc., em que o conhecimento pode ser abstraído dos próprios objetos.

Assim, por exemplo, uma criança, para perceber a diferença de peso, poderá pegar os objetos em suas mãos e verificar que eles têm pesos diferentes, constatando que coisas maiores, geralmente, pesam mais do que coisas menores, mas que, às vezes, às menores pesam mais que as maiores. O peso ou diferença de peso não pode ser abstraído sem atividade, ou seja, o peso é uma propriedade que não depende do tamanho/forma etc. Outra coisa: o valor não pertence a uma mercadoria, como objeto empírico, mas depende das atividades do mercado:

> Casaco e sapatos, ao representarem o mesmo valor de troca, são representantes de uma determinada substância ou de algo objetivo, a saber, o valor econômico em si, mas este último somente surge neste mundo pelas diferentes atividades. A substituibilidade revela-se, no contexto operacional, a mais importante determinação da igualdade. Mas ela não pode ser dada independentemente de qualquer contexto e a priori. Na medida em que, casaco e sapatos exibam outras propriedades, além da de serem mercadorias do mesmo valor, em outros contextos eles não são de maneira alguma permutáveis. Tais classificações não são, portanto, necessariamente transitivas, mas dependem sempre do contexto. Já que casaco e sapatos não são entendidos como aparências sensoriais, mas como objetos da atividade, como valores de uso e de troca, eles mudam de caráter com a atividade. Dito de outra forma, casaco e sapatos são permutáveis por serem bens de consumo igualmente úteis. As relações nas quais eles são permutáveis não se determinam nesta atividade de troca, mas na sua produção como valores de uso e pelo custo que naquele momento é necessário para produzir esses valores de uso[91].

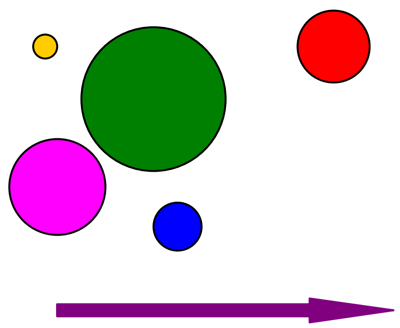
O próprio Piaget talvez tivesse uma idéia simples demais da abstração empírica. Porém a respeito da Matemática, o autor afirma com toda razão e dá ênfase a essa distinção entre abstração empírica e *abstração reflexiva:* a Matemática sempre depende da *abstração reflexiva*. Nesta experiência física em qualquer situação vai se referir a uma estrutura matemática, embora ainda sendo muitas vezes elementar. O segundo tipo é representado pela abstração lógico-matemática.

[91] OTTE. O formal, o social e o subjetivo. 1993, p. 53.

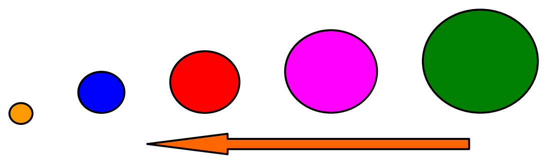
> Abstração lógico-matemática que será chamada, pelo contrário, «reflexiva» porque procede a partir das ações e das operações do sujeito. Até o é num duplo sentido, de onde se originam dois processos solidários, mas distintos o de uma projeção sobre um plano superior, daquilo que é extraído do nível inferior, então trata-se de um «reflexo»; e o de uma «reflexão» enquanto reorganização sobre o novo plano - esta reorganização só utiliza, primeiro, a título instrumental as operações extraídas do nível precedente, mas que visam (mesmo se este objetivo permaneça em parte inconsciente) à sua coordenação numa totalidade nova[92].

Piaget chama de *abstração reflexiva* por duas razões: em primeiro lugar, ela é reflexiva no sentido de uma projeção física, supondo um refletir em um patamar superior ao que é retirado de um plano inferior. A abstração é um reflexo do nível de ação para o nível intelectual de operações.

No pensamento lógico-matemático, o tema de uma operação torna-se objeto de pensamento reflexivo, após ter servido como instrumento de construção. Por exemplo, quando se organiza uma coleção de bolinhas (Figura 7) em determinada seqüência e se descobre que a ordenação de uma coleção de objetos independe da ordem de enumeração (da direita para a esquerda e da esquerda para a direita) representada na Figura 7.



Coleção de objetos – Figura 7



Objetos ordenados - Figura 8

[92] PIAGET & CHOMSKY. Teorias da linguagem, teorias da aprendizagem. 1987, p. 54.

Neste caso, extrai-se o conhecimento adquirido (comutatividade) não da propriedade física da coleção de objetos, porém, da ação por ela praticada. Assim:

> Então é necessário supor que abstração iniciando de ações e operações que nós chamaremos de abstração reflexiva difere da abstração de objetos percebidoss que nós chamaremos de abstração empírica (assumindo a hipótese de que objetos não perceptíveis, são o produto das operações) no sentido de que a abstração reflexiva é necessariamente construtiva. (Tradução livre da autora)[93].

Mas o que é construído? Obviamente, relações e estruturas de relações entre atividades, como no exemplo da coleção de objetos (veja p. 77), em que primeiro reporta-se às bolinhas como objetos, porém agora compreendendo que a ordem é variável e a relação entre elas não pode ser observada pela confirmação, porque a relação deve visar ao objeto imediato de reflexão.

Em segundo lugar, refere-se ao processo mental de reflexão, nível de pensamento no sentido de uma reorganização mental, cujo refletir chega a um patamar superior e precisa reconstruir o que foi abstraído do patamar inferior, ajustando-o, dando à *abstração reflexiva* um caráter progressivo e regressivo.

Neste sentido, há uma reconstrução ampla de patamar por patamar por 'espirais', da ordem inicial em que a *abstração reflexiva* permite generalizar a cada novo patamar os elementos tirados do patamar precedente. As novas estruturas passam pelo processo de *abstração reflexiva* e da construção. Assim sendo, é ao mesmo tempo abstração com base no plano anterior e na reconstrução enriquecida no novo patamar. Dessa forma, o que diz respeito à aquisição do novo conhecimento pela criança é derivado do resultado das próprias ações ou coordenações de ações:

> (*a*) experiência lógico-matemática consiste em observar os resultados de ações executadas em qualquer objeto; (b) os resultados são assim determinados pelos esquemas das ações sobre os objetos; (c) porém, para observar (notar) estes resultados, o sujeito precisa realizar outras ações (de notar) usando os mesmos esquemas como esse produto que deve ser examinado. Contudo, (d) o conhecimento adquirido é novo para o sujeito, porém (embora em princípio, uma dedução simples poderia ter substituído a experiência) a experiência ensina-lhe o que ele não estava consciente no

[93] PIAGET & BETH. Mathematical epistemology and psychology. 1961, p. 189. It is then necessary to suppose that abstraction starting from actions and operations – which we shall call "reflective abstraction" – differs from abstraction from perceived objects – which we shall call "empirical abstraction" (assuming the hypothesis that non–perceptible objects are the product of operations) – in the sense that reflective abstraction is necessarily constructive.

> seu progresso. Nós podemos concluir então (e) que a abstração por meio da qual o sujeito adquire conhecimento novo dos resultados de suas ações - conhecimento que é novo para a sua consciência - envolve alguma construção; e isto tem o efeito de traduzir o esquema e suas implicações em termos de pré-operações ou operações conscientes, depois da manipulação da qual permitirá substituir por meio de deduções as experiências ou procedimentos empíricos que se tornaram inúteis[94] (Tradução livre da autora).

Isso significa que as construções ou sistemas de ações precisam ser transformados em objetos de reflexão, antes de tornarem-se um caráter necessário, pois só quando adquirem esse caráter necessário podem ser generalizados.

Nesse sentido, a *abstração reflexiva* não é nada mais do que uma abstração construtiva que dá origem a um novo conhecimento. Partindo de suas próprias ações, realiza várias operações simultaneamente (ou ações coordenadas); relacionando umas com as outras, elimina as contradições existentes; buscando a coerência interna dessa organização preliminar, constrói assim um *objeto* (idealizado não empírico), e isto depende da construção:

> Na realidade, um esquema de ação é só a forma de uma série de ações que tomam lugar sucessivamente, sem uma percepção simultânea do todo. Assim, a abstração reflexiva melhora à forma de um esquema operacional, ou seja, de uma estrutura tal que quando uma das operações for usada, sua combinação com outros se torna dedutivamente possível por meio de uma reflexão que vai além da ação momentânea[95] (Tradução livre da autora).

De fato, a experiência lógico-matemática não diz respeito aos objetos físicos, mas às suas ações realizadas sobre eles mesmos, dando-nos uma compreensão de que, no nível posterior, poderemos entender a Matemática fora desses objetos. O conceito da *abstração reflexiva* origina-se das ações dos sujeitos e das coordenações de ações cada vez

[94] PIAGET & BETH. Mathematical epistemology and psychology. 1961, p. 237. (*a*) *logico-mathematical experience consists of observing the results of actions performed upon any objects; (b) the results are determined by the schemes of the actions thus carried out on the objects; (c) but in order to observe (or to "note") these results, the subject has to carry out other actions (of "noting") using the same schemes as those the product of which must be examined. However, (d) the knowledge acquired is new for the subject, that is (although in principle, a simple deduction might have replaced experience) experience teaches him what he was not aware of in the advance. We must therefore conclude (e) that the abstraction by means of which the subject acquires new knowledge of the results of his actions – knowledge which is new for his consciousness – involves some construction; and this has the effect of translating the scheme and its implications into terms of pre-operations or conscious operations, the later handling of which will allow him to replace by deductions the experiences or empirical procedures which have thus become useless*.

[95] PIAGET & BETH. Mathematical epistemology and psychology. 1961, p. 237. A scheme of action is, in fact, only the form of a series of actions which take place successively without a simultaneous perception of the whole. Reflective abstraction, on the other hand, upgrades it to the form of an operational scheme, that is, of a structure such that when one of the operations is used, its combination with others becomes deductively possible through a reflection going beyond the momentary action.

mais amplas transformadas em operações, que mais tarde podem se realizar simbolicamente sem se ocuparem dos objetos que se fizeram presentes, em qualquer caso, no início de suas ações.

A a*bstração reflexiva* significa que as próprias ações (ou as relações entre elas) tornam-se 'objetos' no próximo nível, contudo a *abstração reflexiva* inicia-se de ações, coordenadas de diferentes formas, que podem: ser unidas, obtendo-se a coordenação aditiva; suceder uma após a outra em ordem temporal, obtendo-se a coordenação ordinal ou seqüencial; estabelecer correspondência entre uma e outra ação, ou estabelecer interseção entre ações. Todas essas coordenações fornecem paralelos nas estruturas lógicas, cujas raízes são encontradas nas coordenações de ações que são as bases das abstrações.

O terceiro tipo de abstração refere-se à:

> [...] a «abstração refletida» ou de «pensamento reflexivo» para designar a tematização do que continuava operacional ou instrumental em (2); a fase (3) constitui assim a culminação natural de (2), mas supõe a mais um jogo de comparações explícitas de um nível superior às «reflexões» em ação nas utilizações instrumentais e nas construções em devir de (2). Portanto, é importante distinguir as fases de abstrações reflexivas que intervêm em toda a construção quando se trata da solução de problemas novos e a abstração refletida que lhe acrescenta um sistema de correspondências explícitas entre as operações assim tematizadas[96].

As *abstrações reflexivas* e refletidas são fontes de novidades estruturais, pois, segundo Piaget, a projeção sobre um plano superior de um elemento extraído de um patamar inferior (por exemplo, a ordenação das bolinhas) constitui um estabelecimento de correspondência, o que já é uma novidade, e este possibilita a abertura de novas conexões, o que representa uma abertura nova. O elemento transferido para o novo patamar em conjunto com o que aí já se encontrava ou que pode se juntar, que é então obra da reflexão no sentido de uma reconstrução, vai dar origem a novas combinações que podem conduzir até à construção de novas operações que se processam sobre as precedentes, o que é a marcha habitual do progresso matemático (exemplo na criança: uma sucessão de adições que engendram a multiplicação). Toda a projeção sobre um novo patamar necessita de uma reorganização, e o que chamamos de reflexão é esta reconstrução produtora de novidades.

[96] PIAGET & CHOMSKY. Teorias da linguagem, teorias da aprendizagem. 1987, p. 54.

Ela entra em ação, por jogo de assimilações e de coordenações ainda instrumentais, sem tomada de consciência da estrutura como tal (e isto se encontra ao longo de toda a história das matemáticas). Enfim, torna-se possível a abstração refletida que, embora incida apenas sobre os elementos já construídos, constitui, naturalmente, uma construção nova.

3.6 ADAPTAÇÃO

Em relação ao tema, Piaget afirmou que "a organização é indissociável da adaptação, porque um sistema organizado é aberto para o meio e seu funcionamento supõe assim trocas com o exterior, cuja estabilidade define o caráter adaptado que possui"[97].

Para o pesquisador citado, organização e adaptação são inseparáveis e ele as considera como dois processos complementares de um só mecanismo. O primeiro representa a parte interna e o segundo, o aspecto externo. Assim, esses dois lados do pensamento são inseparáveis, já que "é adaptando-se às coisas que o pensamento se organiza e é organizando-se que estrutura as coisas"[98].

Se a adaptação for definida pela "*conservação* e pela sobrevivência, isto é, pelo equilíbrio entre o organismo e meio"[99], no sentido biológico, é preciso diferenciar a adaptação-estado da adaptação-processo. No primeiro caso, nada é claro, por exemplo, em uma classificação em classes e subclasses, as operações em jogo oferecem várias possibilidades para assimilar o real, no caso, os objetos a serem classificados ou de novos objetos a serem classificados, segundo as mesmas operações, que dependem da atividade do sujeito. No segundo caso, a adaptação-processo descreve e explica os progressos do conhecimento, interferindo logo que há modificação no meio. Para Piaget, "a adaptação só se realiza quando atinge um sistema estável, isto é, quando existe equilíbrio entre acomodação e assimilação"[100].

[97] PIAGET. Biologia e conhecimento. 1996, p. 198.
[98] PIAGET. O nascimento da inteligência na criança. 1975, p. 19.
[99] Ibid., p. 16.
[100] Ibid., p. 18.

3.7 ASSIMILAÇÃO

O termo *assimilação* é empregado por Piaget por empréstimo da Biologia e Fisiologia e significa a integração de elementos de fora nas estruturas em desenvolvimento, ou já completas de um organismo. Como exemplo, citamos a assimilação de alimentos, que consiste na transformação química dos elementos ingeridos até se transformarem em substância já existente no organismo para serem a ele incorporados.

Assim, um sujeito que se alimenta com carne, ele não se transforma em carne, mas, pelo contrário, a carne transforma-se no sujeito, neste caso, a carne é transformada em proteínas e sais minerais para serem assimilados.

Piaget explicou como ocorre o processo da *assimilação,* assim "sejam **a, b, c** etc. as estruturas em construção de um sujeito e **x, y, z** etc. os elementos do meio (objetos), então, pode ocorrer o processo de assimilação"[101] da seguinte forma:

1- ***a*** + ***x*** — ***b***

2- ***b*** + ***y*** — ***c***

3- ***c*** + ***z*** — ***a***

O processo da transformação de ***a + x*** em ***b*** ou ***b + y*** em ***c*** pode ser:

a- transformação química – como no caso em que o organismo ingere substância ***x***, que ele transforma em substância ***b,*** que já existe no organismo ou

b- transformação física – como no caso de um ciclo de ações físicas a combinadas aos movimentos externos ***x***, chegar a um resultado ***b***, que já faz parte do ciclo de ações.

Assim, as relações que unem elementos organizados **a, b, c,** pertencem ao organismo e os **x, y, z** etc. correspondem ao meio e constitui uma relação de assimilação, portanto, **"**o funcionamento do organismo não destrói, mas conserva o ciclo de organização e coordena os dados do meio de modo a incorporá-los nesse ciclo"[102].

---

[101] PIAGET. O nascimento da inteligência na criança. 1975, p. 17.
[102] Ibid., p. 17.

A equação n° 3 demonstra o retorno à estrutura inicial ***a*** que permanece inalterável, pois a assimilação é determinada pelo indivíduo, por isso o que muda, é o objeto externo e não o sujeito. Neste sentido, Piaget explicou que a "assimilação é um conceito biológico antes de tudo. Absorvendo o alimento, o organismo assimila o meio: isto significa que o meio está subordinado à estrutura interna e não o inverso"[103].

Piaget esclareceu que a assimilação apresenta-se sob três formas indissociáveis:

> [...] a primeira, a assimilação reprodutora ou funcional consiste em repetir uma ação e em consolidá-la por isso mesmo; a segunda, a assimilação recognitiva refere-se a discriminar os objetos assimiláveis a um esquema dado; e a terceira forma, à assimilação generalizadora consistindo em estender o domínio desse esquema.[104]

A assimilação reprodutora refere-se ao ato de repetir muitas vezes uma ação, como no exemplo de uma criança que aprende a andar de bicicleta e o faz até se cansar, assim, este ato representa uma forma de aperfeiçoamento de um comportamento adquirido. Já a assimilação recognitiva compreende a discriminação e a diferenciação, incluindo, sobretudo, a identificação dos objetos. Por exemplo, uma criança que deseja andar em equilíbrio, ao caminhar pela rua, vai procurar todas as situações que favoreçam esta condição, tais como andar sobre o fio da calçada, sobre murinhos do jardim etc. Na assimilação generalizadora, a criança procura aplicar um novo conceito a todas as coisas. Por exemplo, se tivermos:

> [...] uma criança andando pelo campo com um adulto e este aponta para *uma vaca* e diz o que é aquilo? A criança olha para a vaca (estímulo) e diz é um *cachorro***.** O que aconteceu? O menino, vendo o objeto (vaca) no campo, examina sua coleção de esquemas até encontrar um que lhe pareceu apropriado para nele incluir o objeto[105].

Citaremos, também, um exemplo piagetiano de assimilação generalizadora em que o sujeito age sobre o objeto e não é absorvido por ele, mas o objeto é assimilado assim:

---

[103] BRINGUIER. Conversando com Jean Piaget. 1993, p. 62.
[104] PIAGET. Problemas de psicologia genética. 1973, p. 67.
[105] WADSWORTH. Inteligência e afetividade da criança na teoria de Piaget. 1997, p. 19-20.

> [...] desde as coordenações mais elementares encontramos na assimilação uma espécie de esboço ou prefiguração do julgamento: o bebê que descobre que um objeto pode ser sugado, balançado ou puxado, se orienta para uma linha ininterrupta de assimilações que conduzem até às condutas superiores que usam o físico quando 'assimila' (ele também!) o calor ao movimento ou uma balança a um sistema de trabalhos virtuais[106].

Neste sentido, diante de uma situação nova, pode ocorrer s incorporação desta situação (entendimento), e a assimilação é possível sem implicar necessidades de modificação interior nas concepções de nossos sistemas cognitivos.

Piaget concebe a "assimilação como incorporação de uma realidade externa qualquer uma ou outra parte do ciclo de organização"[107]. Assim sendo, a assimilação implica de um lado a noção de significação, uma vez que todo conhecimento é relativo a significações (sinais perceptivos), e de outro lado o conhecimento está ligado a uma ação, e, para conhecer um objeto ou acontecimento, agimos sobre estes, assimilando-os a esquemas de ações.

3.8 ACOMODAÇÃO

Segundo Piaget, "acomodação (por analogia com os **acomodatos** biológicos) é toda modificação dos esquemas de assimilação sob influência de situações exteriores (meio), aos quais se aplicam"[108]. Porém, como não há assimilação sem acomodações (anteriores ou atuais), assim também não há acomodação sem assimilação. Isto significa que o meio não provoca simplesmente o registro de impressões ou a formação de cópias, mas desencadeia ajustamentos ativos. Por isso que só falamos em *acomodação* subentendendo *acomodação de esquemas de assimilação.*

A modificação de um esquema ou de uma estrutura em função das particularidades do objeto a ser assimilado pode ser de duas e podendo ter duas alternativas:

- Criar um novo esquema, no qual se possa encaixar o novo estímulo; ou
- Modificar um já existente, de modo que o estímulo possa ser incluído nele.

---

[106] PIAGET. Problemas de psicologia genética. 1973, p. 69.
[107] PIAGET. O nascimento da inteligência na criança. 1975, p. 380.
[108] PIAGET. Biologia e conhecimento. 1996, p. 18.

Após ter ocorrido a acomodação, o sujeito tenta novamente encaixar o estímulo no esquema, e aí acontece a assimilação. Por isso, a acomodação não é determinada pelo objeto, e, sim, pela atividade do sujeito sobre este para tentar assimilá-lo. O balanço entre assimilação e acomodação chama-se adaptação.

Em sua epistemologia genética construtiva, Piaget defendeu que não há conhecimento humano pré-formado nem no sujeito, nem no objeto, pois sujeito e objeto do conhecimento podem ser construídos por internalização e reconstrução, daí a valorização da ação, o sujeito é ativo na construção do conhecimento.

Para Piaget, o desenvolvimento de um novo conhecimento é feito pela modificação ativa que se faz de seu próprio conhecimento. Assim ao resolver um problema, compara o conhecimento que já tem com um fato novo, obtendo como resultado uma contradição ou uma coerência.

Em relação ao crescimento do conhecimento ou da construção do conhecimento, a abstração reflexiva permite a reorganização de novas combinações. Por exemplo, na resolução de um problema novo, utilizamos algumas coordenações das estruturas já construídas, que são reorganizadas em função de novos dados, possibilitando novas combinações, e a abstração reflexiva possibilita o aumento do conhecimento.

Assim sendo, essa organização e combinação de dados do plano anterior com o subseqüente ocorrem de forma progressiva sem terem um início absoluto nem um fim, em que o sujeito é considerado como construtor de si mesmo, partindo da interação contínua entre o sujeito e o objeto, visto que esta construção depende das estruturas já construídas. Assim, para ampliar esta compreensão, estudaremos o estruturalismo piagetiano e o estruturalismo matemático tema, que abordamos no próximo capítulo.

ESTRUTURALISMO CONSTRUTIVO DE PIAGET

4.1 INTRODUÇÃO

No presente capítulo, faremos um breve estudo sobre o estruturalismo, destacando o aspecto matemático e a síntese de algumas idéias sobre estrutura.

Na perspectiva de Piaget, todo organismo possui uma estrutura que pode ser modificada sob a influência da própria interação com o meio ambiente; em vista disso, a assimilação é necessária, já que garante a continuidade das estruturas e a integração de novos elementos. Por isso, o estruturalismo piagetiano apresenta um caráter dinâmico que se relaciona com a atividade, organização, transformação, coordenação de ações e construção.

Nesse sentido, o estruturalismo piagetiano é construtivo, enquanto o estruturalismo matemático apresenta-se sob a forma estática e mostra-se intimamente ligado ao platonismo, pela autonomia da Matemática quanto à experiência física. Portanto, sua objetividade pode ser explicada como uma abstração ou um conhecimento das características dos objetos de um mundo ideal.

O estruturalismo de Piaget explica a objetividade da Matemática sem necessidade de postular objetos ideais, como na antropologia (veja item 4.6. capítulo. VI) ou na crítica literária, ciências baseadas em um método hermenêutico. A objetividade de qualquer interpretação e de entendimento é apoiada nas redundâncias e possibilidades de verificar a mesma coisa por vários caminhos diferentes, ou seja, a objetividade baseia-se, como a Matemática formal, na coerência e consistência enunciadas. Para realizar esse estudo, o presente capítulo foi subdividido em quatro partes: na primeira, destaca-se o entendimento que se tem a respeito da noção de estrutura; na segunda, são diferenciados o estruturalismo e o método axiomático que permitem as passagens, as traduções de uma representação para outra; na terceira, a visão piagetiana sobre o estruturalismo; e finalmente, o resumo do livro *O estruturalismo.*

4.2 O QUE É O ESTRUTURALISMO

O ponto central que constitui o objeto de estudo deste capítulo, é a noção de estrutura e estruturalismo. Para esclarecer este entendimento, recorremos a algumas definições. De acordo com o dicionário de Filosofia:

> Entende-se por este termo todo método ou processo de pesquisa que, em qualquer campo, faça uso do conceito de *Estrutura* [...]. Esse termo nasceu na Gestalt e na lingüística, em que o estruturalismo foi defendido por R. Jakobson, N. Trubetzkoy e outros. Em Antropologia, o ponto de vista estruturalista foi introduzido por Radcliffe - Brown difundido na antropologia moderna por Levis-Strauss [...] O estruturalismo não só tende a interpretar um campo específico de indagação em termos de sistema, como também a mostrar que os diversos sistemas específicos, verificados em diversos campos (p. ex., Antropologia, Economia, Lingüística) têm características análogas[109].

Estas analogias implicam uma integração íntima entre estruturalismo e pensamento axiomático que vieram à tona nas obras de Peano[110] e Hilbert[111], em potencial.

O termo estruturalismo surgiu quando foi preciso designar um método analítico e totalizante ao mesmo tempo. Exprime duas idéias: totalidade (relacionar o que se deve mostrar também como separável) e interdependência. A idéia de totalidade implica a simultaneidade ou a existência de diversas operações suscetíveis de se comporem e que podem ser usadas parcialmente pelo sujeito em um dado momento. Por exemplo, para saber se um objeto tem a cor verde, é preciso diferenciá-lo do conjunto total das cores existentes. Para concluir que, realmente, o objeto tem a cor verde, é preciso estabelecer

[109] ABBAGNANO. Dicionário de filosofia, 1997, p. 377.

[110] Peano (1858-1932). Lógico e matemático italiano. Construiu um sistema de signos, que permite enunciar proposições lógicas e matemáticas sem recorrer à linguagem ordinária, o que contribuiu para fundar uma axiomática totalmente simbolizada.

[111] Hilbert (1862-1943). Matemático e lógico alemão. Desenvolveu a noção de corpo e efetuou uma notável reformulação da axiomática em geometria.

relações de comparação e classificação (estrutura de conjunto) entre as diferentes cores, o sujeito precisa perceber a totalidade para depois destacar as partes.

A estrutura que se requer para essa classificação é a inclusão de uma subclasse em uma classe e o entendimento de que a parte é menor que o todo. Piaget constata que os sistemas como tais apresentam uma organização progressiva sob a forma de estrutura, quando os elementos estão reunidos em uma totalidade, apresentando certas propriedades como totalidade, e quando as propriedades dos elementos dependem interna ou parcialmente das características da totalidade. Assim, de acordo com Piaget, a noção de estrutura é com mais freqüência utilizada para designar as formas de organização de raciocínio.

4.3 ESTRUTURALISMO E MÉTODO AXIOMÁTICO

No método axiomático, o estruturalismo matemático mostra-se mais nítido, e Hilbert explicitou que uma teoria axiomática não responde à pergunta sobre quais objetos ficam em relação, isto porque as estruturas podem ser aplicadas em vários campos de objetos. Nesse sentido, os axiomas de Peano não responderam à pergunta sobre o que é um número. Russell, como almejava uma resposta definitiva para esta problemática, contestou-os. Assim, tanto o método de Hilbert quanto o método axiomático de Peano foram considerados incompletos, porque não responderam à pergunta: o que é um número?

Diante do problema, Hilbert e Peano deveriam ponderar que, se por um lado a axiomática não foi suficiente para responder à questão que é um número, mas, de outro lado, foi vantajosa, porque tratou das leis e estruturas que se aplicaram em vários campos - já que as variáveis que surgiram na formulação dos axiomas foram interpretadas diferentemente em campos diversos -, por isso os objetos das teorias matemáticas não são determinados. A esse respeito, as estruturas de suas relações referem-se a outros objetos e não às suas características particulares.

A axiomática moderna representa mais um passo em direção à matematização dos fenômenos e a áreas da realidade. Por meio da Matemática, ela própria agora, finalmente, está sendo matematizada.

Em particular, o conceito de número sempre tem marcado o coração do pensamento matemático. Ainda parece legítimo perguntar por que a aritmética foi axiomatizada só na segunda metade do século XIX, isto é, mais de 2000 anos após a axiomatização da geometria de Euclides[112]? Porque os matemáticos achavam que os números foram construídos, enquanto as propriedades das figuras geométricas foram consideradas tão objetivas como as leis da natureza. A geometria representou a teoria do espaço e foi considerada uma coisa tão objetiva como a mecânica, que foi a teoria do movimento. A geometria representa a forma estática da figura e a mecânica, a ciência exata e objetiva.

Já no século XVII, esta foi axiomatizada, visto que os axiomas são verdades objetivas e não hipóteses como hoje em dia, e então na Matemática tradicional o estruturalismo não foi necessariamente construtivo. Para Piaget, ao contrário:

> [...] a axiomática é ciência exclusivamente hipotético-dedutiva, isto é, ela reduz ao mínimo os recursos da experiência (e ambiciona inclusive eliminá-los inteiramente) para reconstruir livremente seu objeto por meio de proposições indemonstráveis (axiomas) que devem combinar-se mutuamente de acordo com todas as possibilidades e de modo mais rigoroso. [...] O método axiomático é, pois, o método matemático por excelência, e encontrou numerosas aplicações, não apenas em matemática pura, mas em diversos domínios da matemática aplicada[113].

O uso da axiomática não se limita ao campo da demonstração, embora nesse aspecto ela constitua o único método rigoroso, que permite também construir modelos simplificados do real, fornecendo a esse estudo os instrumentos de dissecação.

Dentro da filosofia matemática, a fundamentação da pesquisa cresce fora de dois meios preferencialmente diferentes do próprio pensamento do matemático. O primeiro, para o qual o conjunto teórico-reducionista parece apropriado, começa com Bolzano[114] e Cauchy[115] e culmina no empreendimento de Russell[116]. Usualmente, o outro,

---

[112] Euclides. Matemático grego que ensinava em Alexandria durante o reinado de Ptolomeu (séc. III a.C.). Autor de Elementos - base da geometria elementar, que contém o famoso postulado de Euclides.

[113] PIAGET. Psicologia da inteligência. 1983, p. 37.

[114] Bolzano (1781-1848). Filósofo, checo, matemático e teólogo que deu importantes contribuições à matemática (teorias de infinidade matemática) e à pura prova analítica que contém um método excepcional para livrar o cálculo do conceito infinitesimal e da teoria de conhecimento.

[115] Cauchy (1789 – 1857). Matemático francês, a quem se deve uma renovação da análise matemática, graças ao emprego de métodos rigorosos.

[116] Russell (1872-1970). Matemático, filósofo e sociólogo britânico, um dos criadores da lógica moderna e autor dos Princípios Matemáticos.

denominado método axiomático ou postulacional, é originado do trabalho de Poncelet[117] e Grassmann[118] que obtiveram desenvolvimento completo nos trabalhos de Peano e Hilbert. Enquanto o conjunto teórico reducionista diz respeito, sobretudo, aos trabalhos de analistas e filósofos, a nova estrutura do pensamento axiomático foi primariamente estabelecida por geômetras, algebristas e engenheiros.

O axioma de Peano em relação à propriedade associativa diz que 'para toda terna a, b, c de inteiros tem-se que: a + (b + c) = (a + b) + c'. Nesse caso, só fala da terna *a,b,c* deixando de esclarecer o que é *a,b,c;* só explicitou que, se eles são números, precisam cumprir as leis da comutatividade, da associatividade e da unidade.

Para fundamentar a aritmética, Peano elegeu três conceitos primitivos: 'zero', 'número' (que, no contexto, referem-se a inteiros positivos) e a relação 'é sucessor de' que justifica os cinco postulados, mas estes termos são variáveis sem significado fixo. Assim:

1. Zero é um número.
2. O sucessor de qualquer número é um número.
3. Não há dois números que tenham o mesmo sucessor.
4. Zero não é sucessor de qualquer número.
5. Qualquer propriedade que pertence a zero, e também para o sucessor de todos os números que tem a propriedade, pertence a todos os números [119].

As três idéias primitivas podem sofrer várias interpretações diferentes, embora cumpram todas as cinco proposições primitivas.

Para Russell[120], o axioma de Peano representou o último aperfeiçoamento da 'aritmetização' da Matemática até Frege, que conseguiu 'logificar' a Matemática (reduziu a lógica às noções aritméticas). Porém - a abordagem dada por Peano é menos final do que parece: sob dois aspectos deixa de proporcionar uma base apropriada para a Aritmética. Assim:

---

[117] Poncelet (1788 – 1867). Matemático francês, autor de trabalhos sobre as propriedades projetivas das figuras e mecânica aplicada.

[118] Grassmann (1809-1877). Matemático alemão desenvolveu seus trabalhos baseados na álgebra, e o seu principal trabalho foi A teoria das extensões lineares.

[119] PEANO, citado por OTTE. Revista educação matemática e pesquisa. 2004, p. 7-8.

[120] RUSSELL. Introdução à filosofia da matemática. 1960, p. 14-16.

> [...} em primeiro lugar não nos possibilita saber se existem quaisquer conjuntos de termos que verifiquem os axiomas de Peano; nem sequer dá a mais tênue sugestão sobre qualquer meio de descobrir se existem tais conjuntos. Em segundo lugar, queremos, como já observamos, que os nossos números sejam tais que nos permitam contar os objetos comuns, e isso exige que os nossos números tenham significados *definidos*, não apenas que tenham certas propriedades formais[121].

Estrutura é um sistema de relações. Então, tenho um conjunto que chamo de números naturais ou números inteiros, sendo um conjunto de objetos chamados números inteiros. As estruturas são as leis que formam os axiomas. Se eu tenho três elementos em um conjunto, teremos sempre $\boldsymbol{a + b = b + a = a + c}$**,** obtendo uma igualdade que é uma relação. Isto explica as estruturas de relações entre números, mas não responde à pergunta ‘o que é um número’? Motivo pelo qual Peano foi criticado por Russell.

O mérito do trabalho de Peano foi conseguir reduzir a teoria dos números naturais ao menor conjunto de premissas. Demonstrou que poderia deduzir toda a teoria dos números naturais a três idéias primitivas e cinco proposições, constituindo os elementos de garantia de toda a Matemática pura tradicional.

Estruturalismo é um campo de objetos e constitui uma estrutura de relações, que são expressas em ***a, b, c.*** A estrutura mais simples é a de grupo, que surgiu na Matemática no início do século XIX com os trabalhos de Galois[122] e, no século XX, foi indicada como uma das estruturas fundamentais da Matemática nos trabalhos da escola de Bourbaki[123] (1939-1945) sobre as estruturas-mães. O grupo mais importante é o grupo dos números inteiros.

Piaget destacou que:

> [...] os matemáticos sempre raciocinaram em todos os tempos, obedecendo sem querer às leis de certas estruturas, das quais a mais exigente é a estrutura de ‘grupo’ [...] e foi justamente no começo do século XIX que Galois ‘tomou consciência’ da existência de tal estrutura, atualmente reconhecida por todos como sendo fundamental[124].

---

121 RUSSELL. Introdução à filosofia da matemática. 1960, p. 17.

122 Galois (1811 – 1832). Matemático francês, seu conceito de grupo de operações foi o ponto de partida da atual teoria das funções algébricas.

123 BOURBAKI. Pseudônimo coletivo sobre os quais jovens matemáticos franceses empreenderam a partir de 1939 a reformulação das matemáticas, encartando-as do ponto de vista estritamente lógico.

124 PIAGET. Problemas de psicologia genética. 1973, p 35-36.

De forma diferente de Piaget, esses matemáticos normalmente não construíram os objetos, porque a maior parte é platonista, portanto para eles, os objetos matemáticos são entidades reais. A sua existência é um fato objetivo, totalmente independente do nosso conhecimento, o que se pode fazer é descobrir, pois tudo já existe.

O pesquisador genebriano[125], muitas vezes, fala sobre o platonismo, destacando a divergência entre ele a sua teoria. Concorda com o platonismo, só que é preciso evidenciar que as estruturas devem ser enunciadas e ativadas por meio da construção do ser humano e não como Platão disse que tudo já está pronto no céu. Esta é a diferença entre uma estrutura atual e uma estrutura possível que deve ser atualizada ao longo do desenvolvimento pela atividade do sujeito. Nesse processo, a abstração reflexiva exerce um papel importante, pois permite essa atualização.

Para explicar a estrutura de transitividade mostra-se a uma criança dois bastões $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$**,** de modo que $\boldsymbol{A < B}$**,** seguido de $\boldsymbol{B < C}$ e, posteriormente, esconde-se $\boldsymbol{A}$**.** Ela não consegue deduzir que $\boldsymbol{A < C}$, pois a criança não vê ao mesmo tempo $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{C}$. Além disso, para resolver essa atividade, é necessário utilizar a coordenação de ação apoiada na estrutura de agrupamento de relações de seriar e ordenar. Só com a construção da estrutura de transitividade, pode-se aplicar com sucesso e em grande número de problemas de diferentes ordens causais ou da matemática.

Neste sentido, o estruturalismo axiomático e o piagetiano poderiam ser vistos como equivalentes. Esta foi uma observação fundamental de Piaget, ou seja, a estrutura surge naturalmente da composição de transformações, por isso ele destacava tanto esse aspecto, pois não estava interessado em estudar estruturas, e, sim, as gêneses das estruturas. Daí ser tão importante esse aspecto da transformação.

Para este estudioso, a gênese pressupõe uma estrutura, porque não apresenta um começo absoluto e parte sempre de uma estrutura mais simples, constituindo dois termos absolutamente solidários e indissociáveis. No entanto, não é este o ponto de vista dos matemáticos, pois, para eles, o estruturalismo normalmente está associado ao platonismo e não ao construtivismo.

[125] PIAGET & BETH. Mathematical epistemology and psychology. 1961, p. 291.

A realidade ou a natureza última do real seria um conjunto de objetos e estrutura de relações nesses objetos. Como exemplo, temos uma teoria geométrica em que os objetos são pontos, retas, planos e apresentam relações. Como foram construídas essas estruturas? Elas foram construídas por uma série de comparações, buscando os aspectos inteiramente distintos da Matemática e, para encontrar a estrutura comum, recorreu-se a um conjunto de processos, como instrumentos da descoberta da estrutura e, no exemplo acima, elegendo os pontos, as retas e os planos.

4.4 PIAGET E O ESTRUTURALISMO

Para Piaget, o estruturalismo é um construtivismo, pois as estruturas não são inatas, mas, sim, geradas pelas atividades. Para outros, como Chomsky, existem estruturas inatas. Se não são inatas, vêm duas perguntas fundamentais:

1- Como são desenvolvidas e aprendidas as estruturas?

2- De onde vem a necessidade nas estruturas?

Conforme o autor citado, a característica essencial da estrutura é a atividade, porque pode ser facilmente conectada umas às outras. Por exemplo, imagine uma mesa e um objeto sobre ela, e esse objeto pode ser movimentado de **A** → **B** de **B** → **C** e de **A** → **C.** Assim, conectando-se dois deslocamentos, resulta em mais um deslocamento do objeto, denominado pelos geômetras de grupo de deslocamentos, que é a capacidade do sujeito de coordenar seus deslocamentos em um sistema total. Esta ação permite voltar ao ponto inicial por meio da reversibilidade ou fazer desvios para chegar a um mesmo ponto por caminhos diferentes, e para isso recorreu à associatividade do grupo de deslocamentos. Por exemplo, uma criança no jardim de sua casa, quando souber andar, coordenar suas idas e vindas e retornar ao ponto inicial (ocorre à reversibilidade), ou fazer desvios para chegar a um mesmo ponto por caminhos diferentes (ocorre a associatividade do grupo de deslocamentos), ela coordena seus deslocamentos em um sistema total que permite a volta ao ponto inicial. Neste sentido, constatamos a estrutura de todos os movimentos no plano, descobrindo que há estrutura de grupo.

Um exemplo bem característico são os números que podem ser vistos como transformações na reta infinita (à direita ou à esquerda).

Segundo Piaget:

> [...] uma estrutura é um sistema de transformações que comporta leis enquanto sistema (por oposição às propriedades dos elementos) e que se conserva ou se enriquece pelo próprio jogo de suas transformações, sem que estas conduzam para fora de suas fronteiras ou façam apelo a elementos exteriores. Em resumo, uma estrutura compreende os caracteres de totalidade, transformação e de auto-regulação[126].

Os números são campos de transformações em que estas ocorrem e também tornam-se as próprias transformações; por exemplo 3 significa x → x + 3.

Num sistema de transformação é essencial a noção de operação, e para Piaget:

> [...} as operações consistem, assim, em transformações reversíveis, podendo essa reversibilidade consistir em inversões (A - A = 0) ou em reciprocidade (A corresponde a B e reciprocamente). Ora uma transformação reversível não modifica tudo ao mesmo tempo, pois do contrário seria sem retorno[127].

No sentido piagetiano, uma transformação pode ser considerada como processo pelo qual as estruturas se constroem a partir dos elementos que as constituem. Essa noção de construção torna a teoria piagetiana dialética, por oposição ao estruturalismo de Levi-Strauss. Assim:

> O aspecto operativo do pensamento é relativo às transformações e se dirige assim a tudo o que modifica o objeto, a partir da ação até as operações. Chamamos operações às ações interiorizadas (ou interiorizáveis), reversíveis (no sentido de poderem se desenrolar nos dois sentidos e conseqüentemente de comportar a possibilidade de uma ação inversa que anula o resultado da primeira) e se coordenando em estruturas ditas operatórias, que apresentam leis de composição caracterizando a estrutura em sua totalidade, como sistema. Por exemplo: a adição é uma operação porque comporta um inverso (a subtração), porque o sistema das adições e subtrações comporta lei de totalidade (leis de grupo)[128].

Nesse sentido, salientou que as classificações, seriações, correspondências, matrizes da série dos números, as métricas espaciais, as transformações projetivas etc. também constituem estruturas operatórias. A estrutura é sempre um sistema de transformações e está relacionada às ações de associar, ordenar e seriar objetos

---

[126] PIAGET. O estruturalismo. 1979, p. 8.
[127] PIAGET. Psicologia da criança. 1995, p. 82.
[128] PIAGET. Problemas de psicologaia genética. 1973, p. 72.

manipulativos ou ideais. A transformação deve estar relacionada à construção, que possibilita a edificação de novas estruturas ou da ampliação da estrutura inicial que será inserida nas mais amplas. Assim, Piaget explicitou que:

> [...] quem diz transformação diz construção, com possibilidade de estruturas novas, o alargamento da estrutura inicial, que vem se inserir, como no caso particular, nas estruturas mais amplas: uma vez o número formado, por exemplo, haverá a descoberta dos números negativos do início, dos números fracionários, a estrutura inicial vai se inserir nas estruturas ulteriores, graças a uma gênese, porque ela é um sistema de transformações[129].

Entretanto, é fundamental que a formação de uma estrutura se inicie do mais simples ao mais complexo, ela é sempre um sistema de transformação.

Os exemplos de deslocamentos de objetos na reta ou no plano são paradigmáticos ou exemplares, como mostra o teorema de Cayley, citando que cada grupo pode ser transformado num grupo de transformações. Não transformações em termos da geometria, mas transformações sobre algum conjunto, neste caso, o conjunto do próprio grupo, ou seja, cada grupo gera um grupo de transformação de um conjunto. Assim:

> *Sendo $G = (G,*)$ um grupo, uma transformação é simplesmente uma aplicação de G em* G. Consideremos então o conjunto T de todas as funções f_x de g em G, para $x \in G$, ou seja, das transformações em G, definidas, para cada $x \in G$, do seguinte modo $f_x(y) = x * y$. Consideremos agora este conjunto munido da usual operação de composição de funções, denotada por $\circ$. É fácil ver que:
>
> (i) Para cada x, f_x é bijetora,
>
> (ii) A operação é associativa.
>
> (iii) Se e é o elemento neutro de G, então f_e tem a propriedade de que para qualquer x, $f_x \circ f_e ,= f_e \circ f_x$, ou seja, f_e desempenha o papel de elemento neutro em relação a $\circ$.
>
> *(iv)* Como f_x é bijetora, admite inversa, f_x^{-1}, que é tal que $f_x \circ f_x^{-1} = f_x^{-1} \circ f_x = f_e$.
>
> (v) Definindo $Ø(x) = f_x$, obtemos uma função de G em T que facilmente se prova ter a propriedade seguinte: $Ø(x * y) = f_{x*y} = f_x \circ f_y$ [130].

Seja G o grupo dos números e x que produz uma transformação ou função ***+x,*** em que $\boldsymbol{f_X}$: $\boldsymbol{Y \rightarrow Y + X}$, seja $\boldsymbol{X = 5}$, então y é transformado em $\boldsymbol{y + 5}$. Nesse caso, o

129 BRINGÜIER. Conversando com Jean Piaget. 1993, p. 59.

130 KRAUSE. Introdução aos fundamentos axiomáticos da ciência. 2002, p. 39.

conjunto é o próprio grupo, e este é um conjunto com estruturas, cujo grupo pode operar em si mesmo.

A visão piagetiana é de que vários conjuntos de leis e até as próprias regularidades associadas formam estruturas ou sistemas e estes têm grande parte em comum com a estrutura matemática. Nesse sentido, podemos observar que o elemento diferenciador na ‘visão de Piaget foi ter conectado o construtivismo com o estruturalismo’.

Qual a desvantagem do construtivismo isolado sem estrutura? O atomismo e o empirismo podem explicar como construir uma mesa ou uma máquina, mas nunca pode explicar como construir uma álgebra, um número ou uma função abstrata. Para ligar essas questões, é preciso evitar o atomismo e o empirismo, já que o construtivismo oferece uma perspectiva genética ao estruturalismo, e este uma visão teórica ao construtivismo.

Nesse sentido, para explicar o que é um número negativo, devemos utilizar uma das estruturas mais simples, como a dos números naturais. Trata-se de uma idéia essencial para Piaget, uma vez que nem o empirismo, nem o platonismo conseguem justificá-lo. O empirismo tende a considerar a experiência como algo impresso diretamente no organismo, sem que o sujeito tenha de organizá-la e o platonismo traduz certo senso comum dos matemáticos, pelos quais os *seres* matemáticos existem desde sempre. Independentemente de sua elaboração, a experiência pode ser considerada eternamente predeterminada no mundo dos possíveis, considerando-a como um todo estático e acabado.

Piaget conseguiu explicar com base nas observações de uma definição estática (estruturalismo matemático), no sentido da imutabilidade (por exemplo: 4+5= 9), que em qualquer lugar e em qualquer época esse resultado será o mesmo. Chegou a uma definição dinâmica para dar uma nova interpretação ao estruturalismo, conectando-o com o construtivismo; por isso considerou *o* ‘construtivismo indissociável da estrutura’.

4.4.1 ESTRUTURALISMO PIAGETIANO E A MATEMÁTICA

Para o estudioso suíço, realidade é um processo que forma o primeiro ponto que distingue o estruturalismo piagetiano do estruturalismo comum ou matemático. Para o primeiro, tende a ser um processo de formação, "como se passa de um menor conhecimento a um superior, e isto é relativo ao nível e do ponto de vista do indivíduo"[131].

Para o segundo, constitui uma axiomática que possibilita a passagem de uma representação para outra e, por isso, o objeto e o conceito realizam-se como objeto do pensamento matemático.

O segundo ponto diz respeito à noção de objeto. Para o senso comum ou matemático e para o empirismo, os objetos existem, por isso buscam-se as características e as relações. Para Piaget, o objeto é um invariante de uma estrutura, que é produzido, é fruto da atividade e não o fundamento da atividade. Nesse caso, temos o exemplo da comutatividade (2 + 3 = 3 + 2), no qual a ordem não está nos objetos, a sua compreensão requer a noção de invariância.

No sentido piagetiano, a estrutura é o resultado de uma construção que não é dada nos objetos nem no sujeito, pois depende de uma ação. A interação sujeito-objeto requer necessariamente dois tipos de atividades, de um lado, a coordenação das próprias ações, de outro, a inter-relação entre os objetos, e é só por meio da ação que essas relações podem aparecer. Assim sendo, o conhecimento objetivo permanece subordinado a certas estruturas de ações.

Na Matemática, Piaget não busca o conhecimento de objetos, porém das estruturas. Por exemplo, começamos a medir objetos e podemos observar algumas relações tais como:

> 1. combinar uma classe A com outra A' para obter a classe B, indicado $A+A' = B$ (ele pode continuar para fazer $B+B' = C$ etc.).
> 2. dissociar A ou A' de B, indicado por $B-A' = A$, o que constitui a operação inversa. Nota-se que essa reversibilidade é necessária para entender a relação $A < B$.
> 3. associar $(A+A') + B' = A+(A'+B')= C$, enquanto $(A+A)-A= O$ não é igual a $A+ (A-A)= A$.
>
> Chamamos de *agrupamentos* estas estruturas de grupóides. São mais primitivos que grupos matemáticos e também são estruturas muito mais limitadas e menos 'elegantes', onde a composição é definida somente entre elementos contíguos sem propriedades combinatórias gerais e possui associatividade[132].

---

[131] BRINGUIER. Conversando com Jean Piaget. 1993, p. 15.

[132] PIAGET. A teoria de Piaget. 1975, p. 102-103. In: CARMICHAEL. Psicologia da criança.

Neste sentido, se temos duas grandezas ***A*** e ***A'*,** podemos juntá-las, e a medida dessa soma será a soma dessas medidas *(**A + A' = B**),* ou seja, você determina um número para cada grandeza ***x*** e ***y**,* inicialmente, você observa e depois fica jogando nesse diagrama até chegar a ***x + y***, e aqui o que importa é a estrutura dessas relações.

Outro exemplo característico piagetiano é colocar objetos em uma figura retangular (figura 09) que apresenta a linha ***a*** e a coluna ***b*.** Para ele, os objetos sempre são totalmente sem importância, pois o que importa são os processos de se operar. Assim, ao contar os objetos da esquerda para direita ou de cima para baixo e de baixo para cima, sempre vai dar o mesmo resultado, independentemente da maneira escolhida para se contar. Neste sentido, podemos falar que o número que se mostra aqui é ***a*** x ***b***. Assim, contamos as linhas e depois as colunas; o que realmente reflete na aritmética é a estrutura da atividade sobre um objeto qualquer.

Piaget poderia superar essa oposição *sujeito x objeto*, porque não importa se o objeto é uma coisa estrangeira para nossas cabeças, só importa como o objeto reage com nossas atividades e como são as estruturas que podemos observar nessas atividades. Nesse caso, a natureza dessas grandezas não importa, só quando somamos é que as medidas vão se juntar e, quando subtraímos, elas vão se separar. Então, a estrutura da aritmética não reflete a estrutura do mundo dessas grandezas, nem reflete as possibilidades de agir sobre esses objetos.

Podemos contar este conjunto e observar que chegamos à conclusão de que o número é sempre o mesmo, e ***a*** x ***b*** = ***b*** x ***a*;** contamos primeiro as linhas ou as colunas, porém o resultado será o mesmo, então ***a*** x ***b*** = ***b*** x ***a*** aparece como uma relação invariante.

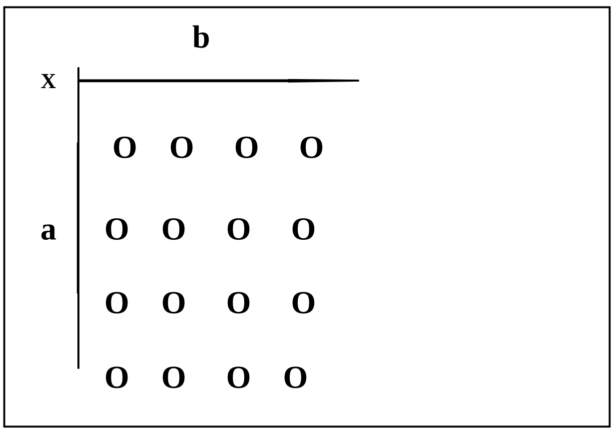


Figura 9

Para executar suas próprias ações, o sujeito necessita de informações objetivas, por isso a objetividade não pode ser uma propriedade inicial ou apenas um registro de informações externas, como afirmam os empiristas. A conquista da objetividade está subordinada a certas estruturas de ações que resultam de uma construção e não são dadas nos objetos nem no sujeito, pois dependem de uma ação, por isso o sujeito deve aprender como coordenar suas ações. Portanto, temos de buscar a origem das estruturas nas atividades do sujeito e nas formas mais gerais das coordenações de suas ações.

Assim sendo, na teoria racionalista (ver item 2.2.1), as soluções aprioristas não explicam por que o número converge para esta realidade, por que para eles a Aritmética é uma estrutura, de origem interna, ao espírito (uma linguagem convencional por ele elaborada), imposta à realidade externa. Na teoria empirista (ver item 2.2.2), Piaget explicitou que, para os empiristas, o número é originado com base na experiência e, por isso, não explica sua fecundidade e sua necessidade.

Se as coordenações das ações têm sua origem na atividade do sujeito, então, as diferentes formas de números (inteiro, negativo, real etc.) não se encontram pré-formadas no sujeito, pois são construções baseadas na atividade. Nem a seriação, nem a classificação, nem o número são dados, porém resultam da coordenação das ações sucessivas e sucedem uma atividade, e o que importa é o seu caráter ativo, pois o próprio Piaget defendeu que,

> [...] o número se organiza, etapa após etapa, em solidariedade estreita com a elaboração gradual dos sistemas de inclusões (hierarquia das classes lógicas) e de relações assimétricas (seriações qualitativas), com a sucessão dos números constituindo-se, assim, em síntese operatória da classificação e seriação[133].

Neste sentido o número pode ser considerado como uma construção endógena, produto de ações mais gerais do sujeito e da sua coordenação.

Este caráter particular das ações e operações que intervêm na Matemática (em primeiro lugar, empírica, e logo dedutiva, pois, em ambos os casos independentes dos objetos), explica o fato de que esses atos e suas composições podem se repetir e generalizar-se indefinidamente.

---

[133] PIAGET. A gênese do número na criança, 1981, p. 12.

Piaget, ao defender que o número deriva das operações e das ações exercidas pelo sujeito sobre os objetos, sem se originar desses objetos, permitiu conceber distintos tipos de números como resultado de coordenações progressivas, o que evita pensar que o número é dado de entrada inteiramente no espírito e nas coisas no sentido platônico.

Ainda que procuremos a fonte das coordenações na atividade do sujeito, as diversas formas de número não se encontram já pré-formadas no sujeito, mas constituem os estados finais e necessários do equilíbrio das coordenações, que se iniciam desde a organização dos esquemas sensório-motores e perceptuais.

Segundo Piaget, "os conhecimentos lógico-matemáticos não são hereditários, porque são adquiridos, por vezes mesmo com dificuldade"[134], pois não se aprende como a capacidade de falar ou andar, a matemática é uma função muito limitada. A conseqüência deste aspecto para a área do conhecimento matemático mostra-se em um estruturalismo construtivo.

Na Matemática, temos até hoje contraposições. Por exemplo, Brown, que é um construtivista contra Hilbert, gosta do método axiomático e criou o 'moderno método axiomático' que é o pico do estruturalismo matemático.

Russell é 'construtivista' em relação a Peano, que deseja uma apresentação axiomática, pois constrói os números em termos lógicos e na teoria dos conjuntos em vez de descrevê-los. É exatamente com sua concepção de estruturalismo construtivo, que Piaget propõe um *tertium* para superar esta dicotomia entre o estruturalismo matemático e o estruturalismo construtivo por meio do interacionismo piagetiano.

Neste sentido, a axiomatização dos números só poderia acontecer quando os axiomas fizessem parte de uma construção, ou seja, quando os métodos axiomáticos e construtivos não fossem mais opostos.

No entanto, as leis do espaço não são coisas nossas, porque foram feitas por Deus, então, a forma como esta leis estão enunciadas na Geometria são objetivas, portanto não são construções. Assim, Piaget com sua epistemologia genética (construtivismo) quer exatamente superar essa contradição entre o estruturalismo dos axiomáticos (pessoas que

[134] PIAGET. Biologia e conhecimento. 1996, p. 347.

têm uma visão do método axiomático) e o construtivismo, já que para ele o estruturalismo é sempre construtivo.

A epistemologia da Matemática piagetiana, em geral, baseou-se em um estruturalismo construtivo, tendo por isso conceitualizado o estruturalismo construtivo por meio da atividade e da abstração reflexiva.

Neste sentido, para Piaget, a assimilação é sempre muito importante, porque:

> [...] a função essencial que conduz à formalização das estruturas é a função da *assimilação* que utilizamos em lugar da função de *associação* [...]. A assimilação é, com efeito, geradora de esquemas e, por isso mesmo, de estruturas [...]. Contudo, a assimilação não é uma estrutura: é somente um aspecto funcional das construções estruturais, intervindo em cada caso particular, mas conduzindo, cedo ou tarde, às assimilações recíprocas, ou seja, aos liames sempre mais íntimos que reatam as estruturas umas às outras [135].

O processo da assimilação é um aspecto funcional das construções geradoras de esquemas, porque impõe as estruturas sobre um campo de objetos. Pode-se encontrar essa conexão com a assimilação em toda estrutura de conhecimento, e ela é determinada pelo indivíduo. Assim, a idéia de conhecer está subordinada aos dados aprendidos com as estruturas do sujeito. Então temos uma complementaridade na construção ou transformação, de um lado, e a assimilação, de outro, pois "a assimilação racional não destrói o objeto incorporado ao sujeito, dado que ao manifestar a atividade deste, submete-o à realidade daquele"[136].

A assimilação não se reduz a uma simples identificação, é, ao mesmo tempo, construção de estruturas e incorporação das coisas a essas estruturas. Por isso, o estudioso suíço defendeu que "as estruturas não estão pré-formadas dentro do sujeito, mas constroem-se conforme as necessidades e situações"[137]. Então a matemática embora seja formal depende das aplicações. Ainda o próprio Piaget disse que:

[135] PIAGET. O estruturalismo. 1979, p. 59.
[136] PIAGET. O nascimento da inteligência na criança. 1975, p. 383.
[137] Ibid., p. 383.

> O principal ensinamento desta psicogênse das estruturas é que ela mostra a união possível, e mesmo necessária, do estruturalismo e construtivismo. Nenhuma estrutura, cujo desenvolvimento acaba de ser traçado muito esquematicamente, impõe-se à maneira de uma *idéia inata* ou em virtude de uma necessidade a priori, mas cada uma se constrói a partir das precedentes por uma combinação de abstrações reflexionantes, com exceção de certas coordenações dos sistemas mais simples e de reorganizações ou reconstruções que consistem, no final de contas, em efetuar operações de segunda potência sobre as precedentes até constituir um novo todo coerente[138].

Para o pesquisador genebriano, a utilidade do estruturalismo está na possibilidade de ajudar no ensino das estruturas, por isso ele se interessou pela gênese do desenvolvimento dos objetos e não pelas estruturas em si.

Esse também é o interesse do professor, quer saber como se pode criar a idéia da estrutura em seu aluno, pois esta existe como possibilidade, só que deve ser realizada nas atividades dos alunos, e para exemplificar citamos o problema do ensino de números negativos.

Se as coordenações de ações têm sua origem na atividade do sujeito, então as diferentes formas de números (inteiro, negativo, real etc.) não se encontram pré-formadas no sujeito elas são construções baseadas nas atividades, portanto não são inventadas aleatoriamente. Por exemplo, a regra menos vezes menos igual a mais (**– x – = +**) segue da necessidade da coerência da estrutura aritmética. Isso significa que a matemática não tem objetos próprios como a biologia, por exemplo, porém tem objetividade ou necessidade originada da consistência das estruturas. Todavia, quase sempre existem possibilidades de enriquecer uma estrutura de maneiras diferentes. Por exemplo, existem grupos comutativos (como os números) ou não comutativos. Então coerência significa: se eu aceito a regra (axioma) ***A,*** então devo aceitar também ***B*** etc.

A perspectiva piagetiana em relação ao tema é que o número negativo é um elemento de uma estrutura aritmética, ou seja, não existe uma resposta que trate da natureza dos objetos. Assim, muitas vezes, foi citado que, no estruturalismo, a importância não está nos objetos e, sim, nas estruturas das relações entre objetos.

---

[138] MONTANGERO & MAURICE-NAVILE. Jean Piaget ou a inteligência em evolução. 1998, p. 178.

Nesse sentido, como podemos ensinar as estruturas dos números inteiros sejam positivos, sejam negativos? Uma resposta piagetiana em relação ao tema poderia ser por meio de uma atividade estruturada e simbólica como num jogo.

O jogo desenvolve-se ou mostra sua estrutura mais claramente, você tem regras escritas e para jogar precisa entendê-las, pois ninguém aprende a jogar baralho só com as regras. É preciso ganhar experiência, ninguém sabe o que pode ocorrer, só jogando mesmo, ou seja, realizar na própria atividade a estrutura do jogo. Nesse sentido, os jogos começam como um bom modelo das estruturas algébricas ou da Matemática em geral.

O jogo é um bom instrumento para combater o empirismo, porque na Matemática, realmente, não importam quais são os objetos e, sim, como lidar com eles e como calcular. Todos poderiam ter intuição própria sobre o número negativo, estratégias diferentes para calcular corretamente. Portanto, do ponto de vista de Piaget, o jogo é muito fértil para o ensino da Matemática.

4.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Piaget defendeu que todo organismo possui uma estrutura que pode sofrer modificações sob a influência da própria interação com o meio ambiente. Neste sentido, a assimilação é necessária, visto que garante a continuidade das estruturas e a integração de novos elementos, e não a adaptação, como os empiristas ou behavioristas acreditam.

Piaget considerou também, de um lado, que o seu estruturalismo apresenta um caráter dinâmico e está relacionado à atividade, à organização, à transformação, à coordenação de ações e à construção. De outro, o estruturalismo matemático que tem um caráter estático, está associado ao platonismo, no qual as coisas, os conceitos, são cópias das idéias e, ainda, pela autonomia da Matemática em relação à experiência física; e sua objetividade explica como ocorre uma construção de forma rigorosa. Para contrastar esta posição, Piaget considera o jogo como um instrumento que pode influenciar de forma positiva o ensino da Matemática e, por isso, na seqüência fazemos uma abordagem teórica do jogo segundo a visão piagetiana.

4.6 RESUMO DO LIVRO *'O ESTRUTURALISMO'* DE JEAN PIAGET

Pela importância do tema para o nosso estudo, vale a pena apresentar uma imagem mais completa do estruturalismo piagetiano, como ele mesmo ***pintou***. Por isso vamos apresentar o livro *O ESTRUTURALISMO* de Jean Piaget, traduzido por Moacir Renato de Amorim, publicado pela Editora Difusão Editorial S. A., São Paulo, no ano de 1979, em sua 3ª edição, título do original *Le structurralisme* (Coll. *Que sais-je*? nº 1311).

É uma obra endereçada a educadores, filósofos, matemáticos, lógicos, psicólogos, biólogos, lingüistas, antropólogos e pedagogos. O livro é composto 119 páginas e está dividido em sete capítulos, apresenta um recorte sobre o estruturalismo próprio às diferentes ciências. Porém para o nosso estudo, temos interesse especial nos capítulos I e II.

CAPÍTULO I: Introdução e posição dos problemas

Neste capítulo, o autor apresenta uma visão geral sobre o estruturalismo. Explicita que é difícil caracterizar o estruturalismo, porém apresenta uma síntese em que distingue dois problemas: o ideal positivo das diversas variedades de estruturalismo e o das intenções críticas.

Reconhece que existe um ideal comum entre os *estruturalistas*, porém as intenções críticas são variáveis: para uns, o estruturalismo matemático opõe-se à compartimentagem dos capítulos heterogêneos, reencontrando a unidade graças ao isoformismo, ao passo que no estruturalismo lingüístico houve um afastamento das pesquisas diacrônicas para encontrar sistemas de conjunto em função da sincronia; e na Psicologia o estruturalismo combateu as tendências atomísticas. Nas discussões atuais, o estruturalismo queixa-se do historicismo, do funcionalismo e do subjetivismo.

Os caracteres positivos da idéia de estruturalismo destacam dois aspectos comuns: a) um ideal de inteligibilidade fundado no postulado de que uma estrutura se basta a si própria e não requer elemento estranho à sua natureza; b) a sua utilização evidencia algumas características gerais, apesar de suas variedades.

No conceito de estrutura, destacou três características centrais: totalidade, transformação e auto-regulação, salientando que, após a sua descoberta a estrutura, pode dar lugar a uma formalização, que é obra do teórico. No entanto a estrutura é independente dele e pode manifestar-se na forma de equações lógico-matemáticas ou passar por um modelo cibernético e têm muitas estruturas não formalizadas.

A primeira característica relativa à totalidade de caráter próprio às estruturas é dos agregados. São formadas de elementos que se sujeitam às leis da composição e não se limitam a associações cumulativas. Por exemplo:

> [...] os números inteiros não existem isoladamente e não se os descobriu em uma ordem qualquer para os reunir, em seguida, em um todo: eles não se manifestam senão em função da própria seqüência dos números. Apresenta as propriedades estruturais de 'grupos', 'corpos' e 'anéis' etc., bem distintas das que pertencem a cada número que, por seu lado, pode ser par ou ímpar, primo ou divisível por $n > 1$ etc[139].

Então, o estruturalismo não começa seu trabalho descrevendo os objetos assim, em suas relações e na Matemática consta o método axiomático.

Os dois problemas relativos ao caráter de totalidade dizem respeito à sua natureza e ao seu modo de formação ou pré-formação. Além dos esquemas de associação atomística e os de totalidades emergentes, Piaget destacou uma terceira posição: a estrutura operatória que assume uma atitude relacional.

A segunda característica da estrutura é ser um sistema de 'transformações' e não uma 'forma estática' qualquer. As estruturas mais conhecidas dos 'grupos matemáticos' mais elementares são os sistemas de transformações, que podem ser intemporais ou temporais. Temos ainda o problema da fonte dessas transformações e as leis que as regem.

No estruturalismo psicológico, a *Gestalt*, que caracteriza a forma perceptiva em geral é estática. Seus autores já falavam em leis de 'organização', que transformam o dado sensorial e as concepções probabilísticas (aspecto transformador da percepção).

---

[139] PIAGET. O estruturalismo. 1979, p. 10.

No estruturalismo anti-histórico e antigenético, tentam submeter as estruturas aos fundamentos intemporais, tais como os dos sistemas lógico-matemáticos. Neste sentido, questiona-se como se obtém um sistema de transformações intemporais como um *grupo* ou como a rede do *conjunto das partes*? Pode-se também sempre proceder por decretos, como os axiomáticos, forma elegante de pilhagem, que consiste em explorar o trabalho anterior, ao invés de construir por si os materiais de partida.

A genealogia das estruturas introduzidas na base dos teoremas de Gödel, entre maior ou menor *força* ou *fraqueza* da estrutura pode acarretar um problema central de construção das estruturas e das relações indissociáveis entre estruturalismo e construtivismo.

A terceira característica das estruturas é a auto-regulação, isto é, de se regularem elas próprias, o que acarreta sua conservação e certo fechamento. Significa que a transformação é inseparável de uma estrutura dentro de suas fronteiras, que produz elementos que pertencem à estrutura, conservando suas leis. Por exemplo, *adicionando ou subtraindo dois números inteiros quaisquer, obtêm-se sempre números inteiros.* Este fato comprova as leis do *grupo aditivo* desses números, porém esse fechamento não significa que uma subestrutura não possa pertencer a uma estrutura mais ampla.

Neste caso podemos citar o exemplo da descoberta da geometria não euclidiana, que mostra claramente a integração a uma estrutura mais ampla que acarretou a conservação da estrutura anterior. Por isso, o progresso da matemática é sempre um enriquecimento, já que remete às questões de construção e formação.

Os três processos essenciais de auto-regulação ou auto-conservação das estruturas são: ritmos, regulações e operações, em que há liberdade em ver aí as etapas da construção *real* destas estruturas.

Em relação ao tema, Deleuze propõe alguns critérios formais de reconhecimento do estruturalismo. Considera primeiro critério do estruturalismo a descoberta e o reconhecimento de uma terceira ordem, de um terceiro reino: o do simbólico, que consiste no seguinte: "a posição de uma ordem simbólica, irredutível à ordem do real, à ordem do imaginário e mais profunda do que ambas"[140].

[140] DELEUZE. Como reconhecer o estruturalismo. 1983, p. 248. In: CHÂTELET. *Idéias, doutrinas sob a direção de F. Châtelet.*

Podemos afirmar que a estrutura correspondente não tem qualquer relação com uma forma sensível, com uma figura da imaginação ou com uma essência inteligível.

O autor defende que a estrutura não tem a ver com a 'forma' (Gestalt), com as 'figuras da imaginação' e nem com uma *essência*, pois na realidade trata-se de uma combinatória recaindo sobre elementos formais que não apresentam forma, significação, representação, conteúdo, realidade empírica dada e modelo funcional hipotético em que o "simbólico deve ser entendido como a produção do objeto teórico original e específico (fonte de interpretação e de criação vivas)"[141].

CAPÍTULO II: As estruturas matemáticas e lógicas

No presente capítulo discutiu-se a noção de grupo, enfatizando que o estudo da estrutura inicia-se pelas estruturas matemáticas, por razões lógicas e pela própria história das idéias. A estrutura mais antiga e conhecida pode ser considerada a de *grupo,* descoberta por Galois. Assim:

> Grupo é um conjunto de elementos (por exemplo, os números inteiros, positivos e negativos) reunidos por uma operação de composição (por exemplo, a adição) tal que, aplicada aos elementos do conjunto, torna a dar um elemento do conjunto; existe um elemento neutro (no exemplo escolhido, o zero), tal que, composto com um outro, não o modifica (aqui $\mathbf{n + 0 = 0 + n = n}$) e, sobretudo, existe uma operação inversa (no caso particular a subtração), tal que, composta com a operação direta, fornece o elemento neutro ($\mathbf{+ n - n = - n + n = 0}$); finalmente, as composições são associativas (aqui $\mathbf{[n + m] + l = n + [m + l]}$)[142].

Como fundamento da álgebra, considera-se a estrutura de grupo encontrado no campo da Matemática e da Lógica. O grupo por ser considerado como um modelo das *estrutura*s. A primeira razão é a forma lógico-matemática da abstração. Neste sentido, "a abstração reflexiva que caracteriza o pensamento matemático é ser tirada não dos objetos e sim das ações que se podem exercer sobre eles e, essencialmente, das coordenações mais gerais destas ações, tais como reunir, ordenar, corresponder etc."[143]. Essas coordenações gerais possibilitam a operação inversa do grupo, a associatividade do grupo e a natureza

[141] DELEUZE. Como reconhecer o estruturalismo. 1983, p. 228. In: CHÂTELET. *Idéias, doutrinas sob a direção de F. Châtelet.*
[142] PIAGET. O estruturalismo. 1979, p. 18-19
[143] ibid, p. 19

das composições, que são reuniões que podem ser interdependentes da ordem – grupos comutativos ou abelianos.

A segunda razão é por ser um instrumento de coerência e emprega três dos princípios do racionalismo: não-contradição (reversibilidade da transformação); identidade (elemento neutro); e a associatividade do grupo. Assim sendo a,

> [...] associatividade do grupo dos deslocamentos que corresponde à direção dos **desvios** é, deste ponto de vista, fundamental para a coerência do espaço, porque se os pontos de chegada fossem constantemente modificados pelos caminhos percorridos não haveria mais espaço e sim um fluxo perpétuo comparável ao rio de Heráclito[144].

A terceira razão é por ser o grupo instrumento de transformações racionais que não modifica tudo ao mesmo tempo, e cada uma é solidária de um invariante, como, por exemplo, "a divisão de um todo em frações deixa invariante a soma total"[145].

O grupo é um instrumento de construtividade por ser um sistema de transformações e também pela diferenciação de um grupo em seus subgrupos e pelas possíveis passagens de um destes aos outros.

O grupo de deslocamento deixa invariantes porque pode ser dosado pela diferenciação de um grupo em seus subgrupos e pelas possíveis passagens de um desses aos outros. Neste sentido, podemos deslocar a dimensão da figura (distância), seu ângulo, sua paralela, sua reta etc.; construindo-se um grupo mais geral, o grupo de deslocamento torna-se um subgrupo: é o da similitude, que lhe permite aumentar a figura sem alterar a forma (transformar um losango em outro).

b – As estruturas-mães – o fato de a estrutura de grupo ter sido aplicada em diversos elementos e não só às operações algébricas desafiou os componentes Bourbaki a subordinarem as matemáticas à idéia de estrutura. Este fato estimulou-os a generalizar a pesquisa das estruturas, segundo um princípio semelhante ao da abstração. Assim, os números, deslocamentos, projeções etc., que são os objetos abstratos, são denominados de *elementos.* O grupo não se caracteriza por esses elementos, mas ultrapassa-os por uma abstração de grau superior, da qual não importam as espécies de elementos. O método

[144] PIAGET. O estruturalismo. 1979, p. 20
[145] Ibid., p. 20.

Bourbaki consistiu, por "isomorfização, em separar as estruturas mais gerais, às quais podem submeter-se a toda variedade de elementos matemáticos seja qual for o domínio e fazendo inteira e total abstração de sua natureza particular"[146]. A partir de uma espécie de indução, esse método conduziu à descoberta de três *estruturas-mãe*:

1ª) as *estruturas algébricas* que têm como modelo o grupo (anéis, corpos etc.);

2ª) A *estrutura de ordem* é uma estrutura muito geral que tem por objeto as relações e tem como modelo a *rede* ou *grade* (entrelaçamentos).

3ª) As *estruturas de natureza topológica* instituídas sobre as noções de proximidade, continuidade e limite (correspondência biunívoca e bicontínuas etc.).

Outras estruturas originam-se por combinação (topologia algébrica) e por diferenciação que impõem axiomas limitativos que definem subestruturas. Podemos passar por 'estruturas fortes e estruturas mais fracas'.

c – As estruturas lógicas assentam-se sobre as formas do conhecimento e não sobre seus conteúdos. A lógica simbólica ou matemática tem a intenção sistemática de fazer um começo absoluto e pode ser realizado por meio do método axiomático.

Cada sistema da lógica (inumerável) forma uma estrutura, pois apresenta os caracteres de totalidade, de transformação e de auto-regulação.

Um sistema de lógica constitui uma totalidade fechada quanto ao conjunto de teoremas que demonstra, porém é uma totalidade relativa, porque o sistema permanece aberto para cima em relação ao teorema que não demonstra e, aberto por baixo, em razão do axioma de partida que recobre uma infinidade de elemento implícito. Portanto, a reflexão sobre as estruturas lógicas em relação ao estruturalismo, em geral, é que ela procura mostrar que as 'estruturas' não se confundem com a formalização de que elas procedem (realidade natural).

d – Os limites vicariantes da formalização.

A aritmética elementar não pode chegar por seus próprios meios ou por meios mais *fracos*, nem demonstrar sua não-contradição, mas torna-se possível com o uso de

---

[146] PIAGET. O estruturalismo. 1979, p. 22

meios mais ‘fortes’. Foi o que Gentzen efetuou com a aritmética elementar apoiando-se sobre a aritmética transfinita de Cantor.

O primeiro ensinamento fundamental de Göedel explicitou que uma estrutura fraca recorra a meios mais elementares e que a atividade crescente corresponda a instrumentos, cuja elaboração seja mais complexa. Já o segundo ensinamento impõe de maneira direta que, para o término de uma teoria no sentido da demonstração de sua não-contradição, não basta apenas analisar seus pressupostos, mas torna-se necessário construir algo como no exemplo seguinte: um sobrado, sendo o andar inferior o mais sólido, visto que é formado pelos instrumentos mais simples.

Assim, a idéia de estrutura como sistema de transformações torna-se solidária de um construtivismo de formação contínua e, por isso, as fronteiras da formalização não são fechadas, porém móveis ou vicariantes.

CAPÍTULO III: As estruturas físicas e biológicas

No estudo deste capítulo destacou-se que o ideal científico do físico, no estágio clássico da Física tratou das estruturas das grandes teorias, como em Newton com a inércia, a igualdade da ação e da reação e a força como produto da massa e aceleração; ou com Maxwell com a reciprocidade dos processos elétricos e magnéticos.

Com a evolução da Física o principal problema diz respeito às relações entre as estruturas lógico-matemáticas, que são usadas na explicação causal das leis, e as supostas estruturas do real. Se a matemática é uma simples linguagem (positivismo), a própria ciência se reduz a uma simples descrição.

As estruturas físicas correspondem às estruturas operatórias e é na própria ação que se descobre a causalidade. A, segundo Piaget, o sujeito considera essa ação como fonte das operações, porque suas coordenações gerais comportam certas estruturas elementares, que servem de ponto de partida às abstrações reflexivas e às construções posteriores.

Em relação às estruturas orgânicas, consideramos o organismo vivo como um sistema físico-químico e fonte das atividades do sujeito. Na Biologia, o primeiro ensaio do estruturalismo explícito (organismo) foi inspirado pelos trabalhos da Psicologia experimental no domínio das *Gestalts*, porém, como orientação atual, tornam-se relevante para a Biologia as contribuições da fisiologia, da embriologia, da genética, da etologia etc. Entretanto, a etologia atual procura mostrar que toda aprendizagem e toda memória só se constituem, apoiando-se sobre estruturas prévias. Assim, o modelo de conhecimento que o empirismo procurava, é estabelecido por assimilação às estruturas, porém nem todas inatas ou imutáveis, contudo mais estáveis e coerentes do que os tateios em que se iniciam os conhecimentos empíricos. Nesse sentido, segundo Piaget, "um estruturalismo biológico autêntico está apenas em vias de formação"[147].

CAPÍTULO IV: As estruturas psicológicas

Neste capítulo, ele tratou do início do estruturalismo em Psicologia e da teoria da Gestalt, já que na Psicologia a noção de estrutura surgiu desde o início do século XX, quando a *Psicologia do pensamento* se opôs ao associacionismo.

A teoria da *Gestalt*, defendida por Köhler e Wertheimer, foi a forma mais importante do estruturalismo psicológico. No campo da percepção o sujeito não é o simples teatro em cujo palco representa peças independentemente dele. Ao mesmo tempo torna-se ator e autor dessa estruturação por uma contínua auto-regulação.

Destacou ainda a estrutura e gênese da inteligência em que procurou explicar como o sujeito em desenvolvimento adquire as estruturas lógico-matemáticas. Elas podem se apresentar já prontas, porém sabemos que o sujeito não constata a existência delas como se percebem as cores ou a queda dos corpos. A transmissão escolar/familiar só é possível à medida em que haja um mínimo de instrumento de *assimilação* e, de outro lado,de construção; o problema dessa construção é entender por que chega a resultados *necessários*. Nesse sentido, no lugar de fundar-se em uma acumulação de estruturas prontas, o que resta é a própria construção, pois:

> [...] natureza última do real é estar em construção permanente, em lugar de consistir em uma acumulação de estruturas prontas, e como as ciências lógico-matemáticas são ciências do possível mais do que real, podem satisfazer esse platonismo para uso interno (existência virtual desde a eternidade)[148].

[147] PIAGET. O estruturalismo, 1979, p. 41.
[148] Ibid., p. 56.

A construção das estruturas cognitivas pode ser encontrada no comportamento operatório. Para Piaget “na construção a função essencial (no sentido biológico) que conduz á formalização das estruturas é a função da **assimilação**, pois ela é geradora de esquemas e por isso de estruturas”[149]. É preciso compreender que a assimilação não é uma estrutura, no entanto constitui um aspecto funcional das construções estruturais.

CAPÍTULO V: O estruturalismo lingüístico

Neste capítulo, ele abordou questões relativas à lingüística. Segundo o autor, a linguagem constitui uma categoria privilegiada nas realidades humanas e por isso é pensada como fonte de estruturas importantes por sua idade, sua generalidade e seu poder.

Piaget destacou que o positivismo lógico considerou a lógica e as matemáticas formadas de uma sintaxe e uma semântica geral, e ele, ao contrário, como um produto de construções e de abstrações reflexivas a partir das coordenações gerais da ação.

Ele enfatizou que há um problema fundamental nas relações entre as estruturas lingüísticas e lógicas. Assim, afirmou que o estruturalismo lingüístico surgiu com a exposição de Saussure, dizendo que o processo da língua não se reduz à diacronia, pois além da história existe o ‘sistema’ (estrutura) e este se baseia nas leis de equilíbrio que influem sobre os elementos e a cada momento da história dependem da sincronia. Com efeito,

> [...] a relação fundamental que intervém na língua sendo uma correspondência entre o signo e o sentido, o conjunto das significações forma, naturalmente, um sistema à base de distinções e de oposições, uma vez que essas significações são relativas uma às outras, e um sistema sincrônico, visto que essas relações são interdependentes[150].

Neste sentido, cada estruturalismo reconhece a dominância das interdependências de relações atuais sobre a história dos elementos. Porém isto só agrava a questão das gêneses das estruturas, pois mostra que esta gênese ou história não é a soma dos desenvolvimentos dos elementos, das palavras ou símbolos.

---

[149] PIAGET. O estruturalismo. 1979, p. 59.
[150] Ibid., p. 62-63

Nas ciências lingüísticas, há um outro tipo de estruturalismo que está interessado nessa questão e no caráter gerador dessas estruturas, como afirma N. Chomsky:

> No centro das preocupações da pesquisa atual encontra-se aquilo que se pode chamar o aspecto *criador* passa como se o sujeito que fala, inventando de certo modo sua língua à medida que se exprime ou redescobrindo-a à medida que a ouve falar à sua volta, assimilasse à sua própria substância pensante um sistema coerente de regras, um *código genético* (sublinhado por nós), que determina, por sua vez, a interpretação semântica de um conjunto, indefinido de frases reais, exprimidas ou ouvidas. Em outras palavras, tudo se passa como se ele dispusesse de uma 'gramática geradora' de sua própria língua[151].

Esta posição de Chomsky é antiempirista e antipositivista, ou seja, constitui

> [...] uma completa inversão de sentido em relação ao positivismo lógico, ao passo que este queria reconduzir as matemáticas e a lógica à lingüística e toda a vida mental à palavra, da lingüística de vanguarda deriva a gramática da lógica e a linguagem de uma vida mental orientada pela razão[152].

Chomsky sempre afirmava que nunca podemos generalizar em nenhuma ciência, meramente à base da indução e sem a posse de estruturas e idéias gerais que possibilitam a geração de hipóteses factuais, para interpretar os dados que o empirismo quis usar com o único fundamento de generalização por meio dos procedimentos indutivos Chomsky pergunta:

> [...] quais são os postulados de uma teoria gramatical necessário e suficiente para caracterizar a estrutura comum da língua e para diferençá-la, segundo as diversas línguas da linguagem, no nível da utilização corrente... [...] A mistura tão interessante de geneticismo e cartesianismo que caracteriza Chomsky leva-o a defender uma opinião inesperada em uma lingüística contemporânea e que liga as *idéias inatas* de Descartes à hereditariedade, da qual, segundo certos biologistas, seria preciso esperar a explicação de quase toda a vida mental[153].

Piaget, embora tenha reconhecido com muito respeito as idéias de Chomsky ressaltou que além da hereditariedade (aquisição exterior) também há o processo de equilibração interna ou de auto-regulação. Este processo, assim como a hereditariedade, atinge resultado necessário, "porque a hereditariedade varia bem mais em seus conteúdos

[151] CHOMSKY, citado por PIAGET. O estruturalismo. 1979, p. 66-67
[152] PIAGET. O estruturalismo. 1979, p. 67-68.
[153] CHOMSKY citado por PIAGET. O estruturalismo. 1979, p. 68-71.

do que as leis gerais de organização, que traduzem a auto-regulação de todo o comportamento”[154].

Neste sentido, surge a idéia de procurar a fonte do ‘monóide’ de Chomsky nos processos de repetição, de ordenação e de ligações associativas (no sentido lógico do termo), próprias às coordenações dos esquemas sensório-motores, assim com esta hipótese procura justificar uma possível explicação das estruturas lingüísticas básicas.

A respeito do problema principal que permanece um dos mais controvertidos do estruturalismo ou da epistemologia em geral, Piaget afirmou que estamos longe de uma solução completa.

Mesmo assim é quase evidente que a linguagem não é a fonte da lógica, como os filósofos do empirismo lógico acreditam. Assim, Piaget esclareceu que “Chomsky está certo o pormenor de suas interações permanece ainda um campo de estudos que apenas começa a ser abordado pelos métodos de experimentação e de formalização”[155], pois pode contribuir trazendo para o debate outras coisas mais e não somente idéias.

CAPÍTULO VI: A utilização das estruturas nos estudos sociais

O estruturalismo verdadeiro nas ciências sociais, como disse Levi-Strauss, começava com as obras de Marcel Mauss (1872-1950). Mas foi o próprio Levi-Strauss, pesquisando a cultura e a vida do Bororo no Pantanal que insistia que entender uma sociedade significa reconstruir a estrutura das relações sociais:

> [...] tal como a causalidade na física, a estrutura social deve ser reconstituída dedutivamente e não pode ser constatada a título de dado, o que significa que ela está para as relações observáveis assim como, na física, a causalidade está em relação às leis; por outro lado, como na psicologia, a estrutura não pertence à consciência e sim ao comportamento e o indivíduo adquire dela apenas um conhecimento restrito, através de tomadas de consciência incompletas, que se efetuam por ocasião das desadaptações[156].

[154] PIAGET. O estruturalismo. 1979, p. 73.
[155] Ibid., p. 78.
[156] Ibid., p. 80.

Depois de ter relatado muitos resultados de vários pesquisadores, Piaget começou a descrever o estruturalismo antropológico de Levi-Strauss que

> [...] apresenta um caráter exemplar e constitui o modelo (nem funcional, nem genético, nem histórico) dedutivo mais surpreendente que se tenha utilizado em uma ciência humana empírica: é a esse título que ele exige, neste trabalho, um exame particular[157].

Isto particularmente é o primeiro princípio fundamental desse estruturalismo que, por detrás das relações *concretas*, buscará a estrutura subjacente e *inconsciente*, que só pode ser obtida pela construção dedutiva de modelos abstratos. Disso resulta um ponto de vista decididamente sincrônico, porém um pouco diferente da lingüística.

Levi-Strauss reencontrou parentesco nas estruturas algébricas de rede e de grupo de transformações que formalizou com o auxílio dos matemáticos A. Weil e G. H. Güilbaud. Essas estruturas podem ser aplicadas não só ao parentesco, podem ser reencontradas na passagem de uma classificação a outra, de um mito a outro, enfim em todas as *práticas* e produtos cognitivos das civilizações estudadas.

Levi-Strauss explica que:

> Se, como cremos, a atividade inconsciente do espírito consiste em impor formas a um conteúdo e se essas formas são fundamentalmente às mesmas para todos os espíritos, antigos e modernos, primitivos e civilizados – como o estudo da função simbólica, tal qual se exprime na linguagem, o mostra de maneira tão manifesta – é necessário e suficiente atingir a estrutura inconsciente e, subjacente a cada instituição e a cada costume, para obter um princípio de explicação válido para outras instituições e outros costumes, com a condição, naturalmente, de prolongar bastante a análise[158].

Em qual sentido perguntou Piaget, existem essas estruturas de Levi-Strauss? Parecem estruturas mentais, o problema, então, é apenas mais agudo: qual é o modo de *existência* do intelecto ou do espírito, se ele não é nem social, nem mental, nem orgânico?

De tal ponto de vista, o intelecto coletivo parece o social, a inteligência não mais precede a vida mental nem decorre dela como um simples efeito entre os outros: ela é a forma de equilíbrio de todas as funções cognitivas.

---

157 PIAGET. O estruturalismo. 1979, p. 86.
158 STRAUSS citado por PIAGET. O estruturalismo. 1979, p. 89.

Considera-se como o fundamento desse intelecto coletivo o simbolismo e a capacidade simbólica do Homem. Piaget, em princípio, concorda com o estruturalismo de Levi-Strauss. Neste sentido escreveu que nenhuma observação coloca em dúvida os aspectos positivos estruturais das análises de Strauss que:

> [...] visam apenas libertá-las de seu esplêndido isolamento, porque, ao nos instalarmos sem dificuldade nos estados de perfeição, esquecemos os caracteres mais específicos, talvez, da atividade humana, mesmo em seus aspectos cognitivos: diferentemente de muitas espécies animais que não podem se modificar senão mudando sua espécie, o homem conseguiu se transformar, transformando o mundo e se estruturar, construindo estruturas, sem as sofrer de fora ou de dentro em virtude de uma predestinação intemporal[159].

Uma vez admitida a existência das estruturas, pergunta-se em que consiste essa existência? Strauss mencionou que,

> [...] é preciso reintegrar os conteúdos nas formas, lembrando que não existem nem formas nem conteúdos em um sentido absoluto e que, no real como nas matemáticas, toda forma é um conteúdo para aqueles que a englobam e todo conteúdo é uma forma para aqueles que o contém[160].

Uma outra questão é levantada: como de uma *forma qualquer*, elas se organizam em estruturas? Caso sejam estruturas abstratas do lógico ou do matemático, a organização acontece pelo processo da abstração reflexiva. No caso do real, há um processo formador geral que conduz e assegura às estruturas auto-regulações por meio do processo da equilibração. Ao efetuar regulações, marcam suas etapas obtendo em sua forma final uma reversibilidade operatória.

CAPÍTULO VII: Estruturalismo e filosofia

Neste capítulo, Piaget discutiu as relações entre estruturalismo e dialética, a partir do debate entre Lévi-Strauss e Sartre, concluindo que não existe qualquer conflito inerente entre estruturalismo e dialética. Nesse debate, parece ter se esquecido de que no terreno das ciências, o estruturalismo sempre foi solidário de um construtivismo sem falar na idéia de totalidade, comum às tendências dialéticas e estruturalistas.

[159] PIAGET. O estruturalismo. 1979, p. 95
[160] Ibid., p. 91.

Destacou o componente do pensamento dialético utilizado por Sartre, o construtivismo e o historicismo. Strauss salientou que a dificuldade do pensamento de Sartre reside no fato de ter se centrado sobre o *eu* ou sobre um *nós*, totalmente fechado a outros *nós*. Quanto ao construtivismo, Sartre crê no apanágio do pensamento filosófico como distinto do conhecimento científico que fornece um quadro retirado do positivismo e de seu método analítico.

Em relação à dialética e ao pensamento científico, Strauss subestimou-os por causa do caráter relativamente estático ou anti-histórico de seu estruturalismo, salientando a existência de duas espécies de *métodos* que a razão pode adotar.

Assim, a construção que a atitude dialética reclama, supõe que ela própria engendra as negações em solidariedade com as afirmações, para encontrar, em seguida, a coerência como forma de superação comum.

Também faz uma análise estruturalista em Marx denominada de *estruturas globais*, distinguindo as infra-estruturas reais das superestruturas ideológicas. Para o marxismo, o pensamento é uma *produção*, uma espécie de *prática teórica* em que intervêm os fatores sociais e históricos e, na interpretação da famosa passagem de Marx, a *totalidade concreta,* na realidade, é um produto do pensar e do conceber. Observou que a contradição dialética em Marx não apresenta relação com a de Hegel. Althusser mostrou diferenças nas noções de *totalidade* em Marx e Hegel.

Piaget qualificou o estruturalismo de Foucault de estruturalismo sem estruturas, conservando do estruturalismo estático os seus aspectos negativos, tais como a desvalorização da história e da gênese, o desprezo pelas funções e a negação do próprio sujeito, já que o homem logo vai desaparecer. Em relação ao aspecto positivo, suas estruturas são esquemas figurativos e não sistemas de transformações e, enfaticamente destacou o recurso à linguagem, concebida como dominador do homem, porque é exterior aos indivíduos. Porém para ele, "o ser da linguagem permanece voluntariamente, uma espécie de mistério, do qual se apraz apenas em sublinhar a **insistência enigmática"**[161]**.**

Foucault em sua obra procurou demonstrar a impossibilidade de se atingir um estruturalismo coerente, separando-o de todo construtivismo.

[161] FOUCAULT, citado por PIAGET. O estruturalismo, 1979, p. 110.

CONCLUSÃO

Nesta seção foram indicados alguns pontos das principais teses estruturalistas, constatando-se primeiro que as aplicações do estruturalismo são novas, o próprio método tem uma longa história no que se refere à relação entre dedução e experiência. Piaget deixou explícito que a estrutura não é observável e por isso se situa em níveis que precisam abstrair formas de formas, o que exige particular esforço de abstração reflexiva. Da história do estruturalismo científico, ele explanou que se trata essencialmente de um método com tudo o que esse termo implica de tecnicidade, obrigações, honestidade intelectual e progresso nas sucessivas aproximações.

Piaget chegou à seguinte conclusão essencial: o estudo "das estruturas não poderia ser exclusivo e não suprime, notadamente nas ciências do homem e da vida em geral, nenhuma das outras dimensões da pesquisa"[162]. Assim, esse estudo tende a integrá-los, pelo modo da reciprocidade e das interações.

A segunda conclusão geral é que a pesquisa das estruturas só pode desembocar em coordenações interdisciplinares, e a terceira conclusão mostra que as estruturas não destruíram o homem nem as atividades do sujeito. Também fez a distinção entre: 1) o sujeito individual e o sujeito epistemológico ou núcleo cognitivo comum a todos os sujeitos de mesmo nível; 2) e o de opor a tomada de consciência fragmentária deformadora daquilo que o sujeito consegue fazer em suas atividades intelectuais, das quais conhece o resultado e não o mecanismo.

Dissociando-se o "*eu*" do "*vivido*", restam suas operações que são os elementos constitutivos das estruturas utilizadas por ele, retirados por abstração reflexiva das coordenações gerais de suas ações, processo gestador das estruturas em sua construção ou reconstrução permanentes, pois não existe estrutura sem uma construção, seja abstrata, seja genética.

A proximidade, dessa construção foi constatada, com a descoberta de Göedel, na teoria lógico-matemática de estruturas mais ou menos 'fortes' ou 'fracas'**,** em que as mais fortes não podem ser elaboradas, senão após as mais fracas, e as estruturas abstratas tornam-se solidárias de uma construção conjunta jamais acabada.

[162] PIAGET. O estruturalismo. 1979, p. 112

Na Psicologia da Inteligência, a gênese é uma passagem formadora conduzindo do mais fraco ao mais forte, e a estrutura é um sistema de transformação de uma formação dos instrumentos adequados.

Em relação ao problema da gênese, é discutido que é uma predestinação eterna ou um construtivismo, pois anteriormente ao teorema de Göedel, o matemático pensava que, antes da descoberta dos números negativos e da extração de raízes, o número imaginário $\sqrt{-1}$ existia por toda a eternidade no seio de Deus e, após este teorema, Deus passou a construir incessantemente sistemas cada vez mais 'fortes'.

Assim, ao passarem dae matemáticas às estruturas, o problema torna-se ainda mais agudo, visto que o inatismo da razão de Chomsky ou a permanência do intelecto humano em Levi-Strauss negligenciam a Biologia. Em relação às estruturas orgânicas, verifica-se o produto de uma construção evolutiva (ADN). Concluindo, Piaget afirmou que as pesquisas genéticas foram reforçadas pelas perspectivas estruturalistas.

Em relação ao funcionalismo, se as estruturas são inseparáveis de uma gênese, naturalmente o conceito de função não pode perder seu valor e permanece implicado na auto-regulação da qual procedem as estruturas. Portanto, a natureza do sujeito é constituir um centro de funcionamento e não a sede *a priori* de um edifício acabado.

Neste sentido, o estruturalismo é um método, em razão da limitação de suas aplicações à sua própria fecundidade, conduz-se em conexão com todos os outros métodos, não contradizendo em nada as pesquisas genéticas ou funcionais, que são reforçadas por meio desses contatos. Como o método é aberto significa que no curso de suas trocas recebe um conjunto importante de dados a serem integrados e novos problemas a resolver.

Este processo ocorre nas Matemáticas, e o estruturalismo da equipe Bourbaki recorreu a estruturas mais dinâmicas (categorias/funções). Enfim, as formas atuais de estruturalismo buscam desenvolvimentos múltiplos, para superar suas limitações por novas sínteses.

Portanto, toda estrutura compreende um sistema de transformações que comporta leis como sistema e conserva-se ou se enriquece pelo próprio jogo de suas transformações. Explicitando que o método axiomático permite as passagens e as traduções de uma representação para outra, Piaget fez as seguintes considerações relacionadas ao estruturalismo: a realidade é um processo, o objeto é um invariante; e destacou a utilidade do estruturalismo, tão necessário no campo da matemática, porque opera sobre modelos.

Pelo seu aspecto dinâmico, o estruturalismo piagetiano pode ajudar a ensinar estruturas por meio dos jogos, pois apresenta uma estrutura com atividades. Assim sendo, os jogos começam como um bom modelo das estruturas algébricas ou da Matemática, em geral.

O estruturalismo matemático que é estático, só fala como é a estrutura. Em vista disso, Piaget apresentou uma nova interpretação ao estruturalismo, conseguindo efetuar a ligação com o construtivismo.

O JOGO NA VISÃO PIAGETIANA: UMA ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE NÚMEROS NEGATIVOS

5.1 INTRODUÇÃO

De acordo com a teoria genética piagetiana ou construtivista, adquirimos os conceitos numéricos por meio de uma construção interna, pelas relações criadas mentalmente por indivíduo envolvendo atos cognitivos.

Segundo Piaget (1979), a aquisição do conhecimento pode ocorrer, de um lado, pela abstração construtiva (reflexiva), sendo considerado o nível ideal para a aprendizagem do conhecimento matemático, e, de outro, pela simples observação, manipulação e representação de fatos observados, tal qual se apresentam (abstração empírica). Porém é justamente neste ponto que precisamos refletir mais profundamente sobre os mecanismos que possam favorecer o aluno a construir seu próprio conhecimento matemático. Em função disso, apresentamos alguns argumentos que mencionam a importância da utilização do jogo baseada na concepção piagetiana e que pode ser uma ferramenta na superação do empirismo em relação aos números negativos.

O empirismo é uma filosofia que defende que todo conhecimento é proveniente puramente da observação passiva e receptiva do mundo. Assim, observando-se a forma como são apresentados os números negativos em textos didáticos, pode-se perceber a veiculação de tendências empiristas. Essa tese pode ser justificada pela riqueza das ilustrações, pela apresentação das regras e das atividades repetitivas que mostram apenas seu funcionamento. Isto não é exatamente o que interessa à Matemática, por isso estes textos não conseguem em sua grande maioria mostrar ao professor como organizar e estruturar o processo.

Para superarmos essa tendência empirista, precisamos de uma epistemologia fundamentada na atividade e nas estruturas das ações. Considerando estes aspectos, neste capítulo, fazemos uma abordagem piagetiana do jogo, tratando-o sob três aspectos: o jogo segundo Piaget; a classificação de jogos; e o jogo como alternativa de ensino de números negativos.

5.2 O JOGO NA VISÃO PIAGETIANA

Para Piaget, "o jogo é uma alternativa freqüentemente ignorada pela escola tradicional, por dois motivos: primeiro, pelo fato de parecer privado de relevância funcional e segundo por ser considerado apenas um descanso ou desgaste de um excedente de energia"[163]. Em ambos os casos, o tratamento dado ao jogo é efetivado dentro de uma visão simplista, sem conseguir explicar a importância que as crianças atribuem aos jogos, sem perceber o caráter que se podem revestir os jogos infantis em seu simbolismo. Assim:

> A criança que joga desenvolve suas percepções, sua inteligência, suas tendências à experimentação, seus instintos sociais etc. É pelo fato de o jogo ser um meio tão poderoso para a aprendizagem das crianças, que em todo o lugar onde se consegue transformar em jogo a iniciação à leitura, ao cálculo, ou à ortografia, observa-se que as crianças se apaixonam por essas ocupações comumente tidas como maçantes[164].

O jogo deve mobilizar um processo de aquisição do conhecimento e de seu desenvolvimento com base nas abstrações empírica e reflexiva. No entanto a sua aplicação como brincadeira ou simples passatempo favorece sua desvalorização e o descaso em sua utilização como estratégia de ensino. Neste sentido, as atividades desenvolvidas alicerçam-se apenas no ato mecânico da memorização e repetição. Entretanto, o jogo também pode ser usado com outras finalidades, tais como compreender e descrever regras, leis, teoremas e propriedades que regem o conhecimento matemático. Neste caso, a criança, brincando, constrói seu próprio conhecimento, pois a atividade que ela desenvolve, oferece condições para que esteja mentalmente ativa, comparando, classificando ou trocando idéias.

---

[163] PIAGET. Psicologia e pedagogia. 1988, p. 158.
[164] Ibid., p. 158-159.

No jogo, além do ato mecânico (decorar e repetir), o ato de jogar pode implicar também a aplicação de regras em situações variadas e específicas, como no caso do 'Tabuleiro de Xadrez'[165].

Piaget explicitou que o jogo:

> Sob as suas duas formas essenciais de exercício sensorio-motor e de simbolismo e uma assimilação do real à atividade própria, fornecendo a esta seu alimento necessário e transformando o real em função das necessidades múltiplas do eu. Por isso os métodos ativos de educação das crianças exigem todos que se forneça às crianças um material conveniente, a fim de que, jogando, elas cheguem a assimilar as realidades intelectuais que, sem isso, permanecem exteriores à inteligência infantil[166].

No exercício sensório-motor, o jogo é apenas a assimilação pura do real ao eu, uma vez que as condutas se desenvolvem, funcionando (por exemplo, balançar, sacudir agarrar) de acordo com a lei geral da assimilação funcional, e o objeto (bola) não tem outra significação, além de servir a este exercício.

Quanto ao simbolismo, por exemplo, a brincadeira de boneca pode desenvolver, além do instinto maternal, sua representação simbólica, fazendo-a reviver e transformar, segundo as necessidades, o conjunto de realidades vividas e ainda não assimiladas (emoções, realizações dos desejos, sentimentos, liquidação do conflito etc.).

Piaget expôs que "se a assimilação é necessária à adaptação, ela constitui apenas um de seus aspectos. A adaptação completa que deve ser realizada pela infância, consiste numa síntese progressiva da assimilação e acomodação"[167]. Neste sentido, pela própria evolução interna, os jogos das crianças transformam-se paulatinamente em construções adaptadas, e isto requer sempre mais trabalho efetivo.

Por meio de situações de jogos, as crianças estruturam e definem problemas na ambigüidade do mundo real, imaginando a seu modo como encontrar a solução, e para isso inventam abordagens originais. É essa atividade mental que prevalece no desenvolvimento intelectual ou cognitivo (raciocínio lógico-matemático).

---

165 WIELEWSKI, O tabuleiro de xadrez: uma perspectiva para a didática da aritmética. Dissertação de Mestrado. Cuiabá: UFMT, 1998.

166 PIAGET. Psicologia e pedagogia. 1988, p. 160.

167 Ibid., p. 160.

Os jogos propiciam situações para o pensamento, em geral, e para a construção do próprio conhecimento matemático. Por exemplo, ao resolver uma situação-problema com o uso do jogo do ‘Tabuleiro de Xadrez’, o aluno pode elaborar diferentes estratégias que favoreçam a criatividade, o raciocínio, a aplicação das combinações numéricas, teoremas matemáticos, propriedades, regras de sinais etc.

O uso do ‘Tabuleiro de Xadrez’ pode proporcionar ao aluno a execução da atividade matemática de forma natural e sem constrangimento, pois, ao jogar, pode experimentar, visualizar e agir. Neste sentido, o jogo é uma alternativa para ensinar matemática e constitui-se em um campo de experimento, de verificação e confirmação.

Assim sendo, ao jogar, o aluno poderá estabelecer relações de classificação, ordenação, comparação, coordenando e relacionando as ações simples e complexas, e para isto o aluno precisa de algo objetivo em que possa experimentar, visualizar e agir. É exatamente neste sentido que Piaget procurou analisar o jogo como instrumento de apropriação do conhecimento lógico-matemático.

Para esclarecer sua visão, classificou o jogo em três grandes grupos: jogos de exercícios, jogos simbólicos e jogos de regras.

5.3 CLASSIFICAÇÃO DO JOGO, SEGUNDO PIAGET

Em suas pesquisas, Piaget utilizou o conhecimento matemático como objeto de estudo, e o jogo foi um dos focos de seu interesse, porque nele há uma transposição simbólica que subordina o objeto à atividade da criança. Inicialmente, o pensamento dela age de forma livre, conforme suas inclinações pessoais, sem se preocupar em aprender uma nova conduta. Entretanto, com a socialização, incorpora gradativamente as regras sociais e a observação da realidade. Neste sentido, o jogo também, ao adotar regras, se ajusta aos dados da realidade, fatores relevantes para a ampliação do pensamento.

Piaget organizou uma classificação dos jogos, relacionando-os às características referentes aos diferentes *estágios* de desenvolvimento cognitivo. Esclareceu que:

> [...] para que haja *estágios*, é necessário primeiramente que a ordem de sucessão das aquisições seja constante. Não a cronologia, mas a ordem de sucessão, pois a cronologia é extremamente variável; ela depende da experiência anterior dos indivíduos, e não somente de sua maturação, depende principalmente do meio social que pode acelerar ou retardar o aparecimento de um estágio, ou mesmo impedir sua manifestação. [...]. O *caráter integrativo*, quer dizer que as estruturas construídas numa idade dada se torna parte integrante das estruturas da idade seguinte. Por exemplo, o objeto permanente que se constrói no nível sensório-motor será um elemento integrante das noções de conservação ulterior. [...] Procura caracterizar os estágios por uma *estrutura de conjunto.* Uma estrutura será, por exemplo, no nível das operações concretas, um agrupamento (classificação, seriação), no nível da operação formal será o grupo das quatro transformações ou a rede[168].

Com base nestas características, dividiu o desenvolvimento cognitivo em três grandes períodos:

1º *período da inteligência sensório-motora*

Este período vai desde o nascimento até os dois anos de idade, aproximadamente, e caracteriza-se por uma forma de inteligência empírica e exploratória. A criança aprende pela experiência, examinando e experimentando com os objetos a seu alcance, somando conhecimentos.

Se o campo da inteligência sensório-motora aplica-se somente a ações concretas, o da inteligência representativa amplia-se, liberta-se da realidade concreta, torna possível a manipulação simbólica de algo que não está visível. É uma inteligência prática relacionada à manipulação de objetos (agarrar, sugar, pegar, jogar, derrubar etc.), ligando o próprio corpo ao objeto e "no lugar de palavras e conceitos utiliza percepções e movimentos organizados em esquemas de ações"[169].

O pesquisador genebriano explicitou que "a linguagem inicial é feita, antes de tudo, de ordens e de expressões de desejo [...] a palavra se limita quase a traduzir, neste nível, a organização de esquemas sensório-motores"[170].

[168] PIAGET. Problemas de psicologia genética. 1973, p. 50-51.
[169] PIAGET. Seis estudos de psicologia.1998, p. 19
[170] PIAGET. A formação do símbolo na criança. 1978, p. 285.

Piaget esclareceu que o universo primitivo não comporta objetos permanentes, não existe nenhuma diferenciação entre o eu e o mundo exterior, e esta ação primitiva exibe simultaneamente uma "indiferenciação completa entre o subjetivo e o objetivo e uma centração fundamental, embora radicalmente inconsciente, em razão de achar-se ligada a esta indiferenciação"[171].

Desse modo, a ação constitui um todo isolável, em sua única referência comum e constante: só pode ser o próprio corpo, decorrendo daí uma centração automática sobre ele, que não é desejada nem consciente.

No entanto, pode-se notar a ocorrência de uma diferenciação paulatina entre sujeito e objeto, assinalada pela formação de coordenações, e a distinção, de um lado, as que ligam entre si as ações do sujeito (dissociar certas ações ou esquemas tais como, ordenar, encadear, pôr em correspondência etc.) e, de outro, as que se referem às ações de uns objetos sobre outros (conferem ao objeto uma organização espaço-temporal). Neste sentido, estas coordenações nascentes entre ações marcam o início da diferenciação entre o sujeito e objeto, porém ainda continuam sendo de natureza material, ou seja, "da ação efetiva e atual sem conhecimento de sua existência enquanto esquema dado a inexistência de instrumentos semióticos para designá-lo e permitir a sua conscientização"[172].

2° período de preparação e de organização das operações concretas de classes e relações

Este período, que se estende de dois anos mais ou menos a 11-12 anos subdivide-se em um subperíodo *A* de preparação funcional das *operações*[173], de estruturas pré-operatórias e um subperíodo *B* de estruturação propriamente operatória.

No subperíodo das *representações pré-operatórias*, que vai mais ou menos dos 2 anos a mais ou menos 7 anos, a criança já pode simbolizar e evocar objetos ausentes; estabelece diferença entre significante e significado, o que possibilita distância espaço-temporal entre sujeito e objeto; por meio da imagem mental, imita gestos, mesmo com a

[171] PIAGET. Epistemologia genética, 1990, p. 9.
[172] Ibid., p. 15.
[173] Operações são as ações interiorizadas, reversíveis e solidárias de estruturas de conjunto, tais como os *agrupamentos*, *grupos* e *redes* (PIAGET, 1973, p. 55).

ausência de modelos, usa palavras para referir-se a objetivos e situações e agrupa objetos de forma rudimentar. Nesta fase, as crianças usam o que Piaget chama de pensamento intuitivo, raciocinando com base nas intuições e não em uma lógica semelhante à do adulto.

Assim a linguagem, neste período, pode ser comunicativa, quando usada com a intenção de transmitir algo a alguém ou de procurar informações, e egocêntrica, quando a criança fala pelo prazer de falar, numa espécie de monólogo, às vezes, coletivo, sem intenção de se comunicar com os outros.

Neste período, as crianças ainda não se ligam às regras estabelecidas, porque não conseguem conciliar seu próprio interesse e o do grupo. Os juízos de valor são feitos à base das primeiras impressões, fundadas em instituições e dicotomias: certo/errado, melhor/pior.

No subperíodo das *operações concretas*, que se estende de 7 - 8 anos a 11-12 anos, a criança torna-se capaz de efetuar operações mentalmente, lembrando o todo enquanto divide partes, colocando idéias em seqüência, iniciando a construção de operações reversíveis, podendo *conservar*, isto é, considerar, ao mesmo tempo, tanto o todo como vários reagrupamentos de suas partes.

No estágio das operações concretas, a criança é capaz de classificar, agrupar, tornar reversíveis as operações que efetua e pensar sobre um fato com base em diferentes perspectivas.

Com esta possibilidade de reversibilidade, passa a explorar diferentes caminhos para resolver situações-problema, já que pode fazer e refazer mentalmente o caminho de ida e volta, e sua linguagem perde as características de egocentrismo gradativamente, também, começa a discutir a questão das regras dos jogos dentro do grupo, tentando segui-las.

3° *período das operações formais*

Nesta etapa, que se estende a partir de 11-12 anos, a criança inicia sua transmissão para o modo adulto de pensar, sendo capaz de pensar em idéias abstratas, em que “a criança consegue libertar-se do concreto e situar o real num conjunto de transformações possíveis”[174]. Ao final desse período, mais ou menos aos 15 anos, a criança atinge sua maturidade intelectual. Assim: a linguagem dá suporte ao pensamento conceitual; existe a possibilidade de formulação de hipóteses e proposições o jovem caminha da anomia e da heteronomia para a autonomia no tocante às regras sociais. Num primeiro momento, a criança desconhece as regras (anomia), depois as recebe *de fora para dentro* (heteronomia). Neste estágio, o jovem consegue caminhar para rejeitar, criticar, aceitar, refletir sobre os valores e convenções sociais, culminando com a construção da autonomia.

Quanto à linguagem, ao atingir a adolescência, ela assume um papel cada vez mais importante, não só pelo que oferece de conceitos abstratos necessários à flexibilidade de pensamento, quanto, também, pelo acesso ao conhecimento filosófico e científico.

Os estágios exercem caráter integrativo, as estruturas construídas em certo nível são integradas às estruturas do nível seguinte. Por exemplo, um *esquema de reunião* para condutas como as de um bebê que empilha toquinhos, permanece na criança mais velha que ajunta objetos, procurando classificá-los, e mesmo em operações lógicas tais como a reunião de duas classes (os pais mais as mães = todos os pais etc.).

Desse modo, o desenvolvimento por estágios sucessivos realiza em cada estágio um patamar de equilíbrio, desde que este seja atingido num ponto; a estrutura é integrada em um novo equilíbrio em formação, sempre mais estável e de campo sempre mais extenso. A ordem de sucessão das aquisições é constante, no sentido de que uma característica não aparecerá antes de outra em um conjunto de indivíduo, e depois em seqüência diferente, em outro conjunto.

Pelo exposto, podemos observar que Piaget trata as etapas de evolução do desenvolvimento cognitivo de forma bem-detalhada e organizada, desde o nascimento até a idade adulta. Com base nesses aspectos, organizou uma classificação dos jogos, relacionando-os às características referentes aos diferentes estágios de desenvolvimento cognitivo. A classificação proposta tem como base a evolução das estruturas nas formas de exercícios, símbolos e regras, observando uma hierarquia segundo as fases do desenvolvimento cognitivo.

[174] PIAGET. Psicologia da criança. 1995a, p. 117.

5.3.1 Jogo de exercício

O jogo de exercício é o primeiro a aparecer e caracteriza a fase sensório-motora, em que existem atos de inteligência. Ela "procede como um filme em câmara lenta, do qual vêem todos os quadros, mas sem fusão da imagem; portanto, sem a visão continuada necessária para a compreensão do conjunto"[175]

No jogo do exercício, a inteligência é essencialmente prática e propicia a resolução de um conjunto de problemas de ação (puxar, balançar, alcançar objetos afastados, escondidos etc.), cujas construções estão apoiadas em percepções e movimentos, sem a intervenção de uma representação ou pensamento. É o ato da repetição como forma de aperfeiçoamento das ações.

O jogo de exercício não tem nenhuma técnica específica, constitui uma continuidade da atividade imitativa, tais como jogar pedrinhas, pular corda, empilhar cubos etc. Estas atividades colocam em ação um conjunto variado de condutas, mas sem modificar as respectivas estruturas, e permanecem tal como se apresentam no estado de adaptação atual. De acordo com a finalidade dos jogos, vai depender do tipo de estruturas requeridas. Por exemplo, nos jogos de exercício simples**: "J.** aos (**2,8)** enche o balde de areia, vira-o, desfaz o bolo com a pá e recomeça, durante cerca de uma hora; aos (**3,8)** ata e desata os sapatos com ar de satisfação, após tê-lo aprendido"[176]. Estes jogos consistem apenas em um exercício puramente funcional e são realizados apenas por prazer.

Já nos jogos das *combinações sem finalidade*: "**N** aos **(4;3**) mistura as contas de todas as cores na primeira vez que aborda o ábaco. Do mesmo modo, na presença de um loto, empilha os cartões sem se ocupar das correspondências, depois espalha-os em cima da mesa para recomeçar a fazer pequenas pilhas"[177]. Neste caso, ocorre a exploração, apalpando os objetos simplesmente pelo prazer de agir ou de encontrar novas e divertidas combinações, ora desfazendo, ora construindo.

Nos jogos das *combinações com finalidade* lúdicas:

---

175 PIAGET. Psicologia da inteligência. 1983, p. 125

176 PIAGET. A formação do símbolo na criança. 1978, p. 150.

177 Ibid., p. 152-153.

> ***P.Y**.e **N,** após **(4;3)** ultrapassam rapidamente o nível das combinações sem finalidades, para se divertirem ordenando cubos, planos e bolas de diferentes maneiras, enfim, as contas de um ábaco, obedecendo à ordem de grandezas decrescentes ou selecionando as cores, arrumam os cubos horizontalmente em filas, ou verticalmente em torre, etc.*[178].

Neste caso, o jogo de exercício transforma-se em jogo simbólico, jogo regulado, ou conduz a adaptações reais e saí do domínio do jogo.

Em relação aos jogos de *exercício do pensamento,* destacamos os seguintes exemplos:

> ***J*** aos ***(3,8)*** pergunta, na presença de uma imagem: *O que é isso*?[179] – **É um curral**[180] – *Por que?* – **É uma casa de vaca.** Aos (3;9) fala sem interesse do que afirma somente pela combinação como tal: – *Isso são asas (*as orelhas de um elefante)? – **ao. Os elefantes não voam. –** *Claro que voam, sim! Eu vi um* **– Estás brincando. –** *Não, não é brincadeira. É verdade. Eu vi.* Ou, num outro dia: - *Vi um porco que se lavava*. **A sério**. *Eu vi. Ele fazia assim...* etc.[181].

Esses exercícios não comportam qualquer interesse real para o próprio conteúdo do pensamento, e por isso sua importância diminui rapidamente com a idade. As atividades são desenvolvidas pelo puro prazer de perguntar, combinar, inventar ou construir.

A criança que arremessa a bola em um cesto pelo prazer de acertar o alvo, repete a mesma ação muitas vezes, executando os mesmos movimentos, testando a capacidade de aumentar os acertos, pois procede dessa maneira simplesmente para se divertir e não por necessidade ou para aprender uma nova conduta. Por isso:

> [...] na criança o jogo de exercício é, portanto, o primeiro a aparecer [...] A atividade lúdica supera amplamente os esquemas reflexos e prolonga quase todas as ações, daí resultando a noção mais vasta de 'exercício' funcional. [...] O jogo de exercício também pode envolver as funções superiores; por exemplo, fazer perguntas pelo prazer de perguntar, sem interesse pela resposta nem pelo próprio problema[182].

---

178 PIAGET. A formação do símbolo na criança. 1978., p. 153.
179 Fala da criança.
180 Fala do experimentador.
181 PIAGET. A formação do símbolo na criança. 1978, p. 154-155.
182 Ibid., p. 145-146.

O único objetivo do jogo de exercício é o prazer do funcionamento, não existe uma necessidade, visto que não há intervenção de símbolos ou ficções, nem de regras. Nos jogos de exercício, a forma de assimilação é funcional, uma das primeiras formas de assimilação (ver item 3.7). Por exemplo, o ato de contar para uma criança de 2-3 anos tem uma função diferente do ato de contar de uma criança com mais de 7 anos. No primeiro caso, conta pelo prazer de contar, envolve apenas o ato da repetição, no segundo caso, além da repetição, envolve a abstração, que consiste em separar mentalmente propriedades que nos esclarecem acerca dos objetos materiais ou ideais.

Piaget esclareceu que a

> [...] assimilação explica um fato primitivo que é geralmente admitido como o mais elementar da vida psíquica: a repetição [...] O fenômeno só é compreensível se a conduta repetida apresentar um significado funcional, isto é, se revestir de um determinado valor para o próprio indivíduo[183].

O jogo de exercício evidencia que são formas de repetição e por isso constituem-se em hábitos. Por exemplo, uma seqüência motora, lançar uma bola, segurar um brinquedo ou quando a criança aprende a falar os números em que repete a seqüência numérica ordenada ou não, faz pelo prazer de repetir. Em relação a este aspecto, Piaget afirmou:

> [...] para que se constitua, o hábito supõe sempre uma relação fundamental de meio e fim: uma ação jamais é uma seqüência de movimentos associados mecanicamente, mas orientada no sentido de uma satisfação, tal como o contato com o alimento. [...] O hábito seria, pois, expressão de uma organização inteligente, de resto coextensiva a toda estrutura viva[184].

É interessante observar ainda que: “o hábito, como a percepção, é irreversível, porque sempre é dirigido em sentido único para o mesmo resultado, assim inverter um hábito (escrever ao inverso ou da direita para a esquerda etc.) consiste em adquirir novo hábito”[185]. Isto demonstra a importância da assimilação funcional no processo da construção do conhecimento, pois a repetição em sentido funcional, pela sua regularidade,

---

[183] PIAGET. O nascimento da inteligência na criança. 1975, p. 52.
[184] PIAGET. Psicologia da inteligência. 1983, p. 94
[185] Ibid., p. 95.

pode ser elemento auxiliar na aprendizagem escolar, desde que se desperte o prazer funcional.

Para Piaget, os jogos de exercício correspondem à primeira manifestação lúdica e aparecem durante os dois primeiros anos de vida. As atividades desenvolvidas pela criança compreendem os exercícios de valor exploratório, de ação e manipulação (observa e toca os objetos). As características presentes nessa primeira manifestação lúdica prosseguem em outras estruturas dos jogos de símbolos e de regras.

5.3.2 Jogo simbólico

Contrariamente ao jogo de exercício, que não supõe qualquer estrutura representativa, "o jogo simbólico implica a representação de um objeto ausente"[186], sendo ao mesmo tempo imitativo e imaginativo.

De fato, o que ocorre com o jogo simbólico é a representação de uma situação sem relação direta com o objeto que lhe serviu de modelo, mas que serve para reproduzir mentalmente alguma coisa ausente, comparando um elemento dado, um elemento imaginado e uma representação fictícia, e essa comparação consiste em uma assimilação deformante. Por exemplo, uma criança ao deslocar uma pedra pensando ser um cachorro representa, simbolicamente, este pela pedra e fica satisfeita com essa ficção, porque a ligação entre o significado e significante permanece totalmente subjetiva. A assimilação deformante refere-se à explicação causal animista da criança, que pode ser representada pelas fantasias ou mitos que ela inventa ou escuta muitas vezes (faz de conta), em que a repetição ocorre por analogia, aspecto que o diferencia dos jogos de exercício.

Inicialmente, os jogos simbólicos procedem de ações individuais e, pelo próprio desenvolvimento, acabam evoluindo para jogos grupais que favorecem a interação coletiva. Esta forma de organização do jogo em grupo aponta uma nova estrutura, constituída pelas regras, que vão dar origem à terceira grande categoria, que é a dos jogos com regras. Ao contrário do simbolismo, as regras dos jogos presumem relação social ou interindividual, para os quais pressupõem uma obrigação entre os participantes.

[186] PIAGET. A formação do símbolo na criança. 1978, p. 146.

Piaget esclareceu ainda que: “A maioria dos jogos simbólicos, salvo as construções de pura imaginação, ativa os movimentos e atos complexos. Eles são simultaneamente, sensório-motores e simbólicos, mas chamamos de simbólicos na medida que se integram ao simbolismo os demais elementos”[187].

Explicitou que o simbolismo parte de condutas individuais que possibilitam a interiorização da imitação (de coisas e pessoas), citando como exemplo a organização de cenas que representam a vida escolar, casamento etc., que podem beneficiar o aperfeiçoamento do simbolismo, em relação aos símbolos rudimentares e globais com que os menores se contentam. Por exemplo, quando a criança começa a aprender a escrever as palavras ou números, estes representam apenas um símbolo escolar que precisam dominar.

Neste sentido, o símbolo lúdico se transforma, paulatinamente, em representação adaptada, assim como as montagens informes dos pequenos se convertem em sábias construções de madeiras, pedras ou de modelagem. Piaget esclareceu que:

> [...] os símbolos coletivos promovidos à categoria de *papéis* num jogo de comédia etc. constituem apenas um caso particular, portanto, daqueles jogos de criação que promanam em parte do jogo simbólico mas que se desenvolvem na direção da atividade construtiva ou do trabalho, propriamente dito[188].

Neste sentido, o jogo simbólico assume um papel importante na aprendizagem, porque por meio da fantasia aguça seu poder inventivo e criativo e com o uso da analogia poderá produzir suas próprias convenções e símbolos. Porém, devemos observar que as analogias encontradas nos jogos simbólicos são convenções motivadas, visto que a assimilação deformante para a criança tem um significado profundo, diferente das convenções e simbologias escolares que são impostas sem ter um significado real para a criança; entretanto, ainda continua predominando o caráter individualista.

5.3.3 Jogo de regra

Com o desenvolvimento dos jogos simbólicos, começa a surgir uma terceira grande categoria, que é a dos jogos com *regras*, que vão se utilizar das regularidades que a

[187] PIAGET. A Formação do símbolo na criança. 1978, p. 147.
[188] Ibid., p. 147

criança adquiriu, com o jogo de repetição, as convenções dos jogos simbólicos e agora uma nova aprendizagem no coletivo com os jogos de regras.

Nesse sentido, Piaget defendeu que: "ao invés do símbolo, a regra supõe, necessariamente, relações sociais ou interindividuais [...] A regra é uma regularidade imposta pelo grupo, de tal sorte que a sua violação representa uma falta"[189].

O jogo com regras, além dos conteúdos dos jogos precedentes (jogos de exercícios e simbólicos), apresenta um elemento novo que é a regra, o resultado da organização coletiva das atividades lúdicas.

Desta forma, Piaget afirmou que:

> [...] a regra é uma regularidade imposta pelo grupo e de tal sorte que a sua violação representa uma falta. Ora, se vários jogos regulados são comuns às crianças e aos adultos e é transmitido de geração em geração sem a intervenção de uma pressão adulta[190].

Por isso, "o jogo de regras subsiste e desenvolve-se mesmo durante toda a vida. [...] É a atividade lúdica do ser socializado"[191], daí seu aparecimento tardio.

Em relação às regras, destacou dois casos: o primeiro, formado pelas regras transmitidas que ocorrem por pressão de sucessivas gerações (bola de gude, amarelinha), e o segundo, as regras espontâneas de natureza contratual e momentânea que são provenientes da socialização. Nessa relação, mesmo contando com a participação dos mais novos e dos mais velhos, normalmente permanece uma relação entre iguais e contemporâneos.

Quanto às regras propriamente ditas, Piaget evidenciou que:

> Os jogos de regras são jogos de combinações sensório-motoras (corridas, jogos de bola de gude ou com bolas etc.), ou intelectuais (cartas, xadrez etc.), com competição dos indivíduos (sem o que a regra seria inútil) e regulamentados quer por código transmitido de gerações em gerações, quer por acordos momentâneos[192].

[189] PIAGET. A formação do símbolo na criança. 1978, p. 147-148.
[190] Ibid., p. 148.
[191] Ibid., p. 182.
[192] Ibid., p. 192.

As regras podem se ampliar com a idade, primeiro, com as atividades que envolvem condutas sensoriais (assobio, gritos etc.) e motoras (bolas, corridas etc.), e segundo, as intelectuais (cartas, xadrez, etc.) que aguçam a curiosidade, criatividade, imaginação, a capacidade de prognosticar e criar estratégias.

A criança precisa estar mentalmente ativa, coordenando diferentes possibilidades (ações simples e complexas), pois é isso que permite sua opção pela melhor solução. Porém essa coordenação ocorre dentro das diferentes modalidades dos jogos de regras, sejam de salão, cartas, tabuleiros, bolas sejam outros. Por exemplo, a criança ao jogar amarelinha precisa conhecer as regras de seu funcionamento, que são discutidas antes do início do jogo. Estas devem ser observadas e aplicadas durante sua realização. Assim sendo, o jogo pelo seu caráter próprio, bem como a Matemática, necessita de boas estratégias para atingir seu objetivo.

Piaget esclareceu que, ao se relacionar com o outro, é aberto um espaço ideal para o questionamento das regras do jogo já estabelecidas. Esse momento de troca de pontos de vista permite a reelaboração e a adequação a uma nova situação, construindo-se, assim, um código do grupo, o que faz desaparecer seu caráter impositivo. A interiorização desse *acordo grupal* ajuda na construção da autonomia da criança, que passará a agir de forma consciente e não mais por coação.

O jogo de regra exerce um papel significativo no processo de ensino e aprendizagem, porque, quando a criança joga, precisa desenvolver várias ações mentais simultaneamente, tais como: ser capaz de fazer antecipações, prognosticar, coordenar situações, criar estratégias, ser habilidosa, ter boa memória, estar atenta e concentrada, saber abstrair, relacionar jogada durante todo o jogo, pois o desafio é vencer a si mesma. Portanto, de um lado, no jogo de regra, além da repetição, convenção, o aspecto operatório é muito forte, visto que, ao jogar, precisa coordenar diferentes pontos de vista, como prognóstico, a antecipação, a recorrência e o raciocínio operatório, para atingir a melhor opção. Por outro lado, a aquisição do conhecimento também exige atividades análogas, porém com uma diferença, no jogo de regras as atividades são motivadoras e executadas espontaneamente, ao passo que as atividades propostas pela escola na grande maioria são impostas e sem significado para a criança.

5.4 O USO DO JOGO NA EDUCAÇÃO

A abundância e a riqueza das finalidades do jogo têm sido objeto de estudo de muitos educadores, e na Educação Matemática a opção pelo jogo como estratégia de ensino deve favorecer a aprendizagem de um conteúdo ou de uma habilidade. Ao utilizarmos o jogo como objeto, como ferramenta de ensino deve-se ter em mente a sua adequação ao conteúdo a ser desenvolvido do papel auxiliar no processo do desenvolvimento operatório.

As atividades que envolvem jogos na Educação Matemática, além de ser prazerosa, desafiadora e provocadora de curiosidade, devem propiciar o engajamento do aluno no processo ensino-aprendizagem na construção de conceitos matemáticos. Neste sentido, a utilização de jogos educativos pode ajudar a melhorar o processo ensino-aprendizagem e proporcionar uma maneira lúdica de aprender; por isso tem sido motivo de estudo como alternativa metodológica.

As discussões sobre o papel e a natureza da educação foram significativas e contribuíram para que as teorias pedagógicas, ao longo do tempo, pudessem justificar o uso na sala de aula de materiais concretos ou jogos. Diante disto, apresentaremos alguns pesquisadores que em diferentes épocas defenderam o uso de jogos na educação.

5.4.1 As pesquisas

Como já expusemos, os jogos educativos foram sempre utilizados e atualmente há um interesse crescente nesse recurso para melhorar a aprendizagem e proporcionar ao aluno uma forma de construir seu conhecimento de maneira lúdica e prazerosa. Assim sendo, destacaremos alguns educadores que, ao longo da história, defenderam essa idéia, tais como Fröebel[193] que foi um dos primeiros educadores a utilizar o jogo na educação de crianças. Ele criou diversos materiais, conferindo ao jogo uma dimensão educativa, tornando o ensino mais produtivo, ganhando um aspecto lúdico. Para ele "aprender alguma

[193] FROEBEL (1782 – 1852). Pedagogo alemão foi o fundador do primeiro jardim de infância e criador de métodos de educação que permitiam às crianças grande liberdade de ação.

coisa na vida e através da ação produz muito mais desenvolvimento, cultivo e força do que apreendê-la meramente através da comunicação verbal de idéias"[194].

Os alunos aprendem em contato com o real, com as coisas, com os objetos de aprendizagem e precisam refletir sobre estes objetos para tomar consciência deles. Froebel concebe a matemática não como operações isoladas, porém como algo geral que poderá compreender quando o sujeito for capaz de estruturar a realidade.

Neste sentido na teoria de Froebel, os jogos assumem um papel fundamental na organização escolar, pois o aluno ao jogar pode começar a discriminar, analisar e abstrair as qualidades dos objetos. Para que estas ações ocorram, é preciso que esse aluno esteja mentalmente ativo, pois o jogo é o espelho da vida e o suporte da aprendizagem.

Outro educador de peso que defendeu a utilização do jogo educativo foi Maria Montessori[195], que utilizou os jogos sensoriais para exercitar e desenvolver os sentidos dos seus alunos. Ela percebeu que pela brincadeira a criança podia desenvolver o sentido de ordem, ritmo, forma, cor, tamanho, simetria etc. Por isso priorizou em sua metodologia o uso de materiais pedagógicos e os jogos para ajudar na formação de conceitos matemáticos de ordem, de números, da geometria etc.

A pedagogia montessoriana relaciona-se a normatização (harmonia corpo, espírito, inteligência e vontade). Assim, o seu método tem por objetivo a educação da vontade e da atenção, na qual a criança tem a liberdade de escolher o material a ser utilizado. Neste sentido, o material criado por Montessori tem papel preponderante no seu trabalho educativo, pois pressupõe a compreensão das coisas a partir delas mesmas, porque tem a função de estimular e desenvolver na criança a vontade interior que se manifesta no trabalho espontâneo do intelecto.

Por fim, vale ainda citar Decroly[196], que valorizou a atividade lúdica, transformando os jogos sensoriais e motores em jogos cognitivos. A sua idéia principal foi o desenvolvimento da criança no trabalho e na reflexão. Advogava ainda que educação e

[194] FROEBEL. The education of man. 1892, p. 278-279.

[195] Montessori (1870-1952). Pedagoga italiana que criou um método pedagógico capaz de despertar o gosto pela ordem e pelo trabalho, com liberdade e espírito de iniciativa; método que pôs em prática em sua *Casa das crianças*.

[196] Decroly (1871-1932). Médico e psicólogo, fundou uma escola para aplicação de uma pedagogia baseada na noção do *Centro de interesse.*

sociedade precisam estar em interação constante, por isso a escola deve ser um prolongamento da vida. Sua obra educacional destacou-se pelo valor que colocou nas condições do desenvolvimento infantil, priorizando o caráter global da atividade da criança.

Decroly procurou desenvolver uma escola centrada no aluno, e não no professor, que preparasse as crianças para viver em sociedade, em vez de simplesmente fornecer a elas conhecimentos destinados à sua formação profissional. Foi precursor do método ativo em que o aluno conduz o seu próprio aprendizado (aprender a aprender) e, com tal finalidade, utilizou os centros de interesse.

O centro de interesse era formado de grupos de aprendizados organizados segundo as faixas etárias dos estudantes. Por isso na sala de aula, Decroly preferiu o trabalho em grupo, porém sem perder o caráter da individualidade do ensino, Assim, na escola-oficina, estimulou o uso pela criança de objetos concretos, do mundo real, recorrendo à experiência direta e à intuição como atividades concretas que consistem na materialização das observações e criações pessoais, tais como desenho livre, trabalhos manuais e atividades abstratas que se resumem na materialização do pensamento por meio de símbolos, códigos convencionais apresentados nos textos livres, linguagem, matemática etc.

Portanto, Fröebel, Montessori e Decroly propuseram uma educação sensorial baseada na utilização de jogos e materiais didáticos, sem darem ênfase ao uso dos jogos para introdução e desenvolvimento de conteúdos escolares propriamente ditos. Contudo, já é possível encontrar na literatura estudos que utilizam jogos para serem trabalhados conteúdos específicos, dentre os quais apresentamos alguns que foram realizados na esfera de Educação Matemática.

Grando (1995) discutiu a importância do valor pedagógico do jogo no ensino da matemática, destacando os jogos de estratégia (construção de conceitos) e os de fixação de conceitos. Em seu referencial reporta-se aos estudos de Kishimoto (1994), Machado (1990), Kamii e Devries (1991) e outros.

Pela diversidade da utilização dos jogos no ensino da matemática, esclareceu que o professor que recorrer ao uso do jogo, em sua ação didático-metodológica, deve ter claro o objetivo próprio do ensino da matemática. O jogo é uma ferramenta, um meio, e por isso deve ser empregado de forma lúdica e motivadora com seus alunos. Grando enfatizou "que esta estratégia deve ser empregada como um gerador de situações-problemas que estimulem o aluno a buscar soluções, aprendizagem de um novo conceito ou fixação de conceito já adquirido"[197].

Esta pesquisadora efetuou um estudo em que destacou o jogo pedagógico. Realizou essa pesquisa na sala de aula, com a finalidade de investigar a compreensão dos aspectos cognitivos envolvidos na utilização de jogos e regras na aprendizagem Matemática. Efetivou uma investigação intervencionista para averiguar a construção de conceitos e habilidades matemáticas. Utilizou dois jogos matemáticos, tendo como sujeitos de pesquisa 8 alunos da 6ª série do Ensino Fundamental, e os dados foram analisados qualitativamente.

Brenelli destacou que muitos trabalhos relacionados a jogos são propostas originadas do ensino de matemática, utilizadas como recursos didáticos para auxiliar no desenvolvimento do raciocínio lógico (observação, prognóstico, análise, verificação etc.), deixando de enfatizar o jogo apenas como brincadeira.

A sua discussão teórica sobre os jogos tem como suporte a teoria de Piaget, uma vez que os jogos permitem aos "alunos criar estratégias, trabalhar processos heuríticos, lidar com contradições, proceder à leitura de observáveis e coordenações, antecipações e retroações, construir possíveis e o necessário e favorecer tomadas de consciência e abstrações reflexivas"[198], em que o sujeito por meio de suas atividades tem a oportunidade de construir novos estágios. Assim sendo, a utilização do jogo, segundo a autora, deve favorecer a construção de estruturas cognitivas que possam facilitar a aquisição de noções aritméticas e dos instrumentos de pensamentos necessários ao ato de aprender.

Brenelli fez uma pesquisa intervencionista usando dois jogos, Cilada e Quiles, e foram estudados 24 sujeitos de 8 a 11 anos de idade da 3ª série do 1° grau de duas escolas públicas de Campinas-SP. Os sujeitos de pesquisa, por meio de sorteio, foram divididos em

---

[197] GRANDO. O jogo e suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da matemática. 1995, p. 115.
[198] BRENELLI. O jogo como espaço para pensar. 1996, p.16-17.

dois grupos: o grupo experimental (N=12) e controle (N =12) e foram aplicados pré e pós-testes. Houve intervenção pedagógica com o grupo experimental.

Moura defendeu que o jogo tem como "finalidade o desenvolvimento de habilidades para a resolução de problemas, e ele permite ao aluno estabelecer planos, estratégias, prognósticos para alcançar os seus objetivos, agindo e avaliando os resultados obtidos"[199]. Para o autor citado, o jogo possibilita a aproximação do aluno com o conteúdo científico mediado pela linguagem. As informações, os significados culturais, a compreensão de regras e a imitação, pelo seu aspecto lúdico, podem auxiliar na construção de conhecimentos mais elaborados.

O pesquisador em tela destacou que "o nosso objetivo é buscar as razões do uso do jogo na educação matemática"[200], analisando cuidadosamente as propostas de ensino e de suas bases teóricas. Esclareceu que o uso do jogo deve ser efetuado com cuidado, e a sua incorporação como prática pedagógica acontecer com convicção e não apenas como modismo de forma superficial.

Wielewski em seu estudo procurou verificar a possibilidade de amenizar as dificuldades encontradas no processo ensino-aprendizagem e o desenvolvimento de uma educação mais coerente e adequada que possa mobilizar as habilidades necessárias para a compreensão do processo algorítmico envolvendo os números negativos.

Segundo a autora, "o Tabuleiro de Xadrez está fundamentado no método indutivo, tendo em vista que as noções matemáticas são construídas a partir da observação"[201], que permite ao aluno reconhecer situações, levantar hipóteses e testá-las, fazer uso da criatividade, estabelecer comparações, classificar, explicar e interpretar suas observações no plano das idéias, segundo o pensamento matemático.

Neste sentido o aluno consegue resolver situações problemas por meio da análise de seus elementos, pela percepção da situação geral e pela busca de respostas viáveis, tendo-se o ensejo de construir um panorama do pensamento matemático do aluno e diferente forma do processo algorítmico.

---

[199] MOURA. A séria busca no jogo: do lúdico na Matemática, 1997, p. 80. In: KISHIMOTO, T.M. Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação.

[200] Ibid., p. 77.

[201] WIELEWSKI. O tabuleiro de xadrez: uma perspectiva para a didática da aritmética. 1998, p. 5.

Azevedo, em seu estudo, destacou que a preocupação de seu trabalho refere-se à construção de conceitos matemáticos e como o uso de jogos e materiais pedagógicos pode favorecer a promoção e o crescimento das habilidades matemáticas dos alunos. O referencial teórico tem como base a teoria piagetiana, que permitiu abordar o papel dos jogos e outros materiais no processo de abstração na construção de conceitos. Assim, a autora destaca que "a teoria de Piaget ajuda melhor a compreender o que é a Matemática e como a criança pode ter acesso a ela"[202].

Para subsidiar a sua pesquisa, recorreu aos fundamentos da Filosofia da Ciência, para explicar a importância do conhecimento Matemático, da Psicologia, para auxiliar a responder à questão como a criança aprende a Matemática e a Didática para se orientar na reflexão dos resultados obtidos com o uso de jogos e materiais pedagógicos?

Para Azevedo, os jogos com regras favorecem a autonomia, uma vez que quem decide as regras do jogo é o grupo. Por isso, cabe ao professor selecionar jogos que favoreçam a construção de conceitos matemáticos previstos no currículo escolar e que possam aparecer subentendidos na estrutura desses jogos.

Azevedo é mais enfática ao afirmar que "o jogo é um recurso para tornar as aulas de Matemática mais agradáveis. É antes de tudo um ponto para o conhecimento. [...] Os jogos que utilizamos são os de regras, com o objetivo de favorecer a construção de conceitos fundamentais de Matemática"[203].

Linardi[204] realizou uma pesquisa com o objetivo de apresentar um método alternativo de ensino para os números inteiros, por meio da aplicação de quatro jogos: Borboletas, Apostas, Araras e Perdas e Ganhos.

Com esta finalidade, realizou um estudo intervencionista com alunos de 5ª, 6ª e 7ªs séries do Ensino fundamental da rede pública estadual do município de Rio Claro – SP. Na coleta de dados, a pesquisadora efetuou o registro sistemático do comportamento dos alunos e das suas impressões relativo à aplicação do método. Os dados obtidos foram discutidos e analisados em conjunto com o Grupo de Pesquisa Ação em Educação

---

[202] AZEVEDO, M.V.R. Jogando e construindo matemática. 1999, p. 16.
[203] Ibid., p. 57.
[204] LINARDI. Quatro jogos para números inteiros: uma análise. 1999.

Matemática (GPA), que chegou à conclusão da eficácia didático-pedagógica dos quatro jogos utilizados.

A pesquisa realizada por Muniz analisou as atividades matemáticas desenvolvidas por crianças em jogos espontâneos. Destacou dois fenômenos na educação matemática que estimularam sua pesquisa sobre o jogo infantil. De um lado, a introdução de jogos como ferramenta pedagógica no ensino da Matemática e, de outro, a constatação da existência de uma importante oferta de jogos às crianças que podem ser mediadoras de conhecimento matemático em contextos *a-didáticos*.

Realizou sua pesquisa numa *Ludothèque* pública da região parisiense. Os sujeitos foram 21 crianças entre 6 e 12 anos de idade. Para este pesquisador, "a atividade matemática realizada espontaneamente pelas crianças no jogo é subordinada a uma cultura lúdica"[205]. Este fato pode causar problemas à introdução do jogo na educação matemática, devido à distância existente entre a atividade matemática que as crianças realizam nos jogos e a que se espera no contexto do ensino escolar da matemática. Muniz destaca ainda que por meio do jogo as crianças mostram a grande riqueza das atividades matemáticas.

Alves procurou destacar os efeitos positivos da ação pedagógica centrada em jogos. Por isso acredita que os educadores podem criar em sala de aula uma atmosfera de interesse e motivação, permitindo ao educando uma total e autônoma participação no processo ensinar-aprender-avaliar.

A autora destaca que ainda "são poucas as pesquisas que enfatizam o uso de jogos no ensino de 5ª à 8ª série do ensino fundamental, no ensino médio e de modo mais específico no ensino da matemática"[206]. Em seu trabalho, faz uma abordagem da investigação da evolução do brincar na sociedade humana, destacando os aspectos lúdico e educativo, bem como as representações, classificações e características que diferentes autores fazem sobre o jogo e a importância do ensino de matemática por intermédio de atividades lúdicas.

A opção do jogo no ensino da matemática, para Alves, tem como pilar dois objetivos complementares: motivação para uma nova aprendizagem e fixação de noções já

205 MUNIZ. Jogos espontâneos e atividades matemáticas da criança. 2000, p. 42.
206 ALVES. A ludicidade e o ensino de matemática. 2001, p. 15

conhecidas. Esclarece ainda que, dos jogos propostos em seu trabalho, destacam-se as características: criatividade, dinâmica do jogo, regras e sociabilidade.

Dienes destacou a importância da convivência em ambientes ricos de materiais para que a criança possa construir e elaborar seus conhecimentos. Com esta finalidade, ressaltou que o processo de aprendizagem da matemática deve seguir seis etapas, contendo as seguintes estruturas:

> 1ª etapa: jogo livre;
> 2ª etapa jogo estruturado;
> 3ª etapa: comparação;
> 4ª etapa representação das estruturas;
> 5ª etapa: estudo das propriedades da representação;
> 6ª etapa: descrições em axiomas, demonstrações – teoremas[207].

A sugestão deste autor é que o professor, ao elaborar o planejamento de ensino de matemática, leve em consideração estas etapas de desenvolvimento. Salientou ainda que práticas pedagógicas tradicionais são contrárias às etapas de desenvolvimento por ele apresentadadas.

Destacamos também os trabalhos realizados por Kamii e Devries com jogos no ensino da matemática, em que elas incentivam o uso de jogos em sala de aula, já que são prazerosos e interessantes fora da sala de aula e, além disso, “num jogo os participantes estão mentalmente mais ativos do que quando trabalham em folhas de exercícios”[208]. As pesquisadoras utilizaram como aporte teórico os fundamentos piagetianos. Defenderam que a prática com os jogos em grupo em sala de aula precisam ser estimulados, para favorecer o desenvolvimento de habilidades de coordenação de ponto de vista e também como forma de *ensinar* os alunos a jogar.

Esse tipo de jogo pode ser mais produtivo, porque o aluno permanece mais ativo, atento à sua jogada e à do outro, supervisionando-o muito mais do que ao trabalhar com folhas de exercícios de forma individual. Neste sentido, o jogo em grupo propicia um ambiente favorável ao exercício do debate e do consenso, e a prática do debate exercita a argumentação e a organização do pensamento.

---

[207] DIENES. As seis etapas do processo de aprendizagem em matemática. 1986, p.4-6.
[208] KAMII & DEVRIES. Jogos em grupos na educação infantil. 1991, p. 45.

As pesquisas apresentadas indicam uma forte tendência para a utilização do jogo na educação matemática. Os trabalhos discutem o significado do jogo e sua importância na educação matemática apresentando sugestões de diferentes tipos de jogos e materiais didáticos (Moura, 1997; Brenelli, 1996; Dienes, 1986). além desses aspectos (Grando (1995); Brenelli (1996), Wielewski (1998), Alves (2001), Linardi (1996), Muniz (2000) e Kamii (1991) também realizaram um estudo intervencionista.

Outro ponto que vale ressaltar é que Brenelli, Wielewski, Alves e Kamii utilizaram a teoria piagetiana como suporte teórico para fundamentar a importância da utilização de jogos na educação matemática, e os pesquisadores Moura (1997), Azevedo (1999) e Dienes (1986) voltaram as suas preocupações para o emprego do jogo e materiais didáticos como promotores de aprendizagem, aproximando-os da matemática por meio do desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas.

Muitos outros pesquisadores poderiam ser citados, porém estamos interessados em jogos que possam auxiliar a promover o conhecimento matemático. Assim sendo, apresentaremos o jogo do ‘Tabuleiro de Xadrez’, que utilizamos em nosso estudo.

5.5 DESCRIÇÃO DO JOGO

Para a criança, a atividade lúdica, brincar, jogar, constitui sua atividade principal. No jogo, cada participante fornece informações sobre os esquemas que organizam e integram o conhecimento num nível representativo.

O ‘Tabuleiro de Xadrez’ é um jogo que pode ser utilizado na execução das quatro operações fundamentais da aritmética. Napier[209] estudou este instrumento, que ajuda a construir de diferentes formas o processo algorítmico. Foi considerado como o primeiro computador binário do mundo. Realizando-se adaptações, podemos utilizá-lo para efetuar cálculos aritméticos com os números inteiros, bem como desenvolver diferentes estruturas do pensamento matemático. O estudo do ‘Tabuleiro de Xadrez’ foi apresentado por Wielewski (1998) que fez a descrição do tabuleiro, as formas de representação e das operações, conforme exposição abaixo.

[209] Napier (1550-1617). Matemático escocês, criador dos logaritmos e do desenvolvimento da base 2 para contagem.

5.5.1 O Tabuleiro de Xadrez

O tabuleiro pode ser apresentado em tamanho variado (arbitrário) e pode ser impresso em papel, madeira ou outro tipo de material. O tabuleiro contém *colunas* e *linhas* representadas pelos números: 1,2,4,8,16,32,64....., com base no sistema binário.

Ele é construído sobre dois tabuleiros contendo um espaço intermediário. O tabuleiro superior representa o *quadro positivo* numerado por 1, 2, 4, 8, 16 ...., e o inferior representa o *quadro negativo* que é numerado por $^{-}1$, $^{-}2$, $^{-}4$, $^{-}8$, $^{-}16$..... O espaço intermediário entre os dois quadros denomina-se *linha intermediária,* que é numerada da direita para a esquerda da seguinte forma: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64...(potência de 2 positivo).

Para a realização de atividades no tabuleiro, utilizamos diferentes tipos de marcadores, como botões, grãos, pedrinhas etc. No nosso estudo, optamos por utilizar botões como instrumento de registro das atividades a serem desenvolvidas.

5.5.1.1 Descrição do Tabuleiro de Xadrez[210]

No *quadro positivo,* cada linha, considerando de baixo para cima, corresponde ao dobro da linha anterior (figura 10). Por exemplo:

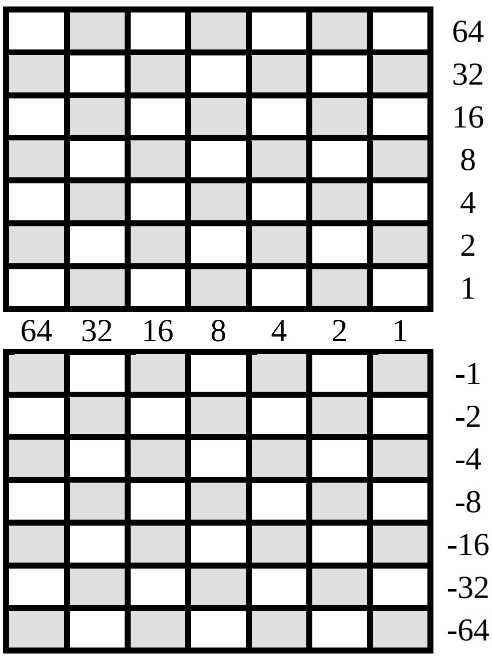


Figura 10

[210] WIELEWSKI (1998). As representações do Tabuleiro de Xadrez foram extraídos do trabalho da autora, capítulo 3, p. 52-86.

- 1ª linha vale 1
- 2ª linha vale 2, o dobro da 1ª linha (2 x 1);
- 3ª linha vale 4, o dobro da 2ª linha (2 x 2);
- 4ª linha vale 8, o dobro da 3ª linha (2 x 4), e assim sucessivamente.

No *quadro negativo*, cada linha, considerando agora de cima para baixo, expressa uma quantidade que corresponde ao dobro do que se encontra na linha anterior, porém negativo. Assim a:

- 1ª linha vale - 1;
- 2ª linha vale – 2, o dobro da 1ª linha [2 x (¯1)];
- 3ª linha vale – 4, o dobro da 2ª linha [2 x (¯2)];
- 4ª linha vale – 8, o dobro da 3ª linha [2 x (¯4)], e assim por diante.

O *quadro positivo* pode representar os *números positivos*, tanto usando as *linhas* como as *colunas* (figuras 11 e 12); no *quadro negativo* serão representados os *números negativos*, usando-se somente as *colunas* (figura 13). Por exemplo:

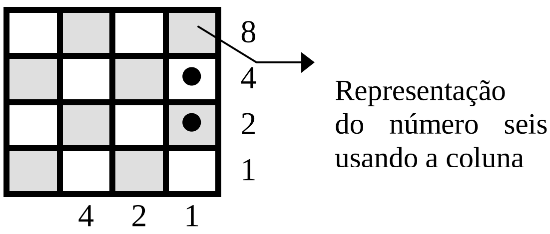


Figura 11

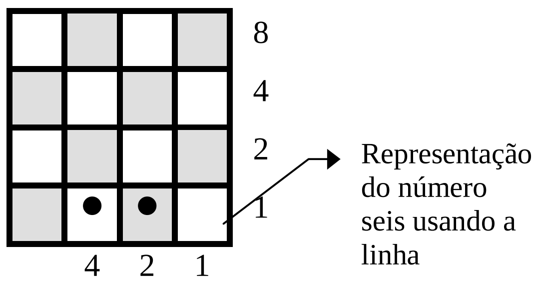


Figura 12

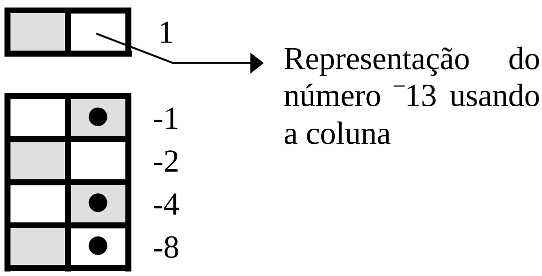


Figura 13

Após a descrição do tabuleiro, apresentamos alguns exemplos de representação de números e das operações (adição, subtração, multiplicação e divisão).

5.5.1.2 Representação dos números inteiros no tabuleiro

Para representar os números no tabuleiro, é preciso utilizar o recurso:

- Da decomposição (potência de dois);
- Do registro dos resultados no tabuleiro;
- Das trocas (jogo nunca dois)[211];
- Do elemento simétrico (queimar);
- Do registro matemático.

Por exemplo, o número 26

Para representar o número 26, adotamos o seguinte procedimento:

- Registramos o número 26 na coluna 1 (utilizamos 26 marcadores);
- Efetuamos as trocas (jogo nunca 2) e registramos o resultado na coluna 2 (utilizamos 13 marcadores);
- Efetuamos novas trocas (jogo nunca 2) e registramos o resultado na coluna 3 (utilizamos 6 marcadores), restando 1 marcador na coluna 2 e assim sucessivamente, até obter 1 marcador ou 0 marcador nas colunas, conforme a figura nº 14.

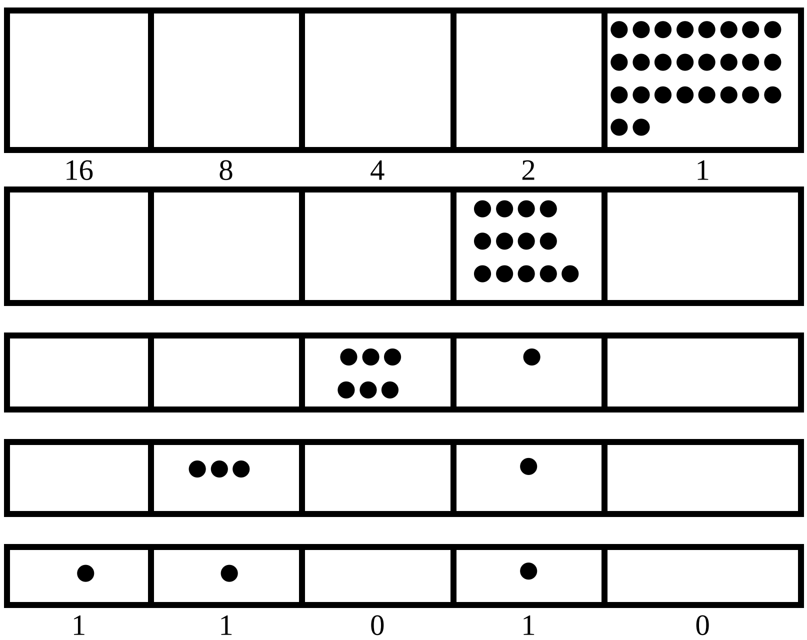


Figura 14

[211] Jogo nunca dois – sempre que houver 2 marcadores na mesma casa, trocar por 1 de ordem superior, ou 1 marcador por 2 de ordem inferior.

No sistema binário, o número 26 é registrado da seguinte forma: $(11010)_2$ que corresponde às posições de 16+8+2= 26.

Representação de alguns números no sistema binário, conforme as figuras 15 e 16:

Número	Representação						Sistema binário
1						●	1
2					●		10
3					●	●	11
4				●			100
5				●		●	101
6				●	●		110
7				●	●	●	111
8			●				1000
9			●			●	1001
10			●		●		1010

Figura 15

Número	Representação						
	64	32	16	8	4	2	1
3						●	●
6					●	●	
12				●	●		
24			●	●			
48		●	●				

Figura 16

Quando efetuamos a representação de alguns números, utilizamos sempre o dobro do anterior. Assim podemos perceber que obedece a um mesmo padrão matemático (veja figura 16).

Representação dos números no tabuleiro nas operações:

a) Adição e subtração

- Utilizam-se as colunas como uma forma de padronizar as representações dos números positivos e negativos.

b) Multiplicação e divisão

- A linha intermediária na multiplicação servirá para representar o primeiro fator;

- E na divisão, para representar o divisor;
- Para se registrar um número no tabuleiro, basta observar as potências de dois, localizadas na margem direita do tabuleiro.

Representação do 74

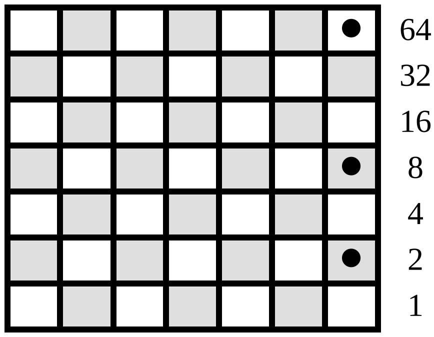


Figura 17

Procedimentos:

- Procurar a potência de dois, próxima de 74, obtendo-se 64 (registrar), restando 10;
- Procurar a potência de dois, próxima de 10, obtendo-se 8 e 2 (registrar);
- No sistema binário, registramos o número 74 da seguinte forma: $(1001010)_{2,}$ que corresponde às posições de 64+8+2= 74.

Representação do $^{-}25$

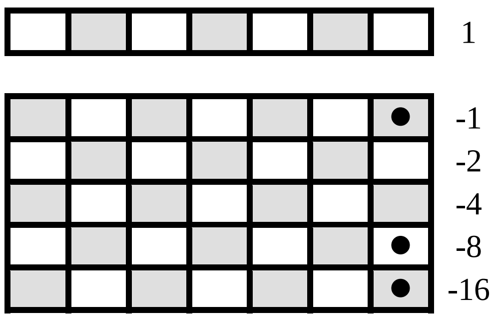


Figura 18

Procedimentos:

- Procurar a potência de dois, próxima de $^{-}25$, obtendo-se $^{-}16$ (registrar), restando $^{-}9$;
- Procurar a potência de dois, próxima de $^{-}9$, obtendo-se $^{-}8$ e $^{-}1$ (registrar);

- No sistema binário, registramos o número $^{-}25$ da seguinte forma: $(11001)_2$ que corresponde às posições de $^{-}16+(^{-}8)+(^{-}1)= {}^{-}25$.

5.5.1.3 Diferentes formas de representações do zero

Para representar o zero no tabuleiro, utilizamos a propriedade do elemento simétrico. Por exemplo: $4\ {}^{-}4$, $7\ {}^{-}7$, $13\ {}^{-}13$, $28\ {}^{-}28$ etc., conforme figura 19.

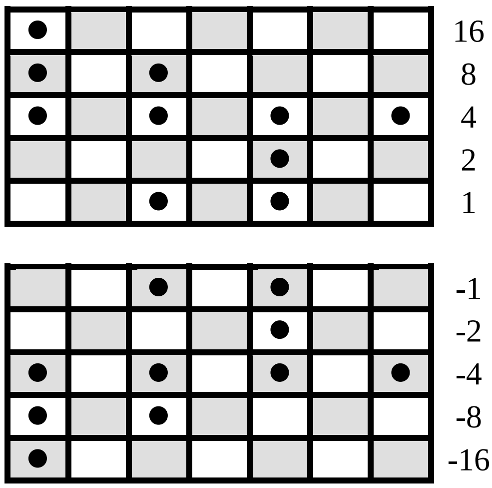


Figura 19

Com base nas diferentes representações do zero e da combinação de números positivos e negativos, podemos:

- Ilustrar outras formas de se representar um número;
- Mostrar a multiplicidade de estruturas matemáticas que podem ser exploradas com o uso do 'Tabuleiro de Xadrez'. Por exemplo:

5.5.1.4 Diferentes formas de representações dos números

a) 22

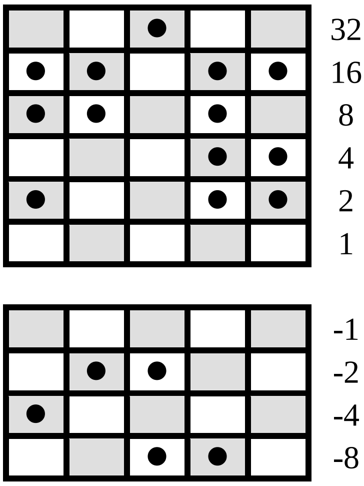


Figura 20

22 = 16 + 4 + 2
= 16 + 8 + 4 + 2 − 8
= 32 − 10 = 32 − 2 − 8
= 24 − 2 = 16 + 8 − 2
= 26 − 4 = 16 + 8 + 2 − 4, e assim por diante.

b) 48

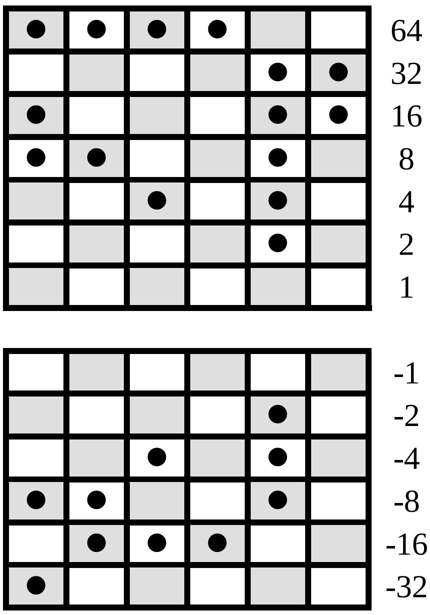


Figura 21

48 = 32 +16
= 32 + 16 + 8 + 4 + 2¯- 2 ¯ 4 ¯ 8
= 64 - 16
= 68 - 20 = 64 + 4 ¯ 4 ¯ 16
= 72 - 24 = 64 + 8 ¯ 8 ¯ 16
= 88 - 40 = 64 + 16 + 8 – 8 ¯ 32

c) ¯27

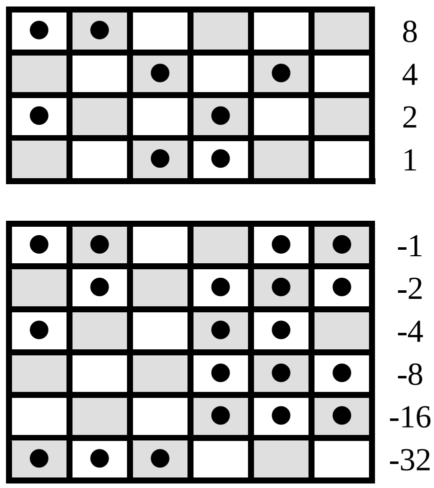


Figura 22

¯**27** = - ¯16 ¯8 ¯2 ¯1
= 4 ¯16 ¯8 ¯4 ¯2 ¯1
= - 30 + 3 = - 16 - 8 - 4 ¯ 2 + 1 + 2
= - 32 + 5 = ¯32 + 1 + 4
= - 35 + 8 = - 32 ¯2 ¯1 + 8
= - 37 + 10 = - 32 ¯4 ¯1 + 2+ 8

- Portanto, matematicamente, podemos representar um mesmo número de diferentes formas.

5.5.1.5 Operações

ADIÇÃO

<u>Caso 1</u>: (+) + (+)

Para resolver os exercícios deste caso, utilizamos o conceito da adição de *junta*r ou *agrupar* as quantidades.

- Registramos na 1ª coluna a 1ª parcela e na 2ª coluna a 2ª parcela.
- Para adicionar, colocamos todos os marcadores da 2 ª coluna para a 1ª coluna.

a) 10 + 5

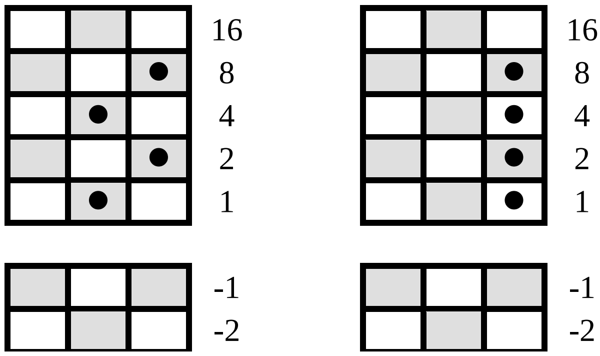


Figura 23

Procedimento

- Procurar a potência de 2, decompondo (10= 2,8) e (5 = 4,1);
- Registrar na primeira coluna o número 10;
- Na segunda, o número 5;
- Colocar todos os marcadores na 1ª coluna;
- Efetuar as trocas e adicionar;
- Registrar matematicamente 10+5= (8+2)+(4+1)= 8+4+2+1=15

b) 26 + 14

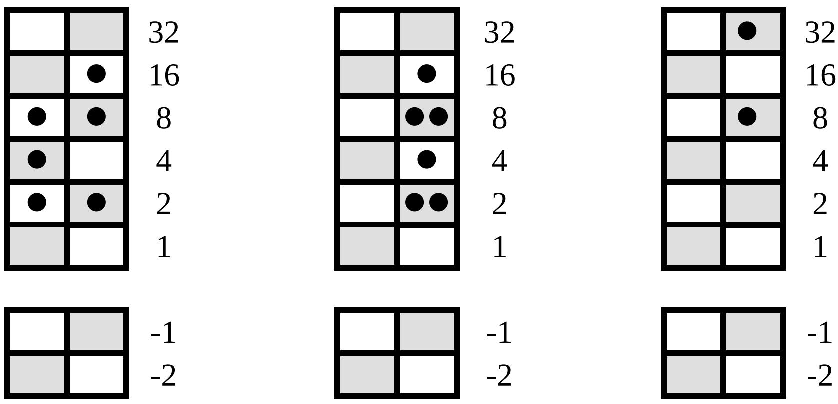


Figura 24

Procedimento

- Procurar a potência de 2, decompondo (26= 16,4,2) e (14=8,4,2);
- Registrar o resultado obtido na 1ª coluna, o número 26 e, na 2ª, o número 14;
- Registrar todos os marcadores na 1ª coluna;
- Efetuar as trocas (jogo nunca 2) dos números (8 e 8 por 16); (2 e 2 por 4); (16 e 16 por 32) e (4 e 4 por 8);
- Registrar o resultado 32 e 8;
- Representar matematicamente:

  26 + 14 = (16 + 8 + 2) + (8 + 4 + 2) = 16 + 16 + 4 + 4 = 32 + 8 = 40.

<u>Caso 2</u>: (-) + (-)

- Este caso pode ser resolvido conforme o caso 1;
- A manipulação dos marcadores ocorre no quadro negativo;
- Os agrupamentos dos marcadores percorrem o sentido contrário, no quadro negativo;
- As trocas são de cima para baixo, como podemos constatar no exemplo:

c) ($^{-}$23) + ($^{-}$42)

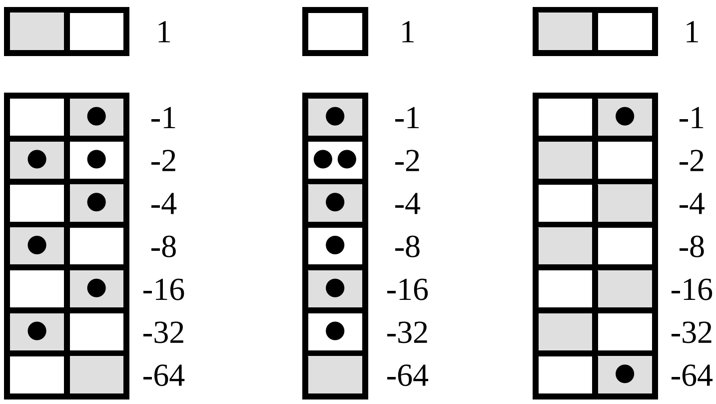


Figura 25

Procedimento

- Procurar a potência de 2, decompondo ($^{-}23= -16, ^{-}4, ^{-}2, ^{-}1$) e ($^{-}42=^{-}32, ^{-}8, ^{-}2$);
- Registrar o resultado obtido, na 1ª coluna o número $^{-}23$ e, na 2ª, o número $^{-}42$;
- Registrar todos os marcadores na 1ª coluna;
- Efetuar as trocas (jogo nunca 2) dos números ($^{-}2$ e $^{-}2$ por $^{-}4$); ($^{-}4$ e $^{-}4$ por -8); ($^{-}8$ e $^{-}8$ por $^{-}16$); ($^{-}16$ e $^{-}16$ por $^{-}32$) e ($^{-}32$ e $^{-}32$ por $^{-}64$);
- Registrar o resultado $^{-}1$ e $^{-}64$;
- Representar matematicamente:

$$
\begin{aligned}
^{-}23 + (^{-}42) &= (^{-}16\ ^{-}4\ ^{-}2\ ^{-}1) + (^{-}32\ ^{-}8\ ^{-}2) \\
&= ^{-}32\ ^{-}16\ ^{-}8\ ^{-}4\ ^{-}4\ ^{-}1 \\
&= ^{-}32\ ^{-}16\ ^{-}8\ ^{-}1 \\
&= ^{-}32\ ^{-}16\ ^{-}16\ ^{-}1 \\
&= ^{-}32\ ^{-}32\ ^{-}1 \\
&= ^{-}64\ ^{-}1 = ^{-}65
\end{aligned}
$$

<u>Caso 3</u>: (+) + (-)

Para efetuar esta operação é preciso:

- Transferir todos os marcadores para a primeira coluna;
- Os marcadores permanecem apenas no quadro positivo ou negativo;
- Decompor os números e registrar o resultado;
- Queimar os simétricos;
- Efetuar trocas (jogo nunca 2) - trocar 1 por 2; por exemplo, 4 = dois marcadores de 2.

d 19 + (¯7)

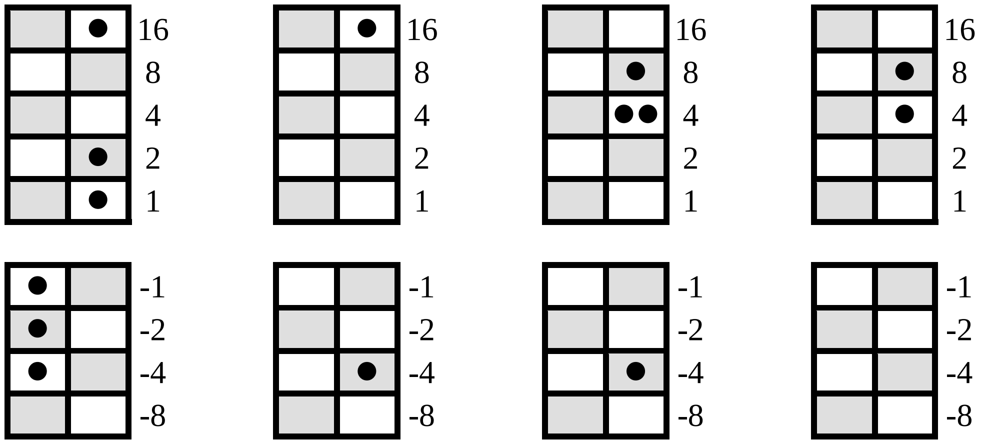


Figura 26

Procedimento:

- Procurar potência de 2, decompondo (19= 16,2,1) e (¯7= ¯4, ¯2, ¯1) e registrar o resultado;
- Queimar para zerar (1 e ¯1) e (2 e ¯2);
- Efetuar trocas (16 por dois de 8, um de 8 por dois de 4);
- Queimar (4 e ¯4) e registrar o resultado 4 e 8;
- Representar matematicamente:

19 + (¯7) =
(16 + 2+ 1) + (¯4 +¯¯2 + ¯1)=
(16 + ¯4) + (2 + ¯2) + (1 + ¯1)
(16 + ¯4) + 0 + 0
(8 + 8) + ¯4=
(8 +4 + 4) + ¯4=
(8 + 4) + (4 + ¯4)=
12 + 0 = 12.

e) 15 + (¯36)

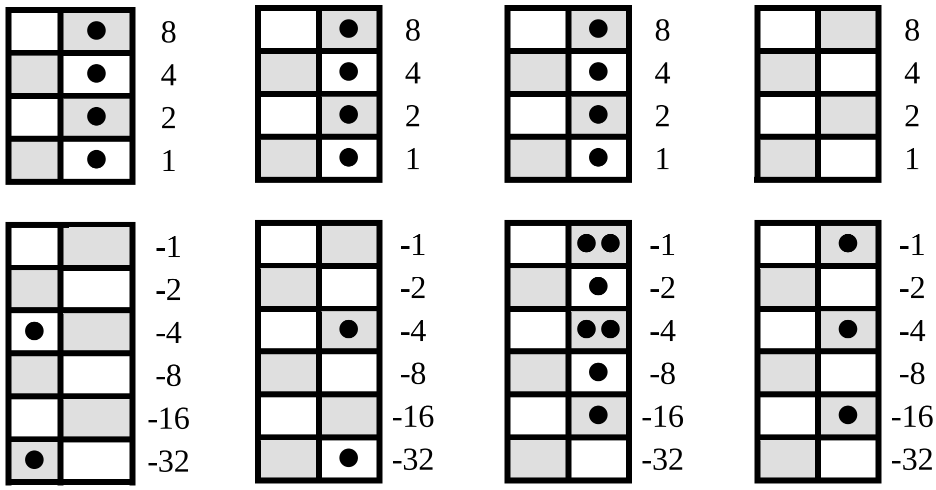


Figura 27

- Neste caso, utilizamos o mesmo procedimento do caso **d**;
- Representação matemática: 15 + (¯36) = (8 + 4 + 2 + 1) + (¯32 ¯4).

Usando o tabuleiro, pode-se justificar e até estabelecer a regra de que, na adição de um número positivo com um negativo, subtrai-se, normalmente, e conserva-se o sinal do maior número.

SUBTRAÇÃO

Caso 4: (+) - (+), *onde o primeiro número é maior do que o segundo número.*

As condições fundamentais para resolver os exercícios deste caso são:

- saber o conceito de subtrair;
- perceber a necessidade de trocar um marcador de uma linha por dois na linha que antecede.

f) 25 – 13

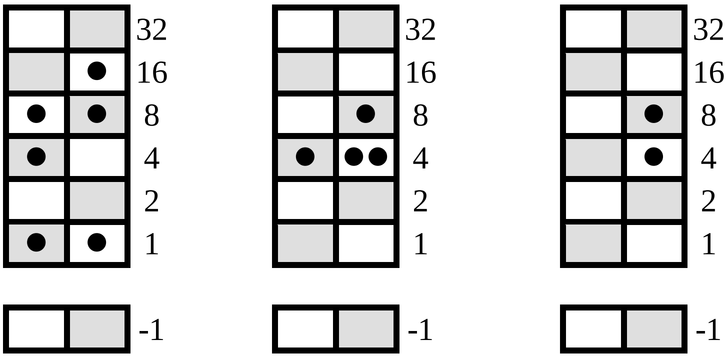


Figura 28

Para subtrair, representamos o minuendo na primeira coluna e o subtraendo na segunda coluna, da direita para a esquerda, e retiramos da primeira coluna o que se encontra na segunda.

Procedimento:

- Procurar a potência de 2, decompor (25= 16,8,1) e (13=8,4,1) e registrar;
- Retirar (1 e -1=0) e (8 e -8=0), resultando 16 – 4;
- Efetuar a troca de 16 por dois de 8 e um de 8 por dois de 4;
- Retirar (4 e -4= 0) restando 8 e 4 = 12;
- Registrar matematicamente:

  25 - 13 = (16 + 8 + 1) - (8 + 4 + 1) = (8 +8 + 4 + 4 + 1) - (8 + 4 + 1)

  = 8 + 4 = **12.**

Para resolver este exercício, precisamos retirar os zeros e também efetuar as trocas dos marcadores necessárias (decomposição), até obtermos o resultado somente no quadro positivo.

<u>Caso 5</u>: (+) - (+), *onde o primeiro número é menor do que o segundo número.*

Se o minuendo for menor que o subtraendo, recorremos ao uso da propriedade do elemento simétrico (acrescentar zeros).

g- 15 – 29

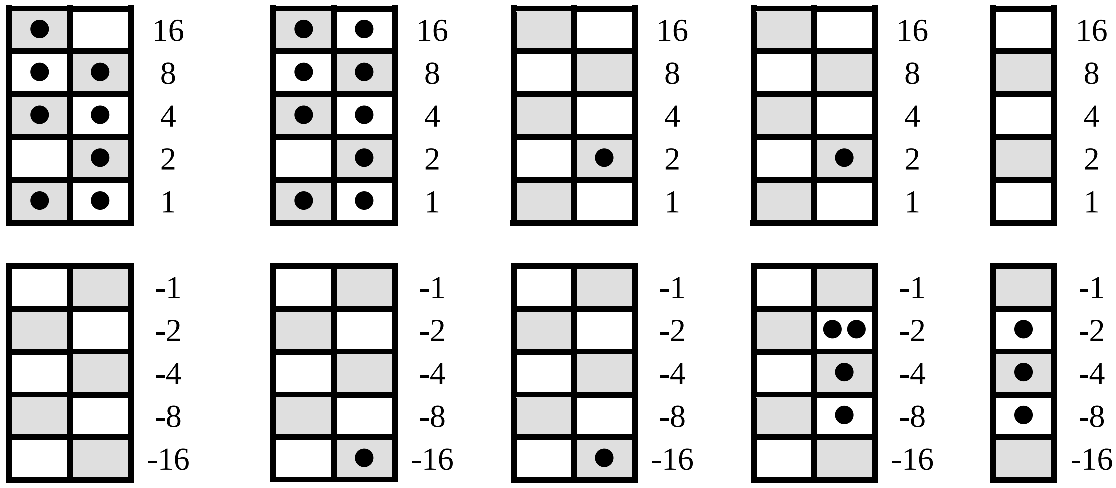


Figura 29

Procedimento:

- Procurar a potência de 2, decompor (15= 8,4,2,1). e (29= 16,8,4,1) e registrar;
- Aplicar a propriedade do elemento simétrico (acrescentar zero -16) e registrar;
- Queimar (16 e 16= 0);
- Retirar (- 8 e 8= 0, - 4 e 4 = 0, - 1 e 1 = 0) - obtendo-se 2 e -16;
- Trocar - 16 por dois de - 8, trocar - 8 por dois de - 4, trocar - 4 por dois de – 2;
- Queimar 2 e -2 = obtendo-se -2 + - 4 + - 8 = -14;
- Registrar matemáticamente:
  15-29 = (8+4+2+1) – (16+8+4+1).

<u>Caso 6</u>: (+) - (-)

Na subtração com um número no quadro positivo e outro no negativo, utilizamos a estratégia de acrescentar zeros ao minuendo.

h) 12 – (¯5)

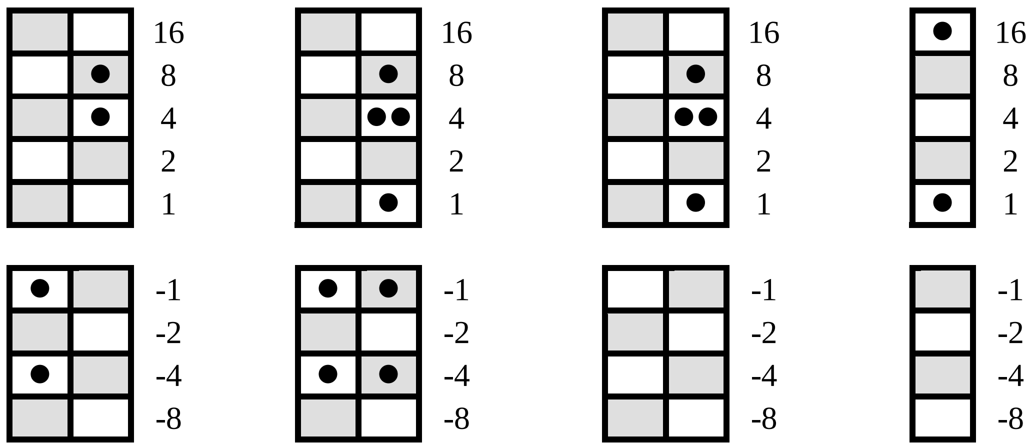


Figura 30

Procedimento:

- Procurar a potência de 2, decompondo (12+ 4,8) e (¯5 = ¯1, ¯4) e registrar;
- Acrescentar zero no 1 e no 4 e queimar (¯4 e ¯4 = 0 e ¯1 e ¯1 = 0);
- Registrar o resultado 1, 4, 4, 8;
- Trocar 4 e 4 por um de 8;
- Trocar 8 e 8 por um de 16, resultando 1 + 16;
- Registrar matematicamente: 12 – (¯5) = (4+8) – (¯1+¯4).

Esta operação efetuada no tabuleiro justifica a regra dos sinais, demonstrando por que efetuamos 12 + 5 uma vez que para realizar essa subtração foi preciso utilizar o elemento simétrico (5 e ¯5), que permitiu queimar (¯5 e ¯5), restando, desta forma, 5 no quadro positivo, obtendo-se, assim, 12 = (4+8) + (1+4) = 8 +4+4+1 = 8 +8 + 1 = 16 + 1 = 17.

<u>**Caso 7**</u>**: (-) - (-)**, *onde o valor absoluto do primeiro número é menor do que o valor absoluto do segundo número.*

Nesta resolução, utilizamos a estratégia de acrescentar zeros.

i) –9 – (¯21)

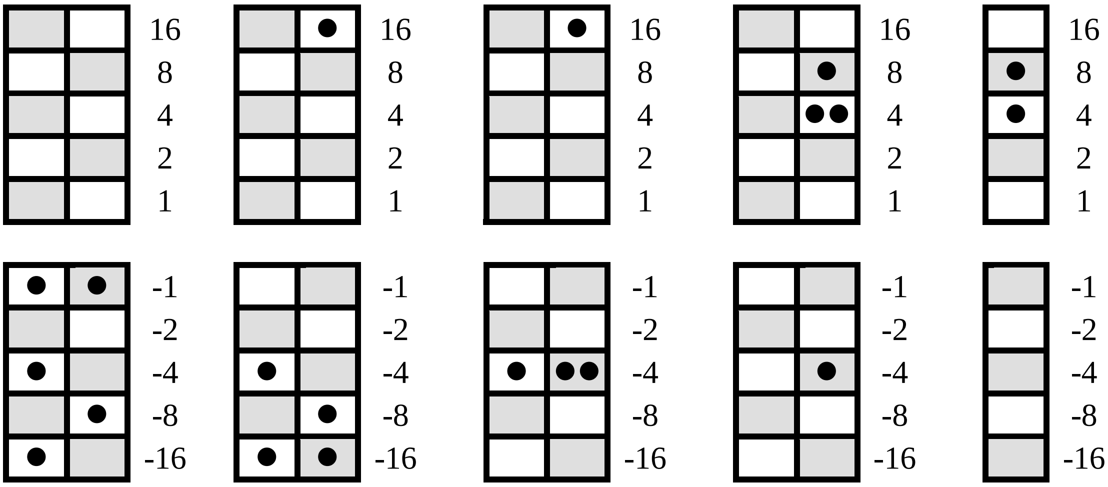


Figura 31

Procedimento:

- Procurar a potência de 2, decompondo (¯9= ¯1, ¯8) e (¯21= ¯1, ¯4, ¯16) e registrar;
- Retirar (¯1 e ¯1);
- Acrescentar zero (¯16) – queimar (¯16 e ¯16= 0);
- Trocar ¯8 por dois de ¯4, retirar (¯4 e ¯4 = 0), restando ¯4 e 16;
- Trocar 16 por dois de 8, trocar 8 por dois de 4 e retirar (4 e ¯4 = 0), restando 8 e 4;
- Representar matematicamente:
  ¯9 - (¯21) = (¯17 + 8) - (¯16 ¯4 ¯1) = (¯16 ¯1 + 8) - (¯16 ¯4 ¯1).

MULTIPLICAÇÃO

Para multiplicar, utilizamos como referências:

- Os números que estão à margem direita do tabuleiro;
- Os números positivos implícitos na linha intermediária que divide o quadro (positivo- negativo);
- Associar linhas e colunas;
- Decompor os fatores quando necessário;
- Aplicar a propriedade distributiva;

- Movimentar o marcador no sentido diagonal para cima positivo e para baixo negativo;
- Variação de registro só com o 2° fator;
- Aplicar o jogo nunca 2 (trocas).

<u>Caso 8</u>: (+) x (+)

j) 2 x 8

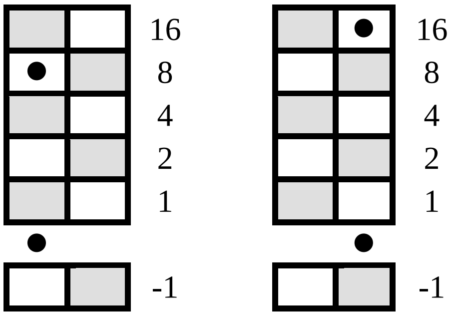


Figura 32

Procedimento: 2 x 8

- Representar o fator 2 na linha intermediária;
- Representar o fator 8, usando o cruzamento da linha 8 com a coluna 2;
- Mover o marcador na diagonal até encontrar o número 16 (2x8= 1x16).

l) 6 x 8

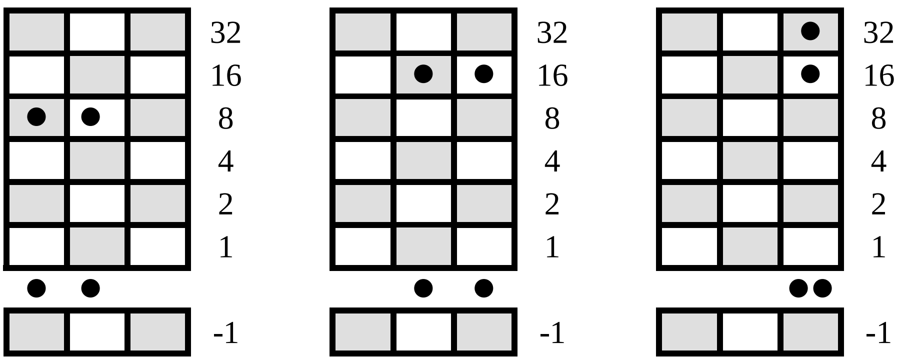


Figura 33

Procedimento:

- Representar o fator 6 na linha intermediária, decompondo (6= 4 e 2) e registrar;
- Representar o fator 8, usando o cruzamento da linha 8 com as colunas 4 e 2;
- Mover os marcadores na diagonal 2 x 8 = 16 e 4 x 8 = 32; obtendo-se 16 + 32 = 48;
- Registrar matematicamente: 6 x 8 = (4 + 2) x 8 = (8x4) + (8x2) = 32 + 16 = 48.

Analisando o registro desta operação, podemos observar que o movimento pela diagonal significa que cada marcador deve chegar à primeira coluna.

<u>Caso 9</u>: (+) x (-)

Para esta resolução os movimentos dos marcadores são executados no quadro negativo.

m) 2 x ($^{-}8$)

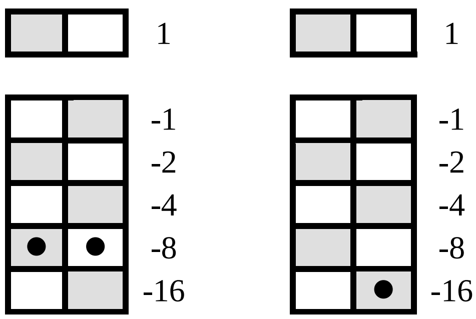


Figura 34

Procedimento:

- Representar o fator 2 na linha intermediária;
- Neste caso o 2 indica quantas vezes se deve repetir o $^{-}8$;
- Colocar dois marcadores no $^{-}8$;
- Aplicar o jogo nunca 2 ($^{-}8$ e $^{-}8$= $^{-}16$);
- Trocar por um marcador de $^{-}16$.

DIVISÃO

O dividendo será representado na primeira coluna e o divisor em sua posição na linha intermediária entre os quadros positivos e negativos. Para dividir podemos usar como referência:

- Os números que estão à margem direita do tabuleiro, sejam eles + ou **–;**
- Os números implícitos que estão na linha intermediária dividindo o quadro em + ou **-**;
- Registrar o divisor na linha intermediária – decompor se necessário;
- Registrar o dividendo na primeira coluna – decompor se necessário;
- Iniciar a divisão pelo número maior;
- Mover diagonalmente os marcadores para baixo;
- Distribuir igualmente os marcadores sobre os números da linha intermediária (divisor);
- Leitura do resultado = soma dos marcadores distribuídos igualmente sobre o divisor;
- O resto corresponde aos marcadores isolados (que não estão distribuídos igualmente sobre o divisor).

<u>Caso 11:</u> (+) : (+)

- Na divisão os movimentos são executados em sentido contrário ao da multiplicação. Por exemplo:

n) 8 : 2.

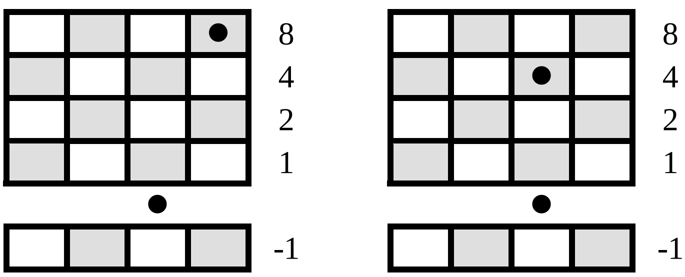


Figura 35

Procedimento:

- Registrar o divisor (2) na linha intermediária;
- Registrar o 8;
- Mover o marcador 8, na diagonal para baixo, até encontrar a coluna do divisor 2 (dividir o 8 por 2), resultado obtido: 4.

o) 35 : 5

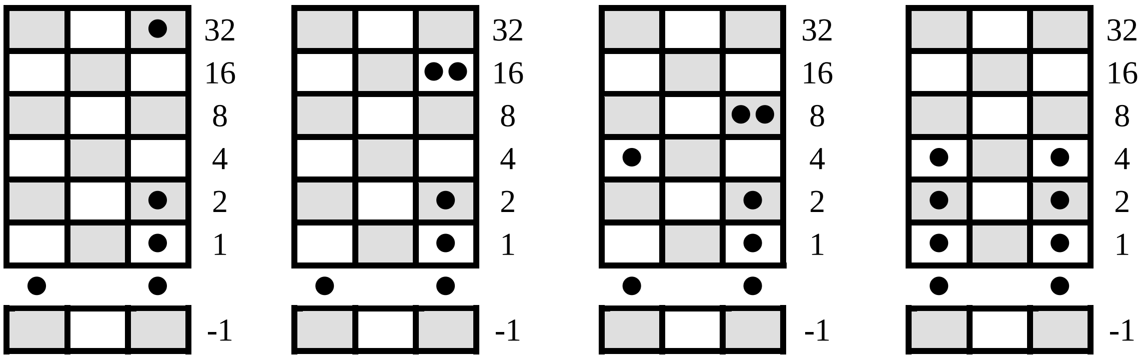


Figura 36

Procedimento:

- Decompor o divisor 5 (1 ⁻4) e registrar;
- Decompor o dividendo 35 (32 ⁻2 ⁻1) e registrar;.
- Observar a distribuição igualitária; caso isto não ocorra, devemos efetuar a troca;
- Trocar o 32 por dois de 16;
- Mover o 16 na diagonal até encontrar a coluna 4 e linha 4;
- Trocar um de 16 por dois de 8;
- Mover o 8 na diagonal até encontrar a linha 2 com a coluna 4;
- Trocar um de 8 por dois de 4;
- Mover o 4 na diagonal até encontrar a linha 1 com a coluna 4;
- Resultado: verificar os marcadores que foram distribuídos igualmente sobre o divisor, no caso 4-2-1= 7.

No tabuleiro, podemos efetuar divisões exatas ou com resto:

p) 79: 12

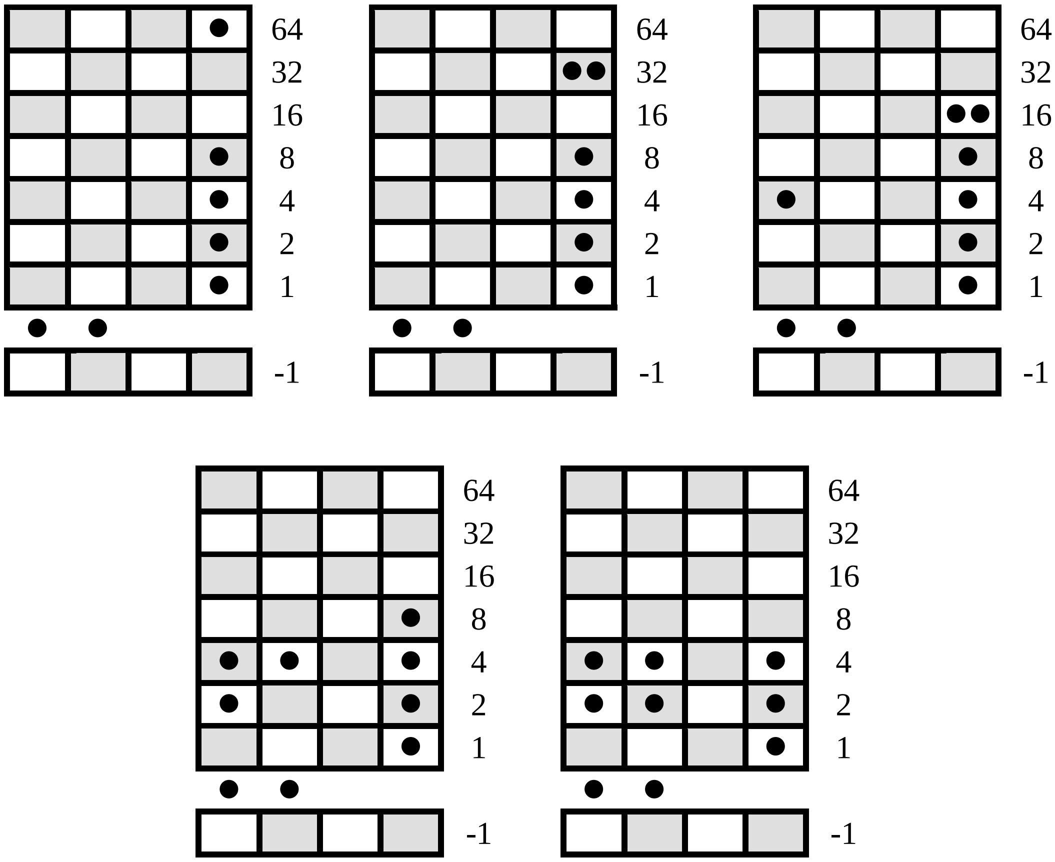


Figura 37

Procedimento:

- Decompor o divisor 12 (4, 8) e registrar;
- Decompor o dividendo 79 (64, 8, 4, 2, 1) e registrar;
- Observar a distribuição igualitária, caso isto não ocorra, deve-se efetuar a troca;
- Trocar um de 64 por dois de 32;
- Mover o 32 na diagonal até encontrar a coluna 8 e linha 4;
- Trocar um de 32 por dois de 16;
- Mover o 16 na diagonal até encontrar a linha 2 com a coluna 8; e o outro até a linha 4 com a coluna 4;
- Mover o 8 na diagonal até encontrar a linha 2 com a coluna 4; (os marcadores já foram distribuídos igualmente).

Resultado: verificar os marcadores que foram distribuídos igualmente sobre o divisor: no caso 4 + 2 = 6 e o resto 4 + 2 +1 = 7.

O jogo do 'Tabuleiro de Xadrez' pode constituir-se em um elemento motivador nas aulas de matemática e uma ferramenta auxiliar no desenvolvimento do pensamento matemático, visto que permite:

- criar estratégias diferenciadas;
- trocar pontos de vista, analisando as diferentes formas de resolução (observação);
- desenvolver a cooperação, por meio de trocas de diferentes representações;
- permanecer em atividade mental, buscando solução rápida e diferenciada (criatividade, descoberta);
- desenvolver o raciocínio lógico-matemático;
- a auto-avaliação e autocorreção;
- identificar e refletir sobre conceitos matemáticos necessários à resolução das operações (regras para adição e subtração, regras de sinais, comparação de números negativos com positivos e negativos com negativos, técnicas de reagrupamento e decomposição etc.);
- compreender que números negativos são representações de grandezas, (quantidade de marcadores);
- verificar que os débitos *podem ser representados* por números negativos, e que os números negativos *não são* débitos;
- chegar ao mesmo resultado por caminhos diversos, devido à ligação existente entre as operações que formam sempre um sistema de conjunto;
- desenvolver a reversibilidade mental, uma vez que os jogadores devem estar ativamente participando das atividades.

A apresentação do jogo do 'Tabuleiro de Xadrez' evidenciou que existe uma ligação estreita entre o jogo e a representação. Neste sentido, Piaget abordou essa temática no campo da função simbólica ou semiótica e, pela sua importância para o nosso trabalho faremos um breve estudo sobre semiótica em Piaget e em Peirce e o conhecimento matemático.

A FUNÇÃO SIMBÓLICA OU SEMIÓTICA E O CONHECIMENTO MATEMÁTICO

6.1 INTRODUÇÃO

A semiótica pode ser definida como a *ciência dos signos* ou *processos de significação.* Virtualmente, abrange todas as áreas do conhecimento envolvidas com as linguagens ou sistemas de significação, tais como, a lingüística (linguagem verbal), a matemática (linguagem dos números), a biologia (linguagem da vida), o direito (linguagem das leis), as artes (linguagem estética) etc., cuja principal finalidade é possibilitar a descrição e análise da dimensão representativa de objetos, processos ou fenômenos em categorias ou classes organizadas.

Segundo Peirce:

> Um signo, ou *representamen* é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. Dirige-se para alguém, isto é, cria na mente dessa pessoa um signo equivalente, ou talvez, um signo mais desenvolvido. Ao signo assim criado denomino *interpretante* do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu *objeto*. Representa esse objeto não em todos os seus aspectos, mas com referência a um tipo de idéia que eu, por vezes, denominei fundamento do *representamen*[212]

O autor citado explicita: um signo é "**algo** que, sob certo aspecto ou de algum modo, representa **alguma** coisa para **alguém**[213]**.** Então, o signo apresenta três aspectos:

---

[212] PEIRCE. Semiótica. 1999, p. 46.
[213] Ibid., p. 46

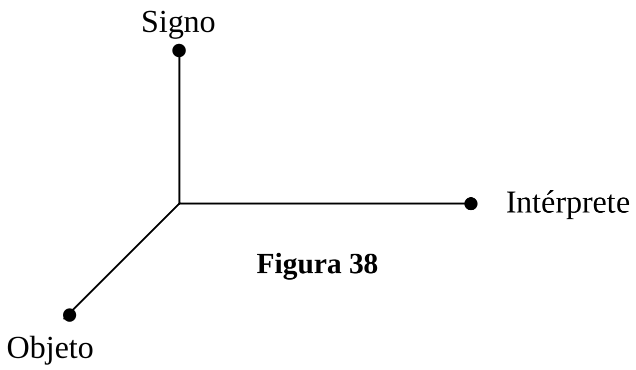


Figura 38

Otte refere que:

> [...] aceitamos a definição pragmatista de signo de Peirce como representada na Figura 40. Em contraste com os tradicionais modelos didáticos, Peirce define um signo como qualquer coisa que representa alguma coisa (chamada o seu objeto) de tal modo a gerar outro signo (seu interpretante ou significante)[214].

O signo vai do desenho infantil até o mais rigoroso tratado de lógica, incluindo o homem e, também, é concebido como uma tríade formada pelo *representamen* aquilo que funciona como signo para quem o percebe, pelo *objeto* aquilo que é referido pelo signo, e pelo *interpretante,* o efeito do signo naquele (ou naquilo, podendo-se aí incluir os seres ou dispositivos comunicativos inumanos como os computadores) que o interpreta.

A questão da função simbólica ou semiótica não foi enfocada de maneira central na teoria piagetiana. Seus escritos sobre a formação simbólica e o aparecimento da representação podem ser encontrados no livro *La formation du symbole chez l´enfant* (1946/1978) (*A formação do símbolo na criança*) e em alguns textos esparsos. A representação é um tema de grande interesse para nosso trabalho, por desempenhar um papel fundamental no domínio da linguagem matemática algébrica, pois a compreensão de objetos matemáticos pressupõe a utilização de uma linguagem específica de características diferentes da linguagem comum. Por exemplo, para a compreensão do valor relativo dos números, dos algoritmos das operações, das simplificações de frações, das resoluções de equações, das resoluções de integrais etc., necessitamos, além do conhecimento conceitual,

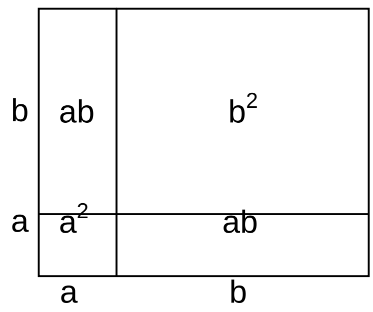
[214] OTTE. Epistemologia da matemática de um ponto de vista semiótico. In: Educação matemática pesquisa, 2001.v. 3, p. 23.

do domínio das regras sintáticas e das convenções de notação do simbolismo matemático. Assim sendo, uma expressão algébrica pode ser representada da seguinte forma:

1- *Linguagem algébrica*: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2- *Linguagem comum*: “O quadrado da soma de dois números é igual à soma dos seus quadrados adicionada ao dobro do seu produto”.

3- *Representação geométrica*:



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Figura 39

Para as pessoas que não entendem a linguagem algébrica, a linguagem comum é muito mais significativa; seu entendimento depende apenas de ter alguma idéia do conceito de quadrado de um número e de produto. A história da Matemática mostra como a invenção de novos símbolos lingüísticos foi determinante para o desenvolvimento matemático. Por exemplo, a numeração de caráter aditivo utilizado desde a Antiguidade emperrou o desenvolvimento da aritmética, porque durante muitos séculos este tipo de sistema numérico empregou procedimentos longos e cansativos.

Neste capítulo, pretendemos destacar alguns pontos relevantes da abordagem piagetiana em relação à representação, procurando salientar a questão da função simbólica ou semiótica no contexto da Matemática e, com esta finalidade, abordaremos os seguintes aspectos: 1- o significado de representação; 2- representação no sentido de Peirce e Piaget; 3- representação no sentido piagetiano e matemático. È esta temática que passamos a apresentar.

6.2 O QUE É REPRESENTAÇÃO

O enfoque central deste capítulo é discutir o que significa representação. Com esta finalidade, inicialmente, apresentamos uma definição de um dicionário filosófico que menciona:

> Representação (lat. *Repraesentatio*, in *Representation*; fr. *Représentation*; al. *orstellung*; it. *Rappresentazione*). Vocábulo de origem medieval que indica *imagem* (v.) ou *idéia* ([v.] no 2º sentido), ou ambas as coisas. O uso desse termo foi sugerido aos escolásticos pelo conceito de conhecimento como 'semelhança' do objeto. 'Representar algo' - dizia S. Tomás de Aquino –'significa conter a semelhança da coisa' (*De ver*, q. 7 a 5). Mas foi principalmente no fim da escolástica que esse termo passou a ser mais usado, às vezes para indicar o significado das palavras. (Cf., p. ex., GRAZIANO DI ASCOLI, *Peribermenias* 2).Ockham distinguia três significados fundamentais: 'Representar tem vários sentidos. Em primeiro lugar, designa-se com este termo aquilo por meio do qual se conhece algo; nesse sentido, o conhecimento é representativo, e representar significa ser aquilo com que se conhece alguma coisa. Em segundo lugar, por representar entende-se conhecer alguma coisa, após cujo conhecimento conhece-se outra coisa; nesse sentido, a imagem representa aquilo de que é imagem, no ato de lembrar. Em terceiro lugar, por representar entende-se causar o conhecimento do mesmo modo como o objeto causa o conhecimento'(*Quodl*., IV, q.3). No primeiro caso Representação é a *idéia* no sentido mais geral; no segundo é a *imagem*; no terceiro é o próprio *objeto*. Esses são, na realidade, todos os possíveis significados do termo, que voltou a ter importância com a noção cartesiana de idéia como 'quadro' ou 'imagem' da coisa (*Méd. III*) e foi difundido sobretudo por Leibniz, para quem a mônada era uma Representação do Universo (*Mônad*., § 60). Inspirado nessa doutrina, Wolff introduziu o termo *Vorstellung*, para indicar a *idéia* cartesiana, no uso filosófico da língua alemã (*Vernünftige Gedanken von Gott, der Welt und die Seele des Meschen*, 1979, I, §§ 220, 232, etc.). Deve-se a Wolff a difusão do uso desse termo nas outras línguas européias. Kant estabeleceu seu significado generalíssimo, considerando-o gênero de todos os atos ou manifestações cognitivas, independentemente de sua natureza de quadro ou semelhança (*Crít. R. Pura*, Dialética, livro I, seç. I), e foi desse modo que o termo passou a ser usado em filosofia. Hamilton defendia o uso dessa palavra também em inglês (*Lectures on Logic*, 2ª ed., 1966, 1. p. 126)[215].

O significado de representação foi preocupação de filósofos e foi interpretado de diferentes formas, de acordo com a concepção filosófica de cada pensador. Assim, representar pode ser entendido como idéia, imagem e o próprio objeto. Após este esclarecimento inicial, apresentamos a compreensão que Peirce tem em relação à representação, pois, para este, representar significa:

---

[215] ABBAGNANO. Dicionário de filosofia.1997, p. 853.

> [...] estar em lugar de, isto é, estar numa relação com um outro que, para certos propósitos, é considerado por algumas mentes como se fosse o outro. Assim, um porta-voz, um deputado, um advogado, um agente, um vigário, um diagrama, um sintoma, uma descrição, um conceito, uma premissa, um testemunho, todos representam alguma outra coisa, de diferentes modos, para mentes que consideram sob esse aspecto. Veja-se o conceito de Signo. Quando se deseja distinguir entre aquilo que representa e o ato ou relação de representação, pode-se denominar o primeiro de *representâmen* e o último de *representação*[216].

Neste sentido, o ato de representar pode ser entendido como uma relação que indica alguma outra coisa. Assim, na Matemática, quando falamos qual o valor de **x,** ele está representando algo que se deseja determinar, tais como, medida, lucros e perdas, a idade etc.

Em relação à representação, Piaget elucida que quem "diz representação, diz conseqüentemente reunião de um **significante** que permite a evocação e de um **significando** fornecido pelo pensamento"[217]. Por exemplo, quando falamos de uma cadeira, a palavra cadeira é o *significante*, enquanto a imagem da cadeira é o *significado.* A capacidade de diferençar *significantes* de *significados* é a condição básica para que ocorra a representação e, assim, ser capaz de evocar e se referir a outro.

Dada a existência de vários estudiosos que desenvolveram uma abordagem em relação à representação, em nosso estudo optamos por apresentar alguns aspectos relacionados ao signo, ícone, índice e símbolo na visão de Peirce, considerado o pai da semiótica e de Piaget que buscou sua interpretação nesse autor.

6.3 REPRESENTAÇÃO NO SENTIDO DE PEIRCE E DE PIAGET

A representação exerce um papel muito importante na Matemática, porque ela apresenta uma natureza icônica, tendo um discurso cuja significação prescinde da realidade. Assim, recorremos ao uso de jogos, porque mostram mais claramente as diferentes possibilidades de representação de forma concreta por meio de um campo criado imaginariamente, mostrando a possibilidade da construção concreta de diferentes estruturas para um mesmo problema. Neste sentido, a distinção do significado de representação

[216] PEIRCE. Semiótica. 1999, p. 61.
[217] PIAGET. A formação do símbolo na criança. 1978, p. 345.

relativo aos signos (ícones, índices e símbolos) sob os pontos de vista de Peirce e de Piaget representa uma forma de contribuição para o entendimento da importância da representação para o aprendizado de números negativos, pois estamos lidando com relações.

6.3.1 Signos (ícones, índices, símbolos) segundo Peirce

Charles Sanders Peirce (1839-1914) é considerado o pai da semiótica, pretendia uma teoria geral da representação. Em seu livro *Semiótica*[218] e em seus textos, observamos a divisão dos Signos em Ícone, Índice e Símbolo.

Inicialmente, Peirce classificou os signos pelo tipo de suas relações com os próprios objetos. Assim:

> [..] uma progressão regular de um, dois, três pode ser observada nas três ordens de signos – Ícone, Índice, Símbolo. O Ícone não tem qualquer conexão dinâmica com o objeto que representa, simplesmente acontece que suas qualidades se assemelham às do objeto e excitam sensações análogas na mente para a qual é uma semelhança. Mas, na verdade, não mantém conexão com elas. O Índice está fisicamente conectado ao seu objeto: formam ambos, um par orgânico, porém a mente interpretante nada tem a ver com esta conexão, exceto o fato de registrá-la depois de ser estabelecida[219].

O ícone é um signo, cujas condições de significação prescinde da existência de seu objeto, isto é, o ícone pode significar quer seu objeto quer seja uma existência ou realidade.

Otte explicita que:

> Os ícones substituem tão completamente seus objetos que dificilmente podem ser distinguidos deles. Assim são os diagramas de álgebra e geometria. Os diagramas são essencialmente ícones, e ícones ou imagens são particularmente adequados a tornar apreensível e concebível o possível e o potencial, mais que o real e factual. A matemática tem sido sempre chamada de *a ciência do possível* ou do logicamente possível, e para verificar se alguma combinação de asserções é consistente ou logicamente possível, ela deve ser *visualizada*, porque a dificuldade reside na interação entre as várias afirmações, mais do que em significados particulares como tais[220].

---

218 PEIRCE. *Semiótica*. São Paulo: Ed. Perspectiva, 1999.
219 Ibid., p. 73.
220 OTTE. Epistemologia da matemática de um ponto de vista matemático. 2001, p. 39.

Assim, nenhuma análise de significados conceituais irá, em geral, responder à pergunta se duas afirmações relacionais diferentes ou derivações chegam ao mesmo resultado ou não.

> O Ícone não representa inequivocamente esta ou aquela coisa existente, como o faz o Índice. Seu objeto pode ser uma pura ficção, assim como a sua existência. Muito menos é seu Objeto necessariamente uma coisa de um tipo habitualmente encontrado. Mas há uma certeza que o Ícone proporciona em seu mais alto grau. E o que é mostrado diante do olhar mental – a Forma do Ícone, que é também seu objeto – deve ser logicamente possível[221].

Por ser um objeto de uma pura ficção, Peirce destaca a importância dos ícones no raciocínio matemático e lógico:

> [...] uma fórmula algébrica é um ícone, tornada tal pelas regras de comutação, associação e distribuição dos símbolos. À primeira vista, pode parecer uma classificação arbitrária denominar uma expressão algébrica de ícone: e que ela poderia ser da mesma forma ou com mais razão, ainda, considerada como um signo convencional composto. Mas não é assim, pois uma importante propriedade peculiar ao ícone é a de que, através de sua observação direta, outra verdade relativa a seu objeto pode ser descoberta além das que bastam para determinar sua construção. Assim, através de duas fotografias pode-se desenhar um mapa etc. Dado um signo convencional ou um outro signo geral de um objeto, para deduzir-se qualquer outra verdade, além da que ele explicitamente significa, é necessário, em todos os casos, substituir esse signo por um ícone. Esta capacidade de revelar verdades insuspeitadas é exatamente aquela na qual consiste a utilidade das fórmulas algébricas, de tal modo que o caráter icônico é que prevalece[222].

O valor de um Ícone é destacado exatamente por salientar as características de um fato, considerando-as como se fossem puramente imaginárias, e o raciocínio deve se relacionar com as formas que são os principais elementos de criação racional. Por isso os ícones são fundamentais para o raciocínio matemático.

A Matemática, assim como a arte, tem construído um universo possível, o jogo também lida com a construção de possibilidades, o ícone é possibilidade e desempenha um papel fundamental. Desse modo Peirce esclarece que,

[221] OTTE. Epistemologia da matemática de um ponto de vista matemático. 2001, p. 39.
[222] PEIRCE. Semiótica. 1999, p. 65.

> [...] em álgebra, escrevemos equações uma sob a outra, numa disposição regular, particularmente, quando utilizamos letras semelhantes para coeficientes correspondentes, a disposição obtida é um ícone por exemplo: $\mathbf{a_l x + b_l y = n_l}$
> $\mathbf{a_2 x + b_2 y = n_2}$[223].

Isso é um ícone, pelo fato de fazer com que se assemelhem quantidades que mantêm relações análogas com o problema. Com efeito, toda “equação algébrica é um ícone, na medida em que exibe, por meio de signos algébricos (que em si mesmos não são ícones), as relações das quantidades em questão”[224].

Para este pensador, ícone é um signo que se refere ao objeto que indica os caracteres que ele igualmente possui, quer um tal objeto realmente exista, quer não, e o índice é o signo que significa só por meio de seu vínculo existencial com seu objeto. Após a explicitação sobre o ícone, passamos a destacar que nenhum fato pode ser afirmado sem o uso de algum signo que sirva como índice. O próprio Peirce cita que:

> Em álgebra, as letras, tanto quantitativas quanto funcionais, são desta natureza. Mas os símbolos sozinhos não declaram qual é o tema do discurso; e isso não pode, de fato, ser descrito em termos gerais, pode somente ser indicado. O mundo real não pode ser distinguido de um mundo imaginário por nenhuma descrição. Daí a necessidade de pronomes e índices, e quanto mais complicado o assunto, maior a necessidade deles[225].

Neste sentido, um ícone apresenta semelhança, enquanto o índice não precisa exprimir uma semelhança com seu objeto. A condição básica sobre um Índice é que ele tem uma conexão existencial direta com seu objeto. Em relação a este aspecto, Otte exemplifica que:

> [...] os usos do inglês comum são confiáveis em nosso discurso sobre índices; o dedo indicador é usado para apontar alguma coisa, por exemplo. O apontar-se para é uma conexão existencial direta com aquilo que é apontado, e assim o é um índice no sentido de Peirce. Índices servem à identidade de referência[226].

---

[223] PEIRCE. Semiótica. 1999, p. 66.
[224] Ibid., p. 66.
[225] PEIRCE, citado por OTTE. Revista educação matemática e pesquisa. 2001, p. 42.
[226] OTTE. Epistemologia da matemática de um ponto de vista semiótico. 2001, p. 42

Assim, podemos ainda exemplificar:

> [...] inchaço, dor, vermelhidão, calor, febre, são índices de inflamação. 'Índices fornecem uma garantia positiva da realidade e da proximidade de seus objetos. Mas junto com a garantia não vai qualquer *insight* da natureza desses Objetos'. Alguém poderia, primeiramente, não saber nada sobre a doença que a febre indica. Quanto mais sintomas e reações se observam, mais claro se torna o quadro, porque os sintomas, como o inchaço ou a febre, não são puros índices, mas também fornecem informações. É importante notar que em geral os signos de modo algum necessitam ser puramente ícones ou índices (ou símbolos, também). O signo diante de uma loja é um índice por sua conexão com a loja. Mas pode ser também icônico, ao apresentar, por exemplo, a figura de um livro para indicar que a loja é uma livraria[227].

Na visão de Peirce, índice não prescinde do objeto para significar. Ele afirma que "nenhuma questão de fato pode ser asseverada sem o uso de algum signo que sirva como índice"[228]. Por exemplo, os geômetras colocam letras em partes diferentes de seus diagramas e, a seguir, usam estas letras para indicar essas partes. Na construção de um triângulo, as letras A, B e C são índices porque indicam os vértices do triângulo construído. Peirce diz que:

> Tudo o que atrai a atenção é índice. Tudo que nos surpreende é índice, na medida em que assinala a junção entre duas porções de experiência. Assim, um violento relâmpago indica que algo considerável ocorreu, embora não saibamos exatamente qual foi o evento[229].

Muitos exemplos poderiam ser citados em relação aos índices. Assim, em "uma batida na porta se A diz a B **Há um incêndio**, B perguntará **Onde**? a partir do que A vê-se forçado a recorrer a um índice, mesmo que ele esteja fazendo referência a um lugar qualquer do universo real, passado e futuro[230].

Na indicação do local de incêndio, A poderia dizer: *a cerca de mil metros daqui.* A palavra *aqui* é um índice e a palavra *metro,* embora represente um objeto de uma classe geral, indiretamente, também é indicial.

---

227 OTTE. Epistemologia da matemática de um ponto de vista matemático. 2001, p. 42.
228 PEIRCE. Semiótica. 1999, p. 74
229 Ibid., p. 67.
230 Ibid., p. 74.

Para Peirce, os índices não se referem apenas aos objetos da experiência, pois caso contrário não "haveria uso para eles na Matemática pura, que lida, como o faz com criações idéias, sem se preocupar com o fato de elas serem ou não concretizadas em algum momento"[231]. Assim, podemos constatar que "**os índices** são absolutamente indispensáveis na Matemática; até que esta verdade fosse compreendida, fracassaram todos os esforços no sentido de reduzir as normas à lógica das relações triádicas e relações superiores, enquanto tão logo foi aprendida, resolveu-se o problema"[232]. Neste sentido:

> Letras comuns da álgebra que não apresentam peculiaridade alguma são índices. Também o são as letras A, B, C etc. ligadas a uma figura geométrica. Advogados e outros profissionais que precisam lidar com casos complicados com precisão recorrem a letras para distinguir indivíduos. As letras assim usadas são meramente pronomes relativos melhorados. Assim, enquanto pronomes demonstrativos e pessoais são, como usados comumente, *índices genuínos*, pronomes relativos são *índices degenerados*, pois embora possam acidental e indiretamente, referir-se a coisas existentes, referem-se diretamente, e é tudo ao que precisam referir-se a imagens na mente que foram previamente criadas pelas palavras[233].

A Matemática, por trabalhar intensamente com idéias e criações, e o índice, por ser indispensável, permitem a representação do fato pensado, tanto concretamente como de forma imaginada.

Segundo Otte, para Peirce:

> [...] tem sido um enigma, há muito, como poderia ser que, por um lado, a matemática é puramente dedutiva em sua natureza, e tira suas conclusões de modo apodítico, enquanto, por outro lado, apresenta uma série tão rica e aparentemente interminável de descobertas surpreendentes como qualquer ciência empírica[234].

Várias tentativas foram efetuadas para resolver esse paradoxo, quebrando uma ou outra dessas asserções, porém sem sucesso. Na realidade, parece que todo raciocínio envolve raciocínio dedutivo, até mesmo um simples silogismo envolve um elemento de observação. Assim, a dedução fundamenta a construção de um ícone ou diagrama em que as relações das partes dos objetos de raciocínio e de experimentação sobre a imagem na

---

[231] PEIRCE. Semiótica. 1999, p. 75.
[232] Ibid., p. 75.
[233] Ibid., p. 75.
[234] PEIRCE, citado por OTTE. Revista educação matemática e pesquisa. 2001, p. 43.

imaginação e na observação do resultado permitem a descoberta de relações despercebidas e escondidas entre as partes.

Neste sentido, Otte afirma:

> [...] com relação à álgebra, a própria idéia da arte é que apresente fórmulas que possam ser manipuladas, e que pela observação dos efeitos de tal manipulação encontremos propriedades que não seriam discernidas de outra maneira. Em tal manipulação, somos guiados por descobertas prévias, que estão incorporadas em fórmulas gerais. Esses são padrões que temos o direito de imitar em nossos procedimentos, e são os ícones *par excellence* da álgebra. As letras de álgebra aplicada são usualmente símbolos, mas os x,y,z etc., de uma fórmula GERAL. Tal como (x+y)z = x z + y z são espaços a serem preenchidos com símbolos, eles são índices de símbolos. Uma tal fórmula pode, é verdade, ser substituída por uma regra abstratamente estabelecida (por exemplo, que a multiplicação é distributiva); mas nenhuma aplicação poderia ser feita de uma tal afirmação abstrata sem traduzi-la em uma imagem sensível[235].

O índice mantém diferentes tipos de relações com seu objeto. No caso da Matemática ser uma regra abstrata, tal como no exemplo, a multiplicação é distributiva, e pode ser representada por:

a) uma fórmula geral (x + y) z = x z + y z;

b) numericamente (2 +4) 3 = 3.2 + 3.4;

c) por meio de um diagrama:

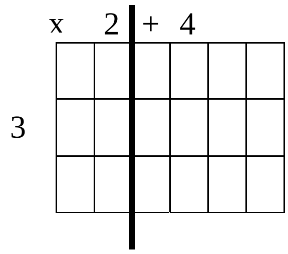


Figura 40

Mesmo que uma afirmação abstrata deva ser representada concreta ou mentalmente, um índice envolve a existência de seu objeto, mas não tem nenhuma semelhança significante com ele.

---

[235] PEIRCE, citado por OTTE. Revista educação matemática e pesquisa 2001, p. 43.

> O índice é um signo cuja significação de seu objeto se deve ao fato de ele ter uma relação genuína com aquele Objeto, sem se levar em conta o interpretante. É o caso, por exemplo, da exclamação 'Ei!' como indicativa de perigo iminente ou uma batida na porta como indicativa de uma visita[236].

Podemos, então, constatar que o índice é um signo que se refere ao objeto, tendo, necessariamente, alguma qualidade em comum com ele. O exemplo de uma pegada tem semelhança com o próprio pé, mas não é o pé sem ela, mas sua representação (índice).

Após este estudo, passamos a discernir o entendimento do que seja um símbolo na visão de Peirce, iniciando com o seguinte exemplo:

> [...] assim como aquela famosa pegada que Robson Crusoe encontrou na areia foi um índice, para ele, de que alguma criatura estava em sua ilha, e, ao mesmo tempo, como um ícone, trouxe a idéia de um homem. O índice juntamente com o ícone resultaram na afirmação *há um homem na ilha*. Essa proposição é, como já foi dito, um símbolo[237].

O símbolo é representado por meio de uma lei geral (regras), convencional ou semiconvencional, referindo-se à concretização da idéia ligada à palavra. Para ilustrar o tema em questão, faremos menção ao escrito de Peirce:

> Uma progressão regular de um, dois, três, pode ser observada nas três ordens de signos, Ícone, Índice e Símbolo. O Ícone não tem conexão dinâmica alguma com o objeto que representa; simplesmente acontece que suas qualidades se assemelham às do objeto e excitam sensações análogas na mente para a qual é uma semelhança. Mas, na verdade, não mantém conexão com elas. O Índice está fisicamente conectado com seu objeto; formam, ambos, um par orgânico, porém a mente interpretante nada tem a ver com essa conexão, exceto o fato de registrá-la, depois de ser estabelecida. O Símbolo está conectado a seu objeto por força da idéia da mente-que-usa-o-símbolo, sem a qual essa conexão não existiria[238].

Este pensador, a respeito do símbolo, afirma que:

> Um ***Símbolo*** é um Representâmen, cujo caráter representativo consiste exatamente em ser uma regra que determinará seu interpretante. Todas as palavras, frases, livros e outros signos convencionais são símbolos. Falamos em escrever ou pronunciar a palavra ***man*** (homem), mas isso é apenas uma *réplica* ou corporificação da palavra que é pronunciada ou escrita[239].

---

[236] PEIRCE, citado por SANTAELLA. 1995, p.160.
[237], OTTE. Epistemologia da matemática de um ponto de vista semiótico. 2001, p. 44
[238] PEIRCE. Semiótica. 1999, p. 73.
[239] Ibid., p. 71.

Os símbolos são signos muito mais complexos e não guardam qualquer relação de semelhança ou de contigüidade com a coisa representada. A relação é puramente cultural e arbitrária. Para compreender um símbolo, é necessário aprender o que ele significa, ou seja, interpretá-lo, e, para tal, é preciso recorrer ao raciocínio indutivo ou dedutivo, daí a importância da simbologia para a Matemática. As palavras, os símbolos matemáticos, os símbolos químicos, as bandeiras de países e clubes são exemplos de símbolos.

Para Peirce, "símbolo é um signo que se refere ao objeto que denota em virtude de uma lei, normalmente, uma associação de idéias gerais que opera no sentido de fazer com que o símbolo seja interpretado como se referindo àquele objeto"[240]. Por exemplo, quando digo *cadeira*, refiro-me não só a uma cadeira em particular (*esta cadeira*, por exemplo, seria um índice), mas a uma idéia geral de objeto composto de um assento sustentado a uma determinada distância do solo através de um ou mais pés e um encosto fixado angularmente em relação ao assento.

Quando alguém diz cadeira, está se reportando ao objeto geral cadeira, a qualquer cadeira, não a uma cadeira particular, e essa generalidade caracteriza sua natureza simbólica. Os símbolos são arbitrários, no sentido de que são socialmente convencionados e mutáveis (*cadeira* no Brasil, *chair* na Inglaterra e *chaise* na França), porém não absolutamente acidentais ou arbitrários. Os tipos, generalidades e idéias são signos simbólicos, pois não se restringem à singularidade. Peirce denomina cada singularização de um símbolo como *réplica* do tipo original.

Peirce distingue ícone (indicativo de possibilidade e relações), signo (algo que representa alguma coisa para alguém, por exemplo, o desenho), índice (indica alguma coisa, por exemplo, os vértices A, B, C de um triângulo) e símbolo que, socialmente convencionados, são arbitrários e referem-se a um objeto geral. Após este entendimento, passamos a apresentar a visão piagetiana em relação à função semiótica.

[240] PEIRCE. Semiótica. 1999., p. 71.

6.3.2 Signos (ícones, índices, símbolos) de acordo com Piaget

Para Piaget, o aparecimento da função semiótica é um momento fundamental do desenvolvimento cognitivo. Graças à função semiótica, a inteligência torna-se representativa; as ações e sua coordenação podem ser realizadas em um novo nível, interno, sem ficarem subordinadas aos dados atuais e externos da percepção.

Segundo o autor, essa interiorização é obtida porque as ações apóiam-se em "evocações de objetos ausentes ou a ação ainda não consumada"[241] (realizadas por meio da ação simulada, de imagem mental ou dos sinais da linguagem). Por outro lado, os sinais em que a inteligência representativa firma-se não se restringem aos elementos já formados que são utilizados pelo sujeito, mas também às construções; por isto traçou sua gênese por meio da atividade imitativa.

Para este pesquisador,

> [...] a imitação constitui apenas uma das fontes da representação, à qual fornece, essencialmente, seus 'significantes' imaginados. No outro extremo, e do ponto de vista das significações, sobretudo, pode-se considerar o jogo, ou atividade lúdica, como conduzindo igualmente da ação à representação, na medida em que evolui da sua forma inicial de exercício sensório-motor para a sua segunda forma de jogo simbólico ou de imaginação[242].

Os sinais construídos, baseados na atividade imitativa, têm para Piaget uma função de suporte e de instrumento do pensamento (favorecem a aquisição e manutenção da informação), porém não os modificam profundamente. No aparecimento e desenvolvimento dessa função semiótica, a novidade é propriedade que surge da dinâmica das ações e de sua coordenação. A construção do conhecimento (seja ele lingüístico, matemático, ou espacial) deve ser abordada em íntima relação com os sistemas semióticos que se originam em relação com os sistemas notacionais desenvolvidos em cada domínio, sejam lingüísticos, estéticos, musicais, matemáticos, computacionais etc.

Para Piaget, utilizamos o termo *representação* em dois sentidos bastante diferentes: no primeiro, "**lato** a representação pode ser confundida com o pensamento e a

[241] PIAGET. O nascimento da inteligência na criança. 1975, p. 231.
[242] PIAGET. A formação do símbolo na criança. 1978, p. 11.

inteligência e apóia-se em um sistema de percepções e movimentos", na segunda, "**estrito** ela se reduz à imagem mental ou à recordação imagem, isto é, à evocação simbólica das realidades ausentes"[243].

O conceito é um esquema abstrato e a imagem, um símbolo concreto, então, todo pensamento pode estar ligado a um sistema de imagens. Se pensar consiste em interligar significações, a imagem será um *significante* (objeto) e o conceito, um *significado* (palavra).

Para este pesquisador, a representação em sentido *lato* foi chamada de representação conceptual e, no sentido estrito, representação simbólica ou imaginada ou de símbolos e imagens. Fez também a distinção entre símbolo e signo, assim:

> [...] a terminologia dos lingüístas, devemos reservar o termo 'símbolo' para os significantes 'motivados', isto é, que apresentam uma relação de semelhança com o significado, em contraste com os 'signos' que são 'arbitrários' (quer dizer convencionais ou socialmente impostos). Ora, além dos conceitos e símbolos, também se registra nessa mesma fase um princípio do emprego de 'signos', visto que no momento aproximado em que a inteligência sensório-motora se prolonga em representação conceptual e em que a imitação se converte em representação simbólica, o sistema de signos sociais também aparece sobre as espécies da linguagem falada e (imitada). O problema envolve, pois, três e não apenas dois termos ao mesmo tempo: conceitos, símbolos e signos verbais[244].

Para Piaget, a representação inicia-se com os indícios e sinais (imitação de gestos) e está relacionada a ações e objetos. Os símbolos são representados pelos ícones e as figuras, pela reprodução e mantêm semelhança figurativa com o objeto a que se ligam, são substitutos (representação) dos objetos que possibilitam ainda a criação de uma realidade virtual. Os signos representam as palavras falada ou escrita de acordo com o grupo social a que pertencem.

Para Piaget "a representação começa quando há, simultaneamente, diferenciação e coordenação entre **significantes** e s**ignificado**s, ou significações"[245]. Esclarece ainda que os primeiros significantes são proporcionados pelos *indícios* que possibilitam o sujeito identificar os objetos e as relações, assimilar com conhecimento de

[243] PIAGET. A formação do símbolo na criança. 1978, p. 87.
[244] Ibid., p. 88.
[245] Ibid., p. 12

causa e mesmo imitar. O indício por ser um aspecto do objeto ou situação, ainda não constitui um *significante* diferenciado do *significado*.

Na conduta verbal (linguagem), o significante é formado pelos *signos* coletivos (sociais) que são as palavras, e o significado é produzido pela significação das palavras (conceitos). Assim, entre o indício e o signo, estão inseridas a imagem simbólica e a representação por imagem.

Segundo Piaget:

> [...] a imagem pode ser considerada mais que um indício, porque está desligada do objeto percebido, e menos que um signo, porque ainda continua sendo imitação do objeto. Além disso, a imagem é ainda um significante acessível ao pensamento individual, e o *signo* é sempre social[246].

O autor explica ainda que cada imagem corresponde a um objeto (conceito desse objeto), que serve de representante para pensar a classe geral de que ele faz parte:

> [...] por exemplo, a representação de um triângulo pode ser obtida por uma imitação real (desenho ou simples movimentos de um dedo a descrever a figura) ou puramente mental (imagem interior ou intuição do triângulo), mas há então correspondência entre as partes do desenho, as da imagem e as do objeto representado[247].

A imagem construída para este triângulo permite que o sujeito estabeleça relações ou pense em todos os triângulos.

Para Piaget, a função representativa inicia-se com os índices e sinais, ligados às ações e objetos, avançando pelos símbolos que comportam ícones, figuras e reprodução, que são os substitutos ou representações dos objetos e estão ligados aos signos (palavras), de acordo com a língua falada pelo grupo social. Dentro desta perspectiva, vamos procurar relacionar a representação piagetiana e a representação do sentido matemático.

[246] PIAGET. A formação do símbolo na criança. 1978, p. 209.
[247] Ibid., p. 210.

6.4 Representação nos sentidos piagetiano e matemático

A capacidade representativa é denominada de função simbólica (ou semiótica) ou representação, apresenta-se sob diferentes formas e pode resultar da pressão do meio físico ou social. A imagem pode ser percebida como continuação direta da sensação, e os objetos produzem as impressões que são recebidas pelos nossos sentidos (empirismo) que podem produzir respostas.

Piaget, quando falou em representação, defendeu que o sujeito utiliza a função simbólica para ajudar a solucionar a situação-problema. Por isso, ele compreendeu a representação em diferentes aspectos:

> [...] é a capacidade de evocar por meio de um signo ou de uma imagem simbólica o objeto ausente ou a ação ainda não realizada[248].
>
> A representação começa quando há, simultaneamente, diferenciação e coordenação entre *significantes* e *significados* ou significações[249].
>
> Há representação quando se imita um modelo ausente[250].

Neste sentido, representar significa o resultado de uma ação que pode ser adquirida pela diferenciação ativa de significantes e significados e não da capacidade *a priori* ou oriunda do exterior. A representação, para ele, pode ser empregada em dois sentidos diferentes:

> [...] essas duas espécies de representações, latas e estritas, apresentam relações mútuas: o conceito é um esquema abstrato e a imagem um símbolo concreto, mas, embora já não se reduza o pensamento a um sistema de imagens, poder-se-á admitir que todo o pensamento se faz acompanhar de imagens, portanto, se pensar consiste em interligar significações, a imagem será um *significante* e o conceito um *significado*[251].

Além dessa diferenciação, o autor citado assinala que "chamaremos doravante **representação conceptual** à representação em sentido lato e **representação simbólica ou imaginada**, ou **símbolos** e **imagens,** simplesmente, à representação no sentido estrito"[252].

---

[248] PIAGET. O nascimento da inteligência na criança. 1975, p. 231.
[249] PIAGET. A formação do símbolo na criança. 1978, p. 11-12.
[250] Ibid., p. 12.
[251] Ibid., p. 87.
[252] Ibid., p. 88

A representação, no sentido lato, relaciona-se ao plano do conhecimento operativo e, no sentido estrito relaciona-se ao plano da representação propriamente dita, ou seja, o conhecimento figurativo.

Segundo Piaget, o aspecto figurativo relaciona-se a tudo aquilo que se liga à configuração por meio da percepção (presença do objeto), à imitação e à imagem mental (a imitação) que é interiorizada. Há a ausência do objeto real, que é reproduzido sob a forma de representação imagística (interiorizada). Portanto, para ele,

> [...] o aspecto figurativo do pensamento representativo é tudo o que se dirige às configurações, como tais: em oposição às transformações. Guiado pela percepção e sustentado pela imagem mental, o aspecto figurativo da representação desempenha um papel preponderante no pensamento da criança de 2 a 7 anos[253].

Quanto ao aspecto construtivo ou operativo, Piaget defendeu que a transformação liga-se a tudo que modifica o objeto, com base na ação até as operações. As operações são ações interiorizadas ou interiorizáveis, reversíveis, que possibilitam ações inversas, coordenadas em estruturas operatórias, apresentando leis de composição, descrevendo a estrutura em sua totalidade. Por exemplo, a adição é uma operação porque contém uma operação inversa à subtração, porque adição e subtração contêm leis de totalidade (leis de grupo). Como exemplo de estruturas operatórias, o autor cita as classificações, seriações, correspondências, matrizes, a série dos números e as transformações projetivas etc.

Piaget afirmou que,

> [...] uma operação não é a representação de uma transformação: ela é, em si mesma, uma transformação do objeto, mas que pode ser executada simbolicamente, o que não é absolutamente a mesma coisa. Uma operação permanece, pois uma ação e não se reduz nem a uma figura, nem a um símbolo[254].

O pesquisador citado explicita que, de acordo com a terminologia dos lingüistas, o termo *símbolo* pode ser usado aos significantes que apresentam uma relação de semelhança com o significado. Contrariamente, os *signos* são *arbitrários*,

[253] PIAGET. Problemas de psicologia genética. 1973, p. 71.
[254] Ibid., p. 72-73.

convencionais e socialmente impostos, sejam eles verbais, matemáticos, seja qualquer um outro e também podem ser um instrumento do pensamento racional.

Nas suas palavras:

> A função simbólica resulta de uma diferenciação entre os significantes e os significados (até então indiferenciados como no caso dos índices perceptivos, ou dos sinais de condicionamento). Os símbolos e os sinais, uma vez diferenciados de seus significados (ou significações), permitem então evocar objetos ou situações atualmente não percebidos, o que constitui o começo da representação[255].

A representação não é apenas uma imagem que reproduz um objeto nem uma cópia da realidade, porém uma construção pela atividade do sujeito.

Na teoria de Piaget, os símbolos diferem dos signos, pois o símbolo apresenta significado diferenciado de seu significante. Assim passa a ser o substituto da representação do objeto que pode representar ainda uma realidade virtual, porém mantém uma semelhança figurativa com o objeto representado e pode, ter uma origem puramente individual, assim ao representar o número **6** (seis) podemos fazê-lo de diferentes formas "**@@@@@@;** ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ou θ θ θ θ θ θ**".**

Os signos são significados também diferenciados de seus significantes são convencionais, sempre sociais e, por isso, mais ou menos arbitrários. Enfim, assim não apresentam nenhuma semelhança com o objeto representado: é assim que a palavra é ao mesmo tempo convencional e bastante diferenciada da coisa representada. São exemplos de signo a palavra falada "**seis**", "**six**" ou o numeral escrito "**6**". Na equação **x = 2**, o **2** desta equação é uma convenção, pois qualquer um pode chamar esse número como quiser: (dois (português), two (inglês) ni (japonês), etc.), então só pode ser um signo, enquanto o x é um índice, pois está indicando um número que não conhecemos, não é algo fixo, não é uma convenção universal. Assim qualquer um pode chamar esse número como quiser e por isso só pode ser um índice. Para Piaget, " índices são significados não diferenciados de seus significantes porque são partes deles ou um resultado casual; por exemplo, para uma criancinha, ouvir uma voz é um índice da presença de alguém"[256].

---

[255] PIAGET. A formação do símbolo na criança. 1978, p. 70.
[256] PIAGET, A teoria de Piaget. In: CHARMICHAEL. Psicologia da criança. 1975, p. 93.

Neste sentido, o estudioso genebriano em relação à função semiótica explicita que "Peirce introduziu uma distinção entre **índices** (percepções), **ícone**s (imagem) e **símbolo**s, onde ele inclui a linguagem. Nós preferimos a terminologia de Saussure[257], mais difundida em lingüística, psicologicamente caracterizada em: **Índice, Símbolos e Signos**"[258].

A função semiótica inclui, além da linguagem, brinquedos simbólicos, imagens mentais e gráficas, a imitação diferenciada. Na Educação Matemática dá-se muita ênfase à representação com signos, sobretudo na educação inicial.

Com freqüência os educadores ensinam as crianças a ler, contar e escrever numerais, acreditando que, desta forma, estão ensinando conceitos numéricos, o que não deixa de ser importante, porém seria muito mais significativo, se aprendessem a construir a estrutura mental. Os signos não são por si operações mentais, assim como não são em si realidades ou experiências, o signo é "**arbitrário** e repousa necessariamente numa convenção e ele exige, pois, a vida social para se constituir. [...] Um puro signo é sempre coletivo"[259].

Todo símbolo envolve a representação de um objeto ausente, podendo comparar um elemento dado e um elemento imaginado e ainda se ter uma representação fictícia. Para demonstrar a comparação entre um objeto e uma imagem, temos como exemplo uma criança que tropeça em uma pedra e imagina ser um cachorro.

Na Matemática índices e ícones são importantes, pois um diagrama é um ícone. Por exemplo, quando desenhamos um triângulo, os nomes dos vértices são índices, pois estão indicando os vértices denominados de **A B C**. Na língua comum, não temos muitos ícones a língua é mais simbólica. Então, em termos semióticos, acontece a grande distinção entre Matemática e língua, só que na Matemática índices e ícones possuem um papel muito maior. No exemplo **x = 2**, o **x** indica um objeto sem dar uma descrição, é um número desconhecido. Segundo Otte[260], ele só terá um significado dentro de um contexto real ou imaginado, sendo a atividade humana o contexto mais importante.

---

[257] I PIAGET, A teoria de Piaget. In: CHARMICHAEL. Psicologia da criança. 1975, p. 93.
[258] Ibid., p. 93.
[259] PIAGET. Psicologia da inteligência. 1983, p. 128-129.
[260] OTTE. What is text? 1986, p. 175.

Diferentemente das Ciências Sociais (Psicologia, Sociologia etc.) que trabalham com a linguagem, a Matemática utiliza diagramas, representações e cálculos formais, como na Álgebra. Isto possibilita o uso intenso do ícone, porque permite criar mundos artificiais e construir modelos que possibilitam, por exemplo, perceber as regras dos números inteiros. Na Matemática é impossível desconsiderar a utilização de índices, daí decorre o papel cada vez mais significativo da complementaridade.

Piaget não aprecia muito a percepção, por isso critica tanto os signos, pois segundo sua concepção a utilização está intimamente relacionada à percepção e representa um perigo ao empirismo. O motivo de sua crítica justifica-se pelo fato de querer ser um construtivista puro.

Peirce explicita que não pode haver conhecimentos novos sem ícones, pois se você nunca viu uma cor, você não sabe o que é vermelho sem vê-la. Quando uma pessoa é cega, nunca vai poder reconhecer a cor vermelha, por mais que se empenhe em descrever a pessoa, nunca vai ter este sentido. Outro exemplo, quando você não conhece um mutum, não tem como falar nem poderá descrevê-lo se nunca o viu, por mais que se fale, que é uma ave ou uma galinha grande e sua cor é preta etc., pois o estabelecimento dessa relação não é tão simples.

Para Otte[261], na Matemática a capacidade representativa relaciona-se ao conhecimento do texto que, inevitavelmente, se conecta á sua representação simbólica, e os sistemas de signos e símbolos aparecem como indicadores visíveis de tipos ou aspectos do conhecimento, assim, pode-se perceber fortemente no texto matemático baseado na fórmula.

O ensino da Matemática tem como alicerce o mito formalista de que o saber e o fazer matemático se reduzem à manipulação de signos sem a necessidade de serem acompanhados de conceitos e operações mentais. Os estudantes são persuadidos a manipular marcas no papel, sem compreender o que estão fazendo e por que estão fazendo algo, sem um significado e com pouca ou quase sem nenhuma compreensão.

No uso dos signos matemáticos, normalmente, ocorre uma preocupação excessiva com a técnica de cálculo. Porém, lembramos que, em particular, o pensamento

[261] OTTE. What is a text? 1986, p. 177.

matemático precisa de muita coisa mecânica, já que muita atividade na Matemática é mecanizada. Por exemplo, para construir o cálculo das operações, você precisa primeiro pensar, mas depois que está totalmente construído, torna-se uma ação mecânica.

Assim, a crença de que os signos matemáticos contêm por si próprios as propriedades que representam, talvez seja um dos mais graves equívocos no ensino da Matemática, pois os signos matemáticos não contêm por si próprios as propriedades que representam, assim como não são por si operações mentais realidades ou experiências, pois dependem da atividade humana.

Nessa perspectiva, o aluno é obrigado a aprender Matemática por meio da manipulação de signo e por isso mesmo responde àquilo que o professor espera. O aluno poderá estar apenas desenhando sinais gráficos e pode não estar pensando matematicamente nem mesmo estabelecendo qualquer relação matemática. Poderá estar simplesmente representando no papel sinais que sabe manipular de modo mecânico.

Nos primeiros anos da escola, os efeitos maléficos das práticas mecanicistas podem passar despercebidos, porque a criança é hábil na aprendizagem de técnicas, uma vez que as relações matemáticas a serem representadas fazem parte de seu repertório de ações exercidas sobre o real. Entretanto, quando os signos passam a representar relações e propriedades numéricas mais abstratas que não encontram correspondências nas ações físicas, as técnicas perdem o sentido, acarretando incompreensões e confusões.

A intervenção direta da vida social, dos sistemas de signos e das representações coletivas que permeiam o ensino da Matemática, por falta de clareza, vem provocando confusões entre as antigas práticas empiristas e as atuais orientações cognitivistas. Desse modo, alguns alunos têm raras oportunidades de utilizar materiais manipuláveis (para representar o 2, podem lançar mão de diferentes figuras, contendo dois objetos, tais como ☎☎, , ✡✡), depois das quais esses materiais são introduzidos na utilização de signos, pois, supostamente já adquiriam as bases necessárias para fazer as relações entre objetos, representações figurativas e signos matemáticos.

A atividade representacional exerce um importante papel na aprendizagem da Matemática, desde que o professor estimule o aluno a representar suas ações o que permite a reconstituição da seqüência de suas ações do ponto inicial ao final, dando à sua representação um todo coordenado, uma vez que a passagem da ação à representação é um processo lento, porque esta garante a simultaneidade das ações.

O professor para facilitar a aprendizagem de noções abstratas precisa criar situações experimentais para os estudantes, de modo que eles possam realizar as abstrações necessárias. Além disso, o professor também precisa estabelecer uma linguagem comum com os alunos, ou seja, uma linguagem cuidadosa para negociação e coordenação de significados.

Evidentemente, os objetos manipuláveis desempenham um importante papel, mas é um equívoco acreditar que a passagem da manipulação e percepção dos objetos à abstração Matemática é fácil e automática. Por mais que sejam habilmente desenvolvidos, os materiais só oferecem oportunidades às ações e, relacionando estas ações, os conceitos operatórios podem ser construídos. Neste sentido, a função do professor deve ser a de proporcionar uma aula de Matemática ativa, em que os materiais estejam disponíveis aos alunos com diferentes níveis conceituais. Deve dialogar com eles para descobrir como e se estão fazendo *pontes* entre os objetos e os signos numéricos.

De acordo com os dados do Sistema de Avaliação do Ensino Básico-SAEB, de 1999, a média dos estudantes brasileiros, ao final da oitava série, não passa do domínio das operações com números naturais e da manipulação com o sistema monetário. Não atinge o domínio do sistema de numeração decimal, cálculos de áreas, operações com números relativos e com números racionais, nem a manipulação de expressões algébricas, entre outros objetos essenciais. Estes são os resultados de práticas, nas quais os professores assumem compromisso com um documento, com uma lista de conteúdos.

A Matemática não pode ser aprendida por meio da manipulação de signos. Isto não significa que os signos matemáticos não sejam importantes como recurso para expansão do pensamento. Porém, procuramos ressaltar que os signos, por si só, não representam propriedades e relações, estas são extraídas por reflexão das coordenações das ações, e as representações operatórias que resultam e utilizam signos expandem o pensamento em uma espiral ascendente, sem fim nem começo absoluto.

Para Piaget, é a ação que estrutura os significados e, como tal, estrutura o mundo, pois as estruturas são fundamentalmente lógico-matemáticas. Como já dissemos, os índices e ícones são muito importantes ao ensino da Matemática, porque ajudam a representar os objetos abstratos que são trabalhados na mente do sujeito.

Neste capítulo, procuramos apresentar o significado de representação, mostrando sua aplicação nos diferentes campos, especificamente seu uso e alcance no campo da Matemática que lida com a abstração, sobretudo em relação aos ícones e índices que, pela sua natureza, muito contribuíram para o desenvolvimento do pensamento matemático. Assim passamos a apresentar a nossa pesquisa empírica e a mostrar a possibilidade de conectar este estudo a um campo concreto de aprendizagem.

PESQUISA EMPÍRICA

7.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo aborda duas pesquisas realizadas com professores que atuam na 6ª serie do Ensino Fundamental, a primeira de cunho exploratório, em que aplicamos um questionário semi-estruturado. Nesta pesquisa, pretendemos obter informações referentes ao:

- Perfil do professor, sua formação e tempo de magistério;
- Motivo da escolha e uso do livro didático, metodologia, estratégias de ensino, atualização e pesquisa em relação aos números negativos;
- Informações em relação ao conteúdo dos números negativos.

Para a sua realização, elaboramos um questionário com 35 questões que foram respondidas individualmente por dez professores da rede estadual do município de Rondonópolis – MT. Os dados foram coletados durante o mês de dezembro de 2003.

A segunda pesquisa foi de cunho intervencionista, com a utilização do jogo do 'Tabuleiro de Xadrez' com dez professores também de escolas públicas estaduais. Neste jogo procuramos observar se os participantes conseguiam detectar as estruturas matemáticas envolvidas na solução das atividades propostas.

Desse modo, neste capítulo, apresentamos a metodologia adotada em nosso estudo, a descrição do primeiro estudo que tem a pretensão de caracterizar o perfil do professor responsável pelo ensino formal de números negativos em sua fase inicial. Por fim, descrevemos o segundo estudo relativo à aplicação do jogo 'tabuleiro de xadrez'.

Este estudo pretende demonstrar a superioridade dos jogos na aprendizagem de números negativos, uma vez que o sujeito é o próprio construtor de seu conhecimento. As regras e propriedades e a estrutura matemática se mostram mais clara no contexto do jogo, o que concorre para a compreensão desses fatores. Depois, o próprio sujeito vai perceber a necessidade de memorizar certas regras para auxiliar na construção de estruturas mais complexas.

7.2 METODOLOGIA

A pesquisa desenvolvida constitui-se em um estudo de caráter exploratório, com o objetivo de entender o pensamento do professor em relação aos números negativos, no que diz respeito à fundamentação teórica, percepção das estruturas matemáticas, opinião sobre o livro didático adotado, uso de alternativas de ensino e à literatura utilizada para aperfeiçoamento do tema.

É importante destacar que o presente estudo pretende auxiliar o professor em sua prática pedagógica, com base nas defasagens detectadas, mostrando alternativas que sejam mais eficientes no aprendizado de números negativos. Para subsidiar o presente estudo, buscamos os pressupostos teóricos empregados nessa metodologia, que estão expostas na próxima seção.

7.2.1 Trajetória metodológica

Em relação à abordagem qualitativa, Triviños (1987) apresenta uma discussão sobre a metodologia de pesquisa qualitativa, defendendo que esta responde a questões particulares, e que as ciências sociais não tratam da realidade quantificada. Elas trabalham com um universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, por isso as variáveis não podem ser medidas, porém deve ser descritas daí seu caráter exploratório e não confirmatório.

É importante destacar que tanto a pesquisa qualitativa como a quantitativa apresentam estruturas e relações de idéias, pois não é possível trabalhar com a realidade em si, porém representações e idéias, já que a realidade não é diretamente acessível. Um bom exemplo desse fato é o jogo, visto que este não faz parte do mundo real, é um mundo imaginário.

Segundo Bogdan e Biklen, citado por Ludke & André (1986), a pesquisa qualitativa apresenta o ambiente natural como fonte direta dos dados e o pesquisador como instrumento-chave; em função disso, há o predomínio do caráter descritivo dos dados coletados.

Neste tipo de pesquisa, é dispensada maior atenção ao processo do que ao produto, daí seu interesse em verificar como o problema se manifesta nas atividades, procedimentos e interações cotidianas e a sua preocupação em relatar a perspectiva dos participantes.

O pesquisador qualitativo tem como foco de preocupação o significado que as pessoas dão às coisas e à sua vida. A análise dos dados é efetuada de forma indutiva, e por isso desenvolve conceitos e compreensão com base nas informações que obtém. Dessa forma, o quadro teórico inicial serviria de estrutura básica, ao invés de uma afirmação que deve ser confirmada ou verificada no decorrer da investigação.

A realização de uma pesquisa qualitativa segue o mesmo passo de uma investigação, ocorrendo a escolha de um tema, o problema, a coleta de dados e a análise das informações.

Triviños (1987) esclarece que a pesquisa qualitativa não segue uma seqüência rígida das etapas assinaladas para o desenvolvimento da pesquisa, e as informações recolhidas, geralmente, são interpretadas e por isto podem gerar a exigência de novas buscas de dados. A pesquisa qualitativa pode iniciar seu trabalho sem estar orientada por hipóteses ou questões específicas levantadas anteriormente. Isto não significa uma carência do quadro teórico que conduz à coleta e análise dos dados.

Os estudos qualitativos retratam os casos individuais, abordando as diferenças e particularidades, ao invés de destacar somente os aspectos universais e gerais. Assim, todo material coletado (relatos de observações, tabelas, problemas etc.) é relevante, porque utiliza uma variedade de fontes de informação.

Na apresentação do texto final, os dados devem figurar de forma clara e coerente, não contendo apenas uma síntese quantitativa ou comparativa dos dados obtidos, porém devem rever suas idéias iniciais.

Para Triviños (1987) toda coleta de informações deve ser realizada de forma direta e pessoalmente pelo pesquisador por meio de técnicas preestabelecidas. Uma das diferenças fundamentais entre as pesquisas qualitativa e a quantitativa está na determinação da população e das amostras, visto que a pesquisa qualitativa não se preocupa com a quantificação da amostragem, e o tamanho da amostra é decidido intencionalmente, levando em conta fatores tais como sujeitos que sejam essenciais, segundo o ponto de vista do pesquisador, para o esclarecimento do assunto em foco, disponibilidade de horário para participar de encontros, entrevistas etc.

Para nosso estudo, optamos por uma pesquisa de abordagem qualitativa, porque possibilita averiguar como o problema se revela nas atividades, nos procedimentos e interações, descrevendo a perspectiva dos participantes.

7.2.2 Pesquisa empírica

Inicialmente, apresentamos nosso primeiro estudo, que foi efetuado em três etapas: a primeira, exploratória; a segunda, coleta de dados; e a terceira, análise e sistematização dos dados.

A fase exploratória é de fundamental importância, porque é o momento em que o pesquisador define mais precisamente o objeto de estudo, os instrumentos de coleta de dados, a amostragem, a construção dos fundamentos teórico-conceituais a serem empregados, a escolha do espaço, do grupo de pesquisa e da estratégia a ser utilizada em campo.

Na fase exploratória, efetuamos as seguintes ações:

- elaboramos as questões fundamentais para definir e delimitar o objeto de estudo;
- efetuamos os contatos iniciais com diretores, coordenadores e professores;

- discutimos e elaboramos o cronograma para as entrevistas e disponibilizamos as informações do estudo.

Na segunda fase, realizamos a coleta de dados e, com tal finalidade, aplicamos um questionário semi-estruturado e também o jogo do ‘Tabuleiro de Xadrez’.

Na terceira fase, realizamos a descrição e análise qualitativa das informações coletadas, alicerçadas nos fundamentos teóricos apresentados no nosso trabalho.

Após a realização da coleta de dados, classificamos e organizamos as informações obtidas, tanto do questionário como do jogo.

7.3 PRIMEIRO ESTUDO

Esta pesquisa foi efetuada com professores da rede pública estadual do município de Rondonópolis – MT, com a finalidade caracterizar o perfil do professor que trabalha com alunos de 6as séries do Ensino Fundamental.

7.3.1 Sujeitos da pesquisa

O estudo foi realizado com dez professores do Ensino Fundamental. Para participar do estudo, o professor deveria estar ministrando aulas na 6ª série, porque nesta série geralmente acontece o ensino sistematizado (formal) dos números negativos, tema deste trabalho.

Os professores participantes pertencem a escolas diferentes, porque em cada uma, em sua maioria, há apenas um professor responsável por esta série, em cada período (matutino/vespertino), o que justifica a busca de diferentes escolas, sejam elas centrais, sejam periféricas.

O questionário foi aplicado de forma individual, sob a orientação da pesquisadora.

7.3.2 Organização do questionário

O questionário elaborado para este estudo apresenta 35 questões com informações sociodemográficas, como dados pessoais e formação dos participantes, e informações a respeito da afinidade com a Matemática, livro didático, conteúdo, metodologia, dificuldades de abordagens de cálculo, propriedades, regras de sinais, formas de apresentação, alternativa metodológica, fundamentação histórica e teoremas. Desse modo, o estudo foi dividido em três blocos:

1. Informação profissional.
2. Formação profissional em relação ao aspecto teórico-metodológico.
3. Informação sobre o aspecto teórico em relação ao conteúdo números negativos.

O estudo possui um caráter exploratório com o objetivo de diagnosticar as dificuldades em relação ao processo ensino-aprendizagem de números negativos. A partir desse levantamento, apresentamos o jogo como forma de auxiliar a amenizar a problemática e a necessidade de reflexão sobre a própria formação profissional.

Nesta direção elaboramos um questionário contendo três blocos assim distribuídos: o primeiro bloco, que denominamos informação profissional contendo seis questões, tem como objetivo coletar dados referentes a informações sobre a graduação, tempo de serviço total e os dedicados à 6ª série, e uma questão: a Matemática é fácil? As questões elaboradas neste bloco servem de apoio para conhecermos o universo dos professores entrevistados

O segundo bloco, que se refere à formação profissional e relaciona-se ao aspecto teórico-metodológico contendo treze questões, foi subdivido em quatro itens: no primeiro item, formulamos questões ligadas ao uso e escolha do livro didático, com um total de seis questões.

Neste bloco pretendemos saber que livro foi escolhido, por que o escolheram e se utilizam os livros adotados. Aqui nossa expectativa seria esclarecer que critérios são utilizados na escolha do livro didático, como estes critérios são discutidos entre os professores, ou se não existe nenhuma discussão, tendo em vista que cada um faz a opção pelo gosto pessoal, ou a escolha é feita pelo professor que tem mais tempo de serviço, ou só um grupo tem direito de opinar e escolher.

Nossa expectativa é que a escolha do livro didático ocorra com prévia discussão, analisando não só o aspecto geral do livro, porém verificando como os conteúdos são abordados, e se a forma como o conteúdo se apresenta, realmente, ajuda o aluno a compreender e a construir as estruturas matemáticas necessárias a seu aprendizado.

No segundo item deste bloco, são apresentadas quatro questões relativas à metodologia de ensino. Nossa indagação aqui está relacionada à estratégia de ensino, tipo de recurso utilizado e se somente na preparação da aula fazem uso de outros materiais. Na prática pedagógica, o aspecto didático-metodológico sempre foi alvo de atenção, por isso os órgãos competentes procuram investir na formação de professores. Em relação a este item questionamos até que ponto estas ações têm sido aproveitadas pelo professor para ajudar o aluno a construir seu conhecimento lógico-matemático?

O professor deve estar preparado metodológica e teoricamente para atuar de forma satisfatória, compreendendo as dificuldades dos alunos para ajudá-los a superá-las. Nesse contexto, o professor deve detectar as deficiências e planejar estratégias que possam contribuir na construção de conceitos necessários para o aprendizado de números negativos, tais como elemento simétrico, regras de sinais, decomposição, propriedades comutativa, associativa e distributiva etc., que estão presentes implicitamente na resolução das operações com números negativos.

No terceiro item, apresentamos cinco questões referentes à avaliação do livro didático em relação aos números negativos. Neste item, esperamos que o professor manifeste seu ponto de vista em relação à apresentação do tema no livro didático, bem como o seu parecer, levantando os pontos positivos e negativos e sugestões de como deveriam ser apresentados para que houvesse a construção do conhecimento ligado aos números negativos. Um outro ponto significativo diz respeito ao uso do livro didático, se é um instrumento só do professor ou do aluno também? É importante o aluno utilizar o livro didático?

Em relação ao livro didático, o professor precisa entender que se trata de um auxiliar e não um fim, por isso não pode restringir a sua prática a um único livro, carecendo de outras referências para tornar o ensino de números negativos realmente agradável e fácil de ser assimilado. Não deve perder de vista que o livro didático é fundamental para o aluno, porque talvez seja o único material escrito formalmente sobre o assunto como fonte de consulta.

No quarto item, elaboramos uma pergunta para averiguar que tipo de literatura o professor lê além do livro didático, com a finalidade de detectar se existe uma preocupação na busca de um entendimento mais amplo em relação à história, curiosidades e temas que estão sendo abordados nas pesquisas atuais quanto aos números negativos e que tragam contribuições para a melhoria de sua prática pedagógica.

Enfim, no terceiro bloco, abordamos questões referentes aos conceitos que envolvem números negativos, concepções e fundamentação teórica. Com esta finalidade, foram elaboradas quinze questões agrupadas em quatro itens: concepções a respeito dos números negativos; que tipo de dificuldade é mais freqüente; como utilizar a representação e quais são os aspectos teóricos?

O primeiro item deste bloco conta com três questões e tem como finalidade verificar de que forma o professor justifica a existência dos números negativos, pois está lidando com grandezas, e estas só podem ser materializadas com o uso de um campo imaginário, porque lida com relações.

No segundo item, apresentamos quatro questões referentes às dificuldades em relação ao processo ensino e aprendizagem de números negativos (regras de sinais, uso de linguagem ou propriedades, representação, operações etc.).

No terceiro item, as duas questões referem-se às diferentes formas de representação. Neste bloco pretendemos verificar que tipo de representação o professor utiliza para o processo ensino e aprendizagem de números negativos e a apresentação de suas dificuldades ou facilidades em relação aos diferentes tipos de representação presente no livro didático, ou outras atividades a que recorre para efetuar a representação que irá auxiliar o aluno na construção do conceito e nas operações com números negativos.

No quarto item, abordamos as questões teóricas, contendo seis perguntas relacionadas às regras de sinais, com o objetivo de verificar o procedimento utilizado em relação a este aspecto e uma outra questão sobre as diferentes formas de uso de números negativos em situações concretas.

Neste bloco, o aspecto relevante refere-se à representação, e em função disso indagamos se é importante à distinção entre número (como objeto) e numeral (como signo), porque a Matemática trabalha com um mundo ideal, e no mundo imaginário o objeto pode ser qualquer um, ao passo que o signo pertence ao conhecimento social. Após a apresentação da finalidade das questões, aplicamos o questionário e, a seguir, passamos à análise dos dados obtidos.

7.3.3 Análise dos dados

Conforme o exposto, analisamos os dados obtidos em três blocos. No primeiro, destacamos os dados referentes à formação profissional para conhecer um pouco as características dos entrevistados, bem, como sua afinidade com o ensino de Matemática. Com essa finalidade, dedicamos seis questões, que passamos a relatar.

PERGUNTA 1: TEMPO DE SERVIÇO NO MAGISTÉRIO (....) ANOS
TEMPO DE ATUAÇÃO COM A 6ª SÉRIE (....) ANOS.

a) Tempo de serviço no magistério

Tempo de serviço no magistério	Quantidade
Até 5 anos	3
De 6 a 10 anos	4
De 11 a 25 anos	3
Total	10

b) Tempo de serviço com atuação efetiva só com turmas de 6as séries

Tempo de serviço na 6ª série	Quantidade
De 2 a 10 anos	8
De 11 a 18 anos	2
Total	10

Todos os professores de Matemática entrevistados atuam no magistério pelo menos há cinco anos e como professores de 6ª série, no mínimo há dois anos, o que demonstra que todos já têm certa experiência de trabalho com os números negativos.

Dentre os professores entrevistados, a sua maioria concluiu o curso de graduação entre os anos de 1980 e 2003, tendo sete o curso de licenciatura plena em Matemática e três Licenciatura Curta em Ciências. Isto demonstra que todos são habilitados para trabalhar como professor nesta série.

A seguir, apresentamos cada uma das perguntas contidas no questionário, vindo na seqüência às respostas literais dadas pelos participantes[262] e, por fim, nossos comentários a respeito dessas respostas.

PERGUNTA 4: VOCÊ GOSTA DE MATEMÁTICA? POR QUÊ?

Prof [1] – *Sim. Gosto de trabalhar com dinheiro, números e cálculos.*
Prof [2] – Sim. *Tenho facilidade.*
Prof.[3] – Sim. *Está relacionado com a vida no dia a dia e também no espaço.*
Prof [4] – Sim. *Por ter afinidade e por ser uma disciplina desafiante.*
Prof [5] – *Sim. Porque nos leva a raciocinar, agir e questionar com mais clareza.*
Prof [6] – Sim. *Porque gosto de desafios, e a Matemática me propõe vários.*
Prof [7] – Sim. *Sempre gostei, desde o ginásio tinha muita facilidade em aprender, influência de ótimos professores que tive.*
Prof.[8] – Sim. *Adoro a profissão.*
Prof.[9] – Sim. *Gosto do verdadeiro, o concreto sim ou não, não gosto do meio termo.*
Prof.[10] – Sim. *Porque tenho prazer e me sinto realizado.*

Todos os professores entrevistados gostam de Matemática, este é um dado importante, porque quando gostamos do que fazemos à tarefa é muito mais prazerosa e produtiva.

PERGUNTA 5: A MATEMÁTICA É FÁCIL OU DIFÍCIL? POR QUÊ?

Prof [1] – *É difícil, pela sua complexidade no passar para o outro.*
Prof [2] – *Matemática é fácil para o meu entendimento, mas difícil para aqueles que não querem entender e não têm raciocínio lógico.*
Prof.[3] – *Fácil, porque depende da leitura, observação e outros fatores, que todos os estudantes possuem, com algumas diferenças é claro*
Prof [4] – *Fácil.*
Prof [5] – *É. Fácil, com o conhecimento da matéria fica mais simples.*
Prof [6] – *Fácil. Porque você consegue chegar ao mesmo resultado através de vários caminhos.*
Prof [7] –*É fácil, a partir do momento que você entende o conteúdo, muitas vezes, nós professores é que tornamos a matemática difícil, por falta de metodologias diferenciadas.*
Prof.[8] –*Fácil, tenho facilidade e gosto muito da matéria da 6ª série.*
Prof.[9] – *Eu acho fácil a matemática que eu gosto, não gosto de muitas fórmulas, teoremas, gosto da matemática da 6ª até 8ª .*

---

[262] Os sujeitos participantes de nosso estudo serão designados por professor[1], professor[2] e assim por diante, e por medida econômica serão abreviados para prof[1], prof[2], etc. Desta forma, toda fala que constar à frente a designação do prof[1], estará se referindo ao mesmo sujeito participante.

Prof.[10]– *Fácil, porque é ou não é. Difícil, porque exige muito raciocínio.*

Nove dos dez responderam que a Matemática é fácil e apenas um considerou-a como difícil, porém mesmo os que responderam que a Matemática é fácil, pelos seus argumentos, apresentam uma concepção preconceituosa entre fácil e difícil, percebida na fala dos professores 2, 7 e 10.

PERGUNTA 6: SÉRIE QUE ATUA ALÉM DA 6ª SÉRIE

PROF.	5ª a 8ª	2° GRAU	ED J. ADULTO
1	X	X	
2	X		
3	X		X
4	X		X
5	X	X	X
6	X		
7	X		
8	X		
9	X		
10	X		

O quadro acima mostra que seis professores ministram aulas só na 6ª série e quatro, além da 6ª série, atuam no Ensino Médio e Educação de Jovens e Adultos.

O segundo bloco constou de treze questões, envolvendo quatro aspectos relativos à:

1- escolha e uso do livro didático;

2- metodologia e estratégia de ensino;

3- avaliação;

4- leitura e pesquisa em relação à temática números negativos.

Em relação ao primeiro aspecto referente à escolha e uso do livro didático, efetuamos seis questões, que passamos a descrever:

Pergunta 7: QUAL O LIVRO DIDÁTICO QUE SUA ESCOLA ADOTOU?

Título do livro	Autor(es)	Quantidade	Prof.
Matemática hoje é feita assim	Antonio José Lopes Bigode	2	1 – 8
A conquista da matemática	Giovani, Castrucci e Giovani Jr.	2	4 – 7
Matemática na medida certa	J. Jakubovic, M. Lellis, M. Centurion	1	6
Matemática: pensar e descobrir	Giovani e Giovani Jr.	3	3 – 9 - 10
Matemática: uma aventura do pensamento	Oscar Guelli	2	2 – 5

O quadro acima retrata a preferência dos professores em relação à escolha do livro didático, no qual *Matemática pensar e descobrir* foi o que obteve o maior índice e *Matemática na medida certa* alcançou a menor pontuação.

PERGUNTA 8: QUAL FOI O MOTIVO DA ESCOLHA DO LIVRO INDICADO?

N° Prof.	Título do livro	Autor (es)	Depoimento dos professores
1	Matemática na medida certa	J.Jakubovic, M.Lellis, M.Centurion	Prof.[6] - *Não sei, pois quando comecei a lecionar o ano letivo já havia começado.*
2	A matemática hoje é feita assim	Antonio J. Lopes Bigode	Prof.[8]- *Pelo autor.* *Prof.[1]- Acho que foi o construtivismo e a interação com o dia a dia.*
2	A conquista da matemática	Giovani, Castrucci e Giovani Jr.	Prof.[4]- *Por trazer vários exercícios complementares* Prof.[7]- *O livro propõe metodologias diferenciadas, artigos de jornais e revistas atualizados, relacionados com os conteúdos propostos. No início de cada capítulo há um enfoque histórico.*
2	Matemática: uma aventura do pensamento	Oscar Guelli	Prof.[2]-No *momento era o melhor.* Prof.[5]-*Conteúdo mais explicado.*
3	Matemática: pensar e descobrir	Giovani e Giovani Jr.	Prof.[3] *-Foi uma decisão em equipe, o mesmo apresenta uma boa interdisciplinaridade.* Prof. [9]-*Um livro com dados bem atualizados. Constam também as interdisciplinas, conteúdos claros.* Prof. [10]-*Pela seqüência dos conteúdos.*

Um dado interessante foi obtido dos dez professores entrevistados, quando quatro professores destacaram a palavra conteúdo, onde se percebe uma preocupação com o conteúdo em geral e seu desenvolvimento. Notamos ainda um interesse em relação à interdisciplinaridade e integração, pois três professores fizeram referência a esse aspecto.

PERGUNTA 9: VOCÊ UTILIZA O LIVRO DIDÁTICO ADOTADO?
PERGUNTA 10: JUSTIFIQUE A RESPOSTA DADA NA QUESTÃO 9.

Professor	Questão 9	Questão 10
1	Sim	*Por trazer muitos exemplos e porque é adotado aos alunos também.*
2	Às vezes	*Às vezes uso outros livros, para complementar as atividades propostas e ver o raciocínio do autor.*
3	Sim	*Faço uso do livro com acompanhamento de diferentes idéias.*
4	Às vezes	*Pois procuro buscar referência de vários autores.*
5	Sim	*Porque as questões adotadas no livro são as mesmas trabalhadas em sala.*
6	Sim	*Sim*
7	Sim	*Utilizo o livro adotado, não há tempo para trabalhar todas as atividades e todos os conteúdos propostos, trabalho na medida do possível.*
8	Sim	*Por consenso de todos os professores.*
9	Às vezes	*Os nossos alunos não gostam de trabalhar com livros, acho que não foram educados para isso, passam a maior parte do tempo passando o livro para o caderno e não resolvem as atividades determinadas.*
10	Às vezes	*Porque vem com pouco exercício.*

Quanto ao uso do livro didático, seis professores responderam positivamente, o que significa que o livro ainda é um instrumento necessário e significativo para o processo ensino-aprendizagem. Os 4 professores que argumentaram que 'às vezes' utilizam os livros é porque procuram o apoio de outros materiais, pois não estão plenamente satisfeitos com o livro adotado.

No segundo aspecto, temos quatro questões em relação à metodologia e estratégia de ensino, e uma delas apresentada aos professores foi:

PERGUNTA 20: O LIVRO DIDÁTICO ADOTADO APRESENTA DIFERENTES ESTRATÉGIAS PARA O ENSINO DE NÚMEROS NEGATIVOS?

Prof.[1] – *Não. Compras em mercado, lojas.*
Prof.[2] – Não.
Prof.[3] – *Não. Livro, mais experiência adquirida.*
Prof.[4] – Sim
Prof.[5] – *Sim. Compras em mercado, lojas.*
Prof.[6] – *Não. Utilizo apenas as estratégias apresentadas no livro didático.*
Prof.[7] – *Sim. Jogos, olimpíadas.*
Prof.[8] – Sim. Maneira mais fácil do aluno aprender.
Prof.[9] – *Não.*

Prof.[10] – *Não. Na regra de sinais o livro vem com regras complicadas + +; - +; confundem os alunos quando é multiplicação ou adição. Eu utilizo na adição: sinais iguais somo e conservo os sinais, multiplicação e divisão conta-se a quantidade de sinais negativos, se for par é $^+$ positivo, se for ímpar é $^-$ negativo.*

Nesta questão seis professores responderam que o livro não apresenta diferentes estratégias para o ensino de números negativos, recorrendo a diferentes justificativas. Dentre os seis, dois disseram compras em mercado, lojas; dois utilizam a estratégia do livro-texto; dois não opinaram, e apenas um mencionou o jogo e olimpíada como estratégia diferenciada, porém não explicitou quais jogos e como são utilizados.

PERGUNTA 22: ALÉM DAS ATIVIDADES PROPOSTAS NO LIVRO ADOTADO, VOCÊ UTILIZA OUTRAS?

Prof [1] – *Mais exercícios de outros livros didáticos.*
Prof [2] – *Compras e vendas, débitos e saldos.*
Prof.[3] – *De outros livros ou com problemas criados por eles, dentro da realidade deles.*
Prof [4] – *Problemas de outros livros. Brincadeiras (gincanas) para cálculo.*
Prof [5] – *Sim, a informática.*
Prof [6] – *Não.*
Prof [7] – *Competições, jogos.*
Prof.[8] – *Sim.*
Prof.[9] – *Sim. Sempre procuro atividades de outros livros, principalmente do livro Praticando matemática - Álvaro Andrini.*
Prof.[10] – *Folheto de propaganda de mercado, estrutura física da escola, extrato bancário.*

Nesta questão apenas um professor disse que não, quatro recorrem a outros livros didáticos, dois compras/vendas, saldo bancário, folhetos de propaganda e um utiliza-se da informática, demonstrando que o professor ainda tem preferência pelo material escrito.

PERGUNTA 25: QUE TIPO DE RECURSO UTILIZA ALÉM DO LIVRO DIDÁTICO?

Prof [1] – *Só exemplos do cotidiano.*
Prof [2] – *Cartazes. Jogos.*
Prof.[3] – *Jogos, metros, coriscos e outros.*
Prof [4] – *Crio brincadeiras para incentivar a aprendizagem.*
Prof [5] – *Jogos, tecnologia e artes.*
Prof [6] – *.Nenhum.*
Prof [7].– *Cartaz, dados.*
Prof [8] – *TV- escola.*
Prof.[9] – *Jogos, exemplos do dia-a-dia.*
Prof.[10] – *Pesquisa em mercados, despesas de água, luz, se aumenta ou diminui.*

O professor procura diversificar as atividades com números negativos, lançando mão de jogos, pesquisa em mercados, despesas de água, luz, verificando sua variação para mais ou menos, brincadeiras para incentivar o aprendizado, além de exemplos do cotidiano, uma forma de tornar sua aula significativa.

PERGUNTA 19: RESPONDER SIM / NÃO (RESPOSTA AFIRMATIVA, CITAR O AUTOR)- PREPARA SUAS AULAS UTILIZANDO:

Questões	Sim	Não	Sem resposta
Apenas o livro didático adotado.	4	6	-
Outros livros didáticos.	8	-	2
Livros paradidáticos.	1	6	3
Livros de história da Matemática.	4	5	1
Livros de filosofia da matemática.	-	7	3

Em relação aos autores, constatamos:

Prof [1] – *Não houve nenhuma citação.*
Prof [2] – *Não houve nenhuma citação.*
Prof.[3] – *Livros já citados e outras experiências já adquiridas.*
Prof [4] – *Não houve nenhuma citação.*
Prof [5] – *Não houve nenhuma citação.*
Prof [6] – *Além do livro didático adotado, consulto A conquista da matemática, de Giovanni, Castrucci, Giovanni Jr.*
Prof [7] – *Tempo de matemática de Miguel Assis Name; Aprendizagem e educação matemática – Giovanni x Giovanni Jr*.
Prof. [8] – *Antonio José Lopes – Bigode.*
Prof.[9] – *Matemática hoje é feita assim, de Antonio José Lopes; A conquista da matemática; Praticando matemática, de Álvaro Andrini é muito usado embora não seja adotado..*
Prof.[10] – *A conquista da matemática, de José Ruy Giovanni e Benedito Castrucci; Praticando Matemática, de Álvaro Andrini, e Matemática Atualizada, de Miguel Assis Name.*

Para preparar suas aulas, 8 professores afirmaram que utilizam outros livros didáticos. Apesar de alguns terem respondido afirmativamente o uso de livros paradidáticos e de historia da Matemática, não fizeram a citação dos livros consultados.

O terceiro aspecto consta de cinco questões em relação à avaliação do conteúdo em estudo, os números negativos. Para a questão O livro que utiliza pode ser considerado: ótimo, muito bom, bom, regular, insuficiente, dos dez professores entrevistados, quatro responderam muito bom, quatro bom e dois regular, apresentando as seguintes opiniões:

PERGUNTA 18: O LIVRO UTILIZADO PODE SER CONSIDERADO (MUITO BOM; BOM; REGULAR). DÊ SUA OPINIÃO SOBRE A FORMA COMO OS NÚMEROS NEGATIVOS SÃO TRABALHADOS NO LIVRO DIDÁTICO ADOTADO.

Prof [1] – *Bom.*
Prof [2] – *Muito bom. Bom, esclarece bem.*
Prof.[3] – *Muito bom. Poderia ser melhor, mais exemplos problematizados.*
Prof [4] – *Regular. É a mais comum, através da reta, temperatura.*
Prof [5] – *Regular*
Prof [6] – *Bom. O livro faz uma abordagem bastante simples e com uma linguagem bastante clara, trazendo exercícios de fácil compreensão.*
Prof[7] – *Muito bom. Os conteúdos primeiramente são enfocados historicamente, exercícios diversificados, ligações com o cotidiano.*
Prof [8] – *Muito bom. É mais fácil de que os alunos possam atender ao processo de aplicação do professor.*
Prof.[9] – *Bom. Muito rápido, com algumas situações longe do dia-a-dia deles, dificultando o interesse e a participação.*
Prof.[10] – *Regular. A forma é boa, mas vem pouca atividade.*

A avaliação do livro adotado entre muito bom (4) e bom (3) demonstra que os professores consideram o livro adotado satisfatório na apresentação dos números negativos. No entanto, o Prof.[3], que apontou muito bom, fez a seguinte ressalva: *poderia ser melhor, mais exemplos problematizados,* denotando uma contradição em sua avaliação. Entretanto dois professores que apontaram como sendo regular, demonstraram coerência em sua opção, dado importante pelo caráter crítico-consciente desses professores (Prof [4] e Prof.[10]).

PERGUNTA 21: NA SUA OPINIÃO CARACTERIZE O QUE É UM BOM LIVRO PARA O ENSINO DE NÚMEROS NEGATIVOS.

Prof [1] – *Não sei.*
Prof [2] – *Que tenha exemplos do cotidiano.*
Prof.[3] – *Livros com problemas voltados para o dia-a-dia.*
Prof [4] – *É o que traz idéias concretas para a boa compreensão.*
Prof [5] – *Aquele que trate do conteúdo, abordando idéias reais para as crianças.*
Prof [6] – *Um bom livro é aquele que aborda o assunto de uma maneira clara e uma linguagem de fácil compreensão por parte dos alunos*
Prof [7] – *Aquele livro que propõe jogos, brincadeiras fáceis de serem trabalhadas e com materiais simples onde está a aprendizagem adotada para o aluno.*
Prof. [8] – *Onde está a aprendizagem adotada para o aluno.*
Prof.[9] – *Um livro de linguagem simples, atividades do cotidiano do aluno e muito exercício*
Prof.[10] –*O bom livro é aquele que vem com bastante atividade diversificada.*

Os dados desta questão demonstram preocupações diferenciadas por parte dos professores. Percebemos que uns estão preocupados com livros que apresentem muitas atividades, outros, com problemas do cotidiano, idéias concretas, reais, que tenham linguagem fácil, e apenas um professor citou jogos e brincadeiras, o que denota a existência de uma preocupação excessiva apenas com atividades de cálculo e não com o desenvolvimento do pensamento para estabelecer relações.

PERGUNTA 24: COMENTE SOBRE O LIVRO ADOTADO, APONTANDO PONTOS POSITIVOS E NEGATIVOS.

Prof [1] – *Não comentou.*
Prof [2] – *Não comentou.*
Prof [3] – *Para algumas séries, o livro é muito bom, para outras poderia ser melhor; exemplo: 5ª e 8ª, MB – já para a 7ª , regular.*
Prof [4] – *Traz vários problemas contextualizados.*
Prof [5] – *Trazem problemas irreais. Negativos.*
Prof [6] – *Pontos positivos – exercícios que fazem com que os alunos sintam-se desafiados a resolvê-los. Pontos negativos – alguns exercícios de repetição.*
Prof [7] – *Pontos positivos – atividades variadas. Negativos – muito conteúdo, abordagem longa.*
Prof [8] – *Todos são positivos.*
Prof [9] – *Positivos para mim, a história da matemática, dados recentes; toda a matemática, principalmente a parte da geometria em cada capítulo, mas os alunos não gostam.*
Prof.[10] – *Positivos: seqüência de conteúdos. Negativos: poucas atividades.*

Nesta questão dois professores não fizeram nenhum comentário, mas obtivemos alguns dados interessantes: três professores indicaram como sendo positiva propostas de atividades variadas, tipos de exercícios desafiadores, dados históricos e a inserção da geometria nos capítulos do livro, e um professor afirmou que todos são positivos. Pudemos detectar diferentes percepções nas falas do Prof[7] e do Prof.[10] nas quais o primeiro cita muito conteúdo e o segundo, pouca atividade, e isso pode ter ligação com a escolha do livro adotado e do significado atribuído para o *aprender matemática*. O prof [9] apresenta um depoimento interessante, afirmando que *o livro é positivo para mim, a História da Matemática, dados recentes[...], mas os alunos não gostam.*

PERGUNTA 29: VOCÊ ACHA QUE O ALUNO É CAPAZ DE LER O LIVRO DIDÁTICO EM RELAÇÃO AOS NÚMEROS NEGATIVOS E COMPREENDER O QUE O LIVRO CONTÉM? POR QUÊ?

Prof [1] – *Não, porque os números negativos, paras eles, é algo novo, se fosse introduzido com exemplos da vida antes, quem sabe.*
Prof [2] – *Sim, é bem claro.*
Prof.[3] – *Depende, há, dois anos comecei trabalhar apoiada na leitura e hoje vejo um grande crescimento nesse.*

Prof [4] – *Não, pois estão chegando á 6ª série sem domínio da leitura, e muitos livros não trazem o assunto com clareza.*
Prof [5] – *Não, lhe falta embasamento teórico.*
Prof [6] – *Não, geralmente a explicação que vem nos livros não é de fácil compreensão por parte dos alunos.*
Prof [7] – *Às vezes a linguagem utilizada não é tão simples. Pode até não ser a linguagem, mas as dificuldades de interpretação dos próprios alunos.*
Prof. [8] – *Sim, com o acompanhamento principalmente do professo.r*
Prof.[9] – *Não todos, alguns são capazes, mas hoje a maioria dos alunos não entende sozinho nem um texto de português, eu acho que eles estão muito desinteressados.*
Prof.[10] – *Sim, se houver acompanhamento do professor.*

Nesta questão três professores disseram que sim. No entanto é interessante observar que o Prof.[10] e o Prof. [8] foram da mesma opinião, dizendo da necessidade de se ter o acompanhamento por parte do professor. Dos cinco professores que disseram não, o Prof [4], Prof [6] e o Prof.[9] destacaram que a dificuldade para o entendimento do texto matemático sobre números negativos pode estar relacionada à linguagem utilizada nos livros e à falta de domínio de leitura por parte dos alunos. Apenas um opinou dizendo que sim e de forma clara. As respostas demonstram que números negativos não é um conteúdo simples e fácil de se assimilar, porque envolve diferentes dificuldades, tais como,

> [...] a ambiguidade dos dois zeros, o caráter fixo do número, a dificuldade de afastar de um sentido concreto atribuído aos seres numéricos, a busca de um modelo unificador, obstáculos que podem ser superados para Piaget, ao se entender que um número simboliza ´uma acão’**,** e não ‘um estado’**[263]** .

O que requer mais atenção por parte do professor.

PERGUNTA 30: VOCÊ ACHA QUE O LIVRO É MAIS PARA SER UTILIZADO PELO PROFESSOR? POR QUÊ? VOCÊ ACHA QUE HÁ INTERAÇÕES ENTRE O ENSINO DA LÍNGUA PORTUGUESA E DA MATEMÁTICA OU SÓ CONTRASTES?

Prof [1] – *Não, o aluno também tem que ter acesso ao livro. Só há contrastes.*
Prof [2] – *Não, pelo aluno também. Sim, a interpretação é importante.*
Prof [3] – *Não, o livro é para professor e aluno, existe sim tudo a ver. O aluno que não lê bem tem dificuldades ao resolver um problema.*
Prof.[4] – *Não, o aluno também deve criar o hábito de se interessar pelo livro. A Matemática e o Português devem andar juntos, pois como o aluno irá compreender um problema matemático sem dominar leitura.*
Prof [5] – *Não, pelo conjunto. Sim”.*

[263] GLAESER. Epistemologia dos números relativos. 1985, p. 35-41. In: Boletim GEPEM.

Prof [6] – *Não. Acho que o livro ajuda bastante no aprendizado do aluno. Matemática e Língua Portuguesa têm que caminhar juntos, até porque muitos "conteúdos" dependem da compreensão da leitura por parte dos alunos.*
Prof [7] – *Não, acho importante o aluno utilizar o livro também. Existem interações entre Língua Portuguesa e Matemática. O aluno lendo e interpretando, facilita o entendimento da matemática.*
Prof [8] – *Sim, nem só o professor, mas também o estudante.*
Prof [9] – *Sim, porque quando você passa o conteúdo no quadro você consegue resumi-lo, e você tem certeza que o aluno pelos menos copiou, tem mais chance de aprender. Eu acho que são necessárias as interações, pois o aluno tem que ler e interpretar tudo em matemática também.*
Prof [10] – *Não, porque através da leitura do aluno novas situações são criadas. Se não houver interação, não haverá aprendizagem em ambas as disciplinas.*

Do total, oito professores disseram que o livro didático deve ser utilizado pelo professor e pelo aluno, uma vez que a interpretação é importante. Nesta questão, o Prof [8] respondeu de forma contraditória. Quanto à interação entre ensino da Língua Portuguesa e da Matemática, sete professores opinaram a favor. É interessante observar que há uma preocupação em relação a este aspecto, porque a palavra leitura foi utilizada por quatro professores e interpretação por três, o que se constitui em um dado importante. A linguagem deficiente pode apresentar várias consequências tais como dificuldades em resolver problemas, por não saber ler com compreensão ou outras atividades por não *decifrar* o que se pede. Daí talvez a fala do Prof[9] quando, nas exposição de sues argumentos, utilizou o termo *pelo menos copiou,* em plena era do computador. Estas dificuldades extrapolam a área da matemática, porém se realmente quisermos auxiliar o aluno, precisamos enfrentar essa problemática.

O quarto aspecto tem as seguintes questões:

PERGUNTA 35: QUE TIPO DE LIVRO VOCÊ LÊ PARA AUXILIAR O ENSINO DE NÚMEROS NEGATIVOS? CITAR O NOME DO LIVRO E O AUTOR.

Prof [1] – *Nenhum.*
Prof [2] – *Paradidático.*
Prof [3] – *Na realidade não vejo dificuldade nesse sentido, mas trocamos experiências entre os colegas matemáticos.*
Prof [4] – *Não respondeu.*
Prof [5] – *A história da Matemática - Boyer.*
Prof [6] – *Leio apenas, digo, consulto apenas outros livros didáticos, que possam me auxiliar, mostrando outros tipos de abordagem sobre o assunto. A conquista da matemática.*
Prof [7] – *Já li alguns livros sobre didática da Matemática, mas nenhum especificamente sobre números negativos.*
Prof [8] – *Quase todos os livros da série.*

Prof [9] – *Não leio. Ainda não tive esta oportunidade.*
Prof [10] – *Só leio os livros didáticos, por falta de tempo e condições.*

Nesta questão, dois professores disseram que não lêem, apenas um citou o livro de História da Matemática de Boyer e quatro professores responderam que só lêem livros didáticos. A partir desses dados, constatamos que a preparação dos professores entrevistados, em relação ao ensino de números negativos, restringe-se ao livro didático. Os motivos, conforme os dados coletados, são os mais variados, tais como, desconhecimento da referência bibliográfica em relação ao tema, falta de condições, falta de tempo, falta de oportunidade, todos citados pelos professores entrevistados.

No terceiro bloco abordamos questões relacionadas às informações em relação ao conteúdo números negativos, contemplado com quinze questões distribuídas em quatro aspectos diferentes:

- Questões gerais
- Dificuldades em relação aos números negativos
- Tipo de representação
- Teoria

O primeiro aspecto apresentou três questões relativas às informações gerais a respeito do conhecimento de números negativos.

PERGUNTA 23: NA SUA OPINIÃO, O ALUNO ADQUIRE CONHECIMENTOS SOBRE NÚMEROS NEGATIVOS SÓ NA ESCOLA? CRIE UMA SITUAÇÃO-PROBLEMA EM QUE OCORRE O USO DE NÚMEROS NEGATIVOS.

Prof [1] – *No banco, quando ele deve alguma coisa.*
Prof [2] – *Não. É melhor dever (8) ou Ter (2)? É melhor Ter nada (0) ou dever (1).*
Prof.[3] – *Não, basta o professor lembrá-los através de perguntas, e todos já conheciam, apenas sistematizam na escola.*
Prof [4] – *Não. A tomada de temperatura, saldo bancário.*
Prof [5] – *Não, conta do banco da mãe, extrato.*
Prof [6] – *Não. No cotidiano, existem diversas maneiras de como utilizar os números negativos.*
Prof.[7] – *Não. Conta corrente em um banco, saldo. Compras em lojas. Lucro, prejuízos, empréstimos.*
Prof [8] – *Claro.*
Prof [9] – *Não. Quando a temperatura eleva, abaixa, nos problemas cotidianos, perdi, ganhei, paguei, troco, fiquei devendo.*
Prof [10] – *Não, no dia-a-dia. Por exemplo: você compra um tênis que custa R$40,00 e você só tem R$30,00 ou vice-versa.*

Nesta questão, oito responderam que não; isso demonstra que a maioria deles acredita que se podem aprender números negativos também fora da escola. Observamos ainda que os termos cotidiano e deve foram mencionados por três professores, temperatura, duas vezes, e conta bancária, quatro vezes, o que demonstra que estas palavras estão informalmente associadas à aprendizagem de números negativos. Em relação ao tema, Borba[264] em sua pesquisa cita alguns estudos de Santos (1990) e Davidson (1987) que proporcionaram evidências de situações cotidianas em que o conceito de número negativo pode ser facilmente entendido na ausência da representação formal. Santos (1990) mostra como agricultores analfabetos com "base na experiência do dia-a-dia sobre lucros e prejuízos desenvolvem a compreensão sobre números relativos, podendo resolver problemas nesse campo numérico, exceto nos casos mais complexos"[265]. Davidsom (1987) mostra como crianças de 4 e 5 anos "podem representar números negativos em contexto de ação no qual os números negativos e positivos são representados pelos movimentos, para frente e para trás, numa rua de papel onde as casas eram numeradas de $^{-}$**4** a $^{+}$**4**"[266].

PERGUNTA 32: COMO PROFESSOR DE MATEMÁTICA QUAL SUA MAIOR PREOCUPAÇÃO NO ENSINO DOS NÚMEROS INTEIROS, ESPECIFICAMENTE, DOS NÚMEROS NEGATIVOS?

Prof [1] – *O entendimento do que se trata um número negativo.*
Prof [2] – *Na multiplicação.*
Prof [3] – *Jamais o aluno deve decorar e hoje ainda acontece, isto é grave.*
Prof [4] – *A confusão que fazem entre as regras.*
Prof [5] – *Fazer com que o aluno entenda o verdadeiro sentido dos números negativos.*
Prof [6] – *Que os alunos compreendam a importância desses números, pois eles estão presentes em nossas vidas diariamente.*
Prof [7] – *A fixação da regra de sinais nas operações.*
Prof [8] – *Procurar uma aprendizagem fácil ao aluno.*
Prof [9] – *Eu estou sempre preocupado, pois acho que tudo que aprendemos bem, fica para sempre, e aquilo que apenas vemos, passamos, fica difícil utilizar sempre.*
Prof [10] – *Fazer com que o aluno sinta que os números negativos são tão importantes quanto os positivos.*

Pelas respostas apresentadas, percebe-se que as argumentações são as mais variadas e vão do entendimento do que seja um número negativo, regras de sinais, bem como destacam a importância dos números negativos. Isto demonstra que o professor tem uma preocupação com o aprendizado do aluno.

---

[264] BORBA. O ensino e a compreensão de números relativos. 1998, p.124. In: A compreensão de conceitos aritméticos ensino e pesquisa.
[265] SANTOS, citado por BORBA, 1998, p. 125
[266] DAVIDSON, citado por BORBA. 1998, p. 125.

PERGUNTA 33: COMO VOCÊ TRABALHA AS DIFERENÇAS INDIVIDUAIS (ALUNOS QUE APRENDEM RÁPIDO, MAIS LENTOS) AO "ENSINAR" NÚMEROS NEGATIVOS EM SUA SALA DE AULA?

Prof [1] – *Não sei explicar.*
Prof [2] – *Meu trabalho é no coletivo, não individual, para aqueles que demoram um pouco o entendimento, aulas de reforço.*
Prof [3] – *A monitoria ajuda. O trabalho em grupo ajuda e outros meios.*
Prof [4] – *Através de reforços, tento colocar o aluno mais lento ao nível dos mais rápidos.*
Prof [5] – *Fazendo com que os mais rápidos auxiliem os mais lentos e incentivando-os para que possam aprender.*
Prof [6] – *Proponho aulas de reforço, com explicação e exercícios diferenciados.*
Prof [7] – *Os alunos mais rápidos são utilizados como monitores dos mais lentos.*
Prof [8] – *Tem aluno com maior dificuldade, mas com entusiasmo e didática do mestre.*
Prof [9] – *Peço para os que têm mais facilidade ajudar os outros, procuro dar aula em horário diferente para os mais e muito lentos.*
Prof [10-]– *Os alunos mais lentos e muito lentos, trabalho com eles em períodos diferenciados, com exemplos práticos, para que quando estiverem em sala com os demais, possam acompanhar.*

As diferenças individuais são observadas pelos professores entrevistados, apresentando diferentes alternativas para trabalhar com este aspecto: quatro recorrem à aula de reforço; um utiliza a monitoria em sala e aula de reforço; três preferem a monitoria em que *os mais rápidos auxiliam os mais lentos e incentivando-os para que possam aprender (Prof.[7]),*modalidade adotada para auxiliar alunos com dificuldade de aprendizagem. As respostas apresentadas oscilam entre *Não sei explicar* (Prof.[1]), *Meu trabalho é no coletivo, não individual* (Prof [2]). Porém constatamos que todos, de uma forma ou outra, procuram ajudar o seu aluno a superar momentaneamente às dificuldades detectadas.

O segundo bloco de questões deste item contou com quatro perguntas em relação à dificuldade do processo ensino-aprendizagem de números negativos.

PERGUNTA 11: QUAIS AS DIFICULDADES NA ABORDAGEM DOS NÚMEROS NEGATIVOS EM SALA DE AULA?

Prof.	Regras de sinais	História dos n^{os} negativos	Represent. de n^{os} negativos	Utilização de n^{os} negativos	Linguagem	Propriedades
1	2	6	1	5	3	4
2	2	1	2	2	2	2
3	3	1	3	6	2	4
4	3	2	1	1	3	2
5	6	1	4	3	2	5
6	5	1	4	6	3	2
G	6	1	2	4	3	5
H	4	-	-	-	-	1
I	2	6	4	3	5	1
J	6	1	5	2	3	4

Atribuição dos valores:1 – facílimo; 2 - muito fácil; 3 – fácil; 4 – regular; 5 – difícil; 6 – muito difícil.

Quadro resumo do resultado em relação ao grau de dificuldade.

Grau de dificuldade	1	2	3	4	5	6	Total
Regras de sinais	-	3	2	1	1	3	10
História n^{os} negativos	6	1	-	-	-	2	9
Representação n^{os} negativos	2	2	1	3	1	-	9
Utilização n^{os} negativos	1	2	2	1	1	2	9
Linguagem	-	3	5	-	1	-	9
Propriedades	1	3	-	3	2	-	9

Pelo resultado obtido em relação a regras de sinais, representação e utilização de números negativos, cinco consideraram fácil. Um dado significativo é que a história dos números negativos e a linguagem foram assinaladas como fáceis e, nestes dois itens, podemos perceber a contradição na fala dos entrevistados, pois, quando indagamos sobre o tipo de leitura, apenas um professor lê livro de história da Matemática, e eles mesmos têm apontado dificuldades em relação à linguagem (veja questão 19).

O quadro demonstrativo indica que as respostas apresentadas estão concentradas em maior escala entre os números 1, 2, 3 e 4 e em menor escala para os números 5 e 6, o que é um forte indício de que os professores têm certa facilidade em lidar com os números negativos.

PERGUNTA 12: QUANTO AO GRAU DE DIFICULDADE DOS ALUNOS EM RELAÇÃO AO CÁLCULO COM NÚMEROS NEGATIVOS, NUMERE DE 1 A 5 – COMECE COM 1 PARA A MAIS FÁCIL.

1-MF (muito fácil); 2-F (fácil); 3- R (regular); 4-D (difícil); 5-MD (muito difícil)

Prof.	Adição	Subtração	Multiplicação	Divisão	Fração
1	4	5	1	2	3
2	4	4	4	4	4
3	3	4	1	2	5
4	1	2	4	4	4
5	4	3	2	1	5
6	1	2	3	4	4
7	1	2	3	4	2
8	1	-	-	-	4
9	2	1	4	3	5
10	3	4	2	1	4

Quadro resumo da pontuação

Pontuação	1	2	3	4	5	Total
Adição	4	1	2	3	-	10
Subtração	1	3	1	3	1	9
Multiplicação	2	2	2	3	-	9
Divisão	2	2	1	4		9
Fração	-	1	1	5	3	10

Os dados da pesquisa indicam que a adição de números negativos se apresenta relativamente fácil, uma vez que para muito fácil e fácil foram assinaladas cinco respostas e para difícil, três. Na subtração há um equilíbrio entre fácil e difícil, pois cada uma foi contemplada com três respostas. Já em relação à divisão e à fração os resultados apontam que elas são muito difíceis. A multiplicação, na opinião dos entrevistados, não é fácil nem difícil, pois apenas três dos entrevistados consideraram difícil, e seis ficaram entre regular e muito fácil.

PERGUNTA 12 B: DÊ O SEU PARECER SOBRE A QUE PONTUOU COMO SENDO A MAIS DIFÍCIL E MAIS FÁCIL, E DÊ UM EXEMPLO DE UM ERRO MAIS COMUM.

Prof [1] – *A multiplicação, o jogo dos sinais na regra os alunos pegam melhor. Ex:* $(^-2) \times (^-3) = {}^+6$. *A subtração é a mais difícil, por eles não entenderem que vale é o valor absoluto se é maior. Ex:* $^-6 + 4 = 2$.

Prof [2] – *Erro mais comum "$^{-}8$ - $^{-}4$= 4" (errado). Querem subtrair e não somar assim: $^{-}8$ - 4 = $^{-}12$ (correto).*

Prof.[3] – *Eles (os alunos) têm dificuldade na realização da divisão por não dominar a tabuada.*

Prof.[4] – *Os alunos têm dificuldade em assimilar a idéia do que se pode realizar, por exemplo 1 – 5. Têm facilidade em compreender a multiplicação. O erro mais comum é a confusão entre as regras de operações + , - e : , x.*

Prof.[5] – *A adição é mais fácil. Ex: $^{-}3$ – 5= $^{-}8$. Divisão, fração e multiplicação: ($^{-}2$) . ($^{-}2$) = 4; ($^{-}2$) : ($^{-}2$) = 1 e ($^{-}1/2$) . ($^{-}1/2$) = ¼.*

Prof.[6] – *Trabalhar frações é sempre difícil, pois eles ainda confundem bastante as propriedades e sentem dificuldade em calcular o MMC. E a multiplicação torna-se mais fácil por eles já terem aprendido a tabuada. (ainda confundem o ("jogo de sinais"). Erro mais comum: $^{-}8$ – 3 = $^{+}11$.*

Prof.[7] – *Os alunos possuem menos dificuldades na adição e subtração; na multiplicação e divisão as dificuldades são maiores, a tabuada e as noções básicas da divisão, deficiência de anos anteriores. 0 : (-568) = $^{-}568$ em vez de 0 ($^{-}7/5$): ($^{+}$ ½) = $^{+}5/14$ em vez de $^{-}14/5$.*

Prof [8] – *Divisão de fração.*

Prof [9] – *Todo número elevado a zero é igual a 1, porque não zero. Expoente negativo, nunca entende o inverso. Todo número elevado ao expoente par positivo, todo número elevado ao expoente ímpar, leva o sinal da base.*

Prof [10] – *Subtração e frações são mais difíceis, na subtração, na regra de sinais: $^{-}2$ – 5 = $^{-}7$, sempre esquece o sinal, e frações em qualquer nível, qualquer atividade que contém frações os alunos só descartam a questão mais fácil, a divisão, sabendo a tabuada, tá resolvido o problema.*

As respostas dos professores demonstram que as dificuldades no processo ensino-aprendizagem de números negativos estão situadas na subtração, seguidas pela multiplicação, divisão e fração. Também foi destacado o problema da defasagem de conteúdo em relação à tabuada e à divisão, o que tende a dificultar ainda mais a aprendizagem do novo conteúdo, ou seja, números negativos.

As opiniões apresentadas podem ser justificadas pelo estudo de Bell, Costello e Küchermann (1985) que em seus argumentos destacam a:

> [...] falta de um bom modelo familiar para a subtração, o que torna essa operação a mais difícil no campo dos relativos. A adição, por sua vez, é mais facilmente modelada e pode ser efetuada com o auxílio da compreensão intuitiva. Na multiplicação e na divisão, as regras são mais facilmente lembradas, embora não sejam claramente entendidas[267].

[267] BELL, COSTELLO e KÜCHERMANN, citado por BORBA. 1998, p. 128-129.

PERGUNTA 13: QUANTO AO GRAU DE DIFICULDADE EM RELAÇÃO ÀS PROPRIEDADES NUMERE DE 1 A 4, COMECE COM 1 PARA A MAIS FÁCIL

1- MF (1- ; 2=F; 3=D; 4=MD).

2-

Prof.	Comutativa	Associativa	Elem. Neutro	Cancelamento
1	1	4	2	3
2	4	4	3	2
3	1	4	2	3
4	3	4	1	2
5	1	1	1	2
6	2	3	1	4
7	1	2	3	4
8	1			4
9	1	2	4	3
10	3	4	1	2

Quadro resumo da pontuação

Pontuação	**1**	**2**	**3**	**4**	Total
Comutativa	6	1	2	1	10
Associativa	1	2	1	5	9
Elemento Neutro	4	2	2	1	9
Cancelamento	-	4	3	3	10

De acordo com os dados, podemos perceber que sete professores indicaram entre muito fácil e fácil a propriedade comutativa, apresentando menor grau de dificuldade. Em contrapartida, seis professores indicaram as propriedades associativas e cancelamento que foram pontuadas como difícil e muito difícil. Na seqüência, analisamos a questão referente a:

PERGUNTA 14: QUAL O ERRO MAIS FREQÜENTE ENTRE SEUS ALUNOS. POR QUÊ?

Prof 1 – *Juntar números positivos e negativos.*
Prof 2 – $^{-}2 \,.\, (4) = 8 \neq {}^{-}2 \,.\, (4) = {}^{-}$.
Prof 3 – *Não respondeu.*
Prof. 4 – *Aplicar a propriedade associativa, acredito que pela dificuldade de abstração.*
Prof 5 – *Não respondeu.*
Prof 6 – *Não respondeu.*
Prof 7 – $(^{-}6) + 0 = 0$. *Falta de atenção.*
Prof 8 – *Talvez por falta de base em ano anterior.*
Prof 9 – $(^{-}32) + 0 = {}^{-}32 \rightarrow$ *eles sempre acham que é 0.*
Prof 10 – *Associativa, não consegue associar número.*

Nesta questão, três professores não responderam, e as demais respostas dos professores assinalam como dificuldades às regras de sinais, a propriedade associativa e o cálculo que envolve o zero. Vale ressaltar que, para operar com o zero em qualquer situação, precisamos estar muito atentos pela sua própria ambigüidade. Na seqüência, analisamos questões referentes às diferentes formas de representação dos números negativos.

PERGUNTA 16: QUANTO À REPRESENTAÇÃO DE N^OS NEGATIVOS NUMERE DE UM A QUATRO OS ITENS ABAIXO, COMEÇANDO COM UM PARA A FORMA MAIS FÁCIL.

(1-muito fácil; 2-fácil; 3- difícil ; 4-muito difícil).

Quadro resumo das respostas

Prof.	Reta numérica	Rep.numérica	Gráfico	Tabela
1	1	2	3	4
2	1	1	1	1
3	1	2	3	4
4	1	2	4	3
5	2	1	3	4
6	2	1	4	3
7	2	1	4	3
8	-	-	1	-
9	1	2	4	3
10	2	1	4	3

Resumo do quadro de pontuação

Pontuação	1	2	3	4	Total
Rep. Numérica	5	4	-	-	9
Gráfico	1	2	3	4	10
Tabela	1	-	5	3	9
Reta numérica	5	4	-	-	9

Os dados constantes no quadro acima indicam que os professores consideram que a representação numérica e a reta numerada são de fácil compreensão, pois ambos obtiveram nove indicações entre muito fácil e fácil. Por outro lado, foi considerada de compreensão difícil a representação em gráficos e tabelas. Os professores apresentaram seu parecer sobre o assunto, cujos depoimentos apresentamos na sequência.

PERGUNTA 16 B: DÊ SEU PARECER SOBRE O QUE VOCÊ PONTUOU COMO SENDO A MAIS UTILIZADA. CITE DOIS PONTOS NEGATIVOS DA REPRESENTAÇÃO QUE VOCÊ MENOS UTILIZA.

Prof [1] – *A reta numérica, o zero dá uma separação para os negativos e positivos e fica mais fácil de analisar. (tabela não sei como associar).*
Prof [2] – *Não respondeu.*
Prof [3] – *Visualiza melhor. Acho um pouco técnico.*
Prof [4] – *É simples, pelo fato de poder representar com exemplos concretos.*
Prof [5] – *Porque faz com que os alunos não pensem.*
Prof[6] – *Talvez seja até por comodidade. E talvez até seja isso que dificulte o entendimento por parte dos alunos.*
Prof [7] – *A representação numérica é clara, o aluno consegue entender mais facilmente a reta numérica, também os alunos enxergam mais facilmente. Os gráficos, eles sentem dificuldades, talvez por falta de atividades com leitura de gráficos.*
Prof [8] – *Por não conhecer bem. Gráfico, sobretudo na 5ª série.*
Prof [9] – *Na reta numérica, pois para mim eu acho que a melhor maneira para eles entenderem é estar sempre mostrando e representando na reta a localização dos números positivos e negativos nas tabelas; quase não uso.*
Prof [10] – *Representação numérica é mais utilizada em exemplos de compra e venda, conta bancária. Clima, temperatura é representado graficamente, e classificação dos alunos do bimestre, quando sobe ou desce são representados graficamente.*

As respostas dos professores demonstram a dificuldade em lidar com gráficos e tabelas. O Prof.[1] afirmou que não sabe como associar a tabela, e o Prof.[9] não faz o uso de tabelas. Em relação ao gráfico, apontaram à falta de atividades e a falta de conhecimento.

PERGUNTA 28: VOCÊ ACHA QUE É IMPORTANTE O ALUNO LER DIFERENTES FORMAS DE REPRESENTAÇÃO PARA OS N^OS NEGATIVOS? POR QUÊ?

Prof [1] – *Sim, para mostrar outros caminhos.*
Prof [2] – *Sim, o aluno a ver melhor.*
Prof [3] – *Sim, a leitura sempre ajuda.*
Prof [4] – *Sim, para ter uma compreensão mais efetiva do assunto.*
Prof [5] – *Sim, para que possa ter uma visão ampla do conceito de número negativo.*
Prof [6] – *Sim. Por serem coisas distintas, talvez eles encontrem mais facilidade de compreensão em uma ou outra forma.*
Prof [7] – *Sim, facilita o entendimento.*
Prof [8] – *Sim, a leitura é necessária para o desenvolvimento e conhecimento do aluno.*
Prof[9] – *Porque só através de ler diferentes formas de representação ele poderá memoriza-las e entendê-las.*
Prof [10] – *Sim, porque assim ele vai entender e não decora, deparando-se com várias situações.*

Todos destacaram a importância da leitura de diferentes formas de representação de números negativos em gráficos e tabela, porém a argumentação apresentada é bastante frágil em relação à relevância da representação para a aprendizagem de números negativos.

PERGUNTA 15: QUANTO AO GRAU DE DIFICULDADE EM RELAÇÃO ÀS REGRAS DE SINAIS - ASSINALE 1 ALTERNATIVA.

Quadro resumo - grau de dificuldade em relação às regras de sinais.

Muito difícil	Difícil	Regular	Fácil	Muito fácil	Total
1	5	3	1	-	10

Os dados constantes no gráfico acima indicam que as regras de sinais são difíceis de serem assimiladas. Seguem abaixo as justificativas dos professores. "Kobayashi defendeu que as regras de sinais não devem ser apresentadas aos alunos pelo professor, mas descobertas de maneira inconsciente por parte das crianças, devendo o professor, apos a constatacão de seu uso, solicitar que as crianças as explicitem"[268]. Este pesquisador demonstra que contextos significativos podem ser eficientes no ensino formal, como por exemplo o jogo de cartas.

Prof 1 – *Dificuldade na subtração, e eles entenderam que prevalece é o sinal do número maior. Adoto sempre uma prestação como devedor, se ele paga é positivo.*
Prof 2 – *Sinais iguais, soma e conserva o sinal, sinais diferentes subtrai e conserva o sinal do maior número.*
Prof 3 – *Sempre começo a aula abordando o assunto com tranqüilidade e fazendo perguntas do dia-a-dia que eles já sabem, como: já ouviram falar em lucros? E dívidas? E usar a linguagem matemática seguida de uma linguagem mais informal.*rof 4 - *Eles assimilam mais facilmente a adição e subtração.*
Prof 5 – *Uma pessoa possui R$ 30,00, deve R$-25,00. Quanto ela fica? R$30,00 – R$25,00 = R$5,00.*
Prof 6 – *Eles confundem bastante **jogo** de sinais na adição e multiplicação.*
Prof 7 – *Eu tenho R$ 1.000,00 em um banco e retiro R$800,00, meu saldo fica positivo ou negativo? Em quanto?*
Prof 8 – *Por não conhecer bem a tabuada.*
Prof 9 – *Na adição tudo bem + e + = + e – e - = -. Quando chega a hora de + e – ou – e + complica. Na multiplicação, porque já aprenderam à adição, custam muito a diferenciá-las.*
Prof 10 – *Facilidade, quando esteja operando individualmente, ou seja só adição, ou só subtração. Dificuldades: diferenciar regras de sinais da adição e multiplicação.*

Nos depoimentos dos professores, podemos constatar as dificuldades comumente encontradas em relação às regras de sinais no quotidiano da sala de aula. Apesar de seu empenho em auxiliar na compreensão das regras de sinais, o aluno tem dificuldade em assimilar e aplicar tais regras. As alternativas apresentadas pelo professor

[268] KOBAYASHI, citado por BORBA. 1998, p. 130.

referem-se apenas às que encontram em livros didáticos. A fala do Prof [2] retrata exatamente o que consta nos livros de Matemática.

Quanto à temática, Kobayashi explana que, na impossibilidade do uso de modelos abstratos, porque o aluno ainda se encontra em sua fase inicial de desenvolvimento, deve se fazer o uso de contextos significativos que pertençam ao repertório do aluno tais como débitos/créditos. Sugere ainda,

> [...] como alternativa o uso de regras descontextualizadas, diferentes contextos como o de temperatura (acima e abaixo de zero), níveis de elevação da água em reservatórios e finanças (créditos e débitos) podem ser utilizados para a compreensão do que seja um numero relativo e para a aprendizagem das operações nesse campo numérico[269]

PERGUNTA 17: QUANTO À UTILIZAÇÃO DE N^{OS} NEGATIVOS NUMERE DE 1 A 7, COMEÇANDO COM 1 PARA A FORMA MAIS FÁCIL.

Prof.	P. Cotidiano	Ext. bancário	Temperatura	Reta numérica	Gráfico	Tabela	Jogos
1	5	1	2	3	4	7	6
2	1	1	1	2	1	1	1
3	1	1	1	2	3	4	2
4	3	4	2	1	6	7	5
5	2	3	5	4	3	2	1
6	3	1	2	5	7	6	4
7	1	2	6	5	7	4	3
8	1			4			
9	3	2	7	1	6	5	4
10	1	2	4	3	5	6	6

Atribuição dos valores: 1 – facílimo; 2 – muito fácil; 3 – fácil; 4 – regular; 5 – difícil; 6 – muito difícil; 7 – dificílimo.

Quadro resumo dos dados acima

Pontuação	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Total**
Prob.cotidiano	5	1	3	-	-	-	-	09
Ext bancário	4	3	1	1	1	-	-	10
Temperatura	2	3	1	1	1	1	1	10
R. numérica	2	2	2	2	2	-	-	10
Gráfico	1	-	2	1	1	2	2	09
Tabela	1	1	-	2	1	2	2	09
Jogos	2	1	1	2	1	2	-	09
Outros	1	-	-	2	1	-	3	09

[269] KOBAYASHI, citado por BORBA. 1998, p. 127.

Os resultados obtidos demonstram que as formas mais utilizadas pelos professores pertencem às modalidades-problemas do cotidiano, extrato bancário, temperatura, reta numérica e jogos, ao passo que os gráficos e tabelas são os menos utilizados. O fato, os livros didáticos dão maior ênfase aos itens mais usados pelos professores.

PERGUNTA 34: VOCÊ ACHA IMPORTANTE PARA O ENSINO DE N° NEGATIVOS LEVAR EM CONTA A ABORDAGEM HISTÓRICA? POR QUÊ?

Prof [1] – *Para o aluno entender de onde se iniciam os números negativos.*
Prof [2] – *Sim, o surgimento é importante.*
Prof [3] – *Mais ou menos, acredito que a realidade atual renda mais.*
Prof [4] – *Sim, para que saibam as origens e assim compreender melhor a matéria.*
Prof [5] – *Sim, porque a fundamentação do aluno.*
Prof [6] – *Sim, pois é importante para os alunos saberem a origem de tudo que se refere aos conteúdos estudados.*
Prof [7] –- *O aluno, sabendo a história ele poderá entender melhor o porquê.*
Prof [8] – *Sim, para melhor conhecimento.*
Prof [9] – *Porque tudo que conhecemos, a história, que falamos mais, fica gravado na nossa mente, qualquer fato nos leva a lembrar do conteúdo.*
Prof [10] – *Sim, porque conhecendo a história, torna-se mais fácil. Sempre falo com os alunos. Por exemplo, tempos atrás só se comprava à vista, então só se conhecia os números positivos; com a necessidade de comprar a prazo, apareceram os números negativos*”.

Todos os professores concordaram com a importância da história dos números negativos, porém apenas um lê livros de História da Matemática. Neste ponto, constatamos uma percepção equivocada por parte dos professores ao considerar como Historia da Matemática os fatos contidos no inicio de cada capitulo do livro didático.

Resumo das observações

Em nosso trabalho de pesquisa, aplicamos um questionário exploratório destinado a dez professores da rede pública estadual que, para efeito de estudo, foi dividido em três blocos: o primeiro bloco, relacionado a informações gerais que serviram para caracterizar a clientela entrevistada, revelou-nos que sete são graduados em Licenciatura Plena em Matemática e três em Licenciatura Curta em Ciências. Todos são professores com mais de cinco anos de serviço efetivo. Neste bloco, ainda tivemos duas questões que puderam revelar a ligação deles com a Matemática, nas quais apresentaram diferentes argumentos que justificam sua opção de ser professor de Matemática.

Um dado curioso é que um dos entrevistados explicitou que “a matemática é difícil, pela sua complexidade ao passar para o outro”, o que denota uma preocupação com a aprendizagem do aluno. Dois dos entrevistados, apesar de terem dito que a Matemática é fácil, apresentaram argumentos contraditórios: “a matemática é fácil para o meu entendimento, mas difícil para aqueles que não querem entender e não têm raciocínio lógico e fácil, porque é ou não é. Difícil, porque exige muito raciocínio”. A matemática tem sido considerada a disciplina *nobre* do currículo, em função de estar relacionada a aspectos do desenvolvimento intelectual, valorizados no ambiente escolar: raciocínio, lógica, precisão, objetividade. A supervalorização desta disciplina vem provocando uma visão preconceituosa, capaz de garantir o *status* de matéria nobre, que pode ser constatado com as afirmativas de que a matemática “é difícil, impossível de se aprender, bicho de sete cabeças etc.” Isto se deve ao fato de uma forte valorização social e escolar da matemática, que, como ciência que é, possui uma linguagem peculiar, com toda a simbologia específica, requerendo para o seu entendimento o domínio dos aspectos lingüísticos: leitura, compreensão, vocabulário etc., além do simbolismo próprio do seu campo de conhecimento.

O segundo bloco apresentou dados interessantes em relação à escolha e uso do livro didático. Os depoimentos revelaram que os livros são escolhidos sem critérios estabelecidos, pois as respostas foram as mais variadas, evidenciando pelos argumentos que há preocupação em relação a um critério comum referente ao conteúdo mais explicado, à seqüência do conteúdo, a conteúdos claros, a ter vários exercícios, a exercícios complementares, a dados atualizados. Pela variedade de opiniões, pudemos observar que não há uma reflexão mais aprofundada com o grupo a fim de estabelecer critérios para análise e escolha do livro didático, visto que 40% dos entrevistados disseram que “às vezes”, utilizam o livro didático, porque acreditam que os alunos não têm condições para utilizar o livro por falta de embasamento teórico ao mesmo tempo em que afirmam que o aluno deve ter acesso a ele.

Em relação aos procedimentos de ensino, notamos que o professor tem consciência de que só o livro adotado não é suficiente, porém não consegue buscar novas alternativas, porque a pesquisa que efetua fica restrita aos livros didáticos de outros autores. Em relação à pesquisa em livros de Filosofia da Matemática, nenhum professor fez referência, quatro disseram que utilizam livros de História da Matemática e apenas um consulta livros paradidáticos.

Na concepção desses professores, os números negativos apresentados nos livros didáticos adotados foram avaliados de bom a regular, e pelas falas percebemos que a insatisfação existente é pontual, variando de professor a professor, talvez gerada pela falta de critérios no momento da escolha do livro a ser adotado. Um bom livro para estes professores é aquele que apresenta muitos exercícios e com mais exemplos do cotidiano, com atividades variadas.

Outro dado interessante é a crença de que os alunos adquirem o conhecimento sobre números negativos fora da escola, e a justificativa apresentada relaciona-se a fatos práticos tais como: "quando ele deve no banco, tomada de temperatura, compras em lojas, lucros e prejuízos, perdi, ganhei, paguei, troco, fiquei devendo, extrato bancário etc.", aspectos mencionados pelos pesquisadores Santos (1990) e Kobayashi (1988), citados por Borba (1998).

As respostas apresentadas podem ser consideradas como equivocadas, porque, se os alunos já têm este conhecimento, como justificar a dificuldade na compreensão da aplicação das regras de sinais, propriedades e das operações com números negativos? Na opinião dos professores entrevistados, a reta numérica, e representação numérica (-2 ou +4) são fáceis de serem entendidas, porém a representação utilizando tabelas e gráficos é difícil. Em relação à reta numérica, Borba (1998) observa que "a realização das operações aritméticas por meio do modelo de reta numérica parece ser mais eficiente (apenas) para a adição, pois nem sempre fica claro com questões do tipo 5 – (-9)"[270]. Resnick explana que as "representações concretas, mesmo hipotéticas, para o simbolismo matemático formal, são importantes não apenas na introdução de idéias complexas, mas também na reflexão sobre as mesmas e como forma de reter na mente e tornar possíveis reconstruções que se façam necessárias"[271] e daí a importância do estruturalismo e do construtivismo.

Os números inteiros e frações foram considerados como difíceis por falta de base anterior. Um outro dado curioso, os professores, em sua maioria, consideram que a

[270] BORBA. O ensino e a compreensão de números relativos. 1998, p. 129.
[271] RESNICK, citado por BORBA, 1998, p. 125-126.

história dos números negativos é importante, porém apenas um deles lê livros a respeito da História da Matemática. Pelo estudo histórico podemos constatar as dificuldades observadas na História da Matemática quanto à aceitação dos números negativos, e este conhecimento deve levar o professor a refletir sobre as dificuldades que os alunos possam ter na sua compreensão, fazendo com que ele busque alternativas metodológicas em que os seus alunos estejam mentalmente ativos.

Diante dos dados obtidos, constatamos que a escolha do livro didático é efetuada de modo isolado, por isso não é utilizado por todos os professores. Observamos ainda que a preparação teórica e metodológica está baseada apenas em livros didáticos, adotados ou não, que estejam disponíveis a eles.

Em sua maioria, os professores acreditam que os alunos aprendem se exercitando (empirismo) e, por isso, reclamam à necessidade de mais exercícios, como se estes fossem suficientes para sua compreensão. Acreditam que a dificuldade em operacionalizar números negativos decorre da falta de seqüência ou organização dos textos didáticos.

Percebemos que o professor não se preocupa em compreender as estruturas dos números negativos. Eles são difíceis de aprender, porque trata de relações que não existem na realidade, por isso devem ser trabalhados no campo imaginário. Assim, indagamos: que significado tem para o aluno um número menor que zero? Como representar essas questões? Para ajudar a responder a estas indagações, realizamos um experimento utilizando jogos, pois eles mostram mais concretamente estas possibilidades e vão permitir que professor/aluno percebam a estrutura matemática envolvida no momento em que se está jogando, bem como refletir sobre as regras de sinais, operações e propriedades envolvidas, ajudando a construir processos de aprendizagem ligados aos números negativos.

7.4 SEGUNDO ESTUDO

Neste estudo apresentamos os resultados da aplicação do jogo 'Tabuleiro de Xadrez' realizado com professores da rede pública estadual. Procuramos observar de que forma o professor consegue perceber a estrutura do jogo e, por meio dela, detectar a estrutura dos números negativos (propriedades, conceitos, regras) envolvida na atividade proposta. Neste jogo estamos interessados em que o professor faça uma reflexão, observando os dados apresentados nas jogadas por ele efetuadas, estabelecendo uma conexão com o conteúdo teórico sobre os números negativos envolvidos na ação por ele praticada (ato de jogar).

7.4.1 Sujeitos da pesquisa

O estudo foi realizado com dez professores oriundos da 6ª série de cinco escolas públicas da rede estadual de ensino, da cidade de Rondonópolis – Mato Grosso, no mês de fevereiro/2004. Por razões metodológicas, os sujeitos da pesquisa foram divididos em equipes de dois professores, perfazendo um total de cinco grupos.

Para realizar o experimento, distribuímos o tabuleiro de xadrez para a resolução dos problemas propostos, e cada professor utilizou o seu respectivo material. Após sua concretização, houve a discussão da resolução encontrada e, a seguir, efetuaram-se os respectivos registros.

A coleta de dados foi realizada durante o horário da hora-atividade, em duas sessões de aproximadamente três horas para cada grupo.

7.4.2 Organização do estudo

No primeiro encontro, explicamos os procedimentos do funcionamento do jogo e orientamos os professores para executarem inicialmente a atividade de forma individual, cada um com seu instrumento. Na seqüência, a dupla discutiu o processo da resolução, destacando o que cada um conseguiu extrair de conceitos matemáticos naquela resolução, efetuando os registros correspondentes. Para este estudo foram propostas 12 atividades (adição, subtração e multiplicação).

Com estas atividades, pretendemos mostrar que é possível estudar e aprender números negativos por meio de jogos, porém para isso, é preciso criar um mundo artificial em que sejam propiciadas atividades que possibilitem ao jogador perceber a estrutura do jogo, bem como aprender a lidar com situações que forem surgindo, para aplicar as regras do jogo, jogando. Assim como o jogo tem uma estrutura, os números negativos também apresentam estruturas que devem ser percebidas pelos alunos, para que possam aprender a lidar com os diferentes obstáculos no decorrer do processo de construção do conceito de números negativos, cálculo, representações etc., aplicando as regras próprias na resolução do problema. O próprio cálculo é uma forma de jogo, pois apresenta regras a serem cumpridas, para poder chegar a uma resolução.

7.4.3 Análise de dados

A análise que efetuamos, em relação ao do jogo do Tabuleiro de Xadrez tem como base as estruturas matemáticas que estão implícitas no ato de jogar. Piaget em seus escritos afirma que a noção de estrutura é a mais usada para designar as formas de organização de raciocínios. Na matemática a estrutura de grupo é de fundamental importância e, para Piaget, grupo é uma estrutura abstrata composta de um conjunto de elementos e de uma operação que incidem sobre estes elementos, de tal modo que as propriedades de composição, associatividade, inversa e reversibilidade se mantêm válidas.

Piaget explicita que há dois *grupos aritméticos*. O primeiro, o *grupo aditivo* de números inteiros, em que estão presentes as propriedades habituais de *composição* 1+1= 2, 2+1=3, 3+1=4 etc.; de *associatividade*, (1+1)+1= 1+(1+1); os *inversos*, -1,-2,-3 etc; e a *identidade*, 0. Neste grupo, como nos demais, estão presentes as iterações do tipo 1+1=2, 1+2=3, 1+3=4 etc., em vez de identidades especiais. O segundo, o *grupo multiplicativo* de números positivos, com suas propriedades grupais correspondentes: a *composiçã*, 1x1=1, 1x2=2, 1x3=3 etc.; a *associatividade* (1x2)x3= 1x(2x3); *os inversos* ÷1; ÷2, ÷3 etc.; e a *identidade* 1. Os sistemas aritméticos possuem composições mais precisas, e Piaget as chama de numéricas. Assim na composição 1+2=3, sabemos não só que o total 3 é maior do que os componentes 1 e 2, mas exatamente o quanto ele é maior. Do mesmo modo, os próprios componentes podem ser comparados de maneira precisa, 2 é exatamente o dobro de 1. Estas comparações exatas só são possíveis graças ao fato de que os elementos de um grupo se repetem. Podemos tomar um dos elementos como unidade, por exemplo o número 1, e verificar que 3 é o triplo de 1, repetindo a unidade três vezes: 1+1+1= 3.

Tendo como pressuposto a noção de estrutura no sentido piagetiano, procuramos analisar a atividade do jogo do tabuleiro de xadrez utilizando esta ferramenta, em que procuramos identificar se os jogadores conseguiram perceber as estruturas de composição, associatividade, inversos e reversibilidade (identidade). De posse dos protocolos e da categoria de análise, procuramos verificar se realmente o jogo do ‘Tabuleiro de Xadrez’ pode propiciar condições para o entendimento do conteúdo números negativos de forma compreensível, sem necessidade de memorizar regras e fatos.

7.4.4 Descrição das atividades

O nosso experimento contou com doze problemas, sendo quatro problemas de adição e subtração, dois de multiplicação e divisão, e, as atividades desenvolvidas apresentaram os seguintes resultados:

Para resolver a atividade número um, podemos utilizar o modelo apresentado na Figura 24 item 5.5.1.5, página 153.

Atividade n° 1) 26 + 38
26 + 38 (16, 8, 2) + (32, 4, 2) – as trocas (no 2, 4, 8, 16, 32 e chegar no 64); Grupo 1: decomposição e propriedade associativa; Grupo 2: associação e decomposição; Grupo 3: não fez nenhuma observação; Grupo 4: decomposição e propriedade associativa; Grupo 5: associativa.

Durante o jogo houve dificuldade em entender a questão das trocas e da necessidade de decompor os números conforme a numeração apresentada no tabuleiro. A maioria procurava resolver com lápis e papel, para depois efetuar no tabuleiro. Fizeram várias tentativas para entender o mecanismo de funcionamento da base dois envolvida no tabuleiro de xadrez. Um aspecto interessante observado foi à percepção de que é preciso recorrer ao uso do cálculo mental.

Para resolver a atividade número dois, podemos utilizar o modelo apresentado na Figura 25 item 5.5.1.5, página 154.

Atividade n° 2) ⁻23 + (⁻12)
⁻23 + ⁻12
(⁻16, ⁻4, ⁻2 ⁻1) + (⁻8, ⁻4)
Grupo 1: Decomposição, associativa, regras de sinal, simétrico;
Grupo 2: Associativa, decomposição;
Grupo 3:Associativa, decomposição;
Grupo 4: Associativa, decomposição;
Grupo 5: Associativa.

Nesta resolução os professores perceberam que, no tabuleiro, operaram no quadro negativo e, mesmo sem a necessidade de saber a regra de sinal, puderam constatar que números de sinais iguais devem ser somados na atividade que executaram. O ato de jogar, o registro de sua representação e a reflexão sobre sua ação propicia à *descoberta* de uma regra para operar com números negativos.

Para resolver a atividade número três, podemos utilizar o modelo apresentado na Figura 26 item 5.5.1.5, página 156.

Atividade n° 3) 29 + (⁻7)
29 + ⁻7
(16, 8, 4, 1) + (⁻4, ⁻2, ⁻1)
Grupo 1: Decomposição, associativa, regra de sinal, elemento simétrico;
Grupo 2: Elemento simétrico, decomposição, associação;
Grupo 3: Associativa, regra de sinal;
Grupo 4: Associativa, decomposição;
Grupo 5: Não citou.

Nesta resolução, o grupo 3 apresentou os seguintes argumentos: “Utilizamos à propriedade associativa, após as regras de sinais e eliminação dos números iguais sendo negativos e positivos. Para atingir a soma utilizei a adição de parcelas .

O grupo 5 relatou o seguinte: “Nesta jogada, pela propriedade elemento simétrico fica simples mostrar ao aluno que 1 anula ⁻1, o 4 anula ⁻4, então irão sobrar as peças (16 + 8) ⁻2= 24 ⁻2. Também posso pegar 8 pedrinhas e substituir na casa do 8 (onde tem um botão), então posso tirar 2 botões (referente à casa do $^{-}2$) e distribuo nas casas 4 e 2 então é só somar e obter o resultado (16 + 4 + 2)=22".

Por estes argumentos, podemos constatar que o professor já começa a verificar que o jogo do tabuleiro pode ajudar a descobrir as regras de sinais sem necessidade de memorizar, primeiro entender e depois memorizar.

Para resolver a atividade número quatro, podemos utilizar o modelo apresentado na Figura 27, item 5.5.1.5, página 157.

Atividade n° 4) 25 + ($^{-}$46)
25 + ($^{-}$46) (16, 8, 1) + ($^{-}$32, $^{-}$8, $^{-}$4, $^{-}$2) Grupo1: Dcomposição, propriedade associativa, elemento simétrico; Grupo dois: Associação, elemento simétrico, decomposição; Grupo 3: Propriedade associativa decomposição, elemento simétrico; Grupo 4: Decomposição, propriedade do elemento simétrico; Grupo 5: Associação.

Nesta resolução, percebemos pelos registros que houve uma preocupação em resolver primeiro com lápis e papel, para depois tentar no tabuleiro. Algumas respostas foram interessantes, tais como:

- Grupo 3, que diz: "Utilizamos as propriedades associativa, após eliminamos os números positivos com negativos iguais e a decomposição, sem contudo chegar a citar a propriedade do elemento simétrico".
- O Grupo 4 apresentou o seguinte registro: "Esta operação é igual à de cima, só que nesta o número negativo é maior que o positivo, mesmo assim conservando o sinal maior". Nesse caso, percebemos que se deve operar no quadro negativo e positivo, por isso deve-se *tirar do maior o meno*r sem contudo, observar a possibilidade de se aplicar a propriedade do elemento simétrico (zerar-queimar).

- O Grupo G 5 apresentou o seguinte resultado: “Podemos somar números negativos e subtrair de um positivo”. Esse grupo ficou preso apenas ao aspecto do cálculo.

As respostas acima mostram que é difícil mudar a maneira de efetuar uma atividade experimental, quando ainda temos medo de errar. Mas no jogo é preciso fazer tentativas e analisar os passos que estamos realizando.

Para resolver a atividade número cinco, podemos utilizar o modelo apresentado na Figura 28 do item 5.5.1.5, página 158.

Atividade n° 5) 35 – 23
35 - 23
(32, 2, 1) – (16, 4, 2, 1)
Grupo 1: Decomposição, associativa , elemento simétrico;
Grupo 2: Associação, elemento simétrico, decomposição;
Grupo 3: Decomposição, elemento simétrico, associativa;
Grupo 4: Associativa, decomposição;
Grupo 5: Decomposição, associativa.

Nesta resolução, apresentamos o seguinte comentário:

Grupo 3 “Utilizamos no tabuleiro a decomposição numérica e eliminação das quantidades iguais e a associativa”. Nesse caso houve a percepção do uso da propriedade do elemento simétrico, sem, contudo, chegar a uma sistematização. Os demais grupos realizaram a atividade sem muita discussão, preocupados apenas em manipular os marcadores no tabuleiro.

Para resolver a atividade número seis, podemos utilizar o modelo apresentado na Figura 29 do item 5.5.1.5, página 159.

Atividade n° 6) 25 – 39

25 - 39

(16, 8, 1) – (32, 4, 2, 1)

Grupo 1: Propriedade associativa, decomposição, elemento simétrico, regra de sinal;

Grupo 2: Associação, elemento simétrico, decomposição;

Grupo 3: Associativa, decomposição;

Grupo 4: Decomposição, propriedade elemento simétrico;

Grupo 5: Decomposição, associativa.

Todos os grupos agora conseguiram detectar que este jogo utiliza a decomposição, de acordo com os números constantes na coluna à direita do tabuleiro, e tanto pode operar no quadro positivo quanto no negativo.

Comentário apresentado pelo Grupo 3 “No tabuleiro fica mais fácil a visualização dos procedimentos adotados. O aluno passa a compreender a multiplicação do sinal **+ x – ”.**

Para resolver a atividade número sete, podemos utilizar o modelo apresentado na Figura 30, o item 5.5.1.5, página 160.

Atividade n° 7) 22 – ($^-$15)

22 - $^-$15

(16, 4, 2) - ($^-$8, $^-$4, $^-$2, $^-$1)

Grupo1: Decomposição, associativa, regra de sinal, elemento simétrico;

Grupo 2: Associação, regras de sinais, elemento simétrico, decomposição;

Grupo 3: Decomposição;

Grupo 4: Decomposição, regras de sinais;

Grupo 5: Decomposição; associativa, elemento simétrico.

Nesta resolução, a preocupação foi com o uso da regra de sinal. Assim, “No tabuleiro o aluno tem a oportunidade de trabalhar a manipulação e isso auxilia o seu pensamento lógico-matemático, pois,na resolução da conta, ele poderá ser levado a reproduzir procedimentos mecânicos e as regras da subtração".

Para resolver a atividade número oito, podemos utilizar o modelo apresentado na Figura 31, do item 5.5.1.5, página 161.

Atividade n° 8) $^{-}19 - (^{-}31)$

$^{-}19 \quad - \quad {}^{-}31$

$(^{-}16,\ ^{-}2,\ ^{-}1)\ -\ (^{-}16,\ ^{-}8,\ ^{-}4,\ ^{-}2,\ ^{-}1)$

Grupo1: Decomposição, regra de sinal, propriedade associativa, elemento simétrico;

Grupo 2: Associação, elemento simétrico, regras de sinais, decomposição;

Grupo 3 : Decomposição, associativa, elemento simétrico;

Grupo 4: Associativa, elemento simétrico, decomposição;

Grupo 5: Decomposição, associativa, elemento simétrico.

Um dado interessante foi constatado nessa resolução. Seja exemplo:

Grupos 1 e 2: aplicaram a regra de sinal obtendo –19 + 31; depois fizeram a decomposição (-16 –2 –1) + 16 +8 +4 + 2 + 1; a seguir, queimaram os seguintes números: -16 com 16 = 0 -2 e 2= 0 -1 e 1 = 0, obtendo 8 e 4 = 12. Porém não ocorreu ainda a compreensão da aplicação da propriedade do elemento simétrico para efetuar esta ação, pois primeiro aplicaram a regra de sinal.

Para resolver a atividade número nove, podemos utilizar o modelo apresentado na Figura 32, do item 5.5.1.5, página 162.

Atividade n° 9) 2 x 8

2 x 8

Grupo1: Decomposição, associatividade, distributiva, regras de sinais;

Grupo 2: Decomposição, associação;

Grupo 3: Decomposição, distributiva;

Grupo 4: Propriedade distributiva, elemento neutro, decomposição, jogo de sinais;

Grupo 5: Decomposição, distributiva.

Para esta resolução, utilizaram o recurso da adição de parcelas iguais, observando que os marcadores devem ser colocados na diagonal.

Para resolver a atividade número dez, podemos utilizar o modelo apresentado na Figura 33, do item 5.5.1.5, página 162.

Atividade n° 10) 6 x 8

6 x 8

(4 2) x 8

Grupo1: Decomposição, associatividade, distributiva, regras de sinais;

Grupo 2: Decomposição, associação;

Grupo3: Decomposição, distributiva;

Grupo 4: Propriedade distributiva, elemento neutro, decomposição, jogo de sinais;

Grupo 5: Decomposição distributiva.

Nesta resolução, fica evidente o uso da propriedade distributiva em relação à adição. Uma resolução interessante foi apresentada pelo Grupo 1: " *6 x 8* = (4 + 2) x 8 4 e 2 ficam na linha intermediária e o 8 na coluna do dois e quatro. Movendo o oito na diagonal para a direita = 16. Movendo o outro oito na diagonal para a direita = 32 somando os dois = 48".

Nesse caso houve a aplicação da propriedade distributiva, mas primeiro foi preciso recorrer ao lápis e papel e depois executar esta ação no tabuleiro.

Para resolver a atividade número onze podemos utilizar o modelo apresentado na Figura 36 do item 5.5.1.5, página 165.

Atividade n° 11) 8 : 2

8 : 2

Grupo1: Dcomposição, associativa, neutro, simétrico;

Grupo 2: Associação, decomposição;

Grupo 3: Decomposição, distributiva, elemento neutro;

Grupo 4: Decomposição, distributiva;

Grupo 5: Decomposição, associativa.

Depois que resolveram as atividades propostas para a multiplicação, resolveram a divisão procurando obedecer aos mesmos critérios, mas não apresentaram nenhum comentário significativo.

Para resolver a atividade número doze podemos utilizar o modelo apresentado na Figura 37, do item 5.5.1.5, página 166.

Atividade n° 12) 35 : 7
35 : 7
Grupo1: Decomposição, associativa, simétrico, neutro;
Grupo 2: Associação, decomposição;
Grupo 3: Decomposição, distributiva, elemento neutro;
Grupo 4: Decomposição, distributiva;
Grupo 5: Decomposição, associativa.

Nesta resolução, não houve nenhum comentário adicional, fizeram o registro com lápis e papel para depois transferir para o tabuleiro.

Alguns depoimentos em relação ao jogo do tabuleiro de xadrez:

Após a realização dos dois encontros os participantes fizeram a seguinte apreciação:

"O tabuleiro não é muito utilizado em nossa prática diária, embora seja um recurso de relevância no ensino das operações, pois usa a visualização de cada etapa percorrida. Ocasiona a reflexão de quais recursos matemáticos será o mais convenientes para cada determinada situação. Em virtude da não-divulgação do material, tornou-se um pouco complicada a sua utilização dentro da multiplicação".

"Com a prática, o raciocínio do aluno ficará mais rápido. As propriedades ficam mais evidentes, mostrando todo o significado delas. E os sinais, mais fácil de serem observados. Estudamos com mais interesse as 4 operações".

"No primeiro momento, o novo é cheio de desafios, e isto faz-nos ter certa resistência. Mas quando conseguimos entender o tabuleiro, o desenho (fichas negativo/positivo), o uso de botões e de todas as regras na resolução, podemos dizer que com este método podemos ensinar até nossos alunos em sala de aula, já que o concreto para a criança nas séries iniciais é fundamental e muito estimulante. Este método é um desafio prazeroso no qual aprendemos as quatro operações de forma significativa".

"O jogo é muito significativo para a aprendizagem da matemática, pois leva o aluno a compreender a construção do número, bem como os conceitos relacionados às propriedades".

"Foram aplicadas as propriedades da decomposição dos números e a propriedade do elemento simétrico, que na álgebra não ficariam tão evidentes. Trabalhar matemática no concreto ajuda o aluno a construir o conhecimento, e daí ocorre de fato a aprendizagem".

"Observamos que essa atividade é muito útil para o desenvolvimento do aluno".

Pelos depoimentos, pode-se perceber que operar no tabuleiro atende a duas questões básicas: a visualização e a reflexão. Primeiro, percebemos concretamente a operação efetuada e, em segundo lugar, poderemos daí extrair as regras que estão implícitas no jogo do tabuleiro. Este se constitui em uma ferramenta para a reflexão, que possibilita compreender as propriedades e regras de sinais necessárias para operar com números negativos. Falando em termos piagetianos, é preciso buscar as estruturas matemáticas, pois elas permitem a organização do nosso pensamento.

Considerações finais

Após aplicarmos e efetuarmos uma análise preliminar do experimento, pudemos constatar:

- Todos os participantes ficaram interessados na resolução das atividades.
- Todos procuravam entender como executar o jogo.

- Havia uma preocupação intensa em resolver com lápis e papel para depois passar para o tabuleiro.
- Após a resolução, o grupo tentava relacionar a resolução algébrica, conferindo o que havia realizado no jogo.
- Houve uma preocupação em descobrir que estruturas matemáticas estavam envolvidas na atividade executada.
- A decomposição foi detectada por todos os participantes, mas ficavam intrigados ao perceber que também no tabuleiro utilizavam esse recurso, só que o agrupamento de um deles é de 2 em 2.
- A propriedade associativa também foi facilmente percebida.
- A propriedade do elemento simétrico na prática foi percebida, conheciam a regra, mas acharam difícil entender a sua aplicação (como justificar).
- Em relação à propriedade distributiva, conseguiam falar teoricamente, no entanto, a sua aplicação ficou a desejar.
- Inicialmente tiveram receio de errar os problemas propostos e, só depois que conseguiam enxergar no lápis e papel, sentiram-se seguros em começar a experimentar no tabuleiro.

Após o estudo que realizamos com os dados teóricos sobre o construtivismo e estruturalismo construtivo de Piaget, fazemos as nossas observações.

Na prática pedagógica, todos querem ser professores construtivistas. Nesse sentido, procuramos atividades que envolvem a ação do aluno; no entanto, por mais que estejamos envolvidos, constatamos que o aluno até certo nível assimila e executa sua tarefa com sucesso.

Neste ponto começam os questionamentos e críticas em relação à metodologia utilizada. Porém não paramos para refletir e procurarmos a causa dessa defasagem.

Para o desenvolvimento de atividades dentro de uma postura construtivista, não é suficiente trabalhar com materiais manipulativos ou jogos, por meio dos quais confundimos as características concretas desses materiais, como peso, cor etc., com as estruturas essenciais, as regras, por exemplo, que determinam o valor de uma peça dentro de um jogo. Muitos professores não conseguem distinguir os níveis concretos (peças, o tabuleiro) dos níveis das regras (propriedades, conceitos etc.) que constituem as estruturas.

Assim sendo, não é suficiente utilizar materiais concretos, é preciso refletir sobre as estruturas implícitas relacionadas às regras. Por exemplo, no jogo Tabuleiro de Xadrez, de acordo com determinada posição, o marcador deverá buscar as estruturas que possam ajudar a resolver aquela situação. Isso demonstra que não é suficiente ser um professor construtivista, é preciso buscar um estruturalismo construtivista.

Após o este estudo constatamos que há uma motivação muito forte pela utilização de jogos matemáticos, recorrendo-se a diferentes abordagens, entretanto ficou evidente que os diferentes tipos de jogos já experimentados podem ser potencializados enquanto recurso didático se puder ser associados ao estruturalismo construtivo, que permite distinguir os níveis concretos dos níveis das regras (propriedades, conceitos etc.). Apoiando-se nesses níveis por meio das abstrações (empírica e reflexiva) pode reorganizar os conceitos que já domina e construir novos conceitos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

8.1 Introdução

A efetivação desta pesquisa teve como objetivo desenvolver um estudo a respeito da construção do conhecimento e das estruturas necessárias que possam auxiliar no processo ensino-aprendizagem de números negativos e, com tal propósito, utilizamos como ferramenta o jogo do 'Tabuleiro de Xadrez'.

Para alcançar o objetivo proposto, nosso estudo percorreu várias etapas. Iniciamos pela problematização e elaboração da questão de pesquisa (apresentação). A seguir fizemos um breve estudo sobre a vida e obra de Piaget (Capítulo 1). Na seqüência buscamos o apoio teórico e algumas considerações com diferentes olhares do processo de construção do conhecimento nos enfoques racionalista, empirista e interacionista (Capítulo 2) apresentando ainda a posição de Piaget relacionada à construção do conhecimento. Em relação a este assunto, sua tese central teve por objetivo mostrar como se desenvolve o conhecimento. O termo conhecer para ele tinha o sentido de organizar, estruturar e explicar, a partir das experiências (Capítulo 3). Piaget, em sua teoria, destacou os modelos formais (lógica operatória) que permitem explicar o funcionamento das estruturas mentais específicas para o ato de conhecer. Assim, a estrutura na obra piagetina pode designar uma unidade orgânica e uma unidade matemática de natureza abstrata caracterizada por sua universalidade e necessidade, tema que abordamos no Capítulo 4. Em relação à maneira como a estrutura matemática pode ser evidenciada quando exibida em forma de jogos, apresentamos algumas idéias baseadas em Piaget, e também na esfera da Educação Matemática (Capítulo 5). Assim, para evidenciar como o jogo implica na representação, fizemos um breve estudo sobre a função simbólica em Piaget e em Peirce (Capítulo 6).

Sustentada nessas idéias teóricas, planejamos o desenvolvimento da pesquisa de campo, que compreendeu a aplicação de um instrumento diagnóstico (entrevistas) e um estudo intervencionista (jogo do Tabuleiro de Xadrez) (Capítulo 7).

No presente capítulo, pretendemos fazer as discussões finais do nosso estudo e apresentar algumas considerações possíveis a partir da análise dos resultados das entrevistas e realização do jogo (Capítulo 8).

O capítulo está dividido em três partes. A primeira parte está voltada para uma síntese dos resultados principais e, a seguir, responderemos às questões de pesquisa, expostas no início do trabalho. Sempre que possível, vamos relacionar essas considerações com as idéias teóricas aqui relatadas. Por fim, tecemos algumas sugestões para futuras pesquisas sobre o tema.

8.2 Síntese dos principais resultados

Nesta seção apresentamos uma síntese dos principais resultados discutidos no capítulo da análise relacionados com o 1º e o 2º estudos.

1º estudo

Com as entrevistas que realizamos com 10 professores, pudemos constatar que a Matemática foi considerada por 9 professores entrevistados como fácil. O professor que considerou como difícil apresentou o seguinte argumento: “É difícil pela sua complexidade ao passar para o outro*”*. Esta resposta parece demonstrar uma preocupação com o processo ensino-aprendizagem. Os Prof.[2], Prof.[7] e o Prof.[10] afirmaram ser fácil para eles, porém difícil, porque exige raciocínio lógico. Estas respostas demonstram que existem professores que fazem a ligação da matemática com o raciocínio. O raciocínio lógico-matemático foi o foco de atenção de Piaget na construção do conhecimento.

Em relação à escolha e uso do livro didático, os critérios mais comuns que ficaram evidentes nos argumentos utilizados foi a preocupação com o conteúdo - mais explicado, seqüência do conteúdo, conteúdos claros, - e com exercício -, vários exercícios, exercícios complementares e a exercícios atualizados.

Os professores entrevistados têm a consciência de que apenas o livro didático adotado não é suficiente para o ensino e aprendizagem de números negativos, porém não conseguem avançar em seu trabalho, porque têm como fonte de pesquisa somente outros livros didáticos.

Em relação aos números inteiros (positivos e negativos), estes foram considerados difíceis para serem assimilado por falta de base anterior.

2º estudo

Neste estudo aplicamos o jogo do ‘Tabuleiro de Xadrez’ e inicialmente os professores, diante de um novo desafio, sentiram-se inibidos em manipular os contadores e também em efetuar a representação dos números no tabuleiro.

Após a realização de registro de vários números, tiveram a percepção de que o cálculo mental é importante para operar com o tabuleiro, uma vez que a obtenção do resultado depende da soma dos números obtidos na coluna à direita deste (1,2,4,8,16,32 etc.).

Na atividade $(^{-}23) + (^{-}12)$, após a representação desta adição no tabuleiro, os professores comentaram que mesmo sem enunciar a regra de sinal, pode-se perceber neste caso que dois números de sinais iguais podem ser somados e que o sinal (positivo ou negativo) do número depende do quadro em que se encontra representado; portanto neste caso, obtivemos (-25).

Na atividade $29 + (^{-}7)$, após o registro do número 29 (16, 8, 4, 1) no quadro positivo e o $^{-}7$ ($^{-}4$, $^{-}2$, $^{-}1$) no quadro negativo, a resolução permitiu evidenciar o uso da propriedade do elemento simétrico de forma concreta e possibilitou a compreensão e a explicação da regra desta propriedade.

Na atividade $22 – (^{-}15)$, a preocupação inicial foi em utilizar a regra de sinal, porém como conciliar o registro e o que foi verbalizado?

Na atividade $^{-}19 – (^{-}31)$, apesar do registro dos números no tabuleiro, os grupos ainda continuam preocupados com a regra de sinal, porém após a resolução conseguiram perceber, que ao operar no tabuleiro, pode-se ver concretamente que é possível efetuar 3 –5 com o uso do recurso da aplicação concreta da propriedade do elemento simétrico.

8.3 Respostas às questões de pesquisa

***Como poderemos desenvolver as estruturas dos números inteiros, sejam eles positivos, sejam negativos, se o empirismo continua sendo um dos maiores obstáculos em seu processo ensino-aprendizagem*?**

Formulamos três questões específicas no início deste trabalho que juntas permitem responder à pergunta acima.

a) Por que o empirismo pode ser considerado como obstáculo para a aprendizagem dos números inteiros negativos?

A partir da análise dos resultados obtidos, pudemos identificar alguns fatores que justificam o empirismo como obstáculo para a aprendizagem de números inteiros negativos.

Piaget citou as dificuldades levantadas em relação à construção do conhecimento da tese empirista defendida por Locke. O pesquisador genebriano afirmou que a experiência externa não proporciona nenhum elemento, mostrando que as leis matemáticas são necessárias e imutáveis. Assim, a partir de suas observações sobre o desenvolvimento cognitivo da criança, constatou que o conhecimento não se origina dos sentidos, como advogou Locke, pois as leis lógicas e matemáticas são construídas pela atividade do sujeito.

Neste sentido Piaget explicitou que a ligação fundamental que constitui o todo o conhecimento não é uma simples associação entre objetos, uma vez que esta noção negligencia a parte da atividade devida ao sujeito. Defendeu ainda que, nem no nível da atividade perceptiva nem no da inteligência sensório-motora pode se encontrar em presença de constatações puras, porém, sempre de inferência por parte do sujeito.

Neste sentido, Piaget discordou com as formas em que os processos de aprendizagem são invocados pelos empiristas behavioristas que vê no conhecimento, uma cópia funcional, ou um reflexo da realidade sem o interesse pelos mecanismos inerentes à construção intelectual.

Para ilustrar este fato, Piaget expôs que a construção de um triângulo não é simplesmente uma cópia da realidade. Para ele o ato de conhecer não pode ser apenas o simples resultado de um conjunto de registro perceptivo, como afirmam os empiristas. De acordo com estes últimos, a função primordial da inteligência consiste no registro, correção etc., sistemáticos de um conjunto de informações, por isso "quanto mais fiéis forem as cópias críticas, mais consistentes serão os sistemas"[272]

Piaget não concordou com esta interpretação passiva do ato do conhecimento, uma vez que, para conhecer o objeto, o sujeito deve agir sobre ele. Defendeu ainda que o limite entre o sujeito e o objeto não deve ser predeterminado e nem pode ser estável. Assim o sujeito precisa de informação objetiva (ação), porém não pode prescindir de componentes subjetivos. Neste sentido, o conhecimento em sua origem não vem só dos objetos e nem só do sujeito, porém das interações entre o sujeito e o objeto por meio da atividade do sujeito.

Exatamente quando afirmamos que o empirismo é considerado obstáculo para a aprendizagem de números inteiros negativos, nós estamos nos referimos a esta interpretação passiva do ato de conhecimento, pois o ato inteligente não se reduz ao registro e correção de informações que são captados pelos sentidos. Pudemos observar isso quando o Prof. [3] afirma que o livro adotado é "muito bom. Poderia ser melhor com exemplos problematizados" e o Prof.[10] classifica-o como "Regular. A forma é boa, mas vem pouca atividade. Este mesmo professor na questão 21 afirmou que "o bom livro é aquele que vem com bastante atividade". Para o Prof.[9] é "um livro de linguagem simples, atividades do cotidiano e muito exercício". Na opinião do Prof.[10] são "positivos: seqüência dos conteúdos, negativos: poucas atividades" (falas extraídas da página 208 deste trabalho). Estas respostas denotam uma atitude empirista do ato de conhecer, por isso estes professores estão preocupados com a variedade de formas de apresentação de exemplos e de exercícios para o entendimento e aprendizado de números negativos.

[272] PIAGET. A teoria de Piaget. 1975, p. 72. In CARMICHAEL, L. *Psicologia da criança*.

Piaget procurou explicar a construção do conhecimento pelo processo da abstração empírica (objeto concreto) e reflexiva (objeto ideal). Esta distinção é fundamental para a Matemática, pois ela depende sempre da abstração reflexiva (lógico-matemática).

A abstração reflexiva é uma abstração construtiva e tem sua origem nas ações inicias do sujeito que, por meio de coordenações mais amplas, são transformadas em operações. Inicialmente as ações podem ser realizadas concretamente e, posteriormente, podem ser efetuadas de maneira simbólica, pois Piaget considera como objeto do conhecimento tudo aquilo que o sujeito utiliza em sua interação, seja ela material seja simbolicamente.

b) Por que o estruturalismo foi tão importante para Piaget?

Na teoria piagetiana o alcance da noção de interação apresenta-se como responsável pela capacidade de conhecer. Advogou que existem estruturas específicas para o ato de conhecer denominada estrutura mental, porém estas estruturas não foram observadas no organismo e, por isso, Piaget precisou construir modelos para poder explicar os seus efeitos. Assim, tratando-se de hipóteses os modelos podem ser aperfeiçoados pela própria atividade da estrutura mental, os quais funcionam seriando, ordenando, classificando e estabelecendo implicações. Portanto, a noção de estrutura pode ser utilizada para designar formas de organização de raciocínio. As estruturas são as leis que formam os axiomas.

Os modelos matemáticos explicam dois momentos essenciais da construção endógena das estruturas mentais, que refletem na capacidade de raciocinar: o primeiro, quando a criança só é capaz de operar sobre objetos concretos e, o segundo, quando está apta a estabelecer relações entre relações. Este último é o nível desejado para se operar com a estrutura matemática, porque a Matemática apresenta uma autonomia em relação à experiência física, já que ela permite que o sujeito opere simbolicamente.

Piaget considerou como objeto do conhecimento tudo aquilo que o sujeito utiliza em sua interação, tanto material quanto simbolicamente. Por isso o seu processo de construção do conhecimento não se reduz à explicação de uma realidade externa “pronta para ser usada” e nem como um processo predeterminado. Acredita num “construtivismo que exprime a maneira pela qual novas estruturas são continuamente elaboradas"[273]. Neste sentido, a estrutura sempre representa uma possibilidade e, por isto, Piaget destacava tanto a importância do estruturalismo.

Assim, a estrutura matemática pode ser evidenciada quando apresentada em forma de jogos, porque permite ao aprendiz inicialmente agir no concreto, enquanto, posteriormente realiza uma reflexão do que vai executar (atos simultâneos) para vencer ou acertar a tarefa solicitada e isto só pode ser percebido pela atividade. Isto significa dizer que o aprendiz lança mão de formas de organização de raciocínio (estruturas) para realizar tarefas.

c) Por que os jogos podem ajudar na construção da estrutura dos números inteiros?

O conhecimento é o resultado de certo números de condutas (reprodução ou invenções originais), e a organização dessa conduta corresponde a certo número de estrutura mental.

Os trabalhos da escola de Genebra mostraram o papel da atividade do sujeito na percepção, na memória, no conhecimento, e explicaram a formação dessas estruturas pelo produto da ação que o sujeito exerce sobre o mundo e daquela que o mundo exerce sobre ele. Assim, o conhecimento do objeto é uma abstração que incide sobre suas propriedades ou sobre as ações que lhe são aplicáveis, e para o sujeito conhecedor, traduz-se em representação.

Para Piaget, representação é a capacidade de trazer a mente (evocar) algo (objeto, signo ou imagem) que está perceptualmente ausente. Nessa visão cabe, inclusive, a ação (mental) sobre o objeto. Neste contexto a capacidade representativa, ou função simbólica (ou semiótica), apresenta-se de forma variada (imitação, desenho, imagem mental, jogo simbólico, linguagem, sonhos e devaneios) e consiste na capacidade de diferenciar significantes e significados (significações). Assim, este estudioso mostrou a elaboração do jogo em diferentes idades, pois, ao jogar, o sujeito constrói um espaço para a experimentação que serve de transição entre o mundo interno e externo. Neste sentido, o jogo não deve ser considerado apenas uma atividade prazerosa, uma vez que fornece informações sobre os esquemas que organizam e integram o conhecimento num nível

[273].PIAGET, J. A Teoria de Piaget. 1975, p. 111. In: CARMICHAEL, L. *Psicologia da criança*.

representativo, já que os jogos permitem visualizar as estruturas envolvidas na construção do conceito matemático.

Os diferentes conceitos matemáticos, que são necessários para a compreensão dos números inteiros, podem ser construídos por meio do tabuleiro de xadrez. Por exemplo, ao dispor os contadores no tabuleiro, mesmo sem a definição da regra de que a “soma de dois números negativos sempre vai resultar um número negativo”, no ato de jogar pode-se visualizar este fato e chegar a esta conclusão (ver figura 25, p. 154). O jogador vai construir a estrutura necessária para o entendimento desta regra matemática, refletindo sobre a ação que executou. Neste sentido a representação para Piaget não pode ser apenas uma imagem que reproduz um objeto, ao contrário, é uma construção do sujeito realizada num novo patamar. Os jogos constituem-se em um campo que mobiliza esquemas mentais necessários para a realização de operações não mais concreta, porém simbólica.

Voltando a nossa questão de pesquisa...

Como já foi dito anteriormente, objetivamos a realização de um estudo para auxiliar a orientação do processo ensino e aprendizagem de números negativos, baseando-nos nos ideais de Piaget. Especificamente estamos interessadas em responder “*Como poderemos desenvolver as estruturas dos números inteiros, sejam eles positivos, sejam negativos, se o empirismo continua sendo um dos maiores obstáculos em seu processo ensino-aprendizagem”*.

Com este estudo constatamos que, para desenvolver as estruturas dos números inteiros, uma boa alternativa é utilizar uma atividade estruturada e simbólica como o jogo, porque este apresenta uma estrutura com atividades que não são estáticas.

O jogo mostra a estrutura matemática mais claramente, porque pode apresentar regras definidas pelo grupo. Para jogar, é preciso entendê-las, e não podemos aprender a jogar baralho, dominó etc. só com as regras, precisamos jogar, uma vez que não sabemos o que pode ocorrer durante o jogo. Podemos formular algumas hipóteses, porém a sua concretização só vai ocorrer jogando, ou seja, realizar na própria atividade a estrutura do jogo. Nesse sentido, os jogos começam como um bom modelo das estruturas algébricas ou da Matemática em geral.

O jogo é um bom instrumento para combater o empirismo, porque na Matemática, realmente, não importam quais são os objetos e, sim, como lidar com eles e como calcular. Todos poderiam ter intuição própria sobre os números negativos e positivos ou estratégias diferentes para calcular corretamente. Assim, do ponto de vista de Piaget, o jogo é muito fértil para o ensino da Matemática.

Dessa forma, ficou evidenciado, nesta pesquisa, que aprender números negativos ou positivos não se reduz à manipulação de signos como se eles fossem auto-suficientes, sem a necessidade de ser acompanhado de conceitos e operações mentais. A preocupação com a técnica e memorização de regras, muitas vezes, oculta a construção de conceitos e relações numéricas, e os estudantes são treinados a manipular marcas no papel, sem compreender o que estão fazendo e por que estão fazendo, ficando o seu significado muito distante e remotamente compreendido.

8.4. Sugestões para futuras pesquisas

O estudo sobre o jogo em Educação Matemática pode ser considerado ainda um tema pouco explorado se considerarmos as contribuições que pode oferecer para a formação matemática dos estudantes. Sem ter a pretensão de atribuir um sentido mais amplo de generalização, ressaltamos-se a necessidade efetiva de implementação de novas pesquisas que utilizem o jogo como ferramenta para o ensino da Matemática.

Com a pesquisa que realizamos, percebemos que ainda se pode investigar muito sobre este assunto. A primeira sugestão é o trabalho com a formação de um grupo de professores, discutindo as possibilidades do recurso do jogo do tabuleiro de xadrez no processo ensino-aprendizagem de números inteiros (positivos e negativos). Neste caso poderia realizar um estudo tradicional e a maneira de utilização de ensino com jogos para se efetuar uma comparação. A pesquisa consistiria em verificar se, após a intervenção pedagógica em sala de aula, este jogo influencia na formação dos conceitos envolvidos neste conteúdo e se sim de que forma.

Uma segunda pesquisa seria comparar entre o Tabuleiro de Xadrez e outros tipos de jogos para verificar quais conceitos matemáticos em relação aos números inteiros (positivos e negativos) podem ser construídos com a utilização de jogos, tratar-se-ia de um estudo intervencionista.

Uma outra sugestão de pesquisa seria analisar a influência do jogo na formação de conceitos matemático do ponto de vista do aluno. Neste caso, seria interessante investigar qual o reflexo da formação do professor feita a partir do uso do jogo, na elaboração na elaboração dos conceitos de números inteiros (positivos e negativos) por parte dos alunos.

Por fim em relação à teoria do conhecimento, poder-se-ia efetuar uma investigação para ajudar a esclarecer quais as ligações existentes entre o modelo tradicional de ensino calcado no racionalismo e empirismo. A partir desses dados refletir sobre os fatores que contribuem para a não superação desse paradigma na prática pedagógica do educador para a implementação de um modelo construtivista.

REFERÊNCIAS CONSULTADAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 1997. University, Bethlehem, Pa., USA, 1997, 40:238-244.

ALVES, E. M. S. **A ludicidade e o ensino de matemática**. São Paulo: Papirus, 2001.

ANTONI, Zabala. **Enfoque globalizador e pensamento complexo**: uma proposta para o currículo escolar. Porto Alegre: ARTMED Editora, 2002.

AZEVEDO, M. V. R. de. **Jogando e construindo matemática**: a influência dos jogos e materiais pedagógicos na construção dos conceitos em matemática. 2ª ed. São Paulo, VAP, 1999.

BORBA, R. E. de S. R. O ensino e a compreensão de números relativos. In: SCHILIEMANN, A. & CARRAHER, D. **A compreensão de conceitos aritméticos**: ensino e pesquisa. Campinas: Papirus, 1998.

BRENELLI. R. P. **O jogo como espaço para pensar**: a construção de noções lógicas aritméticas. São Paulo: Papirus, 1996.

BRINGUIER, J.C. **Conversando com Jean Piaget**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Ed. Bertrand Brasil S. A., 1993.

CORDÓN, J. M. N. & MARTÍNEZ, T. C. **História da filosofia**. Lisboa: Edições 70 LDA, 1950. V. II.

DELEUZE, G. Como reconhecer o estruturalismo. In: CHÂTELET, F. **Idéias, doutrinas sob a direção de François Châtelet.** Lisboa: Publicações D. Quixote, 1983.

DESCARTES, R. **O discurso do método**. São Paulo: Nova Cultural, 1987. V.I.

DIENES, Z. P. **As seis etapas do processo de aprendizagem em matemática**. São Paulo: EPU, 1986.

FROEBEL, F. **The education of man**. Nova York: Appleton, 1892.

GRANDO, R. C. **O jogo e suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da Matemática**. Dissertação de mestrado. Campinas: Unicamp, 1995.

GLAESER, G. Epistemologia dos números relativos. In: **BOLETIM/GEPEM**. Rio de Janeiro: 1985, n.17.

HESSEN, J. **Teoria do conhecimento**. Portugal: Armênio Amado Editora, 1987.

INHELDER, B. & BOVET & SINCLAIR, H. S. **Aprendizagem e estruturas do conhecimento.**São Paulo: Saraiva, 1977.

KAMII, C. & DEVRIES, R. **Jogos em grupo na educação infantil**: uma implicação na teoria de Piaget. São Paulo, Trajetória Cultural, 1991.

KANT, I. **Crítica da razão pura**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1994.

KRAUSE, D. **Introdução aos fundamentos axiomáticos da ciência**. São Paulo: EPU, 2002.

KESSELRING, Thomas. **Jean Piaget**. Rio de Janeiro: Vozes, 1993.

______. Jean Piaget: entre ciência e filosofia. In: FREITAG, B. **Piaget 100 anos.** São Paulo: Cortez, 1997.

LEIBNIZ, G.W. **Novos ensaios sobre o entendimento humano**. Lisboa: Edições Colibri, 1993.

LINARDI, P. R. **Quatro jogos para números inteiros:** uma análise. Dissertação de Mestrado. Rio Claro: UNESP, 1999.

LOCKE, J. **Ensaios sobre o entendimento humano**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1999. V.I e II.

LÜDKE, M. & ANDRÉ, M. E. D. **A. Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MATUI, Jiron. **Construtivismo:** teoria construtivista sócio-histórica aplicada ao ensino. São Paulo: Moderna, 1995.

MONTANGERO, N. M. **Jean Piaget ou a inteligência em evolução**. Porto Alegre: ARTMED, 1998.

MONTESSORI, M. **A formação do homem**. Rio de Janeiro: Portugália. S/ data.

MOURA, M. O. A séria busca no jogo: do lúdico na matemática. In: KISHIOMOTO, T. M. **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. São Paulo: Cortez, 1997.

MUNIZ, C. A . **Jogos espontâneos e atividades matemáticas da criança**. I SIPEM, São Paulo, 2000.

OTTE, Michael. What is a text. In: CHRISTIANSEN, B. & HOWSON, A.G. & OTTE. M. **Perspectives on mathematics education**. Dordrecht/Boston/Lancaster/Tokyo: D. Reidel Publishing Company, 1986.

_____.**O formal, o social e o subjetivo***:* uma introdução à filosofia e à didática da matemática. São Paulo: Ed. UNESP, 1993.

_____. Epistemologia da matemática de um ponto de vista semiótico. In: **Revista Educação matemática pesquisa**. São Paulo: EDU, 2001. V. 3.

____. Russells introduction to mathematical philosophy. Artigo submetido à **Revista Educação Matemática e Pesquisa**. São Paulo Editora EDUC, 2004.

PIAGET, J. & BETH, E. W. **Mahtematical epistemology and psychology.** Dordrechet: Radel, 1961.

PIAGET, J. & CHOMSKY, N. **Teorias da linguagem, teorias da aprendizagem**. Lisboa: Edições 70, 1987.

PIAGET, J. A teoria de Piaget. In: CARMICHAEL L. **Psicologia da criança**. São Paulo: EPU, 1975. V. 4.

PIAGET, Jean. **Problemas de psicologia genética**. Rio de Janeiro: Forense, 1973.

____. **O nascimento da inteligência na criança**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

____. **Sabedoria e ilusões da filosofia**. São Paulo: Abril Cultural, 1975.

_____. **A formação do símbolo na criança***:* imitação, jogo e sonho, imagem e representação. 3ª ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

______. **O estruturalismo**.3ª ed. São Paulo: Difel, 1979.

_____.**A gênese do número na criança**. 3ª ed.. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.

_____**Psicologia da inteligência**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1983.

_____. **Psicologia e pedagogia**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1988.

_____**Epistemologia genética**. São. Paulo: Martins Fontes, 1990.

_____. **Psicologia da criança**. Rio de Janeiro: Editora Bertrand Brasil S.A , 1995.

_____. **Biologia e conhecimento**. Rio de Janeiro: Vozes, 1996.

_____. **Seis estúdos de psicologia**. 23ª ed. Rio de Janeiro: Forense, 1998.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. São Paulo: Editora Perspectiva, 1999.

RUSSELL, B. **Introdução à filosofia da matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 1960.

SANTAELLA, L. **A teoria dos signos: semiose e autogeração**. São Paulo: Editora Ática, 1995.

TRIVIÑOS, A .N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais:** a pesquisa qualitativa em educação**.** São Paulo: Atlas, 1987.

WADSWORTH, B. J. **Inteligência e afetividade da criança na teoria de Piaget**. São Paulo: Editora Pioneira, 1997.

WIELEWSKI, G. D. **O tabuleiro de xadrez**: uma perspectiva para a didática da aritmética. Dissertação de Mestradro. Cuiabá-MT: UFMT, 1998.

QUESTRIONÁRIO DA PESQUISA EMPÍRICA

Rondonópolis, 14 de dezembro de 2003.

Prezado (a) Professor (a)

Estou desenvolvendo um trabalho sobre análise de livro didático e o assunto específico a ser discutido são números negativos. Para auxiliar o meu trabalho preciso da sua contribuição em relação à abordagem do processo ensino-aprendizagem. Em função disto, levantei algumas questões preliminares e exploratórias para análise do tema. Não é necessário se identificar, portanto a sua contribuição é valiosa na busca de alternativas para sanar as possíveis dificuldades de nossos alunos, bem como auxiliá-los no desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático.

Conto desde já com o seu apoio para a realização do meu trabalho de doutorado e também com a constituição do primeiro passo formal para um diálogo de pesquisa entre a Universidade e Professores de Matemática que ministram aulas para a 6ª série do Ensino Fundamental da rede de ensino do Município de Rondonópolis/MT.

Atenciosamente,

Profª Cecília Fukiko Kamei Kimura

Deptº de Educação/ICHS/CUR/UFMT

Doutoranda do Curso de Pós Graduados em Educação Matemática – PUC/SP

Pesquisa com professores de 6as séries que trabalham com números negativos na rede de ensino do município de Rondonópolis/MT

1. Tempo de magistério: ....anos. Total de tempo que trabalha com a 6ª série: ....anos

2. Ano de conclusão da graduação ....

3. Licenciatura Plena em .... Nome da Instituição da Graduação

4. Você gosta de Matemática? Por quê?

5. A matemática é fácil ou difícil? Por quê?

6. Série que atua além da 6ª

   ( ) 5ª à 8ª série
   ( ) 2º Grau,
   ( ) Ed. Jovem e Adulto
   ( ) 3º Grau

7. Qual o livro didático que a sua escola adotou?

   Título do livro: ....
   Autor(es):...

8. Qual foi o motivo da escolha do livro indicado?

   ....

11.Você utiliza o livro didático adotado?

   ( ) Sim
   ( ) Não
   ( ) às vezes
   ( ) Nunca
   Justifique a resposta dada à questão 11.
   Numere os itens da questão abaixo de 1 a 6, comece com 1 para a forma mais fácil.

12. Quais as dificuldades na abordagem dos números negativos em sala de aula.

   ( ) história dos números negativos
   ( ) regras de sinais
   ( ) representação de nos negativos

( ) utilização de n^{os} negativos
( ) linguagem
( ) propriedades

13. Quanto ao grau de dificuldade dos alunos em relação ao cálculo com números negativos, numere de 1 a 4 – comece com o nº 1 para a mais fácil.

( ) adição
( ) subtração
( ) multiplicação
( ) divisão
( ) frações

Dê o seu parecer sobre a que você pontuou como sendo a mais difícil e mais fácil, e dê um exemplo de um erro mais comum.

....
....

14. Quanto ao grau de dificuldade em relação às propriedades – numere de 1 a 4, comece com 1 para a mais fácil.

( ) comutativa
( ) associativa
( ) elemento neutro
( ) cancelamento

Qual é o erro mais freqüente entre seus alunos. Por quê?
....
....

15. Quanto ao grau de dificuldade em relação às regras de sinais:

( ) muito difícil
( ) difícil
( ) regular
( ) fácil
( ) muito fácil

Justifique sua resposta, indicando as facilidades ou dificuldades.
Dê um exemplo de atividade sobre regras de sinais que você adota em sala de aula.
....
....

16. Quanto à representação de números negativos, numere de 1 a 4 os itens abaixo, começando de 1 para a forma mais utilizada.

( ) representação numérica
( ) gráfico
(tabela
( ) reta numérica
Dê o seu parecer sobre a que você pontuou como sendo a mais utilizada.
Cite 2 pontos negativos da representação que você menos utiliza.
....
....
....

17. Quanto à utilização de números negativos, numere de 1 a 7, começando com 1 para a forma mais utilizada.

( ) problemas do cotidiano
( ) extrato bancário
( ) temperatura
( ) reta numérica
( ) gráfico
( ) tabela
( ) jogos
( ) outros
Na sua opinião qual é a forma mais simples para o entendimento do aluno? Justifique sua resposta. E a mais difícil? Porquê?
....
....

18. O livro que utiliza pode ser considerado:

( ) ótimo
( ) muito bom
( ) bom
( ) regular
( ) insuficiente
Dê sua opinião sobre a forma como os números negativos são trabalhados no livro didático adotado.
....
....

19. Assinalar sim (S) e não (N) para a questão abaixo - Prepara suas aulas utilizando:
( ) apenas o livro didático adotado
( ) outros livros didáticos
( ) livros paradidáticos
( ) livros de história da Matemática
( ) livros de filosofia da matemática
Nas respostas afirmativas, citar o nome e autor do livro.
....
....

20. O livro didático adotado apresenta diferentes estratégias para o ensino de números negativos? ( ) Sim ( ) Não

Se a resposta for positiva, diga de que tipo elas são.
Se a resposta for negativa, diga que tipo de estratégia você utiliza.
....
....

21. Na sua opinião, caracterize o que é um bom livro para o ensino de números negativos.

....
....

22. Além das atividades propostas no livro adotado, você utiliza outras? Quais?

....
....

23. Na sua opinião, o aluno adquire conhecimentos sobre números negativos só na escola? Crie uma situação-problema onde ocorre o uso de números negativos.

....
....

24. Comente sobre o livro adotado, apontando pontos positivos e negativos.

....
....

25. Que tipo de recursos utiliza além do livro didático?

....
....

26. Como você justifica as regras de sinais?

....
....

27. Você acha importante a distinção entre número (como objeto) e numeral (como signo)?
....
....

28. Você acha que é importante o aluno ler diferentes formas de representação para os números negativos? Por quê?
....
....

29. Você acha que o aluno é capaz de ler o livro didático em relação aos números negativos e compreender o que contém o livro? Por quê?
....
....

30. Você acha que o livro didático é mais para ser utilizado pelo professor? Por quê?

    Você acha que existem interações entre o ensino da língua portuguesa e da matemática, ou só contrastes?
....
....

31. Qual regra você considera a mais importante ou que é o maior obstáculo no ensino da aritmética: a) dos números inteiros? b) das frações? Por quê?
....
....

32. Enquanto professor de matemática, qual a sua maior preocupação no ensino dos números inteiros, especificamente dos números negativos?
....
....

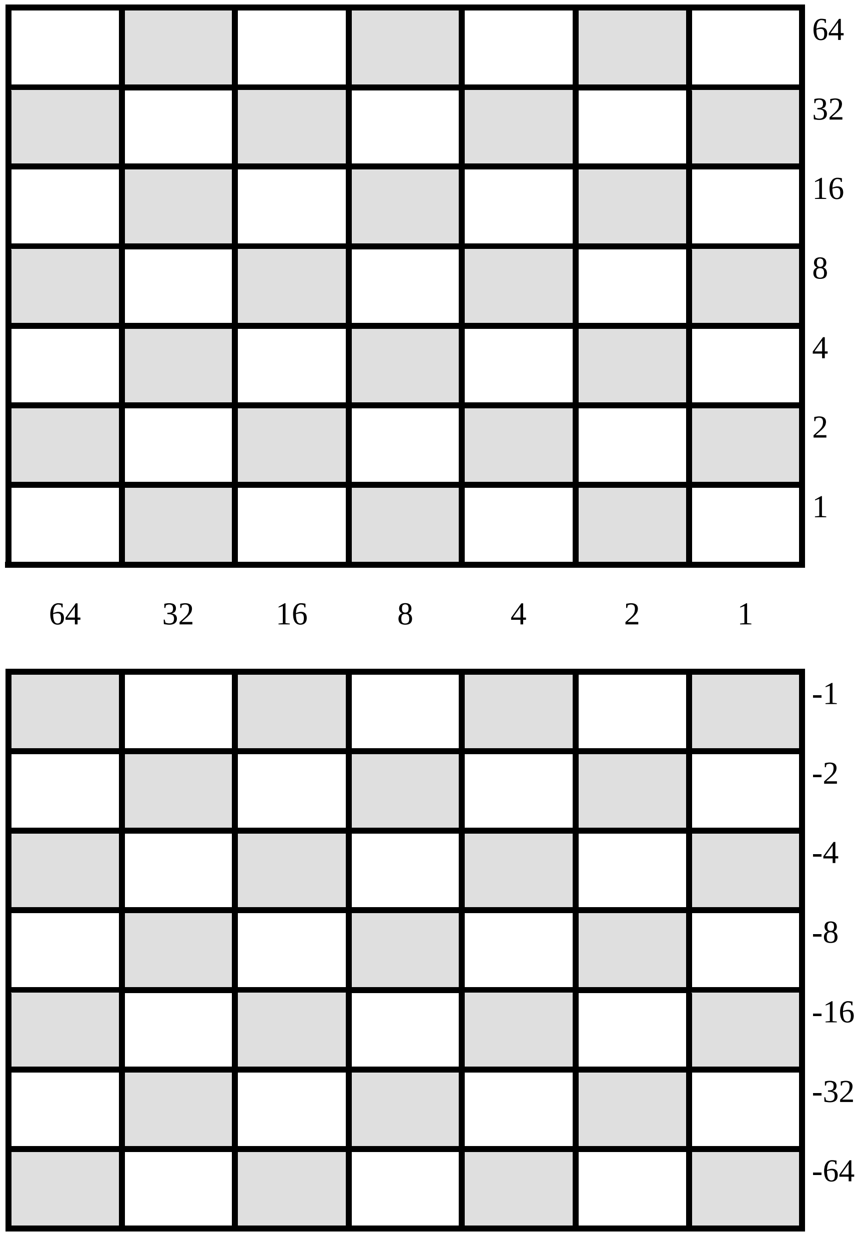
33. Como você trabalha com as diferenças individuais (alunos que aprendem rápido, mais lento e muito lento) ao "ensinar" números negativos em sua sala de aula?
....
....

34. Você acha importante para o ensino de números negativos levar em conta a abordagem histórica? Por quê?
....
....

35. Que tipos de livros você lê para auxiliar o ensino de números negativos? Citar o nome do livro e o autor.
....
....

ANEXO 2

TABULEIRO DE XADREZ



ANEXO 3

ATIVIDADES PROPOSTAS PARA RESOLUÇÃO NO TABULEIRO DE XADREZ

ATIVIDADES:

1) $28 + 38$
2) $(^{-}23) + (^{-}12)$
3) $29 + (^{-}7)$
4) $25 + (^{-}46)$
5) $35 – 32$
6) $25 – 39$
7) $22 – (^{-}15)$
8) $(^{-}19) - (^{-}31)$
9) 2×8
10) 6×8
11) $8 : 2$
12) $35 : 7$