RUY CESAR PIETROPAOLO

(RE) SIGNIFICAR A DEMONSTRAÇÃO NOS CURRÍCULOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA E DA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2005

RUY CESAR PIETROPAOLO

(RE) SIGNIFICAR A DEMONSTRAÇÃO NOS CURRÍCULOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA E DA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***Doutor em Educação Matemática****, sob a orientação* ***da Professora Doutora Célia Maria Carolino Pires****.*

PUC/SP

São Paulo

2005

Banca Examinadora

AGRADECIMENTOS

Quero expressar a minha gratidão a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

Primeiro à *Célia Maria Carolino Pires*, orientadora deste trabalho, pela atenção, incentivo, amizade, paciência e, sobretudo, pela capacidade de instigação e talento em me dizer as coisas que eu não sabia que sabia.

Às *Professoras Iole de Freitas Druck, Lílian Nasser, Lulu Healy,* e ao *professor Lafayette de Moraes*, que gentilmente aceitaram participar da Banca Examinadora, cujas críticas, sugestões e recomendações foram muito apreciadas.

À *coordenação* e aos *meus professores* do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, pelo conhecimento que me ajudaram a construir.

Aos *professores e educadores matemáticos* – que gentilmente concordaram em participar desta pesquisa, demonstrando interesse e boa vontade incomuns. Sem sua contribuição este estudo não teria sido realizado.

À *Professora Tânia Mendonça Campos* pelo grande incentivo e acolhida às minhas idéias.

À *Lulu,* cujas pesquisas foram fundamentais para a concretização deste trabalho, isso sem contar suas valiosas sugestões de leitura.

À *Iole* pela sua disponibilidade e auxílio em um momento decisivo deste trabalho.

À *Regina Pavanello,* pela leitura competente deste trabalho, irrestrita amizade e disponibilidade para conversar sobre educação.

À *Ana Paula,* cujas reflexões foram importantes no momento de elaboração do projeto desta pesquisa e à *Célia Leme* pela leitura carinhosa.

À *Cileda*, cujas sugestões bibliográficas foram mais que oportunas: fundamentais.

À *Celina,* que, sem saber, dirigiu-me palavras de apoio em um momento importante e à *Zezé,* companheira das aulas de Francês.

À *Maria Ângela Miorim,* pelo incentivo.

Aos *amigos Célia, Edda, Maria, Marília, Mário, Roberto, Suzana, Vinício, Regina* – banca examinadora ideal.

Aos *amigos da CENP*: Angélica e Luis Fábio pela compreensão.

À *Olga*, porque contribuiu de forma inestimável em diversos aspectos – incentivo, sugestões, revisão dos textos – e o fez com um olhar amoroso e paciente. Nunca, nunca agradecerei o suficiente.

Aos meus alunos do último ano da Licenciatura, Fabiana, Heloísa, Nádia, Alessandra, Érica, Gilmara, Flávio e Luciano, porque são queridos.

Aos *amigos que não citei* – vão me perdoar, amigos que são.

O Autor

Aos meus pais, porque os amo.

Ao Rogério, Renato, João e Cidinha, pelo irrestrito apoio.

Ao Leonardo e à Catarina, linda.

À Célia e à Olga, por tudo.

RESUMO

O presente estudo tem como objetivo procurar compreensões sobre a necessidade e a acessibilidade da implementação de provas e demonstrações nos currículos de Matemática da Educação Básica e investigar as implicações que essa inovação traz aos currículos de formação inicial de professores.

Metodologicamente, esse estudo insere-se numa abordagem qualitativa de pesquisa. Como o propósito era obter conclusões que tivessem a colaboração de várias fontes, utilizou-se a pesquisa bibliográfica e documental e a realização de entrevistas com pesquisadores em Educação Matemática e com professores da Educação Básica, cuja prática docente incluísse algum tipo de trabalho envolvendo provas. Teoricamente, fundamentamos nossa investigação em pesquisas sobre essa temática e em estudos sobre currículos e sobre formação de professores.

Verificou-se, por exemplo, a existência de muitas pesquisas, não brasileiras, envolvendo provas na Educação Básica. No entanto, muitas não parecem estar alicerçadas em uma teoria consistente. Tampouco parece haver sobre esse tema projetos articulados entre si e em diferentes níveis de ensino.

Identificou-se um consenso entre os entrevistados: a “prova” como um conteúdo e como recurso pedagógico bastante rico nas aulas de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, desde que se admita um sentido mais amplo para essa palavra. Não caberia a simples reprodução – pelo aluno ou professor – das

provas presentes nos livros, mas sim o “fazer matemática” em sala de aula, envolvendo assim, experimentações, conjecturas, argumentações. Mas, para tal, o professor precisaria ter uma formação que levasse em conta esse princípio.

Observou-se entre os professores da Educação Básica, uma tensão na análise de provas produzidas por alunos: o elogio à iniciativa e à criatividade e, ao mesmo tempo, a alegação de que não se podia avaliar positivamente, visto que tais produções não seriam provas, do ponto de vista matemático.

Mediante as análises dos resultados apresentam-se algumas diretrizes para uma proposta de (re)significação das provas nos currículos da Educação Básica e nos de formação de professores.

Palavras–Chave: Educação Matemática; Demonstrações e Provas; Currículos da Educação Básica; Formação de Professores; Currículos da Licenciatura em Matemática.

ABSTRACT

The present study aims to search for an understanding about the need and accessibility of implementing proofs and demonstrations in school mathematics curricula (from elementary through secondary education grades), and to investigate the implications of such an innovation for initial teacher education curricula.

In terms of Methodology, the study adopts a qualitative approach. Since the purpose was to obtain results based upon a synthesis of several sources, documentary and bibliographic research was carried out and interviews were conducted with Mathematics Education researchers and with school teachers, whose teaching practice included some sort of work involving proofs. For its theoretical underpinning, the study drew from research conducted on this subject along with studies concerning curricula and teacher education development.

Among the body of research into proof in mathematics, varies studies were identified, although not within the Brazilian context. In general, these studies were not based on a consistent theory, tended not to be articulated with each other and neither did they seek to articulate different teaching levels.

In the analysis of the empirical data, a consensus was noticed among the interviewed group: “proof” is perceived as content and a quite rich pedagogical resource to Mathematics classes for elementary and secondary school mathematics, since a broad sense of the word is admitted. It was not deemed appropriate to approach its teaching through simple reproduction, by the teacher or by the student, of the proofs presented in the books but, instead, by “doing Mathematics” in the classroom, thus involving experimentations, conjectures, arguments. However, for to happen, this principle needs to be enshrined in teacher education courses.

Among the school teachers, some tension was observed in relation to the analysis of proofs produced by the students: on the one hand, there was praise for initiative and creativity and, on the other, concerns that the resulting productions could not be assessed positively as they could not be considered proofs, from the mathematical point of view.

The interleaving of the analyses from the different data sources enabled the construction of a set of proposals for the (re)consideration of proof in school mathematics and in teacher development programmes.

Key words: Mathematics Education; Proof and Proving; School Mathematics Curricula; Teacher Education Curricula; Teacher Education Courses

RESUME

La présente étude a pour objet de chercher à comprendre le pourquoi du besoin et l'accessibilité de l'application de preuves et de démonstrations dans les programmes de Mathématiques de l'Enseignant Secondaire et rechercher les implications que ces innovations apportent aux programmes de formation initiale des professeurs.

Méthodologiquement, cette étude s'insère dans une approche qualitative de la recherche. Comme l'objectif était d'obtenir des conclusions à partir de la collaboration de plusieurs sources, nous nous sommes servis d'une recherche bibliographique et documentaire et nous avons réalisé des entrevues de chercheurs du secteur de l'Education en Mathématiques et de professeurs de l' Enseignement Secondaire, dont l'expérience de professeur comprenne un type quelconque de travail incluant des preuves. Théoriquement, nous avons basé cette investigation sur des recherches faites sur ce thème et sur des études sur les programmes et sur la formation de professeurs.

Nous avons vérifié par exemple qu'il existe de nombreuses recherches, non brésiliennes, concernant des preuves dans l'Enseignement Secondaire. Mais celles-ci ne semblent pas être basées sur une théorie consistante. Il ne semble pas non plus qu'il y ait sur ce thème de projets articulés entre eux et à différents niveaux d' enseignement.

Nous avons identifié un consensus parmi les interviewés: le «preuve» comme un contenu et comme un recours pédagogique assez riche dans les cours de Mathématiques de l’Enseignement Secondaire, à condition qu’il soit admis dans le sens plus large de ce mot. Il ne suffit pas que l'élève ou le professeur reproduise les preuves présentés dans les livres; il faut «faire de la mathématique» dans la salle de classe, ce qui implique aussi des expérimentations, des conjectures, des argumentations. Mais pour cela, le professeur doit avoir une formation qui tienne compte de ce principe.

Nous avons observé chez les professeurs de l’Enseignement Secondaire une tension dans l’analyse des preuves présentés par les élèves: ils font l'éloge de l'initiative et de la créativité, mais au même temps ils allèguent qu'ils ne peuvent pas les évaluer positivement, car ces travaux ne sont pas des preuves, du point de vue mathématique.

Par l’analyse des résultats, nous présentons quelques directives pour proposer une nouvelle signification des preuves dans les programmes de l’Enseignement Secondaire et dans la formation des professeurs.

Mots Clés: Démonstration et preuves; Education Mathématique; Curriculum de Mathématiques pour l'Enseignement Secondaire; Formation de Professeurs; Conaissences des Mathematique pour les Enseignements.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O presente estudo insere-se na linha de pesquisa “Matemática na estrutura curricular e formação de professores” do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP. Seu propósito é o de identificar e analisar diferentes pontos de vista a respeito da inclusão das demonstrações nas aulas de Matemática da Educação Básica e estudar possíveis implicações que o desenvolvimento desse trabalho poderia trazer para os cursos de formação inicial de professores dessa área do conhecimento.

A importância desse tema parece evidente: se a demonstração é uma atividade essencial para os matemáticos, por que ela também não o seria para a formação de um profissional que vai ensinar Matemática? Neste estudo mostramos a necessidade de pesquisas brasileiras nessa área e discutimos a potencialidade da prova – em um sentido mais amplo – no âmbito dos currículos de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio, bem como o significado das demonstrações em cursos de formação de professores.

Embora esses dois temas – Matemática na estrutura curricular e formação de professores – mantenham estreitas relações entre si, nem sempre eles têm sido discutidos de forma articulada, o que, em certo sentido, ajuda a explicar, por um lado, a dificuldade de implementação de propostas curriculares quando não se leva em conta que tipo de formação e experiência têm os professores que vão colocá-las em prática e, por outro, a dificuldade de desenvolver projetos mais consistentes de formação de professores quando não se tem clareza do tipo de profissional que se deseja – ou que seria necessário – formar para atender às novas demandas que se apresentam.

Assim, a questão da implementação de provas nas aulas de Matemática da Educação Básica está intrinsecamente relacionada aos princípios que fundamentam os cursos de formação de professores dessa área do conhecimento.

As três questões geradoras desta pesquisa podem atestar esta nossa concepção:

- É desejável e possível desenvolver um trabalho com demonstrações nas aulas de Matemática em escolas de Educação Básica? Em caso afirmativo, qual deve ser o significado desse trabalho?
- Como professores da Educação Básica interpretam produções de “prova” de alunos do Ensino Fundamental e as avaliam?
- Que implicações o desenvolvimento desse trabalho – demonstrações na Educação Básica – deveria trazer para o curso de formação de professores de Matemática?

No primeiro capítulo, comentamos as circunstâncias que nos levaram a este estudo, ou seja, procuramos buscar no tempo fatos fundamentais para compor uma argumentação que justifique nosso interesse e os esforços empreendidos para sua concretização. Para que as indicações de um trabalho envolvendo demonstrações nas aulas de Matemática da Educação Básica possam ser atendidas, problematizamos a formação inicial de professores relativamente a esse aspecto. Assim, apresentamos a formulação do problema de pesquisa e a respectiva delimitação e justificamos a escolha dos procedimentos metodológicos utilizados. Além disso apresentamos algumas pesquisas que serviram como referências no desenvolvimento deste estudo.

Buscamos a utilização de procedimentos como a pesquisa bibliográfica e documental e a realização de entrevistas com pesquisadores em Educação Matemática e com professores da Educação Básica. Nossa intenção era poder elaborar conclusões que tivessem a colaboração de várias fontes, obtendo assim, mais dados/informações para nossa pesquisa de abordagem qualitativa.

Expomos no segundo capítulo algumas referências obtidas na literatura a respeito de significados de *demonstração* e *prova* para matemáticos, com o objetivo de identificar idéias que poderiam favorecer nossa análise. Consideramos esse conhecimento importante, pois permite refletir sobre o papel das provas matemáticas nos currículos para formação de futuros professores dessa área.

Uma análise de pesquisas relativas a esse tema é apresentada no capítulo três. Nesta revisão da literatura, encontramos muitas pesquisas sobre o processo de ensino e aprendizagem de provas, sobretudo em Geometria. Esses estudos defendem a inclusão da prova rigorosa nas aulas de Matemática das escolas da Educação Básica. Quanto à conexão entre a demonstração matemática e a formação do professor, os pouquíssimos trabalhos existentes são muito recentes. Cabe ressaltar, no entanto, que é bastante reduzido o número de pesquisas brasileiras relacionadas ao tema em questão e apenas um se refere à formação de professores e provas rigorosas.

No capítulo seguinte expomos sucintamente as recomendações da inclusão de provas nas aulas de Matemática pelos recentes currículos de alguns países como Inglaterra e França. Na seqüência, discutimos indicações no tocante às demonstrações nos currículos brasileiros prescritos para a Educação Básica a partir de 1931, ano da Reforma Francisco Campos, até 2002, quando são divulgadas as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. A seguir, examinamos algumas das atuais indicações curriculares para os cursos de licenciatura em Matemática.

No quinto capítulo analisamos os depoimentos dos dois grupos de professores e identificamos diferentes pontos de vista sobre as recomendações dos atuais currículos a respeito das argumentações e provas na Educação Básica, – nossa primeira questão de pesquisa. Constatamos convergências entre as declarações dos sujeitos da pesquisa e procuramos compreendê-las à luz dos estudos referenciados.

No capítulo seis apresentamos e discutimos os resultados de uma atividade proposta especialmente aos professores da Educação Básica, participantes desta pesquisa, no sentido de que analisassem e avaliassem demonstrações de Números e de Geometria, elaboradas por alunos da 8.ª série do Ensino Fundamental. Nossa intenção foi comparar os discursos desses professores a respeito da inclusão das provas nos currículos com os argumentos utilizados para justificar as notas atribuídas às produções dos alunos.

O propósito do sétimo capítulo é o de também procurar compreensões acerca de como os nossos entrevistados entendem o papel das demonstrações nos cursos de licenciatura, não apenas no âmbito de uma formação mais geral, mas, sobretudo tendo em vista que este assunto se constituirá em futuro objeto de ensino. Identificamos algumas convergências a respeito dos conhecimentos sobre provas, necessários ao professor de Matemática, para sua atuação docente na Educação Básica e as discutimos levando em conta as pesquisas e teorias referenciadas.

Nas considerações finais fazemos uma síntese de nossas reflexões sobre as respostas às questões deste estudo, já expostas e analisadas nos capítulos anteriores. Explicitamos, também, nosso ponto de vista sobre a necessidade de (re)significar provas nos currículos de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio e das Licenciaturas em Matemática.

CAPÍTULO 1

JUSTIFICATIVA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Às vezes tenho a impressão de que escrevo por simples curiosidade intensa. É que ao escrever, eu me dou as mais inesperadas surpresas. É na hora de escrever que muitas vezes fico consciente das coisas, das quais, sendo inconsciente, eu antes não sabia que sabia.

(Clarice Lispector, *A descoberta do mundo*.)

1.1 Antecedentes e motivações

Nossa relação com as questões curriculares vem se consolidando ao longo de nossa trajetória profissional. As primeiras reflexões sobre currículos de Matemática ocorreram quando exercíamos a função de professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio da rede pública com a divulgação, em 1976, dos Guias Curriculares do Estado de São Paulo, ainda fortemente influenciados pelo Movimento da Matemática Moderna.

Este movimento decorreu dos esforços dos matemáticos que, nas primeiras décadas do século XX, se concentravam na busca de um enfoque unificador da Matemática. Inspirados nesse trabalho, os líderes do Movimento proclamavam a necessidade da modificação nos currículos de Matemática e foram nela buscar os princípios que poderiam dar coerência à Matemática escolar, aproximando-a daquela produzida nas academias. Esses princípios deveriam incluir conjuntos, estruturas algébricas. Isto se evidencia na declaração de Papy: “[...] qualquer professor de Matemática tem que começar por reconhecer um fato fundamental: a Matemática de hoje recuperou a sua universalidade no Conjunto” (Papy, apud Byers, 1982, p. 31).

Colocava-se, por exemplo, que era fundamental que o aluno compreendesse o quanto antes que a definição de um termo dá um sentido preciso ao qual ele deveria ajustar-se perfeitamente. A declaração de Lievens (apud Pires, 2000) pode atestar este fato: “[...] eis aqui um dos progressos essenciais da reforma em curso: não há dúvida sobre o significado dos conceitos e as definições não se contentam com uma intuição vaga” (p.13).

Imbuídos do espírito da época – a Matemática Moderna –, estávamos convencidos de que os Guias poderiam dar novos rumos aos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Concordávamos com a premissa de exigir do aluno do Ensino Fundamental a formalização de conceitos, ainda que muitas vezes isso nos parecesse precoce ou desnecessário. Por isso, nossa prática como professor de Matemática na escola secundária procurava seguir à risca esses preceitos. Assim, os conteúdos eram selecionados e organizados tendo como pano de fundo as estruturas matemáticas de grupo, anel e corpo.

A implantação desse Movimento implicava também a predominância dos temas algébricos sobre os geométricos, no tratamento da Geometria como um tema “ilustrativo” dos conjuntos e da álgebra. Algumas propriedades topológicas deveriam ser também estudadas, ainda que intuitivamente.

Segundo Lievens (apud Pires, 2000, p. 12), a Geometria no currículo não deveria ficar agrupada num único lugar, pois seria “mais cômodo abordá-la como ilustração de noções mais gerais”. Para ele, as primeiras noções (pontos, retas, intersecção de retas, retas paralelas) deveriam ser dadas como exemplos de conjuntos e a “orientação das retas seguiria de maneira natural ao estudo das relações de ordem”.

Os Guias Curriculares também propunham o ensino da Geometria das Transformações, uma diretriz praticamente ignorada pelos professores e livros didáticos da época, reforçando ainda mais o já constatado abandono da Geometria.

Naquele período, estimulou-se o trabalho com as demonstrações que tomavam por base as estruturas algébricas. Portanto, a consideração de que a virtude essencial da Matemática é o rigor, em especial o da linguagem formal, repercutiu no ensino dessa área do conhecimento. Como conseqüência, o professor deveria preocupar-se em exigir do aluno, desde os seus primeiros passos nos domínios matemáticos, rigor de linguagem.

Assumíamos como pressuposto o fato de que o ensino de conceitos dessa área do conhecimento, mesmo na escola básica, deveria refletir o espírito da Matemática contemporânea, ou seja, deveria estar fundamentado nas estruturas algébricas e em sua linguagem formal. Cabe, no entanto, ressaltar que os professores não incorporaram em sua prática as sugestões de trabalho com as demonstrações.

Apesar de já praticarmos, naquele tempo, um ensino menos centrado em algoritmos, privilegiando a compreensão dos conceitos, não tínhamos uma reflexão maior a respeito das possibilidades pedagógicas das demonstrações nos currículos do Ensino Fundamental e Médio. Pelo contrário, esse tema nos lembrava um passado, não muito distante, anterior à Matemática Moderna, de um ensino pouco eficiente, em que os alunos eram obrigados a memorizar demonstrações que o professor lhes apresentava.

Quanto à formação do professor, tínhamos, nessa época, a plena convicção, fortalecida em nossa formação inicial, de que para ser um bom professor de Matemática era suficiente ter um pouco de vocação e, evidentemente, saber Matemática. Todavia, a nossa dificuldade em proporcionar um processo de ensino eficiente nos levou a uma primeira ruptura com esse posicionamento e passamos a compreender que, para ser professor de Matemática, um bom domínio de conhecimentos matemáticos e vocação não bastavam.

Em 1985 passamos a fazer parte da equipe técnica de Matemática, Divisão de Currículo, da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – CENP, da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo. Pudemos, como membro dessa equipe durante doze anos, desenvolver projetos bastante diversificados, envolvendo o ensino e aprendizagem de Matemática. Durante esse período, outra experiência fundamental com currículos foi nossa participação na elaboração da Proposta Curricular de Matemática do Estado de São Paulo para o 1.º grau, publicada em 1987, e dos materiais e documentos que subsidiaram, posteriormente, sua implantação.

Naquele momento, em decorrência da contraposição às idéias do Movimento da Matemática Moderna, essas concepções de currículo também haviam se alterado significativamente: em lugar de uma concepção que privilegiava o tecnicismo e o formalismo no ensino da Matemática, passávamos a defender os princípios da tendência pedagógica conhecida como construtivista.[1]

O construtivismo por nós adotado levava em conta que o conhecimento matemático não resulta nem diretamente do mundo físico nem diretamente das mentes humanas isoladas desse mundo, mas, sim, pela ação interativa e reflexiva do homem com o ambiente e por meio de atividades. Valorizávamos mais o processo que o produto. Estávamos preocupados com o desenvolvimento das estruturas mentais dos nossos alunos e, desse modo, a importância do conteúdo em si era bastante relativizada.

Durante a realização dos projetos de implementação da CENP, os significados atribuídos ao construtivismo também foram, aos poucos, "evoluindo": passamos de uma postura pedagógica preocupada fundamentalmente com o desenvolvimento de estruturas mentais, para uma outra em que a construção dos conceitos se daria tomando em conta, também de forma significativa, outras dimensões, como a sociocultural e a política. Assim, passamos a sustentar que a seleção de conteúdos deveria considerar a relevância social e não apenas a

[1] Fiorentini, em artigo da revista *Zetetiké* em 1995, descreveu alguns modos historicamente produzidos de ver e conceber o ensino de Matemática no Brasil. Identificou, por meio de algumas categorias, seis tendências: a formalista clássica, a empírico ativista, a formalista moderna, a tecnicista e suas variações, a construtivista e socioetnoculturalista.

contribuição destes para com o desenvolvimento intelectual do aluno. Por julgarmos, na época, que as demonstrações não eram socialmente relevantes, acreditávamos que os currículos deveriam diminuir ainda mais a ênfase dada a esse tema.

Apesar de todos esses estudos e elaborações e da privilegiada interlocução que possuíamos com os professores da rede pública e também com pesquisadores em Educação Matemática, algumas questões permaneceram durante todo o tempo conosco, dentre as quais destacamos: será que estávamos certos em defender a não-ênfase, ou até mesmo o abandono, das demonstrações nos currículos de Matemática para a Educação Básica? Essa inquietação fazia sentido, pois as propostas curriculares pouco discutiam essas questões.

Como o nosso trabalho na CENP envolvia os professores da rede pública estadual, percebíamos as dificuldades que esses docentes tinham na implementação de inovações curriculares em suas aulas. Esse fato pode ser corroborado pelo documento “Análise dos relatórios, SE/CENP, 1988” que continha as análises dos pareceres dos professores que ensinavam Matemática sobre a Proposta Curricular para o 1.º grau (Ensino Fundamental), elaborados em julho/agosto de 1987. Este documento faz referências à posição dos professores, inequívoca, de rejeição à proposta por não se sentirem em condições de incorporar as diretrizes nela contidas.

Pudemos constatar, assim, que os modelos existentes de formação de professores, por nós conhecidos, não eram suficientes para atender às demandas curriculares, como a de buscar uma aprendizagem baseada na compreensão de conceitos, a resolução de problemas e a utilização da história da Matemática, como meio de ensinar e aprender matemática.

Em 1997, passamos a integrar a equipe de elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática (5.ª a 8.ª séries), documentos estes que levavam em conta um movimento amplo de reformas do Ensino de Matemática iniciadas a partir de meados dos anos 80, cuja finalidade era adequar o trabalho escolar a uma nova realidade, marcada pela crescente presença dessa área do conhecimento em diversos campos da atividade humana.

Havia um consenso inicial entre os membros da equipe de elaboração dos PCN no que concerne às concepções gerais do documento e em particular quanto à adoção da resolução de problemas como um princípio norteador do fazer matemática em sala de aula. Ao longo do processo de construção dos PCN ocorreram, evidentemente, muitas discussões entre os membros da equipe e representantes da comunidade de Educação Matemática, a respeito de diversas posições a serem adotadas, seja em relação aos objetivos, à seleção e organização de conteúdos. No entanto, foram pouco profundos os debates sobre argumentações e provas e sobre suas potencialidades pedagógicas. Mesmo assim, no item “Orientações Didáticas” encontram-se algumas reflexões sobre esse tema e apenas no que se refere ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

Nosso questionamento a respeito das demonstrações consolidou-se ainda mais, a partir de 1998, quando passamos a atuar como docente de disciplinas do início do curso de Licenciatura em Matemática da PUC-SP. Nesse trabalho discutíamos algumas demonstrações com nossos alunos, mas eram muitas as inquietações: desde as mais específicas, como a seleção dos teoremas que iriam ser apresentados e a maneira pela qual esse trabalho deveria ser desenvolvido, até as questões mais gerais, como encontrar os reais significados da prova rigorosa na formação do professor de Matemática.

Um outro fator ampliou ainda mais essas preocupações: o Exame Nacional de Cursos – ENC, o “provão”. Nossos alunos, sentindo-se impotentes perante as questões discursivas desses exames, que envolviam demonstrações, questionaram as razões pelas quais não souberam provar as propriedades solicitadas e alguns chegaram a fazer indagações do tipo: “por que vocês, em lugar de ficar demonstrando uma coisinha aqui, outra ali, não nos ensinam logo de vez a provar? Quando vamos estar preparados para isso? O que nós devemos saber demonstrar para ser um bom professor de Matemática? Vamos ter que ensinar provas para nossos futuros alunos?”.

Nossas reflexões e leituras sobre esse tema ainda eram incipientes para que pudéssemos responder satisfatoriamente a essas questões.

Ainda que questionássemos alguns aspectos desses exames, no que se referia aos objetivos e à forma pela qual os resultados eram divulgados, não podíamos deixar de considerar que eles motivaram todo o grupo de docentes de Licenciatura em Matemática da PUC a rediscutir seu projeto de formação de professores. Apesar de ter o provão como pano de fundo, a discussão do grupo foi no sentido de que era necessária a reformulação do curso não apenas para que os alunos melhorassem seu desempenho nesse exame mas, principalmente, para formar um professor capaz de colocar em prática as orientações didáticas decorrentes de resultados de pesquisas em Educação Matemática.

Para subsidiar os debates dessa reformulação, o grupo se fundamentou em diversos estudos; no entanto, sentimos, nessa época, ausência de pesquisas que analisassem a formação de professores de Matemática e, em especial, trabalhos envolvendo demonstrações.

Pessoalmente, não tínhamos dúvidas a respeito da importância desse tema na formação de professores de Matemática, mas uma pergunta permanecia sem resposta: que experiências um futuro professor de Matemática deveria vivenciar em sua formação inicial para constituir competência na organização e direção de situações de aprendizagem visando ao desenvolvimento do raciocínio dedutivo de seus alunos? E eles próprios “dispunham” desse raciocínio?

Outro fato contribuiu definitivamente para a realização deste trabalho: no primeiro semestre de 2002, ao assistir a uma aula de Lulu Healy, no curso de Mestrado em Educação Matemática da PUC-SP, pude perceber reações interessantes e contraditórias dos mestrandos – todos eles professores de Matemática – em uma atividade cujo objetivo era analisar as argumentações elaboradas por adolescentes para provar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Healy solicitou, também, aos participantes que dessem uma nota de zero a dez para cada “prova” e a justificassem.

Nessa aula, um fato marcante foi a demonstração de uma certa incredulidade expressa da seguinte forma: “nossas crianças não são capazes de produzir argumentações como essas [...]” e “foram elas mesmas que fizeram essas provas?”, e até outras elogiando a criatividade: “as provas produzidas são muito criativas”.

No entanto, apesar dos elogios, alguns questionaram algumas das argumentações apresentadas afirmando: “a prova de Helen é muito interessante e criativa, mas não é uma prova matematicamente falando”. Para uma mesma produção houve, por exemplo, quem atribuísse nota 9 e quem desse nota 2. Foram feitas, também, afirmações diversas a respeito da inclusão das provas no currículo como: “no Brasil nós não ensinamos demonstrações nos Ensinos Fundamental e Médio, e em outros países ensinam?”.

Outra vivência significativa referente às provas na formação de professores ocorreu quando tivemos, no 2.º semestre de 2001 e 1.º semestre de 2002, a responsabilidade de ministrar, num projeto de extensão universitária na PUC-SP, dois módulos de Geometria (72 horas cada) em curso de aperfeiçoamento em ensino de Matemática para professores da Educação Básica da rede pública de São Paulo.

Embora tivéssemos planejado tematizar aspectos didáticos e metodológicos, os professores solicitaram que aprofundássemos os conteúdos matemáticos. Para conciliar esses dois propósitos abordamos inicialmente conteúdos de Geometria Espacial e Plana analisando os conteúdos de geometria no processo de ensino e aprendizagem na Educação Básica, mas de forma bastante experimental, sem maiores formalizações. No 2.º módulo, por sugestão dos próprios professores, aprofundamos os conteúdos e desenvolvemos um trabalho mais formal. Consideramos, na época, que a inclusão de algumas provas formais poderia dar ao módulo a dimensão esperada pelos professores.

Antes de iniciar o 2.º módulo, propusemos aos professores que escrevessem sobre o significado dos termos: teorema, postulado e conjectura. As respostas não foram satisfatórias. Transcrevemos, a seguir, algumas das respostas desse grupo de professores para o significado de teorema:

> “Teorema é um problema que o professor passa e que os alunos não conseguem resolver”;
> “Teorema é um exercício bastante difícil de geometria”;

> “A pergunta é sobre o teorema de Pitágoras ou sobre o teorema de Tales?”;
> “A matemática tem dois teoremas: o Tales e o Pitágoras”;
> “Eu conheço só dois teoremas: teorema de Tales e teorema de Pitágoras”.

Alguns professores do grupo associaram “teorema” aos nomes de Pitágoras e de Tales, como se o termo “teorema” não tivesse em si significado. Para esses, “teorema” seria sempre uma palavra a ser composta com outra, assim: teorema–de–Pitágoras ou teorema–de–Tales.

As respostas mais “aceitáveis” para teorema foram as seguintes: “teorema é provar uma hipótese, mostrar graficamente ou de outra maneira o que se sabe que é correto” e “teorema é uma prova que a hipótese levantada de geometria é verdadeira”.

Mais da metade do grupo alegou que não sabia os significados de conjectura nem de postulado, e os que ousaram explicitá-los ficaram muito aquém de uma resposta razoável.

Ressaltaríamos que esse curso foi importante não apenas por constatarmos a realidade e o desejo de alguns professores, pois, a despeito da formação insuficiente, souberam identificar suas necessidades, reconhecendo suas deficiências e mostrando um profundo desejo de mudança profissional: tornarem-se docentes mais competentes e seguros quanto aos próprios conhecimentos matemáticos.

Os fatos e indagações aqui descritos justificam nosso interesse em realizar este trabalho. Entretanto, para justificá-lo plenamente e mostrar sua relevância será necessário problematizar ainda mais a questão da demonstração, tanto no âmbito do currículo da Educação Básica como no da formação de professores.

1.2 Inovações curriculares e formação de professores

Ao longo das últimas décadas, diferentes inovações curriculares foram propostas e implementadas, impulsionadas por motivos diversos como o Movimento Matemática Moderna e por outras tendências que vieram depois deles.

Relativamente ao tema de nossa investigação, pode-se dizer que os atuais currículos de Matemática para Educação Básica de alguns países indicam a necessidade do trabalho com as demonstrações para que essa disciplina possa desempenhar seu papel.

Essa posição favorável às argumentações e provas nos currículos prescritos pode ser explicada, certamente, pela atenção que esse tema vem recebendo, nos últimos anos, por parte de muitos pesquisadores. Schoenfeld (1994), por exemplo, discute que a demonstração não é algo que possa ser retirado da Matemática, como ocorre em muitos programas de ensino, pois para ele a prova é uma componente essencial da prática e da comunicação matemática.

Já mencionamos que os PCN para a Educação Básica, embora de maneira bastante tímida, indicam um trabalho, desde o Ensino Fundamental, envolvendo argumentações e provas. Por outro lado, os educadores matemáticos brasileiros parecem dedicar pouca atenção a esse tema, isso se levarmos em conta o reduzido número de pesquisas sobre ele.

Pudemos corroborar essa posição quando desenvolvemos nossa Dissertação de Mestrado, em que analisamos os pareceres sobre os PCN para o Ensino Fundamental com vistas a evidenciar convergências e divergências, entre os educadores matemáticos, sobre as concepções teóricas desse documento. Neste trabalho descrevemos e analisamos posições de professores e educadores matemáticos a respeito de algumas das diretrizes para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Fundamental veiculadas pelos PCN, como a resolução de problemas e História da Matemática. Para isto, examinamos noventa e seis pareceres, institucionais e individuais, sobre esse documento.

Nessa pesquisa, constatamos que apenas alguns leitores críticos questionaram o posicionamento dos PCN quanto ao trabalho com a argumentação e com a prova no Ensino Fundamental. Em síntese, consideravam que esse documento não defendia claramente um resgate desse assunto, visto o abandono desse tema nos currículos prescritos dos anos 80, como a Proposta Curricular do Estado de São Paulo. Esses poucos pareceristas defenderam um trabalho efetivo com as demonstrações nas séries finais do Ensino Fundamental, desde que esse tema fosse anteriormente discutido nos cursos de formação de professores.

Sabemos que há uma grande diferença entre as proposições prescritas em currículos oficiais e os currículos efetivamente praticados nas escolas. Mesmo assim, com relação ao trabalho com provas, a não-explicitação do assunto nos currículos prescritos permite conjecturar que também não fazem parte das aulas de Matemática.

Segundo Pires (2002), “Matemática na estrutura curricular” e “formação de professores” são temas que estão na pauta das discussões, em diferentes países e também no Brasil. Para essa pesquisadora, embora esses dois temas mantenham estreitas relações entre si, nem sempre eles têm sido discutidos de forma articulada, o que, em certo sentido, ajuda a explicar, por um lado, a dificuldade de implementação de propostas curriculares quando não se leva em conta que tipo de formação, que tipo de experiência têm os professores que vão colocá-las em prática e, por outro, a dificuldade de desenvolver projetos mais consistentes de formação de professores quando não se tem clareza do tipo de profissional que se deseja formar para atender às novas demandas que se apresentam.

Embora se saiba que são os professores que, em última instância, dão vida ao currículo, pouco ou nenhum espaço de participação tem sido dado a eles, ainda que se os considerem os principais agentes para promover qualquer mudança educativa. Se o professor não compreender as inovações curriculares ou não estiver convencido delas, a potencialidade da mudança fica consideravelmente limitada. As dificuldades de implementação de propostas curriculares, tal como aconteceu com a Proposta Curricular de Matemática para o 1.º grau do Estado de São Paulo, em 1988, e com os PCN, a partir de 1998, atestam essa afirmação.

As formas como esses currículos são elaborados, divulgados e implementados têm provocado cenas repetidas de resistência, rejeição e ceticismo dos professores perante "mais uma mudança". Além de se sentirem excluídos do processo de discussão e elaboração curricular, suas reações também estão ligadas ao tipo de formação que receberam.

Em geral, professores são resistentes a mudanças, pois suas concepções e crenças, construídas ao longo de sua vida escolar, funcionam como obstáculos no processo de reflexão sobre novas idéias. Pires (2002) afirma que as experiências de implantação de novas propostas curriculares mostraram que o processo de implementação das mesmas "bate de frente" com concepções, crenças e valores muito arraigados nos professores, programas inadequados de formação inicial, livros que não incorporam novas possibilidades de trabalho. Tudo isso torna o processo lento, com avanços quase imperceptíveis e mesmo com distorções na aplicação de novas idéias, trazendo muitas vezes prejuízos ao processo de ensino e de aprendizagem.

A esse respeito, Garcia (2003) defende a necessidade de integrar a formação de professores em processos de mudança, inovação e desenvolvimento curricular. O fato de os professores estarem preocupados com as inovações curriculares constitui um ambiente favorável à formação.

Escudero (1992) considera que a formação, se bem entendida, deve estar preferencialmente orientada para a mudança, ativando "reaprendizagens nos sujeitos e na sua prática docente que deve ser, por sua vez, facilitadora de processos de ensino e de aprendizagens dos alunos" (1992, p. 57).

A necessidade de articular formação de professores e processos de desenvolvimento curricular é apenas um dos aspectos a serem considerados na formação de professores. Nas últimas décadas, a discussão sobre pesquisas concernentes à formação de professores de matemática – inicial e continuada –

tem sido tema freqüente em mesas redondas e painéis, em diferentes congressos de Educação Matemática. Nos dois últimos congressos internacionais de Educação Matemática – ICME 9 em 2000, no Japão, e ICME 10 em 2004, na Dinamarca – houve grupos de trabalhos sobre a questão da formação de professores, respectivamente com as denominações: In-service and preservice education of Mathematics teachers e Education, professional life and development of Mathematics teachers.

Mesmo assim o reconhecimento da importância de pesquisar a formação de professores é recente no Brasil como em outros países. As investigações e as pesquisas na área da Educação Matemática e na área da Didática da Matemática estiveram mais voltadas para o aluno e menos para a relação entre a formação oferecida ao professor e o seu trabalho em sala de aula.

Evidentemente, a questão da formação do professor de Matemática insere-se numa perspectiva mais ampla, envolvendo questões que tratam da superação da crise da identidade do professor, do fortalecimento da dimensão profissional de seu trabalho, sendo a formação entendida parte essencial do processo de profissionalização.

Nos debates sobre formação de professores, um dos temas centrais refere-se ao conceito de competência profissional, segundo o qual a referência principal, o ponto de partida e de chegada da formação, é a atuação profissional do professor. Para Perrenoud (2000), a noção de competência "designa uma capacidade de mobilizar diversos recursos cognitivos para enfrentar um tipo de situação". No entanto, nas investigações sobre a formação de professores de Matemática poucas referências são feitas a respeito das competências específicas desse profissional.

Pires (2002) indica a necessidade de aprofundar dois aspectos: "em que sentido está sendo usada a expressão competência profissional" e "que competências profissionais se desejam que um professor de Matemática construa ao longo de sua formação profissional e de sua trajetória profissional?".

A esse respeito, Abrantes (2001) descreve algumas competências específicas de um professor de Matemática, dentre as quais cinco estão diretamente relacionadas com argumentação e demonstração:

> "Conceber que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação";
> "Compreender noções de conjectura, teorema, demonstração";
> "Examinar conseqüências do uso de diferentes definições";
> "Explorar situações-problema, procurar regularidades, fazer conjecturas, fazer generalizações, pensar de maneira lógica";
> "Apreciar estrutura abstrata que está presente na Matemática".

A partir dos levantamentos que realizamos com professores em cursos de formação continuada na rede pública de São Paulo, já mencionados, podemos conjecturar que essas competências descritas por Abrantes não têm sido foco de atenção dos processos de formação inicial e continuada de professores de Matemática. Essa conjectura é reforçada pelos resultados do Exame Nacional de Cursos (ENC), pois o desempenho dos alunos do último ano do curso de Licenciatura nas questões dissertativas, especialmente naquelas cujos comandos incluíam "prove", "demonstre", "justifique", não foi satisfatório, até mesmo por parte daqueles estudantes de universidades que atingiram os melhores resultados na prova de Matemática, globalmente.

A título de exemplo podemos citar o desempenho dos alunos em duas questões dissertativas – uma da prova de 2001 e a outra de 1998. Escolhemos apresentar essas duas questões por envolverem conteúdos normalmente desenvolvidos em 7.ª e/ou 8.ª séries do Ensino Fundamental.

A questão de 2001[2] tem por objetivo avaliar se o licenciando sabe demonstrar a fórmula de Bhaskara para resolver uma equação do segundo grau.

---

2 A questão foi assim apresentada: Em alguns livros didáticos de Matemática são expostos resultados práticos (objetivos, segundo os autores), que colocam o aluno como um aplicador de fórmulas surgidas não se sabe de onde, e sem explicitar para o estudante a estrutura lógico-dedutiva da Matemática. Muitos desses livros trazem, como uma receita mágica, a fórmula que resolve as equações quadráticas. Sendo a, b e c números reais, tais que $a \neq 0$ e $b^2 - 4ac > 0$, demonstre que se x é um real tal que $ax^2 + bx + c = 0$ então

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ (valor 20,0 pontos)

O resultado obtido é surpreendente: em uma escala de 0 a 100 a média de todo o Brasil é 8,6, sendo de 4,3 a média obtida pelos alunos das universidades particulares.

Já os resultados do item de 1998[3] são ainda piores: a média dos desempenhos dos alunos em um item de geometria plana – reescrita do enunciado de um teorema sobre as diagonais do losango na forma “se ... então ...”; demonstração desse teorema e a escrita da recíproca, informando a respeito de sua veracidade – foi de 4,4 em uma escala de 0 a 100 (nesse ano, não foi divulgado o desempenho isolado dos alunos das faculdades particulares).

As problematizações que apresentamos, envolvendo argumentações e provas nos currículos da escola básica e nos de formação de professores, justificam a relevância de pesquisas sobre a relação entre esses dois temas.

1.3 Metodologia de pesquisa

A trajetória pela busca de compreensões em uma pesquisa inicia-se, geralmente, com a formulação das questões que o pesquisador pretende investigar. Ainda que essas questões possam – talvez devam – ser posteriormente reformuladas ou delimitadas, elas são necessárias, pelo menos inicialmente, para nortear escolhas, seja em relação à metodologia, seja em relação à fundamentação teórica.

Nos itens anteriores fizemos uma breve análise da questão das demonstrações nos currículos, mas para fazermos opções – teóricas e

3 A questão foi assim apresentada:

O losango é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais. A partir dessa definição, pode-se demonstrar a seguinte afirmação: “ter diagonais perpendiculares é condição **necessária** para que um quadrilátero seja um losango”.

a) Enuncie esta afirmação sob a forma de um teorema do tipo **“Se ... então ...”.**
a) Demonstre o teorema enunciado no item a).
a) Enuncie a recíproca do teorema enunciado no item a) e decida se ela é ou não verdadeira, justificando a sua resposta.

Foram dadas as seguintes informações adicionais: O teorema sobre os ângulos formados por duas paralelas cortadas por uma transversal pode ser considerado conhecido, bem como os casos de congruência de triângulos.

metodológicas – e justificá-las é necessário que explicitemos as questões desta pesquisa. Perguntamos:

- É desejável e possível desenvolver um trabalho com demonstrações nas aulas de Matemática em escolas de Educação Básica? Em caso afirmativo, qual deve ser o significado desse trabalho?
- Como professores da Educação Básica interpretam produções de "prova" de alunos do Ensino Fundamental e as avaliam?
- Que implicações o desenvolvimento desse trabalho – demonstrações na Educação Básica – deveria trazer para o curso de formação de professores de Matemática?

Evidentemente, o pesquisador ao formular suas questões algo delas já sabe, pois, apesar de possuir um pré-conhecimento acumulado a respeito, fruto de suas investigações e vivências, procura compreensões para seu estudo a partir das análises realizadas e das perspectivas dos sujeitos da investigação. Assim, o pesquisador vai procurar estratégias, escolher procedimentos metodológicos e adotar referenciais teóricos que permitam compreender melhor o objeto de pesquisa e estabelecer relações entre seus pressupostos e o revelado pelos sujeitos.

Na busca de compreensões acerca de como pesquisadores e professores entendem a questão do desenvolvimento das demonstrações nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio e as possíveis implicações que esse trabalho traz aos cursos de formação inicial de professores de Matemática, pudemos observar que é necessário entender um universo de significações, experiências, motivos e valores que acreditamos ser impossível quantificar.

Bicudo (1993) considera o ato de pesquisar como "perseguir uma interrogação (problema, pergunta) de modo rigoroso, sistemático, sempre andando em torno dela, buscando todas suas dimensões [...]", e que a busca de compreensões a respeito do que se pretende investigar envolveria o olhar para a qualidade dos elementos que sejam significativos ao pesquisador.

Segundo Garnica (1995), esta compreensão não estaria “ligada estritamente ao racional, mas é tida como atividade própria do homem, imerso num contexto que constrói e do qual é parte ativa. O homem compreende porque interroga as coisas com as quais convive”. Assim, não há neutralidade do pesquisador em relação à pesquisa, pois ele atribui significado, seleciona o que do mundo quer conhecer, interage e se dispõe a comunicá-lo.

Em relação à questão da neutralidade do pesquisador, convém ressaltar que não compartilhamos da concepção de que a ciência é neutra e imparcial, pois teria como um dos princípios de ideal de cientificidade a distinção entre sujeito e objeto de conhecimento e a crença de que a ciência se caracteriza por retirar dos objetos do conhecimento os elementos subjetivos. Essa dicotomia sujeito/objeto estabeleceria a idéia de objetividade, a independência total dos fenômenos em relação ao sujeito que conhece e que age. Há muitas fontes que indicam a necessidade de romper com esse modo positivista de conceber pesquisa em Educação.

Foi por admitir que este estudo não está isento da nossa maneira de ver e compreender o fenômeno educativo é que reputamos necessário expor, no início deste capítulo, as motivações pessoais, decorrentes de fatos “históricos” vivenciados, para justificar a problemática do tema a ser pesquisado. Isto nos remete à subjetividade de nosso estudo, da qual não pudemos escapar e, por admiti-la, consideramos essencial agir com critérios claros, buscar o rigor e alcançar, tanto quanto possível, objetividade.

Com tais perspectivas para o desenvolvimento de nosso trabalho, o categorizamos como uma pesquisa de natureza qualitativa pelas características apresentadas a seguir.

Nossas entrevistas com os professores foram realizadas nas próprias instituições em que trabalham, por acreditarmos que o comportamento humano é influenciado pelo contexto em que ele ocorre. Além disso, o professor, por estar em seu local de trabalho, pôde recorrer às anotações de aulas, às produções dos alunos, exemplificar, enfim. Para o investigador qualitativo a separação da palavra ou gesto do seu contexto poderá implicar a perda do significado. Ou seja, “na investigação qualitativa a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal” (Bogdan e Biklen, 1994, p. 47).

Convém também destacar que resistimos à tentação de reduzir dados a números, sejam os obtidos por meio da pesquisa bibliográfica, sejam os obtidos dos depoimentos. Ainda que pretendêssemos quantificar, por exemplo, determinados dados das entrevistas, teríamos dúvidas em como fazê-lo, pois para compreender as posições do entrevistado era necessário proceder a diversas leituras, uma vez que este sempre colocava condicionantes ao responder afirmativamente, ou negativamente, nossas indagações. Além disso, quando o depoente retornava a alguma questão, geralmente o fazia destacando aspectos outros. Esses fatos nos mostraram que uma abordagem de pesquisa qualitativa deve, de fato, partir do princípio de que nada é trivial e de que todos os dados podem dar pistas a respeito do problema estudado.

É importante assinalar que, antes de efetuar a nossa investigação de forma mais sistematizada, nosso conhecimento sobre o tema não era suficiente para identificar seus aspectos mais centrais. No entanto, as nossas suposições iniciais, provenientes de experiências e ainda pouco elaboradas, foram sendo clareadas na medida em que efetuávamos os levantamentos bibliográficos referentes às argumentações e provas e concernentes à formação de professores de Matemática. A análise das pesquisas existentes sobre o tema nos indicou a necessidade de entrevistar professores de Matemática da Educação Básica e de pesquisadores em Educação Matemática, com vistas a esclarecer os significados que procurávamos.

Assim, nesse processo de recolher e examinar os dados é que o quadro de nossa pesquisa foi ganhando forma, os conceitos foram se tornando mais precisos: “o processo de análise dos dados é como um funil: as coisas são abertas de início (no topo) e vão se tornando mais fechadas e específicas no extremo” (Bogdan e Biklen, 1994, p. 50).

1.4 O percurso da investigação

Iniciamos nossa busca com um extenso levantamento bibliográfico, o mais atualizado possível sobre as demonstrações nos currículos de Matemática da Educação Básica e nos de formação de professores. Nesse levantamento pudemos verificar a existência de diversos estudos defendendo a inclusão das provas matemáticas nas escolas, mas encontramos poucas pesquisas que articulassem a formação de professores a esse trabalho.

Como não havia estudos sobre demonstrações na Escola Básica realizados no Brasil, consideramos relevante conhecer pontos de vista de professores e pesquisadores que aqui atuam, pois, desta forma, poderíamos agregar elementos às discussões sobre implementação de provas nas aulas de Matemática da Escola Básica de nosso país.

Realizamos dezesseis entrevistas com nove doutores, professores de cursos de licenciatura e/ou pesquisadores em Educação Matemática e com sete professores de Matemática do Ensino Fundamental (séries finais) e/ou Médio. Optamos por fazer entrevistas semi-estruturadas, cuja duração média foi em torno de duas horas.

Os entrevistados compuseram dois grupos. Nossa intenção era obter, junto aos representantes do Grupo I, a “fala da teoria”, e junto aos integrantes do Grupo II, a “fala da prática”.

O primeiro – denominado grupo I – era composto de nove professores: sete doutores em Educação Matemática e dois em Matemática. Desses professores, três trabalham em universidades públicas e seis em particulares (dois destes são aposentados de universidades públicas). Para a seleção desses professores determinamos dois critérios: ter desenvolvido, ou estar desenvolvendo, pesquisas em Educação Matemática ou atuar na formação inicial de professores da Educação Básica. Três dos nove professores lidavam unicamente com programas de pós-graduação em Educação e apenas um trabalhava exclusivamente no curso de Licenciatura.

Com o propósito de diversificar o grupo, procuramos escolher professores que lecionassem diferentes disciplinas ou cujas pesquisas tivessem focos distintos. Assim, este grupo conta com professores de álgebra, geometria, cálculo, análise e probabilidade. As pesquisas que esses educadores desenvolvem também são variadas: geometria, álgebra, probabilidade e estatística, desenvolvimento curricular, história da matemática na organização curricular, novas tecnologias, história da matemática.

Para selecionar os professores que iriam compor o grupo II foi necessário entrevistar cerca de trinta professores, indicados por pares como tendo domínio dos conteúdos trabalhados nesses graus de escolaridade e experiência docente nos dois níveis da Educação Básica. Além do conhecimento do conteúdo, experiência e disponibilidade para participar da pesquisa, outro requisito para a seleção foi a prática docente: deveriam desenvolver um trabalho com provas ainda que com pouca freqüência ou, pelo menos, com as justificativas dos algoritmos, normalmente presentes nos currículos das escolas e com a resolução de problemas. De todos os entrevistados, encontramos sete experientes professores do Ensino Fundamental e/ou Médio.

Esse recorte que fizemos foi absolutamente intencional, pois reiteramos que queríamos professores que tivessem domínio dos assuntos a serem ensinados e preocupações com a questão da argumentação nas aulas de Matemática.

Todavia, cabe ressaltar que o grupo pesquisado era razoavelmente heterogêneo, pois incluiu tanto professores que se autodenominaram "tradicionais" como aqueles que se consideravam "construtivistas". Ou seja, neste grupo há aqueles cujas aulas são quase que exclusivamente expositivas e que, em geral, desenvolvem um tema numa determinada seqüência – definição, propriedades, exercícios, problemas – e não consideram o problema como ponto de partida da atividade matemática. Também há os que procuram não seguir esses preceitos, propõem trabalhos em grupos, partem de situações-problema para desenvolver um conceito, procuram contextualizar e criar significados para as noções a serem aprendidas.

Dos professores que compuseram o grupo II, quatro trabalhavam exclusivamente em escola particular, dois em escola pública e particular e apenas um professor é exclusivo de escola pública. Quanto aos graus de ensino, apenas três professores ministravam aulas no Ensino Fundamental, sendo um deles unicamente desse grau e os demais no Ensino Médio – dois desses também ministravam aulas em cursos superiores.

Esses docentes, segundo eles próprios, tinham em comum uma “grande paixão” por ensinar Matemática, a despeito das diferenças existentes: faixa etária, condições de trabalho e metodologias que costumam utilizar.

Apresentamos, no anexo I, um perfil de cada entrevistado de modo a auxiliar o leitor a contextualizar os depoimentos e compreender as posições defendidas, relacionando-as com a prática e respectiva formação. Todavia, nesse perfil não indicamos características que pudessem identificar o entrevistado, como o nome da instituição em que trabalham.

Os professores dos dois grupos realizaram depoimentos a respeito das possibilidades das argumentações e provas nos currículos de Matemática da Educação Básica e o trabalho que deveria ser desenvolvido na formação inicial para que eles tivessem maior competência para elaborar e dirigir situações de aprendizagem envolvendo esse tema.

Além disso, cada professor do grupo II analisou provas – de geometria e de álgebra – elaboradas supostamente por alunos de 8.ª série e indicou quais ações desencadearia com esses alunos, caso fosse professor dessa turma. As questões das entrevistas e as provas estão no Anexo II e a transcrição das entrevistas e as análises das provas estão no Anexo III.

Cabe ressaltar que um dos professores de Educação Básica apresentou por escrito as análises das provas elaboradas pelos alunos.

A leitura dos depoimentos dos entrevistados permitiu-nos identificar o que chamaremos de unidades de significado, ou seja, aquelas falas mais significativas que poderiam fornecer elementos para discussão das questões de pesquisa. Ou seja, essas unidades são os recortes do discurso do entrevistado que têm plenas possibilidades de significação segundo a compreensão do pesquisador.

O conjunto das falas recortadas de cada entrevista constitui o discurso do entrevistado, segundo a ótica do pesquisador, sobre cada questão de pesquisa. Esse conjunto está no Anexo IV.

Poder-se-ia supor que com esse recorte dos discursos haveria uma análise menos rica dos depoimentos. Essa “redução” não diz respeito apenas ao ato de juntar sentenças, mas ao cuidado que se tem quando os fenômenos em questão são vislumbrados, de modo que a atenção se volte a eles e não às teorias que deles falam.

A construção de unidades de significado foi um processo necessário, apesar de complexo, pois as entrevistas continham muitas informações e análises que eram retomadas durante esse processo. Assim, para responder a uma determinada questão, alguns recorriam às suas memórias passadas ou descreviam, em detalhes, sua prática pedagógica, enquanto outros detalhavam atividades que propunham aos seus alunos. Houve até quem citasse colegas para exemplificar o que consideravam uma boa prática pedagógica ou para indicar que existem professores que não têm bom domínio daquilo que ensinam.

A utilização desses recursos não significou uma “fuga” da resposta solicitada; pelo contrário, a intenção era, em geral, elucidar, por meio de exemplos, suas falas. Por outro lado, outros utilizaram sempre os mesmos argumentos para justificar suas colocações a respeito de diferentes questões.

Após a construção das unidades de significado, procedemos à análise, buscando identificar convergências e divergências entre os entrevistados e estabelecendo co-relações com as pesquisas que havíamos repertoriado.

Outrossim, cabe ressaltar que as conclusões feitas a partir das unidades foram conferidas pelas novas leituras dos depoimentos por inteiro. Caso houvesse alguma incompatibilidade, algumas unidades eram acrescentadas ou substituídas. Assim, a utilização das unidades de significado foi fundamental para as compreensões do pesquisador a respeito dos fenômenos estudados, pois para construí-las foram necessárias leituras muito atentas em momentos diversos.

Convém assinalar que os significados de argumentação, prova e demonstração, adotados em nossas questões aos entrevistados, não foram previamente esclarecidos a eles; pelo contrário, nosso propósito era que o próprio entrevistado indicasse os significados que atribuíam a esses termos em suas respostas.

Como em alguns momentos serão apresentadas análises em separado dos dois grupos de professores que compõem esta pesquisa, convém destacar os nomes pelos quais serão referenciados nos capítulos a seguir. Todos os que compõem os dois grupos são professores de matemática e, segundo nosso ponto de vista, também educadores matemáticos. No entanto, será necessário fazer uma distinção e optamos por fazê-lo segundo a função principal de seu exercício profissional.

O grupo I é composto por homens e mulheres que desenvolvem investigações no âmbito da Educação Matemática e, por isso, optamos por chamá-los de pesquisadores ou educadores matemáticos. Já os elementos do grupo II serão denominados de professores, visto que exercem essa função em escolas da Educação Básica.

1.5 Em busca de fundamentos teóricos – leituras e escolhas

O processo de desenvolvimento curricular, as variáveis que intervêm em sua formulação, as mudanças que ocorrem nos currículos e a implicação destas na formação de professores constituem um campo de investigação bastante amplo a ser explorado. Como nosso trabalho está na confluência de duas áreas de investigação – desenvolvimento curricular e formação de professores –, procuramos nos fundamentar em trabalhos de pesquisa que as contemplassem.

Quanto aos fundamentos teóricos, algumas das nossas escolhas surgiram das discussões ocorridas no Grupo de Pesquisa “Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores”, coordenado por nossa orientadora Célia Maria Carolino Pires, no âmbito do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, do qual tivemos a oportunidade de participar.

No que se refere ao desenvolvimento curricular, em especial às possibilidades da argumentação e da prova nos currículos das escolas da Educação Básica, envolvendo concepções de estudantes e professores, baseamo-nos nos seguintes estudos: Balacheff (1987), Healy e Hoyles (2000), Knuth (2002), Dreyfus (2000). No capítulo 4, quando analisaremos diversas pesquisas envolvendo argumentações e provas, justificaremos as razões pelas quais fizemos essas escolhas.

Relativamente à formação de professores, além dos trabalhos já citados no item 1.2, como Abrantes (2001), Escudero (1992), Garcia (1999, 2003), Perrenoud (2000), Pires (2000, 2002), referenciamo-nos também em Shulman (1986 e 1992) e Garnica (1995, 2002).

Shulman (1992) tem como princípio que o processo de formação de um professor que vai ensinar uma determinada disciplina deverá levar em conta a especificidade própria dessa área, ou seja, ele indica a necessidade de sondar o conhecimento desse professor na área em que vai atuar. Para isso, ele identifica três vertentes do conhecimento do professor: o conhecimento do conteúdo da disciplina, o conhecimento didático do conteúdo da disciplina e o conhecimento do currículo.

A respeito do conhecimento do conteúdo da disciplina esse autor destaca dois diferentes aspectos que ele denomina conhecimento substantivo e conhecimento sintático. O conhecimento substantivo se refere ao corpo de conhecimentos gerais de uma disciplina que se deve conhecer, ou seja, inclui fatos, princípios, definições, noções, conceitos e procedimentos. O aspecto sintático do conhecimento do conteúdo, que complementa o substantivo, refere-se à estrutura, aos métodos e aos paradigmas de investigação da disciplina, como, entre outros, as questões referentes à validade, aos métodos de refutação e perspectivas, as relações entre conteúdos.

Por sua vez, Garnica (1995) trata especificamente da formação do professor de Matemática, identificando os significados de demonstração nesse processo. Ele constata a importância da prova rigorosa nessa formação e aponta duas leituras para ela: uma de natureza técnica, que estaria ligada mais diretamente à prática científica da Matemática, e a outra de natureza crítica, mais relacionada à Educação Matemática. Essa sua discussão a respeito das demonstrações em Matemática e Educação Matemática é ampliada em artigo posterior, no qual ele procura relativizar "posições classicamente hegemônicas", relativamente a provas rigorosas, por meio do que ele denomina de "etnoargumentações".

Neste capítulo pontuamos as principais referências teóricas que serão utilizadas neste trabalho. Todavia, elas serão detalhadas em maior profundidade em capítulos subseqüentes.

CAPÍTULO 2

PROVAS E MATEMÁTICA

"Qualquer matemático sabe que uma demonstração não é verdadeiramente 'compreendida' enquanto ele se limitar a apenas verificar, passo a passo, a correção das deduções que lhes foram apresentadas, sem contudo conceber de forma muito clara as idéias que conduziram à construção dessa cadeia de deduções e não uma outra qualquer."

(N. Bourbaki.)

2.1 Introdução

Discutiremos neste capítulo algumas referências obtidas na literatura a respeito de significados de *demonstração* e *prova* para matemáticos com o objetivo de identificar idéias que poderão favorecer nossa futura análise. Procuramos também abordar questões sobre o desenvolvimento do método axiomático e dedutivo e, conseqüentemente, da demonstração. Consideramos esse conhecimento importante para a compreensão da noção de prova em Matemática, sobretudo por avaliar que ele pode ser um excelente meio para refletir o papel das provas matemáticas nos currículos para formação de futuros professores dessa área.

Todavia, não pretendemos neste trabalho – nem seria possível – compreender e explicar a Matemática por meio da descrição do que e como os matemáticos demonstraram ao longo do tempo.[4] Assim, nosso propósito aqui é apenas indicar aspectos da demonstração – atividade tão essencial e cara aos matemáticos.

Convém assinalar que em artigos sobre a história da Matemática e, em particular, sobre Educação Matemática são usados variados termos para se referir às *demonstrações*, tais como: demonstrações formais, demonstrações rigorosas, provas rigorosas ou simplesmente provas. E nem sempre essas expressões são utilizadas como sinônimas. É possível identificar, inclusive, significados não exatamente idênticos para uma determinada expressão em um mesmo artigo.

Essa questão aparece não apenas na língua portuguesa, mas também em outras línguas. Em francês, as palavras *preuve* e *demonstration* têm o mesmo significado, mas há muitos autores que consideram necessária a distinção, sobretudo os educadores matemáticos. Na literatura anglófona, por exemplo, usam-se as palavras *proof* e *proving*, e alguns fazem distinção entre *formal proof* e *mathematical proof*.

Encontramos ainda para os diversos termos associados à palavra *prova* uma multiplicidade de significados, pois correspondem a conceitualizações distintas. Essa situação torna-se mais complicada se considerarmos os vários contextos nos quais esse vocábulo é utilizado. Essa questão tem interessado a alguns pesquisadores em Educação Matemática (Godino e Récio, 1997, Reid, 2002), para os quais a análise desses significados para as pesquisas que envolvem essa temática é fundamental.

Esses pesquisadores constatam, por exemplo, características dos conceitos de *prova* em diferentes contextos institucionais, como cotidiano, ciências empíricas, matemática escolar, matemática profissional, lógica e alicerces da matemática. Apesar disso, a maioria desses contextos apresenta

4 Esse trabalho é feito por Jean Dieudonné, um dos mais reputados matemáticos franceses contemporâneos, em *Pour l'honneur de l'esprit humain* – Les mathématiques aujourd-hui, publicada em 1987, cuja versão portuguesa recebeu o título: *Formação da matemática contemporânea*. Nessa obra, Dieudonné apresenta o panorama da Matemática atual e mostra uma "unidade profunda", apesar da variedade dos seus métodos e problemas.

situações com algo em comum: a procura pela validação de afirmações por meio de argumentos, ainda que estes possam ser articulados de maneiras distintas e por procedimentos diferentes.

Em relação ao termo *demonstração*, embora este seja empregado muitas vezes como sinônimo de *prova*, sobretudo em Matemática, alguns educadores fazem distinção entre eles. Nos dicionários de filosofia *prova* tem um sentido mais amplo que *demonstração*:

> Prova (gr. τεχμηριον; lat. Probatio; ingl. Proof; franc. Preuve; al. Beweis) Um procedimento próprio para estabelecer um saber, isto é um conhecimento válido. Constitui P. todo procedimento desse gênero, qualquer que seja sua natureza: o mostrar ad oculos uma coisa ou um fato, o exibir de um documento, o trazer um testemunho, o efetuar uma indução são P. como são P. as demonstrações da matemática e da lógica. O termo é, portanto, mais extenso do que demonstração (v): as demonstrações são provas, mas nem todas as provas são demonstrações (Abbagnano, 1982, p. 772).

Entretanto, no âmbito exclusivo da Matemática, *prova* e *demonstração* são, em geral, sinônimas e não precisariam de adjetivações: se uma prova foi plenamente aceita pela comunidade de matemáticos, então ela teria adquirido o *status* de rigorosa, embora a noção de rigor tenha sofrido algumas adaptações no decorrer do tempo. Todavia, em textos de História ou de Filosofia da Matemática não é incomum encontrar as expressões: provas demonstrativas e provas apodíticas, mostrando que adotam o significado apresentado pelo dicionário supracitado.

É importante assinalar que neste capítulo utilizaremos, salvo indicação em contrário, as palavras prova e demonstração com os significados expressos no parágrafo anterior, ou seja, como sinônimas, uma vez que vamos recorrer a argumentos elaborados por matemáticos, não necessariamente professores.

2.2 Prova e matemática: algumas notas históricas

A demonstração sempre esteve relacionada à validação das idéias matemáticas. No entanto, para validar resultados obtidos nem sempre ela foi utilizada. No caso dos antigos egípcios, por exemplo, parece não haver discordâncias de que a validação dos resultados e procedimentos matemáticos não possuía qualquer suporte teórico. Realmente, o critério de verdade preponderante – provavelmente o único – era o funcionamento desses resultados para as realidades a que se destinavam.

Ainda assim, alguns historiadores da Matemática admitem, por exemplo, que a regra encontrada no papiro Moscou para o volume do tronco de pirâmide de base quadrada pode ter sido obtida por meio de uma dedução "algébrica" a partir da regra, conhecida, do cálculo do volume de uma pirâmide. De todo modo, essas demonstrações seriam esporádicas e não tinham como base o método dedutivo.

Embora não saibamos exatamente qual foi o percurso do desenvolvimento da noção de *prova* em Matemática, costuma-se aceitar que ele tenha sido originado na Grécia, pois nenhum documento de uma civilização antiga, anterior aos fragmentos dos autores gregos dos séculos VII e VI a.C, nos permite dizer o contrário.

Pode-se dizer que entre os gregos a Matemática se constituía em um conjunto de proposições válidas, que diziam respeito a alguns objetos e idéias, utilizando-se para isso alguns termos e expressões comuns. Uma nova proposição era incorporada a esse conjunto, se fosse considerada evidente ou se decorresse de outras admitidas como verdadeiras. Esses julgamentos eram realizados de forma totalmente intuitiva, pois careciam de uma base estrutural.

Aristóteles e Platão foram, provavelmente, os primeiros a escrever textos a respeito de provas. Para desenvolver uma prova por meio de uma sucessão de inferências, Platão descreve assim numa passagem da *República* (VI, 510, a.C.):

> Aqueles que se ocupam da geometria, da aritmética e ciências desse gênero admitem o par e o ímpar, as figuras, três espécies de ângulos [...] Estas coisas dão-nas por sabidas e, quando as usam como hipóteses, não acham que ainda seja necessário prestar contas disso a si mesmos nem aos outros, uma vez que são evidentes para todos. E, partindo daí e analisando todas as fases, e tirando as conseqüências, atingem o ponto a cuja investigação se tinham lançado (p.185).

O desconhecimento do percurso histórico da prova pode ser explicado por vários motivos. Garnica (1995) indica razões da existência de poucos trabalhos históricos sobre o desenvolvimento da *prova*: a forma natural com que os matemáticos encaram a *prova*, não problematizando *a priori* essa questão; um certo preconceito da noção de história, alimentado por matemáticos e por cientistas da natureza; as dificuldades inerentes às pesquisas históricas como essas, um trabalho “quase arqueológico”; “o argumento de que, no caso de rigor, não há uma história de mudanças, mas sim de adaptações que ditam as leis da lógica” (Garnica, 1995, p. 15).

Arsac (1987) examina aspectos do desenvolvimento da noção de *prova* apresentando duas teses: uma externalista e outra internalista. A tese externalista analisa o desenvolvimento dessa noção fundamentalmente como conseqüência de parâmetros externos – a sociedade grega por assim dizer. Arsac considera a tese de que a transformação da Matemática em ciência hipotético-dedutiva teria sua origem no uso das regras do debate argumentativo que conduzia a vida política na sociedade grega.

De fato, essa idéia de demonstração, por uma sucessão de inferências lógicas a partir de axiomas, só foi possível graças ao grande interesse dos gregos pela lógica gestada nas escolas filosóficas gregas. Um exemplo é o raciocínio por absurdo, uma das ferramentas refinadas da lógica, e que se tornou um dos pilares da dedução em Matemática.

Já a tese internalista seria gerada no interior da própria Matemática por meio de problema que necessitasse de uma argumentação sólida e consistente. Provavelmente esse problema seria o da incomensurabilidade de segmentos, pois ele é contemporâneo ao surgimento da demonstração.

A concepção internalista está presente no Sumário Eudemiano, uma das poucas fontes históricas a respeito da Matemática grega do período helênico que trata das contribuições dos pitagóricos (V a.C). Segundo essa fonte, pode-se dizer que a escola pitagórica, movida por razões intelectuais e para resolver problemas abstratos, seria precursora da Matemática Pura. Podemos também assinalar que essa escola deu à Matemática algum caráter dedutivo.

Conta-se que Hipaso de Metaponto comprovou a falsidade da crença dos pitagóricos de que todos os fenômenos do universo pudessem ser explicados por meio dos números inteiros. Não se sabe exatamente como isso foi feito, mas por volta de um século depois Aristóteles enunciou que essa demonstração teria sido por absurdo e provou, por esse método, que o lado do quadrado e sua diagonal são incomensuráveis entre si.

Essa demonstração realizada por Aristóteles, talvez a mesma de Hipaso, e que provocou a crise da Matemática grega, indica que a idéia de utilizar encadeamento de propriedades conhecidas e articuladas mediante raciocínios lógicos para constatar a validade de outras propriedades era uma realidade anterior a Euclides. No entanto, faltava uma estruturação preliminar composta de noções, postulados e definições.

Apesar de *Elementos de Euclides*[5] ser a obra mais antiga que trazia essa estrutura, em seu modelo axiomático dedutivo não havia conceitos primitivos. Talvez ele pretendesse dar sentido aos objetos iniciais de estudo para o leitor, relacionando-os com sua experiência mais imediata. Assim, todos os objetos matemáticos eram definidos: o ponto, por exemplo, é “aquilo que não tem partes”, “linha é um comprimento sem largura”. Os postulados[6] que se seguiam possuíam

---

5 Queremos ressaltar que muitas pessoas que ouviram falar dos *Elementos de Euclides* têm a idéia de que se trata de uma obra exclusivamente sobre Geometria. Nos livros que a compõem constam, também, a Aritmética e a Álgebra. Talvez a origem desse equívoco esteja no fato de que a Matemática na época de Euclides era toda “geometrizada”.

6 Os cinco postulados de Euclides foram assim formulados:

1. É pedido que se trace uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer.
1. E de prolongar continuamente em linha reta uma linha reta limitada.
1. E de descrever uma circunferência a partir de todo o centro de todo o intervalo.
1. E que todos os ângulos retos sejam iguais entre si.
1. Se uma reta secante a duas retas forma ângulos interiores e do mesmo lado menores que dois retos, as duas retas, indefinidamente prolongadas, se encontrarão do lado onde os ângulos são menores que dois retos.
   (Vitrac, 1990, p. 167-175; tradução nossa do francês.)

um caráter de auto-evidência com exceção do 5.º postulado: se uma reta corta duas outras, formando em um lado, dois ângulos interiores cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas duas retas, se prolongadas indefinidamente, cortar-se-ão no lado em que isso acontece.

Na verdade, Euclides[7] trabalhou explicitamente, além das definições, com apenas cinco postulados que foram formulados na abertura de sua obra. No entanto, para demonstrar todas as suas proposições, foram necessários outros pressupostos. Após diversas análises críticas de sua obra ao longo do tempo, pode-se dizer que a Geometria Euclidiana baseia-se em dezesseis axiomas. Apesar disso, os Elementos constituem um grande testemunho do poder do método dedutivo na Matemática e por aproximadamente dois mil anos foi considerado o modelo de excelência matemática. Mais ainda, os Elementos contribuíram para que muitos estudiosos estabelecessem a Matemática como um modelo exemplar de ciência.

No entanto, é preciso ressaltar que o modelo axiomático dedutivo não foi seguido por todos os "matemáticos": na aritmética de Diofanto (século III d.C.), por exemplo, não estão presentes definições, postulados e proposições, mas mesmo assim é considerada uma das grandes realizações dos gregos, sobretudo pelo seu caráter inovador.

No decorrer da Idade Média, com o declínio cultural do Ocidente, pode-se dizer que o centro da produção matemática deslocou-se para os mundos árabe e hindu. Apesar do modo interessante como esses povos validavam seus resultados, eles não priorizavam a demonstração tal como fizeram os gregos no auge de sua civilização.

No período do renascimento até o século XIX houve um resgate da Geometria Euclidiana pelo Ocidente, a despeito das falhas que vinham sendo detectadas desde o século XI. No entanto, apesar do reconhecimento do modelo

---

7 No primeiro livro dos *Elementos*, ele enuncia vinte e três definições, cinco postulados e algumas noções comuns ou axiomas. Em seguida, deduz quarenta e oito proposições ou teoremas, os quais constituem o saber geométrico, como a proposição 1: "É possível construir um triângulo eqüilátero a partir de uma dada linha reta finita" (Vitrac, 1990, p. 194).

euclidiano, a Matemática então produzida estava longe desse ideal, haja vista as novas áreas como a geometria analítica e o cálculo:

> [...] R. Descartes (1596 – 1650), um cientista que valorizava sobremodo o método axiomático dedutivo, em particular o método matemático, ao escrever sua única obra matemática, *A geometria*, não utilizou nem postulados nem demonstrações, marginalizando, assim, sua própria epistemologia. Quanto ao cálculo, basta citar que um de seus criadores, I. Newton (1643 – 1727), fez três tentativas para passar a limpo suas idéias, nenhuma delas convincente, rigorosamente falando. [...] Evidentemente, não faltava capacidade a esses matemáticos, muito pelo contrário. A verdade é que os fundamentos da matemática de um modo geral careciam ainda de uma estruturação mais sólida e abrangente e isso não seria alcançado senão na segunda metade do século XIX (Domingues, 2002, p. 61).

Assim, no início do século XIX, com exceção da Geometria Euclidiana, a Matemática procurava seus fundamentos. O fato é que, até o final do século XIX, a demonstração era uma atividade desenvolvida por alguém que procurava convencer a si mesmo e aos outros a respeito da veracidade de uma proposição, não apenas do ponto de vista racional, mas também do psicológico.

> Até os últimos anos do século XIX, a noção de demonstração era, primordialmente, de caráter psicológico. Uma demonstração era uma atividade intelectual que objetivava convencer o próprio indivíduo e outras pessoas da verdade da sentença em discussão; mais especificamente demonstrações eram utilizadas no desenvolvimento de uma disciplina matemática para convencer o próprio indivíduo e os outros de que a sentença em discussão deveria ser aceita como verdadeira, uma vez que certas outras sentenças haviam sido aceitas como tal. Não havia restrições com respeito aos argumentos usados na demonstração, exceto que eles deveriam ser intuitivamente convincentes (Tarski, 1991, p. 113).

No entanto, mediante o desenvolvimento mais profundo de determinados assuntos – como o cálculo –, os raciocínios heurísticos e a intuição já não bastavam para explicar alguns resultados aparentemente paradoxais, que fugiam da lógica.

Em decorrência dessas questões, o modelo de demonstração que se tinha foi abandonado. O lógico G. Frege (1848 – 1925) foi um dos que contribuiu para a reformulação da idéia de demonstração, estabelecendo um modelo formal assim sintetizado por Tarski, em seu artigo Verdade e demonstração, de 1933, e publicado em língua portuguesa em 1991:

> [...] uma demonstração formal de uma sentença dada consiste em construir uma seqüência finita de sentenças tal que (1) a primeira sentença na seqüência é um axioma (2) cada uma das sentenças seguintes é um axioma ou, então, é derivável diretamente de algumas sentenças que a precedem na seqüência através de uma das regras de demonstração, e (3) a última sentença na seqüência é aquela que deve ser demonstrada. Alterando um pouco o uso do termo 'demonstração' podemos dizer que uma demonstração formal de uma sentença é simplesmente qualquer seqüência finita de sentenças que possua as três propriedades assinaladas (Tarski, 1991, p. 115).

As deduções seriam realizadas assim por simples regras de inferência e todas as proposições obtidas poderiam não constituir necessariamente verdades do assunto em pauta, mas sim conseqüências lógicas de axiomas.

Entre o fim do século XVIII e os meados do século XIX, com a aritmetização da análise e a criação das Geometrias não-euclidianas, a Matemática sofre uma transformação essencial, talvez única em sua história. Tal transformação não foi apenas pelas novas aquisições em seus vários campos, pois esse fato já ocorrera em outras épocas, mas principalmente por mudanças em sua própria natureza, seja em suas novas exigências do rigor, seja em suas relações com outras ciências, ou ainda de uma forma mais geral em sua relação com a própria realidade. A expressão Matemática Pura ganhava corpo e não há dúvida de que a *Crítica da razão pura* – 1781 – do filósofo Immanuel Kant teve um papel destacado na evolução semântica dessa expressão.

Não se pode deixar de vincular a esse movimento – desenvolvimento da noção de Matemática Pura – um dos maiores avanços da Matemática no século XIX: a reconstrução da análise sobre bases não-geométricas. A "aritmetização" da análise ilustra as teses de Kant em dois de seus aspectos: possibilidade de uma Matemática em que todo recurso à intuição sensível é banido, porque se apóia tão-somente sobre o conceito de número; a construção de conceitos matemáticos em razão de a aritmetização encontrar seu ápice na construção dos reais, o que permite realizar uma ruptura absoluta entre a análise e a experiência sensível. Relativamente às provas, Kant afirmou que aquelas que são demonstrativas encontram-se somente no domínio da Matemática, pois estas se realizam mediante a construção dos conceitos, e que os princípios empíricos não podem gerar nenhuma prova apodítica.

Assim, no início do século XIX os matemáticos liberados das amarras da intuição sensível desenvolveram geometrias não-euclidianas ao abandonarem o 5.º postulado de Euclides.

A criação das Geometrias não-Euclidianas foi um dos fatos mais significativos do século XIX, pois ela decorreu da “solução de um problema” que os gregos levantaram sem responder, pois, ao alegarem a falta de auto-evidência do 5.º postulado – “postulado das paralelas”[8] –, procuraram deduzi-lo dos outros postulados. Será que é possível obter tal prova? Matemáticos de outras gerações se empenharam em vão nessa tarefa. Foi somente no século XIX que se demonstrou, principalmente pelos trabalhos de Lobachevisky, Bolyai, Riemann, e Gauss, a impossibilidade de deduzir o postulado das paralelas a partir dos outros.

Esse resultado foi importante principalmente porque chamou a atenção para o fato de que se pode *provar* a impossibilidade de *provar* proposições no interior de um dado sistema. Além disso, mostrou-se que era possível obter novas geometrias não utilizando o mesmo conjunto de axiomas como: substituir o axioma das paralelas pela suposição de que é possível obter, por um ponto fora da reta, mais de uma paralela a essa reta ou pela suposição de que não é possível traçar nenhuma.

Essas modificações da Geometria – Geometria Euclidiana é uma das Geometrias e não a Geometria – inspiraram a revisão e a complementação das bases axiomáticas de outros sistemas matemáticos. Novos ramos da Matemática, assim como os velhos, adotaram conjuntos adequados de axiomas. Gerou-se um princípio, aceito por muitos matemáticos, que toda área da Matemática poderia ser dotada de um grupo de axiomas suficientes para desenvolver a totalidade de proposições acerca do tema investigado.

---

8 O 5.º postulado de Euclides equivale logicamente à hipótese de que, por um ponto fora de uma dada reta, pode-se traçar uma e apenas uma reta paralela à reta dada.

Como decorrência do alto nível de axiomatização alcançado pela Matemática e a constatação de que as geometrias não tinham de ser necessariamente idealizações do espaço físico, os alicerces euclidianos passaram por uma análise bem mais profunda. Entre as diversas tentativas de uma nova axiomatização da Geometria Euclidiana, a mais bem-sucedida foi, sem dúvida, a de Hilbert em sua obra *Fundamentos da geometria*[9] (1899). Nesse trabalho, Hilbert partiu de três conceitos primitivos – ponto, reta e plano – e estabeleceu as relações entre esses objetos por meio de axiomas, abandonando experiências com o mundo sensível e a intuição.

Esse fato ficou ainda mais explícito nas demonstrações. Pode-se dizer que esse trabalho se afastou, em alguma medida, da tradição aristotélica grega, pois os axiomas deveriam simplesmente exprimir os fatos óbvios acerca de conceitos já conhecidos intuitivamente.

Gödel, em 1931, publicou um artigo afirmando que é insustentável a pressuposição de que toda área da Matemática, munida de um conjunto de axiomas, poderia demonstrar a totalidade de teoremas sobre o tema estudado. Ele anunciava que a aritmética é contraditória, ou bem, que ela não o é, mas não é possível prová-lo. Provou a impossibilidade de estabelecer a consistência interna de uma ampla classe de sistemas dedutivos a menos que se adotem princípios de raciocínios tão complexos que sua consistência interna fica aberta à dúvida tanto quanto os próprios sistemas.

> Os procedimentos utilizados por Gödel permitiram-lhe escrever a formação de uma proposição A da aritmética da qual se demonstra que, se a aritmética não for contraditória, não há demonstração de A nem a demonstração de não A; diz-se que A é indecidível na aritmética. Hilbert tinha acreditado que se podia provar que qualquer proposição é decidível dentro dela; o resultado de Gödel é aquilo que se chama teorema da incompletude da aritmética (Dieudonné, 1990, p. 242).

---

9 Os cinco postulados de Euclides após reformulação de Hilbert:

1. Para todo ponto P e todo ponto Q diferente de P, existe uma única reta l que passa por P e Q.
1. Para todo segmento AB e para todo segmento CD, existe um único ponto E tal que B fique entre A e E e o segmento CD é congruente ao segmento BE.
1. Para todo ponto O e todo ponto A não igual a O, existe um círculo com centro O e raio OA.
1. Todos os ângulos retos são congruentes entre si.
1. Se uma reta secante a duas outras forma ângulos, de um mesmo lado desta secante, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas retas se prolongadas suficientemente encontrar-se-ão em um ponto desse mesmo lado.
(Greenberg, 1990, p. 14-18.)

Embora há prevalência pela busca da verdade por matemáticos, Tarski (1933) considera que a noção de demonstração não perdeu – nem poderia – o significado, pois ela ainda seria o único método para garantir a verdade dentro de qualquer teoria matemática específica, não obstante se saiba da existência de sentenças verdadeiras e não demonstráveis. Se dentre essas proposições se pretender demonstrar algumas, os matemáticos teriam que, fatalmente, enriquecer a teoria agregando novos postulados ou aceitar, talvez, novas regras de inferência. Mas ao fazê-lo teríamos ainda a noção de verdade como guia, pois "não iríamos anexar um novo axioma ou uma nova regra de demonstração se tivéssemos razões para acreditar que o novo axioma não é uma sentença verdadeira ou que a nova regra de demonstração, quando aplicada a sentenças verdadeiras, poderia fornecer uma sentença falsa" (p. 121). Tarski ainda julga que não existe conflito entre as noções de verdade e de demonstração, pois ambas coexistem pacificamente.

Por outro lado, a análise da história da Matemática atesta que sempre houve matemáticos que criticaram demonstrações de seus predecessores ou de seus contemporâneos por não serem "rigorosas" (Dieudonné, 1990). Alguns deles procuraram substituir essas demonstrações por outras, que, por sua vez, foram consideradas não apropriadas pela geração seguinte. Poder-se-ia pensar que ocorre esse movimento de colocar em questão as provas matemáticas elaboradas porque pode haver algum tipo de erro intrínseco ao método utilizado por matemáticos para provar e que, por isso, seria difícil chegar a uma demonstração que resistisse a qualquer crítica. Essa visão é evidentemente equivocada e provavelmente quem a tem desconhece a História da Matemática, ou a vê de uma forma simplista.

Podem ocorrer diversos tipos de erro em uma demonstração. Algumas vezes eles são facilmente detectados e para retificá-los não demora muito. No entanto, quando o erro de uma demonstração ocorre em função de objetos matemáticos não definidos com precisão, o tempo para corrigi-lo é bem maior (Dieudonné, 1990).

Nesse sentido, Dreyfus (2000) cita Lakatos que, ao examinar o desenvolvimento da Análise Matemática no começo do século XVIII, questiona uma prova de Cauchy sobre o fato de que o limite de uma seqüência convergente de funções contínuas é contínuo. “Como poderia Cauchy provar isto, publicar e manter sua prova, se ele estava ciente de que o limite de uma série de Fourier pode ser uma função?” (p.14) Lakatos mostrou que demorou quase 30 anos para que os contemporâneos de Cauchy ordenassem suficientemente as coisas e concluíssem sobre o erro desse resultado, pois suas concepções a respeito das noções subjacentes, limite e continuidade não estavam ainda suficientemente desenvolvidas.

2.3 Significados de prova: pontos de vista dos matemáticos

Para muitas pessoas o principal fim da Matemática é sua aplicação, pois ela é necessária na maior parte das ciências e das técnicas e por isso seu conhecimento é importante para o exercício de muitas profissões. Outros consideram que a Matemática deve ser apreciada fundamentalmente também pelo seu valor estético, pelo seu caráter de jogo intelectual e de investigação, pelas provas apresentadas e, enfim, pelo fortalecimento do espírito.

C. G. Jacobi escreveu a Legendre em 1830 a respeito:

> [...] O senhor Fourier era de opinião de que o principal fim das matemáticas era a utilidade pública e a explicação dos fenômenos naturais: mas um filósofo como ele deveria ter sabido que a finalidade única da ciência é a honra do espírito humano e que, deste ponto de vista, uma questão de números vale tanto como uma questão do sistema de mundo (C.G. Jacobi, apud Dieudonné, 1990, p. 5).

Demonstração seria um dos aspectos que diferenciaria o método da Matemática do das ciências da natureza. Ainda que muitos pesquisadores dessas ciências possam provar muitas leis por meio de outras, ou seja, considerar algumas leis como conseqüências necessárias de outras, eles não poderão fazer o mesmo para todas as leis. Além disso, uma lei assim “provada” somente teria validade se, em última instância, houvesse concordância com a experiência e a observação. Um matemático, ao contrário, poderá, por exemplo, experimentar e verificar para tantos casos quantos queira que o quadrado de um número ímpar subtraído de uma unidade é um número múltiplo de 8. No entanto, ele somente aceitará esse fato como uma lei depois de demonstrá-lo, ou seja, após obter esse resultado por meio de uma prova rigorosa.

Na Matemática, um teorema aceito como verdadeiro tem um caráter universal e atemporal. Já os resultados da Física[10] não possuem esse traço de verdade absoluta, pois os físicos ao adotarem uma concepção construtivista de ciência apresentam uma verdade aproximada, que pode ser corrigida ou abandonada por outra mais satisfatória – em geral, o físico não espera que seu trabalho apresente a realidade em si ou por si mesma, mas busca encontrar estruturas e modelos de funcionamento da realidade, de modo a justificar os fenômenos observados.

Bicudo (2002) argumenta nesse sentido e cita Shapiro:

> Como o conhecimento matemático está baseado em demonstração, não em observação, a matemática é um aparente contra-exemplo à principal tese empiricista. De fato a matemática é algumas vezes tida como um paradigma de um conhecimento *a priori* – conhecimento anterior a, e independente da experiência (Shapiro, apud Bicudo, 2002, p. 87).

Para muitos matemáticos a validade de um enunciado deve ser comprovada por meio de uma cadeia de raciocínios dedutivos a partir de um número reduzido de proposições aceitas. Entretanto, a demonstração não é realizada apenas levando em conta a perspectiva da Lógica Matemática. Bicudo (2002), por exemplo, considera que a "demonstração, como definida nos textos da Lógica Matemática, deveria modelar as demonstrações matemáticas. Não é, no entanto, o que se vê nos livros e jornais matemáticos. A demonstração matemática é o que satisfaz a comunidade de especialistas...". (Bicudo, 2002, p. 79).

---

10 Hilbert considerou, de forma clara, que o rigor matemático poderia existir nas ciências, em cujos métodos, a Matemática estivesse de alguma forma subjacente. Hoje há estudos rigorosos do ponto de vista axiomático para algumas teorias da Física, da Economia, da Biologia e Geociências.

De fato, a veracidade de um teorema está fundamentada no ponto de vista da lógica, surgindo como conseqüência necessária das premissas, pela conclusão dedutiva correspondente. O termo “demonstração” teria sido introduzido na lógica por Aristóteles como “silogismo que deduz uma conclusão de princípios verdadeiros ou de outras proposições deduzidas silogisticamente de princípios primeiros e evidentes” (Abbagnano, 1992, p. 224). Na lógica contemporânea, apesar do termo silogismo não ser muito utilizado, ele encerraria o mesmo princípio: a designação de uma seqüência de enunciados tais, sendo cada um deles ou primitivo ou então dedutível de um ou de um grupo de enunciados que o precedem na seqüência.

Para alguns pesquisadores, essa concepção não poderia ser mesmo plenamente aceita pelos matemáticos, pois, se um teorema está implícito nas proposições que o antecedem, qual seria, então, a função dos matemáticos? Certamente podemos conjecturar a razão do uso tão freqüente do verbo *descobrir* por muitos professores de Matemática: estes parecem acreditar que a tarefa de seus alunos seria tornar visível o que estaria escondido nas proposições. Essa é, certamente, uma visão platônica da Matemática.

Ainda que muitos matemáticos considerem as provas formais como o ideal da demonstração, Godino e Récio (1997) argumentam que no contexto denominado “matemática profissional” a noção de prova não é exatamente a da lógica formal. Para eles, os procedimentos da validação no contexto da lógica e fundamentos da Matemática diferem muitas vezes da prática dos matemáticos, que inclui provas dedutíveis, não todas exatamente formais, mas convincentes para um cético especialista qualificado.

Convém assinalar ainda que alguns matemáticos consideram as definições e não as demonstrações o grande núcleo da criação do conhecimento matemático. Esta posição pode ser explicada por Wheeler (1990):

> [...] é por meio das definições que encontramos os vetores da Matemática: elas são coisas que escolhemos definir dessa maneira porque elas têm futuro, levam-nos a algum lugar, porque podemos fazer algumas coisas com elas. A demonstração quando está pronta, acabou-se (p. 2).

A discussão a respeito da existência, ou não, da faceta criadora na demonstração matemática é, ainda, objeto de divergência. Enquanto matemáticos como Wheeler relativizam sobremaneira a existência desta faceta, afirmando que somente são relevantes as definições utilizáveis para novos empreendimentos, e não as demonstrações – que, realizadas, deixariam de ter importância no processo criativo, outros matemáticos, dentre os quais Barbeau (1990), discordam e afirmam que as provas formais que envolvem essas definições são também necessárias para o processo de criação.

A despeito dessas questões, a prova, em um sentido mais amplo, serviu, ao longo de seu desenvolvimento, para "descobrir" ou corroborar e ratificar suas verdades – que, por sua vez, evoluíram do conceito estático "absolutista" para o "relativismo" característico do século passado. Essa transformação da idéia da verdade em Matemática – de conceito "absoluto" para "relativo" – pode ter iniciado a partir de 1826, com o surgimento das geometrias não-euclidianas, atingindo seu ápice nas recentes teorias das lógicas não clássicas.

Como vimos, a busca da verdade e o desejo de validá-la de maneira irrefutável têm sido objeto de estudos matemáticos há mais de dois mil anos, notadamente na forma das demonstrações, ainda que a maioria delas não estivesse apoiada em um sistema axiomático. Apenas muito recentemente colocou-se em cheque o absolutismo das demonstrações e das verdades por elas corroboradas. Davis e Hersh, no livro *Sonho de Descartes*, defendem essas concepções e citam, para tal, a obra *A busca da verdade* de Eric Temple Bell, na década de 30. Bell afirmou taxativamente que a Matemática não poderia estabelecer a verdade, ousando afirmar que a certeza havia desaparecido e seu regresso era incerto.

É de fácil explicação, contudo, a obsessão pela busca de verdades absolutas, tendo em vista que esta ação, simbolizada pelo formalismo mais estreito, afastaria da Matemática, definitivamente, a incidência do julgamento humano ou das evidências meramente intuitivas – notórios engendradores de erros. Revelou-se sedutora a noção de que uma afirmação pudesse ser ratificada tão-só pelos seus axiomas, com base na coerência interna do sistema, definindo-se totalmente as regras aplicáveis.

Reiteramos que o formalismo sofreu abalos em 1931, quando Gödel evidenciou que em todo sistema formal, por mais consistente que aparente ser, sempre haverá teoremas não-demonstráveis; mesmo a mais perfeita formalização de uma teoria não seria capaz de garantir, de forma inexpugnável, sua consistência interna.

Cabe também ressaltar que há uma dissensão aventada entre os diversos matemáticos – matemáticos puros, aplicados, logicistas, formalistas – sobre qual seria a demonstração efetivamente irrefutável, uns não considerando como corretas as provas de outros, afastando a possibilidade do consenso desejável e necessário para que a demonstração – uma demonstração, mas qual? – fosse por todos aceita. Trata-se de importante questão que, não obstante seu interesse para a Matemática, transcende os limites desta, situando-se na seara da filosofia da Matemática.

Essa controvérsia sobre a demonstração pode ser sintetizada na seguinte afirmação de Lakatos:

> Não deveria existir nenhum desacordo acerca da demonstração matemática. Há um olhar de inveja sobre a suposta unanimidade dos matemáticos: mas de fato existe uma controvérsia considerável na matemática. Os matemáticos puros negam as demonstrações dos matemáticos aplicados, enquanto os lógicos, por sua vez, repudiam as dos matemáticos puros. Os logicistas desprezam as demonstrações dos formalistas e alguns intuicionistas rejeitam com desdém as demonstrações de logicistas e de formalistas (Lakatos: *Que es que lo que prueba una proba matemática?* 1987, p. 21, tradução nossa).

Talvez o elemento primordial desta discussão seja o fato de que a aceitação de muitas das demonstrações dependa do observador, um matemático. Em cursos em que são realizadas demonstrações pouco – quase nunca – se discute sobre o conceito de demonstração em Matemática. À indagação “o que é uma demonstração?” responde-se com exemplos.

Kleiner (apud Dreyfus, 2000) identifica na revisão que faz sobre a história da prova dois aspectos: a validade da prova é um reflexo de todo clima matemático da época e sempre houve boas razões matemáticas para explicar o movimento do menor ao maior rigor ou vice-versa. Até mesmo os contemporâneos nem sempre concordam a respeito do que faz e do que é uma prova.

Davis e Hersh (1985) discutem essa questão por meio de um diálogo imaginário entre um professor de Matemática e um estudante de Filosofia. Nesse diálogo o estudante pergunta ao professor: o que é uma prova? O professor responde que a prova é um raciocínio que convence quem entende do assunto. E o aluno conclui que uma prova é subjetiva, pois depende de determinadas pessoas: “antes de poder decidir se algo é uma demonstração sou então obrigado a decidir quem são os peritos. Que tem isso com demonstrar coisas?”. Mas o professor rebate essa argumentação dizendo que não há nada de subjetivo na atividade de demonstrar.

Davis e Hersh colocam que os matemáticos, apesar de não definirem prova satisfatoriamente, reconhecem uma quando a vêem. Assim, a demonstração seria um método capaz de convencer alguém que entenda do assunto, de que uma dada assertiva é correta. Para esses dois autores, falar em objetivismo/não objetivismo é complicado, pois a demonstração envolve a utilização de uma formalização abstrata e simbólica e exige um perito com conhecimento prévio bastante razoável do assunto e domínio da linguagem utilizada.

A esse respeito Dieudonné (1990) declara que, por melhor que seja a opinião de um matemático a respeito de sua própria obra, ele sabe que o juízo de seus pares é que lhe dará o mérito. O grau desse mérito decorreria, evidentemente, de fatores como: “não trivialidade” do trabalho; nível de dificuldade deste; se foi ou não objeto de muitas pesquisas, etc. Além disso, os critérios de apreciação não permanecem exatamente os mesmos de uma época para outra e de um matemático para outro.

Dieudonné também afirma que (1990) as divergências de apreciação fazem lembrar querelas suscitadas pelas obras de arte, pois é fato que os matemáticos discutem freqüentemente acerca de maior ou menor beleza que atribuem a um teorema:

> [...] isso não deixa de surpreender os especialistas de outras ciências: para eles o único critério é a "verdade" de uma teoria ou de uma fórmula, quer dizer a maneira como dá conta, melhor ou pior, dos fenômenos observados. Em Matemática todos os resultados são "verdadeiros" no sentido de que foram demonstrados segundo regras da lógica admitidas [...]; uma asserção não demonstrada não faz parte das matemáticas. Serão portanto necessários outros critérios para avaliar um trabalho matemático, e estes só podem ser subjetivos, o que leva a dizer que as matemáticas são muito mais uma arte do que uma ciência (Dieudonné, 1990, p. 41).

Existem outros aspectos envolvidos no modo como muitos matemáticos validam suas afirmações. Uma área da Matemática pode privilegiar uma forma e não uma outra, ou seja, procedimentos aceitáveis em uma podem não o ser na outra. Em alguns temas aceitam-se processos de validação diferenciados por meio de demonstrações não-formais, humanamente verificáveis e independentes de peritos que decidam apenas com base na linguagem formal.

Assim, estaria afastada uma formalização estéril, que não explica, tornando a validação inacessível à maioria das pessoas, que, por isto, estaria rejeitada socialmente. O matemático William Thurston compartilha esta postura, defendendo que a demonstração dos resultados é essencial não apenas em seu aspecto de validação, mas, sobretudo, porque ela é parte integrante da construção de conceitos matemáticos e como tal proporciona avanços na compreensão da própria Matemática.

> Deveríamos reconhecer que as demonstrações humanamente compreensíveis e humanamente verificáveis que atualmente fazemos são as mais importantes para nós, e que elas são diferentes da demonstração formal. Atualmente, as demonstrações formais são inacessíveis e, em grande parte irrelevantes: temos bons processos humanos para verificar a validade matemática (Thurston, 1994, p. 171).

Surge, assim, um curioso aspecto social das demonstrações matemáticas: sua aceitação e a confiança que se tem na Matemática são parcialmente um fenômeno social, com regras ditadas pelos matemáticos. Este regramento não tem validade de per si, servindo antes, na expressão de Thurston, como um “sistema higiênico-sanitário” suficiente para identificar o matemático e servir de suporte adequado para o discurso, inteligível, para outros matemáticos. O que se destaca, contudo, originando a confiabilidade matemática, é a negociação de significados estabelecida entre os matemáticos, e não a linguagem – formal ou não – utilizada.

Tanto é assim que para alguns pesquisadores o programa de rigor euclidiano foi relativizado, historicamente, nas demonstrações em outros campos, ficando afastada a hipótese da singela obediência a um estrito conjunto normativo dogmaticamente imposto pela proposta formal.

> O programa de rigor sistematizado por Euclides, dizem, não é, nem nunca foi, seguido rigidamente na produção em Matemática: passos, axiomas, regras de inferência, entre outros elementos substanciais ao processo de prova nem sempre foram explicitados, donde a aceitação de um resultado, entre os que produzem Matemática, ser mais um processo social de negociação de significados dentro do grupo de especialistas ao qual o resultado em questão se relaciona, do que o mero seguir cego das regras impostas pelo sistema formal (Garnica, 1995, p. 24-25).

Garnica menciona que alguns pesquisadores (Hanna 1989, p. 22) consideram a existência de determinados motivadores positivos para aceitação da prova: compreensão, significância e argumentação convincente, pois são “esses fatores que retêm a atenção de um matemático praticante para um novo teorema e o move para uma aceitação ativa” (Garnica, 1995, p. 25).

> O desenvolvimento da Matemática e os comentários dos matemáticos praticantes sugerem que se aceita um novo teorema quando alguma combinação de fatores está presente:
> - ✓ eles compreendem o teorema, os conceitos nele incorporados, seus antecedentes lógicos e suas implicações e nada existe que sugira que ele não seja verdadeiro;
> - ✓ o teorema é significativo o suficiente para ter implicações em um ou mais ramos da matemática (e então é útil o suficiente para garantir estudo e análise detalhados);
> - ✓ o teorema é consistente com o corpo dos resultados matemáticos aceitos;
> - ✓ o autor tem uma reputação impecável como *expert* na área a qual se refere o teorema;
> - ✓ existe um argumento matemático convincente (rigoroso ou não) para ele, de um tipo que já tenha sido encontrado antes (Hanna 1989, apud Garnica, 1995, p. 27).

É conveniente ressaltar que sob a perspectiva desse tipo de produtor de conhecimentos a apresentação axiomática de uma dada parte da Matemática é secundária, pois esta seria assim um refinamento, uma etapa posterior. Mas do ponto de vista daquele que considera a Matemática simplesmente como uma ferramenta, e não como um assunto profundamente "vivo", algumas vezes pode ser conveniente identificar a própria Matemática com sua apresentação axiomática.

Por outro lado, o matemático em geral não se preocupa se o modelo por ele adotado para estudar uma dada questão é bastante ou pouco formalista; ele opta pelo que melhor se adapta a tal questão. Apesar de o formalismo não ser tão compatível com a maneira de pensar dos matemáticos praticantes, as regras de inferência provavelmente serão utilizadas se atenderem seus objetivos; para o matemático não é um problema adotar um ponto de vista novo.

As questões referentes aos profissionais da Matemática, formalistas e logicistas, nos permitem conjecturar que, apesar de a Matemática ser um campo de conhecimentos cuja linguagem é simbólica e interpretativa, ela poderá se constituir em uma limitação ao avanço do saber matemático em um futuro próximo.

Convém acrescentar que, apesar da visão formalista da Matemática, o computador tem exercido razoável influência nas provas matemáticas, a despeito dos mais puristas. Há, por exemplo, matemáticos que não aceitam a demonstração da conjectura das quatro cores – uma questão em aberto desde 1852 – feita por meio de computadores. Para alguns, esta conjectura estaria "verificada", mas não "demonstrada". Para estes, não basta constatar, caso a caso, todos os casos possíveis, a validade de uma proposição para demonstrá-la. Assim, o matemático não teria um compromisso apenas com a veracidade, mas também com um modelo idealizado, pelo qual se poderia ter uma real compreensão da proposição por conhecer o porquê da verdade da proposição. Exigir-se-iam fidelidade e pureza nos procedimentos apodíticos.

Ainda que muitos relutem em aceitar o uso de computadores para as provas matemáticas, não há como negar que os métodos matemáticos não podem tudo, mesmo contando com intenso trabalho, forte intuição e grande talento das pessoas voltadas à construção e ampliação do edifício matemático. Para responder às muitas questões que advêm dessa própria área do conhecimento – e de outras áreas –, os matemáticos precisarão utilizar, muitas vezes, métodos mais amplos, como o auxílio da informática, para a busca da verdade.

Para finalizar este capítulo destacamos alguns pontos relevantes para a análise de dados no desenvolvimento de nosso trabalho e que poderão constituir-se em argumentos, seja para a análise dos pontos de vista dos professores, seja para nossas considerações finais a respeito da prova matemática nos currículos dos cursos de formação de professores e da Educação Básica.

- O processo de validação é uma atividade central da Matemática e a demonstração assume um papel fundamental nesse processo, ainda que haja divergências quanto à aceitação de determinados tipos de prova, como aquelas obtidas com o auxílio de computadores.
- As idéias matemáticas são desenvolvidas na maioria das vezes por um ato de criação no qual a lógica formal não está, a princípio, diretamente envolvida.
- O processo de validação de uma prova é nitidamente social, ou seja, não é o formalismo que necessariamente vai referendá-la, mas sim o convencimento de um grupo de especialistas qualificados no assunto e de reconhecida notoriedade na comunidade dos matemáticos.
- A demonstração formal deve constituir em objeto de investigação da Educação Matemática, uma vez que é necessário compreender como funciona o discurso matemático para discutir as concepções de Matemática que permeiam as salas de aulas nos diferentes graus de ensino.

Vimos neste capítulo controvérsias a respeito da noção de prova utilizada pelos matemáticos. Mas quais são os pontos de vista dos educadores matemáticos a respeito das demonstrações? Quais seriam as posições desses educadores sobre o processo de ensino e aprendizagem que incluísse demonstrações? No próximo capítulo vamos apresentar algumas discussões e resultados de pesquisas sobre essa temática.

CAPÍTULO 3

PROVAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – UMA ANÁLISE DE PESQUISAS EXISTENTES

Encontrei hoje nas ruas, separadamente, dois amigos meus que haviam se zangado. Cada um me contou a narrativa de porque haviam se zangado. Cada um me disse a verdade. Cada um me contou suas razões. Ambos tinham suas razões. Não era que um via uma coisa e outro outra, ou um via um lado das coisas e outro um lado diferente. Não: cada um via as coisas exatamente como haviam se passado, cada um as via com um critério idêntico ao do outro. Mas cada um via uma coisa diferente e cada um, portanto tinha razão. Fiquei confuso desta dupla existência da verdade.

(Fernando Pessoa, Notas soltas, *Livro do desassossego*)

3.1 Introdução

O mote do capítulo anterior foi a busca de respostas à questão: o que é prova para um matemático? Neste, prosseguimos com essa indagação, mas sob a perspectiva da Educação Matemática, ou seja, procuramos identificar e destacar, dentre a grande quantidade de idéias sobre provas, seu ensino e pesquisas nessa área, aquelas que se nos apresentam mais significativas e com maiores potencialidades para desenvolvermos nosso estudo a respeito desse tema nos currículos de Formação de Professores.

Apresentamos, também, uma breve análise de pesquisas que consideramos importantes, seja porque são referências para este trabalho, seja porque podem dar um panorama, ainda que bastante amplo, das principais questões debatidas pelos pesquisadores em Educação Matemática sobre argumentações e provas.

Convém salientar que a palavra prova neste capítulo assume significados distintos, a depender dos sentidos que os pesquisadores dos estudos apresentados lhe deram.

3.2 Provas nos currículos da Educação Básica: o que falam os pesquisadores

O recente debate em torno das possibilidades do trabalho com argumentações e demonstrações em escolas de Educação Básica entre pesquisadores em Educação Matemática tem sido muito intenso e profícuo em alguns países, em especial, Inglaterra, Estados Unidos, França e Itália, enquanto no Brasil o número de trabalhos nessa área é ainda bastante reduzido. Esse tema, ao longo dos últimos anos, tem chamado tanto a atenção dos pesquisadores, que há um jornal a ele dedicado, *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*,[11] cujo *site* é <http://www.lettredelapreuve.it>. Para comprovar esse fato basta contabilizar os artigos que constam nesse *site* com as respectivas datas de publicação.

É importante salientar que a grande maioria das pesquisas envolvendo esse assunto foi desenvolvida a partir de meados dos anos 80 e intensificada nos anos 90. Convém ainda ressaltar que para tomar ciência dessas pesquisas o leitor poderá consultar também o manual de Educação Matemática, *International Handbook of Mathematics Education* no capítulo Proof and proving (p. 877-908), de Hanna e Janke (1996). Nesse artigo são mencionadas, por exemplo, pesquisas sobre as funções da prova (Hanna 1990); de Villers, (1990), os tipos de prova aceitos por matemáticos e educadores matemáticos (Bell, 1976; Balacheff, 1988; Davis, 1993), além de estudos cujos objetivos são investigar os progressos

11 Editeur: Maria-Alessandra Mariotti; Redattore: Bettina Pedemonte; Advisory Board: Nicolas Balacheff, Paolo Boero, Daniel Chazan, Raymond Duval, Gila Hanna, Guershon Harel, Celia Hoyles, Erica Melis, Michael Otte, Yasuhiro Sekiguchi, Michel de Villiers.

dos alunos no desenvolvimento do raciocínio dedutivo (Hersch, 1993; Hoyles, 1997).

Discutimos no primeiro capítulo que essa retomada das demonstrações nos currículos prescritos de alguns países decorreu do reconhecimento das pesquisas de muitos educadores de que a prova, sendo um aspecto fundamental da atividade matemática, deveria estar presente também na formação dos alunos, principalmente em função de suas potencialidades para desenvolver o raciocínio dedutivo. Como exemplo, referimos o caso dos Estados Unidos que, após um período em que esse tema ficou relegado ao esquecimento, passaram a considerá-lo, segundo os novos Standards (2000) do National Council of Teachers of Mathematics, um dos aspectos centrais dos currículos de Matemática.

A urgência em estudar esse tema também pode ser atestada pelas discussões que têm ocorrido nos dois principais congressos internacionais de Educação Matemática – The International Group for the Psychology of Mathematics Education – PME, e o International Congress on Mathematical Education – ICME. Inclusive, no 10.º ICME, realizado em Copenhagen, 2004, dois grupos de trabalho tiveram como tema "Reasoning, Proof and Proving in Mathematics Education".

Uma das tarefas do ICME seria elaborar um panorama que indicaria o estado de arte neste campo. Essa discussão seria organizada em torno das questões: 1. "Qual é o *status* da prova no currículo de diferentes países? Qual é a situação real nas escolas? As perspectivas dos estudantes e dos professores devem ser ambas consideradas." 2. "É a prova tão crucial na cultura matemática para ser incluída no currículo escolar?" 3. "Como as pesquisas em Educação Matemática têm abordado o problema da prova no currículo escolar? Em particular, é possível superar as dificuldades tão freqüentemente descritas pelos professores quando introduzem provas para os alunos?"

Julgamos oportuno aqui aludir a essas questões do ICME, pois, de certa forma, são elas que têm orientado os trabalhos de pesquisadores em Educação Matemática a respeito desse tema e, em especial, os referentes às dificuldades dos alunos. Todavia, responder a esses questionamentos não é uma tarefa fácil e menos ainda projetar pesquisas com vistas ao favorecimento da construção de caminhos para a superação de dificuldades dos alunos e dos professores no processo de ensino e de aprendizagem da demonstração.

Não pudemos, evidentemente, ler e analisar todos os trabalhos envolvendo provas, mas tivemos acesso a eles pelos resumos veiculados no *site* supracitado. Foi possível constatar que as pesquisas a respeito das demonstrações nas escolas elementares contemplam aspectos bastante distintos como: análises de dificuldades de alunos da Educação Básica no processo de aprendizagem de provas (Ballachef, 1988); estudos das concepções de provas pelos alunos (Healy e Hoyles, 2000); a estrutura do "raciocínio dedutivo" e a aprendizagem da demonstração (Duval, 1991); concepções de professores sobre provas (Knuth 2002 e Dreyfus 2000); relações entre argumentações e provas formais (Ballachef, 1988, Duval 1992 e 1993, Boero, 1997 e Mariotti, 2001).

Apesar da diversidade de enfoques, não encontramos nenhum autor que discordasse radicalmente do princípio de que é importante incorporar nos currículos de Matemática um trabalho envolvendo provas desde as séries iniciais. Muito pelo contrário, todos parecem ser enfáticos quanto a essa necessidade em qualquer nível de ensino: "não se pode ensinar matemática sem introduzir a demonstração" (Mariotti, 2001).

Essa concordância não significa que os pesquisadores considerem uma tarefa fácil incluir provas nos currículos, pois os trabalhos têm indicado a existência de sérias dificuldades nos processos de ensino e aprendizagem da prova. Como exemplo, podemos assinalar as pesquisas que estudaram a relação entre argumentações[12] e provas formais. Essas pesquisas, mesmo sendo desenvolvidas sob diferentes perspectivas, concluem que essa relação é complexa. No entanto, apesar de admitirem essa complexidade, os resultados são controversos.

---

12 Estamos considerando o termo argumentação com o seguinte sentido: um processo de coleta de fatos, motivos, razões e de raciocínios plausíveis que serão utilizados para induzir a persuasão ou a convicção. Dentro do raciocínio plausível, é essencial distinguir uma suposição fundamentada sobre os signos da verossimilhança de outra qualquer, ou seja diferenciar uma presunção que é mais razoável de outra que é menos razoável. O trabalho que precede uma demonstração, ou melhor, o processo que coleta raciocínios plausíveis, seria uma argumentação.

A relação entre argumentação e demonstração torna-se evidente no caso da construção de um teorema e, portanto, na elaboração de uma conjectura e de sua prova. Certos pesquisadores analisam se existe ou não unidade cognitiva entre a argumentação e demonstração, pois para provar uma proposição deve-se fazer uma conjectura, que, por sua vez, está fundamentada em argumentações.

Existem essencialmente duas posições contrárias. Para alguns educadores, a separação entre as características funcionais e as características estruturais na análise da argumentação e da demonstração poderia acontecer também no nível cognitivo, ou seja, haveria uma ruptura cognitiva entre argumentação e prova. Duval (1991), partidário dessa posição, sustenta que a argumentação não poderia sugerir um caminho para a construção da demonstração, pois a "heterogeneidade entre argumentação e a demonstração ocorre não apenas do ponto de vista lógico, mas também do cognitivo".

Duval afirma que o prevalecente na demonstração é o raciocínio dedutivo formal – em nada semelhante ao raciocínio discurso natural, pois aquele exige o uso de proposições, com os respectivos estatutos teóricos (axioma, definição, teorema, hipótese etc.) para os sucessivos estágios, até a conclusão, estando as proposições relacionadas conforme o estatuto, numa substituição de proposições e não por associação ou oposição, como ocorre no discurso natural.

No entanto, Boero, Garutti e Mariotti (1996) contestam fortemente a posição de Duval e defendem que haveria uma unidade cognitiva entre essas estruturas tomando como base os aspectos conceituais de Vergnaud (1990), as mudanças de quadros de Douady (1986), as expressões verbais e as heurísticas da argumentação e da demonstração. Segundo Boero (1999), a relação entre argumentação e prova, apesar de complexa, é produtiva e inevitável, tanto em Matemática como em Educação Matemática.

Nesse sentido, Douek (1998) salienta que, apesar de não se poder entender a demonstração como sinônimo de argumentação, principalmente em decorrência de suas diferenças enquanto produtos sociais, essas duas noções apresentam muitas semelhanças epistemológicas, bem como do ponto de vista cognitivo.

Já para Balacheff (1999) não haveria nem continuidade nem ruptura entre argumentação e demonstração, mas uma relação complexa e constitutiva de cada uma: a argumentação constitui um obstáculo epistemológico à aprendizagem da prova em Matemática. Haveria assim um grande obstáculo entre a argumentação cotidiana – na qual uma evidência empírica é aceita como prova – e a prova matemática formal.

Balacheff considera, por exemplo, que as origens de algumas das dificuldades para ensinar e aprender a demonstração em Matemática decorreriam do contrato didático que emerge naturalmente das posições do aluno e do docente com respeito aos saberes em jogo. Dado que é o docente quem garante a legitimidade e a validade epistemológica do que se constrói em classe, isso poderia impedir o real acesso do aluno à problemática da verdade e da prova. Para a superação desta dificuldade poder-se-iam investigar situações que permitem a devolução aos alunos dessa responsabilidade, ou seja, a não-ação do docente nos processos de tomada de decisão durante a resolução de um problema poderia favorecer a construção de meios autônomos para a elaboração de provas por parte dos alunos. Para Balacheff, a problemática da argumentação surge no estudo da interação social. Segundo ele, a interação social entre os alunos se manifestaria claramente como um instrumento potente que serviria para possibilitar os processos de devolução aos alunos da responsabilidade matemática sobre as atividades e suas produções.

Considerando ou não a argumentação – em seu sentido mais amplo – um obstáculo à demonstração formal, o fato é que essa questão fomentou diversas pesquisas. Como exemplo, podemos citar o trabalho de Pedemonte (2002) que analisou alguns aspectos das relações entre argumentação e prova sob dois pontos de vista – conteúdo e estrutura – tomando em conta o modelo de Toulmin como ferramenta para comparar as duas estruturas. Esse trabalho demonstra como esse modelo pode ser usado para descobrir algumas analogias estruturais e mudanças entre argumentação e prova durante a solução de problemas geométricos e a produção de conjecturas e provas relacionadas.

No *site* <www.lettredelapreuve.it/Newsletter> é possível encontrar registros desse debate cujos protagonistas são Duval, Boero e Balacheff. Alguns artigos indicam a necessidade de agregar a essa discussão outros elementos, como a questão cultural e a etnomatemática.

Existem educadores matemáticos que assinalam a emergência de pesquisas sobre a argumentação, principalmente aquelas cujo centro de interesse são as formas de raciocínio que escapam às normas e aos esquemas lógicos e que, muitas vezes, surgem espontaneamente entre os indivíduos envolvidos em uma controvérsia. Essa emergência pode ser detectada não apenas no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática.

Com os resultados desses trabalhos, é até possível dizer que hoje a “distância” entre os defensores da unidade cognitiva e os da ruptura cognitiva entre argumentação e prova formal parece estar se tornando menor.

Isso permite, por exemplo, que alguns autores do Institut de Recherche sur L´Enseignemant des Mathématiques – IREM, de Renes, publiquem um livro que se propõe a promover a aprendizagem da demonstração em termos da leitura e da escrita de um texto que possui uma estrutura específica. Para os autores, essa abordagem seria duplamente vantajosa. Por um lado, ela possibilitaria gerar novas formas de ação: compreender as dificuldades dos alunos e conceber atividades interessantes com o propósito de escrever, analisar ou melhorar um texto. Por outro lado, tornaria mais fácil agir indiretamente sobre o raciocínio a partir de um trabalho sobre um texto (Houdebine, 1998). Segundo essa publicação, não existiria diferença entre a demonstração e o raciocínio, porque os dois se situam no âmbito do texto – o termo raciocínio é utilizado, às vezes, para designar o aspecto semântico da demonstração, ou seja, a solução do problema.

3.3 Educação Matemática e prova

Vimos que os currículos de Matemática de qualquer nível de ensino, segundo muitos educadores, não deveriam menosprezar o papel das demonstrações na formação do aluno. Como exemplo, podemos citar dois estudos, dentre vários outros, como os de Ball et al. (2000) e Dreyfus (2002) que defendem essa posição já nas primeiras linhas dos respectivos resumos:

> Proof is central to mathematics and as such should be a key component of mathematics education. This emphasis can be justified not only because proof is at the heart of mathematical practice, but also because it is an essential tool for promoting mathematical understanding (Ball et al., 2000, Anais do ICME)
> Proof is at the heart of mathematics, and is considered central in many high school curricula (Dreyfus, 2000, p. 1).

Há diversas publicações – as quais citaremos adiante – que indicam os motivos pelos quais as provas – em um sentido amplo e não apenas as rigorosas – são de grande interesse para a Educação Matemática. Uma delas parece ser evidente e de acordo com as duas citações: se demonstrações e provas são essenciais para a atividade do matemático, por que não o seriam para os educadores matemáticos?

Thurston (1994), por exemplo, adota como premissa que a demonstração proporcionaria a compreensão da natureza do conhecimento matemático, pois ela faz parte da construção da própria Matemática e esta afirmação já poderia justificar sua importância para o educador matemático.

No entanto, relativamente aos currículos de Matemática, diversos educadores procuram argumentar que, se, por um lado, o método dedutivo conduzido por uma determinada perspectiva poderia mostrar a especificidade do conhecimento matemático relativamente às ciências empíricas, por outro, ele poderia levar o aluno a pensar a Matemática apenas pelo modo como é apresentada. A comunicação do saber matemático, seja nos periódicos especializados e nos livros, seja nos vários ambientes escolares, segue tradicionalmente esse caminho: seu acervo tem sido preservado e exposto pela via da dedução lógica, no âmbito de um sistema de axiomas. Apresenta-se o produto e não o processo.

Produtos e processos matemáticos distinguem-se indubitavelmente, sendo esta diferenciação uma realidade defendida por diversos educadores e matemáticos de renome, como Polya e Lakatos. A Matemática é, certamente, uma ciência dedutiva, mas suas demonstrações surgem da combinação de observações, do emprego de analogias e experimentações variadas, envolvendo um óbvio processo especulativo, denominado, por Polya, de inferência plausível.

Assim, é compreensível que a análise tão-somente do produto matemático final iluda o observador, ocultando a natureza dos processos empregados para a obtenção deste produto. Partindo de um conjunto de axiomas e definições – complexas e com tantas condições que fica difícil imaginar que, em algum momento passado, foram concebidas de alguma outra forma – e inferências reputadas válidas, atingem-se verdades dogmáticas, inquestionáveis. Ocultam-se o processo demonstrativo original, as formulações do teorema, a exploração que antecedeu o produto final – que surge, eventualmente, após muito esforço, que pode ser esquecido, como resultado infalível e necessário.

Assim, não seria recomendável que o professor de Matemática, seja lá de qual nível for, apresente a Matemática dessa maneira. Desse modo, o indivíduo não perceberia que em seu processo de elaboração a Matemática estaria bem mais próxima das ciências da natureza, pois muitas vezes esse processo contou com o raciocínio hipotético-indutivo, próprio dessas ciências.

Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental (1998) chamam a atenção para que o professor perceba que na criação do conhecimento matemático

> [...] interferem processos heurísticos e intervêm a criatividade e o senso estético, do mesmo modo que em outras áreas do conhecimento. A partir da observação de casos particulares, as regularidades são desvendadas, as conjecturas e teorias matemáticas são formuladas. [...] O exercício da indução e da dedução em Matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência em todos os níveis de ensino (PCN, 1998, p. 28).

Mas qual é, enfim, a principal função da demonstração para o educador matemático? Validação ou produção de conhecimento? Muitos são seus propósitos, variando-se conforme a situação: a demonstração exposta a quem não a conhecia anteriormente tanto pode ter a função precípua de validação do teorema, esclarecendo-o, ou de ampliar o conhecimento matemático do leitor. Neste sentido, Thurston (1994) afirma que esta ambivalência surge do desejo permanente que o homem tem de expandir seu conhecimento, o que ocorre sempre que um teorema é aceito como verdadeiro – o que se dá por meio de sua demonstração.

Lakatos defende o enfoque heurístico, que evidencia todas as demonstrações pretéritas empregáveis numa atual, em contrapartida do enfoque dedutivista, que ignora o processo e simplesmente apresenta as demonstrações anteriores de "modo artificial e autoritário". Este enfoque heurístico seria mais adequado ao ensino da Matemática, afastando os alunos de uma apresentação meramente dogmática do conteúdo. Neste sentido, encara-se a demonstração como argumentação convincente; como meio de comunicação com os alunos.

Considerando-se, conforme discutimos no capítulo anterior, os processos sociais influentes no "convencimento" dos matemáticos sobre a exatidão de novos teoremas, e que tais não deixariam de se reproduzir na relação entabulada entre professor e alunos, é necessário que a demonstração não só valide, mas também explique as etapas envolvidas no processo. Se o processo de validação confirma que o teorema é verdadeiro, é a explicação que elucida para os alunos o porquê deste fato.

A principal diferença entre as duas "espécies" de demonstrações – a que apenas valida e a que também explica – é que a explicativa termina por utilizar raciocínios fundamentados em idéias matemáticas, enquanto a mera prova formal emprega basicamente regras de sintaxe. Ora, sabidamente a sintaxe, conquanto indispensável, é aspecto meramente mecânico da demonstração, não preponderando como característica mais relevante da Matemática.

É justamente essa a posição de Hanna (1990) que considera ser interessante apresentar sempre esse tipo de demonstração aos alunos: "uma demonstração que prova e uma demonstração que explica são ambas demonstrações legítimas", mas a diferença está em que "uma demonstração que prova apenas mostra que um dado teorema é verdadeiro, enquanto uma demonstração que explica mostra também por que esse teorema é verdadeiro". Para Hanna, nem todas as demonstrações têm o poder de explicar e alerta que "abandonar as demonstrações que validam em favor das que explicam não tornaria o currículo menos refletor da prática matemática aceita". (Hanna, 1990)

Hanna procura sintetizar a função da prova na Matemática e na Educação Matemática: "enquanto na prática matemática a função da prova é a justificação e a verificação, a sua função principal na educação matemática é seguramente a da explicação" (Hanna, 1995, p. 47).

Essa pesquisadora distingue a demonstração para fins escolares da demonstração para os matemáticos profissionais ou lógicos. Ela procura diferenciar as expressões demonstração formal, demonstração aceitável e demonstração empregada para fins escolares: a primeira seria o conceito teórico da lógica formal e que poderia ser encarada como o ideal matemático de cuja prática apenas se aproxima; a segunda é o conceito aceitável para os matemáticos profissionais; a terceira é a composição de atividades que visam desenvolver junto aos alunos noções e conceitos. Para Hanna, uma demonstração deve incentivar a compreensão: "uma boa prova, entretanto, não deveria ser somente correta e explicativa, a mesma poderia também levar em consideração, especialmente em seu nível de detalhe, o contexto da aula e a experiência dos estudantes" (1995, p. 48).

Harel e Sowder (1998) consideram que para a aprendizagem da prova é fundamental que os alunos a julguem importante e propõem "o princípio da necessidade":

> Para que os estudantes possam aprender, os mesmos devem se dar conta da necessidade de aprender o que vai ser ensinado para eles, sendo que o termo "necessidade" é utilizado aqui no significado de "necessidade intelectual", em oposição à necessidade social ou econômica (Harel e Sowder, 1998, p. 266).

Para esses dois educadores, o princípio da necessidade pode favorecer a construção de uma argumentação, mas não exatamente a construção de uma demonstração. Os estudantes não serão, certamente, capazes de construir de imediato uma demonstração, quando se defrontarem com uma situação que a exija. Contudo, o princípio da necessidade torna evidente a importância de tornar significativa uma demonstração, em especial aquelas apresentadas pelos professores. A demonstração deveria elucidar as dúvidas dos estudantes.

No entanto, Healy e Hoyles (2000) entendem que os alunos precisam freqüentemente realizar ensaios e verificações empíricas da demonstração, quando esta não os convencer de imediato.

Geralmente, quando os estudantes se deparam com uma demonstração já construída, eles tornam-se céticos, porque não conseguem compreender a garantia proporcionada por ela (Chazan, 1993; Healy e Hoyles, 2000). Os resultados de Healy e Hoyles (2000) mostram claramente que os alunos preferem as argumentações narrativas, ou seja, aquelas que para descrever os raciocínios utilizados se fazem valer quase que exclusivamente da língua materna.

Em relação às finalidades da inclusão do trabalho com provas nos currículos, Veloso (1999) reputa fundamental essa tarefa nas escolas, mas dispensa, o argumento de que seria o instrumental indispensável para o desenvolvimento do raciocínio lógico, e exemplifica dizendo que há muitas pessoas que, sem ter estudado Matemática, usam o “raciocínio” com exatidão e presteza. Veloso justifica a demonstração no ensino por um enfoque mais amplo, ao enfatizar o valor não só do raciocínio matemático, mas da história e relevância desta ciência, mostrando o caminho percorrido pela humanidade na evolução do pensamento matemático, no qual se inclui a demonstração, indispensável à Matemática.

Para Veloso, é fundamental que no processo de ensino e de aprendizagem se tenha como pressuposto “imitar a actividade dos matemáticos”:

> Do nosso ponto de vista, julgamos que essa importância está associada aos próprios objectivos do ensino da Matemática. Na realidade, se um dos objectivos principais do ensino da Matemática nos ensinos básicos e secundários é permitir aos alunos adquirir uma compreensão viva do que é a Matemática, incluindo a sua relevância, sua evolução histórica e características no momento presente – é indispensável que os alunos experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio dedutivo e mesmo a estrutura axiomática de suas teorias (2003, p. 35).

Há educadores que, a exemplo de Balacheff, consideram a demonstração um instrumento de negociação da verdade na sala de aula, um instrumento de validação social, especialmente com resultados experimentais dos alunos, resultados esses que lhes são devolvidos para que apresentem sua validação.

Por outro lado, Wheeler (1990) refuta esta negociação a ser efetuada em sala de aula, advertindo que o processo social que se procura imitar na sala é demasiado complexo e diverso para ser reproduzido com utilidade. Argumenta, neste sentido, que as negociações reais ocorrem em grandes lapsos de tempo, envolvendo pessoas diversas com interesses diferentes, raramente colocadas frente a frente, enquanto na sala de aula tem-se um ambiente artificial, com alunos trabalhando no mesmo problema, simultaneamente e com tempo determinado para concluí-lo.

Se quisermos discutir as diferentes maneiras de relacionar provas e Educação Matemática, não basta evidentemente analisá-las apenas quanto às suas finalidades e possibilidades na sala de aula. Ou seja, os motivos pelos quais as provas, rigorosas ou não, deveriam estar presentes nos currículos dessa área do conhecimento em qualquer nível de escolaridade não se resumem apenas ao fato de que demonstração é o – ou está no – “coração da Matemática”. É fundamental olhar a relação prova–Educação Matemática sob outras perspectivas, não exclusivas, tais como: cognição, práticas argumentativas, ambientes informatizados.

Devemos salientar, contudo, que há estudos sobre provas com estas perspectivas – sobre as quais falaremos mais adiante, ainda neste capítulo –, mas queremos desde já destacar aqueles que enfatizam as determinações históricas da demonstração, como Douek (1998), e as culturais, em especial de que forma a língua modela o conceito, como o de Balacheff (1999).

Para discutirmos a questão das provas matemáticas e seu ensino devemos também levar em conta o impacto provocado pelo emprego dos computadores na Matemática. A realidade virtual acabou por se revelar não apenas como um ambiente favorável à exploração matemática e à “descoberta” de novos resultados, mas sobretudo pelos reflexos importantes também na educação, revolucionando a percepção das demonstrações.

Por meio da apresentação visual de soluções para uma determinada situação-problema aos alunos, os ambientes informatizados propiciam experimentações indutivas, que validam, mas não justificam. Servem por exemplo à melhor distinção entre demonstrações validativas e demonstrações explicativas uma vez que nesses ambientes é possível encontrar resultados que não podem ser compreendidos sem as respectivas justificativas.

3.4 Demonstração e ensino de Geometria

No item anterior expusemos algumas idéias sobre a relação entre demonstrações e o ensino da Matemática. Em nossa pesquisa bibliográfica um fato nos pareceu inconteste, em especial quando mencionamos a informática: a forte presença da Geometria nessa discussão, embora haja importantes trabalhos em álgebra como os de Healy e Hoyles e Harel e Sowder.

No entanto, esses trabalhos pouco explicam as razões pelas quais não há um volume, pelo menos razoável, de estudos sobre as provas em outras áreas. Daí a questão: há motivos para que as provas matemáticas na Educação Básica apareçam – quando aparecem – quase sempre na Geometria?

Embora não seja nossa intenção aprofundar essa questão – apesar de sua relevância –, podemos fazer algumas conjecturas. Uma delas poderia ser assim formulada: a Geometria é uma seara bastante fértil – provavelmente a mais fértil – ao desenvolvimento das diferentes formas de raciocínio, em especial o dedutivo.

Há uma outra argumentação que, a despeito da obviedade, pode ser utilizada para explicar a preponderância da demonstração no ensino da Geometria: a cultura ocidental, que desde a antiguidade helênica apresenta firme predisposição ao estudo dessa área da Matemática, enfatizando o arcabouço dedutivo e cristalizando uma perspectiva segundo a qual é a Geometria que proporciona o rigor e a intelecção de conceitos abstratos – por exemplo, do infinito – desejáveis nos alunos.

Talvez essas assertivas expliquem a razão pela qual a Geometria costuma ser nos currículos a opção empregada para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo, pois por meio dela podem-se mobilizar os processos cognitivos subjacentes que permitem desenvolver diferentes formas de raciocínio e apreender uma variada gama de processos de visualização.

Nesse sentido, Duval (1998) argumenta que:

> a Geometria, mais do que em outras áreas da Matemática, pode ser usada para desenvolver diferentes formas de raciocínio. Este deve ser um objetivo essencial do ensino da Geometria. Mas ainda é preciso conseguir uma prática mais compreensiva e equilibrada dos processos cognitivos subjacentes. Isto quer dizer que são necessárias situações específicas de aprendizagem para a diferenciação e coordenação dos diversos tipos de processos de visualização e raciocínio (Duval, 1998, p. 51).

Para Boero (1998), a Geometria pode ser encarada “como parte da atual cultura científica, como uma atividade especializada dos matemáticos e como uma componente cultural básica fundamental das classes intelectuais nas sociedades modernas” (p. 56).

Assim, se a Geometria de Euclides foi modelo para todos os ramos da Matemática e outras ciências – depois de corrigidas suas insuficiências – pela coerência, seu caráter de rigor, suas deduções, porque ela não seria no ensino de Matemática?

Partindo-se do pressuposto de que a Geometria é um ótimo campo para promover o desenvolvimento do raciocínio dedutivo, poder-se-ia inferir que o trabalho com demonstrações em Geometria habilitaria o aluno a transferir o raciocínio empregado para outras áreas da Matemática e do currículo em geral. Essa posição foi adotada nos currículos brasileiros, pelo menos o dos anos 30: estudar Geometria seria fazer ginástica mental (Pavanello, 1989).

Entretanto, alguns estudos, como os de Harel (1998), contradizem não só que os alunos logrem atingir um grau elevado nas demonstrações geométricas, mas também que sejam capazes de realizar a aludida transferência de aprendizagem.

Esse aparente fracasso no processo de aprendizagem das provas pode ser explicado pela posição assumida por Duval (1999) que pode ser assim resumida: a utilização do raciocínio dedutivo é essencial para a aprendizagem da Matemática e da Geometria em particular, mas exige uma organização diversa do discurso argumentativo usado na linguagem natural ou do usado em outras áreas do conhecimento.

A respeito das demonstrações em sala de aula, Wheeler (1990) considera que o programa de Geometria é muito sofisticado e pretensioso: “não é de admirar que todos os alunos tenham dificuldade de aprender” (p. 4). Afirma ainda: “penso que é óbvio que a demonstração será sempre difícil em sala de aula, porque não aparece outra razão aparente que não seja a de imitar a atividade dos matemáticos”. Wheeler também questiona a habilidade dos professores em compreender todas as exigências cognitivas da demonstração.

Cabe ressaltar que, apesar de haver educadores concordantes com a posição de Wheeler a respeito das dificuldades de desenvolver um trabalho envolvendo provas, defendem que elas deveriam ser propostas em todos os graus de ensino, desde o Fundamental, e não apenas em Geometria, haja vista as recomendações de alguns dos atuais currículos.

Segundo Nasser e Tinoco (2001), “grande parte dos alunos não dominam esse tipo de prova, nem quando chegam à universidade, nem quando se formam, nem mesmo depois de alguns anos do magistério” (p. 4). Mas uma prova rigorosa pode não ser meta de todos os currículos: alguns pesquisadores como Hanna (1990) e Balacheff (1988) defendem a prova ingênua – que seria uma argumentação aceitável, que poderia atingir diversos níveis de rigor.

Resende e Nasser (apud Nasser e Tinoco, 2001) depararam em sua investigação os seguintes tipos de prova:

> “Justificativa pragmática: o aluno atesta a veracidade de uma afirmativa com base em apenas alguns casos particulares.”
> “Recorrência a uma autoridade: o aluno afirma que o resultado é verdadeiro porque o professor falou ou porque está no livro-texto.”
> “Exemplo crucial: o aluno desenvolve através de um exemplo o raciocínio que poderia ter sido feito no caso geral.”
> “Justificativa gráfica: o aluno mostra numa figura porque o resultado é verdadeiro.”

O reconhecimento da dificuldade do processo de ensino e aprendizagem de provas provocou a publicação de algumas orientações metodológicas, visando a superação, como Galbraith, que em 1981 apresentou uma lista com as habilidades necessárias para que os alunos possam compreender, construir ou avaliar uma prova.

> [...] entender e ser capaz de checar uma variedade de casos particulares; detectar e utilizar um princípio externo relevante para a argumentação; utilizar uma cadeia de inferências a fim de se convencer do resultado a ser alcançado; reconhecer o domínio de validade de uma generalização; interpretar corretamente condições e afirmativas; apreciar e perceber a distinção entre implicação e equivalência; reconhecer a arbitrariedade e propriedade de uma definição; ser capaz de analisar uma prova como meio de expor os detalhes de um argumento (apud Nasser e Tinoco, 2001, p. 7).

Esclarecer como e quando ensinar demonstrações na Geometria é tarefa obstada pela divergência já aventada sobre o conceito de demonstração e, até, sobre o porquê de seu ensino. Mas é possível, da diversidade de concepções e correntes, extrair algumas proeminentes, dentre as quais destacamos as que seguem.

Muitos pesquisadores, mediante a complexidade da atividade intelectual que se exige para a produção de uma demonstração, acreditam que se devam valer basicamente da psicologia cognitiva para a superação das dificuldades. Algumas das pesquisas procuraram na teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget contribuições para melhor compreender a respeito do processo de aprendizagem de provas.

Dentre esses trabalhos citamos o de Battista e Clements (1995) que adotam o princípio dos estágios de Piaget para explicar os “avanços” das aprendizagens dos alunos. Para eles, a necessidade de demonstrar nossas idéias, quando postas em confronto com idéias alheias, faria surgir a demonstração, como resultado da argumentação. Eles analisaram os mecanismos de aprendizado concernentes à demonstração, adequando-a ao público-alvo específico.

Como outros autores, Battista e Clements analisam a demonstração a partir do modelo de desenvolvimento do raciocínio geométrico desenvolvido por Van Hiele (1976), que estabelece cinco níveis hierárquicos.

No primeiro nível, denominado visual, um aluno identifica uma figura, mas seu julgamento é baseado na observação, ou seja, julga em função da aparência como um todo (no sentido da Gestalt) e não faz justificativas. Já no segundo nível seu raciocínio é mais analítico, pois o aluno relaciona com base na experiência, estabelece propriedades das figuras por observação, medição e representação. Nele, o estudante identificaria formas geométricas pelas suas propriedades, mas não estabeleceria relações entre elas. Esse nível é denominado descritivo/analítico.

No terceiro nível, o abstrato/relacional, o aluno percebe quando uma propriedade é conseqüência de uma outra e faz distinção entre condições necessárias e suficientes. Neste nível os resultados obtidos empiricamente são usados freqüentemente em conjunto com técnicas dedutivas e, eventualmente, ele pode apresentar uma série de argumentos de forma lógica, mas não chega a dominar o processo dedutivo. No quarto nível, o da dedução formal, o aluno compreende uma prova formal e é capaz de construir demonstrações originais. A demonstração é percebida como ferramenta de validação no interior de um sistema axiomático. O último nível é o do rigor matemático. Nele, o estudante consegue pensar formalmente sobre os sistemas axiomáticos, ou seja, percebe diferenças entre dois sistemas axiomáticos; é capaz de analisar conseqüências na manipulação de definições e axiomas.

O modelo de Van Hiele possui estreita ligação com a habilidade de justificar em Matemática. Segundo Nasser e Tinoco (2001), “nos dois primeiros os alunos não duvidam da validade de suas observações empíricas e, portanto, vêem a prova como desnecessária” (p.8). Também Senk (1989) se posiciona no sentido de que a demonstração deve ser desenvolvida apenas em salas cujos alunos estejam, pelo menos, no nível 3.

A teoria de Van Hiele sugere que os currículos de Geometria das escolas devem enfatizar a explicação e justificação das idéias pelos alunos, visando à gradual compreensão da limitação da justificação empírica, incentivando-os ao uso da demonstração.

O modelo de Van Hiele sugere que os alunos progridem segundo essa seqüência de níveis de compreensão de conceitos geométricos. O processo de ensino deve auxiliar na transição gradual dos níveis inferiores de pensamento geométrico, para os superiores, e, somente após, incluir as demonstrações na Geometria. Cabe ressaltar que o progresso de um nível para o seguinte se dá por meio da vivência de atividades adequadas. Portanto, a elevação de níveis depende mais de aprendizagem adequada do que de idade ou maturação. Assim, o papel do professor nesse processo é fundamental, pois cabe a ele organizar situações para que o aluno possa “progredir de nível”.

Respeitar esses níveis seria uma maneira de atenuar as dificuldades do aluno em Geometria, em especial, compreender e provar teoremas dessa área. No entanto, os níveis de Van Hiele não são plenamente aceitos por alguns educadores. Dentre as críticas um questionamento possível é o seguinte: em um dado assunto da Geometria um aluno poderia estar em um nível e em outro tema o nível não seria o mesmo. Exemplificando: um estudante pode demonstrar um teorema da Geometria plana envolvendo semelhanças de triângulos, ou seja, nível 4, mas em Geometria das transformações, ele estaria ainda no nível 2, pois precisaria recorrer às experimentações (dobraduras, medições, construção de modelos) para compreender ou validar um dado resultado.

Alguns educadores defendem que o ensino de Geometria pode ser otimizado pela incorporação de programas de Geometria dinâmica, pois estes permitiriam a formulação e reformulação de conjecturas, verificando as verdadeiras e refutando as falsas. Além disso, sustentam a conveniência da negociação na atividade de demonstração, como forma de mostrar aos alunos que não só a vontade de obter certezas é o motor dos matemáticos, mas também o desejo de superar desafios intelectuais. A demonstração decorreria da necessidade do aluno, diante de um problema na tela do computador.

Um bom exemplo das novas perspectivas abertas pela utilização da computação gráfica e da realidade virtual está no experimento de Hofstadter (1997), que estudou pontos especiais do triângulo, empregando um programa de Geometria dinâmica, que gerou resultados indiscutíveis graças ao ambiente dinâmico usado. Esta interação permitiu, sem o emprego de demonstrações propriamente ditas, que o observador realmente se convencesse dos resultados, uma vez que estes foram visualizados.

Sem afastar a indispensabilidade das demonstrações, a computação vem trazer novos elementos para o convencimento da validade dos teoremas matemáticos, permitindo a visão da verdade geométrica, explorando a Matemática *in loco*. Esta maior interação entre observador e ciência é louvável, especialmente quando voltada para a Educação, de uma forma que, talvez não com a aprovação dos matemáticos tradicionais, instigue os alunos à pesquisa.

De Villiers (1997) também trata da questão de como o encontro dos alunos com os programas matemáticos é capaz de incitá-los ao estudo, quando desenvolvem atividades de investigação. Essas atividades, além de favorecerem o convencimento do aluno de determinados resultados, poderão servir de alavanca para diversas indagações, tais como a do "por que" das coisas funcionarem de uma determinada maneira e não de outra. Segundo esse pesquisador, os alunos rapidamente admitem que a verificação indutiva/experimental pode confirmar um resultado já conhecido, mas não esclarece nem contribui para uma compreensão satisfatória: "eles parecem achar necessário então procurar mais por argumentos dedutivos como uma tentativa de explicação, mais do que uma verificação" (p. 23).

Por outro lado, há educadores, dentre os quais Hoyles e Jones (1998), que indagam se o uso de ambientes dinâmicos em aulas de Geometria realmente favoreceria os alunos a desenvolverem arcabouços conceituais eficazes para demonstrações, ou se, pelo contrário, dificultariam a transição entre demonstrações informais e formais. Essas pesquisadoras questionam se esses ambientes não poderiam se tornar, na verdade, substitutos das demonstrações. Entretanto, os estudos efetuados por essas duas educadoras indicam que o emprego de programas dinâmicos de Geometria, concomitantemente a tarefas adequadas, pode permitir uma melhor apreciação, por parte dos alunos, a respeito da natureza e propósito das provas.

Mediante todas essas pesquisas, o grande desafio do professor, a nosso ver, seriam a organização e direção de situações com a finalidade de levar os alunos a perceber a necessidade da construção de uma argumentação dedutiva para explicar e justificar um resultado geométrico percebido ou induzido no ambiente informatizado ou em qualquer outro contexto. Esta seria uma conseqüência essencial.

No entanto, cabe ressaltar que esses pesquisadores alertam para uma questão de suma importância: com o uso não pensado e indiscriminado de algumas ferramentas desses *softwares*, tais como aquelas destinadas a obter medidas, correr-se-ia o risco de deixar de lado as noções geométricas importantes para a construção do pensamento geométrico, perdendo-se, assim, a tão propalada característica da Geometria em desenvolver o raciocínio matemático, notadamente a demonstração como fator de explicação e validação dos resultados.

Conforme já foi mencionado anteriormente, uma idéia defendida por alguns pesquisadores em Educação Matemática é que a demonstração deveria ser desenvolvida a partir da necessidade detectada pelos alunos, em suas atividades. Assim, segundo o princípio da necessidade proposto por Harel e Sowder (1998) o aluno deve se dar conta da necessidade de aprender o que o professor vai lhe ensinar.

Dessa forma, evitar-se-ia o ensino tradicional da Geometria, apresentando não apenas o produto acabado, mas os processos empregados – processos esses que seriam bem acolhidos pelos alunos que talvez se ressentissem justamente de sua ausência. A demonstração deixaria de ser, assim, um produto acabado, tornando-se uma atividade experimental dos alunos.

Independentemente da tese adotada pelos educadores, contudo, é consenso que a demonstração não pode ser um fim em si mesma, servindo, antes, ao desenvolvimento do raciocínio dedutivo – além de ser essencial à organização da própria Geometria, o que a torna indispensável.

De todo modo, compartilhamos da idéia de que seria necessário transmitir o caráter axiomático das teorias matemáticas ao aluno, o que pode ser feito por meio de experiências de organização local, que ensejem a conexão lógica de uma reduzida quantidade de resultados conjecturados pelos próprios alunos. Fugir-se-ia, assim, da apresentação de um sistema axiomático completo, muito além da capacidade intelectiva dos alunos, na primeira etapa de aprendizagem das demonstrações geométricas.

Esse princípio, com exceção do trabalho com as conjecturas dos alunos, é semelhante ao adotado nos currículos brasileiros prescritos a partir dos anos 60: a idéia de "demonstração local", que será detalhada no capítulo 4.

3.5 Estudos que fundamentam esta pesquisa

Antes de procedermos à análise dos depoimentos que faremos no capítulo 5, julgamos conveniente destacar os estudos de Healy e Hoyles (2000), Dreyfus (2000), Balacheff (1987), Knuth (2002) que nos auxiliarão nessa tarefa.

O trabalho de Healy e Hoyles aqui citado insere-se em uma linha de pesquisa que procura investigar as concepções dos alunos a respeito de provas. Em uma parte dessa pesquisa elas propõem a alunos de 14/15 anos que analisem provas supostamente elaboradas por outros estudantes,[13] solicitando-lhes duas tarefas: primeiro, que escolham, entre essas produções, aquelas que mais se aproximam do que eles fariam, caso lhes fosse pedido para construírem uma prova para aquela determinada situação; em segundo lugar, que indiquem aquelas para as quais, em sua opinião, o professor daria a melhor nota.

13 As provas se referiam à seguinte proposição: a soma de dois números pares é um número par.

A análise dos resultados mostrou que para os alunos os argumentos que lhes parecem mais convincentes não são aqueles cujos professores atribuiriam as melhores notas e vice-versa. Ou seja, as provas preferidas pelos alunos seriam aquelas em que prevaleceriam os argumentos empíricos de estilo mais narrativo e, portanto, nas quais não seria privilegiada a representação algébrica, enquanto as preferências dos professores, na opinião dos estudantes, caminhariam no sentido oposto.

Dreyfus, por sua vez, interessa-se por investigar se as concepções dos alunos, analisadas por Healy e Hoyles, sobre as preferências dos professores corresponderiam, ou não, à realidade de seu grupo de docentes entrevistados, ou seja, qual seria o ponto de vista destes, em relação aos diferentes tipos de argumentos utilizados pelos alunos. Ele considerava essa questão importante, uma vez que as concepções dos professores sobre seus objetos de ensino influenciam seu trabalho pedagógico com estes. Nessa pesquisa, ele apresentou aos professores nove provas: as mesmas seis empregadas por Healy e Hoyles e três outras.

Os resultados obtidos levaram-no a concluir que as crenças dos professores sobre o que pode ser considerado prova na sala de aula de Matemática variam bastante, embora suas preferências por argumentações que utilizam linguagem algébrica sejam claras. Além disso, ficou evidente que os professores nem sempre conseguem perceber argumentos usados pelos alunos como provas, ainda que incipientes.

Outra pesquisa que envolve concepções de professores sobre prova é a de Knuth (2002). Esse estudo examina as noções de prova de dezessete professores de Matemática experientes por meio de duas entrevistas: a primeira possuía como foco as concepções de professores como indivíduos que são conhecedores de Matemática, enquanto a segunda esteve centrada nas concepções de prova no contexto da escola secundária, isto é, concepções de professores como indivíduos que são professores de Matemática.

Os resultados demonstram que os professores não concordam em trabalhar a prova formal com todos os alunos, porque eles acreditam que elas sejam apropriadas apenas para uma minoria dos estudantes. Ademais, o estudo sugere também que a tendência entre os professores é considerar a prova um procedimento pedagógico limitado, mais como um tópico de estudo do que um meio de estudar Matemática e de se comunicar sobre ela.

Para Balacheff (1987), a atividade de provar pode ser considerada sob diferentes perspectivas podendo-se explicitar características que em cada situação nos permitem falar de tipos de prova. Por outro lado, em um contexto de ensino e aprendizagem, indica que os processos de prova devem ser estudados na situação em que são colocados em funcionamento e em referência ao sujeito cognoscente que os põe em prática.

Para estudar a relação entre sujeito e processo de validação, Balacheff leva em conta que os processos de realização de uma prova são de naturezas muito diferentes e em sua descrição do “caminho” das provas pragmáticas às provas intelectuais e à demonstração matemática, se apóia sobre três aspectos que se relacionam entre si: conhecimentos (natureza das concepções); linguagem (formulação); validação (tipo de raciocínio).

O quadro a seguir mostra a correspondência entre os distintos aspectos que intervêm no processo de prova.

Natureza das concepções	**Formulação**	**Tipo de raciocínio**
Práticas	Manifestação e expressão	Provas pragmáticas
Conhecimento como objeto	Linguagem familiar	Provas intelectuais
Conhecimento teórico e reconhecido	Linguagem funcional Formalismo singelo	Demonstração

Para Balacheff as provas pragmáticas são as elaboradas por uma pessoa que se baseou em fatos e na ação. A comunicação dessas provas se realiza por manifestação/expressão (exemplificação). Não quer dizer que não exista linguagem, mas esta não é a ferramenta fundamental para expressar o conhecimento que se certifica pela ação e não pelo discurso. Nessas circunstâncias as concepções funcionam como modelos para a ação, ou seja, modelos implícitos. As provas intelectuais necessitam de uma mudança de posição da pessoa que as realiza, pois deve pensar e atuar como um “teórico”. Os conhecimentos são objetos de reflexão, debate e discurso. A elaboração de uma "demonstração" requer aceder a uma linguagem que não apenas é um meio de descrição das operações ou ações, linguagem familiar, mas também se constitui numa ferramenta intelectual que se denomina linguagem funcional. Balacheff considera que a evolução da linguagem familiar para a linguagem funcional (caracterizada pela introdução do simbolismo) é um processo. A introdução de símbolos se faz de maneira progressiva, chegando a um momento em que a linguagem seja estritamente simbólica. Todavia, por razões práticas os matemáticos recorrem a uma associação da linguagem natural e linguagem simbólica. Tem-se assim o formalismo singelo, o que leva a uma construção lingüística específica.

De acordo com Balacheff (1987), as provas pragmáticas e intelectuais se diferenciam pelos tipos de raciocínios a elas subjacentes e pela natureza de conhecimentos que põem em jogo. Para exemplificar matizes em diferentes tipos de provas vamos usar como exemplo a atividade "computar as diagonais de um polígono".

Tipologia	Descrição	Exemplo
Empirismo naif (ou singelo)	Consiste em extrair da observação de um pequeno número de casos a certeza de uma proposição	Um aluno constata que o número de diagonais de um pentágono é 5. Ao trabalhar com o hexágono ele conclui imediatamente: se tem 6 vértices, tem 6 diagonais.
Experiência crucial	É um procedimento de validação de uma proposição em que o indivíduo enuncia explicitamente o problema da generalização e o resolve mediante a realização de um caso que é particular e que é possível.	Um aluno que considera que para saber o número de diagonais de um polígono qualquer deve fazer uma figura "muito grande" Dois alunos que têm hipóteses diferentes sobre o número de diagonais e que imaginam o seguinte: vamos testar no caso de 15 lados e, se der certo, isto quer dizer que funcionará em outros casos.
Exemplo genérico	Consiste na explicitação da validade de uma proposição pela realização de operações ou transformações sobre um objeto presente, não por ele mesmo, mas como representante característico de uma classe. Da formulação são extraídas propriedades características e estruturas de uma família vinculada ao nome próprio e à exibição de um de seus representantes.	Um aluno desenha um hexágono (não regular) e, utilizando-o, assim se expressa: num polígono de 6 vértices saem 3 diagonais por vértice; então tem 18 diagonais; mas, como as diagonais se "repetem" duas vezes, só há 9 diagonais. O mesmo acontece com 7, 8, 9 vértices. Para sete vértices, saem 4 diagonais ...

Experiência mental	Evoca a ação interiorizada e desligada de sua realização sobre um representante particular.	Sabendo o número de vértices de um polígono, sairá de cada vértice o número de diagonais (menos dele e de seus vértices vizinhos). Será necessário multiplicar o número achado pelo número de vértices do polígono (de cada vértice parte o mesmo número de diagonais), mas se conta cada diagonal duas vezes; é então preciso dividir por dois e se obtém uma vez cada diagonal.

Conforme podemos constatar, esses quatro trabalhos apresentados foram de grande valia para o desenho da presente pesquisa e/ou análise dos dados. É preciso ressaltar, no entanto, que nesta investigação as demonstrações elaboradas pelos alunos, analisadas pelos sujeitos da pesquisa, não foram referentes à Geometria e à Álgebra. Além disso, as entrevistas com os professores tinham como objetivo estabelecer o que os docentes consideram importante na formação do professor a fim de prepará-lo para um trabalho pedagógico com a prova.

Desta forma, embora as pesquisas mencionadas tenham em comum com o nosso trabalho o tema de investigação, há diferenças fundamentais, pois procuramos investigar possíveis caminhos para a formação do professor adotando como princípio que uma de suas tarefas é desenvolver um trabalho com provas nas escolas de Educação Básica.

Finalizando este capítulo, destacamos alguns pontos que consideramos importantes em nossas análises de depoimentos dos professores.

Há muito interesse dos pesquisadores em Educação Matemática sobre provas na Educação Básica, fato esse que pode ser corroborado pelo grande número de pesquisas já realizadas e pela inclusão desse assunto nos recentes currículos. Todavia, essas pesquisas raramente se aprofundam a respeito das possíveis causas do abandono desse tema nas escolas do Ensino Fundamental e Médio nas décadas passadas.

Pode-se facilmente verificar que há muitas pesquisas, não brasileiras, em Educação Matemática envolvendo argumentações e provas nas salas de aula da

Educação Básica, mas muitas não parecem ter uma teoria consistente que as fundamentem. Longe de querer uma unanimidade a respeito, parece haver poucos projetos articulados entre si envolvendo os diferentes níveis de ensino. Apesar de esse interesse ter sido intensificado já há quinze anos, é possível dizer que algumas investigações ainda procuram argumentos para justificar a inclusão/retomada das provas no currículo escolar.

As dificuldades de indicar e/ou compreender os significados de provas sob a perspectiva da Educação Matemática decorrem não apenas do ponto de vista da cognição ou curricular, mas sobretudo porque estes foram moldados por concepções técnicas dos matemáticos profissionais.

A partir dos trabalhos realizados podem-se vislumbrar alguns caminhos para as pesquisas envolvendo demonstrações em Educação Matemática: aspectos curriculares como organização das tarefas, objetivos, métodos etc.; aspectos sociais, culturais e cognitivos que influem nos processos de ensino e de aprendizagem; formação, inicial e continuada de professores; características do conhecimento matemático e a disciplina Matemática nas escolas.

Vimos até aqui que são diversas as razões pelas quais esse tema pode ser objeto de ensino nas escolas. Mais ainda: parece não haver pleno acordo entre os educadores matemáticos sobre os próprios significados de demonstração. De que tipo de prova esses pesquisadores defendem a inclusão no currículo? Como deveria ser seu ensino? Deve-se ter como meta a prova formal?

CAPÍTULO 4

DEMONSTRAÇÕES: INDICAÇÕES DE PROPOSTAS CURRICULARES PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA E FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Não é o conhecimento do teorema de Pitágoras que irá assegurar o livre exercício da inteligência pessoal: é o fato de haver redescoberto a sua existência e a sua demonstração.

Piaget

4.1 Introdução

As muitas discussões no âmbito da Educação Matemática que têm acontecido no Brasil e em outros países indicam a necessidade de adequar o trabalho escolar a uma nova realidade, marcada pela crescente presença da Matemática em diversos campos da atividade humana. Tais discussões, balizadas pelas pesquisas na área, têm influenciado análises e revisões nos currículos de Matemática propostos para a Educação Básica.

Estudos como os de Pires (2000) mostram que, embora existam diferenças entre currículos de Matemática de diferentes países, estados ou municípios, no que se refere à Educação Básica, compreendendo o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, é possível detectar diversos pontos em comum, tais como: ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas; importância de trabalhar com amplo espectro de conteúdos, incluindo já no Ensino Fundamental, por exemplo, elementos de estatística, probabilidade e combinatória para atender à demanda social que aponta a necessidade de abordar esses assuntos; destaque para a Geometria, pois ela pode favorecer o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento que permite ao aluno compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive; necessidade de levar os alunos a compreender a importância do uso da tecnologia e a acompanhar sua permanente renovação; o recurso à história da Matemática.

Além desses aspectos, há uma tendência que vem ganhando força em alguns currículos: a inclusão de um trabalho com argumentações e provas já a partir do Ensino Fundamental. Apesar de não haver um absoluto consenso a esse respeito, pois as concepções sobre os significados desse trabalho não são exatamente as mesmas, tais recomendações estão razoavelmente explícitas nos currículos de alguns países.

Pode-se citar como exemplo de currículo, que procura incorporar as discussões dos educadores matemáticos a respeito da prova, o elaborado pelo National Council of Teachers of Mathematics dos Estados Unidos, NCTM, em 1989, denominado Principles and Standards for School Mathematics. Esse documento enfatiza de modo especial a relevância das argumentações e provas desde muito cedo. No documento posterior, divulgado em 2000, esse princípio não é só reiterado, como ampliado. Nesse último, indica-se que os programas das grades 6 – 8 e 9 – 12 deveriam habilitar todos os alunos a: reconhecer o raciocínio e a prova como um aspecto fundamental da Matemática; elaborar e investigar conjecturas matemáticas; desenvolver e avaliar argumentos matemáticos e provas.

No entanto, segundo alguns educadores matemáticos, os primeiros *standards de 1989* teriam diminuído a ênfase nas demonstrações em relação aos currículos anteriores, apesar de o NCTM incorporar muitas das tendências atuais para o ensino de Matemática.

Israel é outro país cujos currículos trazem indicações referentes às provas. O Ministério da Educação desse país estabelece, entre outras, as seguintes especificações para o ensino da Geometria euclidiana nas 8.ª e 9.ª séries: "o estudante deve ser levado a perceber a necessidade de provar teoremas: é importante que ele compreenda a universalidade de uma prova formal" (Ministry of Education and Culture, 1990, apud Dreyfus, 2000, tradução nossa).

Um outro exemplo de país cujas orientações curriculares explicitam a inclusão de provas matemáticas nos currículos é o Japão. Na versão inglesa desses programas publicados em 2000 pela Sociedade Japonesa de Educação Matemática (JSME) divisamos várias especificações para alunos de 13/14 anos como: "compreender o significado e a metodologia da prova" (JSME, 2000, p. 24). Segundo Fujita (2003), os livros didáticos japoneses adotam as recomendações prescritas pela JSME a respeito das demonstrações: para essa faixa etária, por exemplo, são detalhadas, inclusive, explanações sobre "definições" e "provas matemáticas".

Outro país que ressalta a importância da demonstração em seus currículos é a França. Para as classes de 5.ª e 4.ª (7.ª e 8.ª séries do Ensino Fundamental), as indicações envolvendo esse tema aparecem em Geometria, conforme mostra o texto abaixo retirado do programa oficial:

> Em geometria, o conhecimento de propriedades e de relações métricas das configurações básicas (triângulos e paralelogramos), a abordagem de transformações no plano (simetria central, translação), a familiarização com as representações de figuras espaciais; *a aprendizagem progressiva da demonstração* (<http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/m2002/institut/programmes/college/presente_prog.html>, tradução e grifos nossos).

O atual currículo nacional da Inglaterra é um dos que mais dão destaque, segundo nossa pesquisa, aos trabalhos com as argumentações e provas, pois não o fazem apenas no âmbito da Geometria. Em relação à Álgebra, por exemplo, o documento, explicita que o aluno deveria ser ensinado a argumentar e a

> a) explorar, identificar e usar padrão e simetria em contextos algébricos, investigando se casos particulares podem ser generalizados, e compreender a importância de um contra-exemplo; identificar casos particulares quando resolver problemas; fazer conjeturas e verificá-las para novos casos;

b) mostrar, passo a passo, a resolução de um problema, explicando e justificando como se chegou a uma conclusão;

c) distinguir entre uma demonstração prática e uma prova;

d) reconhecer a importância de suposições quando se deduz resultados; reconhecer as limitações das asserções feitas e o efeito que a variação destas pode ter na solução de um problema (National Curriculum in Action, <http://www.ncaction.org.uk/subjects/maths/index.htm>, tradução nossa).

Relativamente às recomendações de provas em Geometria, o currículo nacional inglês é também bastante enfático.

Portugal é um outro país que procura dar sentido ao trabalho com provas no Ensino Fundamental e Médio: o currículo nacional do Ensino Básico traz as competências essenciais e uma delas refere-se exclusivamente às provas: "compreensão das noções de conjecturas, teorema e demonstração, assim como das conseqüências do uso de diferentes definições" (Currículo Nacional – competências essenciais, <www.iie.min-edu.pt/curriculo/Reorganizacao_Curricular/reorgcurricular_publicacoes.asp>).

Todavia, as indicações para o trabalho com as provas não estão tão evidentes nos currículos para a Educação Básica de alguns países como o da Escócia (Scottish Office, 1997).

Convém esclarecer que nossa intenção ao citar os currículos desses países foi apenas exemplificar os tipos de recomendações sobre a inclusão de demonstrações em classes de Educação Básica. Todavia, não podemos afirmar que nos países mencionados houve maior valorização da prova em relação aos currículos anteriores, pois não pesquisamos esses últimos.

Acreditamos que estudos envolvendo a comparação dos currículos de Matemática de diferentes países a respeito das demonstrações – não apenas as enfatizam, mas também como o fazem – poderão ser bastante úteis para a comunidade de educadores matemáticos que pesquisam esse assunto. Isso pode ser corroborado pelo fato de o 10.º ICME ter como uma das tarefas justamente o levantamento do *status* da prova nos currículos de países diversos.

Por sua vez, o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – Programme for International Student Assessment (PISA),[14] dentre as competências indicadas para a avaliação dos jovens de 15 anos destaca “pensar e raciocinar”, o que inclui: “a distinção entre diferentes tipos de enunciados (definições, teoremas, conjeturas, hipóteses, exemplos, afirmações condicionadas); compreensão e uso dos conceitos matemáticos em sua extensão e seus limites”.

Para compreender melhor a questão de incluir ou não provas nos currículos da Educação Básica, no caso particular do Brasil, analisamos na seqüência, algumas indicações no tocante às demonstrações nos currículos prescritos para a Educação Básica a partir de 1931, ano da Reforma Francisco Campos, até 2002, quando são divulgadas as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – os PCN+. Logo após, examinaremos as indicações curriculares para os cursos de licenciatura em Matemática.

4.2 Demonstrações nos currículos da Educação Básica

A importância conferida, por alguns educadores, às demonstrações como um conteúdo a ser ensinado nas etapas correspondentes aos anos finais do atual Ensino Fundamental e Ensino Médio e as formas de trabalhá-las em sala de aula, no Brasil, podem ser influenciadas pelas concepções de ensino e de aprendizagem que, em cada momento, teorias educacionais formulam.

Pode-se dizer que as orientações curriculares evidenciam concepções que vão do tradicionalismo, passam pelo empirismo e chegam ao construtivismo.

---

14 Trata-se de um programa de cooperação entre países da Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE) e outros convidados para avaliar em que medida jovens de 15 anos, ao final da escolaridade obrigatória, estão preparados para satisfazer os desafios das sociedades de hoje. A principal finalidade da avaliação Pisa/OCDE consiste em determinar indicadores que expressem se os sistemas educativos dos países participantes preparam seus estudantes de 15 anos para desempenhar um papel ativo como cidadãos na sociedade. O foco dessa avaliação é estabelecer se os estudantes podem utilizar o que aprenderam em situações usuais da vida cotidiana, em vez de limitar-se a conhecer quais são os conteúdos do currículo que aprenderam. Ou seja, esse projeto estaria no domínio *Mathematical Literacy* (Alfabetização Matemática), pois se refere às capacidades dos estudantes para analisar, raciocinar e comunicar eficazmente quando enunciam, formulam e resolvem problemas matemáticos em uma variedade de domínios e situações.

No período anterior à Reforma Francisco Campos, a julgar pelas próprias recomendações desta reforma, predominava o ensino formalizado das provas, sem um trabalho de caráter intuitivo que o precedesse.

Isso pode ser constatado nas orientações dadas ao ensino de Geometria, na Reforma do Ensino Secundário de Francisco Campos,[15] em 1931:

> [...] partindo da intuição viva e concreta, a feição lógica crescerá, pouco a pouco, até atingir, gradualmente, a exposição formal; ou por outras palavras, os conhecimentos serão adquiridos primeiro por experimentação e pela percepção sensorial e, depois, lentamente, pelo raciocínio analítico. Assim, quanto à Geometria, o estudo demonstrativo formal deve ser precedido de um curso propedêutico, destinado ao ensino intuitivo, de caráter experimental e construtivo. Ao iniciar o estudo dedutivo de Geometria, o primeiro cuidado será o de fazer sentir ao aluno o que significa uma demonstração utilizando-se, como ponto de partida, os próprios fatos inferidos intuitivamente no curso preparatório. É ainda a partir das intuições que se deve estabelecer o conjunto de axiomas fundamentais e indispensáveis à exposição lógica da Geometria. Nesse estudo ter-se-á em vista: a) o enunciado das proposições, sua demonstração e aplicações; b) a compreensão e a justa apreciação do raciocínio dedutivo; c) o valor da exposição clara e sucinta do encadeamento lógico, das idéias e da memória matemática. Obtido pela Geometria plana o adestramento suficiente nas demonstrações dedutivas, a feição lógica pode ser menos acentuada na Geometria a três dimensões” (Bicudo, 1942).

Essas preocupações com as demonstrações corroboram o fato de que o currículo de Matemática da Reforma Francisco Campos sofria nítida influência da Escola Nova.[16] Certamente, essas “restrições” à prova formal ocorrem porque esta seria, a despeito de sua importância, contra-exemplo dos princípios dessa Escola, uma vez que estes incluiriam atividades experimentais e o uso de materiais concretos para a “descoberta” das noções e conceitos pelos alunos.

---

15 A Reforma Francisco Campos organiza o ensino secundário brasileiro em 7 anos, compreendendo dois cursos seriados: o primeiro, denominado de fundamental, tinha a duração de 5 anos, e o segundo, complementar de 2 anos. O curso complementar era obrigatório apenas aos alunos que pretendessem ingressar em determinados cursos superiores.

16 Escola Nova é um dos nomes dados a um movimento de renovação do ensino que aconteceu especialmente nos Estados Unidos, países da Europa e também no Brasil na primeira metade do século XX. Alguns denominavam esse movimento de "Escola Ativa" ou "Escola Progressiva" por acharem que esses termos refletiam mais seus princípios. Os primeiros grandes inspiradores da Escola Nova foram o escritor Jean-Jacques Rousseau (1712-1778) e os pedagogos Heinrich Pestalozzi (1746-1827) e Freidrich Fröebel (1782-1852). O grande nome do movimento nos Estados Unidos, e também no Brasil, foi o filósofo e pedagogo John Dewey (1859-1952). O famoso *slogan* de Dewey – Escola é Vida – foi tomado como referência para esse movimento por muitos. O psicólogo Edouard Claparède (1873-1940) e o educador Adolphe Ferrière (1879-1960) foram expoentes na Europa.

Além desse pressuposto básico de que o aluno aprende fazendo, as generalizações seriam realizadas indutiva e intuitivamente. Ou seja, enfatizar-se-iam menos as estruturas internas da Matemática e mais sua relação com as ciências empíricas. Isto pode ser comprovado pelo texto a seguir, destacado das "Instruções Pedagógicas" dessa Reforma:

> A exposição da matéria e a orientação metodológica, entretanto, devem subordinar-se, sobretudo nas séries inferiores, às exigências da pedagogia, de preferência aos princípios puramente lógicos. Ter-se-á sempre em vista, em cada fase do ensino, o grau de desenvolvimento mental do aluno e os interesses para os quais tem-se maior inclinação. O ensino se fará, assim, pela solicitação constante da atividade do aluno (método heurístico), de quem se procurará fazer um descobridor e não um receptor passivo de conhecimentos. Daí a necessidade de se renunciar completamente à prática de memorização sem raciocínio, ao enunciado abusivo de definições e regras e ao estudo sistemático das *demonstrações já feitas* (Bicudo, 1942, grifos nossos).

Se analisarmos os currículos mais recentes, como a Proposta Curricular de São Paulo de 1988, podemos constatar diversos pontos em comum com o currículo da Reforma Francisco Campos, em especial quanto ao ensino de Geometria e as recomendações quanto às provas.

Os programas de Matemática da reforma posterior, a de Capanema[17] em 1942, eram muito mais extensos, apesar da declaração, em seus princípios gerais, de que os programas deveriam ser "simples, claros e flexíveis". As orientações didáticas referentes ao trabalho com as demonstrações eram ainda menos claras e com menor destaque que as da Reforma Francisco Campos. Além disso, alguns dos princípios para o processo de ensino da Matemática eram indicados em conjunto com as demais ciências. Transcrevemos, a seguir, o único trecho dessas orientações em que aparece a palavra demonstração:

> Ao estudo das ciências num e no outro caso, orientará sempre o princípio de que não é papel do ensino secundário formar extensos conhecimentos, encher os espíritos dos adolescentes de problemas e demonstrações, de leis e hipóteses, de nomenclatura e classificações,

---

17 Essa lei, denominada "Lei Orgânica do Ensino Secundário", segundo a exposição dos motivos da reforma, pretendia "o prosseguimento do trabalho de renovação e elevação do ensino secundário do país" e pretendia, segundo o artigo 1.º, "dar preparação intelectual geral que possa servir de base a estudos mais elevados de formação especial". Segundo essa reforma, o ensino secundário passou a ter nova configuração estrutural. Ele passou a ter obrigatoriamente dois ciclos: o primeiro ciclo, denominado de ginasial com duração de 4 anos, e o 2.º, que compreendia dois cursos paralelos, o clássico e o científico, cada qual com a duração de 3 anos.

> ou ficar na superficialidade, na mera memorização de regras, teorias e denominações, mas cumpre-lhe essencialmente formar o espírito científico [...] nas aulas os alunos terão que discutir e verificar, terão que ver e fazer (p. 16).

A portaria 170, de 1942, que regulamenta a Lei Capanema, contraria de certa forma as indicações, pois, ao enunciar os conteúdos e algumas orientações gerais dessa reforma, indica que o ensino dedutivo da Geometria deveria ser iniciado a partir do 3.º ano ginasial (7.ª série).

Esse princípio foi adotado também na reforma do Ensino Secundário proposto pela Portaria 1.045, de 1951. Em suas instruções metodológicas, procura-se ter uma preocupação mais explícita com o rigor e as demonstrações com a geometria plana no antigo curso ginasial:

> Procurar-se-á despertar, aos poucos, no aluno, o sentimento da necessidade da justificativa, da prova e da demonstração, introduzindo-se ainda no curso ginasial o método dedutivo com o cuidado que exige. A idéia de rigor não deverá ser exagerada, mesmo no segundo ciclo, a fim de que não se torne formal e fastidiosa a explanação da matéria, com o conseqüente alheamento do aluno pelo processo de encadeamento de conceitos, das demonstrações e dos problemas. O apelo à intuição jamais deverá ser dispensado. [...] Não deverá ser esquecido que a matemática não é lógica pura, como se admitiu por muito tempo (p. 28).

Essas menções às demonstrações também estão presentes nos documentos referentes à Lei 4.024, de 1961, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Em um estudo especial do Conselho Federal da Educação observa-se: “na quarta série,[18] dar-se-á o início ao estudo da Geometria plana dedutiva, limitada, porém, à demonstração dos teoremas mais importantes, e, sempre com vistas às aplicações de ordem utilitária [...]” (p.30).

Pode-se observar que até este período os documentos não faziam referência à relevância das demonstrações para a formação do aluno, provavelmente pelo fato de ser óbvia essa importância, tratando-se de ensino de Matemática. Mas é interessante ressaltar que mesmo assim os documentos chamavam atenção para algumas precauções no sentido de que os professores

18 Correspondente à atual 8.ª série do Ensino Fundamental.

tivessem bastante critério ao desenvolver as demonstrações nas escolas, não cometendo exageros, como destacam os currículos mais recentes.

Nos anos 70, como conseqüência da Lei 5.691/71, novas diretrizes curriculares são propostas. No Estado de São Paulo foram elaborados os Guias Curriculares[19] para o Ensino do Primeiro Grau, cujos princípios estavam ainda bastante arraigados no Movimento da Matemática Moderna. Esses princípios não enfatizavam, conforme comentamos no capítulo 1, o ensino da Geometria euclidiana e suas demonstrações. Apesar disso, relativamente à demonstração, convém ressaltar que para a 7.ª série é indicado, nos guias, o "início do emprego do raciocínio hipotético-dedutivo na Geometria", mas não são discutidas possíveis maneiras de trabalhar essa área da Matemática, nem propostas para desenvolver tal raciocínio.

Algumas recomendações sobre esse trabalho foram expostas em dois livros – denominados *Subsídios para implementação do Guia Curricular de Matemática/Geometria* – publicados quase três anos depois. Em um deles, são propostas diversas atividades de Geometria, de 5.ª a 8. ª séries, que permitiriam ao "professor obter os resultados esperados". Esses *Subsídios* favoreceriam "a efetiva implementação do guia curricular, no que diz respeito à Geometria".

Na introdução de *Subsídios* há algumas considerações de que a axiomatização da Geometria seria um dos problemas do seu ensino:

> [...] mais que os conteúdos tradicionais foi a arcaica metodologia utilizada no ensino da Matemática que levou à situação quase calamitosa atingida pelo ensino dessa matéria. No que diz respeito à Geometria, então, o problema se agravou com a insistência na utilização de um pseudo-raciocínio rigoroso baseado, quase sempre, numa *axiomática "furada"!* Na atual era tecnológica, existe a necessidade de preparar técnicos que, mais do que conhecimentos de

---

19 Em diversas passagens deste trabalho fazemos referências aos Guias Curriculares e às Propostas Curriculares de Matemática, ambos do Estado de São Paulo e divulgados, respectivamente, em 1976 e 1988. Nesse sentido, é necessário ressaltar que esse Estado tem sido uma espécie de laboratório, onde reformas educacionais são experimentadas para ser, depois, adotadas em outras regiões. Assim, nossa opção por levar em conta essas reformas justifica-se pelo fato de representarem um importante marco, uma vez que serviram de base para as propostas curriculares de outros estados e municípios e influenciaram a publicação de livros didáticos. Esta opção também decorre da posição política e econômica de São Paulo: apesar de ser o Estado mais industrializado e urbanizado da Federação, possui, em função de seu desenvolvimento bastante acelerado, contradições sociais que, no âmbito da educação, são reveladas por um ensino desigual, decorrente da formação inadequada de professores, de classes superlotadas e de problemas de infra-estrutura – principalmente na periferia das grandes regiões urbanas.

> Matemática, utilizem habilidades desenvolvidas no estudo da mesma para a resolução de novos problemas que surgem, constantemente, em outras áreas do conhecimento! (1978, *Subsídios* – Geometria, atividades p. 9-11, grifos nossos).

Essas recomendações dos Guias levam em conta que o "ativismo" da Escola Nova e as proposições da Reforma Campos não ecoaram nas aulas de Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental, prevalecendo um tradicional curso de Matemática que fora consagrado no final do século XIX pelo colégio Pedro II.

Os *Subsídios* aos Guias trazem uma série de recomendações concernentes ao ensino de Matemática e, em particular, da Geometria, indicando que, quaisquer que sejam os conceitos geométricos explorados, isto deveria ser feito formalmente, mas sem preocupação excessiva com o rigor. Utilizam ainda uma expressão não encontrada em nenhum outro documento oficial: "demonstração local".

Assim, segundo essa recomendação, toda situação deve permitir que se realizem pequenas "demonstrações locais" a fim de destacar: as condições admitidas como válidas; o que deve ser demonstrado, chamando a atenção para o que pode ser deduzido das condições admitidas; os raciocínios efetuados para chegar a esses resultados, a partir dos dados e dos conhecimentos já incorporados.

Desse modo, segundo o documento, dar-se-ia uma idéia do método axiomático, pois as condições admitidas seriam os axiomas da teoria, os resultados seriam os teoremas e as "demonstrações locais" forneceriam o exemplo de aplicação do método dedutivo. No texto destaca-se qual deveria ser a atitude do professor toda vez que uma propriedade não pudesse ser demonstrada: "admitir claramente o fato, mostrando a insuficiência das possíveis demonstrações das mesmas" (p. 11). Outro ponto discutido é o cuidado que o professor deveria ter na análise das demonstrações produzidas pelos alunos com a finalidade de valorizar "as que são corretas, embora realizadas por caminhos diferentes dos propostos, e mostrar, nas incorretas, onde está a falha" (p. 12).

É curioso notar que, apesar da ênfase dada pelos guias às transformações geométricas, não há, nos *Subsídios*, nenhuma proposta de demonstração utilizando as propriedades das simetrias, translação e homotetia. As demonstrações realizadas nessas atividades levam em conta, sobretudo, os casos de congruência e semelhança de triângulos.

Outro ponto interessante a ser salientado é que, não obstante os Guias terem como princípios os fundamentos do Movimento da Matemática Moderna, os *Subsídios* procuram, paradoxalmente, relativizar as demonstrações geométricas, talvez pelo "desprestígio" da Geometria euclidiana.

A despeito das diversas referências sobre as demonstrações nos *Subsídios* de Geometria, tanto no volume Informações para o professor quanto no volume Atividades, não as encontramos nos *Subsídios* de Álgebra. Ou seja, no caderno de atividades de Álgebra não há propostas de demonstrações, se bem que há atividades solicitando que os alunos justifiquem alguns procedimentos como descrever as razões pelas quais uma dada expressão algébrica não pode ser fatorada por nenhum dos casos estudados ou justificar "as passagens" efetuadas para resolver uma equação ou inequação. A expressão "demonstração local", com indicação freqüente nos textos de Geometria, sequer é mencionada nos dois documentos de Álgebra.

Diante dessas diretrizes – demonstrações locais em Geometria e sequer isso em Álgebra – poder-se-ia pensar que os Guias não estavam de acordo com o Movimento da Matemática Moderna, pois afinal, esse movimento não tinha como pressuposto o rigor? Apesar do declínio desse movimento em outros países, os Guias adotaram seus princípios mais essenciais, como estruturar os currículos de todas as séries por meio de conjuntos e de relações e funções e a linguagem simbólica.

Os livros referentes a esses Subsídios – de Álgebra e de Geometria – com a denominação Informações para o professor trazem a seguinte advertência: "Este trabalho contém apenas informações destinadas ao professor, que não deverão, de forma alguma, ser entendidas como conteúdos a serem apresentados ao aluno. Atividades destinadas aos estudantes são apresentadas, como sugestões, em outro trabalho dessa coleção” (p. 11).

Pode-se também dizer que a publicação dos dois cadernos de referências para o professor de 5.ª a 8.ª séries para subsidiar a implementação do Guia Curricular – um de Álgebra e o outro de Geometria –, pela Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, nos permite conjecturar que essa Secretaria considerou que, de modo geral, a formação inicial era insuficiente para que os professores adotassem essa proposta nas salas de aulas, tanto do ponto de vista do conhecimento matemático quanto do pedagógico.

Enquanto o Estado de São Paulo tentava implementar os Guias, cujo principal aporte teórico era ainda o da Matemática Moderna, em outros países já havia uma forte crítica a esse movimento. Por certo, essa crítica à Matemática Moderna foi o ponto de partida para a reformulação dos princípios norteadores do ensino dessa disciplina. Num primeiro instante, a reação levou a um movimento conhecido como “back to basics”, que se propunha a restabelecer as práticas anteriores à Matemática Moderna, abandonadas pelos professores. Todavia, essa reação perdeu sua força, tendo em vista a necessidade de esse ensino superar e não retomar, simplesmente, o caráter tradicional e elitista anterior.

Segundo Pires (2000), no decorrer dos anos 80, as reformas curriculares que foram implementadas em diversos países, contrariamente às inspiradas na Matemática Moderna, não possuíam um referencial teórico comum, exceto pelo fato de se contraporem a esse movimento. Entretanto, elas procuraram incorporar algumas questões debatidas em vários congressos e encontros promovidos àquela época, sobre o ensino de Matemática. Para essa pesquisadora, as novas propostas,

> apesar de incorporarem sugestões bastante interessantes – como o recurso à metodologia de resolução de problemas e à participação ativa do aluno –, esboçaram projetos muito mais preocupados em contrapor-se ao antigo ideário do que, realmente, em explicitar seus referenciais teóricos e em propor rupturas de alguns mitos, como o da acumulação e o da linearidade do saber, detectados como também responsáveis pelo baixo desempenho dos estudantes nessa área do conhecimento (Pires, 2000, p. 51).

Pires (2000) considera também que, por falta de referenciais teóricos, as indicações dessas reformas, por mais relevantes e interessantes que fossem, apresentavam dificuldades de concretização. A nosso ver, estas questões não haviam sido suficientemente debatidas pelos membros da comunidade de educadores matemáticos. Eram poucos os artigos de revistas internacionais que tratavam desse assunto, e, dentre eles, citamos a publicação portuguesa *Educação e Matemática*, da qual extraímos o trecho:

> Arsélio Martins, da Sociedade Portuguesa de Matemática, numa mesa redonda em Viana do Castelo, colocou uma pergunta fundamental: na Matemática Moderna não havia dúvidas, eram os conjuntos, as estruturas, que dominavam a reforma! E agora, o que é? Tirados os conjuntos, o que se colocou em vez deles? Nenhum dos autores dos programas respondeu satisfatoriamente. Nem o podia fazer, pois essa orientação unificadora de programas, pura e simplesmente, não existe. É certo que existem "frases" sobre a resolução de problemas, que se "fala" das novas tecnologias, que se recomenda que os professores deixem tempo para que os alunos façam seus projetos etc. Sem querer ser muito negativo, devo dizer que seria difícil fazer hoje novos programas sem que essas frases aparecessem... Mas quando se lêem os objetivos específicos, percebe-se que nem a resolução de problemas, nem a utilização de tecnologias, nem a ligação da Matemática à realidade através da realização de projetos, constituem pólos de orientação clara aos novos programas. Ao contrário, a extensão dos programas e a própria fraseologia empregue nos objetivos específicos deixam lugar a grandes ambigüidades (Eduardo Veloso, 1992, p. 24, Apud Pires, 2000, p. 17).

Em relação às orientações curriculares que foram elaboradas na década de 80, substituindo os guias curriculares de Matemática no Estado de São Paulo – Proposta Curricular de Matemática para o Ensino de 1.º grau e Proposta Curricular de Matemática para o Ensino de 2.º grau –, pode-se afirmar que elas seguiram a tendência de outras propostas de ensino posteriores ao Movimento da Matemática Moderna. Entretanto, apesar das muitas e significativas diferenças existentes entre a Proposta Curricular e os Guias, as indicações a respeito das demonstrações são muito semelhantes. Na lista de objetivos da Proposta Curricular para o Ensino de 1º grau, por exemplo, constam:

> Na 7.ª série espera-se que o aluno:
> Aplique os casos de congruência de triângulos na demonstração das principais propriedades relativas a triângulos e quadriláteros (p. 128)
> Na 8.ª série espera-se que o aluno:

> Desenvolva a noção de semelhança de figuras planas e verifique experimentalmente o teorema fundamental da proporcionalidade e sua demonstração.
> Demonstre o teorema de Tales e saiba aplicá-lo em situações-problema.
> Utilize os teoremas sobre semelhanças de triângulos para demonstrar o teorema de Pitágoras (p. 152).

Apesar de não figurar na lista de objetivos, é na 6.ª série que a Proposta Curricular indica, na lista de conteúdos, a primeira demonstração formal a ser feita no 1.º grau: “verificação experimental e demonstração do teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo”. Nas orientações para o professor constam os seguintes comentários: “este é o primeiro teorema que os alunos irão demonstrar. No entanto, essa demonstração deverá ser precedida de uma verificação experimental e, além disso, devem-se evitar, inicialmente, excessos de simbologia” (p. 107).

Convém ressaltar que essas orientações apresentam sugestões de como poderiam ser realizadas essas experimentações, mas não indicam nem sugerem um caminho a ser utilizado nessa demonstração. Certamente, está implícita a noção de “demonstração local” tal e qual os Guias discutem, pois, até o momento de o professor propor essa demonstração, ainda não teria sido feita nenhuma axiomatização. Nas orientações da 7.ª série a expressão “demonstração local” aparece algumas vezes, embora não se explicite seu significado:

> Esse é o momento para se trabalhar com situações que utilizem *localmente* o raciocínio hipotético dedutivo, fazendo uso dos casos de congruência de triângulos. Demonstrando, por exemplo, propriedades como: os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes; a diagonal de um paralelogramo o divide em dois triângulos congruentes... Uma mediana de um triângulo divide-o em dois outros de mesma área (p. 145-146, grifo nosso).

Pelo exposto é possível inferir que, apesar das mudanças significativas nos currículos de Matemática prescritos ao longo do século XX, no Brasil, houve poucas alterações nesses documentos quanto às demonstrações: sejam as recomendações para o professor, seja a ênfase na Geometria.

Já mencionamos que os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN prescrevem provas desde o Ensino Fundamental. Será que houve mudanças quanto às orientações e ênfase nesse tema em relação aos currículos anteriores? Quais seriam elas?

De modo geral, os PCN parecem ter pontos em comum com orientações de outros países, apesar da menor ênfase no trabalho com as demonstrações se compararmos, por exemplo, com os currículos da França e Inglaterra. Reiteramos que currículos atuais de Matemática para Educação Básica de alguns países indicam claramente que, para que essa disciplina possa desempenhar adequadamente seu papel, é necessário desenvolver um trabalho com argumentações e provas desde as séries iniciais.

Essa inclusão é defendida por vários educadores: Schoenfeld (1994) discute, por exemplo, que a demonstração não é algo que possa ser retirado da Matemática como ocorre em muitos programas de ensino, pois para ele a prova é uma componente essencial da prática e da comunicação matemática.

Todavia, não há estudos brasileiros indicando a possibilidade e a necessidade de incluir provas no currículo escolar. Talvez por esse motivo os PCN não tragam muitas orientações a esse respeito. Apesar disso pode-se dizer que os PCN tiveram um pequeno avanço em relação aos programas da Proposta Curricular de São Paulo prescritos no final dos anos 80: pelo menos quanto às orientações didáticas.

Esse fato pode ser constatado na leitura dos objetivos gerais para o Ensino Fundamental, em que constam as finalidades do ensino de Matemática:

> visando à construção da cidadania, indicam como objetivos do ensino fundamental levar o aluno a: identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e *perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática*, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas propostos (PCN – Matemática 5.ª a 8.ª séries, p. 47, grifos nossos).

Os PCN explicitam a necessidade do desenvolvimento de um trabalho que inclua demonstrações a partir das séries finais do Ensino Fundamental. Assim,

> as atividades de Geometria são muito propícias para que o professor construa junto com seus alunos um caminho que, a partir de experiências concretas, leve-os a compreender a importância e a *necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas*. Para delinear esse caminho, não se deve esquecer a articulação apropriada entre os três domínios citados anteriormente: o espaço físico, as figuras geométricas e as representações gráficas (PCN – Matemática 5.ª a 8.ª séries, p. 126, grifos nossos).

Entretanto, os PCN advertem que, apesar de os experimentos com material concreto e com a medição de grandezas serem bastante convincentes para a maioria dos alunos, eles não constituem em si em provas matemáticas. Os PCN discutem que, “ainda que essas experiências possam ser aceitas como ‘provas’ no terceiro ciclo (5.ª e 6 séries), é necessário, no quarto ciclo (7.ª e 8.ª séries), que as observações do material concreto sejam elementos desencadeadores de conjecturas e processos que levem às justificativas mais formais” (p.127).

O documento ainda ressalta que, se, por um lado, as experiências empíricas para verificar/constatar a validade de um teorema podem favorecer a construção das argumentações formais, por outro, há casos em que a concretização utilizada distancia-se da demonstração adotada. Nesses casos, a exemplificação num contexto pode apenas desempenhar o papel de fonte de conjecturas a serem provadas formalmente.[20]

Os PCN do Ensino Médio também apresentam indicações relativas às demonstrações. Um dos objetivos propostos para o Ensino Médio, dentro do bloco de conteúdos Geometria Espacial, é: “compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma específica para validar resultados” (p.125). A respeito desse assunto consta ainda:

---

20 Um exemplo desse fato, citado pelos PCN, seria a “comprovação” de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo vale 180º, feita por meio da decomposição e composição de um modelo material de um triângulo. “A demonstração de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, acessível a um aluno do quarto ciclo, recorre a axiomas e teoremas envolvendo um par conveniente de retas paralelas que, no entanto, não tem correspondente na concretização acima mencionada. Mesmo assim, nesse caso, a concretização é bastante útil para levantar conjecturas sobre esse resultado.”

> O ensino de Geometria no ensino fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas. Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no ensino médio haja um aprofundamento dessas idéias no sentido de que o aluno possa conhecer um *sistema dedutivo*, analisando o significado de *postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares.* Não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações, mas da oportunidade de perceber como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática (*PCN + Ensino Médio*: ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias, p. 123-124, grifos nossos).

Nos PCN, tanto do Ensino Fundamental quanto do Médio, não há referências claras no que concerne a provas e demonstrações em outras áreas da Matemática que não a Geometria. Todavia, cabe ressaltar que há nesses documentos indicações precisas no sentido de o professor propor atividades de modo que o aluno possa observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.

Saliente-se também que a questão da argumentação aparece em outras partes do documento, mesmo de forma sutil, quando, por exemplo, faz recomendações a respeito da importância de o aluno saber comunicar-se matematicamente. Essa competência, segundo os PCNEM,[21] pode se "realizar por meio de propostas de elaboração pelos alunos de textos diversos, como relatos de conclusões sobre um conceito ou processo". Nesse processo, o aluno deveria compreender as diferentes linguagens e representações para construir argumentações a fim de se posicionar, criticamente, perante novas informações.

Nesta pesquisa dos antigos documentos curriculares notamos uma interessante questão nos textos que se referem à Matemática e ao seu ensino: as demonstrações estão claramente recomendadas apenas nas 3.ª e 4.ª séries ginasiais – atuais 7.ª e 8.ª séries do Ensino Fundamental – quando se afirma sobre a necessidade da "iniciação ao raciocínio dedutivo" por meio dos teoremas da Geometria Plana. Ou seja, não há alusões explícitas às demonstrações

---

21 Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio.

quando se discutem os demais temas da Matemática. Mais ainda: as recomendações didáticas reportam-se sempre ao cuidado indispensável a esse assunto, por ser difícil e árido, mas não se sugere, em nenhum momento, a dimensão real desse trabalho, como a seleção e organização dos teoremas a serem demonstrados, o tempo destinado a esse assunto etc. Provavelmente, seguiam-se as orientações aventadas pelos livros didáticos da época.

O trabalho com as demonstrações apenas em Geometria não é certamente uma característica exclusiva de currículos brasileiros. A ausência de prova fora do âmbito da Geometria euclidiana – notadamente da plana – tem sido apontada por alguns educadores.

Wu (1996) argumenta, por exemplo, que esta não-proposição pode significar um erro de representação do papel e da natureza da prova na Matemática e que esta ausência pode não proporcionar aos alunos uma educação mais ampla.

Poderíamos dizer, diante do exposto, que essa tradição de demonstrações em Geometria plana nos currículos pode ser explicada, pelo menos em parte, pelos assuntos nelas envolvidos, pois são considerados prioritários e constam da agenda dos professores e livros didáticos, como por exemplo, a congruência e a semelhança de triângulos. Já muitas das demonstrações relativas à Aritmética e à Álgebra envolveriam noções mais complexas, como teoria dos números, teoria dos grupos, dos anéis etc., temas não presentes nos currículos da Educação Básica, pelo menos não explicitamente. Além do mais, um curso axiomático envolvendo Geometria espacial nas escolas de Ensino Médio talvez pudesse gerar desinteresse dos alunos pelas dificuldades e obstáculos envolvidos.

Conforme já salientamos, os atuais currículos de Matemática para Educação Básica de alguns países consideram que, para que essa disciplina possa alcançar seus objetivos, é necessário inserir um trabalho com argumentações e provas desde as séries iniciais. A retomada desse tema nos currículos prescritos pode ser explicada certamente pela atenção que este vem recebendo, nos últimos anos, por muitos pesquisadores.

4.3 O trabalho com demonstrações nas escolas de Educação Básica: indicações de outras fontes

Além dos documentos específicos sobre currículos, há outros cujas sinalizações influenciam – ou podem influenciar – o professor de Matemática, como aqueles que estabelecem critérios de análise de livro didático e os referentes às macroavaliações: Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar de São Paulo (Saresp), Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e Exame Nacional do Ensino Médio (Enem).

Em relação aos livros didáticos, sabe-se que estes se constituem em importante referencial para o trabalho em sala de aula. Há atualmente à disposição do professor uma série de instrumentos, como o Guia de Livros Didáticos do Plano Nacional do Livro Didático[22] do MEC – PNLD –, que podem subsidiar a avaliação desse ou daquele material. Em uma simples leitura desse Guia com referência aos livros destinados ao Ensino Fundamental que possuem o foco nas demonstrações constata-se que um dos critérios de análise é a existência ou não de articulação do trabalho com as verificações empíricas de teoremas e as respectivas demonstrações.

Como exemplo, citamos as análises de dois livros didáticos quanto a esses aspectos, presentes nesse Guia, elaboradas por professores de diversas universidades e/ou pesquisadores em Educação Matemática. Essas duas análises referem-se ao critério: "o Livro Didático estimula a construção progressiva da inferência matemática (raciocínios indutivo e dedutivo, distinção entre validação matemática e validação empírica)" (Guia do PNLD, 2005, p. 208).

22 Em 1995, o Ministério da Educação desencadeou algumas ações que visavam a melhoria da qualidade do livro didático utilizado nas escolas públicas de todo o País. Em dezembro desse ano, foi realizada uma reunião técnica para apresentação e discussão dos critérios de avaliação de livros didáticos de 1.ª a 4.ª séries, com a presença de diversos interlocutores. Posteriormente, foram elaborados os critérios para os livros de 5.ª a 8.ª séries, e somente no final de 2003 foram estabelecidos os do Ensino Médio. Para a realização da avaliação, são formadas equipes de especialistas das diversas áreas do conhecimento, de reconhecido saber, muitos atuando também em sala de aula ou estando diretamente ligados à pesquisa e à formação de alunos e professores, dentro de sua área de especialização. Cada equipe possui um coordenador e um assessor, que desenvolvem a análise e a avaliação junto aos especialistas-pareceristas. Ao final da etapa de elaboração e consolidação, os pareceres dos livros são transformados nas resenhas que farão parte do Guia de Livros Didáticos do PNLD – Plano Nacional do Livro Didático. Posteriormente, de posse dessas análises, as escolas escolhem seus livros e os recebem gratuitamente para o ano letivo seguinte.

> 1.ª: A abordagem dos conteúdos contribui para a construção progressiva do método dedutivo e para o desenvolvimento de competências complexas. O aluno é convidado a estabelecer relações, observar padrões e estabelecer conjecturas. O encadeamento entre a observação de regularidades e a formulação de propriedades matemáticas é conduzido de forma adequada. Em muitos pontos, é bem realizada a articulação entre os aspectos indutivo e dedutivo e entre verificação empírica e validação de resultados matemáticos (Guia do PNLD, 2005, p. 37).
>
> 2.ª: A abordagem dos conteúdos contribui para a construção progressiva do conhecimento. No desenvolvimento dos conceitos de geometria, há o cuidado em valorizar diferentes enfoques e em estimular, nas duas primeiras séries, o trabalho experimental. Apenas a partir da 7.ª série é que se procura desenvolver o método dedutivo, com demonstrações dos principais resultados (Guia do PNLD, 2005, p. 192).

De acordo com a primeira análise, a coleção em questão trataria das experimentações, conjecturas e provas nos diversos blocos de conteúdos, enquanto a segunda apontaria para um livro que privilegia mais esses aspectos em relação à Geometria.

A análise dessas duas coleções também evidencia que as demonstrações apresentadas ou sugeridas se aproximam muito da idéia de “demonstração local”, ou seja, não estão alicerçadas em um sistema axiomático no sentido mais estrito do termo.

No que concerne aos livros didáticos para o Ensino Médio,[23] o MEC também elaborou critérios[24] de avaliação e estes não são muito diferentes dos

---

23 Os livros didáticos para o Ensino Médio, em geral, apresentam algumas demonstrações sobre determinados temas como: geometria analítica, trigonometria e logaritmos. No entanto, as provas não aparecem em todas as coleções. Em geral, as proposições são apenas enunciadas, precedendo os exemplos de aplicação, sem qualquer encaminhamento, nem mesmo as verificações empíricas. Cabe ressaltar ainda que há no mercado de livros didáticos três modalidades para o Ensino Médio. A primeira, mais tradicional, é a coleção de três livros, um para cada série; nestes são apresentadas algumas demonstrações. A segunda modalidade é do volume único, cujo mercado está em plena expansão, engloba o conteúdo das três séries, apresentando apenas um resumo da teoria, além de exercícios, e visa, quase sempre, a pura memorização e não traz, evidentemente, demonstrações. A terceira modalidade, cuja venda é feita mais para alunos do Ensino Médio de escolas particulares ou de faculdades, refere-se aos livros por assuntos ou temas; nesses livros são apresentadas demonstrações de diversas fórmulas e são propostas situações mais complexas, além dos exercícios rotineiros em exames vestibulares.

24 O MEC implementou o Programa Nacional do Livro do Ensino Médio – PNLEM em 2003. Os estudantes do Ensino Médio das escolas públicas receberam pela primeira vez, em 2004, livros didáticos de Português e de Matemática distribuídos pelo Ministério da Educação. A distribuição inicial, no 2.º semestre de 2004, foi de 1,3 milhão de livros para os alunos matriculados na 1.ª série do Ensino Médio. Essas publicações trazem os conteúdos das duas disciplinas desde a 1.ª até a 3.ª série. Os critérios do PNLEM são praticamente os mesmos do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), que atende hoje 32 milhões de alunos da rede pública do Ensino Fundamental. Os livros distribuídos aos alunos do Ensino Médio serão utilizados durante três anos.

indicados para o Ensino Fundamental. Relativamente aos que envolvem provas e demonstrações destacam-se:

> O livro didático favorece o desenvolvimento de competências complexas – explorar, estabelecer relações e generalizar, conjecturar, argumentar, provar, tomar decisões e criticar, utilizar a imaginação e a criatividade, expressar e respeitar idéias e procedimentos?.
>
> O livro didático estimula a utilização de vários processos envolvidos no pensamento matemático, tais como: intuição, visualização, indução, dedução e a distinção entre a validação matemática e a validação empírica, entre outros?
>
> O livro didático apresenta situações que envolvem verificação de processos e resultados pelos alunos?” (Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio – PNLEM/2005, p. 85).

Esses critérios evidenciam que as questões referentes às demonstrações são preocupações de educadores e professores de Matemática.

Conforme já apontamos, além dos currículos oficiais e dos livros didáticos, há outros documentos que fornecem à escola algumas sinalizações a respeito do trabalho a ser desenvolvido em Matemática, como os que descrevem as competências e habilidades a serem aferidas pelas macroavaliações: Saresp, Saeb e o Enem.[25]

No entanto, não há sinalizações claras concernentes às demonstrações nos documentos de referência desses sistemas de avaliação e uma explicação possível para esse fato é que as competências dos alunos são aferidas por meio de itens de múltipla escolha.

Quanto a esse aspecto, cabe ressaltar que documentos do Saeb e do Saresp advertem que, apesar de terem como objetivo identificar as habilidades e noções matemáticas desenvolvidas na Educação Básica, eles não podem ser interpretados como um conjunto de indicações que nortearão as estratégias de

---

25 O Saresp (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) e o Saeb (Sistema de Avaliação da Educação Básica – MEC/Inep) foram criados com a intenção de gerar uma cultura de avaliação que agilizasse tomadas de decisão em relação às políticas públicas. Embora esses dois sistemas de avaliação tenham muitos pontos em comum, o Saresp é do tipo censitário, pois abrange todas as escolas da rede estadual de São Paulo, diferentemente do Saeb, que trabalha com amostras de escolas e alunos de todo o Brasil. O Enem (Exame Nacional do Ensino Médio) tem como objetivo avaliar competências dos alunos concluintes do Ensino Médio de todo o Brasil que se inscreveram para fazê-lo. A prova do Enem difere-se radicalmente da do Saeb e do Saresp, pois tem como finalidade avaliar se o aluno mobiliza conhecimentos matemáticos, não explícitos no enunciado, para resolver situações-problema em contextos diversos.

ensino nas escolas. Segundo o Saeb, uma matriz de avaliação, diferentemente do que se espera de um currículo, não traz orientações, não oferece sugestões de como trabalhar, não estabelece e não propõe progressão dos conteúdos. Uma matriz não incorpora habilidades consideradas importantes, seja porque são operacionais, seja porque são atitudes e valores, aspectos difíceis de serem avaliados por meio dos instrumentos de que dispõe o Saeb (Matrizes Curriculares de Referência, 2001).

4.4 Demonstrações nos currículos de formação inicial de professores

Se o trabalho com demonstrações, como vimos no item anterior, é referenciado nas propostas curriculares (e em outros documentos), bem como focalizado em pesquisas da área de Educação Matemática, seria de supor que, durante sua formação inicial (e também ao longo de seu percurso profissional), o professor de Matemática tivesse a oportunidade de discutir, refletir e aprender sobre esse assunto. No entanto, não é tarefa simples descobrir "o que" e "como" os alunos dos cursos de licenciatura em Matemática aprendem sobre isso.

A consulta a currículos prescritos por instituições de ensino superior para as licenciaturas em Matemática[26] oferece poucas indicações a respeito, uma vez que as instituições apresentam a grade curricular e, ao explicitar as ementas de cada disciplina, o fazem de forma bastante sintética.

Em relação às pesquisas sobre formação de professores de Matemática, também não há uma produção a respeito da relevância da demonstração na formação do professor, a não ser a pesquisa de Garnica (1995, 2002), que justifica essa importância por meio de duas leituras distintas: uma de natureza técnica e a outra de natureza crítica.

Assim, as conjecturas passíveis de serem construídas relativamente à presença das demonstrações nos currículos de cursos de licenciatura apóiam-se na própria história da organização desses cursos, que passamos a analisar.

---

26 Essa consulta foi feita por meio da Internet.

4.5 A formação nos cursos de Licenciatura

O primeiro curso de Matemática, ministrado na USP a partir de 1934, incluía disciplinas como Análise Matemática, Geometria Analítica e Projetiva, Cálculo Vetorial, Teoria dos Grupos Contínuos, Teoria dos Números, Cálculo Tensorial, Álgebra e Física, ministradas por professores estrangeiros. Nesses cursos, segundo Silva (1998, p. 147), havia uma preocupação em formar discípulos para as pesquisas em Matemática e não especificamente em formar professores. Certamente, uma abordagem formal dos conteúdos matemáticos era a ênfase desse curso.

Esse modelo de curso de Licenciatura propagou-se para os demais que foram sendo criados no Brasil, em função do caráter de excelência em Matemática que o curso obteve desde sua fundação, especialmente porque os professores contratados eram matemáticos de renome internacional, como Luigi Fantappié e Giacomo Albanese e, posteriormente (1945), André Weil.

Essa origem faz com que os cursos de Matemática, ao longo de algumas décadas, configurem-se mais como voltados à preparação de matemáticos, ou seja, de bacharéis em Matemática, do que para a formação de professores dessa área para o secundário. A análise dos cursos de Matemática das Faculdades de Filosofia, Ciências e Letras dos anos subseqüentes à fundação do curso da USP atesta que poucas modificações haviam ocorrido nas estruturas dos cursos (Curi, 2000).

A principal mudança nas licenciaturas, segundo Candau (1987), ocorreu na Faculdade Nacional de Filosofia: a estrutura previa a existência de um curso de didática com a duração de um ano para quem optasse por ser professor, que se acrescentava aos cursos de bacharelado, com duração de três anos, originando-se aí o futuro modelo de formação de professores – o denominado “3 + 1”.

Em 1946, o número de disciplinas de conteúdos didáticos nas Faculdades de Filosofia foi ampliado, mas facultativas aos alunos, pois estes poderiam optar por duas ou três outras disciplinas das respectivas áreas. Nesse caso, o formando teria o título de bacharel. Esse modelo, adotado também pelas instituições particulares, perdurou por muitos anos.

A respeito dos cursos de bacharelado e licenciatura em Matemática, Lellis (2002) destaca:

> Nas universidades públicas, a partir da década de 1970, o conteúdo matemático dos dois cursos foi se diferenciando gradativamente. É certo que ainda permanecem licenciaturas com todos os rigores dos cursos de matemática pura. [...] No entanto, em vários casos, a licenciatura assumiu o papel de bacharelado atenuado, com menor carga de conteúdo, alterações que, afinal, pouco valem e têm apenas caráter quantitativo, porque se mantém a mesma visão da matemática e de seu ensino que encontramos no bacharelado (p. 24).

Essa reflexão de Lellis é uma manifestação partilhada por muitos educadores matemáticos que defendem uma ampla reformulação das licenciaturas e dos bacharelados em Matemática.

Outro fato que evidencia a necessidade dessa reformulação refere-se ao desempenho dos professores de Matemática em concursos públicos da rede estadual paulista para tornarem-se efetivos, a partir de 1976. Pode-se dizer que esses professores não foram preparados suficientemente pelas universidades para exercerem o cargo, a despeito do modelo de Licenciatura adotado. Essa afirmação pode ser corroborada pelos dados apresentados pelo Departamento de Recursos Humanos (DRHU): em 1992, houve a aprovação de apenas 8,6% dos 94.281 candidatos para Matemática. Em 1993, os resultados foram ainda mais alarmantes: apenas 357 dos 13.171 candidatos foram aprovados – 2,7% do total. Observe-se que nesse ano o número de vagas disponível era de 14.201, portanto maior que o de candidatos.

Atualmente, a formação de docentes para atuação na Educação Básica é realizada por meio do curso de licenciatura, de graduação plena, em universidades e institutos superiores de educação, conforme o disposto no artigo 62 da LDB 9.394/96. O propósito dos cursos de licenciatura em Matemática é formar professores, o que permite concluir que o aluno que freqüenta esse tipo de curso deve aprender Matemática com a finalidade de ensiná-la.

Em termos de sua organização curricular, os cursos de licenciatura estão regulamentados por meio de um conjunto de pareceres e resoluções, aprovados pelo Conselho Pleno do Conselho Nacional de Educação.[27]

A regulamentação dos cursos provocou discussões sobre o desenho curricular para a formação de professores de Matemática, no âmbito das comunidades científica e acadêmica, reinstaurando velhas polêmicas e posições antagônicas:

- a defesa do modelo de licenciatura em Matemática como o conhecido 3+1, inspirada no bacharelado, com forte presença do que se convencionou chamar de “Matemática Pura” e uma posterior complementação com as disciplinas pedagógicas, geralmente ministradas nos centros ou departamentos de Educação; esse modelo teria como origem os primeiros cursos de Matemática das Faculdades de Filosofia;
- a defesa da licenciatura como um curso de formação inicial em Educação Matemática, numa configuração que permita romper com a dicotomia entre conhecimentos pedagógicos e conhecimentos específicos e com identidade apoiada em conhecimento matemático, radicalmente vinculado ao tratamento pedagógico e histórico, o que configura uma “Matemática” distinta daquela meramente formalizada e técnica.

---

27 Resolução CNE/CP 02/97, de 26.06.1997 – Dispõe sobre os programas especiais de formação de docentes para as disciplinas do currículo do Ensino Fundamental, do Ensino Médio e da Educação Profissional em nível Médio.

- Resolução CNE/CP 01/99, de 30.09.1999 – Dispõe sobre os Institutos Superiores de Educação, considerados os artigos 62 e 63 da Lei 9.394/96 e o artigo 9.º, § 2.º, alíneas *c* e *h*, da Lei 4.024/61, com a redação dada pela Lei 9.131/95.
- Decreto 3.276, de 06.12.1999 – Dispõe sobre a formação em nível superior de professores para atuar na Educação Básica, e dá outras providências.
- Decreto 3.554/2000 – Dá nova redação ao § 2.º do artigo 3.º do Decreto 3.276, de 06.12.1999, que dispõe sobre a formação em nível superior de professores para atuar na Educação Básica.
- Parecer CNE/CP009/2001 – Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena.
- Parecer CNE/CP 027/2001 – Dá nova redação ao item 3.6, alínea *c*, do Parecer CNE/CP 9/2001 – Dispõe sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena.
- Parecer CNE/CP 028/2001 – Dá nova redação ao Parecer CNE/CP 21/2001, que estabelece a duração e a carga horária dos cursos de Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena.
- Resolução CNE/CP 1/2002 – Institui Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena.
- Resolução CNE/CP 2/2002 – Institui a duração e a carga horária dos cursos de licenciatura, de graduação plena, de formação de professores da Educação Básica em nível superior.

A Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, procurando colaborar com essas discussões, considera que no processo de discussão de diretrizes para as Licenciaturas em Matemática não se pode subestimar o trabalho teórico e prático dos profissionais que vêm atuando em várias instituições. Essa Sociedade elaborou um documento,[28] denominado Subsídios para a Discussão de Propostas para os Cursos de Licenciatura em Matemática, tomando como princípio que os cursos de licenciatura devem encontrar uma identidade própria, e a constituição dessa identidade requer, inclusive, um repensar sobre a formação dos formadores de professores e um cuidado especial na escolha dos profissionais que atuam nos cursos de licenciatura.

Podemos citar o Instituto de Matemática e Estatística – IME da Universidade São Paulo como exemplo de instituição que nos últimos anos vem desenvolvendo um processo cujo propósito é a busca de uma identidade própria para a licenciatura em Matemática. Segundo o IME, o curso de licenciatura em Matemática tem por finalidade formar um professor de Matemática para a segunda fase do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio, que seja um profissional da área da educação, detentor de algumas características, das quais destacamos:

- Domina conhecimento matemático específico e não trivial, tendo consciência do modo de produção próprio desta ciência – origens, processo de criação, inserção cultural –, tendo também conhecimento das suas aplicações em várias áreas.
- Percebe o quanto o domínio de certos conteúdos, habilidades e competências próprias à matemática importam para o exercício pleno da cidadania.

28 O documento teria como propósito contribuir para as discussões sobre os cursos de licenciatura em Matemática. Destina-se às instituições formadoras, aos grupos de pesquisa interessados na temática e também será enviado ao Conselho Nacional de Educação – CNE e à Secretaria de Ensino Superior do Ministério da Educação – Sesu/MEC, responsáveis pela regulamentação dos cursos. Elaborado a partir de uma série de documentos produzidos pelas Diretorias Regionais e contando com a colaboração de vários pesquisadores, representa um esforço de síntese na busca de contemplar o pensamento e as reivindicações da comunidade brasileira de educadores matemáticos, no que se refere à formação de professores. Segundo a SBEM, a Educação Matemática já tem disponível um repertório de experiências e produções acadêmico-científicas que permite estabelecer a configuração dessa modalidade de formação, o que implicaria a necessidade de serem constituídas diretrizes e instâncias formadoras com as especificidades necessárias. Ao apresentar este documento, a SBEM destaca princípios e expõe propostas suficientemente flexíveis, de modo a se ajustarem a contextos e necessidades regionais particulares.

- É capaz de trabalhar de forma integrada com os professores da sua área e de outras áreas, no sentido de conseguir contribuir efetivamente com a proposta pedagógica da sua Escola e favorecer uma aprendizagem multidisciplinar e significativa para os seus alunos.
- Tem maturidade para utilizar adequadamente ou perceber o significado da precisão dedutiva num processo de demonstração, assim como para empregar procedimentos indutivos ou analógicos na criação de matemática, entendida como uma atividade de resolução de problemas, tanto na sua relação pessoal com a ciência matemática quanto na dinâmica de ensino-aprendizagem.
- Domina a forma lógica característica do pensamento matemático e tem conhecimentos dos pressupostos da Psicologia Cognitiva de modo a compreender as potencialidades de raciocínio em cada faixa etária. Em outras palavras, é capaz de, por um lado, favorecer o desenvolvimento de raciocínio de seus alunos e, por outro lado, não extrapolar as exigências de rigor a ponto de gerar insegurança nos seus alunos em relação à matemática (<http://www.ime.usp.br/~cerri/lic/>).

Também na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP, a Licenciatura em Matemática foi reformulada e a implementação desse novo curso dar-se-á a partir de 2006.

O curso de Licenciatura tem como objetivo central a formação de professores de Matemática para atuar em diferentes níveis de ensino, visando a constituição de competências profissionais referentes ao comprometimento com os valores inspiradores da sociedade democrática, à compreensão do papel social da escola, ao domínio do conhecimento pedagógico, ao conhecimento de processos de investigação que possibilitem o aperfeiçoamento da prática pedagógica, ao gerenciamento do próprio desenvolvimento profissional e relativas ao domínio dos conteúdos a serem socializados, de seus significados em diferentes contextos e de sua articulação interdisciplinar. Em relação à formação específica em matemática, o curso da PUC/SP orienta-se no sentido de que o egresso possa:

- Conceber a Matemática como um corpo de conhecimento rigoroso, formal e dedutivo, mas também como atividade humana.
- Construir modelos matemáticos para representar os problemas e suas soluções.
- Criar e desenvolver tarefas e desafios que estimulem os estudantes a coletar, organizar e analisar informações, resolver problemas e construir argumentações lógicas.

- Estimular a interação entre três componentes básicos da Matemática: o formal, o algorítmico e o intuitivo.
- Estimular seus alunos para o uso, natural e rotineiro, da tecnologia nos processos de ensinar, aprender e fazer Matemática.
- Estimular seus alunos para que busquem alcançar uma ampla e diversificada compreensão do conhecimento matemático e para vincular a Matemática com outras áreas do conhecimento humano.
- Propiciar situações ou estratégias para que seus alunos tenham oportunidade de comunicar idéias matemáticas.
- Relacionar a Matemática com a realidade, a fim de ajudar seus alunos na tarefa de compreender como essa ciência permeia nossa vida e como os seus diferentes ramos estão interconectados.
- Utilizar diferentes representações semióticas para uma mesma noção matemática, usando e transitando por representações simbólicas, gráficas, numéricas, entre outras.
- Construir uma perspectiva histórica e social da Matemática e da Educação Matemática, numa perspectiva problematizadora das idéias matemáticas e educacionais.
- Identificar suas próprias crenças, valores e atitudes visando constituir uma atuação crítica no desempenho profissional.

Ao analisar essa proposta de perfil do egresso, entendemos que o propósito desse curso de licenciatura é desenvolver um raciocínio heurístico competente, em que o aluno possa lançar-se na busca de soluções de um problema, experimentar, fazer relações, conjecturar, argumentar e que o trabalho com as provas deverá ser realizado não numa perspectiva exclusivamente técnica, mas fundamentada pelos princípios da Educação Matemática.

4.6 Conjecturas possíveis sobre o papel da demonstração nos cursos de formação de professores de Matemática

A análise da origem e da trajetória dos cursos de licenciatura em Matemática, no Brasil, permite fazer conjecturas sobre a concepção e a abordagem das demonstrações nesses cursos, ao longo do tempo.

Na sua origem os cursos de licenciatura caracterizavam-se por oferecer uma visão de Matemática como disciplina abstrata e a-histórica, com pouca relação com os entornos socioculturais em que ela é engendrada, praticada e significada. A apresentação da Matemática ao aluno era realizada à maneira de Euclides e, conseqüentemente, tinha como alicerces o rigor e o formalismo. Assim, o aluno seria um agente passivo no processo de aprendizagem, pois este seria acumulativo de apropriação de informações, previamente selecionadas, organizadas e apresentadas pelo professor.

Este modo de ver e conceber o ensino da Matemática poderia ser denominado *formalista*, segundo a classificação proposta por Fiorentini (1995), mencionada anteriormente, uma vez que uma de suas principais características é a apresentação do conhecimento matemático à maneira de Euclides. Esse formalismo poderia ainda ser classificado em dois tipos: clássico ou moderno. Essas duas concepções, segundo Fiorentini, têm em comum uma organização axiomática com o fim de atender quase que exclusivamente os requisitos lógicos da teoria e não levar em conta as necessidades de quem aprende. No entanto, o formalismo moderno também considera as obras de Bourbaki, ou seja, a teoria dos conjuntos e as propriedades estruturais permeariam toda a apresentação da Matemática.

Assim, não é difícil supor qual é o papel da demonstração nesses cursos, que chamaremos “formalistas”. As provas rigorosas seriam um dos vetores mais importantes nessa concepção, pois elas, antecedidas dos axiomas e definições, seriam a essência da própria Matemática. Por conseguinte, os futuros professores deveriam constatar no decorrer de sua formação que as demonstrações são veículos das concepções dominantes na produção científica de Matemática. Lakatos denomina essa forma de apresentar a Matemática de “estilo dedutivista”, pois se inicia

> [...] com uma lista laboriosamente feita de axiomas, lemas e/ou definições. Os axiomas e definições freqüentemente parecem artificiais e mistificadoramente complicados. Nunca se fica sabendo como essas complicações surgiram. A lista de axiomas e definições é seguida de teoremas cuidadosamente redigidos. Estes, por sua vez, estão carregados de pesadas condições; parece impossível que alguém jamais os tivesse suposto. O teorema é seguido da prova (Lakatos, 1978, p. 29).

Embora não tenhamos dados sobre quantas universidades brasileiras oferecem cursos de licenciatura baseados nessa concepção formalista, é possível considerar que essa concepção continue sendo uma “meta” valorizada, embora cada vez mais difícil de atingir pelas condições “de entrada” desses alunos no ensino superior, com pouco domínio dos conteúdos matemáticos tradicionalmente ensinados na Educação Básica. Em função dessa situação as licenciaturas foram abandonando as demonstrações em seus cursos.

Influenciadas por concepções tecnicistas, ao longo das últimas décadas muitas licenciaturas passaram a enfatizar aspectos instrumentais e procedimentais da Matemática (Lellis, 2002), procurando tornar os alunos hábeis no manejo de algoritmos. A estratégia de ensino predominante baseia-se em exemplos de aplicação de um dado conceito, seguidos de uma lista numerosa de exercícios, colocando em jogo apenas um repertório de regras e procedimentos memorizados em detrimento de situações-problema e investigações matemáticas.

Esse modo de ver e conceber o ensino da Matemática poderia ser classificado, segundo Fiorentini (1995), de tecnicista mecanicista. O tecnicismo seria uma corrente educacional que se propõe a otimizar o trabalho pedagógico mediante técnicas específicas de ensino. Segundo Fiorentini, “o tecnicismo mecanicista procura reduzir a Matemática a um conjunto de regras e algoritmos, sem grande preocupação em fundamentá-los ou justificá-los” (p. 17). De acordo com essa perspectiva, o processo de aprendizagem ficaria reduzido apenas ao fazer, pois a ênfase estaria nos procedimentos em detrimento das noções, conceitos e aplicações.

Sob essa perspectiva, também não é difícil concordar com o fato de que as provas e demonstrações teriam um papel bastante relativo no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, pois não haveria espaço para um trabalho que privilegie, por exemplo, o desenvolvimento da predisposição dos alunos para resolver situações-problema, encontrar exemplos e contra-exemplos, formular conjecturas e comprová-las ou da construção de modelos matemáticos para representar os problemas e suas soluções.

Nos últimos anos o modelo de licenciatura que vem sendo discutido pela comunidade de educadores matemáticos procura a superação de alguns problemas já detectados e que poderiam ser decorrentes de uma visão formalista ou tecnicista de ensino, tais como: a concepção de professor como transmissor oral e ordenado dos conteúdos matemáticos veiculados pelos livros-texto e outras fontes de informação; a noção de aprendizagem como um processo que envolve meramente a atenção, a memorização, a fixação de conteúdos e o treino procedimental por meio de exercícios mecânicos e repetitivos; a concepção do aluno como agente passivo e individual no processo de aprendizagem.

Em relação a esse modelo emergente, Pires (2002) considera que o tratamento dos conteúdos matemáticos se constitui em um aspecto importante, mas em uma perspectiva diferente dos modelos “formalista” e tecnicista. Para esta pesquisadora é necessário que o professor em formação seja capaz de explorar situações-problema, procurar regularidades, fazer conjecturas, fazer generalizações, pensar de maneira lógica, comunicar-se matematicamente por meio de diferentes linguagens, conceber que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação, compreender noções de conjectura, teorema, demonstração, examinar conseqüências do uso de diferentes definições, analisar erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas, ter confiança pessoal em desenvolver atividades matemáticas e apreciar a estrutura abstrata que está presente na Matemática e sua função social.

Se por um lado é relativamente simples ressaltar o papel das provas no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática em cursos de formação de professores, segundo a concepção formalista ou a formação tecnicista, por outro, discutir seu significado em uma licenciatura com as características apontadas em Pires (2002) não é, para nós, uma tarefa tão fácil.

Recorremos, assim, a Garnica que considera a importância da prova na formação dos professores, mas gerada por leituras distintas: uma de natureza técnica e outra de natureza crítica. Segundo ele,

> [...] cada uma dessas leituras é plasmada em concepções próprias de setores bastante diferenciados: a leitura técnica funda-se na prática científica da Matemática enquanto a crítica se estabelece como ponto de vista a ser defendido pela Educação Matemática. Cada um desses modos, à luz das concepções que defendem, carrega visões divergentes, quer seja no que se refere aos parâmetros que regem o trabalho com a prova rigorosa – como as noções de verdade, de rigor, do que deve ser tomado como conceito de prova, de como é validada, de como se deve veiculá-la em sala de aula etc. –, quer nas considerações sobre como a formação do professor de Matemática deve ser conduzida" (Garnica, 2002, p.91).

Relativamente a essa questão, o documento citado da SBEM faz as seguintes considerações:

> O aspecto formal, referente a axiomas, definições, teoremas e provas, cerne da Matemática como ciência, são componentes ativos nos processos de raciocínio. Eles têm que ser inventados ou ensinados, organizados, verificados e usados ativamente pelos alunos. No entanto, é preciso levar em conta que o mero conhecimento de axiomas, teoremas, provas e definições, como são expostos formalmente em livros-texto, não contribuem para uma das atividades matemáticas mais freqüentes como a resolução de problemas (SBEM, 2004, p. 16).

Assim, diante do que expusemos até aqui – existência de muitas pesquisas sobre argumentações e provas com alunos da educação básica; recentes currículos prescritos destacando a necessidade de um trabalho articulado entre as verificações empíricas e as demonstrações; livros didáticos propondo caminhos para a construção da inferência matemática –, podemos dizer que parte de uma das questões geradoras deste trabalho **–** "é desejável desenvolver um trabalho com demonstrações em escolas de Educação Básica, tal como se apregoa em alguns dos atuais currículos?" – estaria, em princípio, respondida.

No entanto, o que pronunciam os professores que lecionam Matemática na Educação Básica e pesquisadores, brasileiros, a respeito da possibilidade das demonstrações nesse nível de ensino? O que dizem eles relativamente ao processo de formação de um professor de Matemática para atender essa demanda curricular?

4.7 Algumas revelações do Exame Nacional de Cursos sobre os conhecimentos de egressos de cursos de licenciatura em Matemática sobre demonstrações

Uma simples leitura dos desempenhos dos licenciandos em Matemática no Exame Nacional de Cursos em itens que envolvem demonstrações basta para constatar que, embora ainda predomine a concepção formalista em diversas licenciaturas, os egressos têm grandes dificuldades nesse tema. No primeiro capítulo já comentamos que o rendimento dos alunos em duas demonstrações geralmente indicadas para o Ensino Fundamental não ultrapassou a média de 8,6 numa escala de 0 a 100.

Outro exemplo do baixo rendimento dos futuros professores em demonstrações nesse exame pode ser encontrado em uma questão discursiva em 2002. Essa questão é composta de três subitens, a saber: a) demonstre que a representação decimal de um número racional ou é finita ou é uma dízima periódica; b) descreva um processo que pode ser apresentado a um aluno da 7.ª série, que não seja aplicação imediata de uma fórmula, que permita obter dois inteiros a e b (b ≠ 0), tais que $\frac{a}{b} = 17{,}6424242...$; c) indique uma alternativa ao processo anterior que utilize tópico de programa de Ensino Médio.

Contudo, o enunciado dessa questão envolve uma contextualização e, além disso, explica o significado de número racional, apresentando os cálculos para se obter o quociente (dízima periódica) de dois inteiros dados – provavelmente com a finalidade de sugerir algum caminho para se chegar à solução.

Essa questão valia 20 pontos – 10 para a demonstração e 5 para cada um dos outros subitens, fato esse que revela a importância dada à demonstração nesse exame. A média de todo o Brasil com a *nota corrigida* para uma escala de *0 a 100* foi apenas 6,1 pontos. O desvio-padrão, relativamente pequeno, de 11,9 revela que as notas ficaram razoavelmente concentradas em torno da média. A nota obtida pelos alunos das instituições particulares foi 5,8 (com desvio-padrão de 11,2). Se levarmos em conta que dos 14.947 que fizeram esse exame 7.146

eram de instituições particulares – menor que a metade, portanto –, não é difícil inferir que a média dos alunos das universidades públicas foi apenas um pouco superior a 6,1. Se analisarmos as médias por regiões do Brasil também não há grandes diferenças entre elas: a região Sudeste, por exemplo, obteve 6,3.

As notas muito baixas não foram somente em relação aos itens que se referem às demonstrações, mas, em geral, a toda questão discursiva. Se considerarmos que o item em análise envolve conteúdos do Ensino Fundamental – ainda que o professor não vá necessariamente desenvolver a demonstração solicitada –, a média de 6,1 é muito pequena, convenhamos, numa escala de 0 a 100. Note-se que o padrão de resposta esperado pelo Inep não exigia uma linguagem formal.[29]

Reiteramos que não se pretende aqui enaltecer o Exame Nacional de Cursos como um instrumento eficiente para avaliar as licenciaturas nem suas potencialidades para as tomadas de decisão com referência às mudanças, mas apenas pontuar o desempenho dos alunos em algumas questões que envolviam demonstrações e ressaltar, além disso, que algumas instituições particulares obtiveram bons resultados nesse exame.

Quanto ao ENC, assinalamos ainda que nos debates sobre os resultados dos desempenhos e nas inevitáveis comparações uma discussão sempre esteve presente: os estudantes de diversas instituições particulares não poderiam estar no mesmo pé de igualdade em relação aos de algumas das universidades públicas, pois a diferença que havia entre eles quando ingressaram não poderia ser reduzida totalmente em apenas três ou quatro anos. Na verdade, o que muitos educadores defendiam nesses debates era a necessidade, imprescindível, de o ENC medir o valor que foi agregado no decorrer do curso.

---

29 Segundo o Inep, o padrão de resposta esperado para o item a) era: "dado um número racional a/b, na divisão de a por b podem aparecer os restos, 0, 1, ..., b – 1. Ora, em algum ponto ou aparece o 0 e a divisão termina por aí, gerando uma decimal finita, ou um dos restos se repete, pois só há (b – 1) possibilidades de restos não nulos diferentes. A partir daí, os algarismos do quociente passam a se repetir e o desenvolvimento será uma dízima periódica simples ou composta". O Inep também apresenta uma 2.ª alternativa de solução para esse item.

CAPÍTULO 5

A “PROVA” NO ENSINO FUNDAMENTAL E NO ENSINO MÉDIO – O QUE PENSAM PESQUISADORES E PROFESSORES

As portas são inumeráveis, a saída é uma só, mas as possibilidades de saída são tão numerosas quanto as portas.

(Franz Kafka, *Parábola e fragmentos*)

5.1 Introdução

No capítulo 3 apresentamos a existência de algumas pesquisas de âmbito internacional envolvendo argumentações e provas e, apesar da diversidade de enfoques e de aspectos contraditórios, todas defendem a possibilidade e a necessidade de desenvolver um trabalho sobre esse tema no Ensino Fundamental e Médio. Também não encontramos estudos que claramente explicitassem opiniões contrárias a esse propósito.

Como salientamos no capítulo 4, recentes currículos prescritos para esses níveis de ensino, inclusive em nosso país, destacam a indispensabilidade de um trabalho articulado entre as verificações empíricas e as demonstrações, apesar de não indicarem como esse trabalho poderia ser feito. Ressaltamos também a existência no mercado brasileiro de livros didáticos propondo caminhos para a construção da inferência matemática.

Assim, pode-se dizer que parte das questões geradoras deste trabalho – sobre a necessidade e possibilidade de desenvolver um trabalho com demonstrações nas aulas de Matemática em escolas de Educação Básica – estaria, em princípio, respondida.

Todavia, o que respondem os professores que lecionam Matemática na Educação Básica e pesquisadores, brasileiros, a respeito da possibilidade das demonstrações nesse nível de ensino? O que dizem eles relativamente ao processo de formação de um professor de Matemática para atender a essa demanda curricular?

Sabemos por Garnica (1995) quais são os significados da prova rigorosa atribuídos por pesquisadores que são professores de cursos de licenciatura em Matemática. Entretanto, não sabemos o que pensam os educadores matemáticos brasileiros sobre a inclusão desse tema nas escolas do Ensino Fundamental e Médio. Tampouco o que pensam professores desses níveis de ensino a respeito dessa inclusão. Enfim, nossa preocupação é investigar possibilidades de trabalho com as provas na Educação Básica e as implicações deste nos cursos de formação de professores.

Esses aspectos são suficientes para diferenciar inequivocamente nossa pesquisa da de Garnica, a despeito dos temas que ambas têm em comum: provas e formação de professores.

Para ampliar nossa investigação no sentido de responder à primeira questão “É desejável e possível desenvolver um trabalho com demonstrações nas aulas de Matemática em escolas de Educação Básica? Em caso afirmativo qual deve ser o significado desse trabalho?”, optamos por analisar a opinião de educadores matemáticos brasileiros e de professores da Educação Básica a respeito desse assunto.

Assim, apresentamos inicialmente neste capítulo uma análise dos depoimentos dos nove educadores matemáticos participantes desta pesquisa sobre a necessidade e a possibilidade de desenvolver desde o Ensino Fundamental um trabalho envolvendo provas. Na seqüência, discutiremos os depoimentos dos professores de Matemática da Educação Básica a respeito dessa mesma indagação.

Já foi explicitado que entrevistamos nove pesquisadores e/ou professores de cursos de licenciatura e de programas de pós-graduação e sete professores dos Ensinos Fundamental e Médio, de escolas públicas e/ou particulares. Nossa intenção foi obter a “fala da teoria” e a “fala da prática”, e analisá-las do ponto de vista de resultados de pesquisas já produzidas na área. Todas as entrevistas estão, integralmente, no anexo III.

A partir da transcrição, organizamos e apresentamos os depoimentos por unidades de significado, buscando salientar convergências e divergências e interpretando-as com base em resultados das pesquisas levantadas e sob a luz de nossas vivências. Após essa apresentação, fazemos uma categorização dos dados, com vistas a responder a nossa primeira questão de pesquisa.

Para identificar os depoimentos estabelecemos algumas convenções. Por exemplo, a sigla IA7 refere-se à 7.ª unidade de significado do professor A do grupo I dos pesquisados (o dos educadores matemáticos), e quando for necessária a referência a esse professor sem realçar nenhuma de suas falas ele será identificado por apenas IA. Já a sigla IIA5 significa a 5.ª unidade de significado do professor A do grupo II (o dos professores da Educação Básica).

5.2 Provas nos currículos da Educação Básica: o que dizem os educadores matemáticos entrevistados

A análise dos depoimentos dos nove educadores matemáticos que participaram desta pesquisa indica um absoluto consenso: todos são favoráveis à inclusão das provas nas aulas de Matemática desde o Ensino Fundamental. No entanto, esses pesquisadores, com exceção de apenas um, condicionam essa aprovação a uma compreensão de “prova” não no sentido que, em geral, os matemáticos lhe conferem (capítulo 2), mas com um “significado mais alargado”, mais amplo.

Esta posição dos entrevistados está em consonância com os resultados de pesquisas indicadas no capítulo 3 e de acordo com recentes currículos para a Educação Básica apresentados no capítulo 4.

Algumas falas atestam essa convergência:

> Mas quando a gente alarga o significado da idéia de demonstração aí eu acho que isso é tudo. Antes de chegar na escola você tem que argumentar. E o sentido da demonstração é um sentido mais largo, demonstrar é convencer o outro, é argumentar e convencer (IA2).
> Eu concordo sim com provas, embora dependa do que se entende por demonstração. [...] Não sei se você entende por demonstração apenas prova formal. Mas prova nas escolas, eu acho que você tem que introduzir o mais cedo possível (IB1).
> Com os devidos cuidados que eu já mencionei acho que o processo de argumentação e prova em um sentido amplo pode ser incluído nas escolas (ID13).
> Eu acho que na Educação Básica o papel da demonstração seria o de convencer; a demonstração não deve ser assim algo apoiado em axiomas, numa teoria axiomática (IE1).

O único pesquisador que não se refere explicitamente a um significado mais amplo para a palavra demonstração, mas concorda com sua inclusão na Educação Básica, mediante algumas restrições, afirma:

> Eu acho que é importante a abordagem da prova nesses níveis de ensino. Mas acho importante evitar exageros. Não deve haver os exageros como havia quando eu cursei o ginasial. Os professores vindos da USP saíam embebidos daquela mentalidade e evidentemente cometiam exageros. Assim, dessa forma, claro que eu não recomendaria demonstrações (IC2 e IC3).

Se por um lado houve consenso a respeito da inclusão na Educação Básica de um trabalho envolvendo provas em um sentido mais amplo, por outro não há claramente um acordo sobre até que ponto esse trabalho pode chegar. Ou seja, para três educadores o aluno poderia ficar apenas nas verificações empíricas e nas “mostrações” e, talvez, chegar a algum tipo de formalização no Ensino Médio:

> No contexto que você está examinando isso aí você não está pensando em demonstração no sentido formal, demonstração formal. Certamente, com esse sentido, aí cabe discutir se isso é coisa de criança, se não é coisa de criança, onde começa, onde termina e tudo mais (IA1).

> Aí o melhor que eu vejo nas escolas iniciais, inclusive no fundamental e até médio, é mostrar como as coisas podem ser enganadoras, os contra-exemplos de uma coisa que parece que é, mas não é, eu acho que isso é muito importante e não a prova formal (ID7).
>
> Acho que sim, acho que a demonstração, a prova, deve fazer parte desde, desde o primário, entendeu? Desde o ensino fundamental, mesmo, só que de uma determinada maneira, no ensino fundamental e nas séries iniciais, e ela deve ser alterada, deve ser melhorada, ter mais rigor com o passar do tempo, para chegar no ensino médio e o aluno estar fazendo provas de uma maneira mais rigorosa, não é? (Ii1)
>
> Eu acho que o ato de você pedir para um aluno de escola básica justificar por que ele fez tal ou tal procedimento na resolução de um exercício, quando ele justifica, ele está procurando uma argumentação, essa argumentação poderia evoluir para as demonstrações formais (IG2).

A posição desses educadores não é de simples oposição à formalização, mas de enfatizar a necessidade de existirem mais discussões e estudos para que as provas formais possam ser efetivamente desenvolvidas nesses graus de ensino.

Para um dos educadores, a demonstração seria importante no sentido de proporcionar ao aluno uma visão do caráter dedutivo da Matemática e familiarizá-lo com seu aspecto formal.

> Ele deve tomar contato com a Matemática como uma ciência dedutiva, não importam quais sejam os teoremas que os alunos irão demonstrar. É importante que o aluno tenha contato com o sistema dedutivo, mas sem pretender aquele rigor, demonstrando tudo do começo ao fim, e também evitar de chover no molhado, isto é, demonstrando uma coisa aqui outra ali, mas sim escolher uma parte e desenvolver mais formalmente (IC5).

Um dos pesquisadores (IB) adverte que a implementação das provas na Educação Básica não deveria ser um processo linear no qual se vai simplesmente abandonando as demonstrações empíricas para introduzir, gradativamente, as demonstrações mais formais:

> Eu acho que é um ponto muito importante, eu não quero nem posso tirar a importância dos dados empíricos, mas somente no fim, mais ou menos quando os alunos têm 14 ou 15 anos, é esperado que eles distingam os argumentos baseados na evidência dos argumentos baseados em justificativas matemáticas. Eu acho isso um pouco tarde. Você poderia introduzir, com problemas apropriados, muito mais cedo essa distinção entre argumentos baseados na evidência, que são importantes, e os argumentos que são baseados nas justificativas

> matemáticas, isto é, nas estruturas matemáticas, que também são importantes. A verdade é que você quer que os alunos se engajem nas duas coisas, e não privilegiar apenas uma (IB4 e IB5).

Para esse educador (IB) é possível que alguns imaginem que em dado momento vá ocorrer uma passagem espontânea de argumentos baseados em evidências empíricas para argumentos fundamentados nas estruturas matemáticas. Segundo ele, isso não ocorreria porque as naturezas desses argumentos são muito diferentes e, por esse motivo, não se deveria tentar separar esses tipos de argumentação, embora se possa considerar o trabalho empírico como o ponto de partida.

Esse pesquisador (IB) levantou uma importante questão, discutida no capítulo 3, que diz respeito à passagem dos argumentos empíricos para a prova formal. Para Duval haveria uma ruptura nessa passagem, visto que os alunos ao procurarem justificar suas respostas por meio dos dados empíricos e pelas "mostrações" usariam recursos mais próximos das práticas discursivas espontâneas, regidas mais pelas leis de coerência da língua materna do que pelas leis da lógica formal, que, por sua vez, sustenta a demonstração. Naquele capítulo, também discutimos que mesmo aqueles que discordam de Duval a respeito da ruptura da passagem da argumentação à prova formal consideram que a relação entre argumentação e demonstração, apesar de produtiva e inevitável, é de fato complexa.

É possível que alguns dos educadores tenham em mente os níveis de Van Hiele ao acreditarem que a passagem de argumentos empíricos para argumentos matemáticos não seria um processo tão complicado, desde que haja por parte do professor uma boa organização de situações:

> Eu acho que o professor no processo de ensino de Geometria deveria considerar que é preciso favorecer uma mudança gradual do nível empírico até chegar nas demonstrações mais formais (IE5).
>
> [...] para que os alunos aos poucos possam progredir, passando do nível das experimentações para o nível das provas mais rigorosas é necessário um bom trabalho do professor, ele precisa respeitar o nível dos alunos para que eles possam evoluir (IG3).

A análise dos depoimentos desse grupo de entrevistados mostra a preocupação em dimensionar o trabalho com as provas:

> Nós sabemos que as provas são muito complexas, ninguém vai negar isso, eu acho, apesar de umas serem bem mais fáceis que outras, claro. A noção de começar com alguns dados para chegar a um outro conjunto de fatos e colocar todos os passos entre eles não é uma coisa que as pessoas chegam facilmente. Mas o problema é que ficamos evitando trabalho com provas e em dado momento que teremos que trabalhar com provas em situações bem mais complexas (IB).
>
> Demonstrações esparsas, sem alguma seqüência, também podem não ter significado nenhum, demonstra-se uma coisa aqui, fica-se trabalhando informalmente, depois demonstra outra coisa lá, isto pode não fazer sentido para o aluno. Como encontrar o meio-termo ideal é uma questão difícil. Talvez, pegar certos capítulos, os mais agradáveis, e desenvolver mais formalmente e de maneira consistente e outros já nem tanto. Por exemplo, há partes demonstrativas que são mais fáceis e outras que são menos fáceis e, talvez, se começar com geometria, os primeiros passos, começar mais informalmente, e depois, em alguns capítulos, mais para frente, fazer uma seqüência de demonstrações (IC3 e IC4).
>
> Então é fácil você propor pequenos experimentos, tanto com números como com geometria, de modo que você não precisa enunciar uma verdade; os próprios estudantes podem ir trabalhando, e chegar a enunciar uma proposição ou algo que eles pensem que é verdade, conjecturar, enfim (IF7).

Todavia, segundo a opinião dos entrevistados, a introdução de provas mais formais não é uma tarefa muito fácil:

> Eu estou argumentando para introduzir uma certa formalidade na Matemática, mas sabendo que a formalidade não tem que ser uma formalidade que nós reconhecemos hoje como uma Matemática formal no fim do Ensino Médio. Nós temos que investigar novos contextos para a formalização, que possam ser acessíveis (IB).
>
> Então a pretensão da demonstração formal que é a de fazer tudo independente do contexto pensando só na forma é um exercício, é um tipo de exercício, mas a gente no dia-a-dia, lendo um jornal, lendo uma revista, a gente argumenta e demonstra e tudo, viajando entre contextos, nos contextos. Amarrar qualquer coisa a um determinado contexto é mortal para a prova, você não está provando nada; você está verificando ali, mas referir-se a um contexto, entender a situação em um contexto, demonstrar de um modo tal que seja possível baixar em múltiplos contextos, é isso que a gente busca, não é? (IA18 e IA19).

Para esse pesquisador (IA) a “retirada do contexto” é fundamental para o desenvolvimento da prova formal na sala de aula. Por meio dessa fala é possível conjecturar que deve haver educadores que consideram as mostrações em geometria um trabalho amarrado a um contexto e que, possivelmente, o aluno não generalizaria uma dada proposição para aplicá-la em outros. As verificações empíricas deveriam dar-se necessariamente em outros contextos para posteriormente chegar à demonstração formal.

Um dos educadores (ID) vê a retomada das demonstrações nos currículos com certo ceticismo, pois poderia ser simplesmente uma volta ao passado em lugar de uma proposta inovadora. Esse educador chama atenção para o fato de que alguns historiadores da Educação Matemática consideram que Felix Klein teria introduzido a demonstração formal nas escolas, mas segundo ele, Klein não compartilhava dessa posição: “[...] não, Klein era contra, o professor tem que ser quase como um diplomata, tem que conversar com o aluno, perceber o que eles estão sabendo e não apenas basear-se nas demonstrações”.

O temor desse pesquisador (ID) é que esse destaque dado às demonstrações pelos mais recentes currículos possa ser conseqüência de um movimento de retorno ao formalismo:

> [...] no início do século XX começa a ver essa coisa da Educação Matemática como uma disciplina, onde você leva em consideração os processos mentais, a intuição, a experimentação, etc., e, claro, associa isto à lógica, a formal, à demonstração. Então é um conceito de demonstração ou de prova um pouco mais amplo que simplesmente seguir os passos do formalismo. O modelo que começa a se desenvolver no início do século XX e aí com muitas distorções, distorções no sentido de dizer: bom, de tudo isso o mais importante é a parte formal. Eles estão querendo voltar agora para o formal e com isso a idéia de fazer demonstrações e provas. Eu estou vendo assim (ID4 e ID5).

O educador em questão (ID) talvez considere que as pessoas que elaboram os currículos prescritos estejam ainda de certa forma vinculados ao Movimento da Matemática Moderna, cujo princípio fundamental era aproximar tanto quanto possível a Matemática escolar dos procedimentos da Matemática da academia, conforme discutimos no capítulo 1. Provavelmente o “eles” da citação acima são os elaboradores dos currículos.

Para corroborar essas idéias – a não-adoção do método dedutivo como modelo pedagógico –, esse educador (ID) cita também um artigo de Morris Kline –

Logic versus Pedagogy, publicado em *The American Mathematical Monthly*, no qual o autor discute que o método dedutivo levaria o aluno a acreditar que a Matemática é criada tão-somente por gênios que começam pelos axiomas e raciocinam sobre eles para obter ordenadamente os teoremas. Desse modo, os "alunos podem sentir-se humilhados, porque o professor, ainda que com boas intenções, mostra-se como um gênio em ação" (ID).

Há outra posição consensual entre os educadores matemáticos entrevistados: todos indicaram que para implementar provas nas escolas da Educação Básica, tal como os recentes currículos divulgam, é necessário que os cursos de licenciatura tratem esse tema não apenas sob a perspectiva da formação geral do professor de Matemática, mas também do ponto de vista de um profissional que vai ensinar esse assunto. No capítulo seguinte essa questão será discutida, mas apresentamos uma fala que poderia sintetizar as demais nesse sentido:

> A necessidade intelectual é o ponto de partida para a prova. Mas isso só pode ser trabalhado com criança se você trabalhar isso com os professores. No fundo, acredito que para formar um professor, tudo o que você acha que deve fazer com a criança, você deverá fazer com ele (ID 17).

Pelo menos três dos nove educadores entrevistados desse grupo consideram que as "provas", quando exploradas na Educação Básica, deveriam ser via resolução de problemas, ou seja, o aluno defrontar-se-ia com situações cujos resultados ele teria que convencer, além de si mesmo, seus pares e seu professor.

> E a demonstração tem sempre esse sentido de chegar num acordo (IA2).
>
> As provas, mesmo as formais, devem ser trabalhadas nas escolas do ponto de vista da resolução de problemas. O aluno teria uma tarefa a cumprir e, depois, validar os resultados e convencer seus colegas e você (ID18).
>
> [...] apresentar diversas resoluções para o mesmo problema. A hora em que a pessoa vir que eu resolvi de uma maneira, o outro resolveu de uma maneira, o outro resolveu de outra maneira, eles podem começar a se questionar e aí? Todas as respostas são válidas, todas essas maneiras são válidas, mas como eu sei de uma maneira mais rigorosa? Qual seria assim, entre aspas, a "verdadeira", não é? Daí para a prova é um passo... (IH4).

Assim, a concepção de "prova" desses educadores para a Educação Básica não seria a de uma atividade a ser desenvolvida, logo após a definição de um dado conceito, para demonstrar propriedades antes mesmo de usá-las, mas como meio de fazer matemática e, por isso, seria um trabalho essencial das aulas de Matemática. Segundo um dos entrevistados (ID), esse "fazer matemática" na sala de aula não significa inspirar-se naquela atividade do matemático cujo objetivo é sistematizar e organizar resultados, ou seja, quando ele constrói a forma dedutiva final, mas sim no momento da "descoberta", quando ele usa a imaginação e é criativo, quando faz experimentações, faz conjecturas.

> O aluno tem que viver um processo na escola que é o fazer matemática, não a parte formal, mas a que antecede, na qual ele coloca sua criatividade, sua intuição, faz experimentações, ele procura exemplos e contra-exemplos, tentativa e erro (ID 15).
>
> Levantar conjecturas [...] mesmo que você não chegue a completar a demonstração nas primeiras séries, mas se você chegar a esse ponto, provavelmente o aluno vai querer seguir (ID16).
>
> Eu acho que as crianças têm uma curiosidade natural. Na área de matemática, ela poderá encontrar um campo onde essa curiosidade pode ser muito aumentada e satisfeita. E o processo de prova pode contribuir para isso (IF8).

Provavelmente esses educadores compartilham da posição de Chazan (1993) e Healy e Hoyles (2000) que consideram que os alunos ao se depararem com uma demonstração já construída tornam-se céticos, conforme citamos no capítulo 3. Esses educadores parecem também estar de acordo com Wheeler "a demonstração quando está pronta, acabou-se" (capítulo 2)

Em relação à hipótese de considerar demonstração como conteúdo, nenhum dos pesquisadores entrevistados acha que se deve reservar uma época específica do ano para o trabalho com as demonstrações. Desse modo, esse trabalho não teria como meta o desenvolvimento de estratégias e recursos heurísticos para otimizar a aprendizagem de provas formais, ou seja, não se reservariam períodos específicos do ano letivo para lidar com a prova como objeto em si mesma. Portanto, esse assunto não se constituiria em mais um "conteúdo" a ser desenvolvido isoladamente.

Para os educadores ID, IE, IH e Ii, o trabalho com “provas” nas aulas de Matemática da Educação Básica poderia favorecer também o processo de aquisição/desenvolvimento de habilidades e estratégias cognitivas, estreitamente relacionadas ao significado de conteúdos. As provas, nesse caso, teriam, além da função de convencer, também explicar por que um resultado é verdadeiro.

> Um outro matemático que tinha uma posição que inspirou muito os educadores matemáticos ele trabalhava com crianças. Ele propunha uma questão e trabalhava com o erro da criança, pede para ela argumentar em relação àquele erro porque ela fez isso, porque fez aquilo, vai colocando a pessoa no caminho que é uma forma de fazer também uma demonstração. Não cair nisso, por exemplo, da criança olhar a demonstração ela tenha que entender e repetir aquilo como um papagaio, não, mas ela chegar, ou seja, se conseguirmos fazer que um aluno, num certo momento, chegue a uma coisa onde ele tem dúvida, seja intuição, seja a observação, seja a experimentação dela, não está satisfazendo, não está respondendo, que ela recorra a um pensamento abstrato, eu acho esse momento muito importante. Agora, a minha dúvida é se você vai fazer isso como parte do programa ou se você vai fazer isso como uma maneira de convencer o aluno ou para explicar (ID12 e ID14).
>
> Nessa fase inicial como, para mim, a demonstração é convencimento e o convencimento vem da palavra, vem da persuasão nesse sentido de convencer o outro. A demonstração também pode ajudar o aluno a compreender o assunto (IE 6).
>
> Não é começar pelo rigor, não; eu acho é mais pela postura de inquirir, de querer investigar, de ter dúvidas sobre aqueles resultados. A prova precisa convencer o aluno e também clarear algo que ele não tenha compreendido (IH4).

Esses pesquisadores consideram que a função da prova não é apenas verificar a validade de uma proposição para o aluno, mas também explicar aspectos dos conceitos estudados. Eles parecem estar de acordo com Hanna (1995), para quem, conforme discutimos no capítulo 3, uma boa prova na escola não é apenas a que valida, mas também a que explica.

As muitas convergências encontradas nos depoimentos dos nove educadores matemáticos participantes desta pesquisa sobre a prescrição de “provas” pelos recentes currículos para a Escola Básica permitem-nos inferir que essa inclusão é realmente importante, a despeito das divergências, poucas, como o perigo de retorno a um formalismo inadequado pela concepção de prova que se possa ter, o abandono de um trabalho com contextos etc. As concepções desses educadores a respeito desse tema não são muito diferentes entre si – talvez nem pudessem –, pois estão fundamentalmente radicadas no campo da Educação Matemática – EM – e não no da Matemática, como área do conhecimento.

Assim, para a Educação Matemática haveria nuances no modo de ver a prova, visto que se pressupõe a construção de caminhos para sua aprendizagem, provavelmente incluindo um trabalho, não linear, com “provas não-formais” e “provas semiformais”. Estas expressões – longe de querermos introduzir novos termos e sugerir estágios de aprendizagem – têm apenas o sentido de marcar a necessidade de um trabalho anterior para se chegar às provas formais e diferenciar as formas de tratamento do objeto matemático sob a perspectiva de sua produção científica.

Convém ainda ressaltar que alguns desses educadores indicaram possíveis objetivos da prova nos currículos da escola básica: desenvolver o pensamento hipotético-dedutivo, perceber a especificidade da prova em Matemática em relação às provas das ciências da natureza; aprimorar a competência de investigar, encontrar exemplos e contra-exemplos, valorizar o uso de estratégias de verificação e controle de resultados e, sobretudo, formular conjecturas e comprová-las. Para tanto, o professor deveria desenvolver situações que favorecessem o aluno a perceber a prova como essencial para constatar se uma expressão é verdadeira; justificar a razão pela qual uma expressão é verdadeira; comunicar um conhecimento matemático; além de conhecer uma característica fundamental da Matemática, a de um sistema com axiomas, definições e teoremas.

Algumas dessas considerações são reiteradas, às vezes com menor ênfase, pelos professores da Educação Básica que participaram desta pesquisa, mesmo que estas sejam, algumas vezes, advindas unicamente de sua prática docente, talvez por não terem, ainda, problematizado suficientemente as demonstrações nos currículos. Analisar convicções desses docentes é o propósito do item a seguir.

5.3 Provas nos currículos da Educação Básica: o que dizem os professores entrevistados

As leituras dos depoimentos dos sete professores sobre as indicações de inclusão das provas nas aulas de Matemática, desde as séries finais do Ensino Fundamental, permitiram-nos identificar não apenas convergências e divergências desses entrevistados sobre as potencialidades desse tema no currículo, mas também quanto aos significados de prova adotados por esses docentes. Assim, essas duas categorias de análise – possibilidades e significados das demonstrações nos currículos da Educação Básica – nos favoreceram na interpretação das concepções desses professores sobre a natureza e o papel da prova na Matemática escolar.

Com referência às potencialidades desse tema nos currículos da Educação Básica, queremos assinalar uma posição praticamente consensual: a crença de que as demonstrações mais formais se constituem em um trabalho pedagógico bastante limitado pela forte convicção de que “prova não é para todos”. Para justificar essa posição, os entrevistados descrevem suas experiências com atividades envolvendo argumentações e provas em suas aulas e o respectivo desempenho dos alunos. Utilizam, também, outros argumentos citando as dificuldades, consideradas por eles inerentes a esse assunto, tanto do ponto de vista da aprendizagem como também do ensino. Outros falam da não-aceitação desse trabalho pelos alunos e o questionamento que dele fazem. As falas seguintes podem validar esses aspectos:

> Agora, se você visualiza e demonstra, eu acho que é válido. Agora, como trabalhar isto? Como trabalhar? Você vai demonstrar para o seu aluno? Ele vai ser um expectador assistindo você demonstrar? A proposta é que tem que ter cuidado, porque senão, também, fica mais um joguete de cartola, que aí perde o sentido. Fica mais uma coisa para o aluno decorar. Pior: nem todos entendem (IIB4 e IIB5).
>
> Gostaria de falar que eu não trabalho muito com as demonstrações. Somente algumas e em algumas séries. É muito difícil para a maioria dos alunos. Só alguns acompanham ou entendem um pouquinho. Eles reclamam muito. Mas mesmo assim faço questão que eles vejam pelo menos um pouco as demonstrações. Eles precisam ter pelo menos algum contato com o sistema dedutivo (IID1 E IID2).

> Hoje, nós não temos mais alunos no Ensino Fundamental, no Médio ou na Graduação que aceitam um processo de demonstração, passivamente, sem questionar “pra quê?”, “por quê?”, “onde vamos usar isso?”, “precisa ser dessa forma?”, “não há um jeito mais fácil?” (IIC8).
>
> Alguns dos meus alunos chegam a questionar, perguntando: “professora para que provar uma coisa que todo mundo sabe que é verdadeiro?”. Eles acham inútil provar o teorema de Pitágoras, e que a soma dos ângulos internos dá 180º. Até os bons alunos vêem apenas como curiosidade essas demonstrações. Acho que a falha é também minha: não consegui convencê-los sobre a importância das demonstrações (IIG8).
>
> Na verdade, eu não sei muito bem como fazer esse trabalho com as demonstrações. Pois apenas apresento as demonstrações. Sei que não posso exagerar no rigor da linguagem, mas a demonstração que faço é uma demonstração e não verificação. Lógico que eu justifico porque é importante a demonstração na Matemática. [...] Mas tenho a sensação de tempo perdido, muito poucos se interessam. Meus alunos do 3.º ano alegam que não cai no vestibular. São poucos os que entendem de fato (IID7).

Talvez essas dificuldades no processo de ensino e de aprendizagem das provas possam, em parte, explicar a razão pela qual esses professores não consideram que a prova formal deva possuir um papel muito significativo no currículo. Todos esses professores parecem ter dúvidas a esse respeito e a exposição a seguir pode sintetizar essa posição:

> Concordo que podemos e até devemos, em alguns momentos, trabalhar com as provas e as argumentações nas nossas aulas, pois isso é parte da Matemática. É importante. Mas considerar o trabalho com demonstrações formais, mesmo de maneira não muito rigorosa, como necessário e fundamental para todos os alunos e classes do Ensino Médio, tenho cá minhas dúvidas. Nem todo mundo entende. As experimentações, as verificações e os problemas é que são imprescindíveis nas aulas de matemática (IIA 7).

A fala do professor (IIA) indica sua posição em relação à prova na sala de aula: ela deve ter um sentido mais amplo.

Pelo menos três professores têm dúvidas em relação a esse trabalho também em função do como ensinar e avaliar:

> Quando ensino um tópico da Matemática eu sei avaliar os alunos e, claro, o meu trabalho. Mas como avaliar esse trabalho com as demonstrações? O que devo esperar dos meus alunos? Que reproduzam apenas o que foi feito em classe? Não sei a melhor forma de ensinar demonstrações! Nem sei se demonstração se ensina ou se

> no fundo apenas apresentamos e explicamos o que foi feito. Não foi assim na nossa formação? IIF7).
>
> Pedir para que meus alunos construam sozinhos uma prova talvez seja esperar muito. Talvez eles possam analisar provas já feitas ou completar outras. Será que é esta a minha tarefa em relação ao ensino das demonstrações? (IIG).
>
> Não cobro nenhuma demonstração de fórmula na provas. Pois seria apenas a memorização (IIE7).

Por meio dessas falas é possível inferir que esses professores percebem o trabalho com provas, mesmo as informais, muito mais como um “novo” tópico a ser incluído no programa do que uma ferramenta para estudar Matemática. Ou seja, esses docentes parecem ver as provas como um fim em si mesmas e não como um importante recurso para fazer matemática na sala de aula.

Esses docentes, para justificar suas posições, descrevem atividades desenvolvidas em suas aulas e mostram que as concepções desse trabalho abarcam diferentes níveis de formalidade: provas formais, provas com algum grau de formalidade e provas totalmente informais.

Estas últimas seriam aquelas baseadas em evidências puramente empíricas, ou seja, aquelas em que os alunos procuram exemplos e fazem medições para validar um resultado. Consideram essa etapa totalmente necessária, embora julguem que esse tipo de “prova” poderá levar o aluno a desenvolver uma idéia errônea sobre o que seja provar em Matemática. As declarações a seguir exemplificam a necessidade desses professores em considerar diferentes níveis de formalidade:

> As demonstrações de um mesmo conteúdo podem ter várias abordagens, dependendo do nível de abstração do aluno. Não teria, por exemplo, significado para um aluno do curso fundamental uma demonstração essencialmente algébrica, sobre área. Contudo, se esse aluno tivesse uma demonstração em nível concreto (com colagens, ele medindo figuras etc.), conseguiria entender melhor o que é superfície (IIG2 e IIG3).
>
> Se um aluno do curso fundamental incorporasse esse conhecimento mais prático, se houvesse mais verificações no ensino fundamental, no curso médio poderia haver uma demonstração algébrica mais formal que provavelmente ele conseguiria entender (IIG4).
>
> Eu trabalho com meus alunos algumas demonstrações principalmente da trigonometria e geometria analítica. Mas geralmente não faço demonstrações muito formais. A demonstração mais formal só vem

> depois dos alunos terem compreendido o significado do enunciado, terem procurado exemplos e contra-exemplos (IIF4).
>
> Esse trabalho deveria ser feito sem aquela formalização rigorosa, mas já induzindo a um raciocínio, com coisas muito simples, mas já iniciando o aluno em pequenas formalizações: pequenas formalizações mesmo, assim, pra ele ter uma noção de lógica, não é? (IIE5).
>
> Agora tem uma coisa que eu não abro mão: é pedir aos meus alunos justificarem as resoluções dos problemas, que indiquem as propriedades que usaram nos exercícios etc. Dada uma propriedade, um teorema eles devem exemplificar. Devem procurar exceções. Enfim, devem provar, ou seria comprovar os resultados? Não tem importância que não sejam rigorosos ou formais. É uma questão de atitude, entende? (IID11).
>
> Trabalhar com hipótese, tese, onde eu quero chegar... este tipo de rigor, eu nunca fiz (IIB 10).

Desenvolver um trabalho incluindo provas com um certo grau de formalidade, logo após as "provas informais", parece seduzir alguns de nossos entrevistados, pois, para eles, talvez esse seja um caminho razoavelmente suave para se chegar às "provas formais".

> Quando ensino o teorema de Pitágoras, faço algumas verificações com régua e transferidor, com quebra cabeças, utilizando quadrados. Somente depois de o aluno ter usado o teorema de Pitágoras em alguns problemas, de ter feito algumas verificações, é que vou apresentar pra eles uma demonstração mais algébrica, um pouco mais formal, aquela dos chineses. Só depois é que faço o formal, utilizando semelhanças de triângulos. Acho que você não pode nunca começar com o formal. Tem que fazer um trabalho gradativo. Se você não chegar a um certo rigor, acho que não tem muita importância. Se você chegar ao formal, está ótimo, mas não é necessário. O importante é o aluno saber que existe uma prova rigorosa e formal para aquele teorema (IID12).

A fala desse professor (IID) parece estar de acordo com Hanna (1990) e Balacheff (1988), discutido no capítulo 3, pois para esses pesquisadores a prova rigorosa pode não ser uma meta de todos os currículos; chegam inclusive a defender uma prova ingênua – que seria uma argumentação aceitável, que poderia atingir diversos níveis de rigor.

Vimos que nossos entrevistados mostraram-se céticos quanto à possibilidade de considerar as provas no sentido restrito um meio potencialmente rico para ensinar e aprender Matemática. Alguns julgam as demonstrações formais mais como conteúdo do que um recurso – "é difícil ensinar provas e é ainda mais difícil aprender" (IID). No entanto, esse ceticismo diminui quando os professores abandonam a idéia de “chegar à prova formal” e tomam em conta os possíveis graus de formalidade que podem desenvolver – ou desenvolvem – em sala, quando consideram sua prática docente.

> É que a demonstração não é ensinada nas escolas, os nossos cursos, também por causa da dificuldade de nossos alunos. Quando a gente, no começo do ano, senta para elaborar o nosso planejamento, ali sempre está incluído um trabalho com a parte de desenvolvimento do raciocínio dedutivo da criança, e aí a gente está se referindo ao desenvolvimento da capacidade da criança buscar, chegar a conclusões, com base em fatos que ela já conhece, ainda que esse trabalho leve a criança a expressar suas idéias de uma forma... Usando só a sua linguagem natural do dia-a-dia, ainda que seja isso, nosso trabalho pode começar desde a 5.ª série, levando a criança a usar os fatos que ela já conhece, mesmo coisas simples e argumentar, com base naqueles fatos, e defender suas idéias, para chegar a alguma conclusão. Esse trabalho é possível e por isso está incluído sempre no nosso planejamento. Quando a criança percebe que ela precisa usar alguns argumentos pra defender a sua opinião e o seu ponto de vista, e para convencer o seu igual, daquilo que ela está pensando, ela percebe que aquilo lá ela pode usar na sua vida fora da escola, e ela percebe que aquilo não é só matemática, é uma prática social, na verdade, é uma negociação que ela faz fora da escola [...] quando ela percebe isso eu acho que ela está conseguindo aprender a parte mais importante da demonstração mesmo (IIC1 e IIC2).

Esse aspecto do trabalho com provas com alunos do Ensino Fundamental foi levantado por Balacheff (1991) em seu artigo Benefícios e limites de interação social, em que se deve empreender um esforço para compreender as razões do aluno quando este faz uma justificativa para um determinado resultado.

Esse caminho – provas informais → provas semiformais → provas formais – foi proposto por seis professores do grupo II (IIA, IIB, IIC, IID, IIF, IIG, não exatamente com essas expressões). Parece contraditório, pois, por meio da análise dos seus depoimentos, pode-se inferir que eles não defendem a inclusão das provas formais nos currículos da Educação Básica.

As restrições às provas praticamente deixam de existir quando os entrevistados relativizam a questão do formalismo e se mostram, assim, favoráveis à inclusão das demonstrações nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, tal como alguns dos recentes currículos divulgam. Relativamente a essas recomendações, um dos entrevistados explicitou, claramente, que havia um certo antagonismo entre elas: as inovações curriculares – contextualização, história da Matemática, jogos, novas tecnologias etc. – contrapor-se-iam às indicações das demonstrações – “corremos o risco de um retorno ao passado” (IIF). Já vimos no item anterior que um dos pesquisadores em Educação Matemática (ID) também se manifestou nesse sentido. Certamente, a preocupação desses professores seria considerar como premissa a centralidade da prova formal nos currículos da Educação Básica.

A análise das entrevistas permite inferir que esses docentes em alguns momentos desenvolvem um trabalho com as provas não como um meio de apresentação do conteúdo, mas com um enfoque heurístico, pois a “demonstração” deveria ter um papel de argumentação convincente, ou seja, como meio de comunicação com os alunos. Uma boa prova para o aluno deveria também explicar, clarear o teorema estudado, mostrar por que ele é verdadeiro, além, claro, de validar (Hanna, 1990).

Todavia, não percebemos evidências de que algum entrevistado do grupo II considere esse aspecto apresentado por Hanna. Seus depoimentos geralmente são no sentido de que as provas servem para validar, mas raramente para explicar. É possível encontrar exceções apenas quando estes justificam as atividades propostas para “mostrar” o teorema de Pitágoras (três depoimentos). A ênfase a esse teorema não decorreria apenas pela sua importância, mas também pelo poder explicativo de algumas das provas desse teorema, sobretudo as demonstrações ditas informais.

Esses três professores consideram, por exemplo, produtivo o seguinte trabalho: a proposição ao aluno de um quebra-cabeça constituído por peças planas que devem compor, por justaposição, de duas maneiras diferentes, um modelo material de um quadrado. Utilizando o princípio aditivo relativo ao conceito de área de figuras planas, “demonstrar-se-ia o teorema de Pitágoras”. Após essa “prova informal”, uma justificativa mais formal seria realizada, baseando-se na congruência de figuras planas e no princípio da aditividade das áreas; posteriormente, demonstrar-se-ia formalmente esse teorema quando os alunos tivessem se apropriado do conceito de semelhança de triângulos e estabelecido as relações métricas dos triângulos retângulos. Neste caso, essa seqüência de provas não teria apenas o poder de convencer, mas também o de explicar.

5.4 Uma síntese das respostas dos dois grupos

Como mencionamos anteriormente, há concordância total a respeito da necessidade e da importância da prova nas aulas de Matemática em escolas de Educação Básica. Os principais argumentos apresentados podem ser agrupados em três categorias:

(i) A "prova" como uma importante ferramenta de desenvolvimento do raciocínio (lógico-matemático/dedutivo) do aluno.

(ii) A "prova", num sentido mais ligado à "mostração", como uma estratégia didática para a compreensão de teoremas, regras, propriedades e que deve ser explorada pelo professor, assim a prova teria um sentido mais amplo e não incluiria necessariamente o status de rigorosa.

(iii) A prova como um elemento da cultura matemática e que permite ao aluno aproximar-se da construção histórica e epistemológica dessa cultura.

Contudo, convém destacar que, embora professores e pesquisadores coloquem ênfase em uma ou duas delas, não se pode afirmar que descartem as demais.

Analisando essas três categorias, identificamos que as argumentações apresentadas centram-se ora no aluno (ponto de vista da aprendizagem), ora no professor (ponto de vista do ensino), ora no saber matemático. Isso nos remete a confrontá-las com visões epistemológicas da área de matemática e modelos docentes a elas associados.

Gascón (1998) considera que numa perspectiva tradicional do ensino de Matemática, a visão epistemológica dessa área de conhecimento era a de que todo conhecimento pode ser deduzido de um conjunto finito de proposições verdadeiras (axiomas) que constam de termos conhecidos (termos primitivos).

Regras lógicas de dedução permitem chegar dos axiomas aos teoremas. A esse modelo pode ser associada uma visão epistemológica da didática da matemática, identificada com ensino e aprendizagem de teorias e de resultados aos quais os alunos têm acesso por meio da explicação do docente, ignorando a gênesis e o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos. Não nos parece que as opiniões dos pesquisadores e professores entrevistados enquadrem-se nessa perspectiva descrita por Gascón.

Esse mesmo autor indica que em oposição à perspectiva tradicional está a visão epistemológica, segundo a qual o que justifica uma teoria matemática não é a verdade dos axiomas, senão que esta teoria permite deduzir alguns resultados. É assim que uma teoria resulta bem elaborada sem deixar de ser conjectural: nela os enunciados básicos verdadeiros são explicados pelo resto do sistema em um todo coerente sem contradição. Coloca-se ênfase no processo de descoberta, permite-se falar de conjecturas, provas e refutações da teoria matemática informal (antes de ser formalizada), conforme Lakatos (1976, 1981).

Para Gascón, coerente com esse modelo há uma visão epistemológica da didática da Matemática em que se considera a atividade matemática como exploratória. Baseia-se num modelo docente que pode ser identificado como modernista, que propõe explorar problemas não triviais, ou seja, aqueles que não se tem demasiado conhecimento de sua resposta. Implica o uso de técnicas, a aplicação de resultados conhecidos, a busca de problemas análogos, a formulação de conjecturas, de contra-exemplos. Baseia-se numa interpretação pouco profunda da psicologia genética, impregnando as práticas da aula de certo ativismo. A nosso ver, essa visão e esse modelo docente de certo modo estão presentes em depoimentos que a eles fazem referência.

> E aí eu dou um exercício pra eles que consiste no seguinte: sabe aquele jato de água do bebedouro, que é uma parábola? Então eu dou uma folha de transparência quadriculada eles montam os pontinhos, voltam pro laboratório, marcam os pontinhos nos gráficos e deduzem a fórmula da equação do jato de água do bebedouro. [...] Então eu trabalho com eles umas três ou quatro aulas assim. Aí o professor, isso no primeiro ano colegial, começa a estudar com eles o que é a parábola na teoria, mas eles já passaram por uma série de atividades. Depois, [...] no Cabri a gente constrói todas as propriedades da parábola, quer dizer, eles vão ter um retorno, novamente, quando já tiveram uma vivência, já viram, depois a demonstração com a teoria, quer dizer, eu

> acho que esse caminho torna mais aceitável pra eles, justifica pra eles o que é a importância da demonstração (IIA).
>
> Você quer apresentar, por exemplo, o conceito de translação para o aluno, mas isto ele pode manipular o Cabri, abrindo a janela de translação ele mesmo manipular isso, a partir do que é dado e do que é apresentado na tela ele mesmo vai procurar características, e finalmente entra o conceito de translação e depois as demonstrações. Ou seja, ele manipulou o objeto, tem o domínio dessa manipulação, tenta descrever características, usando medidas, usando uma série de [...] ele chega, ele está apto a ter o conceito, o aspecto objeto do conceito, e depois disso é que seria o momento propício para fazer uma justificativa mais teórica, uma dedução, fazer demonstrações. Mas sem essa etapa inicial a dedução também cai por água abaixo, ele não manipulou, não sentiu, não explorou aquela situação, não consegue (IE).

Gascón também faz referência a uma perspectiva mais recente no cenário da educação, identificada como construtivista, em que a visão epistemológica da matemática baseia-se na idéia de desenvolvimento psicogenético com ancoragem na abstração reflexiva (conceitualização das entidades matemáticas que se constroem de forma progressiva) e na generalização completiva (quando uma estrutura se vê enriquecida por novos componentes ou sistemas que se agregam sem modificar os precedentes, mas enriquecendo a estrutura como um todo organizado).

Os objetos matemáticos são extraídos das ações do sujeito que aparecem coordenadas e que se desenvolvem seguindo um processo de crescimento baseado no intra-objetal (estudo dos objetos), no interobjetal (estudo de relações e transformações dos objetos) e transobjetal (indagação das estruturas construídas), segundo Piaget e Garcia (1982). A esse modelo pode ser associada uma visão epistemológica da didática da Matemática, qual seja a dos modelos docentes construtivistas, sejam os de raiz psicológica (que não fazem alusão explícita aos conteúdos matemáticos), sejam os de raiz matemática ou modelizacionistas. Propõem a incorporação progressiva do aluno na resolução de uma situação problemática eleita em função do conhecimento que se quer que ele construa e que deve permitir-lhe discernir se a solução por ele desenhada é correta ou não. Quando a situação-problema aparece contextualizada, pode recorrer ao uso de referentes pertencentes a um sistema matemático ou extramatemático chamado modelo, que os modelizacionistas utilizam para chegar à resposta da situação proposta ou ao objeto matemático que se quer que o aluno aprenda. Essas concepções foram menos freqüentes nos depoimentos, embora haja depoimentos que de alguma maneira corroboram...

> Então você começa ver a idéia de uma prova que é uma prova que acaba vestindo as coisas que a intuição, que a experimentação etc. Esse é o modelo que começa a se desenvolver no início do século XX e aí começa a ver essa coisa da Educação Matemática como uma disciplina, onde você leva em consideração os processos mentais, a intuição, a experimentação, etc. e, claro, associa isto à lógica, a formal, à demonstração. Então é um conceito de demonstração ou de prova um pouco mais amplo que simplesmente seguir os passos do formalismo [...] Os atuais currículos estão voltando à idéia da Educação Matemática do início do século eles estão dizendo fazer coisas concretas, materiais concretos... Aí a Psicologia deve ter um papel de destaque na Educação Matemática (ID).

Concordando com a importância da prova, os pesquisadores e professores apresentaram algumas perspectivas diferentes relativamente ao trabalho com a prova em sala de aula, que podem ser agrupadas da seguinte forma:

(i) a prova formal como um conteúdo matemático;

(ii) a prova como um raciocínio dedutivo;

(iii) a prova como um eixo transversal no currículo de matemática;

(iv) a prova formal apenas para alguns;

(v) a prova como algo difícil de ensinar.

Em relação ao primeiro item, a partir de depoimentos como o do pesquisador IC, entendemos que há uma defesa no sentido de que deveria ser reservado um espaço próprio para o trabalho com a prova, com o objetivo, inclusive de explicitar o significado de alguns termos a ela relacionados (axiomas, postulados, teoremas, tese, hipótese) e processos, como a demonstração direta, por redução ao absurdo, por recorrência ou indução completa. Isso poderia ser feito, exemplificativamente com um assunto do currículo, para que os alunos pudessem ter uma visão de como funciona a atividade do matemático, ao formalizar um resultado ao final de um processo de construção, dando a impressão de um processo construído linearmente, de modo puramente dedutivo. Isso, em certa medida, pode justificar uma concepção à qual fazemos referência no segundo item, qual seja a de que a prova mobiliza raciocínios de natureza dedutiva.

Tal concepção pode levar à não-compreensão de procedimentos pragmáticos como os caracterizados por Balacheff (1987), ao referir-se a empirismo ingênuo, experiência crucial e exemplo genérico, que analisamos no capítulo 3.

Todos os entrevistados consideram que as provas deveriam ser incluídas nos currículos escolares por desenvolverem o raciocínio dedutivo. No entanto, nem todos a percebem como fundamental – talvez nem importante – para desenvolver o raciocínio lógico.

Todavia, verificamos que são mais freqüentes as referências à prova como um eixo transversal no currículo de Matemática, no sentido de caracterizar a atividade matemática como um processo de busca, de questionamento, de conjecturas, de refutação, de aplicação e de comunicação e nesse sentido as provas deveriam ser desenvolvidas não como um conteúdo isolado, mas numa perspectiva que aproxime o aluno do fazer matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, sujeita a avanços e retrocessos. Essas concepções, tão presentes nos depoimentos de todos os educadores, também são adotadas por três dos participantes do grupo II.

No grupo dos professores mostraram-se evidentes: um questionamento quanto à possibilidade de "ensinar o outro a provar" e uma convicção instalada de que a prova formal não é acessível a todos os alunos. Resultados similares foram obtidos por Knuth (2002) sobre concepções de professores a respeito da prova, ou seja, os professores não concordam com a proposta de trabalhar a prova formal para todos os alunos, porque eles acreditam que elas sejam apropriadas apenas para uma minoria dos estudantes.

Também os professores que entrevistamos têm opiniões semelhantes aos entrevistados por Knuth, na medida em que percebem a prova mais como um tópico de estudo isolado do que um meio de estudar Matemática e de se comunicar por meio dela. Ou seja, o trabalho com as provas não seria um meio potencialmente rico para se fazer matemática nas salas de aula da Educação Básica.

CAPÍTULO 6

PROVAS FORMAIS E PROVAS INFORMAIS: UMA PERMANENTE TENSÃO

Dizem ser mecânico aquele conhecimento que sai da Experiência, e científico o que nasce e acaba na Razão, e semi-mecânico o que nasce na Ciência e acaba nas operações manuais. Mas a mim me parece que são vãs e cheias de erro aquelas ciências que não nascem na Experiência, isto é, tais que sua origem, meio ou fim não passa por nenhum dos cinco sentidos. E se nós duvidamos da certeza de cada coisa que passa pelos sentidos, quão mormente devemos duvidar daquelas coisas que são rebeldes aos sentidos, como a essência de Deus e da alma e semelhante, acerca das quais sempre se disputa e contende.

Leonardo da Vinci

6.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos os resultados de uma atividade proposta especialmente para os professores da Educação Básica, participantes desta pesquisa, no sentido de que analisassem demonstrações de Números e de Geometria, elaboradas por alunos da 8.ª série do Ensino Fundamental. Essa análise deveria envolver comentários específicos para cada uma das provas e a atribuição de uma nota (Anexo II).

Nosso propósito foi comparar os discursos desses professores a respeito da inclusão das provas nos currículos com os argumentos utilizados para justificar suas notas em relação às produções dos alunos. Pretendíamos diagnosticar o grau de concordância do docente entrevistado a respeito de cada uma das provas apresentadas e examinar suas possíveis interferências, caso fosse professor da turma e buscar elementos para responder à questão: como professores da Educação Básica interpretam produções de “prova” de alunos do ensino fundamental e as avaliam?

Tomamos por base os trabalhos de Healy e Hoyles (1998) e Dreyfus (2000) que tratam respectivamente das concepções de alunos e de professores sobre as provas em Matemática. Também utilizamos como referência o trabalho de Balacheff (1987) que analisa os diferentes tipos de “prova” elaborados pelos alunos.

Em nosso trabalho, os sete professores da Educação Básica, além de analisarem “demonstrações” referentes a duas proposições – Geometria e Números – elaboradas por alunos de 8.ª série, indicaram as ações que desencadeariam caso fossem professores da turma. Tais provas são as mesmas utilizadas nos trabalhos de Healy e Hoyles e Dreyfus. Convém ressaltar que esses pesquisadores levaram em conta produções de alunos ao organizarem seus estudos.

As questões das entrevistas estão no anexo II, assim como as provas, identificadas pelos nomes dos alunos, apresentadas aos professores.

Para a análise dos dados obtidos, além dos resultados das pesquisas supracitadas, consideramos também os estudos sobre prova rigorosa e formação de professores de Garnica (1995 e 2002).

Convém salientar que utilizamos neste capítulo a palavra *prova* em seu sentido mais amplo, ou seja, com o mesmo significado que os educadores matemáticos desta pesquisa deram a esse vocábulo quando discutiram um trabalho com demonstrações na Educação Básica. Quando nos referirmos à prova no sentido mais estrito do termo, utilizaremos prova rigorosa ou demonstração.

6.2 As opiniões dos professores

Para analisar as argumentações dos sete professores da Educação Básica concernentes às provas elaboradas por alunos, seis referentes a uma proposição geométrica e nove relativas a uma proposição sobre números, reputamos apropriado destacar, inicialmente, as notas atribuídas a cada uma dessas produções. Para tanto, apresentamos quadros com essas avaliações, pois por meio deles é possível comparar as notas de cada docente e identificar convergências e, desse modo, obter uma visão mais geral a respeito dos dados desta fase da pesquisa,

Todavia, para procedermos a essa análise ressaltamos que, *a priori*, classificamos em três grandes grupos, as provas apresentadas aos professores.

No primeiro grupo estão as provas aceitáveis do ponto de vista da Matemática e da Lógica, ainda que eventualmente algumas informações não estejam enunciadas no texto. As provas de Bia, André, Ciro e Helena, apresentadas no anexo II, foram classificadas neste grupo.

No segundo grupo são incluídas as provas que, segundo a categorização de Balacheff (1987), explicitam a validade de uma proposição pela realização de operações ou transformações sobre um objeto presente, não por ele mesmo, mas como representante característico de uma classe – o “exemplo genérico”. Neste grupo estão as provas de Dora, Fernando, Eunice, Gina e Ivo.

No terceiro, estão incluídas as provas empíricas, ou seja, agrupamos as provas segundo as duas categorias de Balacheff (1987) descritas no capítulo 3, o “empirismo singelo” e a “experiência crucial”. Essas categorias abarcam as provas em que o indivíduo obtém a certeza de uma proposição por meio da observação de um pequeno número de casos ou, então, enuncia explicitamente o problema da generalização e o resolve mediante a realização de um caso que é particular e que é possível. Neste grupo estão as provas de Ana, Cláudia, Eduardo, Bernardo, Flávia e possivelmente a de Dario.

6.2.1 As notas atribuídas às “demonstrações” de uma proposição da geometria plana

O quadro a seguir mostra as avaliações dos professores entrevistados, expressas por notas de zero a dez, às produções de seis alunos cuja tarefa era demonstrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus.

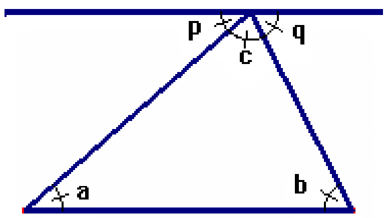
	IIA	**IIB**	**IIC**	**IID**	**IIE**	**IIF**	**IIG**
Ana	7	4	2	4	não sabe	3	4
Bia	10	10	9	9	10	8	9
Cláudia	7	2	zero	zero	zero	2	zero
Dora	5	7	4	5	não sabe	5	5
Eduardo	7	5	2	4	não sabe	4	4
Fernando	5	5	10	5	não sabe	5	6

Uma simples leitura dessa tabela nos induz a fazer algumas observações. Uma delas refere-se à posição do professor IIE que atribuiu notas apenas a duas das provas, a de Bia e a de Cláudia, e não soube – ou não quis – fazer o mesmo para as demais. A esse respeito o professor assim se pronunciou:

> Apesar do excelente nível de 5 dessas 6 justificativas, eu não poderia dar nota 10 para todas. Porque eles não demonstraram matematicamente falando, a não ser a 2.ª e, também, talvez a 6.ª, um pouco, não sei. Mas também não posso dar zero para os outros, que talvez fosse o caso porque eles não demonstraram do ponto de vista da Matemática. Tenho que respeitar o estágio deles. Você me complicou, me colocou numa sinuca. Vamos ficar assim: 10 para a Bia e zero para a Cláudia. As notas dos outros fico devendo (IIE).

Outro aspecto que pode ser observado, mediante os dados da tabela, trata-se de um consenso: a prova apresentada por Bia pode ser considerada a melhor dentre as demais, uma vez que todos os entrevistados lhe atribuíram a melhor nota, com exceção de IIC. Todavia, esse consenso não se revelou quanto ao valor a ela atribuída: 10 de três professores, 9 de outros três e 8 de apenas um.

A “demonstração” elaborada por Bia foi a seguinte:



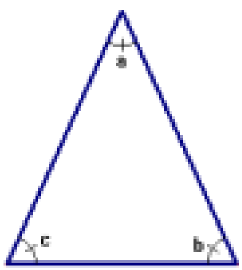
$p = a$ e $b = q$
$p + c + q = 180º$.
Logo, $a + b + c = 180º$

A seguir, a título de exemplo, estão as análises de dois professores a respeito dessa prova: o primeiro atribuiu nota dez e o segundo nota oito.

> [...] e a Bia, está bom, muito bom, com propriedade, usando linguagem matemática, justificando... a Bia, para mim, foi a melhor... a demonstração da Bia é a que eu realmente gostei. Aliás, é a que demonstrou de fato (IIB).
>
> A prova da Bia é evidentemente a melhor de todas. É a mais correta. Não está 100% porque ela não escreveu detalhes importantes e essenciais numa demonstração. Não disse que a reta traçada era paralela ao lado da base do triângulo. Não bastava ela dizer que os ângulos eram iguais, ela teria que justificar por que são iguais. Ela utilizou corretamente a linguagem matemática, mas esqueceu desses detalhes. Por isso, ela não tira 10, não é? Vou dar 8 (IIF).

Pode-se notar outra convergência: a prova elaborada por Claúdia foi considerada a mais fraca pelos entrevistados do grupo II, com exceção apenas do professor IIA. Este lhe atribuiu nota sete, ao passo que os demais lhe atribuíram zero ou dois. Talvez a nota atribuída por esse professor (IIA) tenha sido o aspecto mais divergente entre os professores a respeito das produções apresentadas.

Analisando a prova da Cláudia é possível conjecturar que sua maior preocupação tenha sido com a linguagem a ser utilizada, pois, provavelmente, seria essa a exigência de seus professores de Matemática, ou, então, ela teria procurado reproduzir uma demonstração já feita.



Afirmativas	Justificativas
a= 180º – 2c	Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
a = 50º	180º – 130
	180º– (a + c)
b = 65º	Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
c = b	
	Logo, a + b + c = 180º

O professor IIA argumenta que essa aluna teria procurado, por indução, uma generalização, uma lei:

> A Cláudia partiu de um triângulo isósceles, e chegou a uma conclusão genérica. Ela induziu apenas... ela partiu da tese... [...], mas essa nota, sete, veja bem, não é para o aluno, seria em função do estágio que ele se encontra (IIA).

Entretanto, os demais entrevistados foram menos condescendentes e não entenderam a prova de Cláudia exatamente da forma como foi vista por IIA. O professor IIC utiliza, por exemplo, a seguinte argumentação para avaliar e justificar o zero que atribuiu à prova de Cláudia:

> A aluna demonstra que ainda não compreendeu suficientemente os conceitos de demonstração, pressupostos (hipóteses) e conclusões (teses), uma vez que utilizou a conclusão, como argumento, no corpo da demonstração, ou seja, para a primeira afirmativa, seu registro já traz como verdadeira a idéia de que a soma dos ângulos internos do triângulo é igual a 180º: “a = 180º – 2c”. Foi utilizado um triângulo isósceles (que é um caso particular), e, além disso, a aluna escolheu as medidas dos ângulos internos do triângulo escolhido (A = 50º e B = 65º), para a demonstração de uma propriedade que deve ser observada em qualquer triângulo. Este procedimento demonstra que a aluna ainda não percebe a necessidade de generalização (IIC).

Uma vez apresentadas as notas de geometria e destacados aspectos sugeridos pela leitura da tabela, passamos para “provas” de Álgebra.

6.2.2 As notas atribuídas às “demonstrações” de uma proposição sobre números pares

O quadro a seguir mostra as notas atribuídas pelos professores do grupo II às “demonstrações” elaboradas pelos alunos para provar que a soma de dois números pares é um número par.

	IIA	IIB	IIC	IID	IIE	IIF	IIG
André	10	10	10	10	10	10	10
Bernardo	7	4	1	4	10	3	2
Ciro	10	9	10	7	10	7	6
Dario	10	2	zero	3	zero	3	4
Eunice	5	2	2	5	10	3	4
Flávia	7	4	2	2	10	4	3
Gina	7	5	4	5	10	4	5
Helena	10	10	10	10	10	10	10
Ivo	7	4	2	4	10	4	3

Comparando as notas atribuídas pelos professores, é possível notar que o professor IIE adotou uma posição peculiar em relação aos demais, tal como o fez quando analisou as produções a respeito da proposição geométrica. Desta vez, este professor preferiu atribuir nota dez a todas as provas com exceção da de Dario, apenas.

> Na geometria fiquei com receio de dar as notas. Acho que vou mudar. Só pra você ter uma idéia, posso te falar uma coisinha? Eu acho por exemplo, assim: todos dez, com exceção, por exemplo, desse daqui que está errado, esse do Dario ele não deu certo... ele quis enrolar ...mas todos eles, todos foram criativos. Vou dar dez mesmo que eles não tenham demonstrado. Vou ser bonzinho, com exceção dessa que estava furada lá... Eu vou ser franco, acho assim, eu acho fabuloso, mesmo que não demonstraram (IIE).

Em relação à prova de Dario houve consenso a respeito de sua “fragilidade”, com exceção do professor IIA, pois este atribuiu nota dez, ao passo que os outros avaliaram com notas que variaram de zero a quatro.

A “demonstração” construída por Dario é a que segue:

> Sejam x e y dois números inteiros quaisquer.
> $x + y = z$
> $z - x = y$
> $z - y = x$
> $z + z - (x + y) = x + y = 2z$.
> Portanto, a afirmação é correta.

O professor IIA parece ter sido “seduzido” pela linguagem algébrica utilizada por Dario e não indicou, talvez por não tê-las detectado, as falhas da demonstração:

> O raciocínio é criativo. Contudo, faltou definir o que é número par. Ele somou x e y, tirou o x, tirou o y... Ele pôs z + z é 2z; x mais y que é z, não é? Ele somou, ele pegou essa expressão, somou com ela, e tirou essa e tirou essa, então quando ele somou duas vezes, dá dois x, tira um x, dá x. Somou duas vezes esse, dá 2y, tira y, dá y, então duas vezes isso dá isso, menos isso, menos isso, me dá dois z. Ele pegou um número, um número que ele considera que é a soma dos números inteiros e a subtração dos números inteiros sempre vai dar um número inteiro. Ele concluiu aqui, pegando isso daqui vai dar dois z, e dois z é sempre número par, só que ele não disse o que é numero par, então a afirmação está correta, mas está incompleta (IIA).

O professor IIG, considera a demonstração como absurda, mas procura valorizar a linguagem algébrica utilizada por Dario:

> [...] Puxa, o que ele quis fazer? Veja ele chegou a uma conclusão absurda: x + y = z e x + y = 2z!, ou seja, z é igual a 2z! Mas ele não percebeu isso. Claro, ele partiu de uma mesma relação escrita de três maneiras diferentes. Nada a ver. Acho que para ele, essa demonstração deveria ter algumas sentenças matemáticas. E foi o que ele fez. A nota seria zero, mas acho que vou dar, deixa ver, 3. Ele sabe que 2z é sempre par se z for um inteiro. Por isso, ele fica com 4. Afinal, ele usou a álgebra, ele já sabe que precisa utilizar linguagem matemática para demonstrar (IIG).

Pode-se observar também um absoluto consenso entre os professores do grupo II: a “exatidão” das provas elaboradas por André e Helena, uma vez que lhes foram atribuídas nota dez por todos. Outra convergência, já indicada no item anterior, foi em torno da prova apresentada por Bia (sobre a proposição da soma dos ângulos internos de um triângulo). As posições sobre essas três provas, bem como as referências feitas à linguagem algébrica em outras produções, nos permitem eleger de imediato uma categoria: valorização do uso da linguagem algébrica nas provas pelos professores.

6.2.3 Valorização da linguagem algébrica nas demonstrações

Analisaremos aqui as considerações dos professores a respeito das provas de Bia, André, Ciro e Helena, que classificamos como do primeiro grupo.

Mediante a leitura atenta dos depoimentos dos professores da Educação Básica, participantes desta pesquisa, pode-se afirmar que todos, em maior ou menor grau, valorizaram sobremaneira o uso da linguagem algébrica pelos alunos, mesmo quando consideraram os procedimentos utilizados para demonstrar totalmente inadequados, como é o caso do professor IIG, já citado no item anterior, quando analisou a prova de Dario.

Essa valorização da álgebra pode ser facilmente constatada se analisarmos, por exemplo, as notas e as respectivas justificativas acerca das provas apresentadas por Bia (já comentada), André, Ciro e Helena.

As provas de André e Helena podem ser consideradas como “algébricas” ao passo que Ciro se faz valer da língua materna:

Resposta de André:	Resposta de Helena:	Resposta de Ciro
x é um número inteiro qualquer. y é um número inteiro qualquer. 2x e 2y são dois números pares. 2x + 2y = 2(x + y). Portanto, a soma de dois números pares é sempre par.	Sejam p e q dois números pares quaisquer. Então, existe um número inteiro k tal que p = 2k. Existe também um m inteiro tal que q = 2m. Portanto, p + q = 2k + 2m = 2 (k + m) é par. Logo, a afirmação é correta.	Números pares são números divisíveis por 2. Quando você adiciona números com um mesmo fator comum, 2 nesse caso, a soma terá o mesmo fator comum; portanto, a soma também é divisível por 2. Assim, a afirmação é verdadeira.

Apresentamos a seguir algumas falas dos professores a respeito da prova de André:

> O registro apresentado pelo aluno mostra que já compreendeu a necessidade de generalização, utilizando x e y, para a representação de dois inteiros quaisquer. O aluno soube estabelecer os pressupostos e utilizou uma construção lógica para chegar à conclusão solicitada. Nota 10 (IIC).

> Nada a declarar, não é? Tudo bem. O cara demonstrou que tem domínio da linguagem, usou linguagem algébrica e tudo, acho que ele já tinha aprendido, não é? Só faltou uma coisinha de nada, faltou ele explicitar mais o porquê de 2 (x + y) ser par. Mas isso não é nada, não é? Só posso dar nota 10 (IIG).

As opiniões dos professores IIC e IIG sobre a produção de Helena:

> A aluna identificou os fatos matemáticos a serem utilizados como pressupostos, números pares, e escolheu procedimentos adequados para um encadeamento lógico a representação dos números pares na forma genérica, identificação do caso de fatoração conveniente e conservação da igualdade, que conduziu à conclusão desejada. Tanto a formalização quanto a generalização apresentadas pela aluna demonstram que o conceito de demonstração está sendo construído de forma satisfatória. Nota 10 (IIC).
>
> Utilizou linguagem matemática. Perfeita. Se a demonstração do André foi 10, esse também tem que ser não é? (IIG).

Esses depoimentos, assim como os dos demais professores, mostram que estes consideram a prova de Helena ainda melhor que a de André, apesar da nota dez para ambos. Não obstante, nenhum dos docentes apontou as diferenças entre essas duas demonstrações.

Essa unanimidade a respeito das provas de André e Helena não foi constatada nas notas atribuídas a Ciro, apesar de todos os professores fazerem elogios à demonstração deste último. Os professores IIC, IIG e IIB podem atestar esse fato:

> O aluno partiu do conceito de número par e seu registro sugere que utilizou a fatoração como argumento, para, finalmente, concluir que a soma de números pares (divisíveis por 2) é um número também divisível por 2, portanto, par. A formalização, neste caso, ainda foi feita em linguagem materna, mostrando que o aluno talvez não tenha desenvolvido habilidade suficiente para a conversão desse registro em representação algébrica. Nota 10 (IIC).
>
> Muito bom. Muito mesmo. Mas a nota dele é 6, porque ele deveria ter explicado melhor essa questão do fator comum. Além disso, ele não usou linguagem algébrica. Seria preciso fazer um trabalho com esse aluno a respeito da linguagem, mas raciocínio para demonstrar ele tem. Muito bom esse aluno, mas ele precisa avançar a respeito da linguagem algébrica. Nota 6 (IIG).
>
> O Ciro escreveu “ser divisível por dois”, ele quis dizer a mesma coisa que o André, só que um demonstrou com português, a outra deu exemplo com álgebra, e a Helena foi bastante formal, não é? A Helena é a melhor, não é? O rigor da Helena ... “dois números pares

> quaisquer”... Mas é melhor colocar no mesmo grupo o Ciro, o André e a Helena. André e Helena nota 10 e Ciro 9 (IIB).

O professor IIF questionou o não-uso da linguagem algébrica por parte de Ciro. Outros professores também indicaram a necessidade desse uso para fazer as demonstrações. Podemos relacionar esse fato com os resultados da pesquisa de Healy e Hoyles (2000). Já mencionamos que os resultados desse trabalho indicam que os alunos preferem as argumentações narrativas, ou seja, aquelas que para descrever os raciocínios utilizados se fazem valer quase que exclusivamente da língua materna. Esses alunos também indicaram que seus professores preferem as provas apresentadas em linguagem algébrica.

Esta preferência pelas provas em que os alunos utilizaram linguagem algébrica talvez possa explicar, em parte, possíveis incoerências de quatro dos sete professores: as notas atribuídas por eles a Ciro foram mais baixas que as de André.

Tínhamos a convicção inicial de que esse fato não ocorreria, devido à grande “semelhança” entre as provas de Ciro e de Helena. Pode-se dizer que a diferença entre essas provas é uma questão de linguagem – a “materna” e a “algébrica” . Assim, poderiam ser consideradas equivalentes, visto que não foi especificado o tipo de linguagem em que a demonstração deveria ser apresentada.

Também acreditávamos que André tiraria nota mais baixa que Ciro e Helena, visto que sua prova tem como ponto de partida dois números inteiros quaisquer e não dois números pares conforme o enunciado da proposição.

Esta nossa hipótese inicial, como vimos, não foi confirmada. Os professores parecem ter levado mais em conta a linguagem algébrica utilizada por André e Helena do que os argumentos de Ciro expressos em língua materna. Além disso, embora todos eles tenham sido exigentes ao atribuir uma nota às produções dos alunos, nenhum mencionou a diferença entre as provas elaboradas por André e Helena.

Convém assinalar que esses resultados são muito semelhantes aos obtidos por Dreyfus (2000), em relação às mesmas provas: a média das notas atribuídas pelos professores de sua pesquisa às provas de André e Helena foi 9,4 e a de Ciro 9,0.

Essa valorização da linguagem algébrica pelos professores na atividade de “demonstrar” e, conseqüentemente, a não-valorização do uso da língua materna para este fim também foram identificadas nos depoimentos desses docentes quando procederam às análises das provas referentes à proposição de Geometria, conforme já foi salientado.

6.2.4 “Empirismo singelo” e a “experiência crucial”: aspectos divergentes

Na análise que fizemos dos pareceres dos professores sobre as “provas empíricas” – entenda-se aqui como “empirismo singelo” e a “experiência crucial” – e das argumentações para justificar as notas a elas atribuídas, pudemos observar algumas posições que poderíamos, em um primeiro momento, classificar como contraditórias.

O professor IIC, por exemplo, em seu depoimento mostra-se bastante apreensivo em relação ao trabalho com as provas formais, pois acha importante o uso da língua materna e considera que este processo não deveria lembrar a forma pela qual seus professores do Ensino Fundamental desenvolveram esse tema. Entretanto, não assume esta posição quando analisa as produções dos alunos, pois parece exigir um rigor que não transpareceu no seu depoimento inicial.

A análise desse professor para a “prova” elaborada pelo Eduardo para demonstrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º pode atestar esse fato:

Resposta de Eduardo:
Eu medi cuidadosamente os ângulos de diversos tipos de triângulos e fiz uma tabela.

A	B	C	Total
110º	34º	36º	180º
95º	40º	45º	180º
35º	72º	73º	180º
90º	59º	31º	180º
13º	19º	148º	180º

Em todos eles a soma foi 180º. Logo a afirmação é correta.

Análise da resposta de Eduardo pelo professor IIC:

a) Análise da "prova":
O fato de o aluno tomar medidas aleatórias para os ângulos internos dos triângulos indica uma inclinação forte para o trabalho com casos particulares, ou indica a idéia de que essa é a única possibilidade de provar o que foi solicitado. Não ocorreu ao aluno a hipótese de um triângulo, cujos ângulos internos tenham medidas desconhecidas. Isso mostra que o aluno não compreendeu a necessidade de estender sua conclusão para um triângulo qualquer, num processo de generalização.

b) Nota: 2.

c) Justificativa:
O aluno tomou como ponto de partida os elementos mais básicos: o conceito de triângulo, as medidas dos ângulos e a idéia de que a soma dos ângulos internos deveria (ou não) ser igual a 180º e procedeu à experimentação. Esse procedimento poderia ser utilizado, antes do trabalho, com o raciocínio dedutivo e a demonstração.

d) Comentários para o aluno:
- O que você faria para determinar a soma dos ângulos internos de um triângulo situado a uma distância que não permite que você obtenha as medidas dos ângulos internos?
- Considerando um triângulo, cujos ângulos internos têm medidas desconhecidas, quanto deveria medir a soma desses ângulos?

Não há dúvidas quanto à clareza e pertinência dos comentários desse professor, pois as pesquisas indicam que, em geral, os alunos tendem a confundir as provas empíricas com as provas dedutivas. A "experimentação" de Eduardo poderia ser classificada como "prova empírica" (Balacheff, 1987). Seria um procedimento de validação de uma proposição em que o indivíduo enuncia explicitamente a generalização a partir de casos experimentados.

Entretanto, julgamos que há um certo descompasso entre as considerações supracitadas do professor (IIC) com seu depoimento inicial.[30] Aqui ele parece querer uma prova formal, fato esse que pode ser atestado pela nota 2 que atribuiu à produção.

No entanto, quando solicitamos as providências que ele tomaria caso fosse professor dessa turma, ele parece retomar suas posições iniciais, o que pode ser verificado se as compararmos com o depoimento a seguir:

> Considerando as respostas dos seis alunos, e não tendo conhecimento a respeito dos conteúdos já desenvolvidos anteriormente com cada um deles (poderiam não pertencer à mesma classe, nas séries anteriores), entendemos que poderíamos dar continuidade a esse assunto, apresentando uma seqüência de atividades que, em princípio, solicitassem dos alunos uma verificação como aquela utilizada pelo aluno Eduardo. Essa atividade nos daria oportunidade de dizer que, mesmo tendo sido verificado valor igual a 180º para a soma das medidas dos ângulos internos de todos os triângulos que pudéssemos construir, isso não nos garantiria a validade da propriedade, para qualquer triângulo. Poderíamos complementar essa idéia, apresentando uma segunda atividade que solicitasse dos alunos o mesmo procedimento utilizado por Ana, em sua resposta. Ajudaria-nos no sentido de levar os alunos à observação de que, agora, não temos as medidas dos ângulos, e com isso já estamos considerando o "problema" de uma forma mais geral. Se nesta atividade cada um dos alunos construir o seu triângulo, cabe novamente a observação de que estamos apenas realizando uma verificação, e novamente poderíamos encontrar um resultado favorável para um número muito grande de triângulos, sem que isso nos servisse de garantia, para afirmar que a propriedade é sempre válida. Seria uma boa oportunidade para apresentarmos aos alunos a idéia de que, mesmo não havendo essa garantia, essa nossa experimentação pode nos levar a conclusões importantes, que nos permitem construir conceitos matemáticos (IIC).

O professor IIG fez os seguintes comentários para as provas que classificamos como "empirismo singelo" ou "experiência crucial":

> [...] se imaginarmos que a tarefa pedida era uma demonstração, até que fui muito bonzinho em dar essas notas. Muito mesmo. Essa história de dar nota alta para uma tarefa que não está correta pode ser interessante, porque estimula o aluno. Por outro lado, o aluno poderá deixar de prestar atenção em aspectos importantes (IIG).

Queremos ressaltar que este professor atribuiu nota 4 para a produção do Eduardo, apesar do elogio que fez aos procedimentos utilizados por ele:

---

30 Veja unidades de significado IIC1 e IIC2, citadas no capítulo anterior.

> Acho que conversaria com cada aluno e diria os aspectos errados de cada demonstração. Mas antes eu teria uma conversa geral com a classe. Discutiria o que significa demonstrar em Matemática. Discutiria o significado das experimentações empíricas na Matemática. Falaria que os procedimentos que o Eduardo usou são excelentes para levantar conjecturas. Ele foi criativo, mas seus procedimentos não provam. Os utilizados por Ana também. Esses dois estão no caminho certo, mas não chegaram lá. Entende? Apresentaria a demonstração da Bia e apontaria as informações que estavam faltando. A demonstração da Cláudia seria um interessante contra-exemplo, pois ela partiu do resultado.

O professor IIG mantém essa postura para as demais análises, elogiando a produção do aluno, mas no momento de atribuir a nota ele “desqualifica” o trabalho do estudante, para, logo após, voltar a elogiar.

Em relação às análises das produções dos alunos com a finalidade de “demonstrar” que a soma de dois números pares é um número par, pudemos observar essas mesmas reações dos professores perante as “provas empíricas”: a iniciativa do aluno, valorizada a princípio, não foi contemplada na nota atribuída pelos professores, e além disso, as justificativas fornecidas foram, em geral, contraditórias relativamente aos depoimentos iniciais.

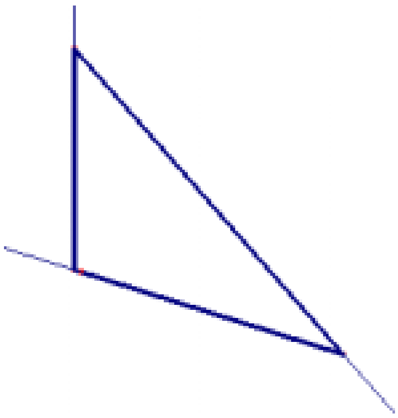
6.2.5 Exemplo genérico como prova: opiniões dos professores

As provas que incluímos no segundo grupo têm algo em comum, que é a tentativa de validação de uma proposição por meio de um exemplo genérico. Pertencem a esse grupo as provas de Dora e Fernando (Geometria) e as de Eunice, Gina e Ivo.

Os elogios feitos às produções de Fernando e Dora, assim como os do grupo anterior, não repercutiram nas notas recebidas. E as razões foram parecidas: “bonito, mas não é prova”, “criativa, mas não posso considerar”...

Como exemplo, citamos as provas de Fernando e Dora acompanhadas das análises dos professores (IIB) e (IIC), respectivamente:

Resposta de Fernando:
Se eu caminhar toda a volta sobre a linha do triângulo, termino olhando o caminho por onde comecei. Eu girei 360º.

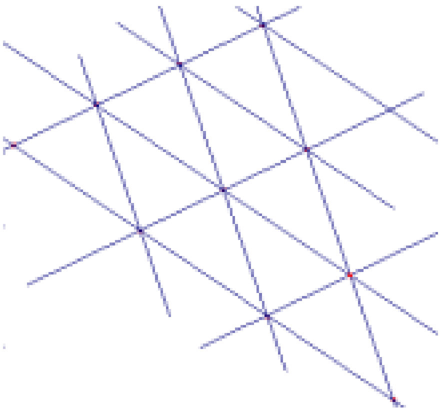


Cada ângulo externo quando adicionado ao ângulo interno deve dar 180º porque eles formam uma reta. Isto faz um total de 540º.
540º - 360º = 180º.
Logo, a afirmação é verdadeira.

O Fernando, ele deu um nó em mim, esse é o problema do Fernando. O Fernando... que eu falei para você que tive que ler mais de uma vez, porque do jeito que ele trabalha, eu nunca tinha pensado, então, tudo bem se ele caminhar, mas parece que ele já tem uma outra bagagem e... não é que não me convença, eu entendi o que ele quis falar, mas é que eu não posso chamar isso de demonstração, né? Não, como demonstração, não. Eu acho que ele foi criativo, demonstrou inteligência, ele pensou, ele demonstrou vários conhecimentos geométricos, dos ângulos externos como ângulo externo com interno sempre dá ângulo raso. Eu achei interessantíssimo, mas não posso aceitar, apesar da boa argumentação, não é uma prova (IIB).

1. **Resposta de Dora:**

Eu desenhei uma rede de triângulos e marquei todos os ângulos iguais.



Eu sei que os ângulos em volta de um ponto somam 360º. Logo a afirmação é verdadeira.

A aluna utilizou, como auxílio em sua demonstração, uma rede de triângulos, aparentemente formada por retas paralelas. Com a afirmação “marquei todos os ângulos iguais”, entende-se que a aluna tenha considerado o paralelismo entre as retas dessa rede, mas não há qualquer indicação a esse respeito na “prova” da aluna. Nesse caso, Dora estaria considerando ângulos correspondentes, alternos internos e opostos pelo vértice, mas, novamente, não há menção a esses conceitos, na “prova” apresentada. O registro sugere uma transferência do conhecimento já construído a respeito das propriedades dos ângulos formados por duas paralelas e uma transversal, para uma nova situação (IIC).

Cabe ressaltar, no entanto, que os elogios às provas de Eunice, Gina e Ivo (sobre números), apresentadas a seguir, foram menos intensos que os das provas de Fernando e Dora.

Resposta de Eunice:

♦ ♦ ♦		♦		♦ ♦	♦		♦ ♦ ♦ ♦	♦
	...		+		...	=	...	
♦ ♦ ♦		♦		♦ ♦	♦		♦ ♦ ♦ ♦	♦

Portanto, a afirmação é correta.

Resposta de Gina:

Números pares terminam sempre em um desses dígitos: 0, 2, 4, 6, ou 8. Se eu adiciono dois desses números a soma termina também em 0, 2, 4, 6, ou 8.

Portanto, a afirmação é correta.

Resposta de Ivo:

Vamos pegar dois números pares como 10 e 26.
Então

$$\begin{array}{ccccc} 10 & = & 5 & + & 5 \\ 26 & = & 13 & + & 13 \\ \hline 36 & = & 18 & + & 18 \end{array}$$

Como isso sempre é possível, a afirmação é correta.

Outro aspecto a ser destacado é que, ao analisar as provas de Dora, Fernando, Eunice, Gina e Ivo, os professores parecem não ter percebido o caráter mais geral das provas deste grupo em relação às provas apresentadas por Ana, Bernardo, Eduardo, Flávia. As médias das notas desses dois grupos – provas empíricas e exemplos genéricos – podem atestar esse fato: ambas ficaram em torno de 5.

Para uma melhor análise desses dados vamos destacar as argumentações utilizadas pelos docentes quando analisaram a prova de Eunice e a de Ivo.

Para "demonstrar", Eunice construiu uma forma criativa, utilizando uma argumentação visual para indicar a adição de números pares e generalizar para quaisquer pares. Todavia, ela não explica sobre os significados de suas convenções. Os professores IID e IIG parecem ter compreendido bem sua prova:

> Muito legal. Muito criativa. Acho que ela pensou do seguinte modo: dois números pares são sempre divisíveis por 2. Esse fato está representado pelas duas linhas. Cada uma seria a metade. As reticências garantiriam um número qualquer. Interessante, mas ela não demonstrou. Deve ser feito um trabalho com essa aluna. Eu daria, infelizmente, apenas 5 para ela. Isso pela sua criatividade (IID).
>
> [...] a garantia que esses balõezinhos representam um par é que eles estão em duas linhas e como há correspondência entre os balõezinhos... Bem, se for isso que ela pensou então ela demonstrou, não é? Mas será que ela pensou nisso mesmo? Ela fez sozinha? Muito criativo e inteligente. Por isso, é que digo que fica difícil dar uma nota sem conversar com o aluno. Mas, independente disso, eu daria apenas 3 para ela, porque ela não explicou e não escreveu numa linguagem adequada. Ela precisa aprender que nós temos que comunicar o que fazemos. Meus alunos sempre escrevem por extenso, a matéria que estou ensinando, as propriedades, etc. (IIG).

Outro entrevistado, IIE, também parece ter compreendido a prova de Eunice. Os demais docentes deram pouca atenção a essa prova, seja porque não entenderam, seja por não a terem apreciado.

> O registro utilizado pela aluna mostra que esta percebe a necessidade de generalizar o conceito que está sendo construído (usa reticências), mas, sua representação ainda é concreta, como se estivesse agrupando objetos em dois subconjuntos – uma estratégia mais utilizada por alunos que estão cursando séries anteriores (2.ª ou 3.ª séries, talvez). (IIC)
>
> Eu não entendi... não sei o que ela quis dizer, não é? Trabalhou com a linguagem dela... Mas... não entendi, realmente não entendi (IIB).

Ivo, para "demonstrar", procurou um exemplo que pudesse generalizar. Não buscou, contudo, a verificação de uma propriedade em um exemplo. Ele escreveu dois números pares quaisquer e os decompôs em parcelas de tal maneira que pudesse levar o leitor a acreditar que todos os pares podem ser escritos daquela forma. Pode-se afirmar que, a despeito das diferenças das linguagens utilizadas, sua prova é bastante parecida com a de Eunice. Todavia, dentre os que compreenderam essas duas provas não houve um consenso a respeito de qual seria a “melhor”:

> A demonstração do Ivo é bem interessante e parecida com a da Eunice, mas existe uma diferença fundamental. O Ivo consegue se fazer entender e a Eunice não. Ela usa uma convenção difícil de entender (IIE).
>
> Se a gente analisar bem essa prova, é bastante parecida com a da Eunice. Só que essa está particularizada para dois números, enquanto que a da Eunice ela usou balõezinhos e pontinhos para generalizar. O trabalho dela é bem melhor que este (IIG).
>
> A resposta apresentada pelo Ivo consiste na verificação feita para um par apenas, de números escolhidos aleatoriamente. A idéia de generalização está apenas na conclusão: Como isso sempre é possível, a afirmação é correta. Há, neste caso, alguma semelhança com o registro utilizado por Eunice, em que os números escolhidos são separados em duas parcelas iguais. Essa resposta parece sugerir que a aluna não tem ainda construído adequadamente, o conceito de generalização, utilizando apenas um caso particular, para chegar à conclusão que se refere à soma de dois números pares quaisquer (IIC).

Convém reiterar que as provas desse grupo, classificadas como genéricas, não foram, em geral, reputadas pelos professores como avanço em relação às provas consideradas como “empirismo singelo” ou “experiência crucial”.

6.3 Provas informais e provas formais: uma tensão

Analisando os depoimentos de todos os professores, incluindo as notas atribuídas às produções elaboradas pelos alunos, é possível perceber, em maior ou menor grau, que há em todos eles uma tensão entre as falas: estas oscilam entre aceitar e classificar como interessante e criativa uma “prova” advinda das experimentações empíricas e a não-aceitação, por não serem, de fato, uma prova matemática.

Segundo esses professores, ao aceitar essas experimentações, correr-se-ia o risco de favorecer a formação de uma idéia errônea sobre o significado de provar em Matemática. Mas como não aceitar e elogiar a iniciativa e a atitude do aluno? O estudante que experimentou, porém não chegou a um certo grau de formalização, desenvolveu menos o raciocínio dedutivo do que o outro que concluiu a tarefa corretamente? Como saber se este último não teria apenas memorizado uma prova formal vista, por exemplo, em um livro?

Na análise de outra demonstração o professor voltava a elogiar a “experimentação” para, em seguida, negar novamente esse tipo de iniciativa. Essa ambigüidade apareceu em todos os depoimentos. Como explicar essa oscilação de opiniões?

Conjecturamos que os professores em questão vêem a prova tal como desenvolvida em sua formação: de forma técnica, acrítica, bela por sua concisão e precisão de linguagem, engendrada pela Matemática da academia – o “fascínio da técnica” (Garnica 2002). Por outro lado, em decorrência da prática docente, eles aprenderam a reconhecer e a valorizar a atitude do aluno em experimentar, em buscar soluções, enfim, em fazer matemática e, por isso, vêem a prova também segundo a perspectiva da Educação Matemática: de forma crítica, como processo e a aceitação de provas com níveis diferentes de rigor – o “fascínio da educação”.

Para explicar como essas duas concepções, aparentemente contraditórias, são constituídas, recorremos a alguns pesquisadores que estudaram as crenças e concepções de professores, em especial os de Matemática: Tardif e Raymond (2000) e Ponte (1992).

É amplamente aceito que as crenças e as concepções do professor influenciam sobremaneira sua prática docente e algumas delas teriam origem nos bancos escolares. Certamente, para formar-se professor, um indivíduo precisa estudar, pelo menos, doze anos em um ambiente bastante parecido com aquele em que irá trabalhar. Neste percurso, ele desenvolve crenças do que seria um bom professor, uma boa escola e um bom aluno. Segundo Tardif e Raymond (2000), algumas crenças, construídas ao longo de sua vida escolar, permanecem estáveis mesmo após a formação inicial.

Convém delimitar aqui os significados dessas duas noções – crença e concepção –, embora haja pesquisadores que não fazem distinção entre elas. As crenças não necessitam de consenso, independem da veracidade e têm, em geral, um caráter não racional. Algumas não são de natureza cognitiva. Já as concepções têm um caráter organizador do conhecimento, são essencialmente cognitivas e auxiliam a dar sentido às coisas e às ações. As concepções podem ser vistas como “quadros conceituais que desempenham um papel semelhante ao dos pressupostos teóricos gerais dos cientistas” (Ponte, 1992, p. 196).

Com o objetivo de clarear os posicionamentos dos docentes entrevistados sobre as demonstrações por eles avaliadas, expomos a seguir cinco possíveis concepções de professores sobre Matemática, apresentadas por Ponte (1992):

- A Matemática consiste essencialmente na demonstração de proposições a partir de sistemas de axiomas mais ou menos arbitrários.
- A Matemática seria o domínio do rigor absoluto, da perfeição total.
- Desligar completamente a Matemática da realidade.
- Nada de novo nem de minimamente interessante ou criativo pode ser feito em Matemática, a não ser pelos gênios.
- O cálculo é a parte mais substancial da Matemática, a mais acessível e fundamental.

As quatro primeiras dessas afirmações certamente explicam a concepção denominada “fascínio da técnica”, pois os professores participantes desta pesquisa são egressos de licenciaturas cujas orientações poderiam ser classificadas de formalistas ou tecnicistas – conforme analisamos no capítulo 4.

No tocante à prova rigorosa, na formação desses docentes houve, provavelmente, a pressuposição de que o objetivo de uma demonstração formal é simplesmente validar e comunicar o conhecimento matemático – a garantia disso seria o rigor empregado, as regras da Lógica. Nessa perspectiva, as demonstrações são os veículos das concepções dominantes no seio da produção científica de Matemática.

O ensino da prova estaria, assim, reduzido à mera reprodução das demonstrações já feitas e caberia ao professor simplesmente selecionar os teoremas a serem formalmente provados, apontar os erros, explicar cada detalhe.

Desse modo, não se levaria em conta que, a partir da observação de casos particulares, as regularidades são desvendadas, as conjecturas e teorias matemáticas são formuladas. Esse caráter indutivo é, em geral, pouco destacado quando se trata do ensino do conhecimento matemático.

Por outro lado, estes professores reconhecem a criatividade dos alunos em fazer experimentações e elogiam a forma pela qual alguns estudantes teriam se lançado à busca de soluções para as provas solicitadas, ainda que as produções de alguns estivessem aquém do ideal técnico.

Este tipo de atitude pode ser explicado pelos saberes[31] que advêm da prática, não apenas a docente, mas as que vivenciaram e vivenciam quando estudantes. Saberes oriundos da prática de ensinar e de aprender Matemática. Saberes que valorizam.

Apesar de seduzidos pelo rigor, formalismo e beleza das provas matemáticas, esses professores parecem dirigir o olhar para outro campo, cujas regras e princípios não seriam exatamente os mesmos: o das provas na perspectiva da Educação Matemática.

31 Tardif e Raymond (2000) atribuem à noção de saber um sentido bastante amplo, pois reúne conhecimentos, competências, habilidades e atitudes dos docentes. Esses autores consideram os conhecimentos da matéria que se ensina e como se ensina como parte desse saber docente. O saber docente incluiria o saber fazer na sala de aula.

CAPÍTULO 7

A “PROVA” NOS CURSOS DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA – O QUE PENSAM PESQUISADORES E PROFESSORES

“A verdadeira constituição das coisas gosta de ocultar-se”
(Heráclito, Fragmentos)

7.1 Introdução

No quinto capítulo discutimos os depoimentos dos nove educadores matemáticos participantes desta pesquisa sobre a necessidade e a possibilidade de desenvolver, desde o Ensino Fundamental, um trabalho envolvendo provas. Analisamos também os depoimentos dos sete professores de Matemática da Educação Básica a respeito dessa mesma interrogação e identificamos convergências e divergências entre eles.

O capítulo seis teve por finalidade apresentar nossa compreensão acerca de diferentes pontos de vista desses docentes em relação às provas produzidas por alunos, com o objetivo de obter elementos que nos auxiliassem a analisar seus depoimentos a respeito dos cursos de formação de professores de Matemática no que se refere ao tema de nossa pesquisa.

O propósito deste capítulo é também procurar compreensões acerca de como os nossos entrevistados entendem o papel das demonstrações nos cursos de licenciatura, não apenas no âmbito de uma formação mais geral, mas, sobretudo tendo em vista que este assunto se constituirá em futuro objeto de ensino. Para tanto, nos guiamos pela terceira questão geradora desta pesquisa: "que implicações o desenvolvimento de um trabalho com demonstrações nas aulas de Matemática na Educação Básica deveria trazer para o curso de formação de professores?".

Tal como fizemos no capítulo quinto, organizamos e apresentamos os depoimentos por meio das unidades de significado, ou seja de modo que o conjunto das falas recortadas de cada entrevista se constituísse, segundo a nossa perspectiva, no discurso do entrevistado sobre a questão da prova em cursos de formação de professores de Matemática.

Ao identificarmos convergências e divergências, interpretando-as com base em resultados das pesquisas levantadas e sob a luz de nossas vivências, fizemos uma categorização das respostas, com vistas a responder a essa nossa questão de pesquisa.

Para identificar os depoimentos expostos neste capítulo, estabelecemos algumas convenções. Por exemplo, a sigla FIB2 refere-se à 2.ª unidade de significado do educador B do grupo I dos pesquisados em relação à questão da formação. A letra F (formação) nessa sigla serve para diferenciar da unidade IB2, deste mesmo educador, apresentada no capítulo 5 e, que, portanto, se referia a outra questão. Quando for necessária a alusão a esse educador sem realçar nenhuma de suas falas ele é identificado por apenas IB. Já a sigla FIIB5 designa a 5.ª unidade de significado do professor B do grupo II (o dos professores da Educação Básica) referente à terceira questão de pesquisa.

Embora não façamos neste capítulo distinção entre crenças e concepções, como também outros pesquisadores, convém indicar aqui alguns dos significados adotados para esses termos.

Para Thompson, "A concepção de um professor sobre a natureza da matemática pode ser vista como as crenças conscientes ou subconscientes daquele professor, os conceitos, significados, regras, imagens mentais e preferências relacionados com a disciplina. Essas crenças, conceitos, opiniões e preferências constituem os rudimentos de uma filosofia da matemática, embora para alguns professores elas podem não estar desenvolvidas e articuladas em uma filosofia coerente." (THOMPSON, 1992, p.132). Sua concepção é ampla, pois inclui o sistema de crenças.

Alguns pesquisadores consideram que as crenças não necessitam de consenso, independem da veracidade e têm um caráter não racional. Algumas não são de natureza cognitiva. Já as concepções têm um caráter organizador do conhecimento, são essencialmente cognitivas e auxiliam a dar sentido às coisas e às ações.

Gómez-Chacón (2002) defende a idéia de que as crenças fazem parte do conhecimento no âmbito do domínio cognitivo, mas são compostas por elementos afetivos e sociais. Elas interferem nos conhecimentos dos professores. As características do contexto social têm influência forte sobre as crenças, na medida em que muitas são adquiridas por meio de um processo de transmissão social. Para ela, as crenças do estudante no âmbito da Educação Matemática se categorizam em termos de objetos de crença: crenças sobre a Matemática, sobre ele mesmo e sobre o ensino de Matemática e ainda crenças sobre o contexto no qual a Educação Matemática acontece (contexto social).

Blanco & Contreras (2002), por sua vez, asseveram que crenças e atitudes relacionadas à Matemática funcionam como obstáculos quando os professores se deparam com novas propostas curriculares.

7.2 Provas na Educação Básica e implicações nos cursos de formação de professores: o que dizem os educadores matemáticos

Não houve nenhuma discordância entre os pesquisadores entrevistados a respeito da importância das demonstrações nos cursos de formação inicial do professor de Matemática. Tampouco houve desacordo quanto à posição de que é necessária a inclusão de provas rigorosas e formais nos currículos de diversas disciplinas da Licenciatura – as diferenças entre os pontos de vista dos educadores estariam apenas na ênfase dada a esse assunto. Ressaltaram também que a implementação de provas nas escolas de Educação Básica exige que os cursos de formação inicial problematizem essa questão.

Outro aspecto em que houve convergência refere-se à dificuldade do trabalho com esse tema. Também não foi possível identificar dissensos significativos entre esses pesquisadores, mesmo quando discutem a forma pela qual o trabalho com provas deveria ser desenvolvido.

Cabe salientar que pudemos identificar, em todos os depoimentos, um questionamento a respeito da conveniência e/ou necessidade de abordar conteúdos da Educação Básica no curso de formação inicial dos professores de Matemática e questões do entorno: se não é revisão, qual seria o significado desse trabalho? não haveria desestímulo do estudante?

7.2.1 A importância de um curso axiomático na formação inicial

Entre os educadores matemáticos participantes, seis se referiram explicitamente à importância de serem promovidos cursos axiomáticos no interior das disciplinas das Licenciaturas. Essa defesa de um curso axiomático é, em geral, justificada pela necessidade de um alargamento do horizonte do professor sobre o conhecimento matemático. As falas a seguir podem exemplificar esta posição.

> Eu sou defensor de que na formação inicial é absolutamente necessário que um futuro professor tenha um curso axiomático. Eu defendo essa idéia. Na apresentação dos axiomas e na apresentação de todos os teoremas interligados, isso é muito importante na formação dele para depois, ele poder fazer, como eu já frisei, o convencimento (FIE1).
>
> [...] tem que saber o que ele vai ensinar no ensino fundamental e médio. Mas ele não pode ficar estudando só o que vai ensinar, ele precisa por exemplo aprender a provar dentro de um sistema formal, quer dizer ele precisa ver a axiomatização. Ele precisa conhecer mais do que vai ensinar (FIG3).
>
> Eu acho que o rigor é também um processo. Num dado momento na licenciatura o aluno precisa chegar no rigor. Estudar os axiomas da teoria, as definições rigorosas, demonstrar alguns teoremas formalmente (FIH4).

Apesar de nem todos desse grupo de entrevistados justificarem a importância que atribuíram à prova rigorosa no curso de formação inicial de professores, os depoimentos de alguns dos entrevistados nos levam a conjecturar que um dos motivos seria a crença de que o futuro docente deve adquirir uma certa cultura matemática e cultivar uma postura que seja própria de um profissional dessa área do conhecimento. Ou seja, é possível dizer que este professor, sob uma determinada perspectiva, seria também um profissional da Matemática e, por esse motivo, deveria adotar concepções e valores comuns à comunidade dos matemáticos:

> Por isso a prova é tão importante porque a prova dá uma certa..., a prova formal é uma característica da matemática que a diferencia das ciências empíricas, de outras áreas. Não vou repetir que prova é a essência da Matemática, que é o coração da Matemática, mas não podemos deixar esse aspecto de lado. É a maneira que nós escolhemos na nossa comunidade para comunicar, para comunicar nossas descobertas, para comunicar nossas direções, para decidir os campos de problemas que valem a pena investigar. E o futuro professor precisa vivenciar essa experiência. Precisa ver também as provas formais (FIB4).
>
> Na verdade as pessoas que fazem licenciatura em Matemática estão numa posição interessante mesmo: eles são matemáticos, ou seja queremos dar acesso para aprender mais Matemática e atuarem como matemáticos. Ao mesmo tempo eles vão atuar na escola básica. Então é um desafio grande mesmo. De certa forma, queremos que o professor de Matemática se sinta um pouco como um matemático (FIB2).
>
> Se você não tem uma formação sólida, uma formação que foi vivenciada na base de uma teoria axiomática, você poderá se atrapalhar depois nessa questão do convencimento. Você não terá argumentos para colocar para o aluno (FIE2).

Assim, as demonstrações seriam fundamentais no processo de formação de professores de Matemática, visto que elas são “a essência da Matemática”. É possível também identificar, em algumas falas, a defesa de que os professores devem dominar não apenas os assuntos que vão ensinar, mas também outros – as demonstrações formais seriam um desses. Nesta perspectiva, as demonstrações fariam parte do necessário “estoque suplementar” de conhecimentos a ser fornecido ao professor. O educador IB se expressa, nesse sentido, dizendo:

> Eu sou muito exigente e peço a liberdade de falar de um mundo ideal. Eu acho que você tem que dar oportunidades no curso de licenciatura para que os aprendizes se sintam que eles estão se formando matemáticos, mas no mesmo tempo, eles estão se formando como educadores. Os conteúdos têm que contemplar as duas partes. Para mim, os conteúdos que eles vão ensinar devem ter a maior ênfase, é isso que eu penso nesse momento. Por isso a prova é tão importante porque a prova dá uma certa..., ou seja a prova formal é uma característica da matemática que a diferencia das ciências empíricas, de outras áreas. Para isso é que ela é tão importante (FIB5).

Um dos educadores (ID) considerou que as provas nos currículos das Licenciaturas teriam um valor altamente formativo se os futuros professores estudassem as modificações que as noções de prova e de rigor sofreram ao longo do tempo. Segundo esse pesquisador, seria importante o professor de Matemática conhecer a gênese de um conhecimento dessa área e não apenas as provas concernentes a ele.

> Uma pessoa mesmo com uma boa formação não pode acompanhar muitas demonstrações da matemática; são pouquíssimos que são capazes de acompanhar certos teoremas. [...] você tem que acreditar que aqueles que olharam e acompanharam e disseram que está certo. [...] Aí você cria um critério de verdade baseado numa demonstração que é inacessível. Por isso, essa idéia de demonstração é complicada, é filosoficamente complicada. ...eu acho que esse tipo de discussão, esse tipo de reflexão, é mais importante nos cursos de formação do que a formação pura e simples para que ele faça demonstrações. Que é uma idéia que não é, acho, muito bem trabalhada na formação dos professores: você ensina como demonstrar e ele vai fazer tal como aprendeu. Mas isso não conduz a nada porque a coisa principal que é – porque que eu demonstro? Seria mais frutífera a demonstração se os alunos estudassem a prova do ponto de vista histórico, quais foram os problemas que motivaram a criação dos conceitos e a prova deve estar nesse contexto (FID2, FID3).

Cabe reiterar que apesar do consenso a respeito da importância das provas rigorosas para formar um professor de Matemática há diferenças entre os educadores pesquisados a respeito da ênfase a ser atribuída a este tema. Alguns deles, por exemplo, foram mais específicos e indicaram temas que deveriam ter um tratamento axiomático nas aulas, ao passo que outros não o fizeram.

Convém ressaltar ainda que o educador ID considera que as disciplinas da Licenciatura deveriam ter como objetivo desenvolver um trabalho visando a elaboração de conjecturas por parte do aluno, induzindo-o a procurar contra-exemplos, a investigar e a provar. Para ele, a prova rigorosa teria sentido apenas nesse contexto, pois se assim não fosse feito, caberia ao aluno apenas compreender as provas que lhe seriam apresentadas. Este educador também cita como exemplo de um trabalho importante a ser realizado na licenciatura o estudo da obra *A lógica do descobrimento matemático*: *provas e refutações* de Lakatos.

7.2.2 Aprender e ensinar demonstração não é uma tarefa fácil

Os depoimentos dos educadores matemáticos participantes desta pesquisa, além de serem consensuais em relação à necessidade da prova rigorosa nos currículos da Licenciatura, também indicam a dificuldade do desenvolvimento de um trabalho com provas rigorosas e formais.

> É muito difícil provar e, por ser difícil, não é dada a devida atenção na formação do professor de todos os níveis. A impressão que a gente tem é que na formação do professor eles se preocupam em preparar o professor para fazer as demonstrações; mas também o futuro professor não percebe a necessidade de demonstrações para esclarecer coisas que estão [...] Esse que eu acho que é ponto que mereceria a formação de professores se dedicar mais. Em outros termos, você mostrar como são as provas e as demonstrações não é tão importante quanto justificar a necessidade de uma prova e de uma demonstração (FID1).
>
> Em geral as muitas pessoas da comunidade matemática acreditam e divulgam que provar é algo muito, muito difícil e aqueles que conseguem fazer provas são, realmente, os mais inteligentes; você tem essa coisa ainda da Matemática ser um filtro que distingue as pessoas inteligentes e não, e a prova tem sempre um papel muito forte nisso. Então acabamos por valorizar os argumentos mais formais e deixar outros de lado (FIB1).

Neste sentido, fazem recomendações diversas a respeito da axiomatização nos cursos de licenciatura: “a axiomatização de um certo assunto deveria vir apenas no final, pois é muito difícil” (ID); “deve-se escolher uma parte do programa da disciplina, a mais agradável, e desenvolvê-la axiomaticamente se for possível” (ID).

A respeito da dificuldade de ensinar provas, Dieudonné deixou bastante evidente sua posição, afirmando que não seria adequado desenvolver esse processo sob a forma axiomática a não ser a partir do momento em que o estudante já estivesse “familiarizado com a questão à qual ela se aplica, trabalhando ainda um certo tempo com a base experimental, ou semi-experimental, ou seja fazendo constantemente apelo à intuição” (apud Charlot, 1986, p. 30).

Os educadores entrevistados compartilham dessa idéia de Dieudonné ao defenderem o desenvolvimento de provas empíricas, antecedendo o desenvolvimento da parte formal. O educador IE, por exemplo, considera que não há nas licenciaturas discussão suficiente para auxiliar o futuro professor na adequação do trabalho com as provas à realidade de seus alunos:

> Muitas coisas devem, evidentemente, ser discutidas na formação dos professores: tem que discutir a diferença entre argumentos empíricos e os formais, tem que discutir a vantagem de introduzir os argumentos empíricos e possíveis problemas e dificuldades que podem surgir. Na minha opinião se faz uma licenciatura cujo conteúdo matemático não é, provavelmente, o que ele vai ensinar porque não é um conteúdo no nível dos alunos do secundário. Mas eles precisam entender as questões pedagógicas do conteúdo do nível que ele irá ensinar. Não é suficiente, claro, o futuro professor só ter domínio do conteúdo do ensino fundamental e do médio; porque é importante, por exemplo, terem conhecimento para onde a matemática está indo. Por outro lado ter apenas domínio de Matemática mais avançada e saber para onde ela está indo não é também suficiente. Esse vai ser um bom professor de matemática para o ensino fundamental e médio? Eu acho que não, para mim isso é quase secundário (FIE5).

Esse mesmo pesquisador propõe algumas etapas para o desenvolvimento das demonstrações nos cursos de formação inicial de professores de matemática e, em particular, na Geometria:

> Numa formação inicial eu acho muito importante que o professor, o futuro professor, seja colocado nas etapas de construção, exploração, conjectura, justificação do resultado. Ele precisa dessas etapas para aprender a provar e compreender os conceitos. Essas etapas são fundamentais no processo de formação inicial. Agora, quando chega na justificação, é que eu acho que, nesse caso, ele tem que ter o apoio dos postulados para poder entender exatamente o que é uma justificativa matemática. Mas, no curso de formação inicial, eu sou totalmente contra ter um curso somente axiomático. Eu acho que o curso axiomático tem que entrar junto com essas etapas, senão ele não entende o axiomático. É muito difícil (FIE3).
>
> Há um pesquisador francês, o Parzys, ele coloca as etapas do desenvolvimento do pensamento geométrico: geometria concreta, geometria espaço-gráfica da representação, geometria proto-axiomática que é uma geometria dedutiva, mas baseada em evidências e finalmente a última etapa que ele chama de geometria axiomática. Essa etapa é que poderia ser apresentada aos alunos numa formação inicial, uma etapa mais rigorosa. Se não houver essa etapa o futuro professor ele jamais poderá imaginar que existe atrás de um teorema todo um conjunto de axiomas que permite dizer isso ou aquilo (FIE4).

Alguns educadores consideram que a dificuldade de implementar provas na licenciatura agrava-se pelo fato de os alunos não estarem preparados para isso. Recomendam prudência:

> O que está acontecendo hoje, é o seguinte: há aqueles professores, os que vão formar os futuros professores, que não demonstram nada e não adianta o coordenador do curso querer implementar essa diretriz. No entanto, há outros que querem demonstrar tudo. E aí é uma incongruência porque os alunos chegam sem condições, em especial os das universidades particulares. Chega no primeiro ano tem um curso de cálculo que é puramente algorítmico, no curso de geometria analítica são dadas em geral apenas algumas receitas, e de repente no segundo ano, em álgebra linear, o professor começa a demonstrar, justamente em uma disciplina muito abstrata. É muito difícil (FIC1).
>
> Eu tenho esse curso de teoria dos números inteiros, esse curso quando eu dava no começo, eu dava uma abordagem axiomática, e eu renunciei a dar essa qualidade axiomática, porque não adianta você apresentar uma seqüência de axiomas pra quem não tem maturidade pra entender isso. E os alunos chegam às universidades cada vez menos preparados. É como eu acho que a história da matemática ensina muito pra gente; se os axiomas apareceram no fim do século passado não tem por que eu achar que gente que não teve uma boa formação matemática, vai ter maturidade pra entender isso. Então, eu não faço mais assim (FIE1).

Pudemos encontrar em todos os depoimentos indicações para o trabalho pedagógico com as provas nos cursos de formação de professores e sugestões de possíveis abordagens desse tema, visando atribuir-lhe significado e superar dificuldades que lhe são inerentes. Os textos a seguir exemplificam esse fato:

> O que é uma prova? Que tipo de prova aceitar? É uma questão que deveria ser discutida em qualquer nível da Matemática. Didaticamente deveríamos começar num nível mais básico, o que não é feito, pois no ensino fundamental e médio falamos: isto é uma prova, se você apresentar assim, está bom, e se não apresentar não está bom! Mas não deveria ser assim. Nós vamos aceitar ou não essa argumentação? Nós vamos incluir essa parte nos fatos que nós vamos continuar a trabalhar? Ou ainda não estamos satisfeitos? Promover esses debates, envolver os futuros professores nessa discussão na licenciatura é fundamental (FIB3).
>
> É isso que eu tento passar naquele artigo que escrevi [indicou que, na Licenciatura, bastaria provar apenas um teorema]. Mas teve gente que me escreveu e disse: mas um teorema só, eu acho que deveriam ser vistos pelo menos três, outros que não poderia ser menos de cinco. Se um curso vai ficar melhor porque dá três em vez de um, ou cinco em vez de três, tudo bem, mas a idéia não é essa: é muito mais importante o professor saber o que é uma demonstração, que passos ele pode dar, etc. (FID6).
>
> É, eu acho que a primeira coisa é saber se esse aluno, que está vindo para um curso de licenciatura. [...] Primeira coisa, a gente tem que saber como é que ele está chegando, pra formação inicial dele, como ele chega no curso de licenciatura, ele teve essa vivência? [...] esse professor tem que saber se ele veio com essa formação, e com isso nós vamos ter que ter o cuidado, de diagnosticar se ele já passou por essa experiência de argumentar, de passar de uma argumentação para uma prova matemática e colocar isso desde as primeiras disciplinas, desde as primeiras horas dele aqui no curso que isso fosse uma prática, e não somente na geometria, que é um *locus* privilegiado de demonstração, mas em todas as disciplinas (FIG1).

Algumas observações em relação ao ensinar provas tiveram um caráter mais geral, ao passo que outras dizem mais respeito a disciplinas específicas.

> Não adianta você olhar a probabilidade como combinatória; um cálculo combinatório no numerador, um no denominador, e isso é a probabilidade do evento, não é isso. O conceito de probabilidade tem vários pontos de vista, e você só consegue construir o conceito se você aborda todos esses pontos de vista durante a fase de aprendizagem. Na probabilidade, por exemplo, os teoremas básicos: teorema da soma, teorema do produto, que são básicos, que eles têm que saber que isso é um teorema, não é axioma. Se é teorema eu posso demonstrar, e como demonstrar. E a demonstração facilita compreender. Nesse caso ensinar demonstrar é mais fácil. [...] No caso da Estatística, a própria demonstração ajudaria na construção do conceito, ela é fundamental para a construção do conceito (FIG1).

> Acho que para o futuro professor ele teria que ter do Teorema de Tales um conhecimento profundo de tudo o que se passa. E como ele vai falar em Tales e Pitágoras seria interessante uma volta à história e ver que na antiguidade eles não tinham..., as grandezas naquela época eram sempre comensuráveis e depois, toda essa etapa de amadurecimento para poder chegar nas grandezas incomensuráveis, essa passagem histórica é importante para que o professor possa ter consciência pois senão depois vão usar o Tales e nem sabem o que está acontecendo. As demonstrações do teorema de Tales e do teorema de Pitágoras são importantes dentro daquilo que eu vejo como fundamentais. Elas teriam sentido, pois o futuro professor estaria motivado para demonstrar esses teoremas (FIE5).

Cabe salientar que os educadores consideram o trabalho com provas bastante difícil ainda que os alunos cheguem à universidade melhor preparados em termos de domínio de conceitos e procedimentos matemáticos.

7.2.3 Provas no contexto da licenciatura: um sentido mais amplo

Queremos destacar uma posição que nos pareceu convergente entre os educadores e diretamente relacionada a uma de nossas questões de pesquisa: para formar um professor de Matemática que seja capaz de elaborar e dirigir situações envolvendo provas para alunos da Educação Básica, este deveria vivenciar no curso, situações análogas àquelas que ele futuramente vai desenvolver em suas aulas. As seguintes falas podem atestar esse fato:

> De certa forma os professores deveriam vivenciar as mesmas experiências que seus futuros alunos; como nós sabemos, os futuros professores não tiveram, raríssimas exceções, experiências muito felizes com a prova na escola, se é que tiveram alguma experiência. Lógico que temos de fazer provas no nível deles e não somente provas das propriedades dos números pares e ímpares, mas temos de começar de alguma coisa que todos tiveram acesso, mostrar bem a estrutura do que aprenderam (FIB2).

> A necessidade intelectual é o ponto de partida para a prova. Mas isso só pode ser trabalhado com criança se você trabalhar isso com os professores. No fundo, acredito que para formar um bom professor tudo o que você acha que deve fazer com a criança você deverá fazer com ele (FID3).

> [...] então essa dialética entre o que ele está estudando no teórico, e o que ele vai abordar, no dia a dia dele, na pratica dele...Ele tem que avançar na questão dos conteúdos matemáticos, quer dizer, aprofundar... ele deve ver no curso de licenciatura os conteúdos que vai ensinar sob um olhar mais aprofundado. Ele deve fazer demonstrações, num sentido mais concreto, mais empírico, mas depois avançar para o

> formal. Ele deve fazer a relação, vamos dizer, dos conteúdos que ele está aprendendo com os que ele irá ensinar (FIG2).
>
> Por isso eu digo que a demonstração tem que começar, mesmo, com o professor, do início, assim, com coisas simples, que de repente são do ensino fundamental e médio. O processo é o mesmo que ele deverá fazer com seus alunos, só que com maior profundidade. Mas, antes, às vezes, ele deverá fazer demonstrações que possam ser resolvidas, assim, numericamente ou com manipulação de objetos, uma mostração, para ele perceber, para aquilo ali se tornar como numa rotina, e ele sistematizar esse procedimento, de procurar quais são as hipóteses que ele precisa (FIH3).

Referentemente às provas, as sugestões desses educadores são no sentido de que o futuro professor vivencie, na licenciatura, situações semelhantes àquelas que irá desenvolver junto a seus futuros alunos – embora mais complexas. Esta não seria apenas uma forma de superar dificuldades que este tema traz, mas também, e principalmente, para ele experimentar um caminho possível para esse trabalho na Educação Básica. Esse trabalho não significaria diminuir necessariamente o "nível do curso".

> [...] você propõe experimentos, tanto com números como com geometria na forma que você não precisa enunciar uma verdade; os próprios estudantes podem ir trabalhando, e chegar a enunciar uma proposição ou algo que eles pensem que é verdade, conjecturar, enfim. Isto é o cerne de um teorema. Nós podemos apresentar argumentos informais, que são suficientemente convincentes para esses estudantes, e que são suficientemente decentes pra um professor ensinar, sem achar que com esta argumentação não formal ele esteja "diminuindo" o conteúdo que ele estava ensinando. Então, em geometria e álgebra acho que a gente encontra muitos temas que são propícios pra isso. Na verdade, um professor que tenha uma formação sólida em matemática, pode pensar que trabalhar a demonstração, ele tem que fazer aquela demonstração extremamente rigorosa, com toda a simbologia. [...] Então você precisa ter experimentado essas coisas na licenciatura (FIF2).

O professor ID procura fazer uma síntese a respeito das provas nos currículos da Licenciatura em Matemática.

> O estudante de Matemática que vai ser professor precisa como eu já disse, experimentar, fazer conjecturas, procurar contra-exemplos, etc, quando estudar um certo assunto. Precisa também conhecer o significado de prova num sistema axiomático, afinal ele está estudando matemática. Mas ele precisa ver também algumas formas de abordar provas quando for dar aula na escola; que teoremas provar, que caminho seguir, etc. (FID8).

Um temor que transparece em alguns dos discursos é o da mera “reprodução” de um curso da Licenciatura em que as provas formais estiveram presentes.

> É importante ressaltar que se os futuros professores vêem uma demonstração formal eles vão simplesmente reproduzir com seus alunos e entrar com o formal pronto, pois consideram que é difícil para eles e nem estão convencidos da importância da prova. No entanto, sabemos que em outros aspectos eles reproduzem o que foi trabalhado com eles. Porque reproduzir uma atividade que foi legal, que você viu funcionar, é altamente positivo. É essa a nossa base para ir para frente, seja como professora, seja como matemático. Se eles tiverem experiências com provas em contextos diferentes; provas gráficas, provas visuais, provas que não são provas e sim argumentos empíricos e também argumentos formais, mas não só argumentos formais na situação de álgebra ou geometria, mas também situações computacionais (FIB6).
>
> Eu acho que na formação inicial deveríamos ter um curso axiomático, mas que os professores da licenciatura tivessem um outro olhar, um olhar assim mais crítico, propor experiências e verificações de todas as proposições, todos os teoremas da geometria, para depois então poder trabalhar com a demonstração. Mas o que não pode acontecer é o professor do ensino médio reproduzir o processo: o que foi apresentado para ele na sua formação ele repete tal e qual para seus alunos (FIE7).
>
> Se um professor viu apenas demonstrações formais no seu curso ele poderá apenas apresentar os teoremas já demonstrados a seus alunos. O aluno vai ver uma prova envolvendo termos, definições que ele nem entende. E isso é muito ruim, é perda de tempo e pior, vai afastar seus alunos da Matemática (FIC5).

Alguns educadores ao considerar que os professores da Licenciatura devem selecionar mais as provas que validam e que justificam (o porquê de uma dada proposição ser verdadeira) do que as que simplesmente validam, parecem compartilhar a posição de Hanna (1990), citada no capítulo 3. Para esta pesquisadora a função principal da prova na educação matemática seria, seguramente, a explicação.

As falas já citadas de alguns dos participantes desta pesquisa parecem atestar que eles concordam com a hipótese de Harel e Sowder (1998) – comentada no capítulo 3 – pois defendem que, para um estudante chegar a produzir uma demonstração axiomática, ele deveria passar inevitavelmente por outros tipos de prova. Alguns desses educadores indicam ainda a necessidade de passagens graduais dos tipos de justificativas para a construção de uma prova formal em diversas disciplinas que compõem o curso de formação de professores.

Pudemos identificar nos depoimentos dos educadores a valorização das provas rigorosas nas Licenciaturas de Matemática. Todavia, encontramos a defesa de um processo – não necessariamente graduado em níveis – que favoreça o aluno da licenciatura na construção de uma prova rigorosa. Isto, não apenas porque ele futuramente vai ensinar provas nas escolas, mas também na perspectiva de aprender. Para alguns deles a prova formal seria mais uma prova a ser trabalhada dentre outras possíveis.

Pode-se inferir que alguns de nossos entrevistados consideram que as situações “não-formais” e “semiformais” – aquelas que se diferenciam das formas de tratamento do objeto matemático na perspectiva da produção científica – dariam um melhor suporte para análise de quem argumenta, visto que entrariam em jogo outros contextos – sociais e lingüísticos, sobretudo. Poder-se-ia argumentar no seguinte sentido: o trabalho com as situações formais, que envolvem o raciocínio dedutivo, não prescinde de outro, cuja meta seria o desenvolvimento dos raciocínios indutivos. Estes últimos seriam importantes na produção das justificativas semiformais.

Segundo esses educadores, tais justificativas são produzidas em situações que exigem argumentações, elaboração de conjecturas, busca de contra-exemplos – objetivos esses das disciplinas da Matemática – e que podem ser desenvolvidas por meio de provas, segundo essa perspectiva.

Salientamos ainda que as duas leituras para o significado das provas rigorosas na formação do professor de Matemática discutidas por Garnica (apresentadas nos capítulos anteriores) também estão presentes nas concepções desses pesquisadores: a técnica (concepções da Matemática) e a crítica (ponto de vista defendido pela Educação Matemática). Todavia, esses educadores demonstraram um fascínio maior pela leitura crítica da prova do que pela técnica – talvez não pudesse ser mesmo de outra forma, educadores matemáticos que são – diferentemente do título do trabalho de Garnica.

Cabe destacar ainda que cinco dos educadores matemáticos participantes deste estudo indicaram que as provas deveriam tornar-se objeto de investigação em nosso país: é preciso discutir suas potencialidades e limitantes, não apenas nos currículos da Educação Básica, mas também no âmbito da formação de professores. Enfim, a Educação Matemática precisa e deve tematizar essa questão.

7.3 Provas na Educação Básica e implicações nos cursos de formação de professores: o que dizem os professores

Os professores do grupo II desta pesquisa concordam, tal como os educadores, que o desenvolvimento de provas rigorosas e formais no âmbito da licenciatura é importante. Todavia, ao discutir os aspectos necessários para formar um professor competente para ensinar provas usaram, invariavelmente, um contra-exemplo como argumento: o curso de Matemática que fizeram não poderia ser considerado modelo nesse aspecto, pois houve apenas uma simples apresentação de provas formais. Outro aspecto convergente refere-se à dificuldade de aprender e ensinar a provar.

Também pudemos constatar em todos os depoimentos uma discussão referente à abordagem ou não dos conteúdos da Educação Básica no curso de formação inicial dos professores. Consideramos que discutir essa questão é de grande interesse para a Educação Matemática, visto que ela emergiu naturalmente das argumentações dos participantes dos dois grupos quando indagados a respeito do significado da prova nos cursos de formação.

7.3.1 A importância da prova rigorosa na licenciatura: ponto de vista do professor

Todos os sete professores da Educação Básica, participantes desta pesquisa, fizeram referências à prova rigorosa no contexto da licenciatura. Houve consenso a respeito de sua importância. As justificativas utilizadas para defender essa posição foram muito semelhantes entre si.

O argumento mais utilizado, também presente nos depoimentos dos pesquisadores, refere-se à necessidade de o professor conhecer outros conceitos e procedimentos matemáticos, além daqueles que irá ensinar: o “estoque suplementar” de conhecimentos essenciais para o professor desenvolver adequadamente sua função. Um dos docentes afirma: “o futuro professor deveria ser imerso na cultura matemática” (FIIA2).

Alguns dos entrevistados defendem a prova rigorosa nos currículos de diversas disciplinas da Licenciatura e três acrescentam que o professor que domina a teoria e sabe demonstrar formalmente teoremas assumiria uma nítida liderança entre seus pares da Educação Básica, pelos saberes da profissão: conteúdo e prática docente.

> Eu acho que o rigor matemático, a ciência, é o que prevalece. Você tem que dominar; você tem que saber demonstrar, esse conhecimento é indispensável para o professor, mesmo que você não vá ensinar (FIIB1).
>
> Deveríamos demonstrar um teorema só depois de termos usado o resultado desse teorema em problemas e depois de ter feito experimentações. Mas é muito importante fazer demonstrações formais na licenciatura. Um professor do ensino médio que sabe demonstrar é respeitado pelos colegas e pelos alunos. Por isso, na faculdade, eu defendo que se deve chegar no rigor (FIID1).
>
> Um professor precisa saber fazer as demonstrações dos teoremas, mesmo que ele não passe isso aos alunos, ficando somente com a experimentação, o que é já uma grande coisa. Vou te falar uma coisa: eu sou muito respeitado por meus colegas da rede pública justamente por saber as demonstrações. Eles pedem auxílio para mim muitas vezes: saber o porquê disso, o porquê daquilo. Não fizeram uma boa faculdade. Acho que para formar um bom professor é necessário que o curso tenha demonstrações formais. Não só, mas tenha. Elas dão uma certa seriedade ao curso (FIIG1).
>
> O curso de Licenciatura não pode descartar o rigor, isto é, é necessário que seu ensino seja bem fundamentado e profundo. Um professor de Matemática, mesmo que vá só atuar no Ensino Fundamental precisa estudar a Matemática como ela é, não somente aplicações. Deve haver um curso axiomático. Mas deve associá-lo às mudanças que ocorrem diariamente, possibilitando as pessoas que não vão somente se dedicar à Matemática, que possam incorporar um conhecimento que fará parte de sua vida (FIIF1).

Assim, pode-se afirmar que os entrevistados do grupo II são favoráveis ao desenvolvimento de um curso axiomático nas licenciaturas, por conceber que esse estudo pode alargar o horizonte do professor sobre o que é Matemática.

Julgamos importante apresentar as justificativas dessa defesa, por entender que a prova rigorosa é elemento fundante de muitas concepções sobre os processos de ensino e de aprendizagem dessa área do saber.

Essa valorização da prova rigorosa pôde ser constatada também em nossa análise apresentada no capítulo 6, quando discutimos as notas atribuídas aos alunos: os muitos elogios – criatividade, iniciativa, espírito de investigação – a algumas das provas apresentadas não repercutiram na nota, pois elas estariam, segundo eles, longe do ideal matemático.

Contudo, esses docentes alertam que as disciplinas presentes na formação do professor deveriam necessariamente prever um trabalho envolvendo experimentações para que os alunos pudessem compreender as provas formais.

7.3.2 Pontos de vista de professores sobre o processo de ensino e de aprendizagem de provas nos cursos de formação

Os professores em seus depoimentos se referiram, quase sempre, à própria formação inicial, não apenas quanto às demonstrações e provas, mas também no sentido de apontar que a Licenciatura os auxiliou pouco na tarefa de ensinar Matemática. Essa referência, a despeito de eventuais elogios, tinha a finalidade de mostrar, na maioria das vezes, contra-exemplos, ou seja, como as universidades não se preocuparam em formá-los para a tarefa que iriam assumir. As falas a seguir podem atestar esta afirmação.

> Quando eu fui dar aula... eu tive que estudar muito... hoje em dia, tudo bem, eu dou aula há 12 anos, mas quando eu fui dar aula, há muitos anos eu não via... nossa!... mas na faculdade eu não tive nada disso, eu não tive a matéria que eu vi no ensino médio... nunca foi tocada aqui no ensino médio (FIIB2).

> No meu curso de Matemática, muitas vezes a gente nem tinha entendido o conceito que o professor estava ensinando e ele já fazia as demonstrações. Em álgebra linear lembro que isso aconteceu muito. Eu nem tinha entendido direito o que era um espaço vetorial e já estava demonstrando algumas propriedades do espaço. O professor cobrava nas provas somente demonstrações que ele havia feito em sala. Eu ficava animada porque eu conseguia, claro me matava de estudar para compreender e se não conseguia, partia para decorar os teoremas que

> o professor falava que eram importantes meus colegas também, mas a maioria...(FIID2).
>
> Eu acho que aprendi alguma Matemática no meu curso. Eu fiz um bom curso, mas não tive nenhuma orientação para dar aula. [...] Para ensinar demonstrar? Imagine só. Quando fiz matemática eu apenas procurava entender as provas feitas (FIIF3).

Foram feitas ainda, por parte dos pesquisados, considerações diversas a respeito da prova em seus cursos de formação. Apesar do fascínio que esses professores têm pela prova rigorosa, alguns não a consideram motivadora. As falas a seguir podem exemplificar essa posição:

> Acho que o papel da demonstração na minha formação foi muito dúbio. Sempre achei a demonstração algo muito interessante e fundamental para um professor de Matemática. Alguns teoremas, todos os professores deveriam saber demonstrar. [...] Será que existe algum matemático que não gosta de demonstração? Mas a demonstração sempre me deixou frustrada. O meu esforço sempre foi para entender uma demonstração já feita pelo professor ou que já estava no livro. Mas raramente consegui demonstrar um teorema que eu já não tivesse visto anteriormente a demonstração. Por isso sempre tive a sensação de fracasso, apesar de quase sempre ter tirado boas notas. Não tive coragem de fazer mestrado em Matemática por puro medo de fracassar nas demonstrações (FIID3).
>
> O significado da demonstração na minha formação como professor de Matemática foi essencial. Mas achei difícil e me despertou pouco interesse. Contudo acredito que deveria ter passado por algumas fases. O rigor matemático nem sempre é necessário no curso do primeiro e segundo graus. Deveríamos ter visto “outras maneiras” de demonstrar para atingir um público que não seja essencialmente matemático (FIIF2).

Cabe ressaltar que os professores entrevistados não adotaram uma atitude de apenas criticar a formação inicial. À nossa indagação sobre possíveis implicações que a implementação de provas nos currículos da Educação Básica traria à formação de professores eles foram pródigos em sugerir. Para haver, por exemplo, maior motivação para a aprendizagem de tópicos difíceis, como as provas, uma das sugestões (dois professores) seria o da inserção da história da matemática ou filosofia no âmbito das próprias disciplinas:

> Mas ele pode querer transmitir a demonstração que ele aprendeu para os alunos. Pois é pode acontecer e recair naquele erro de antigamente, e não entender que a prova é um meio para estudar matemática e também um processo... Eu acho que precisava ter um trabalho no sentido, deveria haver um trabalho em que ele perceba... ele mesmo

perceba que aquilo é construído, que ele pode fazer a construção dele, é? Não pode ser uma coisa pronta. Se ele perceber, isso eu acho que envolve um pouco a história da matemática, se ele perceber que ele mesmo pode construir esse processo da demonstração, acho que ele vai conseguir transmitir para o aluno... (FIIC 5)

As recomendações concernentes às demonstrações feitas pelos professores entrevistados em relação aos cursos de licenciatura têm estreita vinculação com a prática, seja para a busca de significado para o desenvolvimento de provas, seja para a seleção de conteúdos e aspectos didáticos:

> Acho que o professor não deve começar um assunto e logo partir para a demonstração (FIID7).
>
> Eu acho fundamental a demonstração na licenciatura para a compreensão, porque aí [...] compreendendo, ele realmente aprendeu aquilo; ele sabe como é que funciona; ele sabe quando ele deve usar. Agora, como é que nós vamos formar professores que estejam voltados para isso? Porque normalmente o aluno entra numa faculdade que não foi difícil ele entrar. Ele não tem base nenhuma, o mestre, por sua vez, nem toma conhecimento do fato de que ele, esse tal aluno, não tem a menor noção de demonstração nenhuma, o aluno não vê nenhum sentido naquela demonstração... então o que nós vamos ter que fazer é um trabalho inicial na licenciatura (FIIE1).
>
> Os cursos de licenciatura devem ter em mente que o seu principal objetivo é formar um professor de Matemática que vai lecionar no 1º e no 2º graus. Mas é claro que se deve ir além. Acho que na licenciatura deve ter cálculo diferencial e integral, geometria analítica por meio de vetores, álgebra, um pouco de álgebra linear. Afinal um professor de Matemática precisa saber Matemática. Então, o professor precisa dominar o conteúdo que vai lecionar e, além dele, saber seus resultados, deduzir as fórmulas principais de cada assunto, conhecer alguns problemas históricos e conhecer as dificuldades que os alunos têm sobre cada assunto, usar alguns *softwares* (FIIG5).
>
> Muitos dos professores formados hoje não sabem nada de demonstrações. Para o professor poder ensinar uma demonstração ele tem que saber muito o conteúdo. Ele tem que saber usar o teorema, aquela propriedade, enfim saber aplicar. Ele precisa saber um pouco da história. Caso contrário ele pode passar para a classe uma demonstração formal, que o aluno teria que memorizar para reproduzir na prova. Ele tem que consultar os bons livros didáticos, acho que tem paradidáticos excelentes. Pena que não tenha de todos os assuntos. Esses livros trazem informações históricas, indicam experimentações e mostram aplicações. Tudo fica bem concreto. Depois o professor complementaria com a demonstração quando fosse o caso. Acho que não pode haver demonstração na sala de aula se não houver um pouco desse caminho. Eu faço isso (FIIF7).

Reiteramos que os professores pesquisados não apenas colocaram seus pontos de vista relativamente à prova na formação do professor de Matemática, mas também levantaram uma discussão a respeito da abordagem dos conteúdos tradicionalmente previstos para o Ensino Médio, nas Licenciaturas.

7.4 Conteúdos de Matemática do Ensino Médio na Licenciatura – o que pensam educadores e professores

A opção por apresentar pontos de vista de nossos entrevistados sobre a inclusão ou não de temas da Educação Básica como conteúdos a serem desenvolvidos também na licenciatura decorreu da importância que atribuíram a essa questão. Por exemplo, o tempo que os participantes dedicaram a ela foi significativo; no caso de alguns, essa discussão interferiu em seus depoimentos a respeito das questões da entrevista.

Pudemos identificar, dentre a diversidade de argumentos apresentados pelos participantes dos dois grupos de pesquisa para defender seus pontos de vista, alguns consensos. Todos parecem ser favoráveis que nas licenciaturas sejam abordados, ao longo do curso, alguns conteúdos do Ensino Médio. Todavia, essa retomada não teria o significado de uma simples revisão, como acontece ainda em algumas universidades.

Tampouco não consideram ser suficiente apenas o estudo da didática desses conteúdos, apesar de absolutamente necessário. Nesse sentido, também advertem que as licenciaturas não podem restringir-se aos tópicos do Ensino Médio, ainda que fossem desenvolvidos em maior profundidade do que se faz normalmente nas escolas desse grau de ensino.

Um dos argumentos utilizados para justificar essa “retomada” de conteúdos do Ensino Médio foi consensual: os alunos chegam aos cursos de Matemática cada vez menos preparados e seria imprescindível ter um razoável domínio de determinados conceitos e procedimentos para aprender outros.

Alguns dos entrevistados, ao indicarem a dimensão e o significado do desenvolvimento de conteúdos do Ensino Médio nas Licenciaturas, consideram que as provas deveriam fazer parte desse trabalho.

Apresentamos a seguir um conjunto de declarações de alguns dos entrevistados relativamente ao estudo de conteúdos do Ensino Médio na Licenciatura. Para tal, optamos por transcrever fragmentos dos depoimentos, de modo a compor seus respectivos discursos sobre essa questão. Os textos podem falar por si mesmos, tal é a clareza com que os entrevistados expõem suas idéias. Eles podem corroborar nossa leitura das entrevistas, concernente a essa questão.

Seguem falas dos educadores IC, IE e IG:

> Há um sofisma: quem sabe mais sabe menos. Por exemplo, você dá um curso de topologia, de espaços métricos, e você diz, bem eu dei um curso de espaços métricos então meu aluno vai saber ensinar geometria plana. É um sofisma porque na maioria das vezes eles não aprenderam nada, eles passaram pelos espaços métricos, mas não vivenciaram, é um conhecimento sem raiz. Os cursos de Matemática vivem em função desse sofisma: você ensina coisas lá no alto e porque isso faz com que eles saibam os de baixo. Em geral, isto não acontece, não é verdade. Em outros tempos pode até ter sido, mas hoje eu não vejo assim. Pode-se fazer um bom curso de matemática abordando também conteúdos do ensino médio (FIC5).
>
> Acho que deveria haver uma preparação de terreno no sentido de suprir as lacunas de formação do professor, mesmo no primeiro ano, uma matemática do curso colegial, mas bem estudada. [...] mas não é uma simples revisão, mas estudar aqueles tópicos de forma bem estruturada mais aprofundada. Geometria no espaço, determinantes. Geometria espacial, eu acho, por exemplo, mais difícil que álgebra linear, pelo menos no nível da graduação. [...]. Nesse processo a demonstração teria muito destaque. [...] Atualmente os alunos são admitidos em muitas instituições, os vestibulares para o curso de professores têm sido apenas classificatórios, e não há um trabalho assim de ao mesmo tempo suprir as lacunas de formação dele e dar condições para que ele possa ensinar (FIC6).
>
> No curso em que trabalho, nós temos quatro anos de geometria: a gente trabalha com a geometria plana durante um ano e é um curso em que a demonstração aparece, como também aparecem as construções, uso de Cabri, de levantamento de conjecturas, de dedução, é um curso dedutivo. Então, na verdade esse curso é uma volta a um conteúdo de 7ª e 8ª séries, mas você pode colocá-lo, todo esse desenvolvimento, num ponto de vista mais avançado. Eu gosto muito de trabalhar com a história, então quando eu apresento um curso eu gosto muito de fazer uma contraposição do sistema axiomático de Euclides com o sistema axiomático de Hilbert, eu gosto de falar do sistema axiomático de Birchoff. Ele introduz as medidas, já o Hilbert é um curso mais sintético.

> Há essa riqueza, você está tratando do mesmo assunto só que do ponto de vista mais avançado. É isso que o professor gosta, ele não quer que você repita tal e qual ele viu no ginásio e colégio, mas se você volta naqueles conteúdos do ponto de vista histórico, misturando, quer dizer, comparando os sistemas de axiomas, fica muito mais rico, muito mais interessante (FIE6).
>
> Acho que os conteúdos do Ensino Médio deveriam fazer parte do curso de licenciatura, incluindo as demonstrações. Mesmo para aqueles que tiveram um bom curso médio (FIG5).

Apresentamos abaixo os depoimentos dos educadores IID, IIF e IIG:

> Acho que uma pessoa para ser professor de Matemática deve saber os conteúdos do Fundamental e do Médio. Por isso, as faculdades deveriam ensinar esses assuntos, mas devem ir bem além do que está nos livros do ensino Médio. Deviam dar um pouco de didática desses assuntos, deveríamos analisar livros didáticos e paradidáticos. Mas é claro que as faculdades devem ir bem além e não pode ficar apenas com esse arroz com feijão, os conteúdos do ensino médio (FIIG6).
>
> Parece-me importante que o Curso de Licenciatura ofereça aos alunos disciplinas que abordem também conteúdos do Ensino Médio, mas com um tratamento mais aprofundado, e as demonstrações fazem parte desse aprofundamento (FIID5).
>
> O que eu sei de Geometria foi o que eu aprendi dando aula e o que vi no cursinho. Como eu dou pouca geometria no Ensino Médio, e o que ensino é apenas a métrica, eu não sei muita coisa de Geometria Espacial. Não teria sido mais útil em algum momento do meu curso de Matemática ter estudado Geometria Plana e Espacial? (FIIF5).

Quanto à seleção e organização dos conteúdos a serem desenvolvidos na licenciatura relativos às disciplinas tradicionais, alguns dos entrevistados (IF e IH) consideram que deveriam ser priorizados aqueles que têm estreita relação com o que futuramente os professores irão desenvolver na Educação Básica:

> Eu tenho um ponto de vista, bem pessoal, de que, por exemplo, Álgebra Linear é secundário e a gente deve priorizar Geometria e o ensino de Teoria dos Números Inteiros, que são os tópicos que depois podem frutificar em tópicos interessantes no ensino na educação básica. Meu ponto de vista é esse. Isso é fácil de exemplificar: Tópicos de Teoria Elementar dos Números podem gerar um senso crítico para não tomar um exercício simplesmente como um algoritmo mas olhá-lo como um problema que eles têm recursos para enfrentar e que com esses recursos ele pode argumentar porque ele procedeu dessa maneira (FIF7).
>
> [...] muitas pessoas que dão aula para a licenciatura, cálculo e álgebra não percebem a utilização disso no ensino fundamental e médio, porque não dão aulas, porque não fazem pesquisa nesta área, então não percebem ou não fazem relações com o que vão ensinar (FIH5).

Comparando depoimentos dos dois grupos de entrevistados podemos constatar que a defesa do estudo de conteúdos do Ensino Médio na Licenciatura é maior por parte dos educadores matemáticos do que pelos docentes da Educação Básica. Em síntese, os dois grupos de professores defendem, de modo geral, essa inclusão e, ao mesmo tempo, estabelecem diversos condicionantes a esse trabalho.

7.5 Quadro síntese das convergências

Nos itens precedentes, identificamos convergências nos depoimentos dos professores da Educação Básica e dos educadores matemáticos a respeito das provas nos cursos de formação inicial de professores de Matemática.

Cumpre-nos, neste momento, apresentar uma leitura dessas convergências de modo a avançar para um discurso mais geral, abandonando as falas dos indivíduos, e responder à indagação: afinal, o que dizem os entrevistados em relação à terceira questão desta pesquisa?

Esse movimento – do individual para o geral – trata das reduções das unidades de significado obtidas por meio do olhar deste pesquisador que se orienta não somente pelas suas vivências, mas também pelos autores consultados, pesquisas referenciadas e depoimentos recolhidos.

O quadro a seguir apresenta uma síntese das convergências por nós identificadas.

Significados	Argumentações/Explicitações
A prova rigorosa é importante na formação do professor de Matemática.	É necessária para aprender mais Matemática. É necessária por ser parte essencial do fazer e comunicar Matemática. É necessária para desenvolver uma cultura matemática.
Para aqueles que consideram que possuir "sólido" domínio do conteúdo é a principal característica do professor de Matemática, a ênfase na prova rigorosa é um fator que diferencia as licenciaturas.	O professor precisa ter um estoque de conhecimentos – além dos indicados nos currículos prescritos – e a prova rigorosa seria um deles. Um professor de Matemática da Educação Básica que sabe demonstrar os teoremas e as fórmulas concernentes aos conteúdos que vai ensinar pode assumir liderança entre seus pares. Os currículos das licenciaturas devem prever o desenvolvimento de conteúdos tradicionalmente prescritos para o Ensino Médio, não na perspectiva de uma simples revisão mas também na de aprofundamento; neste aspecto, a excelência poderia ser obtida pelo uso da linguagem formal e das demonstrações rigorosas. A abordagem dos conteúdos do Ensino Médio na licenciatura não significa, absolutamente, o abandono das disciplinas clássicas: cálculo, álgebra, análise, etc.
É difícil aprender e ensinar provas rigorosas.	A História da Matemática e a Filosofia podem motivar o processo de ensino e de aprendizagem da prova. Deve-se promover a necessidade da prova, e para isso, o processo de investigação na sala de aula deve ser implementado.
O trabalho com situações formais, que envolvem o raciocínio dedutivo, não prescinde de outro, cuja meta seria o desenvolvimento dos raciocínios indutivos – importantes na produção de justificativas "semiformais".	Situações "não-formais" e "semiformais" dariam suporte para análise de quem argumenta, visto que entrariam em jogo não apenas aspectos sociais e lingüísticos, mas também contextos matemáticos. As argumentações podem estar presentes em situações que exigem a elaboração de conjecturas, a busca de contra-exemplos. Neste contexto as argumentações poderiam tornar-se um bom caminho para desenvolver a prova formal nas licenciaturas – "o princípio da necessidade" (isto não significa, necessariamente, considerar que o caminho das provas informais para as formais seja "natural" e linear). Relativamente ao processo de implementação da prova na Educação Básica, considerada em um sentido mais alargado, o futuro professor deverá vivenciar, no curso de formação inicial, situações análogas àquelas que vai desenvolver com seus alunos.
Provas nos currículos da Licenciatura	Prova como ferramenta a ser tratada no seio das disciplinas (validação, explicação e apresentação de teorias) para compreender e aprofundar os conceitos. Prova como elemento característico e imprescindível da Matemática, cujo rigor, maior ou menor, pode ser definido pela Lógica – como elemento sintático, independentemente de conteúdos particulares, prova é tema transversal, portanto. Prova e o seu papel no currículo na formação de professores: discussões da natureza e características do conhecimento matemático, a prova matemática na história, a filosofia da Matemática, o desenvolvimento do raciocínio lógico. Prova como objeto de ensino: meio de ensinar e aprender matemática, trabalho empírico, análises de seqüências didáticas, desenvolvimentos de projetos para trabalhos em micromundos, significados das provas na educação básica.

7.6 Provas nos currículos de professores: significados

Analisando os significados do quadro anterior pode-se perceber que a inclusão das provas nos currículos de formação de professores é defendida não apenas pela razão de que ela é necessária porque é ferramenta imprescindível de validação de proposições e de apresentação de teorias da Matemática, mas sobretudo porque é meio de aprender e de ensinar conceitos e procedimentos desta área do conhecimento. Assim, adotar este princípio seria fundamental, visto que a prova pode se constituir em objeto de ensino na Educação Básica.

É também possível afirmar, por meio das explicitações apresentadas nesse quadro, que esses significados centram-se ora no aluno (ponto de vista da aprendizagem), ora no docente (ponto de vista do ensino), ora no saber matemático. Isso nos remete a confrontá-los com modelos docentes a eles associados.

Consideramos que o proposto por Schulman (1992) seria um bom modelo para configurar as provas nos currículos de formação de professores de Matemática. Este teórico afirma que cada área do conhecimento tem uma especificidade própria, o que justifica a necessidade de estudar o conhecimento do professor tendo em vista a disciplina que ensina.

Schulman elabora um modelo cuja preocupação é superar a oscilação entre o conhecimento do conteúdo e o conhecimento das habilidades puramente pedagógicas, que acontece no interior dos sistemas de ensino em função de políticas públicas. Propõe, então, um terceiro domínio para o saber docente, integrando os dois anteriores: o conhecimento do conteúdo no ensino, ou seja, todo o conjunto de saberes da disciplina que vai ensinar.

Esse domínio é subdividido por Schulman em três categorias de modo a integrar os conhecimentos que são exclusivos dos professores: conhecimento dos conteúdos da disciplina que ensina, conhecimento didático desses conteúdos e o conhecimento curricular da disciplina (seleção e organização de conteúdos, objetivos e finalidades)

Há críticas a respeito desse modelo, pois sua simples adoção não poderia superar a dicotomia pedagógico/específico freqüente nos cursos de formação de professores. Além disso, ele não incorporaria os processos de construção e de mudanças nos saberes docentes.

No entanto, o modelo de Schulman traz avanços, pois faz sinalizações para os cursos de formação, ao discutir, abertamente, a questão do conteúdo, em sentido amplo, na formação do professor – um aspecto meio abandonado por alguns teóricos.[32] Esse modelo pode ser levado em conta na formação inicial, embora Schulman considere que os conhecimentos do saber docente são construídos no decorrer da ação do professor, ou seja quando este busca vencer desafios que sua prática docente lhe impõe.

O modelo de Schulman pode consubstanciar os resultados desta pesquisa no tocante às provas nos cursos de Licenciatura em Matemática, uma vez que as três dimensões do conhecimento do professor, discutidas por esse autor, estão presentes na síntese das convergências dos depoimentos e das pesquisas referenciadas a respeito desse assunto. Para cada uma das argumentações dadas em defesa da inclusão das provas nos currículos de formação de professores de Matemática, presentes no quadro das convergências, pode-se estabelecer relação com as categorias de Schulman.

Quanto à categoria “Conhecimento de conteúdos da disciplina” podemos citar dois exemplos apresentados no quadro: o primeiro, é a referência à prova como aspecto essencial no ensino da Matemática, por ser instrumento de validação, explicação e apresentação de teorias. Outro exemplo trata da afirmação “prova [...] como elemento sintático, independente de conteúdos particulares, prova é tema transversal [...]”. Assim, a transversalidade desse assunto também lhe conferiria o caráter de indispensabilidade nos currículos de Matemática.

32 No entanto, atualmente há diversos estudos em Educação Matemática que têm Shulman como referência. Oliveira e Ponte (1996) que analisaram 76 artigos internacionais publicados em revistas relevantes de Educação Matemática, afirmam que o quadro teórico de Shulman (1986, 1987) influenciou, direta ou indiretamente, a maioria dos estudos que integram a categoria denominada por eles como “conhecimento de base”.

Referentemente ao conhecimento do conteúdo da disciplina a prova exerceria duplo papel: o substantivo e o sintático. Conhecer demonstrações do Teorema de Pitágoras seria um exemplo de conhecimento substantivo, pois Schulman (1992) considera que esse tipo de conhecimento inclui fatos, princípios, definições, noções e conceitos.

O aspecto sintático do conhecimento do conteúdo, que complementa o substantivo, refere-se aos métodos e aos paradigmas de investigação da disciplina, às questões referentes à validade, aos métodos de refutação e às relações entre conteúdos. Sob essa perspectiva, o professor deveria conhecer diferentes processos de prova, suas lacunas, seus relativismos, sua historicidade.

Nesta pesquisa vimos que é desejável o trabalho com provas nas aulas de Matemática da Educação Básica e também que ele é perfeitamente possível, desde que a palavra prova tenha seu sentido ampliado. Mas, para isso, o professor precisa construir conhecimentos didáticos sobre esse assunto.

Para Schulman o "Conhecimento Didático", um dos domínios dos saberes docentes, deve incluir fatos e princípios sobre o processo de ensino e de aprendizagem da disciplina. Esse conhecimento incluiria as analogias e os exemplos que o professor utiliza para que o aluno compreenda os conceitos trabalhados.

Assim, os conhecimentos didáticos sobre provas estariam dentre os muitos conhecimentos necessários para o professor de Matemática exercer sua função docente. Os participantes desta pesquisa podem corroborar esta posição, visto que consideram importante a "tematização" da prova no curso de formação de professores também do ponto de vista didático. Um motivo pode ser considerado evidente: a dificuldade do processo de aprender e ensinar provas e, em vista disso, sugerem diversos procedimentos para minimizar essa dificuldade.

O "Conhecimento curricular da matéria", fundamental para o professor planejar sua ação docente, é o terceiro domínio dos saberes docentes do modelo proposto por Schulman. No caso do processo de ensino e de aprendizagem de

Matemática o professor poderia expressar não somente os objetivos gerais e específicos, relativos a cada tema, mas também estabelecer o papel das provas no trabalho a ser desenvolvido. Certamente, conhecer a história da disciplina Matemática poderá auxiliá-lo nesse trabalho.

A relação que fizemos entre os três domínios dos saberes do professor, propostos por Schulman, e os resultados desta pesquisa não significa uma proposição de que as provas formais estariam destinadas ao domínio exclusivo das disciplinas "duras" da licenciatura e as "semiformais" ficariam restritas às disciplinas pedagógicas, pois se assim fosse, estaríamos fortalecendo a indesejável dicotomia pedagógico/específico. Nesse caso, caracterizar-se-ia a distância já existente entre o que ensinar e como ensinar.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

> *Eu sei de muito pouco. Mas tenho a meu favor tudo o que não sei e – por ser um campo virgem – está livre de preconceitos. Tudo o que não sei é a minha parte maior e melhor: é minha largueza. É com ela que eu compreenderia tudo.*
>
> (Clarice Lispector. A descoberta do mundo)

Nestas considerações finais, apresentamos uma síntese de nossas reflexões sobre as respostas às questões deste estudo, expostas e analisadas nos capítulos anteriores. Expomos, também, nosso ponto de vista sobre a necessidade de ressignificar provas nos currículos de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio e das Licenciaturas em Matemática.

Relativamente aos procedimentos metodológicos adotados em nossa pesquisa, buscamos a utilização de procedimentos como a pesquisa bibliográfica e documental e a realização de entrevistas com pesquisadores em Educação Matemática (fala da teoria) e com professores da Educação Básica (fala da prática), a que nos referimos, neste estudo, por grupos I e II, respectivamente. Nossa intenção era elaborar conclusões que tivessem a colaboração de várias fontes, oferecendo assim, mais dados/informações para nossa pesquisa de abordagem qualitativa. Avaliamos que a constituição dos grupos I e II revelou-se um procedimento interessante, pois nos permitiu observar, por exemplo, que os professores (integrantes do grupo II), para falar das possibilidades do trabalho com as demonstrações formais, sempre se basearam em sua prática docente e em suas experiências como alunos da Educação Básica ou do Ensino Superior. Esta era uma de nossas hipóteses ao conceber a pesquisa e não foi por menos que optamos por chamar os relatos desse grupo de “a fala da prática”.

Apesar dessa pressuposição, não consideramos esse grupo de entrevistados como pertencentes, exclusivamente, à esfera da prática, uma vez que compartilhamos do princípio de que o professor também faz teoria. Ou seja, o professor que analisa sua prática e a modifica está fazendo pesquisa, pois ao teorizá-la produz conhecimento para si mesmo (D’Ambrósio, 1989). A pesquisa, assim, representaria o *elo entre a teoria e a prática*.

No entanto, os educadores matemáticos entrevistados (grupo I) pouco se reportaram às próprias experiências como professores da Educação Básica – seis desses educadores trabalharam, inclusive, como professores de Matemática do Ensino Fundamental ou Médio. Ao considerar esse grupo como “fala da teoria” supúnhamos que em alguns dos depoimentos dos participantes iriam ser incluídos relatos das suas vivências como professores que ensinaram provas a adolescentes e jovens.

É possível que as considerações feitas por esses pesquisadores já fossem síntese de suas próprias experiências com o ensino de provas e das teorias da Educação Matemática. Como não indagamos sobre suas práticas, não nos cabe fazer outras conjecturas a respeito das possíveis razões de quase não haver referências a elas nos depoimentos.

É interessante observar ainda, que os relatos desses pesquisadores sempre se referem às diretrizes, pressupostos e pesquisas concernentes aos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, amplamente discutidos – não necessariamente aceitos – pela comunidade de educadores matemáticos a que fizemos referências em capítulos anteriores.

A seguir, apresentamos as nossas considerações finais sobre a importância das provas nos currículos da Educação Básica e da Formação de Professores.

1 As provas e sua importância na formação dos alunos da Educação Básica

Norteados por nossas inquietações sobre provas na Educação Básica, tendo em vista seu atual abandono nos currículos praticados e levando em conta a tendência de valorização deste tema por recentes currículos prescritos e por algumas pesquisas – não brasileiras –, procuramos investigar e para tal, fizemos as indagações:

- *"É desejável e possível desenvolver um trabalho com demonstrações nas aulas de Matemática em escolas de Educação Básica? Em caso afirmativo, qual deve ser o significado desse trabalho?".*
- *"Como professores da Educação Básica interpretam produções de "prova" de alunos do Ensino Fundamental e as avaliam?"*

A busca de repostas a essas questões incluiu análises de currículos prescritos – atuais ou não –, revisão bibliográfica e entrevistas com os dois grupos de professores e nos permite formular as seguintes conclusões:

➢ **Há consenso sobre a importância das provas nas aulas de Matemática da Educação Básica.**

Pode-se afirmar que há um consenso a respeito da pertinência e importância de desenvolver um trabalho com provas nas aulas de Matemática da Educação Básica.

Os estudos referenciados indicam, de modo geral, que a não-proposição de provas nas aulas de matemática pode significar erro de representação do papel e da natureza da prova na Matemática. Além disso, sugerem que essa ausência pode privar os alunos de uma educação mais ampla.

Compartilhamos desse princípio, uma vez que um dos objetivos fundamentais do ensino da Matemática na Educação Básica, segundo nosso entender, é proporcionar aos alunos situações que lhes permitam adquirir uma compreensão viva do que é a Matemática. Assim, a importância da prova neste processo está, a priori, estabelecida. Ou seja, se pretendemos que os estudantes experimentem e interiorizem uma característica essencial da Matemática, não podemos supor um ensino sem prova, pois estes estão intrinsecamente relacionados.

Assim, nossa pesquisa indica a importância da inserção do aluno na cultura Matemática de forma bastante ampla, principalmente na perspectiva de seus valores. Ou seja, deve-se levar em conta na elaboração do currículo de uma disciplina o “princípio da representatividade” da área do conhecimento que lhe corresponde, conforme assinala Bishop (1991). Ao nosso ver, o desenvolvimento de provas matemáticas pode ser uma importante contribuição para a representatividade da área e riqueza do currículo.

Parece ser também essa a preocupação dos currículos que analisamos. Mas estes acrescentam uma outra justificativa: a prova seria um fator necessário para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Os mesmos argumentos são utilizados por nossos entrevistados para defender a inclusão das provas nas salas de aula.

Consideramos necessário reiterar que os motivos pelos quais as provas, rigorosas ou não, devem estar presentes nos currículos de Matemática da Educação Básica não se resumem apenas ao fato de que demonstração é a essência da Matemática. É fundamental olhar a relação prova-Educação Matemática sob outras perspectivas, não exclusivas, tais como: cognição, práticas argumentativas, ambientes informatizados.

Convém, todavia, ressaltar que encontramos muitas preocupações com a forma pela qual poderia ser desenvolvido o trabalho com provas no Ensino Fundamental e Médio e até que ponto ele deveria atingir. Dever-se-ia chegar às provas rigorosas?

- **Há necessidade de ampliar o significado de prova, para trabalhar com ela nas aulas de Matemática na Educação Básica**

Já afirmamos que houve em nossa pesquisa uma grande convergência a respeito da importância da prova nas aulas de Matemática em escolas de Educação Básica. Todavia, encontramos argumentos bastante convincentes dos nossos entrevistados e, em especial do grupo dos educadores Matemáticos, sobre a necessidade de impor limites ao desenvolvimento de provas, essencialmente pela sua intrínseca dificuldade e pela conseqüente falta de motivação de alunos e professores em realizá-lo.

Para esses pesquisadores e professores, a inclusão de provas no currículo das escolas não é uma tarefa fácil. Pode-se até falar que há, em geral, certo desânimo quanto às possibilidades de sucesso no processo de ensino e aprendizagem de provas rigorosas.

As explicações para esse aparente fracasso são diversas e algumas se centram na difícil transição das argumentações para as provas formais. As pesquisas que estudaram essa relação, mesmo sendo desenvolvidas sob diferentes perspectivas, concordam que ela é complexa. Para alguns pesquisadores, o raciocínio dedutivo é essencial para a aprendizagem da Matemática, mas exigiria uma organização diversa do discurso argumentativo usado na linguagem natural e em outras áreas do conhecimento (Duval, 1999). Este motivo explicaria uma dificuldade do aprender a provar.

A dificuldade relacionada com as provas nas escolas realmente preocupa os educadores matemáticos. Já salientamos que no 10º ICME, realizado em Copenhagen, 2004, dois grupos de trabalho cujo tema era “Reasoning, Proof and Proving in Mathematics Education”, se propuseram a – dentre outras tarefas –, organizar pesquisas que tratam da prova no currículo escolar, e, em especial aquelas que investigam se é possível superar as dificuldades, tão freqüentemente descritas pelos professores, quando introduzem provas em suas aulas.

Os currículos de Matemática prescritos no Brasil, por nós analisados, também concordam com a dificuldade do ensino de provas. As indicações desses documentos – antigos e mais recentes – para o ensino desse tema, são bastante parecidas. Todavia, o fazem sob diferentes perspectivas.

Os nossos currículos, anteriores à década de sessenta, tinham como pressuposto a impossibilidade de se ensinar Matemática sem incluir as demonstrações e, por este motivo elas estariam de fato presentes na sala de aula.

Em virtude disso, faziam recomendações de prudência, uma vez que esse trabalho poderia desmotivar os alunos como decorrência, principalmente, de sua dificuldade. Esses currículos sugeriam, inclusive, um trabalho experimental precedendo o formal.

Os mais recentes currículos de alguns países pretendem resgatar a importância das provas e implementá-las, visto que esse assunto foi sendo cada vez menos enfatizado nas salas de aula. Os currículos brasileiros também fazem indicações nesse sentido, embora de maneira bem mais tímida. Consideram que deve haver prudência, para não repetir erros passados, sugerindo também um trabalho com as provas empíricas. Todavia, não assumem claramente se se deve chegar às provas formais na Educação Básica, contrariamente à posição dos antigos currículos brasileiros e a dos atuais de outros países como França e Inglaterra.

Assim, não há consenso sobre a necessidade de incluir a prova nas escolas em seu sentido mais estrito. Todavia, todos parecem considerar que as possibilidades desse trabalho são grandes se o significado de *prova* for tomado em seu sentido mais amplo, ou seja se o desenvolvimento desse tema incluir, necessariamente, as verificações empíricas. Obter-se-ia assim, por exemplo, uma estratégia didática para a compreensão de proposições e propriedades a serem exploradas pelo professor.

Concluímos nesta pesquisa que os participantes, sobretudo os educadores matemáticos estão preocupados com a questão da possibilidade de sucesso das provas nos currículos. Segundo eles, trata-se de conhecimento necessário à formação do aluno, pois é essencial na cultura matemática e favorece o desenvolvimento de um tipo especial de raciocínio – o dedutivo.

Tanto os estudos referenciados quanto nossos entrevistados – pesquisadores e educadores – estão preocupados com a acessibilidade dos currículos das escolas, ou seja, os conteúdos curriculares não podem estar fora das capacidades intelectuais dos alunos sendo necessário, portanto, pensar e pesquisar alternativas para superar dificuldades e chegar, inclusive às provas formais.

Muitos desses estudos referenciados parecem compartilhar de um princípio que também consideramos como necessário para os currículos: estes devem ter como meta, além de outras, o nível formal da cultura Matemática e para tal, deve-se trabalhar as conexões com o nível informal e oferecer, inclusive, introdução ao nível técnico.

- **O ensino da prova deve ser desenvolvido como processo de questionamento, de conjecturas, de contra-exemplos, de refutação, de aplicação e de comunicação.**

Reiteramos que, a despeito da grande dificuldade de introduzir e desenvolver provas na Educação Básica, muitos educadores matemáticos e pesquisadores, inclusive aqueles que entrevistamos, defendem esse trabalho. Todavia, os professores de Matemática desses níveis de ensino, participantes desta pesquisa, acreditam que as provas, mesmo sendo importantes, estariam destinadas apenas a uma parcela de alunos – os mais privilegiados e talentosos para a Matemática. Declaram, assim, que prova não é para todos.

Encontramos neste estudo, seja por parte das pesquisas analisadas, seja por parte dos entrevistados, a defesa de um enfoque heurístico para desenvolver esse tema nas salas de aula, ou seja, um tratamento que encare a demonstração como argumentação convincente e como meio de comunicação com os alunos, afastando-os de uma apresentação meramente dogmática do conteúdo.

Nesse sentido, alguns dos educadores entrevistados chegaram a aludir que os processos sociais influentes no “convencimento” dos matemáticos sobre a exatidão de novos teoremas se reproduziriam na relação entre professor e alunos. Para estes pesquisadores, é necessário que a demonstração na sala de aula não só valide, mas também explique as etapas envolvidas no processo. Se o processo de validação confirma que o teorema é verdadeiro, é a explicação que elucida para os alunos o porquê deste fato.

Para alguns de nossos entrevistados, os professores deveriam preferir as demonstrações que explicam àquelas que somente validam. Estes parecem compartilhar a posição de Hanna (1990) que considera que nem todas as demonstrações têm o poder de explicar e alerta que abandonar as demonstrações apenas “validativas” em favor das explicativas (e validativas) não tornaria o currículo menos refletor da prática matemática aceita.

Alguns dos educadores matemáticos participantes desta pesquisa alegam que é necessário elaborar situações nas quais os alunos sintam necessidade de validar suas conclusões. Esses pesquisadores parecem concordar com o “princípio da necessidade” proposto por Harel e Sowder (1998), pois essa abordagem poderia favorecer a construção de uma argumentação e a partir daí mostrar ao aluno a importância e a necessidade de uma demonstração.

Assim, as demonstrações poderiam motivar e elucidar as dúvidas dos estudantes. Evidentemente, esses estudiosos não querem dizer que a simples adoção desse princípio fará os alunos construírem uma prova rigorosa.

Nossos entrevistados parecem também compartilhar das idéias de Healy e Hoyles (2000), segundo as quais, é importante que os alunos façam, freqüentemente, ensaios e verificações empíricas de uma dada proposição, quando sua demonstração não os convencer de imediato.

Assim, os educadores matemáticos desta pesquisa consideram importante que o trabalho com provas seja inserido em um movimento que caracterizaria a atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de busca, de questionamento, de conjecturas, de contra-exemplos, de refutação, de aplicação e de comunicação. Para estes, a prova na Educação Básica teria um sentido mais alargado e não incluiria necessariamente o status de rigorosa.

Os professores da Educação Básica que entrevistamos, apesar de considerarem que provas deveriam constituir conteúdo a ser tratado apenas com os mais talentosos, chegaram a propor um caminho que culminaria nas provas rigorosas: esse processo deveria começar pela informalidade, depois passar pelas provas "semi-formais" antes de se propor as "formais".

Em relação a esse processo, é importante observar que um dos critérios de análise de livros didáticos do plano nacional do livro didático do MEC é justamente verificar a existência ou não de articulação do trabalho com as verificações empíricas de teoremas e as respectivas demonstrações. Desse modo, existem no mercado brasileiro algumas publicações propondo caminhos para a construção da inferência e dedução matemática desde o Ensino Fundamental.

2 A ressignificação da prova na Educação Básica

Os pontos destacados no item anterior permitem formular como conclusão que a prova deve fazer parte da formação dos alunos da Educação Básica, desde que o significado a ela atribuído seja ampliado e que se caracterize por um processo de busca, de questionamento, de conjecturas, de contra-exemplos, de refutação, de aplicação e de comunicação e não com o sentido formalista que a caracterizou nos currículos praticados em outros períodos. No entanto, essa concepção não significa que não se possa discutir com os alunos algumas demonstrações rigorosas. Pelo contrário, essa discussão é desejável.

Levar em conta esses princípios, seria o que estamos denominando de ressignificação da prova na Educação Básica. Assim, nesse processo é fundamental, evidentemente, explicitar significados anteriores e propor novos.

Com tal preocupação e buscando contribuir para as discussões sobre a prova, organizamos alguns quadros, cada um deles inspirado numa concepção dominante num dado momento histórico, buscando identificar quais são as variáveis que interferem na ressignificação da prova.

- **A prova em uma abordagem teoricista**

Esta abordagem foi predominante no período que precede a Matemática Moderna e também durante a implementação desse movimento. As organizações didáticas teoricistas sustentavam-se numa concepção que coloca ênfase nos conhecimentos matemáticos acabados e que deixa entre parênteses a atividade matemática, destacando o produto final dessa atividade. Baseavam-se no seguinte silogismo: dado que as teorias matemáticas se deduzem por canais dedutivos a partir de um conjunto de axiomas trivialmente verdadeiros, em que apenas figuram termos perfeitamente conhecidos, ensinar matemática é mostrar teorias e o processo de ensinar e aprender matemática deveria ser um processo trivial.

No entanto, os dados disponíveis contradizem essa conclusão, pois no ensino em que predominava o teoricismo, os estudantes apresentavam grandes dificuldades em utilizar adequadamente um teorema, aplicar uma técnica ou comprovar se um objeto matemático atende ou não às cláusulas de uma definição.

Para o teoricismo, que identifica o ensinar e aprender Matemática com ensinar e aprender teorias, o processo didático começa e praticamente acaba, no momento em que o professor ensina (explica/apresenta) as teorias aos alunos.

O quadro a seguir organiza os aspectos supracitados:

<table>
<tr><td colspan="3">Pressuposto(s): dado que as teorias matemáticas se deduzem por canais dedutivos a partir de um conjunto de axiomas trivialmente verdadeiros em que apenas figuram termos perfeitamente conhecidos, ensinar matemática é mostrar teorias</td></tr>
<tr><th>Professor</th><th>Aluno</th><th>Saber Matemático</th></tr>
<tr><td>Apresenta a teoria e as demonstrações - quase sempre formais - de teoremas e propriedades. Eventualmente, discute os diferentes tipos de demonstrações e explica procedimentos.</td><td>Deve ser capaz de compreender e reproduzir as provas apresentadas pelo professor.</td><td>A prova é vista como um “conteúdo” inerente à Matemática e assim, ocupa espaço importante no currículo.
Não é concebível um ensino sem a apresentação de provas rigorosas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Constatações: os estudantes apresentavam grandes dificuldades em utilizar adequadamente um teorema, aplicar uma técnica ou comprovar se um objeto matemático atende ou não às cláusulas de uma definição.</td></tr>
</table>

- **A prova em uma abordagem procedimentalista**

Os pressupostos dessa abordagem começaram a ganhar mais força com os movimentos de re-orientação curricular iniciados no fim dos anos setenta, com o declínio da Matemática Moderna.

Caracterizam este modelo as formas de organizar o estudo dos conceitos e procedimentos matemáticos que têm como principal objetivo do processo didático, o domínio de sistemas estruturados de técnicas heurísticas (no sentido de não algorítmicas).

Toma-se como premissa o fato de que o aluno aprende fazendo e o modelo de Matemática que se privilegia é o da Matemática Aplicada, tendo como método a Resolução de Problemas. Entretanto, esse método é utilizado como uma estratégia didática a ser encaminhada para que o aluno chegue a dominar sistemas estruturados de técnicas matemáticas ou padrões de resolução no sentido de Polya (1978). Este ponto de vista implica necessariamente trabalhar com “classes de problemas”.

Tendo em vista tais princípios, o papel das provas nessa abordagem fica restrito, uma vez que a linguagem e as estruturas internas da Matemática não são valorizadas. Nessa concepção, os processos de validação são obtidos quase que exclusivamente por verificações empíricas, por representações. Todavia, segundo essa perspectiva, os alunos são estimulados a procurar exemplos e contra-exemplos e a validar suas conclusões.

Nessa abordagem, não há preocupação com um trabalho que se desenvolva no sentido de produzir provas mais rigorosas. Ainda que o professor se propusesse, eventualmente, a realizar esse trabalho, é possível que o aluno não se sentisse estimulado a provar algo que ele já validou experimentalmente.

O quadro a seguir explicita aspectos dessa abordagem:

<table>
<tr><td colspan="3">Pressuposto(s): No processo de ensino e aprendizagem predomina a exploração de jogos ou de situações-problema, quase sempre do cotidiano ou de ciências empíricas. Nessa visão, a “prova rigorosa” deixa de ter lugar no currículo, é vista como formalismo desnecessário e é substituída por experiências em que as teses matemáticas são constatadas, quase sempre, experimentalmente.</td></tr>
<tr><td>Professor</td><td>Aluno</td><td>Saber Matemático</td></tr>
<tr><td>Sistematiza procedimentos de validação como as experimentações e uso de materiais concretos e de apoios visuais.
Seleciona, organiza e apresenta situações para a validação ou refutação por parte dos alunos.</td><td>Deve recorrer aos procedimentos de validação como experimentações, uso de materiais, representações.
Deve ser capaz de fazer induções a partir das experimentações.</td><td>São apresentadas demonstrações locais, com suporte em supostas evidências. Materiais concretos e apoios visuais são utilizados para a validação.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Constatações: ao verificar que uma dada proposição é válida numa situação particular, especialmente quando se tem apoio de recursos visuais, o estudante não compreende a necessidade e o valor de uma prova rigorosa.</td></tr>
</table>

- **A prova em uma abordagem construtivista**

Os pressupostos dessa abordagem, de certo modo, convivem com as abordagens procedimentalistas ao longo dos anos 80 e 90. No entanto, essa abordagem relaciona, funcionalmente, duas dimensões diferentes da atividade matemática: o momento exploratório e o momento tecnológico-teórico, dando grande importância ao papel da atividade de resolução de problemas, mas na perspectiva de instrumento da gênese de conceitos.

Segundo essa abordagem, o processo de ensino e de aprendizagem prioriza muito mais o processo da obtenção do conhecimento que o próprio produto. Assim, a principal finalidade do ensino da matemática é de natureza formativa.

Adotando tais princípios, o papel das demonstrações pode ter certo destaque. Numa abordagem construtivista, consideramos que o processo de ensino e aprendizagem das provas, deve levar em conta o “fazer” do matemático: levantamento de conjecturas, exemplos, contra-exemplos, provas empíricas, refutações e depois, a sistematização e validação no âmbito de um sistema.

Assim, esse trabalho com as provas caminharia para as provas formais tendo em vista que nessa abordagem é importante aprender a aprender e a desenvolver o pensamento lógico formal.

O quadro a seguir explicita aspectos dessa abordagem:

<table>
<tr><td colspan="3">Pressuposto(s): O conhecimento matemático que se deseja é aquele que favorece a compreensão e a utilização da prova de forma compatível com o desenvolvimento cognitivo do aluno. Aprender matemática, nessa perspectiva, é um processo de construção de conhecimentos que se leva a cabo mediante a modelização de uma situação particular, mas que deve ter como culminância a validação dessa solução particular, dentro de um sistema mais amplo, que podemos denominar “sistema matemático”.</td></tr>
<tr><td>Professor</td><td>Aluno</td><td>Saber Matemático</td></tr>
<tr><td>É um instigador para que o aluno procure validar e justificar suas resoluções.
Compreende que as argumentações baseadas em experimentações particulares é um caminho possível para se adquirir competências referentes à prova. Procura conduzir o aluno para justificativas mais formais .
Sistematiza e reorganiza os conhecimentos.
Desenvolve trabalhos em micro-mundos.</td><td>É instigado a formular explicações, argumentos, que podem emergir do “empirismo singelo” ou de “experiências cruciais”.
Deve formular conjecturas, buscar exemplos e contra-exemplos.
Dada uma proposição, ele deverá lançar-se na busca de contra-exemplos para refutá-la, ou então procurar argumentos, não apenas empíricos, para validá-la.</td><td>A observação e a experimentação são importantes na construção do conhecimento matemático, mas os resultados devem ser validados pelo aluno.
A validação deve caminhar para argumentos mais “formais”. Pode-se “não chegar” à prova rigorosa de uma dada proposição.
Esses resultados devem ser sistematizados e reorganizados com os anteriores.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Previsão: é possível que um trabalho que considere esta abordagem construtivista, aqui descrita, estimule o aluno a construir a necessidade de provar no interior de um sistema e também atitudes como a busca pela refutação de um resultado. Todavia, não se pode esperar que a transição do trabalho baseado em observação e experimentação para a sistematização no interior de uma teoria seja um processo linear e simples</td></tr>
</table>

Esta proposição de abordagem da prova, que denominamos *construtivista*, está evidentemente alicerçada nos resultados desta pesquisa. Acreditamos que ela seja importante para auxiliar o professor da Educação Básica em suas escolhas metodológicas para ensinar o conteúdo matemático, e em especial os temas que envolvem provas – rigorosas ou não.

3 As provas e sua importância na formação inicial e continuada de professores de matemática

Tendo investigado o papel das provas na formação dos alunos da Educação Básica e concluído positivamente em relação à sua inclusão nos projetos curriculares de Matemática das escolas, surge como conseqüência natural a necessidade de analisar como as provas devem ser integradas aos cursos de formação inicial e continuada de professores.

Pires (2000) destaca que embora “formação de professores” e “inovações curriculares” sejam temáticas que mantêm estreita relação entre si, nem sempre têm sido discutidas de forma articulada, o que, em certo sentido, ajuda a explicar, por um lado, a dificuldade de implementação de propostas curriculares quando não se leva em conta que tipo de formação e experiência têm os professores que vão colocá-las em prática e, por outro, a dificuldade de se desenvolver projetos mais consistentes de formação de professores quando não há clareza quanto ao tipo de profissional que se deseja formar para atender às novas demandas que se colocam.

A esse respeito, essa pesquisadora cita que Garcia (1998) defende a necessidade de integrar a formação de professores em processos de mudança, inovação e desenvolvimento curricular, destacando que o fato de os professores estarem preocupados com as inovações curriculares, constitui um ambiente favorável à formação.

Escudero (1992), citado por Garcia, também destaca que a formação deve estar preferencialmente orientada para a mudança, ativando reaprendizagens nos sujeitos e na sua prática docente, que, por sua vez, deve ser facilitadora de processos de ensino e de aprendizagens dos seus alunos.

Relativamente aos processos de formação de professores, as conclusões de nossas investigações são as descritas na seqüência:

- **As concepções e crenças que os professores têm sobre o trabalho com provas na educação básica funcionam como obstáculos à implementação de propostas inovadoras.**

Mesmo considerando que nossos entrevistados do grupo II, são professores da Educação Básica, têm boa formação em termos matemáticos (formados em universidades públicas e comunitárias) e têm razoável experiência com o ensino de provas, pudemos identificar, por meio da atividade proposta crenças e concepções dos professores, que podem influenciar, sobremaneira, suas práticas docentes e interferir no processo de ensinar provas.

Certamente, para formar-se professor de Matemática, um indivíduo precisa estudar, pelo menos, quatorze anos em um ambiente bastante parecido com aquele em que irá trabalhar. Nesse percurso ele vai “construindo” crenças a respeito do processo de ensino e de aprendizagem da Matemática e em particular do de provas.

Segundo Tardif e Raymond (2000) algumas crenças, construídas ao longo de sua vida escolar, permanecem estáveis mesmo após a formação inicial. Talvez essas crenças possam explicar algumas posições aparentemente contraditórias entre os depoimentos referentes à primeira questão de pesquisa e as respostas a essa atividade. Esses docentes não acreditam, por exemplo, que o processo do ensino de provas pode ser um meio rico para fazer Matemática na sala de aula, pois esse trabalho estaria restrito a poucos estudantes. Entretanto, propõem um caminho para se chegar às demonstrações formais nas escolas. Para justificar esse ponto de vista, todos lembraram de suas experiências com demonstrações, quase sempre negativas, quando alunos da Educação Básica e da Licenciatura.

A análise que fizeram das produções que lhes foram apresentadas e as notas que atribuíram a elas nos mostraram uma tensão: suas falas oscilaram entre aceitar e classificar como ótima e criativa uma “prova empírica” e a não-aceitação desta, por não ser, de fato, uma prova matemática, ou seja, por não ser uma prova rigorosa. Isso foi comum a todos os professores: na análise de outra demonstração o professor voltava a elogiar a “experimentação” para, em seguida, negar novamente esse tipo de iniciativa. Essa tensão foi percebida em todos os depoimentos. Como explicar essa oscilação de opiniões?

Certamente as crenças e as concepções dos professores podem justificar essa tensão, pois se por um lado foram moldados pela concepção dos matemáticos profissionais, que denominamos de técnica, por outro, são professores que se fizeram na prática: sabem reconhecer a iniciativa do aluno e a valorizam. Professores que são, expressaram alegria ao ver as provas: consideraram a maioria como interessantes e criativas.

Esses docentes valorizaram sobremaneira a atitude do aluno em lançar-se à busca de soluções para a prova solicitada. No entanto, atribuíam notas baixas e alegavam, quase sempre, que essas não poderiam ser mesmo altas pois aquela não seria uma prova - o que contrariava o discurso inicial.

- **Na formação de professores a inserção de provas deve se dar tanto no rol de conhecimentos substantivos e sintáticos como no rol dos conhecimentos pedagógicos e curriculares**

Conforme discussão no capítulo anterior, os nossos entrevistados apresentam diversas justificativas para a importância do desenvolvimento de provas rigorosas nas disciplinas da licenciatura. Elas seriam necessárias para aprender mais Matemática, por serem essenciais no fazer e comunicar Matemática e por serem parte integrante da cultura dessa área do conhecimento.

Nossos entrevistados – pesquisadores e professores – consideram que o estudante da Licenciatura em Matemática deve aprender a demonstrar, ainda que ele não vá futuramente desenvolver provas em suas aulas, pois o professor precisa construir conhecimentos além daqueles que vai ensinar – denominados por alguns de “estoque suplementar”.

Os professores da Educação Básica utilizaram um argumento que não esteve presente nos depoimentos dos educadores matemáticos: um professor de Matemática que sabe demonstrar os teoremas e as fórmulas concernentes aos conteúdos que vai ensinar, pode assumir liderança entre seus pares. Além disso, esses pesquisados, relatam o status conferido por professores às licenciaturas que enfatizam as provas rigorosas: o de um ótimo curso, independente se este prepara, ou não, o estudante para a carreira docente.

Um consenso obtido de ambos os grupos de entrevistados foi a necessidade de serem desenvolvidos na Licenciatura em Matemática conteúdos tradicionalmente prescritos para o Ensino Médio, de modo a aprofundar os temas e não na simples perspectiva de revisão. Para esses grupos, a excelência desse trabalho poderia ser obtida pelo uso da linguagem formal e das demonstrações rigorosas, pois desse modo os estudantes teriam subsídios para sua futura ação docente, adquirindo, assim, um "estoque suplementar" de conhecimentos.

Outro consenso relaciona-se com a maneira pela qual os futuros professores devem estudar as provas em seu curso de formação inicial: vivenciar no curso situações análogas àquelas que irão desenvolver com seus alunos. Como todos consideram que a prova na Educação Básica deve ser considerada em seu sentido mais largo, a licenciatura deveria também adotar esse sentido. Isto não apenas porque os estudantes irão futuramente ensinar, mas também na perspectiva de aprender a demonstrar e desenvolver, assim, o raciocínio lógico-dedutivo.

A síntese apresentada no capítulo anterior sobre as finalidades, objetivos e métodos mostrou que a prova nos cursos de Licenciatura em Matemática deve ser considerada como

- ferramenta a ser tratada nas diversas disciplinas do curso (para validar, explicar, refutar, apresentar teorias) e como tema importante para estabelecer conexões entre os temas matemáticos (problemas históricos, relações entre conteúdos), ou seja na perspectiva da compreensão e aprofundamento de conceitos e procedimentos.
- elemento característico e imprescindível da Matemática, como elemento sintático, independente de conteúdos particulares, ou seja, na perspectiva de um tema transversal, mas que em dado momento ela – a prova – seria tematizada em si mesma (caberiam discussões sobre os

tipos de prova aceitos pelos matemáticos, a linguagem, os termos utilizados, características dos sistemas axiomáticos, noções de lógica, da modificação da noção de rigor ao longo da história).

- tema que irá se constituir em conteúdo de ensino, ou seja em sua perspectiva pedagógica (objetivos específicos, exemplos e contra-exemplos, analogias, representações, situações-problema que necessitam de validação, resultados de pesquisas do ponto de vista da didática, seqüências didáticas).
- aspecto importante de um currículo de Matemática, ou seja em sua perspectiva curricular (caberiam discussões acerca da natureza e características do conhecimento matemático, do papel das provas nas aulas de Matemática, organização e estruturação de materiais – a questão da prova na informática, análises de livros didáticos)

Assim, nossa pesquisa mostra que as demonstrações nos cursos de formação de professores do ensino básico devem ter um enfoque bem mais amplo do que tem sido dado. Essa amplitude pode ser alcançada se os cursos não utilizarem as provas apenas para aprender mais Matemática ou com o objetivo de desenvolver o raciocínio matemático, mas também em sua perspectiva didática, curricular e histórica. Uma das possibilidades seria, por exemplo, refletir sobre a “evolução” do pensamento matemático, no qual se inclui a demonstração, indispensável à Matemática.

- **A prova como conhecimento substantivo e sintático**

Nos depoimentos de nossos entrevistados, sobre a inclusão das provas no curso de formação de professores, identificamos algumas justificativas que se referem a um tipo de conhecimento, por nós classificado como “conhecimento substantivo” do conteúdo (Shulman, 1986).

Em nosso entender, conhecer provas na perspectiva de conhecimento substantivo significa que o professor deve possuir um conjunto suficiente de conhecimentos, que lhe dê autonomia intelectual sobre esse tema. Essa autonomia significa, por exemplo, não apenas conhecer as demonstrações dos teoremas e fórmulas que irá desenvolver futuramente, mas também ter a capacidade de selecionar e organizar tais teoremas e respectivas aplicações. Saber diferenciar o que é importante daquilo que é secundário. Ele precisa, sobretudo, saber problematizar as demonstrações de modo a integrá-las ao assunto que está desenvolvendo. Para isso, ele precisa ser mediador entre os conhecimentos produzidos historicamente e aquele que será apropriado pelos alunos.

Esse domínio, em que pese sua grande importância, não é suficiente para o professor ter pleno conhecimento sobre provas, pois é necessário ter também domínio do conhecimento sintático desse conteúdo, ou seja, suas regras e processos. Assim, o professor deveria conhecer os tipos de prova aceitos pelos matemáticos e dominar a linguagem específica – ainda que não vá utilizá-la. Deveria saber, por exemplo, comparar procedimentos utilizados para demonstrar um teorema da Geometria e outro da Álgebra – o que têm em comum, no que diferem?

Ter um conhecimento sintático e substantivo sobre provas e demonstrações significa também fazer uma reflexão epistemológica sobre esse tema, pois a forma como conhecemos e concebemos os conteúdos de ensino – no caso a prova – influencia, sobremaneira, o modo como os problematizamos e os desenvolvemos nas salas de aula.

- **A prova como conhecimento pedagógico**

A análise dos depoimentos dos dois grupos participantes desta pesquisa, quando interrogados sobre provas e formação de professores, nos permitiu identificar justificativas que se referiam ao conhecimento didático sobre provas.

Ao descrever os conhecimentos citados pelos sujeitos de nossa pesquisa, como necessários ao professor, achamos conveniente aproveitar a categoria utilizada por Schulman (1986): conhecimento pedagógico do professor. Este autor, embora reconheça que há conteúdos pedagógicos gerais, que não estão necessariamente atrelados aos conteúdos de ensino, declara que o professor deve ter conhecimentos pedagógicos do assunto que ensina.

Assim, há um conhecimento pedagógico sobre as provas na Educação Básica, que o professor deve ter, visto que poderá vir a ensinar provas. Todavia, destacar esse conhecimento como necessário e apartado dos demais, não significa que pretendemos separá-lo do específico. Tanto é verdade que, na caracterização do conhecimento substantivo do professor, apresentado no item anterior, é possível identificar claramente a relação entre esses conhecimentos.

Assim, pertenceriam a esse domínio os conhecimentos importantes para o ensino das provas: exemplos e contra-exemplos, analogias, representações, aplicações dos teoremas, escolhas de situações-problema que necessitem de validação. Nesse domínio estaria a habilidade dos professores em compreender todas as exigências cognitivas da demonstração.

- **A prova como conhecimento curricular**

Também foi possível identificar dentre os conhecimentos sobre demonstrações, necessários ao professor de Matemática, indicados pelos participantes desta pesquisa, aqueles que se referem ao conhecimento do papel da prova em uma perspectiva curricular.

Incluímos esses conhecimentos na categoria – conhecimento curricular – descrita por Shulman (1986) que trata dos conteúdos conexos à disciplina que se ensina e que compreende a organização e estruturação dos saberes escolares e dos respectivos materiais.

No caso específico das provas, estariam incluídos nessa categoria, todos os conhecimentos relativos às discussões sobre o papel e sobre os objetivos das demonstrações no currículo de Matemática e também os referentes à organização e estruturação de materiais por meio dos quais se exploraria esse tema: escolhas de softwares, livros didáticos, análise de currículos.

Consideramos os conhecimentos relacionados a essa categoria como necessários desde a formação inicial, pois os futuros professores devem desenvolver a capacidade de fazer articulações horizontais e verticais do conteúdo a ser ensinado e estudar a história da evolução curricular desse conteúdo. Precisam também, não apenas saber onde encontrar subsídios para desenvolver sua disciplina, mas também “aprender” a ler os documentos oficiais. Compreender, por exemplo, resultados de pesquisas que tratem das demonstrações.

Acreditamos, assim, ser necessário que nos cursos de formação de professores os estudantes compreendam que existem diferentes abordagens para o ensino das provas. A abordagem *teoricista* possivelmente seria adotada por algumas das disciplinas específicas do curso e a *procedimentalista* por outras, a depender das concepções dos docentes. Em nosso entender, seria importante que a *construtivista* fosse também adotada por alguma disciplina específica. Em todo o caso, a tematização dessas abordagens deveria ser realizada pelas disciplinas pedagógicas.

Por meio dessas abordagens os futuros professores podem construir sobre as provas *conhecimentos substantivos* e *sintáticos*, *conhecimentos pedagógicos* e *conhecimentos curriculares*. Como é desejável que os conhecimentos histórico-filosóficos também façam parte do Conhecimento do professor de Matemática, as disciplinas gerais e específicas poderiam abordá-los.

Cabe ainda salientar que a nossa discussão sobre a constituição do conhecimento profissional do professor nas três perspectivas descritas – conhecimento do conteúdo (substantivo e sintático), conhecimento pedagógico e conhecimento curricular – tem nos cursos de formação inicial, um momento muito importante e até decisivo, mas obviamente não conclusivo. Sabemos que a formação do professor para o exercício da sua atividade profissional é um processo que envolve diversas etapas – com avanços e retrocessos – e que, em última instância, está sempre – quase sempre – incompleto.

No tocante às provas é possível que o professor desenvolva competências para elaborar e desenvolver situações de aprendizagem envolvendo provas em pleno exercício de sua profissão. Ainda assim, não é possível negar que uma formação inicial de qualidade seja um aspecto muito favorável, possivelmente necessário, para o pleno desenvolvimento profissional do professor, em especial no que se refere a esse tema.

Tal fato remete à questão: estariam os cursos de Licenciatura em condições de oferecer uma formação de qualidade a um profissional que vai ensinar provas, inclusive rigorosas? Há ainda uma questão anterior a essa: ele próprio aprendeu a provar?

Mediante os dados desta pesquisa – obtidos de depoimentos de professores da Educação Básica e de pesquisadores em Educação Matemática, dos estudos referenciados, dos resultados do exame nacional de cursos – podemos responder negativamente a estas questões e em especial à primeira.

Assim, consideramos ser necessária a ressignificação das provas nos currículos de formação inicial de professores de Matemática, para que o estudante desse curso possa aprender e ensinar provas.

4 Recomendações e reflexões finais

Em nosso trabalho mencionamos e analisamos algumas pesquisas existentes sobre a prova na educação básica e pudemos constatar uma diversidade de produções. No entanto, o tema vem sendo pouco debatido tanto por professores como por formadores de professores e as pesquisas da comunidade de educadores matemáticos no Brasil, a esse respeito, são bastante raras. Estamos diante, portanto, de um universo bastante inexplorado de pesquisas e práticas.

Haveria necessidade, por exemplo, de estudos sobre as formas pelas quais os alunos se envolvem e lidam com argumentações, conjecturas e provas, além de estudos cujos objetivos sejam a investigação dos progressos dos alunos da

Educação Básica ou da Licenciatura, no desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Seria igualmente importante, investigar o desenvolvimento de provas nas diferentes áreas da Matemática nos cursos de Licenciatura.

Certamente, no que diz respeito a concepções e crenças dos professores sobre a prova, é particularmente importante o desenvolvimento de investigações, em função de idéias ainda muito presentes de que esse assunto é inacessível a grande parte dos alunos e só pode ser abordado com todos os rigores formalistas.

Lembramos os estudos de Thompson (1982) para quem, muitas das concepções e crenças manifestadas pelos professores acerca do ensino parecem refletir mais uma adesão a um conjunto de doutrinas abstratas do que uma teoria pedagógica operatória. No caso da prova essa questão é bem evidente. Essa autora nos ensina que a relação entre as concepções e as decisões e ações do professor são de natureza bastante complexa, o que torna as investigações sobre o tema, desafiadoras.

Para finalizar, destaco que o desenvolvimento desta tese de doutorado apresenta um marco significativo em minha trajetória profissional, em parte traduzido pela epígrafe que emprestei de Clarice Lispector.

O trabalho me levou a concordar com Ponte (1998) e sua idéia de desenvolvimento profissional, ou seja, a idéia de que a formação do professor para o exercício da sua atividade profissional é um processo que envolve múltiplas etapas e que, em última análise, está sempre incompleto.

Descobri novos estudos, novas teorias e construí novas idéias. Novas indagações estão presentes. Sei que compreensões nunca se esgotam, por isso minhas considerações, não são e nem poderiam ser definitivas.

Estou na fase compreendida entre os 40 e os 55 anos, caracterizada por Sikes e outros autores (1985), em seus estudos sobre estágios correspondentes a cada período etário de atuação do professor, como a fase em que os professores já se adaptaram à sua maturidade e adotaram novos papéis na escola ou no sistema educativo. Segundo esses autores, há nesta fase, professores sobre quem recaem muitas das responsabilidades e fazem-no porque acreditam que é o que devem fazer; contudo, esta reação não é igual para todos – muitos professores não se adaptam às mudanças e ficam amargurados ou muito críticos.

O desenvolvimento deste trabalho aumenta as responsabilidades na minha atuação como formador de professores e como pesquisador e me trazem o desejo de não obedecer ao que está previsto para essa faixa; ter uma postura crítica, mas não amargurada e sim propositiva, como educador matemático.

BIBLIOGRAFIA

ABBAGNANO, N. *Dicionário de filosofia*. Tradução de A. Bosi. 2. ed. São Paulo: Mestre Jou, 1982.

ABRANTES, P. *Reorganização curricular do ensino básico: Princípios, medidas e implicações.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica (DEB), 2001.

ABRANTES, P., SERRAZINA, L., & OLIVEIRA, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica (DEB).

ARSAC, G. L'origine de la démonstration: essai d'épistemologie didactique. *Récherches en Didactique des Mathématiques*, v. 8 n. 3, 1987.

Associação de Professores de Matemática (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.

BALACHEFF, N. Benefits and limits of social interaction: the case of teaching mathematical proof. In: BISHOP, A.; MELLIN-OLSEN, S.; VAN DORMOLEN, J. (Ed.). *Mathematical knowledge*: its growth through teaching. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1991. p. 175-192.

———. Is argumentation an obstacle? *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, Grenoble, n. 1, may-juin 1999.

———. *Une étude des processus de preuve en mathématiques*. Thèse d'état, Grenoble:1988.

———. Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics* 18(2) 147-176; 1987.

BALL, D. L.; BASS, H. Making believe: the collective construction of public mathematical knowledge in the elementary classroom. In: PHILLIPS, D. (Ed.). *Constructivism in education*. Chicago: University of Chicago Press, 2000.

BALL, D. L.; HOYLES, C. JANKE, H. N.; HADAR, N. M.: *The Teaching of Proof*. http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/03Printemps/teaching_proof.pdf - 14 set. 2005 Proceedings of Topic Group 8, ICME-VIII, 2000- The 8th International Congress Mathematical Educacion..

BARBEAU, E. J. *Three faces of poof. Interchange*, Toronto: OISE Press, (21): 24-27, 1990.

BARBIN, E. et al. Analyse de textes de démonstration dans des cadres théoriques différents. *Actes du colloque: Produire et lire des textes de démonstration*. 23-24 janvier 1998. Laboratoire de Didactique des Mathématiques. Université de Rennes 1: Ellipse, p.3-30, 2001.

BATTISTA, M. T.; CLEMENTS, D. H. Geometry and proof. *Mathematics Teacher*, n. 88(1), p. 48-54, 1995.

BELL, A. A study of pupils' proof – explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, n. 7, p. 23-40, 1976.

BICUDO, I. Demonstração em matemática. *Bolema* (Boletim de Educação Matemática), Rio Claro: Unesp, ano 15, n. 18, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, p. 79-90, 2002.

BICUDO, J. de C. *O ensino secundário no Brasil e sua atual legislação*: 1931 a 1941. São Paulo, [s.n.], 1942.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em educação matemática. *Pro-posições*, Campinas: Unicamp, v. 4 1(10), p. 18-23, 1993.

BISHOP, A. J. *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós. 1991

BLANCO, L.J. Y CONTRERAS, L.C. (2002). Un modelo formativo de Maestros de Primaria, en el área de Matemáticas, en el ámbito de la Geometría. En Contreras, L.C. y Blanco, L.J. *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de matemáticas*: Una mirada a la práctica docente. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.

BOAVIDA, A. M.; PONTE, J. P. Investigação colaborativa: potencialidades e problemas. In: GTI da APM (Org.). *Refletir e investigar sobre a prática profissional*. Lisboa: APM, 2002. p. 43-56.

BOERO, P. Argomentazione e dimostrazione: una relazione complessa, produttiva e inevitabile nella matematica e nella didattica della matemática. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 1999.

BOERO P.; GARUTI R.; LEMUT E. Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. Disponível em: <http://www.lettredelapreuve.it/> *International Newsletter on the teaching and learning of Mathematical Proof*. 1998. (acesso em 14 set. 2004).

BOERO, P., GARUTI R., LEMUT E., M. A. MARIOTTI. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems. *Proceedings of PME XX*, Valencia España, 1996, vol. 2, pp. 113-120.

BOERO, P.; GARUTI, R.; MARIOTTI, M. A. Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. *Proceedings of PME-XX*, Valencia, v. 2, p. 121-128, 1996.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação qualitativa em educação*. Portugal: Porto Ed., 1994.

BOURBAKI, N. *Théorie des emsembles*. Paris: Hermann, 1954. livro 1.

BOYER, Carl. *História da matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRANDÃO, Z. *Pesquisa em pós-graduação: conversas com pós-graduandos*. São Paulo; Loyola, 2002.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. *Resolução CNE/CP n. 1*. Institui Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena – DCNFP. Brasília, 18 fev. 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. *Propostas de diretrizes para a formação inicial de professores da educação básica, em cursos de nível superior*. Brasília, abril de 2001.

______. *Subsídios para a elaboração de diretrizes curriculares para os cursos de formação de professores*. Brasília, setembro de 1999.

———. *Lei Orgânica do Ensino Secundário*. Decreto-lei n. 4.244, de 9 de abril de 1942. Manuais de Legislação Brasileira.

———. Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Fundamental. *Referenciais para a formação de professores*. Brasília, 1999.

———. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais (5.ª a 8.ª séries)*. Brasília: MEC, 1998.

———. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio*. Brasília: MEC, 2000.

———. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN + Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC, 2002.

______.Secretaria da Educação Básica. *Plano Nacional do Livro Didático – PNLD* – disponível no site http://portal.mec.gov.br

BRZEZINSKI, I. (Org.). *LDB Interpretada: diversos olhares se entrecruzam*. 6.ed.São Paulo Cortez, 2001.

BYERS, V. Why study the history of mathematics education? *Science and sociology,* 13-1:59-66. 1982.

CANDAU, V. L. *Novos rumos da licenciatura*. Brasília: Inep, 1987.

CARAÇA, B. *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa, 1975.

CAVEING, M. *Le problème des objets dans la pensée mathématique*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 2004.

CHARLOT, B. Histoire de lá réforme des “maths modernes”; idées directrices et contexte institutionnel et socio-économique. *Bulletin APMEP*, IREM du Mans, França, n. 35, 1986.

———. Qu’est-ce que faire des maths? L’épistemologie implicite des pratiques d’enseignement des mathématiques. *Bulletin APMEP*, IREM du Mans, França, n. 359, 1987.

CHAUÍ, M. *Convite à filosofia*. 11. ed. São Paulo: Ática,1999.

CHAZAN, D. High school geometry students justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, n. 24, p. 359-387, 1993.

———. Quasi-empirical views of mathematics and mathematics teaching. *Interchange*, 21(1), p. 14-23, 1990.

CHEVALLARD, Y. *La transposicion didactique: du savoir savant au savoir enseigne*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985.

———; Bosch, M.; GASCÓN, J. *Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CURI, E. *Formação de professores de matemática: realidade presente e perspectivas futuras*. Lisboa: APM, 2000.

D'AMBRÓSIO, U. *Da realidade à ação*. São Paulo: Sumus; Campinas: Ed. da Universidade de Campinas, 1986.

———. Entrevista concedida a Célia Maria Carolino Pires. *Educação Matemática em Revista*, São Paulo: SBEM, ano 6, n.7, p. 5-10, jul. 1999.

———. Pesquisa como elo entre teoria e prática. *III Simpósio de Iniciação Científica em Educação Matemática*. Rio Claro: Unesp, 1989.

DAVIS, P. J. Visual theorems. Educational studies in Mathematics, *Dordrecht: Kluwer Acadêmica Publishers*, n. 24(4), p. 333-344, 1993.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. *A experiência matemática*. Tradução de João B. Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

———; ———. *O sonho de Descartes*. Tradução de Mário C. Moura. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1988.

DENCKER, A.F.M; VIÁ, S.C.; *Pesquisa empírica em Ciências Humanas*. São Paulo. Futura, 2001.

DE VILLIERS M. An alternative approach to proof in dynamic geometry. In: Lehrer, R., Chazan, D. (Ed.) *New directions in teaching and learning Geometry*, 1998. p. 369-393.

———. An alternative introduction to proof in dynamic geometry. *Micromath* 11(1) 14-19, 1995.

———. Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, a reaction. *PME XXI*, p.196-198, 1997.

———. Pupils need for conviction and explanation within the context of geometry. *Pythagoras*, n. 26, p. 18-27, 1991.

———. The role and function of proof in Mathematics. *Pythagoras*, n. 24, p. 17-24, 1990.

DIEUDONNÉ, J. Devons-nous enseigner les mathématiques modernes? *Bulletin de l'A PMEP* n. 292, fev. 1974.

———.*A formação da Matemática Contemporânea*. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1990.

DOMINGUES, H. H. A demonstração ao longo dos séculos. Bolema (*Boletim de Educação Matemática*), Rio Claro: Unesp, ano 15, n. 18, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, p. 55-67, 2002.

DOUADY, R. Jeux de quadres et dialectique outil-objet. *Recherches em Didactique des Mathématiques*, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 5-31, 1986.

DOUEK N. Argumentative aspects of proving: analysis of some undergraduate mathematics students' performances. *PME XXIII*, Haifa, v. 2, p. 273-280, 1999.

______. Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. Disponível em: <http://www.lettredelapreuve.it/> I*nternational Newsletter on the teaching and learning of Mathematical Proof*. 1998. (acesso em 10 set. 2004).

DREYFUS, T. Some views on proofs by teachers and mathematicians. In: Gagatsis, A. (Ed.) *Proceedings of the 2nd Mediterranean Conference on Mathematics Education*, Cyprus: The University of Cyprus, v. 1, p. 11-25, 2000.

DUVAL, R. *Argumenter, demontrer, expliquer: continuite ou rupture cognitive*. IREM de Strasbourg, França, n. 31, p. 37-61, 1993.

———. Ecriture et compréhension: pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves? *Actes du Colloque: Produire et lire des textes de démonstration*. 23-24 janvier 1998. Laboratoire de Didactique des Mathématiques. Université de Rennes, 1998.

———. Algunas cuestiones relativas a la argumentación. Disponível em: <http://www.lettredelapreuve.it/> *International Newsletter on the teaching and learning of Mathematical Proof.* Novembre/Décembre 1999. (acesso em 14 set. 2005.

———. Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n. 20 (2), p. 135-170, 2000.

———. Pour une approche cognitive de l'argumentation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 3, p. 195-221. Strasbourg: IREM de Strasbourg, 1990.

———. Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, n. 22(3), p. 233-261, 1991.

ESCUDERO, J. M. L. *Los Desafios da lãs Reformas Escolares*. Sevilla: Arquétipo, 1992.

EUCLIDE D'ALEXANDRIE. *Les éléments.* Tradução de Heiberg. Livros 1-4: Géometrie plane. Tradução e comentários de Bernard Vitrac. Paris: Presses Universitaires de France, 1990.

FERNANDES, D. Resolução de problemas: investigação, ensino avaliação e formação de professores. In: BROWN, M. et al. *Educação e matemática: temas de investigação*. Lisboa : Instituto de Inovação Educacional,1992. p. 45-103.

FETISSOV, A. *A demonstração em Geometria*. Tradução de Pedro Lima. Moscou: Mir, 1985.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. *Zetetiké*, Campinas: Unicamp, ano 3, n. 4, p. 1-37, 1995.

———. Saberes da experiência docente em matemática e educação continuada. *Quadrante*, Lisboa: APM, n. 8, 1999.

FIORENTINI, D. et al. Formação de professores que ensinam matemática: um balanço de 25 anos de pesquisa brasileira. *Educação em Revista – Dossiê Educação Matemática*. Belo Horizonte: UFMG, 2003.

FREUDENTHAL, H. *Problemas mayores de la educación matemática*. Versão ao espanhol de Alejandro López Yánez. Dordrecht: D. Reidel. 1981.

FUJITA, T.; JONES, K. *Interpretations of national curricula: the case of geometry in Japan and the UK*. Paper presented at the British Educational Research Association Annual Conference, Heriot-Watt University, 10-13 September, 2003.

GARCIA, C. M. Pesquisa sobre formação de professores: o conhecimento sobre o aprender a ensinar. *Revista Brasileira de Educação*, n. 9, set.-dez. 1998.

______. Formação de Professores: Para uma mudança educativa. *Coleção Ciências da Educação*. Porto Editora. Porto, 1999.

______. *A* formação inicial de professores em matemática: fundamentos para a definição de um currículo. Tradução de D. Jaramillo. In: Fiorentini, D. (Org.). *Formação de professores de matemática*. Campinas: Mercado das Letras, 2003.

GARCIA, M.; LLINARES, S. Los processos matemáticos como contenido. El caso de la prueba matemática. In: Castro, E. (editor). *Didática de la matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis Educación, 2004.

GARNICA, A. V. M. As demonstrações em educação matemática: um ensaio. *Bolema* (Boletim de Educação Matemática), Rio Claro: Unesp, ano 15, n. 18, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, p. 91-99, 2002.

———. *Fascínio da técnica, declínio da crítica*: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática. 1995. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Rio Claro: IGCE-UNESP.

GARUTI, R.; BOERO, P.; LEMUT, E. Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. *Proceedings of PME-XXII*, Stellenbosch, v. 2, p. 345-352, 1998.

GASCON, J. Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 4, Núm. 2, julio, 2001, pp. 103-128.

______. *Didáctica de la matemática*: algunas consideraciones sobre el programa epistemológico didáctica de la matemática: algunas consideraciones sobre el programa epistemológico, 1998 Disponível em: < http://www.unrc.edu.ar/publicar/. (acesso em 14 julho 2005)

GEWANDSZNAJDER, F. *O método nas Ciências Naturais e Sociais*: pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Editora Pioneira, 1998.

GODINO, J. D.; RECIO A. M. *Meaning of proofs in Mathematics education*. 1997. Disponível em: <http://www-leibniz.imag.fr / DIDACTIQUE/ preuve/ Resumes/Godino/Godino97.html>.

GÓMEZ-CHACÓN, I. M. Cuestiones afectivas en la enseñanza de las matemáticas: una perspectiva para el profesor. In: CONTRERAS, L. C.; BLANCO, L. J. (Org.). *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas*: una mirada a la práctica docente. Cáceres: Universidad de Extremadura, Servicio de Publicaciones, 2002. p. 23-58.

HANNA G. Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, n. 15(3), p. 42-49, 1995.

———. Mathematical proof. In: TALL, D. (Ed.) *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer, 1991.

———. More than formal proof. *For the Learning of Mathematics*, n. 9(1), p. 20-25, 1989.

———. Proof as understanding in Geometry. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, n. 20(2-3), p. 4-13, 1998.

———. Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, n. 21(1), p. 6-13, 1990.

———; JAHNKE N. Proof and application. *Educational Studies in Mathematics*, n. 24(4), p. 421-438, 1993.

———; ———. Proof and proving. In: BISHOP, A. et al. (Ed.). *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 877-908.

HAREL, G.; SOWDER, L. Students proof schemes. In: SCHOENFELD, A. et al (Ed.). *Research on Collegiate Mathematics*, v. 3, 1998.

HEALY, L.; HOYLES, C. A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, n. 31(4), p. 396-428, 2000.

———; ———. *Justifying and proving in school Mathematics*. University of London, Institute of Education: Technical Report, Feb. 1998.

HERSH, R. Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, n. 24(4), p. 389-399, 1993.

HOFSTADTER, D. R. Discovery and dissection of a geometric gem. In: KING, J.;SCHATTSCHNEIDER, D. (Ed.). *Geometry turned on! Dynamic software in learning, teaching, and research*. Washington: The Mathematical Association of America, 1997. p. 3-14.

HOUDEBINI, J. et al. *La demonstration écrire des Mathématiques au collège et au lycée*. Paris: Hachette, 1998.

HOYLES, C. The curricular shaping of students' approaches to proof. *For the Learning of Mathematics*, n. 17(1), p. 7-16, 1997.

HOYLES C. and JONES K. Proof in dynamic geometry contexts. In Mammana C & Villani V, (eds) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, Dordrecht: Kluwer, pp.121-128, 1998.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS – Inep. *Resultados do Exame Nacional de Cursos*, 1999 a 2002 (<www.inep.gov.br/enc>).

KILPATRICK, J.; RICO, L.; SIERRA, M. *Educación matemática e investigación*. Madrid: Síntesis, 1994.

KLEIN, F. *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Madrid, 1930. (Coleção Biblioteca Matemática.)

KLINE, M. Logic versus pedagogy. *American Mathematical Monthly*, v. 77, n. 3, Mar. 1970.

———. *O fracasso da matemática moderna*. Tradução de Leônidas G. de Carvalho. São Paulo: Ibrasa, 1976.

KNUTH, E. Teachers' conceptions of proof in the context of Secondary School Mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, n. 5 (1), p. 61-88, 2002.

LAKATOS, I. *A lógica do descobrimento matemático*: provas e refutações. Tradução de Nathanael C. Caixeiro. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

______. *Proofs e Refutations*. Cambridge University Press, 1976. Reprinted with corrections: 1981.

LEADING CURRICULUM JAPANESE SOCIETY OF MATHEMATICS EDUCATION. *Mathematics programme in Japan*. Tokyo, JSME: 2000.

LELLIS, M. C. T. *Sobre o conhecimento Matemático do Professor de Matemática*. Dissertação de Mestrado. PUC/SP, 2002.

MACHADO, N. J. *Matemática e língua materna*: análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez, 1990.

———. *Matemática e realidade*: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino de matemática. 4. ed. São Paulo: Cortez, 1997.

MANACORDA, M. A. *História da educação*: da Antigüidade aos nossos dias. Tradução de G. Lo Monaco. São Paulo: Cortez, 1989.

MARIOTTI, M. A. La preuve en Mathématique. *La Revue Canadienne de L'énseignement des Sciences, des Mathématiques et des Tecnologies*, p. 437-458, 2001.

MARTIN G.; HAREL G. Proof frames of pre-service elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, n. 20 (1), p. 41-51, 1989.

MIGUEL, A. Formas de ver e conceber o campo de interações entre filosofia e educação matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Filosofia da educação matemática*: concepções & movimento. Brasília: Plano Editora, 2003.

———. *Três estudos sobre história e educação matemática*. 1993. Tese (Doutorado) – Unicamp, Campinas.

MIORIM, M. A. *O ensino de matemática*: evolução e modernização. 1995. Tese (Doutorado) – Unicamp, Campinas.

MOLES, A. *A criação científica*. 3. ed. São Paulo: Perspectiva, 1998.

MOREIRA, D. A. *O método fenomenológico na pesquisa*. São Paulo: Pioneira, 2002.

NAGEL, E.; NEWMAN, J. R. *A prova de Gödel.* 2. ed. São Paulo: Editora Perspectiva, 2003.

NASSER, L.; TINOCO, L. A. *Argumentação e provas no ensino de matemática*. Instituto de Matemática – Projeto Fundão, 2001.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Principles and standards for school Mathematics*. Reston, VA: NCTM, 1989.

———. ———. Reston, VA: NCTM, 1991.

———. ———. Reston, VA: NCTM, 2000.

NÓBREGA, V. L. *Enciclopédia da legislação do ensino*. Rio de Janeiro, 1952.

OLIVEIRA, H. M.; PONTE, J. P. Investigação sobre concepções, saberes e desenvolvimento profissional de professores de matemática. *Atas do VII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM, 1996.

OTTE, M. *O Formal, o Social, e o Subjetivo*: uma introdução à Filosofia, e à Didática da Matemática (tradução de Raul Fernando Neto. São Paulo: UNESP, 1993.

PATRAS, F. *La pensée mathématique contemporaine*. Paris: Presses Universitaires de France, 2002.

PAVANELLO, R. M. *O abandono do ensino da geometria*. 1989. Dissertação (Mestrado) – Unicamp, Campinas.

PEDEMONTE, B. *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I, 2002.

———. Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education – PME 25*, Holanda, v. 4, p. 33-40, 2001.

PERRENOUD, P. *Construir as competências desde a escola*. Porto Alegre: Artmed, 1999.

———. *Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 2000.

PIAGET, J.;GARCÍA R. *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: Siglo XXI, 1982.

PIRES, C. M. C. *Currículos de matemática*: da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

———. Reflexões sobre Cursos de Licenciatura em Matemática, tomando como referência as orientações propostas nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores da Educação Básica. *Educação Matemática em Revista*, São Paulo, ano 9, n.11-A, edição especial, abr. 2002.

______. O que o exame nacional de cursos de matemática está avaliando? Analisando alguns aspectos das cinco primeiras edições do “provão”. *Educação Matemática em Revista*, São Paulo.14, p. 11-18, agosto. 2003.

______. Reflexões sobre os cursos de Matemática, tomando como referência as orientações propostas nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores da Educação Básica. Educação Matemática em Revista, São Paulo.v. 11A, p. 44-56. Abril.2002.

______. *O currículo como práxis. São Paulo*. PUC-SP. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Grupo de Pesquisa: A Matemática na organização curricular: história e perspectivas atuais – Projeto em andamento.

PLATÃO. *A República*. (Trad. Heloísa da Graça Muratti). São Paulo: Rideel, 2005.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Tradução de Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PONTE, J. P. Da formação ao desenvolvimento profissional. In *Actas do ProfMat* 98 (pp. 27-44). Lisboa: APM, 1998.

______. *Por uma formação inicial de professores de qualidade*. Documento de trabalho da Comissão ad hoc do CRUP para formação de professores. Lisboa, 2000.

______. A vertente profissional da formação inicial de professores de Matemática. *Revista de Educação Matemática*, São Paulo.v.11A, p 3-8. Abril. 2002.

______. *A investigação sobre o professor de matemática*: problemas e perspectivas. Conferência realizada no I Sipem – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, promovido pela SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, realizado em Serra Negra, São Paulo, Brasil, em novembro de 2000. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/>. Acesso em: 1.º mar. 2004.

———. Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. In BROWN, M. et al. (Org.). *Educação Matemática*. Portugal: Instituto de Inovação Educacional, 1992. p.185-247. (Coleção Temas de Investigação).

———. *Concepções dos professores de matemática e processos de formação*. *Educação matemática*: temas de investigação. Lisboa, 1992. p. 185-239. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/>. Acesso em: 15 nov. 2003.

———. *O desenvolvimento profissional do professor de matemática*. *Educação e Matemática*, Lisboa: APM, n. 31, p. 9-12, 1994. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/>. Acesso em: 28 ago. 2003.

———. *Por uma formação inicial de professores de qualidade.* Documento de trabalho da Comissão ad hoc do CRUP para formação de professores. Lisboa, 2000.

PROGRAMAS PARA O ENSINO SECUNDÁRIO E SUAS INSTRUÇÕES METODOLÓGICAS. *Portaria n. 1.045,* de 14 de dezembro de 1951. São Paulo, Ed. do Brasil, 1951.

REID, D. What is proof? La Lettre de la Preuve: *International newsletter on the teaching and learning of proof.* Summer 2002. Online at: http://www.lettredelapreuve.it/ Acesso em: 28 ago. 2003.

REY, F. L. G. *Pesquisa qualitativa em psicologia*: caminhos e desafios. São Paulo: Pioneira, 2002.

RICO, L. et al. Concepciones y creencias del profesorado de secundaria andaluz sobre enseñanza-aprendizaje y evaluación en matemáticas. *Cuadrante*, Lisboa: APM, 2002

ROMANELLI, O. de O. *História da educação no Brasil* (1930-1973). 8. ed. Petrópolis: Vozes, 1986.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Centro de Recursos Humanos e Pesquisas Educacionais “Prof. Laerte Ramos de Carvalho”. *Guias curriculares propostos para as matérias do núcleo comum do ensino do 1.º grau*. São Paulo, SE/CERHUPE, 1976.

———. ———. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Subsídios para a implementação do guia curricular de matemática: geometria para o 1º. Grau. 1ª. a 8ª. Séries.* (volume do professor e do aluno). São Paulo, Se/CENP, 1977.

———. ———. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Subsídios para a implementação do guia curricular de matemática: álgebra para o 1º. Grau. 1ª. a 8ª. Séries*. (volume do professor e do aluno). São Paulo, Se/CENP, 1977.

———. ———. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta curricular para o ensino de matemática*: 1.º grau. São Paulo: SE/CENP, 1988.

———. ———. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Análise dos relatórios - Proposta curricular de matemática.* São Paulo: SE/CENP, 1988.

———. ———. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta curricular para o ensino de matemática*: 2.º grau. São Paulo: SE/CENP, 1989.

SCHOENFELD, A. H. *Mathematical problem solving*. Nova York: Academic Press, 1985.

———. What do we know about Mathematics curricula? *Journal of* Mathematical Behavior, n. 13(1), p. 55-80 (1994).

SCHÖN, D. A. *Educando o profissional reflexivo*: um novo design para o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2000.

———. Formar professores como profissionais reflexivos. In: Nóvoa, A. (Coord.). *Os professores e sua formação*. Lisboa: Dom Quixote, 1992.

SENK, S. How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher*, n. 78(6), p. 448-456, 1989.

SENK S. Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(3), 309-321, 1989.

SHULMAN, L. S. "Those who understand: Knowledge growth in teaching". *Education Researcher,* vol. 15, n. 2. Fevereiro, 1986, pp. 4-14.

______. *Renewing the pedagogy of teacher education*: the impact of subject-specific conceptions of teaching. Les didácticas específicas en la formacion del profesorado. Santiago de Compostela: tortuclo, 1992.

SIKES, P. The Life Cycle of The Teacher. J. Ball and a I.F.Goodson (Eds). *Teachers'Lives And Careers*. London. The Falmer Press, 67-70, 1985.

SILVA, C. P. (Ed.) *A matemática no Brasil*: uma história de seu desenvolvimento. Curitiba: Ed. do autor, 1998.

SILVA, J. J. Demonstração matemática da perspectiva da lógica matemática. *Bolema* (Boletim de Educação Matemática), Rio Claro: Unesp, ano 15, n. 18, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, p. 68-78, 2002.

SILVA, T. R. *Conteúdo escolar e educação básica*: a experiência paulista. 1988. Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SILVA, T. T. *Currículo: teoria e história*. Apresentação. In: GOODSON, I. F. Petrópolis: Vozes, 1995.

SIMON, M. Beyond inductive and deductive reasoning: the search for a sense of knowing. *Educational Studies in Mathematics*, n. 30, p. 197-210, 1996.

SINGH, Simon. *O último teorema de Fermat*: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. Tradução de Jorge Luiz Calife. 7. ed. Rio de Janeiro: Record, 2000.

SZTAJN, P. O que precisa saber um professor de matemática. *Educação Matemática em Revista*, São Paulo: SBEM, ano 9, n. 11-A, edição especial, abr. 2002.

TARDIF, M. *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis: Editora Vozes, 2002.

TARDIF, M.; Raymond, D. Saberes, tempo e aprendizagem do trabalho no magistério. *Educação & Sociedade*: revista quadrimestral da Ciência da Educação, Campinas, n. 73 p. 209-244, CEDES, 2000.

———. Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários: elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas conseqüências em relação à formação para o magistério. *Revista Brasileira da Educação*, São Paulo: Anped, n. 13, 1.º quadrimestre 2000.

TARSKI, A. *Logic, Semantics, Meta-Mathematics*. Tradução de J. H. Woodger. 2. ed. Indiana: Hackett Publishing Company, 1983.

———. Verdade e demonstração. Tradução de Jesus de Paula Assis. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, Campinas: Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência – Unicamp, série 3, I, I(1), p. 91-123, 1991.

THOM, R. Matemática "Moderna": Um erro educacional e filosófico? In *American Scientist*. 1971. v. 59 , p. 695-699, tradução de Regina Maria Pavanello.

THOMPSON, A. A relação entre concepções de matemática e de ensino de matemática de professores na prática pedagógica. *Zetetiké*, Campinas: Unicamp, v. 5, n. 8, p. 9-45, jul.-dez. 1997.

______. Teacher's beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In GROUWS, D. A. (ed). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. NY: Macmillan, p. 127-146, 1992.

THURSTON W. P. On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, n. 30, p. 161-177, 1994.

UNESCO. Division of science technical and environmental education. mathematics for all. *Science and technology education*, n. 20, 1984.

VELOSO, E. *Educação matemática dos futuros professores*. Disponível em: <homepage.mac.com/eduardo.veloso/ novohome/textospdf/mateduc.pdf >. Acesso em: 15 out. 2003.

______ et al. (Ed.). *Ensino de geometria: idéias para um futuro melhor*. Ensino de geometria no virar do milênio. Lisboa, 1999. p. 17-32.

VITRAC, B. *Euclide d'Alexandrie, "Les eléments*". Tradução de Heiberg. Paris: PUF, 1990. v. 1 (Introduction générale de M. Caveing), livros 1-4 (Géomètrie Plane).

WHEELER, D. Aspects of mathematical proof. *Interchange,* Toronto: OISE Press, n. 21(1), p.1-5, 1990.

WU, H. The role of Euclidean Geometry in high school. *Journal of Mathematical Behavior*, n. 15, p. 221-237, 1996.

YACKEL, E. A Study of argumentation in a second-grade Mathematics classroom. *Proceedings of PME-XXII*, v. 4, p. 209-216, 1998.

ZEICHNER, K. Para além da divisão entre professor-pesquisador e pesquisador acadêmico. In: Fiorentini, D. *Cartografias do trabalho docente*. Campinas: Mercado das Letras, 1998. Tradução autorizada pelo autor.

ANEXO I

Grupo I

	TITULAÇÃO	FAIXA ETÁRIA	NÍVEL DA ATUAÇÃO	INSTITUIÇÃO	ÁREA DE PESQUISA
IA	Doutorado em Educação Matemática	50 -60	Pós	Pública	Epistemologia e didática
IB	Doutorado em Educação Matemática	30-40	Pós	Particular	Novas tecnologias e provas
IC	Doutorado em Matemática	60-70	licenciatura	Pública	Álgebra e História da Matemática
ID	Doutor em Matemática	60 -70	Pós	Pública/Particular	História da Matemática
IE	Doutorado em Educação Matemática	50 - 60	Pós/licenciatura	Particular	Ensino de Geometria
IF	Doutorado em Matemática	50-60	Pós/licenciatura	Particular	Educação Algébrica
IG	Doutorado em Educação Matemática	40-50	Pós/licenciatura	Particular	Educação Estatística
IH	Doutorado em Educação Matemática	30-40	Licenciatura	Particular	Formação de Professores
Ii	Doutorado em Matemática	60-70	Pós/licenciatura	Particular	Análise

Grupo II

	TITULAÇÃO	INSTUTUIÇÃO DE FORMAÇÃO	FAIXA ETÁRIA	ESCOLA EM QUE LECIONA	NÍVEL DE ENSINO
IIA	Licenciado	Universidade particular	40-50	Particular	Médio/ensino superior
IIB	Licenciado/Bacharel	Universidade particular	30-40	Particular	Médio
IIC	Licenciado	Universidade particular	50-60	Pública	Fundamental
IID	Licenciado/Bacharel	Universidade pública	40-50	Particular	Médio
IIE	Licenciado	Universidade particular	50-60	Particular	Médio/ensino superior
IIF	Licenciado/Bacharel	Universidade pública	30-40	Pública/Particular	Fundamental/médio
IIG	Licenciado/Bacharel	Universidade pública	30-40	Pública/Particular	Fundamental/médio

ANEXO II

Grupo I

1) Em alguns países as atuais orientações curriculares de Matemática preconizam um trabalho com demonstrações em escolas de educação básica. Os PCN, por exemplo, indicam um início de trabalho com a prova já no Ensino Fundamental. O senhor concorda com estas orientações? Qual deveria ser o significado do trabalho com a demonstração nas aulas de Matemática na educação básica?

2) Há pesquisadores em Educação Matemática que consideram haver ruptura entre a argumentação e prova chegando a afirmar que a argumentação seria um obstáculo à aprendizagem da demonstração. Outros, no entanto, afirmam que a relação entre a argumentação e prova no processo de ensino e de aprendizagem é produtiva e inevitável, apesar de complexa. Como o senhor vê essa questão?

3) Que experiências um futuro professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio deveria vivenciar em sua formação inicial para ter competência na organização e direção de situações de aprendizagem envolvendo argumentações e demonstrações na escola básica?

Grupo II

1) Em alguns países as atuais orientações curriculares de Matemática preconizam um trabalho com demonstrações em escolas de educação básica. Os PCN, por exemplo, indicam um início de trabalho com a prova já no Ensino Fundamental. O senhor concorda com estas orientações? Qual deveria ser o significado do trabalho com a demonstração nas aulas de Matemática em escolas do ensino fundamental e médio?

2) Que experiências um futuro professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio deveria vivenciar em sua formação inicial para ter competência na organização e direção de situações de aprendizagem envolvendo demonstrações na escola básica?

3) Qual foi o significado da demonstração em sua formação como professor de Matemática?

4) O que um curso de Licenciatura em Matemática deve necessariamente oferecer para que seja possível formar um professor competente para os ensinos Fundamental e Médio?

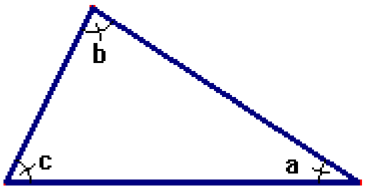
5) Apresentaremos a seguir alguns modos pelos quais alguns alunos de uma classe de 8ª série "demonstraram" que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Analise as produções desses alunos e explicite aspectos que podem indicar o grau de compreensão de cada um deles sobre a prova solicitada.

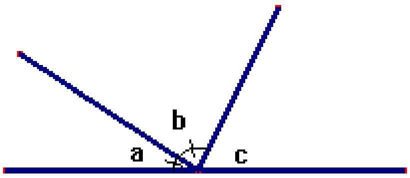
A seguinte afirmação foi apresentada aos alunos de uma classe de 8ª série:
Quando se adicionam os ângulos internos de um triângulo, o resultado é sempre 180º.

Os alunos deveriam provar se esta afirmação é verdadeira ou falsa.

Como esse assunto já havia sido estudado anteriormente, todos os alunos responderam que a afirmação é verdadeira. Apresentamos a seguir as “provas” elaboradas por seis alunos.

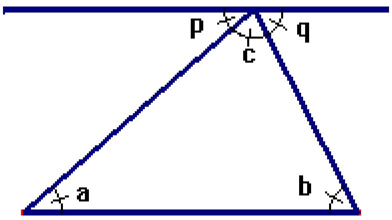
1. Resposta de Ana:
Eu recorto os ângulos e os coloco juntos:





Eu obtenho um ângulo de 180º pois os ângulos formam uma linha reta.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece. Logo, a firmação é verdadeira.

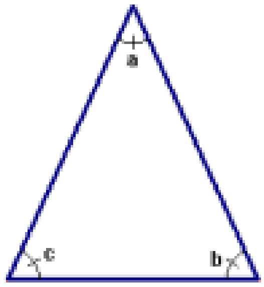
2. Resposta de Bia:



Afirmativas	Justificativas
p = a	Ângulos alternos internos determinados por duas paralelas e uma transversal são iguais.
b = q	Ângulos alternos internos determinados por duas paralelas e uma transversal são iguais.
p + c + q = 180º	Ângulo raso

Logo, a + b + c = 180º

3. Resposta de Cláudia:

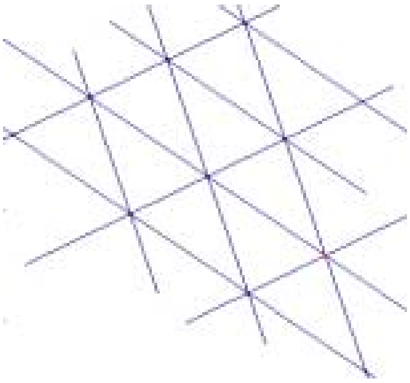


Afirmativas	Justificativas
a= 180º - 2c	Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
A = 50º	180º - 130º
B = 65º	180º- (a + c)
c = b	Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.

Logo, a + b + c = 180º

4. Resposta de Dora:

Eu desenhei uma rede de triângulos e marquei todos os ângulos iguais.



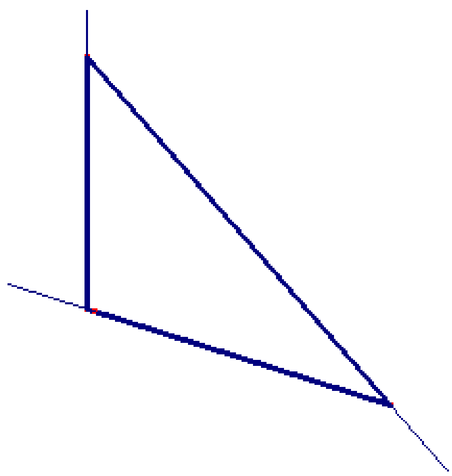
Eu sei que os ângulos em volta de um ponto somam 360º. Logo a afirmação é verdadeira.

5. **Resposta de Eduardo:**
Eu medi cuidadosamente os ângulos de diversos tipos de triângulos e fiz uma tabela.

A	B	C	total
110º	34º	36º	180º
95º	40º	45º	180º
35º	72º	73º	180º
90º	59º	31º	180º
13º	19º	148º	180º

Em todos eles a soma foi 180º. Logo a afirmação é correta.

6. **Resposta de Fernando:**
Se eu caminhar toda a volta sobre a linha do triângulo, termino olhando o caminho por onde comecei. Eu girei 360º.



Cada ângulo externo quando adicionado ao ângulo interno deve dar 180º porque eles formam uma reta. Isto faz um total de 540º.
540º - 360º = 180º.
Logo, a afirmação é verdadeira.

Responda:

a) Faça uma análise de cada "prova" e explicite aspectos que possam indicar o nível de compreensão do aluno sobre a prova solicitada.
b) Como você avalia cada uma dessas produções? Para facilitar essa avaliação, atribua pontos em uma escala de 0 a 10.
c) Quais comentários você faria a cada aluno sobre o respectivo trabalho?
d) Se você fosse o professor dessa 8ª série de que forma você daria continuidade a essa atividade com todos os alunos da classe?

Apresentaremos a seguir alguns modos pelos quais nove alunos de uma classe de 7ª série "demonstraram" que a soma de dois números pares quaisquer é um número par. Analise as produções desses alunos e explicite aspectos que podem indicar o grau de compreensão de cada um deles sobre a prova solicitada.

1. Resposta de André:

x é um número inteiro qualquer.
y é um número inteiro qualquer.
2x e 2y são dois números pares.
$2x + 2y = 2(x + y)$.
Portanto, a soma de dois números pares é sempre par.

2. Resposta de Bernardo:

$2 + 2 = 4$	$4 + 2 = 6$
$6 + 2 = 8$	$2 + 4 = 6$
$4 + 4 = 8$	$6 + 4 = 10$
$2 + 6 = 8$	$4 + 6 = 10$
$6 + 6 = 12$	$2 + 8 = 10$
$4 + 8 = 12$	$6 + 8 = 14$

A soma de dois números pares é sempre um número par.

3. Resposta de Ciro:

Números pares são números divisíveis por 2. Quando você adiciona números com um mesmo fator comum, 2 nesse caso, a soma terá o mesmo fator comum; portanto a soma também é divisível por 2. Assim, a afirmação é verdadeira.

4. Resposta de Dario:

Sejam x e y dois números inteiros quaisquer.

$$x + y = z$$

$$z - x = y$$

$$z - y = x$$

$$z + z - (x + y) = x + y = 2z.$$

Portanto, a afirmação é correta.

5. Resposta de Eunice:

♦ ♦ ♦ ♦   ♦ ♦ ♦   ♦ ♦ ♦ ♦ ♦
... + ... = ...
♦ ♦ ♦ ♦   ♦ ♦ ♦   ♦ ♦ ♦ ♦ ♦

Portanto, a afirmação é correta.

6. Resposta de Flávia:

Vamos supor dois números pares:

$$x = 27418$$
$$y = 956136$$

então , $x + y = 983554$ que é par.

Portanto, a afirmação é correta.

7. Resposta de Gina:

Números pares terminam sempre em um desses dígitos: 0, 2, 4, 6, ou 8. Se eu adiciono dois desses números a soma termina também em 0, 2, 4, 6, ou 8.

Portanto, a afirmação é correta.

8. Resposta de Helena:

Sejam p e q dois números pares quaisquer. Então

Então, existe um número inteiro **k** tal que $p = 2k$.

Existe também um **m** inteiro tal que $q = 2m$.

Portanto $p + q = 2k + 2m = 2 (k + m)$ é par

Logo, a afirmação é correta.

9. Resposta de Ivo:

Vamos pegar dois números pares como 10 e 26.

Então

$$\begin{array}{ccccc} 10 & = & 5 & + & 5 \\ 26 & = & 13 & + & 13 \\ \hline 36 & = & 18 & + & 18 \end{array}$$

Como isso sempre é possível, a afirmação é correta.

a) Faça uma análise de cada "prova" e explicite aspectos que possam indicar o nível de compreensão do aluno sobre a prova solicitada.

b) Como você avalia cada uma dessas produções? Para facilitar essa avaliação, atribua pontos em uma escala de 0 a 10.

ANEXO III

TRANSCRIÇÃO DAS ENTREVISTAS

Professor IA

1) *Em alguns países as atuais orientações curriculares de Matemática preconizam um trabalho com demonstrações em escolas de educação básica. Os PCN, por exemplo, indicam um início de trabalho com a prova já no Ensino Fundamental. O senhor concorda com estas orientações? Qual deveria ser o significado do trabalho com a demonstração nas aulas de Matemática na educação básica?*
   Você poderia ler as demais questões?

2) *Há pesquisadores em Educação Matemática que consideram haver ruptura entre a argumentação e prova chegando a afirmar que a argumentação seria um obstáculo à aprendizagem da demonstração. Outros, no entanto, afirmam que a relação entre a argumentação e prova no processo de ensino e de aprendizagem é produtiva e inevitável, apesar de complexa. Como o senhor vê essa questão?*
3) *Que experiências um futuro professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio deveria vivenciar em sua formação inicial para ter competência na organização e direção de situações de aprendizagem envolvendo argumentações e demonstrações na escola básica?*

Acho que as questões se superpõem. E aí a gente pode conversar sobre isso, misturando.

É preciso discutir o significado da demonstração, o que é demonstrar e acho que no contexto que você está examinando isso aí você não está pensando em demonstração no sentido formal, demonstração formal. Certamente, com esse sentido, aí cabe discutir se isso é coisa de criança se não é coisa de criança onde começa, onde termina e tudo mais. Mas quando a gente alarga o significado da idéia de demonstração, aí eu acho que isso é tudo. Antes de chegar na escola você tem que argumentar. E o sentido da demonstração é um sentido mais largo, demonstrar aí é convencer o outro, é argumentar e convencer. Então, a segunda perguntar que você fez sobre a distinção de argumentar e demonstrar e que uma até prejudicaria a outra eu não vejo qualquer possibilidade de ir por aí. Eu acho que o tempo todo demonstrar é convencer, o canal de comunicação que se estabelece entre os dois sujeitos é que vai determinar o tipo de argumentação, o que convence e o que não convence. Se eu estou conversando, eu professor de Matemática com outro professor de Matemática, então demonstrar uma coisa tem um significado, se eu estou conversando com meu aluno demonstrar tem outro significado, se eu estou *conversando com o pai de meu aluno demonstrar tem outro significado, demonstrar para o pai do meu aluno porque é importante ensinar cálculo e aí demonstrar é convencê-lo e o conteúdo da demonstração teria que ser outro, mas o que haveria de comum em tudo, demonstrar é sempre argumentar visando a convencer. Convencer no sentido bem da palavra mesmo, quer dizer vencer junto com, chegar a uma meta junto com outro e aí a língua é um instrumento básico por excelência, a língua que a gente fala, a língua materna, no sentido da primeira língua que a gente fala e a matemática, a lógica no sentido da lógica formal da matemática, mas primariamente a língua e junto com ela, a partir de um certo ponto, a matemática. Mas a língua e Matemática são instrumentos então de com vencimento, de argumentação nesse sentido de convencimento. A razão que é o meio para esse convencimento, a racionalidade, a idéia de razão, essa idéia também pode estar em discussão, quando se fala assim do pós-modernismo, se fala de uma crise da razão, e então o pós-modernismo é associado a esse relativismo e esse aparente elogio da irracionalidade de não haver lógica nas coisas de não haver projeto coletivo, mas na verdade, o que a gente pode estar vivendo é uma mudança no significado da razão e aí nesse espaço tem um autor fundamental, um autor de quem se pode discordar completamente, mas que eu acho que não para fazer um trabalho como o seu sem entrar nele, ignorando, que é Habermas, com a idéia de razão comunicativa, com a idéia de ação comunicativa, de razão comunicativa, com a ética do discurso, quer dizer, os valores no discurso, que é a demonstração para algumas pessoas é uma demonstração ingênua, dar confiança assim na palavra e possibilidade do acordo por meio da palavra. Para muitos, acreditar nisso ou acreditar na santíssima trindade é mesma coisa que as pessoas vão conversar e vão chegar a um acordo num consenso por meio da palavra. Se diz que isso não existe isso nunca existiu na história e nunca vai existir, mas não vejo alternativa para isso, senão acreditar nisso. Agora acreditar o quê, que as pessoas vão se comunicar, quer dizer, conversar. Isso pressupõe uma situação ideal de fala, quer dizer, as pessoas terem a palavra, terem a palavra poderem falar, não falar moldadamente assim o que é, o que pode ser, o que é permitido falar mas as pessoas terem a palavra, a confiança na argumentação no convencimento e a expectativa de que se chegue a um acordo por meio da razão, então essa razão que Habermas chama de razão comunicativa é uma razão, mas não uma razão cartesiana, kantiana, não é a razão no sentido moderno que fundou a ciência moderna, mas é uma razão, não é um irracionalismo e eu acho que tudo gira em torno disso. O tema de seu trabalho, a questão da demonstração, é um tema muito grande é um tema muito maior. Você está pegando uma faceta dele que isso na formação do professor, mas é um tema assim para a vida, para todo mundo, quer dizer o tempo todo o que mantém a gente com esperança é a expectativa do acordo por meio da palavra. O acordo por meio da palavra, mas não é ninguém enganando ninguém, é convencendo, é vencendo junto, é convencendo, e convencendo argumentando, demonstrando, argumentando. Agora há contextos e contextos quer dizer se você vai examinar isso na sala de aula, então há um canal de comunicação professor aluno e você tem que ver como isso se realiza aí mas isso também vai acontecer no conselho de classe, isso também vai acontecer nas reuniões da escola, para a gestão da escola, na participação, com os pais, em todos vai haver a necessidade de argumentar necessidade de convencer, quer dizer, isso é tudo. O interessante é que há um tema que parece não ter num primeiro momento haver com o teu mas tem tudo a ver com o teu, na verdade é a sombra do teu, é o espelho do teu, que é a violência. A violência na escola na vida e no mundo. Porque? A violência, quer dizer, a eclosão da violência é a falência da palavra. É quando você não acredita mais na possibilidade de convencer o outro é que você parte para a cassetada enquanto você mantém a possibilidade de argumentar você mantém essa expectativa de vamos chegar a um acordo você não parte para a cassetada. Agora quando esgota isso então se parte para a cassetada. Então, a violência sempre tem sempre o significado da falência na palavra. Eu descreio da argumentação eu descreio da* *possibilidade de convencer, de vencer junto com o outro então eu vou vencer sozinho, eu vou fazer, bater, acontecer e aí vem a força. Não há como combater a violência na escola, na vida, não há como combater a violência sem semear a confiança na palavra, mas não a palavra solta a palavra na argumentação: vamos conversar oras. Vamos conversar que eu quero te convencer que isso vale a pena de que isso é assim, é assado, vamos chegar num acordo. E a demonstração tem sempre esse sentido de chegar num acordo. Agora na matemática há uma expectativa de acordo universal, de consenso universal descontextuado, sem contexto, uma prova formal seria uma prove que eu convenceria qualquer pessoa em qualquer lugar do mundo, independente do contexto. Eu demonstro o teorema de Pitágoras aqui na China, no Japão onde for quem ler essa demonstração tem que se convencer sem contexto, formal. Agora isso é um aspecto da demonstração e é um aspecto assim absolutamente particular, é um caso particular porque o pensamento selvagem, o pensamento do índio e do esquimó não se desliga do contexto. Se você vai a um esquimó e dizer dois ursos vermelhos mais três ursos vermelhos dá quanto? Ele não vai me dizer que dá cinco ninguém vai dizer que dá cinco, ele sabe fazer conta, mas ele vai dizer antes o seguinte: você está louco não existe urso vermelho, não existe urso vermelho! Ele não sai do contexto dele, ele sabe que é urso e sabe que não tem urso vermelho, como é que você vai somar dois ursos vermelhos com três ursos vermelhos? Então, a idéia matemática de fazer provas que independem completamente do contexto essa pretensão de universalidade é uma maneira de examinar o problema mas na vida no dia a dia ninguém, por exemplo, aprende a raciocinar sem contexto e o problema de ter contexto não é para você se amarrar no contexto você aprende no contexto, quanto mais vc sabe mais você é capaz de abstrair, quer dizer sair do contexto e contextuar em outro lugar e abstrair e contextuar é o movimento o tempo todo, levanta abstrai do contexto e baixa em outro lugar, levanta e baixa em outro então a pretensão da demonstração formal que é a de fazer tudo independente do contexto pensando só na forma é um exercício é um tipo de exercício, mas a gente no dia a dia, lendo um jornal, lendo uma revista a gente argumenta e demonstra e tudo, viajando entre contextos, nos contextos. Amarrar qualquer coisa a um determinado contexto é mortal para a prova, você não está provando nada você está verificando ali, mas referir-se a um contexto, entender a situação nem contexto demonstrar de um modo tal que seja possível baixar em múltiplos contextos é isso que a gente busca, não é? Mas é um tema e tanto o seu, mas é inevitável que você saia, dê um vôo aí pra a questão da palavra, da argumentação, do convencimento da razão, da razão no sentido amplo e aí Habermas seria importante mesmo q vc possa discordar de das posições dele, mesmo q vc possa achar como muitos críticos do Habermas acham que ele é um sonhador ele é utópico que aquilo não existe na realidade, nunca existiu e nunca vai existir essa possibilidade de acordo por meio do discurso. Habermas está vivo escrevendo até hoje mas os trabalhos de base para você são de 1980, 1982 mais de 20 anos portanto, esse livro da teoria da ação comunicativa.*

Professor IB

1. *Em alguns países as atuais orientações curriculares de Matemática preconizam um trabalho com demonstrações em escolas de educação básica. Os PCN, por exemplo, indicam um início de trabalho com a prova já no Ensino Fundamental. O senhor concorda com estas orientações? Qual deveria ser o significado do trabalho com a demonstração nas aulas de Matemática na educação básica?*

   Eu acho que concordo sim, embora dependa do que se entende por demonstração. Na Inglaterra, por exemplo, nós falamos em prova em um sentido mais largo que prova formal. Não sei se você entende por demonstração apenas tipo prova formal. Mas prova nas escolas, eu acho que você tem que introduzir o mais cedo possível. Quando você começa a aprender matemática eu acho que alguns princípios da argumentação matemática têm que ser introduzidos. Obviamente, os níveis vão ser muito diferentes e os tipos de argumentos também vão ser muito diferentes. Mas eu penso que, pelo menos na Inglaterra, nós temos uma tendência, que para introduzir prova como experiência significativa, é necessário começar com argumentos que são puramente empíricos. Nós temos uma tradição no currículo que você deve, para começar, justificar seus argumentos dando evidências empíricas. Eu acho que é um ponto muito importante, eu não queria e nem posso tirar a importância dos dados empíricos, mas somente no fim, mais ou menos quando os alunos têm 14 ou 15 anos, é esperado que eles distingam os argumentos baseados na evidência dos argumentos baseados em justificativas matemáticas. Eu acho isso um pouco tarde. Você poderia introduzir, com problemas apropriados, muito mais cedo, essa distinção entre argumentos baseados na evidência, que são importantes, e os argumentos que são baseados nas justificativas matemáticas, isto é, nas estruturas matemáticas, que também são importantes. A verdade é que você quer que os alunos se engajem nas duas coisas, e não privilegiar apenas uma. Não se pode imaginar que em dado momento vá ocorrer uma passagem espontânea de argumentos baseados em evidências empíricas para argumentos baseados nas estruturas matemáticas porque elas são muito diferentes. Você não poderia, não deveria, no currículo tentar separar as duas completamente, porque se são separadas, a prova realmente não vai ser muito significativa. Prova baseado em evidência já é uma coisa que a maioria das pessoas, fora do contexto da Matemática, tem alguma noção. Então nós queremos uma outra coisa na Matemática. Acho que devemos evitar mostrar a estrutura matemática no início. Nós achamos que os alunos não vão conseguir entender e eles não vão mesmo se nós reservarmos a eles problemas mais complexos e introduzirmos apenas nesse momento, a necessidade de provas matemáticas – estou dizendo aqui que provas matemáticas são as provas formais e não as empíricas, não que estas não sejam matemáticas, mas apenas para distinguir. Realmente vai ser muito difícil, mas eu acho que talvez possa facilitar se nós começarmos no momento em que os alunos mostrarem uma tendência para o uso de dedução nos argumentos. Quanto mais cedo pudermos capturar esse momento melhor será para que eles possam escrever no futuro provas formais. Eu concordo que se deve procurar introduzir, o mais cedo que possível, as provas matemáticas; mas o perigo disso é você decidir então vamos introduzir primeiramente apenas as evidências empíricas. Eu acho que talvez no contexto brasileiro, algumas de minhas preocupações, podem até ser um pouco difíceis para entender, porque vocês não têm a mesma experiência nossa que é saber o que acontece quando se tem um currículo mais baseado muito mais no concreto, mais nas conjecturas dos alunos. Por exemplo, quando eu estudei matemática, qual é a experiência que tive com prova? Eu não estudei prova formais na geometria euclidiana, mas apenas com 15 ou 16 anos é que comecei com as provas em situações com vetores. Depois, tive, no equivalente ao ensino médio, que provar as identidades trigonométricas, mas foi quase impossível para nós, muito formal, difícil. No entanto, logo o currículo mudou muito e eles passaram a introduzir o que chamamos de investigações. Quando comecei a fazer o equivalente em licenciatura há mais ou menos vinte anos atrás isto estava na moda. Mas o que eram essas investigações? Nessas investigações eram propostas situações, no início bem acessíveis, bem simples, em que o aluno teria que manipular, procurar exemplos, fazer conjecturas, apresentar resultados em tabelas e tentar justificar matematicamente. Mas o que aconteceu? Os alunos resolviam, fazendo conjecturas, faziam tabelas bonitinhas, mas não havia um movimento espontâneo para chegar na estrutura do problema, na prova formal. Isto a gente não pode pensar que acontece naturalmente, o uso de evidências sim. Mas tem que ter atividades cujo foco de atenção seja esse aspecto mais formal. Deve-se trabalhar esses dois aspectos em conjunto. Veja, que não quero falar em idades, é sempre muito perigoso, mas crianças bem jovens, segundo nossa pesquisa, entendiam algumas coisas, por exemplo, sobre números pares e ímpares. Eles entendem, mais ou menos de forma empírica, que números que terminam em 0, 2, 4, 6, e 8 são pares e os outros são ímpares, que a soma de um par com um ímpar é um número ímpar, entendem que se dividir por 2 e desse inteiro era par, caso contrário era ímpar. Essas coisas as crianças, mesmo as bem jovens, podem entender. Então eles já têm algumas noções sobre a estrutura desses números. Então, eu penso que se você explorar com eles essa estrutura, eles poderão ter alguma inspiração e entender que quando se faz um argumento é necessário olhar para essa estrutura. Claro que, essa estrutura vai ser vista num contexto de exemplos empíricos. Você tem que explorar. Veja, se nós temos essa representação de um número par como isso

Figura

Eles já têm uma noção de estrutura, pois pode ser dividido em dois, você tem ..... É diferente de representar um par por 2n. Mas podemos imaginar esse exemplo, como um exemplo que pode ser visto genericamente. É exatamente isso que nós temos que explorar. Eu não sei se você está fazendo assim, você está fazendo o empírico antes. Acho que você está fazendo ao mesmo tempo: o empírico e uma certa dose de formalidade. Nesse exemplo você tem uma certa formalidade, você não está simplesmente representando de qualquer maneira, tem uma certa formalidade e que pode mais para frente ser conectado com uma maneira mais formal ainda. Eu estou argumentando para introduzir uma certa formalidade na matemática, mas sabendo que a formalidade não tem que ser uma formalidade que nós reconhecemos hoje como uma matemática formal no fim do ensino médio. Claro que esse é um exemplo específico e sei que não é fácil encontrar outros. Nós temos que investigar novos contextos para a formalização, que possam ser acessíveis. Há uma dificuldade mesmo. Esse problema, que nós vimos na Inglaterra, nós vimos em crianças de escola primária, crianças de 8 a 11 anos, trabalhando com estas situações. Em nossas pesquisas, nós revisitamos esses problemas com alunos de 14 e 15 anos e na verdade não vimos muito progresso. O que as crianças da escola primária fazem é a mesma coisa que os maiores. Claro que há diferenças, mas, em geral, não são tão significativas. Há um movimento de ..... Tem que ser trabalhado. Nós temos que pensar quais tipos de problema que realisticamente nós podemos pensar em propor aos alunos do 2º e 3º ciclos, – que você falam aqui. Eu acredito que algumas coisas podem ser feitas nesse sentido – o de caminhar para uma formalização. Mas como, por exemplo, preencher então lacunas entre argumentos desse tipo para argumentos do tipo 2k e 2n. Esse é o grande desafio. Nós não temos ainda um banco de atividades que possam dar uma entrada mais leve para as provas. Nós sabemos que as provas são muitas complexas, ninguém vai negar isso, eu acho, apesar de umas serem bem mais fáceis que outras, claro. A noção de começar com alguns dados para chegar a um outro conjunto de fatos e colocar todos os passos entre eles, não é uma coisa que as pessoas chegam facilmente. Mas o problema é que ficamos evitando trabalho com provas e em dado momento que teremos que trabalhar com provas em situações bem mais complexas. E muitas vezes começamos o trabalho com provas, complexas, mas provando coisas que parecem óbvias. Esse também é um outro problema. Nós apenas vamos provar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º quando os alunos estão completamente convencidos que esse fato é verdadeiro. Nós não passamos de uma fase que nós construímos essa conjectura para uma que poderia realmente demonstrar esse fato. Mas nós resolvemos diversas situações envolvendo o fato que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, estamos muito confortáveis com isso, e de repente temos que provar isso. Mas porque que provar, se já estamos trabalhando três ou quatro anos com essa noção? Então esse é também um problema: quando podemos aceitar um fato e quando não podemos aceitar e temos que provar? Eu, como professora não tenho boas respostas para essa questão. O que podemos assumir? O que podemos aceitar? Temos, então uma grande mistura de fatos que nós aprendemos, decorar até, e de repente, em um algum momento, temos que provar. Muitos alunos chegam a dizer: isso é uma coisa idiota, nós já sabemos isso! Então eu acho também importante no trabalho com provas que proponhamos situações com algum elemento de surpresa e não apenas situações que podem ser óbvias inclusive visualmente. Outra coisa de prova que eu acho todas as escolas fazem é quando ensinam o teorema de Pitágoras. Todo mundo aprende esse teorema. No trabalho com esse teorema os professores fazem alguns tipos de prova, mas na Inglaterra essas provas estão completamente desligadas do processo de prova. Geralmente os professores falam assim: vamos estudar esse tipo de triângulo e vamos ver uma coisa muito interessante, a soma das áreas desses quadrados é igual a área .... E falam: esse é o teorema de Pitágoras, vocês vão poder verificar isso. As pessoas que estudaram esse teorema geralmente acabam aceitando-o e falam que o importante é saber que $a^2 + b^2 = c^2$ e tudo o resto é uma coisa bonitinha que a professora gostou de mostrar, mas quando vamos resolver problemas não precisamos saber nada disso. Ou seja, o trabalho que se faz com o teorema de Pitágoras geralmente está muito, muito desconectado do processo de prova.

Ruy:

2) *Há pesquisadores em Educação Matemática que consideram haver ruptura entre a argumentação e prova chegando a afirmar que a argumentação seria um obstáculo à aprendizagem da demonstração. Outros, no entanto, afirmam que a relação entre a argumentação e prova no processo de ensino e de aprendizagem é produtiva e inevitável, apesar de complexa. Como você vê essa questão?*

Pelo que já falei parece claro que concordo com a segunda opção. Mas eu entendo que a argumentação pode ser um obstáculo para a aprendizagem da prova porque realmente tem um pouco a ver com a coisa que eu estava falando: se você consegue vinte exemplos de uma coisa você está convencido da veracidade dela e como nos outros contextos na vida esse número de exemplos seria, em geral, suficiente para se chegar na prova, mas isso não basta para a Matemática. Os alunos depois desses exemplos, não se interessam pela prova formal, pois para elas já está provado. Nesse sentido eu concordo um pouco com a primeira parte de sua questão, mas eu acho que a palavra obstáculo é uma palavra muito, muito forte e não é o caso. Em contextos como o Cabri, quando você estuda por exemplo uma propriedade de círculos: então a medida desse ângulo é igual a duas vezes a medida deste.

Você movimenta a figura e verifica que essa propriedade é válida para diferentes casos das posições desses ângulos.

Você até pode argumentar para os alunos que essa propriedade é válida para essa circunferência, e algumas outras, mas é válida para todas? E blá, blá, blá..... Mas na verdade essa argumentação a favor da prova formal para os alunos é fraca sim, pois eles estão plenamente convencidos sim a respeito dessa propriedade. Pode ser um tipo de obstáculo apenas no sentido de motivação para a prova matemática. Nós temos que achar maneiras para problematizar os dados empíricos. Alguns pesquisadores hoje falam dessa ruptura, que não é original, pois essa afirmação decorre muito do trabalho de Balacheff, porém eu não concordo com a palavra obstáculo. Mas eu tenho que ver os exemplos desse problema, as medidas do ângulo central e inscrito, não como um conjunto de exemplos mas como um exemplo genérico. Esse problema em particular, é muito difícil, porque nada sobre a maneira de movimentar a figura dá insight para uma futura demonstração formal dessa propriedade. Então temos que buscar situações que essa investigação, a investigação de casos empíricos, acabam dando também alguma iluminação de propriedades matemática que embasem a demonstração. Não concordo que não poderia haver uma passagem mais leve, mais suave entre argumentação e prova, pois há muitos tipos de argumentação. Depende do tipo de argumentação. Se você tem uma argumentação baseado em dados puramente empíricos é uma coisa se você tem uma argumentação do tipo dessa é outra; apesar de ser para mim ainda uma argumentação e não prova, mas ela tem alguns elementos que poderiam ser conectados para uma prova formal. É um pouco forte dizer que há uma ruptura tão grande nesse processo. Não é verdade, por exemplo, que não usamos argumentos dedutivos no dia a dia, às vezes usamos, eu não consigo lembrar de um exemplo de imediato. Veja, por exemplo, o trabalho uma minha orientanda que trata de provas com transformações ela faz algumas atividades iniciais que são basicamente empíricos. Em uma atividade eles transladaram uma bandeira, no Cabri, e notaram que o lado original e a imagem são paralelos, os lados são respectivamente paralelos. Mas essa conclusão foi obtida por dados totalmente empíricos, verificando no Cabri. Em outra atividade perguntou-se: é possível construir por translação um triângulo no qual um lado da figura original seja perpendicular ao respectivo lado, o que foi construído? Alguns deles precisaram ir ao computador e fazer de novo, mas muito deles disseram: não, claro que não, porque todos os lados são paralelos, então não poderiam ser. Eles estão fazendo alguma coisa que está baseada numa propriedade matemática que aceitaram e aplicar isso em outra situação para provar e justificar a impossibilidade. Argumentos como esses, não são necessariamente tão raros. Acho que não somos tão lógicos quanto Piaget gostaria de pensar, mas também não somos tão alógicos, ilógicos.

3) *Que experiências um futuro professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio deveria vivenciar em sua formação inicial para ter competência na organização e direção de situações de aprendizagem envolvendo argumentações e demonstrações na escola básica?*

Primeiramente devemos mudar a maneira pela qual a maioria das pessoas vê a prova: alguma coisa muito chata da Matemática, a mais chata. Para mim é uma das coisas mais atraentes da Matemática. Isso não está sendo passado na licenciatura. Eu acho que instrumentos como o provão não ajudam muito nesse aspecto da formação. Em geral as muitas pessoas da comunidade matemática acreditam e divulgam que provar é algo muito, muito difícil e aqueles que conseguem fazer provas são, realmente, os mais inteligentes; você tem essa coisa ainda da Matemática ser um filtro que distingue as pessoas inteligentes e não e a prova tem sempre um papel muito forte nisso. Então acabamos por valorizar os argumentos mais formais e deixar outros de lado. Numa avaliação quando você tem que provar alguma coisa essa parte é considerada por todos como a parte mais difícil do teste. Nós temos vários argumentos que podemos considerar para justificar essa afirmação. Quais são as vantagens, as desvantagens, as limitações das argumentações apresentadas? Acho que é isso que temos de discutir nos cursos de licenciatura e na formação continuada de professores. De certa forma os professores deveriam vivenciar as mesmas experiências que seus futuros alunos; como nós sabemos, os futuros professores não tiveram, raríssimas exceções, experiências muito felizes com a prova na escola, se é que tiveram alguma experiência. Lógico que temos de fazer provas no nível deles e não somente provas das propriedades dos números pares e ímpares, mas temos de começar de alguma coisa que todos tiveram acesso, mostrar bem a estrutura do que aprenderam. O que é uma prova? Que tipo de prova aceitar? É uma questão que deveria ser discutida em qualquer nível da Matemática. Didaticamente deveríamos começar num nível mais básico, o que não é feito, pois no ensino fundamental e médio falamos: isto é uma prova, se você apresentar assim, está bom, e se não apresentar não está bom! Mas não deveria ser assim. Nós vamos aceitar ou não essa argumentação? Nós vamos incluir essa parte nos fatos que nós vamos continuar a trabalhar? Ou ainda não estamos satisfeitos? Promover esses debates, envolver os futuros professores nessa discussão na licenciatura é fundamental. Nós, na Inglaterra, fizemos uma experiência tal como acontece num processo legal: teriam que julgar uma afirmação matemática sendo que alguns alunos a defendiam e outros não. Foi muito interessante, pois eles tiveram que trazer... quando algum trazia apenas argumentos empíricos, então o outro grupo dizia, tudo bem mas vocês não estão cobrindo todos os casos possíveis. Foi uma experiência dinâmica. É importante ressaltar que se os futuros professores vêem uma demonstração formal eles vão simplesmente reproduzir com seus alunos e entrar com o formal pronto, pois consideram que é difícil para eles e nem estão convencidos da importância da prova. No entanto, sabemos que em outros aspectos eles reproduzem o que foi trabalhado com eles. Porque reproduzir uma atividade que foi legal, que você viu funcionar, é altamente positivo. É essa a nossa base para ir para frente, seja como professora, seja como matemático, ... Se eles tiverem experiências com provas em contextos diferentes; provas gráficas, provas visuais, provas que não são provas e sim argumentos empíricos e também argumentos formais, mas não só argumentos formais na situação de álgebra, mas também situações computacionais. O que nós não temos quase nenhuma experiência, eu acho, é essa coisa de você estar trabalhando com o sistema matemático, porque nós educadores matemáticos trabalhamos muito com certas partes da Matemática e de repente tem que trabalhar com o sistema formal e quando se começa a fazer isso se vai para um nível muito sofisticado. Acho que temos que criar sistemas formais que são micros sistema, que você pode brincar com esse sistema: vamos aceitar esses como nossos axiomas e vamos ver o que podemos fazer com isso. Nós temos que fazer porque de repente começar com um sistema que é muito complexo não será uma grande surpresa se os alunos tiverem grandes dificuldades. Muitas coisas que eu disse devem, evidentemente, ser discutidas na formação dos professores: tem que discutir a diferença entre argumentos empíricos e os formais, tem que discutir a vantagem de introduzir os argumentos empíricos e possíveis problemas e dificuldades que podem surgir. Na minha opinião se faz uma licenciatura cujo conteúdo matemático não é, provavelmente, o que ele vai ensinar porque não é um conteúdo no nível dos alunos do secundário. Mas eles precisam entender as questões pedagógicas do conteúdo do nível que ele irá ensinar. Não é suficiente, claro, o futuro professor só ter domínio do conteúdo do ensino fundamental e do médio; porque é importante, por exemplo, terem conhecimento para onde a matemática está indo. Por outro lado ter apenas domínio de Matemática mais avançada e saber para onde ela está indo não é também suficiente. Esse vai ser um bom professor de matemática para o ensino fundamental e médio? Eu acho que não, para mim isso é quase secundário. Eu sou muito suspeita pela minha formação para falar isso, eu sei. Eu acho que se você conseguir formar professores que adoram matemática, que tenham prazer de interagir com seus alunos, que façam conexões entre os diversos campos da matemática formaremos bons professores. Essa parte para onde vai a matemática e estudar matemática mais avançada é importante, pois vai fazer parte de nossa identidade, mas não é tão essencial. Mas se você formar professores que vê a matemática como um conjunto de fatos que devem ser reproduzidos eu não vejo como eles poderão tornar-se bons professores. Porque para mim o processo de aprendizagem de matemática está relacionado com as conexões: conexões entre o que você faz com números, conexões que você faz entre figuras, formalização que você usa na álgebra e o que você pode aplicar isso em situações com gráficos; também nas áreas mais aplicadas como estatística. Se nós continuarmos com as disciplinas da licenciatura compartimentadas da mesma maneira que a matemática é compartimentada na escola, nós continuaremos a reproduzir um modelo que não está permitindo acesso à matemática pela grande maioria de pessoas. Eu acredito que não acontece, pelo menos no Brasil nesse momento, que os alunos da licenciatura trabalham com prova em vários contextos diferentes, em vários níveis diferentes. Eu acredito que isso não está acontecendo. Mas eu acho que não é apenas isso que vai resolver o problema. Eu acho que é uma coisa maior, pois isto deve implicar que você tem que fazer também com todas as áreas da matemática. Por exemplo: se você faz três disciplinas relacionadas com o cálculo, você também deve pensar para essas disciplinas quais são as idéias-raízes do cálculo que vão ser introduzidos no ensino básico, no ensino fundamental e ensino médio, onde estão os primeiros momentos das idéias relacionadas à variação, às taxas de variação. Isto poderia estar no currículo. Quando se estuda cálculo os professores dessa disciplina, em geral, parecem dizer: agora vocês estão vendo matemática, agora vão fazer a matemática real. Podemos dizer o mesmo para os números reais. Não se trata apenas da discussão que nós, os formadores, devemos promover sobre questões pedagógicas dos assuntos que os professores estão aprendendo, sobre a matemática do nível deles, mas também sobre as questões pedagógicas e pesquisas dos assuntos que eles vão ensinar. O problema é que não sabemos como fazer isso. Não sabemos como ensinar prova, por exemplo. Ninguém sabe. É muito fácil dizermos que a culpa do fato que as nossas crianças e adolescentes não estão aprendendo muito matemática é do professor. Aliás, é uma hipótese, uma boa hipótese até. Mas nós, educadores matemáticos estamos criticando os professores e não temos certeza, apesar das pesquisas e pesquisas, pesquisamos já há mais de trinta anos. Nós educadores temos que mostrar possibilidades. Quando fiz licenciatura, aconteceu uma coisa, não tem a ver com prova, que me irritou um pouco: nossos professores vieram à escola para assistir e gravar nossas aulas em vídeo para analisar. Foi muito rico na verdade, mas nunca fizemos uma análise da prática deles. Para mim seria muito legal analisar a prática de nossos professores. Os formadores precisam analisar sua prática, pois eles formam os professores. Você teria que ser uma pessoa muito especial para fazer uma licenciatura, mais ou menos tradicional, e voltar para sua escola e fazer uma coisa completamente diferente. Para nossa sorte existem algumas pessoas muitos especiais e algumas delas pessoas são educadores matemáticos. Certamente a maioria dos educadores matemática não é assim tão especial. Na verdade as pessoas que fazem licenciatura em matemática estão numa posição interessante mesmo: eles são matemáticos, ou seja queremos dar acesso para aprender mais matemática e atuarem como matemáticos. Ao mesmo tempo eles vão atuar na escola básica. Então é um desafio grande mesmo. De certa forma, queremos que o professor de matemática se sinta um pouco como um matemático. Como nós: somos pesquisadores e professores de educação matemática; então nós estamos atuando mesmo numa área que nós estamos ensinando. Seria bom que o professor se visse dessa forma; que continuasse fazendo matemática e não apenas professor – quando falo apenas parece que estou falando como uma coisa negativa, mas não estou. Eu acho que isso não acontece. Para isso acontecer é preciso ter conteúdo matemático num nível alto na formação, mas não pode perder a conexão desses conteúdos com os conteúdos que vão ensinar. Aprendendo, por exemplo, só análise eles necessariamente não faz as conexões com os conteúdos que vem antes. Eu sou muito exigente e peço a liberdade de falar de um mundo ideal. Eu acho que você tem que dar oportunidades no curso de licenciatura para que os aprendizes se sintam que eles estão se formando matemáticos, mas no mesmo tempo, eles estão se formando como educadores. Os conteúdos têm que contemplar as duas partes. Para mim, os conteúdos que eles vão ensinar devem ter a maior ênfase, é isso que eu penso nesse momento. Por isso a prova é tão importante porque a prova dá uma certa...., ou seja a prova formal é uma característica da matemática que a diferencia das ciências empíricas, de outras áreas. Para isso é que ela é tão importante. Pode-se pedir uma prova que um grande matemático considera a prova mais simples do mundo mas se você está realmente reagindo com o sistema formal, então você está fazendo matemática.Você não pode negligenciar a prova nem nos cursos de licenciatura e nem nos currículos da escola. É importante destacar que você pode aprender algumas provas, compreendê-las até mas sem entender bem o que é um teorema. Você partir de uma conjectura experienciando o jeito que ela se torna em teorema você está reproduzindo a prática matemática, dos matemáticos. Não vou falar que prova é a essência da Matemática, que é o coração da matemática, mas não podemos deixar esse aspecto de lado. É a maneira que nós escolhemos na nossa comunidade para comunicar, para comunicar nossas descobertas, para comunicar nossas direções, para decidir os campos de problemas que valem a pena investigar. E o futuro professor precisa vivenciar essa experiência. Precisa ver também as provas formais

Professor IC

1) *Em alguns países as atuais orientações curriculares de Matemática preconizam um trabalho com demonstrações em escolas de educação básica. Os PCN, por exemplo, indicam um início de trabalho com a prova já no Ensino Fundamental. O senhor concorda com estas orientações? Qual deveria ser o significado do trabalho com a demonstração nas aulas de Matemática na educação básica?*

   Eu acho que é importante a abordagem da prova nesses níveis de ensino. Mas acho importante evitar exageros. Não deve haver exageros como havia quando eu cursei o ginasial. A primeira vez que vi matemática demonstrativa foi na antiga 3ª série do ginásio, então eu peguei um professor formado na USP e ele ficou demonstrando uns 60, não sei quantos teoremas... Eu acho desestimulante da maneira como ele fez, mas era o padrão na época, pelo menos para aqueles que eram egressos da USP. Havia muitos professores leigos na época, mas para os professores vindos da USP saíam embebidos daquela mentalidade e evidentemente cometiam exageros. Assim, dessa forma, claro que eu não recomendaria demonstrações. Agora, por outro lado, demonstrações esparsas, sem alguma seqüência, também pode não ter significado nenhum, demonstra-se uma coisa aqui, fica-se trabalhando informalmente, depois demonstra outra coisa lá, isto pode não fazer sentido para o aluno. Como encontrar o meio termo ideal, é uma questão difícil. Talvez, pegar certos capítulos, os mais agradáveis, e desenvolver mais formalmente e de maneira consistente e outros já nem tanto. Por exemplo, há partes demonstrativas que são mais agradáveis e outras que são menos agradáveis e, talvez, se começar com geometria, os primeiros passos, começar mais informalmente, e depois, em alguns capítulos, mais para frente, fazer uma seqüência de demonstrações. Eu não me considero nenhuma autoridade para falar nisso, mas não importam quais sejam os teoremas. Ele deve tomar contato com a Matemática como uma ciência dedutiva, não importam quais sejam os teoremas que aos alunos irão demonstrar. É importante que o aluno tenha contato com o sistema dedutivo mas sem pretender aquele rigor, demonstrando tudo do começo ao fim, e também evitar de chover no molhado, isto é demonstrando uma coisa aqui outra ali, mas sim escolher uma parte e desenvolver mais formalmente.

2) *Que experiências um futuro professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio deveria vivenciar em sua formação inicial para ter competência na organização e direção de situações de aprendizagem envolvendo argumentações e demonstrações na escola básica?*

Se um professor viu apenas demonstrações formais no seu curso ele poderá apenas apresentar os teoremas já demonstrados a seus alunos. O aluno vai ver uma prova envolvendo termos, definições que ele nem entende. E isso é muito ruim, é perda de tempo e pior, vai afastar seus alunos da Matemática. O que está acontecendo hoje, é o seguinte: há aqueles professores, os que vão formar os futuros professores, que não demonstram nada e não adianta o coordenador do curso querer implementar essa diretriz. No entanto, há outros que querem demonstrar tudo. E aí é uma incongruência porque os alunos chegam sem condições, em especial os das universidades particulares. Chega no primeiro ano tem um curso de cálculo que é puramente algorítmico, no curso de geometria analítica são dadas em geral apenas algumas receitas, e de repente no segundo ano, em álgebra linear, o professor começa a demonstrar, justamente em uma disciplina muito abstrata. É muito difícil. Acho que deveria haver uma preparação de terreno no sentido de suprir as lacunas de formação do professor, mesmo no primeiro ano, uma matemática do curso colegial, mas bem estudada. Só para citar um exemplo, um curso de determinantes: você poderia dar um curso teórico bem estruturado ou pode dar um receituário apenas. Então, eu sou favorável a se ter um primeiro ano de reposição mesmo, mas não é uma simples revisão, mas estudar aqueles tópicos de forma bem estruturada mais aprofundada. Geometria no espaço, determinantes... Geometria espacial, eu acho, por exemplo, mais difícil que álgebra linear, pelo menos no nível da graduação. Desenvolver problemas, problemas não rotineiros, problemas teóricos, problemas que exijam uma certa elaboração e não simplesmente revolver um problema e dar um monte do mesmo tipo ou parecido, não se pode ficar apenas nisso. Nesse processo a demonstração teria muito destaque. Deve-se escolher uma parte do programa da disciplina, a mais agradável, e desenvolvê-la axiomaticamente se for possível. Atualmente os alunos são admitidos em muitas instituições, os vestibulares para o curso de professores têm sido apenas classificatórios, e não há um trabalho assim de ao mesmo tempo suprir as lacunas de formação dele e dar condições para que ele possa ensinar. Há um sofisma: quem sabe mais, sabe menos. Por exemplo, você dá um curso de topologia, de espaços métricos, e você diz, bem eu dei um curso de espaços métricos então meu aluno vai saber ensinar geometria plana. É um sofisma porque na maioria das vezes eles não aprenderam nada, eles passaram pelos espaços métricos, mas não vivenciaram, é um conhecimento sem raiz. Os cursos de Matemática vivem em função desse sofisma: você ensina coisas lá no alto e porque isso faz com que eles saibam os de baixo. Em geral, isto não acontece, não é verdade. Em outros tempos pode até ter sido, mas hoje eu não vejo assim. Pode-se fazer um bom curso de matemática abordando também conteúdos do ensino médio: cursos bem estruturados, com profundidade maior, resolvendo problemas, demonstrando. Mas é muito difícil implantar um currículo assim, principalmente nas universidades estaduais, pois imediatamente surgem comentários quando se chega com essas idéias: vai cair o nível! Mas não é o caso. Você tem muito tempo em quatro anos, por exemplo, de começar pela geometria espacial, ou outro assunto que eles não viram, e chegar no que interessa ainda que não se chegue na topologia, nos espaços métricos. A demonstração é fundamental, é importante nesse processo. Num curso de Matemática, há disciplinas de caráter diferente. Por exemplo, a parte da matemática discreta é uma coisa, a abordagem é diferente: se você vai trabalhar com probabilidade, combinatória, grafos, etc, não há necessidade de uma seqüência de teoremas, porque se trabalha em torno de grupos de problemas. Eu quero ressaltar a importância da prova no curso de formação de um professor de matemática, mas elas devem ficar mais no final do desenvolvimento da maioria dos assuntos, principalmente no Cálculo. Não se pode começar demonstrando. Mas não se trata de fazer um curso algorítmico. Já em Análise é um pouco diferente. O futuro professor já conhece os conceitos envolvidos e a demonstração é o centro do trabalho dessa disciplina.

Professor ID

1) *Em alguns países as atuais orientações curriculares de Matemática preconizam um trabalho com demonstrações em escolas de educação básica. Os PCN, por exemplo, indicam um início de trabalho com a prova já no Ensino Fundamental. O senhor concorda com estas orientações? Qual deveria ser o significado do trabalho com a demonstração nas aulas de Matemática na educação básica?*

Ruy, eu acho melhor em seu trabalho você usar demonstração do que a palavra prova, apesar dessa ser mais abrangente. A verificação, caso a caso, seria, por exemplo, um tipo de prova. Mas, a palavra prova em Português adquiriu um significado de teste, de avaliação, de provar o que você sabe. Por isso utilize demonstração o tempo todo. Talvez seja melhor. Essa idéia de prova, vamos comentar inicialmente um pouco sobre isso, pode ser? Essa idéia de prova como demonstração, é coisa dos gregos. Essa talvez seja a herança mais importante que a gente tenha da matemática que vem dos gregos. Há muita discussão, tem saído muita discussão, sobre qual é o conceito de verdade, em outras culturas. Mais interessante vem da Índia, são trabalhos bem interessantes. Talvez você queira depois ler o que eles consideram uma coisa demonstrada, provada, afinal o que é verdade na matemática indiana. Na matemática que é aquela que chegou até nós, tradição grega, a prova é demonstração que segue a lógica e seguindo os passos lógicos você tem aquele modelo, que é o modelo cujo maior representante na antiguidade é o Euclides e que, depois, é retomado mais recentemente pelo Hilbert que faz um tratado sobre Geometria, no modelo de Euclidiano, formal, rigoroso, bem formal. Essa idéia de prova, quando chega o cristianismo, a filosofia do cristianismo é uma filosofia um tanto vaga e aí os acadêmicos do império romano, de formação grega, mostram o Euclides como critério de verdade, a verdade é assim. E isso foi rejeitado pela Europa cristã e esse conceito de prova, de demonstração, no modelo Euclidiano, não é importante na Europa cristã mas, claro, eles têm critérios de verdade. Os critérios de verdade de coisas abstratas ou é crença, se acredita e pronto, ou se começa a fazer algum tipo de verificação para ver se a coisa funciona. Está bem. Dá certo? É assim? Então pronto, não tem que se preocupar em demonstrar coisa alguma e assim isso vai. Quando chega nas cruzadas, os europeus encontram uma religião muito formal, que é o islamismo, que tinha assimilado toda cultura científica grega, levada para o islamismo, e nessa cultura grega está o conceito de prova, de demonstração, que se integrou na matemática islâmica. Quando, depois da cruzada, os europeus descobrem a matemática islâmica, na verdade eles estão redescobrindo a matemática grega e ao redescobrir a matemática grega a idéia de prova aparece agora respeitada, não sentem mais aquele medo que tinham dos filósofos gregos. Tanto que o livro do São Tomás de Aquino, Súmula Teológica, que é o maior livro da idade média, esse livro é estilão de demonstração, de lógica, tipo Euclides: hipótese, tese, demonstração e tudo isso, naquele estilão. Mas eles tinham toda a base anterior da idade média européia que era muita mais ligada à observação, experimentação e aí há uma mistura benéfica, uma mistura extremamente benéfica. Na hora que os cristãos recebem toda essa quantidade de coisas feitas pelos muçulmanos, pelos árabes, eles incorporam isso no pensamento medieval cristão, e aí já estamos na baixa idade média, e misturam com que eles já estavam fazendo antes, que era muita imaginação, muita criatividade, etc e deu a ciência moderna. Na verdade começa a pintar essa ciência moderna, de você fazer a observação e a partir da observação você procurar demonstrar aquilo com rigor. Começa a surgir pelo século XIV, XV com Tardini, Bacon e que vai depois dar o Newton. Isso não começa no mundo árabe, pois eles tinham muito mais idéia de ficar demonstrando e os outros misturavam demonstração com ... E assim nasce essa demonstração matemática que dá origem a um tipo de rigor matemático que, em pleno século XVII, já está sendo necessário, você não faz afirmações sem demonstrar, esse é o pensamento ocidental, essa é a filosofia ocidental o Newton faz assim, o jeitão daqueles livros, eles já estão pensando em demonstração, os princípios, etc. Eu recomendo que você dê uma olhada no estilo do Newton, muito interessante. Antes não era muito assim, o Galileu é mais conversa, é diálogo, o discurso do método é discurso e aí começa ficar..... Aí eles carregam nisso demonstrar é fazer prova. Demonstração e prova. Quando chega Cauchy esse negócio entra na idéia do rigor, entra os epsilons e deltas, tudo baseado em que? Em provas que são ancoradas em três pontos: lógica, ou seja a prova chega no final século XIX com uma lógica, mas qual é essa lógica? Uma lógica que vem da aristotélica que é sim ou não, chama a lógica do terceiro excluído. Depois, uma estrutura formal, axiomas, definições, etc. Uma lógica, uma estrutura formal e um procedimento da abstração que você não precisa dar sentido àquelas coisas, desde que você tenha a coisa coerente.... não haja contradições, que isso decorre.... Isso aí o Hilbert chega num ponto, quando ele diz: toda demonstração, toda a estrutura da geometria poderia ser feita, se a gente em vez de ponto, reta, plano falasse em porta, janela e copo de cerveja. Essa frase, atribuída ao Hilbert, tem gente que ouviu ele, não escreveu isso, mas teve gente que diz que ouviu, mostra que é pura abstração a coisa formal. Isso começa, quando eles estão avançando o sistema educacional, porque eles avançam o sistema educacional? Sobretudo na Europa, tem um grande impulso vindo da França, com as coisas do Cauchy, por exemplo, da Europa continental esse grande impulso dado por eles, também a Inglaterra... Eles estão valorizando tremendamente a idéia de uma demonstração e uma prova. Isso começa obviamente ter a sua influência nas escolas. Como as escolas técnicas, baseadas em teoria, o curso de Cauchy é um curso tremendamente rigoroso. Para você entrar na escola politécnica você tem que fazer aquele terrível exame de Bachaleorat, que também é baseado nisso. E para você fazer o Bachaleorat você tem que fazer uma preparação para o exame que é baseado nisso. Então, isso vai até a escola primária. Quando chega no início do século XX, final do século XIX, já bem finalzinho, começam a perceber que está nascendo a psicologia. Psicologia é coisa como nós conhecemos hoje é nova, sobretudo na época do Freud. Começam a pensar na mente humana como sendo algo que, tem sua maneira de ser, sua maneira de fazer, e eles começam a explicar como se dá a aprendizagem. Nessa hora, a que começa a dizer como se dá a aprendizagem, começa a haver algumas vozes que dizem: não é assim tudo formal, é muito importante olhar para a intuição, é muito importante olhar para a observação. E essa é a primeira vez que aparece uma reflexão sobre o ensino de matemática. Muitas dessas reflexões contestam a idéia de você basear tudo em lógica e demonstração e aí que vem alguns trabalhos importantes em educação Matemática. Muitos acham que a demonstração nas escolas era de Klein, mas não, Felix Klein era contra, o professor tem que ser quase como um diplomata, tem que conversar com o aluno, perceber o que eles estão sabendo e não apenas basear-se nas demonstrações. O casal ianque, o John Young e a esposa vai mais longe, a primeira vez que eles utilizam as primeiras noções de geometria dobrando papel etc, e aí você pega os conceitos geométricos e a partir daí, você pode depois falar em ..., tornar isso mais rigoroso. Então você começa ver a idéia de uma prova que é uma prova que acaba vestindo as coisas que a intuição, que a experimentação etc. Esse é o modelo que começa a se desenvolver no início do século XX e aí começa a ver essa coisa da Educação Matemática, como uma disciplina, onde você leva em consideração os processos mentais, a intuição, a experimentação, etc e, claro, associa isto à lógica, a formal, à demonstração. Então é um conceito de demonstração ou de prova um pouco mais amplo que simplesmente seguir os passos do formalismo, isso vem durante todo o século XX com muitas distorções, distorções no sentido de dizer: bom de tudo isso o mais importante é a parte formal. Os atuais currículos estão voltando à idéia da Educação Matemática do início do século eles estão dizendo fazer coisas concretas, materiais concretos. Aí a Psicologia deve ter um papel de destaque na Educação Matemática. isso começa nesse movimento chamado matemática moderna, que ficou como se fosse algo tremendamente formal, mas não é, o formal vem como conseqüência de outras coisas. Bom o que está acontecendo agora, parece que está havendo uma maior atenção para essa parte formal pelas escolas, está havendo mais atenção para essa parte formal do que para a outra parte. Isso perdeu e eles estão querendo voltar agora para o formal e com isso a idéia de fazer demonstrações e provas. Eu estou vendo assim. Se a idéia de fazer demonstrações e provas formais, se essa idéia começa a prevalecer, eu acho que é muito importante que isso aí seja trabalhado em um sentido mais amplo, próprio da Educação Matemática, se é bom ou ruim é outra discussão, mas se ela comparece eu acho bom que ela compareça o mais cedo possível, ainda na escola fundamental.. É bom que a criançada tenha uma idéia, procure entender por meio de exemplos muito simples que você tem alguma coisa que, vejamos, é difícil você dizer que permite descobrir verdades, mas que deixa as verdades... Aí o melhor que eu vejo nas escolas iniciais, inclusive no fundamental e até médio, é mostrar como as coisas podem ser enganadoras, os contra-exemplos de uma coisa que parece que é, mas não é, eu acho que isso é muito importante. Por exemplo, você estudando séries, você começar ... porque você tem que provar convergência de uma série? É um negócio tão dentro da imaginação de qualquer um que a série harmônica, não sei se converge vai ficando tudo, tudo pequenino e aí você diz que a série harmônica diverge. Começar a falar da necessidade de um critério de convergência a partir desses contra exemplos. Eu acho que os contra-exemplos são um grande motivador para você ter a necessidade, mostrar a necessidade de uma prova. Isto infelizmente é pouco trabalhado. Essas coisas eu acho que deveriam se incorporar na formação do professor, professores de todos os níveis. É muito difícil isso e eu acho que, por ser difícil, não é dada a devida atenção na formação do professor, a impressão que a gente tem é que na formação do professor eles se preocupam em preparar o professor para fazer as demonstrações; mas também o futuro professor não percebe a necessidade de demonstrações para esclarecer coisas que estão .... Esse que eu acho que é ponto que mereceria a formação de professores se dedicar mais. Em outros termos, você mostrar como são as provas e as demonstrações não é tão importante quanto justificar a necessidade de uma prova e de uma demonstração. E aí eu lembro daquele exemplo notável, a anedota, anedotário do professor que chama um aluno, durante um exame, no quadro negro e fala: me demonstre que esses dois triângulos são iguais e faz o desenho de dois triângulos. O aluno olha e fala: bom, são iguais, está aqui são iguais, se eu pego esse aqui coloco um em cima do outro são iguaizinhos, mas o senhor quer a demonstração. Aí o professor responde: está bom, então demonstra que estes dois triângulos são iguais e faz dois triângulos diferentes. O aluno responde, mas para quê eles são diferentes? Aí você cria aquele impasse. Se você está vendo e é aquilo mesmo demonstrar o quê? E aí vem uma questão filosófica extremamente importante e atual será que a prova do teorema de quatro cores é final? O que eles fizeram com o teorema das quatro cores? Um programa de computador verificou todos os casos possíveis. Todos os casos que são possíveis de se terem mapas, quatro cores bastam e aí chega alguém e diz: não está provado, está verificado. E essa é a primeira grande crise que tem, a meu entender, entre o conceito de prova e de verdade. Você obtém a verdade, por meio de, tudo gira em torno da verdade, a verdade por meio de todos os casos possíveis e imagináveis ou só se contenta com a verdade se tiver uma prova de acordo com uma lógica. Um outro exemplo que eu gosto de dar também é a demonstração de um teorema tão complicado quanto o teorema de Fermat: você pode dizer está conhecido o teorema de Fermat, que ele está demonstrado se você não viu a demonstração e não tem condições de ver a demonstração? Aí eu não estou falando de um homem comum; uma pessoa com uma boa formação não pode acompanhar essa demonstração; são pouquíssimos que são capazes de acompanhar essa demonstração, então o conceito de verdade vem em você acreditar que aqueles que olharam e acompanharam e disseram que está certo, não são todos que viram tudo poucos viram tudo. Isso se baseia na informação do outro e você faz quase que um clube. Aí você cria um critério de verdade baseado numa demonstração que é inacessível. Por isso, essa idéia de demonstração é complicada, é filosoficamente complicada. Você vai no Popper, o livro principal dele chama o álbum das refutações, que vai naquilo que disse antes: os contra-exemplos. Na formação do professor de matemática seria muito interessante o estudo da obra do Lakatos, "a lógica do descobrimento matemático: provas e refutações". Tudo isso fazer na formação dos professores, eu acho que esse tipo de discussão, esse tipo de reflexão, esse tipo de levantar a lebre, é mais importante nos cursos de formação do que a formação pura e simples para que ele faça demonstrações. Que é uma idéia que não é, acho, muito bem trabalhada na formação dos professores você ensina como demonstrar e ele vai fazer tal como aprendeu. Mas isso não conduz a nada porque a coisa principal que é – porque que eu demonstro? Seria mais frutífero as demonstrações se os alunos estudassem a prova do ponto de vista histórico, quais foram os problemas que motivaram a criação dos conceitos e a prova nesse contexto. Por exemplo, para que eu preciso demonstrar que duas coisas que eu estou vendo que são iguais que são iguais, como eu posso demonstrar que duas coisas que estou vendo que não são iguais, eu demonstro que são iguais? Tudo isso é muito sutil levar para a sala de aula, portanto essa sutileza deve ser percebida pelo professor e na sala de aula ele vai manejar isso das formas mais distintas.

Ruy:

2) *Há pesquisadores em Educação Matemática que consideram haver ruptura entre a argumentação e prova chegando a afirmar que a argumentação seria um obstáculo à aprendizagem da demonstração. Outros, no entanto, afirmam que a relação entre a argumentação e prova no processo de ensino e de aprendizagem é produtiva e inevitável, apesar de complexa. Como o senhor vê essa questão?*

Eu acho que cai nesses dois exemplos que eu dei. Você faz uma argumentação, essa argumentação não é necessariamente só discursiva, só papo, vai ser uma argumentação que envolve experimentação. E aí vem uma outra questão que é muito controvertida: será que pode utilizar movimentos nas demonstrações? Como o movimento aparece na Geometria? Movimento. não só esse movimento dos grupos de transformações, não só isso, mas na origem disso, você mostra, por exemplo, que a igualdade de triângulos é um caso de deslocando um triângulo sobre o outro aí você disse que eles têm um lado comum, a mesma origem etc. É uma prova comum. Como se justifica isso? Alguns dizem que isso é estranho e tem que ser excluído. Como que o argumento e a prova se complementam? Ou seriam coisas exclusivas ? Isso é uma questão difícil é uma questão filosófica difícil. Muito difícil. E aí o que você tem, como todas as questões difíceis, você tem linhas. A mesma coisa quando aparece o intucionismo, você tem uma linha, aceita, sim não mas você tem possibilidades de outras coisas. Aí quando a coisa fica tremendamente difícil você tem linhas filosóficas: eu aceito isso então faço assim eu aceito aquilo então faço de outro jeito. Como que isso se reflete na formação do professor? E é por isso que eu insisto a formação do professor deveria ter história da matemática, mas uma história crítica, falando sobre essas coisas não é um conteúdo matemático mas é uma apreciação desses vários momentos e das grandes crises que aparecem por posturas filosóficas. Que um professor em formação está fazendo às vezes numa escola não tão boa e que não teve uma boa base quanto ele pode ver que justifique ele optar por uma linha filosófica ou outra. É difícil botar na formação do professor essa sutileza. È muito importante você levantar a lebre. Se o professor percebe que existem essas questões filosóficas difíceis ele acaba de algum modo tendo outro comportamento com o aluno e como você faz a opção filosófica? Eu acho que é subjetivo, como você vai aceitar que argumento e prova são duas coisas distintas ou são duas coisas que complementam? Eu acho que esse é um ponto crítico. É uma questão de aceitação. Você aceita você concorda. Não adianta defender uma posição ou outra na formação do professor sem essa discussão prévia. Se você pega uma escola de educação Matemática como a da Holanda, que é gente muito boa, eles trabalham olhando para a realidade eles trabalham com modelos. É uma questão muito ideológica, o que está envolvida na aceitação de algo como verdade? Na fala daqueles que eu gosto de colocar como fundadores da Educação Matemática, Ilya kmur, Dewey, Klein, você não entra com a demonstração antes da pessoa perceber que agora é importante por isso em pratos limpos e aí que a demonstração teria lugar. Correm-se grandes riscos do sujeito ficar fechado em demonstrações. Eu insisto que você tem de trabalhar muito com contra-exemplos sobre dúvidas. O ponto fundamental é chegar onde surge a pergunta: será que é assim mesmo? E você tenta provar que é. Você propõe, cria situações em que se tenha necessidade de partir para a prova. E você não chega a isso através da prova. Essa minha percepção vem muito da minha experiência: eu tive professores muito cuidadosos, mas eu tive outros professores, que eu prezo demais, que tinham uma parte muito informal e até eram, de certo modo, descuidados – era essa a crítica que fazíamos na época! Outros demonstravam com muito rigor, mas em minha formação aproveitei menos as aulas desses professores, aproveitei menos essas disciplinas do que aquelas que os professores eram .... Lembro-me claramente, eu sempre repito como exemplo, uma aula do Farah. Ele chegou para demonstrar o teorema de Riz, um teorema fundamental análise funcional. Ele chegou, falou do que se tratava e da importância desse teorema e partiu para uma demonstração e fez a demonstração, foi fazendo, fazendo. Uma ou duas semanas depois ele volta e fala que iria retomar a demonstração do teorema e falou: eu quis utilizar uma demonstração, vi uma demonstração, que parecia bem mais simples do que a demonstração que estava nos livros e fiz aqui, mas chega nesse ponto tem uma falha; vocês não considerem essa demonstração pois ela está errada, é inválida! Vários exemplos você tem daí: primeiro ele está dando uma aula em que ele está construindo a coisa, nessa construção, claro, tudo que você faz tem possibilidade de dar uma tropeçada e, às vezes, você nem percebe o tropeço na hora. Eu acho isso no processo criativo absolutamente normal. Bom, depois, a segunda coisa extremamente positiva, que para mim é um exemplo que dura até hoje, foi a honestidade dele: de chegar para gente e dizer o que eu fiz está errado, demonstração nova, original, mas está errada, vamos ficar então com a demonstração que está nos livros! A questão básica é o conceito de verdade. Mas o que é verdade? O que se demonstra é verdade? É. Até você, talvez, filtrar um pouco melhor ou pode ser que isso nunca apareça. Na hora você pode passar a acreditar porque tudo mundo, os grandes matemáticos, acreditam. Olhar para o conceito de demonstração desligado dessa coisa que é algo mais que a demonstração, o argumento que você falou, eu acho que não responde aquilo que a gente pensa como deve ser verdade em educação. Um outro matemático que tinha uma posição que inspirou muito os educadores matemáticos foi Whikney e ele trabalhava com crianças. Ele propunha uma questão e trabalhava com o erro da criança, pede para ela argumentar em relação a aquele erro porque ela fez isso, porque fez aquilo, vai colocando a pessoa no caminho que é uma forma de fazer também uma demonstração. Eu acho que com os cuidados que eu já mencionei aqui acho que o processo de argumentação e prova pode ser incluído nas escolas. Não cair nisso, por exemplo, da criança olhar a demonstração ela tenha que entender e repetir aquilo como um papagaio, não mas ela chegar, ou seja, se conseguirmos fazer que um aluno, num certo momento, ainda que criança, chegue a uma coisa onde ela tem dúvida, seja intuição, seja a observação, seja a experimentação dela, não está satisfazendo, não está respondendo, que ela recorra a um pensamento abstrato, eu acho esse momento muito importante. Agora, a minha dúvida é se você vai fazer isso como parte do programa ou se você vai fazer isso como uma maneira de convencer. Não sei se você conheceu um projeto denominado de novos materiais para o ensino da matemática, de Campinas dos anos setenta, Geometria Experimental, por exemplo. O que nós estávamos interessados em fazer? Que o aluno conhecesse algumas propriedades geométricas dos sólidos, poliedros regulares em particular. Porque começar com geometria plana, tudo tão abstrato? A idéia era mesmo começar com três dimensões, com os sólidos. Mais concreto portanto. Começamos a explorar os sólidos e para explorar os sólidos começamos com as propriedades, aquelas que são perceptíveis pelos sentidos. Através de uma bacia com água eles verificavam que os sólidos deslocavam água, que tinham volume, densidade, noções aparentemente difíceis mas que crianças foram aprendendo com facilidade. E aí surgia a pergunta: o que é comum a todos esses sólidos que foram mergulhados na água? Queríamos, talvez, que eles dissessem que boiavam que não boiavam. Lembro-me de um aluno que disse: eles ficam todos molhados. Quando é que passaria pela nossa imaginação pensar que de todas as propriedades que a gente estava querendo que eles descobrissem é que quando põe os sólidos na água, o mais importante, imediato, é que eles ficam todos molhados. Esse é um passo para você dar um pulo em abstração e querer que ele abstraia da água, isto é que eles acabam fixando a atenção no sólido e não na coisa como um todo e esse foi um aprendizado muito importante para nós, os professores. Quer dizer você de algum modo tem que eliminar o contexto para poder falar... A idéia de prova é isso elevado ao .... Você elimina o contexto, você elimina o significado do objeto, você fica puramente em aspectos formais. Eu acho que essas coisas bem cedo, que é o ponto de partida para se falar em prova, demonstração, seria importante trabalhar isso. Levantar conjecturas .... Mesmo que você não chegue a completar a demonstração nas primeiras séries, mas se você chegar a esse ponto, provavelmente o aluno vai querer seguir ... No fundo eu sou uma forma muito boa de ser, tipo de utilitário, as coisas despertam seu interesse na hora que você sente uma necessidade, quer dizer não é uma necessidade só material, mas uma necessidade intelectual. Este é o momento tem que ser trabalhado. A necessidade intelectual é o ponto de partida. Isso só pode ser trabalhado com criança se você trabalhar isso com os professores. A formação de professores na verdade deve ser, tudo o que você acha que deve fazer com a criança, você deve fazer com ele.

3) *Professor, como minhas questões se superpõem, vou fazer minhas duas últimas perguntas. De certa forma o senhor já falou sobre alguns pontos: Que experiências um futuro professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio deveria vivenciar em sua formação inicial para ter competência na organização e direção de situações de aprendizagem envolvendo argumentações e demonstrações na escola básica?*

Não sei se você leu meu artigo na entrevista que eu dei para a revista da SBEM sobre a formação de professores. Lá eu falei uma coisa que escandalizou um monte de gente, eu disse: basta demonstrar um teorema nos cursos de formação de professores de matemática. Com isso, o que eu quis dizer que o importante não é o teorema em si, o importante é dar um exemplo de como a coisa que funciona. Se um professor entende um teorema. Qual é o passo seguinte? Agora, qual é o teorema importante? Depende de vários fatores, até do gosto. Se precisasse escolher um, escolha um que envolva muitos conceitos. Como você escolhe um quadro ou vários em uma exposição? Como eu posso dizer que alguém que vai ao Louvre e que só pare diante da Monalisa? Um bom exemplo é navegar na Internet. Eu posso dizer entre nesse site procure nele isso e aquilo, mas ele não sabe navegar, ele não aprende dessa maneira a navegar, mas só sabe chegar naquele site. Seria diferente eu dizer procure tal coisa; e aí ele pode aprender a navegar. Ele deve ter visto coisas que podem não ter passado nunca em sua cabeça. Metaforicamente é isso que a gente deveria fazer nos cursos. É isso que eu tento passar naquele artigo que escrevi. Mas teve gente que me escreveu e disse:mas um teorema só, eu acho que deveriam ser vistos pelo mesmo três, outros que não poderia ser menos de cinco. Se um curso vai ficar melhor porque dá três em vez de um, ou cinco em vez de três, tudo bem, mas a idéia não é essa: é muito importante o professor saber o que é uma demonstração, que passos ele pode dar, etc... . O importante é levar o aluno a desconfiar, procurar contra-exemplos. Nesse contexto as demonstrações teriam sentido. Aí poderiam ser provados diversos teoremas. No aspecto da formação de professores, retome aquele meu artigo pois eu falo sobre conteúdos, sobre teoremas. Eu continuo acreditando naquele artigo. Cada vez fica mais complicado dizer todas as disciplinas todos os conteúdos necessários, porque não tem como reverter o processo que os alunos vão chegar cada vez mais defasados se compararmos com o padrão de antigamente. As crianças de hoje percebem muitas outras coisas. O processo do mundo de hoje é outro. E aí voltamos ao ponto de partida, que é uma questão filosófica, o que a gente deve entender hoje por uma demonstração? O que a gente deve entender por uma demonstração matemática? Esse conceito de prova foi modificando na história, analise esse aspecto em seu trabalho. Bem qual era a pergunta mesmo? Ah.. quer dizer, o estudante de Matemática que vai ser professor precisa como eu já te disse, quando estudar um certo assunto, experimentar, fazer conjecturas, procurar contra-exemplos, etc. Precisa também conhecer o significado de prova num sistema axiomático, afinal ele está estudando matemática. Mas ele precisa ver também algumas formas de abordar provas quando for dar aula na escola; que teoremas provar, que caminho seguir, etc.

Professor IE

1) *Em alguns países as atuais orientações curriculares de Matemática preconizam um trabalho com demonstrações em escolas de educação básica. Os PCN, por exemplo, indicam um início de trabalho com a prova já no Ensino Fundamental. O senhor concorda com estas orientações? Qual deveria ser o significado do trabalho com a demonstração nas aulas de Matemática na educação básica?*

Eu acho que na educação básica o papel da demonstração seria o de convencer; a demonstração não deve ser assim algo apoiado em axiomas, numa teoria axiomática. No nível fundamental eu trabalho na linha, a partir de uma experimentação a partir de uma conjectura que o aluno levanta a etapa seguinte seria de formalização em que seria importante apresentar a demonstração para que o aluno passe do plano perceptivo para o plano dedutivo, mas de uma maneira que não intervem todo o passado daquele teorema, deve ser algo mas uma prova, eu diria se eu posso usar a expressão, uma axiomática local. A partir de evidências, que ele vai obtendo, a partir de alguns resultados evidentes aí entra a demonstração. O que o aluno não gosta é daquela demonstração que necessariamente se apóia em várias deduções até chegar naquele ponto. Eu acho que ela é fundamental, não se pode ficar somente no plano perceptivo, eu acho que essa etapa é mais difícil passar do plano perceptivo para o plano dedutivo, mas ela tem que ser feita de uma maneira suave, de uma maneira que demonstração seja sinônimo de convencimento e não de tortura. Esse é um ponto que eu acho importante.

Ruy:

2) *A segunda questão, que de certa forma você já respondeu, é a seguinte: há pesquisadores em Educação Matemática que consideram haver ruptura entre a argumentação e prova chegando a afirmar que a argumentação seria um obstáculo à aprendizagem da demonstração. Outros, no entanto, afirmam que a relação entre a argumentação e prova no processo de ensino e de aprendizagem é produtiva e inevitável, apesar de complexa. Como você vê essa questão?*

Eu particularmente acho fundamental essa etapa de argumentação antes de uma formalização. Eu acho que inclusive é uma etapa que deve ser verbalizada. Eu acho que a verbalização é muita importante nesse processo. Eu acho que a argumentação ajuda no processo de formalização. Se você já verbaliza tudo aquilo que imagina ser uma prova, fica mais fácil depois formalizar. Então eu sou adepto a essa questão da argumentação precedendo, um passo anterior à demonstração. Como nós estamos no ensino básico eu acho fundamental a linguagem, a língua materna, talvez numa etapa posterior, como a formação inicial de professores de Matemática, você pode eliminar um pouco a questão da linguagem, diminua um pouco, nunca eliminar. Nessa fase inicial como, para mim, a demonstração é convencimento e o convencimento vem da palavra, vem da persuasão nesse sentido de convencer o outro.

3) *Que experiências um futuro professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio deveria vivenciar em sua formação inicial para ter competência na organização e direção de situações de aprendizagem envolvendo argumentações e demonstrações na escola básica?*

Eu sou defensor de que na formação inicial é absolutamente necessário que um futuro professor tenha um curso axiomático. Eu defendo essa idéia. Na apresentação dos axiomas e na apresentação de todos os teoremas interligados, isso é muito importante na formação dele para depois, ele poder fazer, como eu já frisei, o convencimento. Se você não tem uma formação sólida, uma formação que foi vivenciada na base de uma teoria axiomática, você poderá se atrapalhar depois nessa questão do convencimento. Você não terá argumentos para colocar para o aluno. A linha lógica tem que estar na sua cabeça, para você poder trabalhar com os alunos nessa faixa de 15, 14, 13 e 12 anos, acho que a sétima série é 13, 14 anos. Eu acho que na formação inicial deveríamos ter um curso axiomático, mais que os professores da licenciatura tivessem um outro olhar, um olhar assim mais crítico, propor experiências e verificações de todas as proposições, todos os teoremas da geometria, para depois então poder trabalhar com a demonstração. Mas o que não pode acontecer é o professor do ensino médio reproduzir o processo: o que foi apresentado para ele na sua formação ele repete tal e qual para seus alunos. Mas eu defendo um curso axiomático para um alargamento do horizonte do professor, somente apenas nesse aspecto, para depois trabalhar com seus alunos. Numa formação inicial eu acho muito importante que o professor, o futuro professor, seja colocado nas etapas de construção, exploração, conjectura, justificação do resultado. Ele precisa dessas etapas para aprender a provar e compreender os conceitos. Essas etapas são fundamentais no processo de formação inicial. Agora quando chega na justificação, é que eu acho que, nesse caso, ele tem que ter o apoio dos postulados para poder entender exatamente o que é uma justificativa matemática. Mas, no curso de formação inicial, eu sou totalmente contra ter um curso somente axiomático. Eu acho que o curso axiomático tem que entrar junto com essas etapas, senão ele não entende o axiomático. É muito difícil. Eu acho fundamental o desenho por exemplo, as construções geométricas eu acho fundamental num curso de formação inicial porque, muitas vezes, o futuro professor nunca teve isso dentro de sua formação na escola. As etapas de manipulação, hoje com a geometria dinâmica oferecem um aspecto muito interessante para levantar conjecturas e jamais num curso de formação inicial, principalmente, deixar o aspecto dedutivo. Há um pesquisador francês, o Parzys, ele coloca as etapas do desenvolvimento do pensamento geométrico: geometria concreta, geometria espaço-gráfica da representação, geometria proto-axiomática que é uma geometria dedutiva, mas baseada em evidências e finalmente a última etapa que ele chama de geometria axiomática. Essa etapa é que poderia ser apresentada aos alunos numa formação inicial, uma etapa mais rigorosa. Se não houver essa etapa o futuro professor ele jamais poderá imaginar que existe atrás de um teorema todo um conjunto de axiomas que permite dizer isso ou aquilo. Em termos de formação a axiomática é importante, mas numa formação inicial somente o aspecto de dar um curso axiomático não é bom. Isto porque o futuro professor acaba, infelizmente, imitando o que teve na licenciatura ele precisa ter as etapas que precedem; são as etapas exploratórias. Quanto aos conteúdos eu gostaria de dizer o seguinte: existem as configurações mais importantes que são a configuração de Tales, configuração de Pitágoras, a configuração de semelhança e a configuração da congruência. São quatro etapas. Mas, eu acho importante hoje trabalhar com as transformações, tanto as isometrias quanto a homotetia, porque elas hoje, a gente percebe, conseguem fundamentar melhor todos os aspectos de congruência e semelhança. Quer dizer eu colocaria hoje como conteúdos prioritários dentro de um curso de geometria as isometrias as homotetias e a semelhança e um trabalho com as configurações: seria uma geometria mais ligada a parte de medidas, Tales e Pitágoras são assuntos importantes. Acho que para o futuro professor ele teria que ter do Teorema de Tales um conhecimento profundo de tudo o que se passa. E como ele vai falar em Tales e Pitágoras seria interessante uma volta à história e ver que na antiguidade eles não tinham...., as grandezas naquela época eram sempre comensuráveis e depois, toda essa etapa de amadurecimento para poder chegar nas grandezas incomensuráveis, essa passagem histórica é importante para que o professor ter consciência pois senão depois vão usar o Tales e nem sabem o que está acontecendo. As demonstrações do teorema de Tales e do teorema de Pitágoras são importantes dentro daquilo que eu vejo como fundamentais. Elas teriam sentido, pois o futuro professor estaria motivado para demonstrar esses teoremas. As congruências também, os critérios de congruência para poder justificar várias propriedades fundamentais.

RUY: Você está falando também na formação do professor?

Sim, mesmo no curso de formação de professores, sim também. No curso em que trabalho, nós temos quatro anos de geometria: a gente trabalha com a geometria plana durante um ano e é um curso em que a demonstração aparece, como também aparecem as construções, uso de Cabri, de levantamento de conjecturas, de dedução, é um curso dedutivo. Então, na verdade esse curso é uma volta a um conteúdo de 7ª e 8ª séries, mas você pode colocá-lo, todo esse desenvolvimento, num ponto de vista mais avançado. Eu gosto muito de trabalhar com a história, então quando eu apresento um curso eu gosto muito de fazer uma contraposição do sistema axiomático de Euclides com o sistema axiomático de Hilbert, eu gosto de falar do sistema axiomático de Birchofff. O Birchoff introduz as medidas, já o Hilbert é um curso mais sintético. Há essa riqueza, você está tratando do mesmo assunto só que do ponto de vista mais avançado. É isso que o professor gosta, ele não quer que você repita tal e qual ele viu no ginásio e colégio, mas se você volta naqueles conteúdos do ponto de vista histórico, misturando, quer dizer comparando os sistemas de axiomas, fica muito mais rico, muito mais interessante. Você pode chegar para ele, por exemplo, e mostrar uma estrutura, que ele muitas vezes não percebe. Você parte, por exemplo, de alguns axiomas de pertinência e você diz: essa é a geometria da pertinência e agora eu vou acrescentar mais dois ou três axiomas de ordem e você tem a geometria ordenada; se eu acrescento os axiomas de congruência mais a continuidade você tem a geometria absoluta; se na geometria absoluta você acrescenta mais um axioma, o do paralelismo, você tem a geometria euclidiana; se você elimina esse e coloca a geometria de Lobatchevisky você tem a geometria não euclidiana, a geometria hiperbólica; se você parte da pertinência e acrescenta apenas um axioma, o do paralelismo, você está na geometria afim; se você trabalha com a geometria afim você tem poucos axiomas, cinco ou seis e se você trabalha com a geometria euclidiana você tem quinze, dezesseis axiomas. Toda essa visão para o aluno é interessante, ele pode ter alternativas de ver .... Na França, por exemplo, trabalha-se com a geometria afim: são três axiomas de pertinência mais um axioma paralelismo, é uma geometria pequena, com poucos axiomas, que você pode fazer muitas coisas. No Brasil nós temos a mania de trabalhar já com a geometria euclidiana que você tem dezesseis axiomas para apresentar. Essa visão que o professor não tem e que eu acho importante que ele observe toda esse panorama, essa riqueza. Eu acho que o curso que a gente costuma dar no ginásio temos que dar de novo, mas que com nova ótica, algo mais rico. O professor começa a gostar: ele diz estou encadeando, fazendo ligações. Situar, colocar o professor diante desses diferentes axiomas; dizer para ele que o livro de Euclides é maravilhoso, mas que o sistema de axiomas é incompleto, tudo isso é muito interessante. Euclides deixou cinco postulados, hoje são, no mínimo, dezesseis, há um complemento aos postulados de Euclides. É importante o futuro professor saiba que com aquilo que Euclides propôs eu não posso justificar isso, mas não posso justificar aquilo. Essa é uma riqueza: fazer uma crítica, mostrar para ele as imperfeições de Euclides, para que o professor sinta que há toda uma lógica nessa introdução hoje de dezesseis axiomas; não é de repente que a geometria plana tem que ter dezesseis axiomas. Agora o desenvolvimento é que eu acho muito interessante: o futuro professor deverá sentir que se levou dezoito séculos para que em 1900 o Hilbert aperfeiçoasse a axiomática de Euclides pela insuficiência de postulados. Toda essa riqueza que faz com que o professor leve todo esse entusiasmo para a sala de aula. Na formação de professores poderia ser feito, como nós fazemos aqui: como já falei a geometria plana no primeiro ano e discute-se a maneira que ela tem que ser apresentada aos futuros alunos, no segundo a geometria espacial, e acho interessante numa formação inicial abordar aspectos da perspectiva cavaleira e da geometria descritiva, porque são duas oportunidades que o professor tem de mostrar onde está essa geometria espacial tão falada.... A gente pode a partir da descritiva mostrar exatamente onde estão os planos perpendiculares, a questão do rebatimento; não dar um curso completo de descritiva, apenas um curso bem pontual para mostrar a riqueza como planos paralelos interceptados por um outro plano, tudo isso na descritiva; na cavaleira é muito interessante, pois todos os teoremas que ele vê na geometria espacial ele pode aplicar isso na cavaleira, por exemplo, fazendo a intersecção de um cone por um plano, aí se recai na intersecção de reta com plano e para fazer essa intersecção é preciso estudar a intersecção de dois planos. Existe uma riqueza de utilização dos teoremas da geometria do espaço a partir dessas representações. Já no terceiro ano a gente trabalha com as geometrias das transformações; logo no começo trabalhamos com as isometrias: reflexão, depois a translação, depois a rotação, um caso particular da rotação a simetria central, depois homotetia, depois vem a semelhança – a semelhança está totalmente ligada com a homotetia, que é um enfoque totalmente novo, pois nos livros didáticos adota-se o ponto de vista de

Euclides, nos quais a semelhança ela vem exatamente como conseqüência do Tales e dentro dessa perspectiva a semelhança vem a partir da homotetia. A partir disso, nós apresentamos os complexos para ver como as transformações agem nos complexos. No último ano nós trabalhamos com a questão da inversão para poder entrar nas geometrias não euclidianas e essas propiciam, dá a oportunidade para o aluno, rever toda a geometria absoluta. Porque a geometria que não depende de um postulado de Euclides, o quinto postulado, é a geometria absoluta e as não Euclidianas pressupõe que o aluno tenha esse conhecimento. Então essa é uma outra maneira de fazer um resgate de toda a Geometria absoluta lá do primeiro ano. Ainda nesse último ano, trabalhamos quatro meses com as cônicas. Esse trabalho que temos desenvolvido, que não se limita apenas aos aspectos algébricos, pois estudamos as cônicas por meio de quatro pontos de vistas: secção cone, lugar geométrico, curva algébrica e projeção de uma circunferência num plano. Então é uma oportunidade de misturar todos os conceitos; usar toda a geometria vista nos anos anteriores. O estudo das cônicas é vista a partir do espaço, é uma riqueza. A partir do espaço, a gente corta o cone por um plano, utilizando a descritiva, coloca a cônica no plano, usa toda a geometria plana para trabalhar e depois levantar conjecturas e depois obter as caracterizações experimentalmente, estabelecer as equivalências entre as caracterizações usando a processo dedutivo, as demonstrações. Muitos alunos depois desses cursos passam a gostar muito da Geometria em especial pela demonstração. Tenho um aluno que, não era nada excepcional, mas que pegou gosto pela demonstração, apresenta demonstrações de duas ou três folhas, está produzindo muito; mas nem todos se interessam por demonstrações e menos ainda dessa forma. Falando em demonstrações é preciso ter cuidado, escolher a hora adequada para fazê-las. Gosto da Douady, ela propõe uma nova organização para a construção de conceitos aquela proposta ferramenta-objeto, a gente trabalha primeiro como ferramenta para depois institucionalizar essa ferramenta como sendo objeto. Essa organização da Regine Douady eu acho muito interessante. Você quer apresentar, por exemplo, o conceito de translação para o aluno, mas isto ele pode manipular o Cabri, abrindo a janela de translação ele mesmo manipular isso, a partir do que é dado e do que é apresentado na tela ele mesmo vai procurar características, e finalmente entra o conceito de translação e depois as demonstrações. Ou seja ele manipulou o objeto, tem o domínio dessa manipulação, tenta descrever características, usando medidas, usando uma série de ... ele chega, ele está apto a ter o conceito, o aspecto objeto do conceito, e depois disso é que seria o momento propício para fazer uma justificativa mais teórica, uma dedução, fazer demonstrações. Mas sem essa etapa inicial a dedução também cai por água abaixo, ele não manipulou, não sentiu, não explorou aquela situação, não consegue...Eu sou adepto a essa organização da Douady, de apresentar primeiro o aspecto ferramenta e depois o aspecto objeto do conceito. Ela propõe essa modificação, a transposição didática tradicional faz isso: apresenta primeiro o aspecto objeto do conceito e só depois, nas aplicações é que se apresenta o aspecto ferramenta do conceito; mas ela inverte esse processo.

Professor IF

1) *Em alguns países as atuais orientações curriculares de Matemática preconizam um trabalho com demonstrações em escolas de educação básica. Os PCN, por exemplo, indicam um início de trabalho com a prova já no Ensino Fundamental. O senhor concorda com estas orientações? Qual deveria ser o significado do trabalho com a demonstração nas aulas de Matemática na educação básica?*

Então, eu concordo com isso, e eu penso o seguinte: que ao longo dessas últimas décadas a matemática, principalmente pré-universitária, acabou se reduzindo a uma coleção de algoritmos cujo sentido, para os estudantes, se perdeu, e pior ainda, atualmente para os próprios professores esse sentido também se perdeu. Em geral os professores não conhecem, não sabem justificar as etapas de um algoritmo. Olha, os algoritmos se constituem em uma parte importante da matemática, mas qualquer algoritmo dentro da matemática tem uma justificativa de cada uma das suas etapas, e essa justificativa pode ser dada desde sempre, desde a operação de soma, de subtração, de multiplicação. Cada uma dessas operações pode ser ensinada para os alunos de tal forma que cada etapa tenha um sentido, uma justificativa. Isso não significa que a partir de um certo ponto, as pessoas, os estudantes, os próprios professores, não possam usar isso de uma maneira mecânica, mais isso deve ser feito de tal maneira que os estudantes compreendam que em qualquer momento eles podem recuperar o significado de cada uma dessas etapas, e isso justifica, porque quê eu acho que deve estar desde sempre a idéia de argumento em matemática. Que a matemática na realidade, os algoritmos são uma parte muito pequena, e está apoiada na essência dela, que é o fato de ser uma ciência estruturada a partir de certos pressupostos que seriam os axiomas de uma maneira lógica de tal forma que tudo pode ser justificado. Então, não adianta querer resolver isso de repente, nos seis primeiros meses da universidade, porque não adianta não vai sair. Isso é possível porque principalmente se a gente se atém aos tópicos de geometria e geometria é a área da matemática da qual eles têm experiência empírica desde sempre, se pode dizer, e nos tópicos relacionados com números, principalmente os números naturais e inteiros. Também é muito fácil gerar argumentos simples, não necessariamente uma prova formal, mas gerar pequenos experimentos de generalização, por exemplo esse problema você pode dar desde sempre: o produto de quatro naturais consecutivos é a diferença entre o quadrado natural e 1; eles mesmo experimentando com inteiros descobrem qual é esse número que eles devem elevar ao quadrado e eles com um pouquinho de álgebra que eles conhecem, de manipulação de letrinhas, eles podem chegar a argumento convincente para eles mesmos de que isso pé verdade. Tem muita coisa nessa direção que pode ser feita e eu acredito que isso só pode ser feito por um professor que tenha tido uma formação em que isso seja um elemento constante, presente nas disciplinas em geral. Volto a repetir: não adianta querer resolver isso de repente, tem que ser uma coisa ao longo de todo o tempo.

2) *Que experiências um futuro professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio deveria vivenciar em sua formação inicial para ter competência na organização e direção de situações de aprendizagem envolvendo argumentações e demonstrações na escola básica?*

Eu penso o seguinte: se olharmos as diretrizes curriculares nacionais encontramos lá uma descrição de conteúdo. Eu vou me ater aos tópicos de geometria e álgebra, tem outras coisas como análise etc etc, mas eu vou me ater a esses dois tópicos para ilustrar meu ponto de vista. Em álgebra existem muitas opções de conteúdo, a gente pode ensinar álgebra linear, que é mais ou menos uma unanimidade nos cursos de licenciatura, a gente pode ensinar as estruturas algébricas, a gente pode ensinar teoria elementar dos números ou a gente pode ensinar isso tudo. Décadas atrás era possível ensinar tudo isso. Atualmente, os professores vêm com uma formação muito precária, uma falta de maturidade gritante, mesmo nas coisas que deveriam ser das experiências comuns como geometria e números. Então é necessário que a gente faça certas opções. Eu tenho um ponto de vista, bem pessoal, de que, por exemplo, Álgebra Linear é secundário e a gente deve priorizar Geometria e o ensino de Teoria dos Números Inteiros, que são os tópicos que depois podem frutificar em tópicos interessantes no ensino na educação básica. Meu ponto de vista é esse. Isso é fácil de exemplificar, como o exemplo que eu já dei. Tópicos de Teoria Elementar dos Números podem gerar um senso crítico para não tomar um exercício simplesmente como um algoritmo mas olhá-lo como um problema que eles têm recursos para enfrentar e que com esses recursos ele pode argumentar porque ele procedeu dessa maneira. Eu vejo assim. O que acontece que os professores chegam atualmente, eles mesmos, com uma coleção mais ou menos rica, dependendo do professor, de algoritmos dos quais eles não conhecem o sentido. Raramente, você encontra um professor que conhece um argumento que mostre, por exemplo, que as regras de divisibilidade por 3, por 5, etc são verdadeiras. Geralmente, eles não conhecem nada disso. Na geometria, não especificamente dessa área, mas sei que a situação é semelhante. Eu penso que essas duas áreas têm um potencial de gerar maturidade nos professores e ao mesmo tempo gerar iniciativa neles para aproveitar conteúdos na educação básica que possibilitem gerar nos alunos essa atitude crítica, essa atitude de argumentar na direção de formalmente transformar ... Para o professor ensinar argumentação e prova ele tem que ter visto isso, evidentemente, em sua formação. Também tem que ter entendido, parece óbvio mas atualmente a maioria não pensa assim, que os algoritmos em matemática são uma área pequena e que suas justificativas estão presentes na matemática e elas são muito importantes. O professor deve reconhecer que a parte da matemática que trabalha com argumentos que é a essência da matemática e não os algoritmos. E isso, se ele não tiver no curso de licenciatura ele não poderá trabalhar isso com seus alunos. Deles. Resumindo: eu penso que essas duas áreas têm um potencial de gerar maturidade nos professores e ao mesmo tempo gerar iniciativa neles pra aproveitar conteúdos da educação básica que possibilitem, gerar nos alunos essa atitude crítica e essa atitude de argumentar. Ou seja: a parte da matemática que trabalha com argumento é a essência da matemática, e isso, se ele não tiver no curso de licenciatura dele, ele jamais poderá transmitir isso pra seus alunos. Eu penso que a geometria e a álgebra deveriam ser priorizadas no curso de formação porque elas são parte da experiência comum de todos os seres humanos, ou seja nós temos experiências com os números inteiros, desde sempre, e de objetos geométricos também. Então é fácil você propor pequenos experimentos, tanto com números como com geometria na forma que você não precisa enunciar uma verdade; os próprios estudantes podem ir trabalhando, e chegar a enunciar uma proposição ou algo que eles pensem que é verdade, conjecturar, enfim. Isto é o cerne de um teorema. Nós podemos apresentar argumentos informais, que são suficientemente convincentes para esses estudantes, e que são suficientemente decentes pra um professor ensinar, sem achar que com esta com argumentação não formal ele esteja "diminuindo" o conteúdo que ele estava ensinando. Então, em geometria e álgebra acho que a gente encontra muitos temas que são propícios pra isso. Na verdade, um professor que tenha uma formação sólida em matemática, pode pensar que trabalhar a demonstração, ele tem que fazer aquela demonstração extremamente rigorosa, com toda a simbologia. Pode não aceitar que ele pode colocar situações pra os alunos para que eles procurarem argumentos que justifiquem, ainda que num dado momento seja meio empírico. Acho que esse caminho talvez seja difícil pra o professor. Esse caminho é difícil pra o professor por que ele tende, eu penso assim, o professor hesita em trilhar esse caminho porque ele tem que ter suficiente auto-confiança para se expor a acabar se defrontando com situações muito, muito, que eles podem não ter previsto, na aula, que os alunos podem apresentar conjecturas de uma certa maneira lá que ele nunca pensou, então ele tem que ter confiança no conhecimento dele que de tal forma, na hora ele vai ter presença de espírito pra aproveitar aquela conjectura, didaticamente de uma maneira frutífera. Então, se ele não tiver isso, ele vai seguir uma trilha muito estreita de planejamento de aula e etc e de conteúdos que ele vai trilhar, que é muito mais fácil. Assim, se ele seguir essa trilha mais fácil ele estará cortando a possibilidade do aluno vivenciar o ponto central da Matemática que é justamente a questão de levantar conjeturas. O professor deve gerar, já nos estudantes desde muito cedo essa atitude, que é própria de um pesquisador matemático, que é a atitude de você fazer conjecturas, de você experimentar os objetos sobre os quais você está examinando, e tentar depois estabelecer algo que você pensa que seja verdade para todos esses objetos, digamos, e depois tentar um argumento convincente a respeito disso. É isso que eu penso. Eu acho que as crianças têm uma curiosidade natural. Na área de matemática, ela poderá encontrar um campo onde essa curiosidade pode ser muito aumentada e satisfeita. E o processo de prova pode contribuir para isso. Mas matemática pode fazer o contrário disso: ensinando uma série de procedimentos cujos sentidos os alunos não viram e não entendem; eles têm que fazer e pronto. Então acaba, depois, lá no fim do ensino médio gerando aquele tipo de estudante que quer só o exercício que ele pode resolver com a receita que ele já tem, etc. Então é isso que eu penso que a gente não esta gerando discípulos que vão amar a matemática, como a gente ama. Em relação aos teoremas, eu não tenho, assim, muito, digamos eu não tenho uma opinião muito definida sobre qual seriam os teoremas, nem nada... acho que, por exemplo, eu, entre álgebra linear e teoria elementar dos números inteiros, eu prefiro teoria elementar dos números inteiros e então a minha resposta pra você seria o seguinte: dentro da teoria elementar dos números inteiros, eu acho que o teorema fundamental da aritmética é um teorema importante, porque ele faz uma... ele acaba levando uma seqüência de conceitos e de resultados, ele produz um coroamento disso. Agora eu acho que você, fazendo uma opção de conteúdo, você tem que encontrar uma seqüência tal que os conteúdos que o que você ensina, em termo de conceitos e resultados vá se articulando de uma tal maneira que leve a um momento de síntese, assim, pra que ele tenha uma experiência de alguma área da matemática como conhecimento articulado. Mas não necessariamente, tais e tais teoremas...Vou falar de uma área que eu conheço bem, a licenciatura, né? Eu tenho esse curso de teoria dos números inteiros, esse curso quando eu dava no começo, eu dava uma abordagem axiomática, e eu renunciei a dar essa qualidade axiomática, porque não adianta você apresentar uma seqüência de axiomas pra quem não tem maturidade pra entender isso. E os alunos chegam às universidades cada vez menos preparados. É como eu acho que a historia da matemática ensina muito pra gente; se os axiomas apareceram no fim do século passado não tem por que eu achar que gente que não teve uma boa formação matemática, vai ter maturidade pra entender isso, Então, eu não faço mais assim. Escolho começar com o algoritmos da divisão de números inteiros, e vou andando por aí, e faço uma demonstração do teorema fundamental da aritmética, e não uso principio da indução, que eu sei que é uma coisa difícil, mas eu vou reunindo esses conhecimentos de forma articulada, de forma que lá no fim ele vai chegar a poder trabalhar bem o conceito de número primo, etc. e assim por diante. Então, por exemplo, não dou equações diofantinas se eu não tenho tempo, eu vou fazendo opções, tá? Agora, se eu tiver uma turma melhor, eu igual vou fazer assim, e vou lá no fim recuperar a abordagem axiomática, porque dai eu acho que já produzi uma experiência mínima com os números inteiros que vá permitir. Então lá do fim eu mostro, mais ou menos como fiz na historia. Então eu acho que sempre vai ter um caminho assim, não tenho nenhum teorema que eu ache isso aí não pode deixar de ser feito de maneira nenhuma... é um pouco assim, quer dizer, eu sempre fiz a abordagem axiomática, eu achava que era isso que tinha que fazer os estudantes tinham que ser expostos a uma exposição sistemática de uma área da matemática ao menos uma vez, agora, eu não penso mais assim, por que eles não vêm com a experiência de números inteiros que eu esperava que eles viessem, então eu priorizo gerar neles uma experiência rica sobre os números inteiros. Penso que para fazer uma abordagem axiomática e é necessário se ter uma experiência muito rica com os objetos, pra você poder apreciar... Então é mais ou menos o que acontece com o conceito de função.

Professor IG

1) *Em alguns países as atuais orientações curriculares de matemática preconizam um trabalho com demonstrações em escolas de educação básica, os PCNs, por exemplo, indicam reinício de trabalho com a prova no ensino fundamental. Você concorda com essas orientações? Qual deveria ser o significado com as demonstrações nas aulas de matemática na educação básica?*

Olha, eu concordo sim, eu já vi esse trabalho em andamento em outros países, e já vi pessoas que trabalham com demonstrações desde a escola básica, em outros países e eu acho isso muito importante. Eu acho que o ato de você pedir para um aluno de escola básica, justificar por que quê ele fez tal ou tal procedimento, na resolução de um exercício, quando ele justifica ele esta procurando uma argumentação, essa argumentação pra evoluir para as demonstrações, não é que ele vai sair da escola básica, não é que o aluno vai sair da escola básica, fazendo demonstrações formais, ele não precisa necessariamente provar tudo o que faz, mais o processo de construção da prova é importante para a formação do raciocínio dedutivo.

2) *A segunda questão, que de certa forma você já respondeu, é a seguinte: há pesquisadores em Educação Matemática que consideram haver ruptura entre a argumentação e prova chegando a afirmar que a argumentação seria um obstáculo à aprendizagem da demonstração. Outros, no entanto, afirmam que a relação entre a argumentação e prova no processo de ensino e de aprendizagem é produtiva e inevitável, apesar de complexa. Como você vê essa questão?*

É, eu acho que eu toquei, mais eu acho que eu posso completar, no sentido, assim, talvez eu seja extremamente parcial porque o grupo que eu convivi, que trabalha em pesquisa com isso, trabalha com argumentação, que é o grupo do Nicolau Balacheff, e a argumentação nesse sentido é um processo, no que nos podemos montar nesse grupo, notar nesse grupo, é um processo extremamente importante. É acessível pra criança e a evolução e a complexificação dela, ela pode ser gradativa, respeitando o tempo da criança, do aluno. O professor da Educação Básica deve levar em conta que o trabalho com a argumentação é extremamente importante, é um processo que deve ser desenvolvido nas escolas.

3) *Que experiências um futuro professor de matemática do ensino fundamental deveria vivenciar em sua formação inicial pra ter competência pra organizar, dirigir situações de aprendizagem que envolvessem esse processo de demonstrações, prova, argumentação.*

É, eu acho que a primeira coisa é saber se esse aluno, que está vindo para um curso de licenciatura. (...) Primeira coisa, a gente tem que saber como é que ele está chegando, pra formação inicial dele, como ele chega no curso de licenciatura, ele teve essa vivência? (...) esse professor tem que saber se ele veio com essa formação, e com isso nos vamos ter que ter o cuidado, teríamos que ter o cuidado de, primeiro, como que nós, formadores desses professores poderíamos diagnosticar se ele tem, se ele já passou por essa experiência de argumentar, de passar de uma argumentação para uma prova matemática e colocar isso desde as primeiras disciplinas, desde as primeiras horas dele aqui no curso que isso fosse uma prática, e não somente na geometria, que é um lócus privilegiado de demonstração, mas em todas as disciplinas. Mostrar, justificar por que essa função é crescente... você pode trabalhar com isso dentro dos princípios argumentativos, então de tal forma que ele perceba essa transformação que se faz, e como ele pode trabalhar isso com o aluno dele mais na frente. Quer dizer, não basta que ele veja algumas demonstrações, ele tem que vivenciar isso. Ele tem que vivenciar isso, e tem que ter a reflexão de... em vivenciando isso, ta. eu sei fazer isso, como é que eu explico como faz isso?. Então ele tem que saber o que ele vai ensinar no ensino fundamental e médio. Mas ele não pode ficar estudando só o que vai ensinar, ele precisa por exemplo aprender a provar dentro de um sistema formal, quer dizer ele precisa ver a axiomatização.

Entrevistador: Agora os conteúdos na sua área - probabilidade e estatística -, quais deveriam necessariamente fazer parte da formação dele? Eu queria que você falasse da importância dessa disciplina atualmente no currículo...

Entrevistada: É, então vou começar falando pela importância; a estocástica, quando eu falo estocástica vamos entender tudo que diga respeito a probabilidade, estatística, tudo que lide com esse tratamento, não é?? A estocástica é fundamental pra formação da cidadania; Hoje em dia, os dados estão vindo de uma forma tão grande, que você precisa ter uma capacidade de análise crítica, e a estocástica te dá esse respaldo, esse embasamento. Enquanto conteúdo, ele tem que ter, rever as noções, revisitar as noções de estatística descritiva que ele teria que ter aprendido na escola básica, o que muitas vezes não acontece, ele tem que rever as noções de probabilidade que ele também teria na escola básica, mas que nos não sabemos, não podemos garantir, então você tem que rever, revisitar esses assuntos, mas tem uma parte que é fundamental, porque é ela que vai fazer a formação crítica que é a estatística inferencial, que vai definitivamente juntar a descritiva com a probabilidade, então é você, por exemplo, na descritiva você tem uma distribuição onde você tem a distribuição dos salários, por exemplo. Elas têm uma determinada forma, aquela forma, eu digo que ela parece, me lembra uma função matemática, que pode representar. Então será que a distância do que eu observo, que a estatística descritiva me dá como observação, e o teórico, que a probabilidade me dá como distribuição teórica - será que essa distancia entre os dois é significativa ou não? Isso quem responde é a diferencial, então é importante pra ele também ter a inferencial, e que infelizmente, na maioria dos cursos que eu andei observando, que eu andei pesquisando, não acontece a inferencial fica pra o fim do ano e nunca dá tempo. A visão freqüentista é fundamental, veja porque: não adianta você dar uma fórmula pro aluno e querer que ele sabia aplicar aquela fórmula. Ele tem que saber o conceito, e quando você fala em probabilidade, principalmente que nesse enfoque de tentar aproximar o que você observa com o modelo teórico, o enfoque freqüentista é fundamental, porque ele tem que perceber que se ele observa cem dados, ou quinhentos dados, quando você aumenta é que você vai adquirir uma estabilidade que te permite fazer alguma inferência. Então você vai pra três mil, cinco mil dados, e aí sim você está construindo essa noção da inferência, porque é o que a gente esta chamando de enfoque freqüentista: observação da freqüência de um evento, quando tende a infinito o número dessas informações, então é uma coisa teórica, né? mas que completa o conceito de probabilidade. Não adianta você olhar a probabilidade como combinatória; um cálculo combinatório no numerador, um no denominador, e isso é a probabilidade do evento, não e isso. O conceito de probabilidade ele tem vários pontos de vista, e você só consegue construir o conceito se você aborda todos esses pontos de vista durante a fase de aprendizagem. Na probabilidade, por exemplo, os teoremas básicos: teorema da soma, teorema do produto, que são básicos, que eles têm que saber que isso é um teorema, não é axioma. Se é teorema eu posso demonstrar, e como demonstrar. E a demonstração facilita compreender. Nesse caso ensinar demonstrar é mais fácil. Na estatística, por exemplo, a própria noção de variança e de desvio padrão como a média dos desvios de cada valor ate a média, do quadrado desses desvios, se você não faz a demonstração dessa... pra chegar nessa expressão ele vai estar com uma fórmula, e aí ele não tem o conceito de variança. No caso da Estatística, a própria demonstração, ajudaria na construção do conceito, ela é fundamental para a construção do conceito. Eu faço parte da corrente, que acha que um bom professor de matemática, ele tem que saber muita matemática, mais ele também tem que saber muito bem como ensinar; as coisas tem que funcionar juntas. E saber a matemática, não de uma forma compartimentada. Tem que existir um dialogo, entre as várias áreas, tanto horizontal, quanto vertical. Ele tem que saber, por exemplo, que o numero complexo que ele vai abordar em álgebra, ele tem uma visão algébrica, ele tem uma visão geométrica. Ele esta usando propriedades geometrias para trabalhar com aquele número, que é o mesmo número complexo que ele esta trabalhando. Então esse diálogo entre as diversas áreas é muito importante pra ele, pra ele não ter uma matemática compartimentada e aí sim, ele vai conseguir passar para o aluno dele... mesmo ele ter o como trabalhar com isso, onde que eu aplico, pra que quê serve, como que eu aplico esses conceitos que eu estou aprendendo. Mas ele tem que saber muito bem como ensinar em qualquer conteúdo, mesmo quando ele trabalha, por exemplo, numa sala de álgebra, quando você vai trabalhar com regularidade de um elemento, a o aluno vai perceber... ah, então isso e o corta-corta que eu faço quando eu simplifico numa equação? Ou seja não é um corta-corta.... é uma estrutura algébrica que diz que ali aquele elemento, quando está naquela estrutura, ele tem uma regularidade, e que permite escrever aquela coisa do jeito que ele escreveu. Então essa dialética entre o que ele está estudando no teórico, e o que ele vai abordar, no dia a dia dele, na pratica dele...Ele tem que avançar na questão dos conteúdos matemáticos, quer dizer, aprofundar... ele deve ver no curso de licenciatura os conteúdos que vai ensinar sob outro olhar, mais aprofundado. Ele deve fazer a relação, vamos dizer, dos conteúdos que ele esta aprendendo com os que ele irá ensinar.

Professor IH

1. *Em alguns países as atuais orientações curriculares de matemática preconizam um trabalho com demonstrações em escolas de educação básica, os PCNs, por exemplo, indicam reinício de trabalho com a prova no ensino fundamental. Você concorda com essas orientações, quer dizer qual deveria ser o significado com as demonstrações nas aulas de matemática na educação básica? Ou seja esse trabalho é desejável, é possível? Qual seria a essência deste trabalho? No que deveria se constituir este trabalho no ensino médio e fundamental?*

A primeira pergunta é se deve fazer parte, não é? Acho que sim, acho que a demonstração, a prova, deve fazer parte desde, desde o primário, entendeu? Desde o ensino fundamental, mesmo, só que de uma determinada maneira, no ensino fundamental e nas séries iniciais, e ela deve ser alterada, deve ser melhorada, ter mais rigor, ao passar do tempo, pra chegar no ensino médio e o aluno estar fazendo provas de uma maneira mais rigorosa, não é? Mas eu acho que a questão da dúvida, se aquele resultado, é pertinente, se vale, se tem algum contra exemplo... então, determinados tipos de prova podem ser já introduzidos desde as séries iniciais. Não é começar pelo rigor, não; eu acho é mais pela postura de inquirir, de querer investigar, de ter dúvidas sobre aqueles resultados.

2. *Que experiências um futuro professor de matemática do ensino fundamental deveria vivenciar em sua formação inicial pra ter competência pra organizar, dirigir situações de aprendizagem que envolvessem esse processo de demonstrações, prova, argumentação?*

Eu acho que são várias as experiências que o futuro professor tem que passar na formação inicial, é isso? Você quer formação inicial? Primeiro eu acho que tem que conhecer o conteúdo de maneira, às vezes até técnica, saber fazer as contas, saber manipular algoritmos, entendeu? Mas só isso não é o suficiente, é lógico, porque senão todos iriam aprender a fazer demonstrações. Mas, então, o que eu vejo é assim, é um aglomerado, o aluno tem que ter domínio de linguagens, linguagem matemática, linguagem coloquial, linguagem materna, não sei como é que vocês chamam, não é? A linguagem corrente, não é? A linguagem figural, a linguagem gráfica, entendeu? Ele tem que fazer uso de todas essas linguagens. Só que só isso também não é suficiente para ele aprender a demonstrar, não é? Ele pode fazer uso coerente dessas linguagens e não saber demonstrar, não conseguir fazer prova, então ele precisa ter necessidade da prova. Um outro fator que eu acho que coopera pra esse conjunto é a questão de você apresentar diversas resoluções pra o mesmo problema. A hora que a pessoa ver que eu resolvi de uma maneira, o outro resolveu de uma maneira, o outro resolveu de outra maneira, eles podem começar a se questionar, isto é, "e aí? Todas as respostas são válidas, todas essas maneiras são válidas, mas como eu sei que uma maneira mais rigorosa?" Qual seria assim, entre aspas, a "verdadeira", não é? Então, seria propor, também, situações que ele pudesse estar trabalhando com essas várias possibilidades de resolver um problema, para dai tentar generalizar, pra.... Eu vejo para o professor, mais ou menos o mesmo caminho proposto para o aluno. Sim, por que se ele não vivenciar o processo, será difícil para ele também propor um caminho que ele não vivenciou, não é? Então, acho que na formação inicial, ele como aluno, que ele vai ser um aluno, ele tem que passar por esse processo. É lógico que, de repente, não são os mesmos conteúdos... No ensino fundamental e médio você trabalha com alguns conteúdos, e no ensino superior, você vai trabalhar com o ensino mais formal, não é? Com aprofundamento, não é? Um maior aprofundamento daqueles conteúdos. Mas eu acho que você pode trabalhar dessa maneira: na hora que você propõe um problema um aluno resolve numericamente; o outro resolve algebricamente; o outro resolve graficamente, e aí, qual é o certo? Um aluno pode ter um predomínio na resolução gráfica; o outro, predomínio na resolução algébrica; o outro, na numérica, então na hora que você junta, que você socializa essas maneiras, não é? Enriquece o saber do aluno, do futuro professor, e essa é a questão que eu te disse sobre as linguagens, não é? Essa socialização, e isso daí permite que todos alunos busquem, então, qual seria uma maneira de você fazer uma prova, uma demonstração com mais rigor. Eu acho que o rigor é também um processo. Num dado momento na licenciatura o aluno precisa chegar no rigor. Estudar os axiomas da teoria, as definições rigorosas, enfim demonstrar alguns teoremas formalmente. Sabe porque estou falando isto? Porque como têm indicações no currículo que vai trabalhar com a prova e demonstração no ensino fundamental e médio, principalmente no médio é possível que alguns professores, tentem repetir apenas o que foi feito na sua formação inicial, não é? Por exemplo, então ele vai querer demonstrar com o mesmo rigor, e tudo. Eu tive uma experiência com um professor, no meu doutorado, em que a gente propôs para o grupo de professores que demonstrasse teorema de Pitágoras, e foi proposto assim... para cada grupo de professores, demonstrar de uma maneira, eram três ou quatro maneiras e um dos professores ele falava assim: não, não tem como demonstrar, não dá pra demonstrar, não dá pra demonstrar para meus alunos, não dá, não dá... e na hora que ele viu que as demonstrações foram feitas no grupo, não foi feita na sala de aula, mas uma das professoras trouxe material manipulativo e ele viu que dependendo da demonstração, podia ser feita desde a 5° série, era algo fácil, entendeu? Não era necessário fazer demonstração com o rigor, como ele conhecia do ensino superior. Então ele percebeu que a gente pode estimular essa vontade de demonstrar no aluno, desde o começo, às vezes com material manipulativo, sem entrar no mérito de medidas, não é? Mas se vale pra essa medida, será que vale para todas, ou não; algumas coisas assim, podem já ser trabalhadas desde o começo. Então às vezes têm algumas coisas que você pode estar mostrando de maneira menos rigorosas desde a 5° série, e isso vai fazendo com que a criança, ou o futuro professor, também possa estar trabalhando, tendo esse espírito de querer demonstrar e poder trabalhar com isso daí também.

3. *Entrevistador: Em relação ao momento em que se deve propor a demonstração o que você tem a dizer?*

Eu disse que, em primeiro lugar, tem alguns mecanismos assim, de compreensão do conceito... intuitiva, nem que seja. Por isso que eu disse, em primeiro lugar estariam os algoritmos, o aluno deveria primeiro aprender a fazer os algoritmos, saber a fazer algumas contas, dependendo do conteúdo, enfim saber algumas coisas sobre aquele conteúdo, para aí ele poder questionar o conteúdo, questionar a validade de algumas coisas. Então eu acho que é depois de algumas coisas. Eu também acho que a questão da demonstração existe assim como um ritual, dentro de um enunciado, ele tem que conhecer o que é hipótese, o que é tese, então, quais são os dados que ele tem, onde é que ele quer chegar, então qualquer enunciado tem isso. Então, ele tem que reconhecer isso, e como que ele reconhece? É uma questão de maturidade, então ele tem que reconhecer dentro do enunciado o que vai ser importante para ele chegar naquele fato ali, então se ele é aspas um resolvedor de problemas, isso daí vai facilitar.

É pra reconhecer o que foi importante numa demonstração, por que às vezes a gente vê assim alguns enunciados, somente quando você vê a demonstração, no ensino superior é assim, não é? Você já vê o enunciado, o teorema, com o que é necessário, pra se chegar naquela tese. E quando você está no ensino fundamental e médio, de repente não tem como você introduzir, porque vai parecer que aquilo caiu do céu, não é? Por que aquelas hipóteses? Por que não outras? É quando você trabalha, eu acho, no ensino fundamental e médio, mesmo que na formação inicial, principalmente no início, você deve trabalhar: o que eu preciso pra chegar nessa tese? Ah eu preciso de esse fato, desse fato, desse fato... No decorrer do processo pra chegar a aquilo ali, que acho que tem que mostrar pra o futuro professor também, essa questão de tentar por um caminho e não conseguir, tentar por outro e não conseguir, aí tentar por outro e não conseguir, aí tentar por um e conseguir. Então, pra chegar nesse caminho aqui, o que eu precisei? Então ele vem depurando um pouco o que é hipótese pra ele. Que eu acho que às vezes fica muito claro quando a gente vai conversar com os professores, a questão da demonstração que eles acham que a demonstração caiu do céu, então chega ela acabada, então eles não vêem como foi o processo, isto é, que a pessoa pra fazer aquela demonstração, ela usou essa hipótese com aquela, com aquela, e dai não conseguiu, então ele começou pela outra hipótese agora e também não conseguiu. Então começou pela outra hipótese agora, também não conseguiu, a hora que ele começa a jogar com isso daí, que é um quebra-cabeça. Quando que eu vou usar esta hipótese? Quando é que eu vou usar aquela outra hipótese? A hora que ele começa a ver isso daí, ai se torna algo agradável pra ele a demonstração, algo como desafiador, enquanto não acontecer isso, enquanto ele achar que é algo já pronto para decorar, ele não vai ter estímulo. Por isso eu digo que a demonstração tem que começar, mesmo, com o professor, do início, assim, com coisas simples, que de repente são do ensino fundamental e médio. O processo é o mesmo que deverá fazer com seus alunos, só que mais aprofundado. Depois, às vezes demonstrações que possam ser resolvidas, assim, numericamente ou com manipulação de objetos, para ele perceber, para aquilo ali se tornar como numa rotina, e ele sistematizar esse procedimento, de procurar quais são as hipóteses que ele precisa. Em que momento eu vou precisar perceber que não tem que usar todas ao mesmo tempo, e que eu começo por uma e não começo por outra, não é? E quando que eu vou encaixando, essas coisas, e que se não conseguir de um jeito, então vou tentar começar por outro. É um processo e que é natural não chegar, não é? Às vezes, eu não consigo hoje, vou precisar pensar mais um pouco pra chegar, não é? Acho que algo que às vezes acontece com o professor de matemática é isso: “eu tenho que resolver agora, a demonstração”, não é? E eu acho que a gente tem que começar a passar para os alunos também que a matemática é um processo, e aquilo lá vai amadurecendo, então não é por que eu não consegui resolver hoje, que eu não vou conseguir nunca mais uma demonstração, não é? Hoje eu não consegui resolver, hoje eu trabalhei com uma colega, hoje a gente não conseguiu resolver o problema; amanhã, você propôs outro problema, eu posso estar conseguindo resolver aquele problema. Então, o professor, o futuro professor ou o aluno, tem que perceber que não é tão exato, assim. A gente pensa muito em matemática como algo exato, algo assim: é certo ou é errado, não se admite, ter o meio termo. Eu posso ter chegado só até a metade da demonstração e parar não é? A gente vê que na historia não é bem assim, eles demoraram anos, às vezes, pra formalizar um conceito, pra fazer uma demonstração, não é?

4. E em relação aos conteúdos?

Eu acho que tem conteúdos que são importantes, mas o processo, se ele viver o processo de maneira a se conscientizar do processo, porque... algo que eu tenho notado também é isso, às vezes a pessoa, ela viu a demonstração em uma determinada... assim... por exemplo, lógica. Não são todos os cursos de licenciatura que tem lógica, mas quando você leciona lógica, lá tem demonstração direta... demonstração por absurdo, e o aluno de repente não transfere esse conhecimento para quando vai fazer a demonstração. Na lógica você tem algumas regras de inferência e de equivalência, você escreve uma expressão e você tem que chegar naquela conclusão usando essas hipóteses, fazendo uso dessas regras, então ele tem uma listinha, que ele faz uso, mas as demonstrações não são equivalentes, as demonstrações que a gente faz, assim, formais, não é? Eles chamam a demonstração em lógica de formal. Mas ele não transfere, então ele chega na hora e ele acha que não... cadê a listinha dele? Não tem, então o que eu posso usar? Ele não sabe que conhecimentos poderá utilizar numa demonstração. Às vezes, você faz uma demonstração muito simples ligada a números e eles não percebem, às vezes, falam: ah isso daí é truque, não é que é truque, é conhecimento que às vezes você tem sobre os conteúdos e você faz uso. A demonstração deve convencer o aluno e também ajuda-lo na compreensão da matéria Então às vezes falta essa questão de ter consciência do processo. Então eu acho que quando você trabalha, mesmo em resoluções de problemas acho que tem que se passar um pouco a questão de qual foi o processo que eu utilizei pra resolver esse problema.. Então a questão do processo, é importante, mas é importante também o reconhecimento do processo utilizado. Eu vi uma pesquisa, e estou tentando lembrar qual foi, em que falava isso, é... o aluno... ah... foi lá na Fundação Carlos Chagas, que eu fui assistir uma palestra... era proposto o problema, o aluno resolvia, e depois perguntavam sobre qual foi o jeito que ele tinha resolvido; eles tinham elencado algumas maneiras de resolver, então você perguntava pra o aluno, qual foi a maneira, e o aluno não conseguia identificar a maneira que ele tinha resolvido, porque o aluno sabia resolver o problema, mas não sabia como ele tinha feito, isto é, ele não tinha tomado consciência do processo pra resolver o problema. Então eu acho que conhecer o seu processo, é conhecer, também, como se pode fazer uma demonstração; é começar a prestar atenção que uma demonstração é um processo, é um processo... Como que eu faço esse processo? Então na hora que você toma consciência de como é um processo de resolver um problema, você começa a prestar atenção que os dados do problema vão entrando, não é? Você tem um objetivo no final, e uma demonstração, no final das contas é isso, você tem um processo que você vai seguir, e eles falam que é muito decoreba, não é? Eu estava comentando isso, eu acho que um dos problemas, que eu acho que se tem começar a investir, é na questão de permitir que o sujeito, o professor e o aluno, comecem a tomar consciência dos seus processos de aprendizagem. A hora que eles comecem a tomar consciência dos seus processos de aprendizagem, como que ele aprende, isso daí vai facilitar muito, assim no sentido de que ele vai aprender com mais facilidade, e ele, como futuro professor ainda, vai perceber como que seus alunos podem estar aprendendo.

5. *Entrevistador: Entendi, quer dizer então, na questão do conteúdo matemático, em si, você não vê nenhum, assim, obrigatório... quer dizer, é lógico, têm vários importantes, mas você não coloca isto em primeiro lugar?*

Não, porque se ele entender o processo, tanto faz ele ter trabalhado com números, com álgebra, com geometria, até ele entender o processo, eu acho, se ficou consciente pra ele a questão do processo, ele transfere, eu acho. Que a questão é que se trabalha com números, mas não se explicita o processo; se trabalha álgebra, mas não se explicita processo, não se trabalha processo. É importante ensinar ele a ensinar, ou aprender a aprender. Isso, aprender a aprender, e eu falo isso porque no meu doutorado teve uma das professoras que na realidade ela melhorou em sala de aula, porque ela começou a diferenciar o seu processo de aprendizagem do processo de aprendizagem dos alunos. A hora que ela começou a trabalhar com os professores e as atividades propostas, fazia discussão das possíveis resoluções pelos integrantes do grupo, ela percebia que tinham pessoas que tinham trabalhado o exercício diferente ao dela, e tinham pessoas que tinham feito completamente diferente do que ela tinha feito, e quando entravam na discussão, ela percebia que a pessoa tinha um processo de aprendizagem diferente do dela. Ela começou a perceber essas diferenças, e ela relata na entrevista que eu fiz com ela, isso daí... que quando ela começou a perceber que ela aprendia diferente do outro professor, ela começou a perceber que o aluno dela também não aprendia da mesma maneira que ela, se o aluno não aprendia da mesma maneira que ela, ela tinha que perceber quais eram as dificuldades do aluno, quais eram as necessidades dele, quais eram os conhecimentos que eles tinham pra de aí poder avançar. Eu não sei te dizer quais são os conteúdos importantes em si, eu acho que ele tem que ter esses blocos que hoje se falam de número, medidas, álgebra, geometria, tem que ter porque cada um dá subsídios para a questão das linguagem: a numérica, a geométrica, a algébrica. Fornece subsídios, agora, o que trabalhar de álgebra? Algo que dê subsídios para ele poder avançar, depois, num raciocínio algébrico, e poder interligar isto daí com a geometria e com números. Agora, o que trabalhar? Eu acho que se trabalha número, equações, inequações. Mas você não pode ficar só nos conteúdos do fundamental e médio, não pode. Você tem que avançar. Agora, avançar sem conexão é complicado, porque depois ele acha que estudou e não vai fazer uso, e não é verdade. Esse é o grande problema. Muitas pessoas que dão aula para a licenciatura, e que dão aula de cálculo e dão aula de álgebra não percebem a utilização disso no ensino fundamental e médio, porque não dão aulas, porque não fazem pesquisa nesta área, então não percebem, e esta questão, por exemplo, de resolver equações. Teve uma amiga minha que falou assim: ah, minha filha está aprendendo e eu não entendo como ela está aprendendo, porque o professor falar que “não é trocar de lado... trocar o sinal”, Ela estava aprendendo que vou somar mais 3 nos dois membros... então simplificaram tanto, e ela, a mãe, tinha aprendido que trocava de lado, então a questão da igualdade da igualdade, do equilíbrio, sumia, porque na hora que você tira de um lugar e põe no outro, cadê a balança? Já não está mais em equilíbrio, e a filha dela estava aprendendo com o que se aprende em álgebra, que é: se vai somar, somam-se os dois membros; se vai subtrair, subtrai dos dois membros; vai dividir? Divide tudo o que está nos dois membros. Então a filha dela estava aprendendo assim e a mãe achava que não. Então, quando a criança começa a aprender usando a álgebra, é porque o professor está vendo, lá na frente, o que é, na realidade, conceito de equação, de inequação... Quando o professor passa, assim, só a questão algorítmica... na realidade eu passei pra lá e passei pra cá, o conceito, a estrutura algébrica está lá, só que não foi passada, então o professor que trabalha só desta maneira, na realidade ele vai achar que aquilo lá não serviu para nada. Só que a álgebra que subsistia, ele não sabe explicar o porque destes algoritmos, então algoritmo por algoritmo, sozinho, não vale à pena. Ele é necessário, sim, às vezes para otimizar algum dos processos, mas não que ele sozinho dê conta. O futuro professor, muitos deles não fazem as conexões com o que ele vai ensinar, achando que aquele aluno, que vai ser professor, vai fazer naturalmente. Mas não, não faz. O que deve ser feito é isto, procurar estas conexões, e o professor que dá cálculo, dá álgebra, de repente pelo volume de conteúdo dentro da disciplina, às vezes não faça isto, mas deveria, como exercício, exemplo, aplicação, mostrar, porque ele está num curso de licenciatura. Algumas aplicações, alguns exercícios deveriam ser feitos chamando a atenção para esta conexão do que está sendo feito no ensino superior com o que pode ser feito no ensino fundamental e médio, explicando determinados algoritmos feitos no ensino fundamental e médio, para que o professor perceba a aplicação. A questão dos campos numéricos, dos números racionais, dos irracionais... o que eu tenho percebido no 3º grau é que tem muitos alunos chegando no 3º grau sem saber o que é um número irracional, muitos! Outro dia eu fui demonstrar que a raiz de 2 não era racional, e fui fazer demonstração por absurdo, e comecei... “Vamos supor que a raiz de 2 seja racional, então eu posso escrever ele como... “ fiz toda a demonstração e alguns alunos falaram assim: eu entendi a demonstração, mas não entendi... cadê o absurdo? Para eles, raiz de dois era um número racional... Então eles sabiam a questão, os passos da demonstração, porque eu estava sistematizando, mas na hora que eu coloquei um conteúdo matemático para usarmos aqueles passos, ai eles não tinham entendido os conteúdos que eu tinha utilizado, as minhas hipóteses. Então às vezes precisa ser trabalhado este outro conteúdo, porque os alunos, às vezes, não conseguem perceber porque o próprio professor pode também não ter percebido, quando estudaram em álgebra esses conteúdos: não perceberam, de fato, quais são as diferenças entre um número racional e um irracional. Então, na hora que se trabalha na licenciatura estes conceitos da análise, tem que ser chamar a atenção, sim, para o ensino fundamental e médio, porque é onde ele vai fazer uso. É necessário fazer a conexão, por exemplo, da análise com esses níveis de ensino.

Professor IF

Em alguns países as atuais orientações curriculares de Matemática preconizam um trabalho com demonstrações em escolas de educação básica. Os PCN, por exemplo, indicam um início de trabalho com a prova já no Ensino Fundamental. O senhor concorda com estas orientações? Qual deveria ser o significado do trabalho com a demonstração nas aulas de Matemática na educação básica?

Tá...eu concordo que deva haver sim. Qual o significado disso aí... não sei, não sei. Eu acho que sim o professor já no ensino, acho que no fundamental, mesmo podia já ir fazendo algumas iniciações, vamos falar assim, o que eu acho fundamental é o seguinte: às vezes a pessoa não entende, o aluno nem percebe o que é que está sendo pedido, nem onde é que quer chegar, e às vezes, há já por parte dos professores, essa preocupação em falar: bom o que é dado, o que é pedido, então isso é hipótese, isso é tese... bem., eu acho importante e às vezes a gente discute até um pouco lá, com os nossos alunos que são os saberes envolvidos no enunciado, então se fizermos uma pequena afirmação muito simples, eu acho... com os alunos e fizer um levantamento de quais são os saberes que estão envolvidos aí e depois o que é dado e onde eu quero chegar, mas ann... não de uma maneira ann... tão simbólica, com flechinhas e não sei quê... eu acho que o aluno pode fazer uma demonstração rigorosa sim, usando a língua matemática, né, mais ou menos assim. Eu acho que dá pra começar sim, com um processo bem... bem simples. E também eu acho que com isso, você estaria já acostumando os alunos a justificar as coisas. Porque eles falam assim: “bom, eu aceito que...” vou falar uma coisa bem extrapolante, né, “que 1 é maior do que zero. Pra que, demonstrar?”

Não é essa... não é por aí que a gente vai começar uma demonstração, no Ensino Médio: que 1 é maior do que zero. Que isso, eles nem dão importância, mesmo. Mas, para demonstrar, começar já a fazer alguma demonstração, não só em geometria, porque eu acho que também existe isso nos alunos, que demonstração e teoremas só se referem à geometria, né, mas coisas simples eu acho que teria esse significado: de ver os saberes envolvidos, o que é dado, onde eu quero chegar, e também uma coisa que às vezes é muito complicada de o aluno perceber, são afirmações diretas e ele inferir que a inversa, que a recíproca também foi falada e não foi. E essa é uma coisa que eu acho que dá pra trabalhar um pouco com os alunos, no nível da linguagem, que quando o aluno faz uma afirmação, por mais banal, que a gente transcreve a afirmação, e depois ele mesmo fala: “ah! bom, mas não foi isso que eu falei, foi o inverso.”

Para ele já ir percebendo a afirmação direta e a inversa, etc., sem ficar muito preocupado com os nomes: é recíproca, é corolário, é não sei que lá, ann... porque no fundo, a gente vê, como você mesmo já falou, cheio de professores que teorema, axioma, corolário, lema, é tudo a mesma coisa, ou tudo não é nada... (risos)

Ruy: Então, que experiências os professores devem vivenciar na formação deles na formação deles, para que eles tenham essa competência de criar situações de aprendizagem, de ele ensinar prova... será que... o que ele teria de estudar na formação inicial, que processo ele teria de vivenciar, para ele poder ser um ...

Será que isso é possível...

B. Eu acho que é possível. Agora, assim, de verificar quais... que tipo de coisas ele pode fazer, que tipo de aprendizagem, eu não sei. Mas eu acho que... o professor, o futuro professor, né? Ele deve ter experiências de demonstração, algumas bem simples, como falei antes, não só com coisas de geometria, não sei que lá, mas de pequenas afirmações, que às vezes são coisas que a gente....

Se a gente falar para um aluno: “Vamos fazer um exercício?”, mesmo que seja,... vamos falar,..., não numérico, ele já acha mais difícil que o numérico, é claro, mas se você falar que é um exercício, ele faz. Agora, se você falar: “Vamos demonstrar isto aqui”, já parece que é uma coisa esquisita. Então, certas proposições bem simples, eu acho que já podem ser apresentadas aos professores, eu acho, não é? E, sempre com estas preocupações: quais são os saberes envolvidos, o que é dado, e onde eu quero chegar, e se o que eu falei num sentido, vale também no outro, eu acho que essas pequenas, essas coisas explorando com afirmações mais simples, eu tenho a impressão que o professor vai se acostumar, o futuro professor vai se acostumar a essa demonstração, né? É importantíssimo...

Eu acho que a hora que ele está vivenciando aquilo lá, ah! bom... eu não saberei jamais fazer essa demonstração, se eu não souber o significado, os saberes que estão envolvidos ali e se ele vai vivenciando esse tipo de coisa, acho que isso é muito mais importante que o próprio resultado que ele vai demonstrar. Quer dizer, esse tipo de... de... de enfrentamento de problema, não é?

Quer dizer, de ele procurar conhecer aquilo. De ele ir atrás, não é? De ter uma atitude perante, de resolver, não é? porque senão,... cai naquilo. B em, tenho de demonstrar um teorema. Preenche uma folha deste tamanho com um montaréu de símbolos e depois, nem ele... até que já tá bom... eu demonstrei... então não tem o menor sentido, né?, pra ele, qual que é a tese?

Eu sou um pouco favorável à teoria da Sfard, né? Ela trabalhou bastante sobre limites, inclusive, né? que...

Eu acho que a atividade deve ser... ter umas etapas... hierárquicas, até... e a primeira é a processual, mesmo... Da pessoa ir trabalhando, ir trabalhando, ir trabalhando a questão de limite, pra depois haver essa passagem para o estrutural, até que ela realmente tenha como objeto, aquilo que anteriormente era um processo, para depois passar para os teoremas. Porque senão, acontece isso aí que você falou.

É verdade. Se eu não sei direito o que é limite, como é que eu vou demonstrar que o limite é o único, que a soma dos limites...

Sem dúvida...sem dúvida... É aí, que vem aquela briga dos Épsilons e Deltas. Se é pra falar, se não é pra falar...

Eu acho que sem eles, não dá pra você definir, porque...

Temos umas experiências...

A Marly, por exemplo, ela trabalhou um pouco de limites com alunos... seqüências, com alunos que não tinham estudado limites formalmente. E para ver só a questão intuitiva deles, trabalhar um pouco essa parte mais processual, e barrou-se sempre com a seguinte questão: se você tem uma seqüência que é constante, ela não tem limite, porque não pode se aproximar, ela já é 5, 5, 5, ... já é 5. Então, não se aproxima.

Então é aquela história, se você não vai para o geométrico, falar nos Épsilons e Deltas, como é que vai fazer depois, a definição formal e rigorosa mesmo, de limite, para depois poder fazer essas demonstrações, né?

Se você já parte dessa definição, acho que cai exatamente naquilo que você falou, e que eu concordo plenamente.

Não adianta você querer fazer aquilo que você falou, né? demonstrar a unicidade do limite, sem que você saiba direito o que é limite.

Às vezes até, às vezes, em alguns casos, até a própria definição e a demonstração ajudam você até a compreender o conceito.

Então, eu acho que tem essa manipulação, sim, mas não falar... bom, tudo tem que ser feito com material, (como é que é?), material concreto...

Não, não é bem por aí, mas a história do processual, do processo, passar para o objeto, eu acredito nesta... nesta...nesta teoria, sim!

Assim como na hora que você vai fazer integral, por exemplo, se você vê o livro do Stwuart, ele trabalha, e trabalha e trabalha com área, e fazendo somas de Riemann, e não sei quê... lá na frente é que ele vai dar a definição, né? Então eu tenho a impressão e acredito que este... que neste caminho é mais simples de depois o aluno começar a perceber um pouco as coisas e tentar fazer algumas demonstrações.

Ruy: Agora, é importante que ele vivencie essa coisa formal e axiomática, tudo...

Sem dúvida, porque senão ann... E uma coisa que eu sempre insisto: O rigor não está na simbologia. Você pode dar a demonstração rigorosíssima, na língua natural, eu acho. Então, e às vezes... o que a gente se perde um pouco, é nos símbolos, sim. Com os alunos e tal... né?

Agora, a linguagem simbólica é importante? Sim, porque ela é universal e econômica, né?

Se você escreve em português, nem todo mundo vai entender o que você falou, né? Em termos universais.

Mas eu acho que podia ser uma primeira... Aliás, deve fazer um pouquinho essa experiência, numa primeira fase, uma demonstração, um encadeamento de idéias, não propriamente uma demonstração, mas, ann... simplesmente usando a linguagem natural, a língua natural, e depois passar pro... o quanto possível, para o formal.

Acho que esse tipo de atuação também pode ajudar talvez uma pequena...

Existem alguns conteúdos de análise e cálculo, que deveriam estar necessariamente presentes num curso de formação inicial? Porque a gente pensa assim... Há quem defenda... eu não sou... eu não faço isso... mas, defenda que os conteúdos que tem de ser trabalhados deveriam ser apenas aqueles que o professor vai ensinar...

Do ponto de vista do cálculo ... da análise... o professor de matemática, que vai atuar especificamente no ensino fundamental e médio, que conteúdos da análise e do cálculo seriam fundamentais para eles?

Se existem teoremas que ele deveria saber, vivenciar, necessariamente, entendeu?

B. Olha, no livro do Elon, de medidas e não sei quê... ele abre com um pensamento do Polya. Não que eu esteja defendendo o Elon, como, no ensino, mas aquele pensamento eu acho que é bastante coerente. Ele fala assim: pra ensinar matemática, precisa saber matemática e pra ensinar matemática, precisa saber um pouco mais daquilo que vai ensinar.

Porque é claro, se você tem uma visão um pouco mais ampla, você é capaz de criar situações para ensinar aquilo que você quer ensinar, mais ricamen... não... com mais, maior quantidade, mais maneiras de encaminhar, o aluno pode dar mais caminhos.

Agora, se você... como parece que está tendo uma confusão mais ou menos generalizada, por quem analisa livros didáticos, de que o professor vai aprender no livro didático, pra depois passar para o aluno, então aí, o ensino fica muito... muito restrito, e eu acho que em termos de cálculo, que o professor... todo professor tem que saber. Primeiro: função. Não a definição conjuntista, não a definição, não sei que lá... mas a questão das variáveis, a inter-relação entre variáveis e não sei que lá... e um pouco de números reais, o histórico de números reais, saber um pouco de limite também. Porque, afinal de contas, ele trabalha com seqüência no Ensino Médio, lá no P.A. e P.G., mas não, de uma forma totalmente automática, né? Automatizada.

Bom, agora, essa parte de derivada e integral, eu não sei se precisa... (risos) eu digo assim...

Mas, eu acho que em termos formativos, é importante sim, porque ele vai trabalhar com áreas, vai trabalhar com tangentes, vai trabalhar com não sei que lá... eu acho que pra...

Ele não vai ensinar derivada, não vai ensinar integral, mas a parte, para a parte de formação dele, eu acho que é importante sim.

Isso, isso. Então... eu acho isso interessantíssimo também, e que a gente pouco faz... e isso é culpa nossa... e não dos alunos né?

É situar um pouco na história, as coisas da matemática. E agora, você percebe essa preocupação até nos livros do secundário, né?

Mas eu acho que o fundamental mesmo é a formação do professor. Parece que essa é a sua preocupação primeira, né? Da formação... e quanto mais amplas são essas coisas, acho que melhor ele vai...

GRUPO II

Professor IIa

Em alguns países as atuais orientações curriculares de Matemática preconizam um trabalho com demonstrações em escolas de educação básica. Os PCN, por exemplo, indicam um início de trabalho com a prova já no Ensino Fundamental. O senhor concorda com estas orientações? Qual deveria ser o significado do trabalho com a demonstração nas aulas de Matemática na educação básica?.

Ruy para responder essa pergunta, vou me basear justamente nesse curso de complementação que nós estamos dando para professores já formados. Eu dou algumas aulas na Universidade para formação continuada de professores. Eles vieram com o seguinte pedido: eles querem que nós, na faculdade, forneçamos recursos para eles iniciarem nos assuntos; para que seus alunos se motivem e gostem de assuntos ligados à Matemática, especialmente medindo, fazendo... e pela minha experiência especialmente o aluno de primeiro grau, segundo grau, ele tem que ter um amadurecimento antes de chegarmos a uma demonstração. Então eu tenho conseguido algum resultado justamente partindo para esse tipo de linha: fazer algumas questões, alguns problemas, alguma coisa prática, pra ele perceber os elementos que ele vai ter que utilizar; e vou aumentando a complexidade gradativamente. Daí o aluno fica sem saber como resolver, apenas medindo, apenas fazendo aquele cálculo simples, aí ele começa a sentir a necessidade de algo mais profundo... aí eu entro com a justificativa, dizendo pra ele: olha quando você tem que trabalhar com questões muito mais complexas, você precisa de um baseamento, algo que sustente aquilo que você vai fazer, e aí se justifica a gente fazer uma demonstração, falar de um modelo, falhar de uma teoria, o que é uma hipótese, o que é uma tese. Aí ele começa a perceber que justamente num campo que ele já não estaria mais tendo condições de trabalhar, por que já está muito complexo pra ele e a demonstração passa a ser uma ferramenta importantíssima. Então eu tenho trabalhado justamente nesse sentido: faço com que o aluno vá necessitando gradativamente a ter um conhecimento um pouco mais complexo, um pouco mais sustentado. E aí, quando ele começa a ficar perdido, começa a pedir ajuda, aí e que eu complemento, dando justamente uma demonstração, como é que ele pode usar e em que casos. Então eu explico isso, justamente para eles o seguinte: quando você..... o aluno normalmente quando ele está nessa face". do primeiro grau ele quer a fórmula, "como e que faz? Me dá a fórmula que eu faço". Então o problema fundamental, é o seguinte: quando ele usa aquela fórmula, ele não sabe para que usa. Aí sai um resultado e não sabe para que é, então eu o justifico. Digo: olha se você não sabe como essas variáveis estão relacionadas, qual é a hipótese que você pode utilizar essas fórmulas, você vai ficar num beco sem saída, não é? Então eu explico para eles, que quando nos fazemos uma demonstração, quando nos fazemos, não é? ... Eles estudam também na química o modelo do átomo... tudo isso daqui é pra justamente ele saber aonde que ele pode usar aquele conhecimento; até onde ele vale; os limites, e ai vem a grande utilidade, justamente, da demonstração: que ela te dá o contexto de onde vale aquilo, em que condições, isso dá segurança pra você montar um modelo cientifico, depois transformar num modelo tecnológico. Então essas questões eu creio que ele tem que sentir a necessidade, não dar apenas por exposição.. não é? "olha vamos deduzir" ... Eu já fiz isso e pra eles passam batido. Se eles não têm essa necessidade; não tem um caldo cultural, isso foi uma coisa que eu aprendi depois de muitos anos, não adianta explicar um conceito para uma pessoa se ela não vive num contexto onde aquele conceito vá, gradativamente, fazendo parte do dia a dia. Você pode falar... é inútil, ela esquece naturalmente, porque ela não consegue associar. Então, por exemplo, quando eu vou dar aulas de parábolas, aqui, não é?. No laboratório, eu dou uma aula ensinando onde é usada a parábola: farol de carro, antena parabólica, radiotelescópio... Nós fazemos um forno solar da forma parabólica; a gente aquece um cigarro que fica no foco, não é isso?, Então, quando ele começa a perceber, e isso eu levo duas aulas ensinado isso pra eles... "olha está vendo como se usa? Está vendo? Você vê todo um carro... Você não poderia usar um carro à noite se não tivesse o farol na forma parabólica, não é? A transmissão de estudo do universo hoje em dia, não é? Você precisa de um radiotelescópio, explico o problema da energia, que hoje nos temos que usar a energia obtida a partir dos ventos, do sol, que é uma necessidade, não vai ter petróleo para a vida inteira, nem usar o carvão, por causa do efeito estufa, então a gente vai envolvendo o assunto que seria parábola, mas dentro do conceito, não é? Mostro para eles, por exemplo, eu tenho um auto-falante que é parabólico, então eu consigo falar com eles à distância e consigo ouvir também à distancia, e deixo com eles ouvindo, um falando um com o outro. Então eles vão percebendo: "pó, esse negocio a gente usa, não é?" E aí eu dou um exercício pra eles que consiste no seguinte: sabe aquele jato de água do bebedouro, que é uma parábola? Então eu dou uma folha de transparência quadriculada ele montam os pontinhos, voltam pro laboratório, marcam os pontinhos nos gráficos e deduzem a fórmula da equação do jato de água do bebedouro.

Então é um processo cientifico: ele pega os dados, analisa, coloca na forma de um gráfico e tenta obter uma fórmula que justifique aquele fenômeno. Então eu trabalho com eles umas três ou quatro aulas assim. Aí o professor, isso no primeiro ano colegial, começa a estudar com eles o que é a parábola na teoria, mais eles já passaram por uma série de atividades. Então no segundo ano, eles voltam a ter, no terceiro ano no CABRI a gente constrói; todas as propriedades da parábola, quer dizer eles vão ter um retorno, novamente quando já tiveram uma vivência, já viram, depois a demonstração com a teoria, quer dizer, eu acho que esse caminho torna mais aceitável pra eles, justifica pra eles o que é a importância da demonstração.

Que experiências um futuro professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio deveria vivenciar em sua formação inicial para ter competência na organização e direção de situações de aprendizagem envolvendo argumentações e demonstrações na escola básica? Ou seja, para, como para um professor ensinar essa questão da argumentação e da prova o que você acha que na formação dele, o professor deveria ter?

É... eu estou dando para os alunos, eu dou geometria no primeiro ano; no segundo ano dou desenho geométrico, depois dou geometria descritiva. Primeiro, segundo, terceiro, quarto ano da licenciatura. Eu comecei dando geometria como normalmente se faz: a gente vai obedecendo aquele conteúdo, e vai demonstrando, teoremas, teoremas, teoremas, teoremas, faz exercício, bom... o rendimento não é muito...muito bom, em termos de aprendizado, não se assimila muito, então eu comecei a inverter.

Eu peguei a minha experiência aqui, no Ensino Médio, de 12 anos e ensinei pra eles o seguinte: olha nos vamos usar a geometria e vamos usar a trigonometria para medir tudo. Então fiz um teodolito, dois teodolitos, com o compasso, aquele transferidor de madeira com um pesinho com tubo e depois eu tirei xerox, fiz com o isopor, não é? um que mede na horizontal. Então a gente mede alturas de prédios, alturas de.....a gente sai lá fora mede a altura do prédio, mede a altura da sala usando só a trigonometria. Depois a gente mede a rua, sem atravessar a rua, só usando senos e co-senos, com pouquíssimos recursos da geometria e refaço tudo isso usando semelhanças em triângulos, inclusive usando a caneta pra medir a altura, não é? Uso barbantes. Eu faço os mesmos problemas tanto para medir as alturas como para medir as larguras usando trigonometria e usando semelhança de triângulos. Bom, uma vez feito isso, aí eu começo a dizer: olha, nós vamos ver como é que todas essas ferramentas que nos utilizamos, elas surgiram; não surgiram do nada. Aí começo a explicar que pra partir para uma demonstração, eu preciso de axiomas, de postulados, na matemática, na física, dos princípios, e a partir daí a gente vai deduzindo aquelas fórmulas, não é? Aqueles teoremas, e vamos, em vez de fazer coisas práticas, nós começamos a fazer exercícios mais complicados que estão no livro texto. Mais eu já passei por toda essa parte, por exemplo, eu fiz uma casa de isopor, então a gente usa conceitos, eu coloco uma caixa cilíndrica, uma caixa cúbica de água, coloco toda a fiação, coloco os encanamentos, eu coloco...eu dou pra eles os manuais, de quantos blocos eu uso por metro quadrado pra fazer aquela casa, quanto vai de cimento, de areia, de cal, o piso, vou colocar tanto de cerâmica, quer dizer, eu uso basicamente grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais, proporção, escalas, volumes e prismas, cilindros, cilindro e cubo, utilizo proporções. Quer dizer, eu faço uns dez.. o telhado, eu dou pra eles o tipo de telha e eles têm que calcular a inclinação, pelo ângulo, qual a altura do telhado, quanto vai de madeira pra fazer aquele telhado, quanto vai de telha, quanto vai custar tudo, quer dizer, é um problema que envolve, um exercício que envolve quase tudo do primeiro grau. E com isso eles vão vendo uma aplicação. Esses professores que estão fazendo isso, eles estão adorando. “A gente não teve isso na faculdade, a gente esta aprendendo como fazer que o aluno ter uma (hesitação)” Porque a gente está dando cursos pra professores já formados que são do pelo litoral sul, vão desde Peruibe até São Vicente, são setecentos professores do primeiro e segundo graus. Eu comecei mostrando o PI... como é que três circunferências, feitas... eles medem com fitas, e pa, pa, pa, e mede o diâmetro, mede a circunferência e tal, então o PI e esse, aquela fórmula.....o comprimento é igual a 2πR, o que é radiano, e eles não sabem o que é radiano... professores de matemática não sabem o que é um radiano. Você, veja só a situação, então, grados, mas pra que grados? Por que a máquina científica tem grados, e o cara não sabe o que é... ele pensa que aquilo lá é graus, e não é... descobriram! “É por isso que não dava certo!” ....professor de matemática. Então você ensina essas coisas, eles vão fazendo, vão fazendo. Eu falo: quanto que é o seno de 40 graus... pó, pega uma reta levanta 40 graus, do transferidor, desce três perpendiculares, acha o seno, três vazes a média, quanto você achou?.. pô, eu tenho 0,64. Quanto dá na tabela? Dá 0,6428. Você não sabia que era feito assim? Não, não sabia. Aí dou uma circunferência de dez... vamos montar uma tabela trigonométrica, “pó, e assim que faz?” Se monta de 0 a 90 graus...“pó, eu não sabia que era assim!”.

Este mesmo principio, que você usa nas suas aulas do Ensino Médio, deveria ser adotado na formação de professores?.

Isso mesmo. Muitas das coisas que faço com os meus alunos do Ensino Médio também faço com os professores. Eles dão aula para alunos que são pedreiros, no litoral sul, são encanadores, são carpinteiros, e esse pessoal pede isso pra eles, pede! Falam “olha eu quero resolver, aprender a fazer coisas da minha profissão usando a matemática”. E os professores não sabem o que fazer. Então quando a gente elabora todos esses tipos de aplicação, pra eles começa a ter um sentido, e aí, eu digo, aí nós vamos começar a complicar um pouquinho, e quando começa a complicar, não é tão simples assim. Aí eu preciso de umas ferramentas mais complexas, e aí que eu digo pra eles: então nós vamos aprender teoremas, vamos aprender a usar algumas fórmulas, mas você precisa saber em que condições você pode usar , por que senão vai ser um negócio terrível. Teve um aluno que perguntou pra mim: “função, professor, me perguntaram pra que se define função na matemática”... professores, não é? Eu falei: “olha , pensa bem, na matemática nos temos ralações, não temos relações?, mas um grupo dessas relações agente chama de função, porque? Aí eu falei, pensa o seguinte: imagine que aqui no nível do mar, a gente descobrisse na natureza que a água ferve em cinco temperaturas diferentes, como é que seria a natureza?... aí eu deixei ele pensando, então, existe na natureza o determinismo. Se você determinou aquelas variáveis, com um valor bem definido, o fenômeno esta definido, então o que quê é função? Função nada mais é que uma lei, você tem que obedecer o determinismo da natureza. Uma vez definidas as funções e os valores definidos de cada variável, você só pode ter um resultado, se não a natureza seria uma loucura, não é? Então nunca houve uma associação... isso é o que falta pra o professor, uma associação entre a física, entre a química, entre a matemática, e o cara fica num beco sem saída, ele não sabe para que quê ele vai usar aquilo...Os professores de Matemática parecem que não sabem aplicar a Matemática.

Então o aluno perguntou, um aluno da faculdade, eles tinham tido uma aula de história, de história e estavam falando de escravidão, não é? Então, um deles falou: é, no Brasil foi a princesa Isabel; o outro disse que não, que foi a Inglaterra que obrigou; não, não foi nenhum dos dois, foi o conhecimento cientifico, se não fosse descoberto o carvão, e depois a utilidade do petróleo, a gente teria escravidão até hoje, por que para você realizar um certo tipo de trabalho, uma certa produtividade, você precisa energia, que pode ser animal ou humana, não tem jeito. Foi justamente o desenvolvimento tecnológico, onde a máquina, usando esses combustíveis, produz mais do que o homem, que libertou o homem; uma conseqüência natural da revolução industrial, então, pô, eles não conseguem associar a história e a física com a matemática...não..., então eu acho que seria muito útil se houvesse a história das ciências no curso da matemática. Mostrar como que os conhecimentos foram surgindo, não foi do nada, não é? Então isso daí daria uma visão, uma cultura geral. O futuro professor deveria ser imerso na cultura matemática quando cursasse a licenciatura. Mas não ele não essa cultura. Eu lamento -, isso eu li num artigo de um professor universitário, que a cultura do professor hoje, do primeiro e segundo graus, especialmente escolas que são mais na periferia, a cultura do professor é praticamente a mesma do aluno que ele vai dar aula. Isso daí é um problema gravíssimo. O professor tem que ter muito mais cultura do que o aluno pra poder montar uma aula interessante, e poder responder pra ele coisas que o aluno tem curiosidade e não consegue, não é? Então essa pouca cultura, especialmente porque os livros estão muito caros no Brasil, não é? É uma coisa gravíssima, eu a primeira coisa que eu faria se estivesse no governo era cortar todos os impostos dos livros, livro não paga imposto de jeito nenhum, entendeu? E baratear o máximo possível o livro, então essa dificuldade que os professores novos, eu diria novos não, de vinte anos pra cá, de pouca cultura, eu acho que prejudica muito a qualidade da aula; ele não consegue montar uma aula; ele pega o livro, faz um resuminho, e dá o que está no livro. Essa é que é a pratica real nas escolas do Estado, da prefeitura; é isso o que acontece. Então falta essa cultura geral pra ele montar uma aula, que englobe uma série de coisas, especialmente atuais, que crie no aluno um significado, que seja uma coisa interessante, não é? Que o aluno se ligue, agora, é isso que eu acho que é o mais grave.... Tem muito professor que fez supletivo do 1º e 2º graus, depois fez um curso de fim de semana e aí vira professor de Matemática. Mas esse cara vai ensinar o quê? Você acha que ele sabe o que é uma dedução?

E qual seria a saída?.

Aqui na Universidade nós fizemos uma experiência que parece que deu resultado, porque no ano passado, a avaliação dos alunos, daquele exame feito foi A, curso de licenciatura de Matemática. Então quando eu entrei faz uns dez anos, a gente dava um curso onde era dado só o conteúdo do terceiro grau, aí o professor Olimpio, que tem muita experiência, o Vicenzo, eu, o professor Drauzio, que é o diretor hoje da Universidade. Então, a gente discutia, pó, o que quê adianta você dar cálculo diferencial integral, análise, se o sujeito não sabe resolver uma inequação do primeiro grau, do segundo grau? Como é que ele vai dar aula? Você esta dando um curso de licenciatura, mais aquilo que ele precisa, para dar a aula, ele não aprendeu. Quer dizer, se ele entrou na faculdade e não viu aquele assunto direito, ou nem viu na faculdade não vai ser dado nada daquilo. Era assim. Então a gente começa a mudar algumas coisas, então o que quê a gente faz hoje, praticamente, é rever com uma velocidade um pouquinho maior do que seria o normal dado no primeiro e segundo grau; os conteúdos do primeiro e segundo grau. Rever novamente, por que tem muito aluno que estuda no noturno. Curso noturno, que a realidade é outra, não, esses alunos não viram isso, não viram. Quando eu falo de geometria, eles não viram; é a primeira vez na vida. Então o que quê eu faço: eu pego aqueles dois volumes, não é, de geometria, e a gente destrincha tudo, como se eles nunca tivessem visto nada; desenho geométrico, pego livros do primeiro e segundo grau, a gente faz tudo; dou lição de casa pra eles, acredita que eu dou nota na lição de casa? Dou... . Assim eu obrigo eles a fazer. Então esses alunos, eles vieram do Estado, muitos, a maioria que entram nas escolas particulares, a realidade é essa, o cara tem que trabalhar, por que tem que sustentar ele, às vezes a família, tem pouco tempo pra estudar. Ah, em segundo lugar, ele vem dessa avaliação continuada, que existiu esses anos todos, onde o cara não tinha compromisso nenhum; passa de qualquer jeito. Os professores quando chega na parte de geometria, desenho, eles, já nem dão, não é? Não e só isso, outros assuntos também, então o que acontece, o cara chega, ele vem da escola do Estado, chega na universidade, quer ser professor, mais ele não sabe... por que não viu, realmente não viu. Então nos primeiros anos, a uns oito anos atrás, a gente tava revendo o assunto, depois de uns quatro anos pra cá, nós não estamos mais revendo; nos estamos ensinando pela primeira vez. Eles não viram, nunca! Geometria analítica, nunca, nunca ouviram falar de.. A parte de geometria ligado a prismas, por exemplo, a geometria métrica por exemplo, nada, nada, nem a plana! A plana muito pouco. Então, ah, em uma série de assuntos - quase todo o conteúdo -, eles não viram. Tem cara, olha, é inacreditável, só contando, outro dia o diretor da faculdade estava falando, porque ele dá aula também, ele pega a parte fundamental, o cara somando frações, somando em cima e somando em baixo! Cara do primeiro ano, pra ser professor de matemática... então pô, você veja que a nossa realidade, não é uma realidade de uma USP, de uma UNICAMP, de um..., não é? Você pega nas escolas particulares, alunos que são realmente os mais variados históricos de vida, não é? Têm alunos que fizeram madureza pararam vários anos, aí fizeram supletivo e acabaram entrando na faculdade com nota baixa, mais entraram, e o cara não sabe quase nada. Então o que quê nos fizemos? Começamos a rever todos os assuntos do primeiro e segundo grau, inclusive a parte concreta, com jogos, toda essa parte didática, pedagógica, mas todo o conteúdo do primeiro e segundo grau está sendo visto. E eu, quando tendo demonstra pra eles, olha, vamos fazer... eu comecei ensinando pra eles o que quê era um teorema, o que quê era... Meu deus do céu, os caras não conseguem entender, por que a gente precisa fazer a demonstração, hipótese, tese, já ouviram falar, mais "pra que quê serve isso?". Então a realidade nossa é muito, muito mais difícil de... então o que acontece? Eu falei, bom, é o seguinte, eu vou ensinar a vocês fazendo, vocês vão aprender fazendo, tudo, e, depois que eles estão fazendo um monte de coisa, "porra, como é legal! Dá pra fazer um monte de coisa que eu não sabia." Bem agora a gente vai aprender os porquês, mas pra que os porquês? Porque esses problemas que nos fizemos são simples; são muito úteis, mais são simples. Quando forem um pouco mais complexos, não e apenas medir, usar uma formulinha, agora vocês tem que saber utilizar mais de uma fórmula; várias fórmulas, mais elas têm que ter condições de serem usadas, porque você tem que saber em que contexto vale, essa hipótese sua, justamente o que quê é? Ela vai te delimitar aonde esse conhecimento pode ser usado. Então dentro dessas premissas, pa, pa,pa..vale. Se uma dessas premissas não esta sendo obedecida, já toda aquela demonstração, toda aquela teoria, já deixa de ter sentido, porque você pode cometer um erro bravo, entendeu? Então eu explico pra eles isso, não é? Aqui no laboratório eu faço algumas coisas, a gente faz o seguinte: eu sempre faço pra chegar a um resultado, duas maneiras diferentes: uma, normalmente procuro ser teórica, e a outra, prática. Eles têm que chegar a um resultado, depois eu dou uma diferença percentual, entre os resultados; se for 5%, eu aceito, se não você volta e faz outra vez. Com isso eu vou acabando com aquele “achismo”. Eu não quero a resposta; eu quero que você me dê o resultado correto, então o aluno, ele faz de um jeito, depois faz do outro jeito, compara os resultados. Aí fala: “não professor, é tanto”. Ta dentro do limite? Ta dentro do limite de tolerância? Então tá ótimo, deu pra entender?, por que eu falei, pô, você acha o resultado, imagina, você vai fazer uma ponte, a resistência, tem que ser, assim quinhentos. Se eu calculei cinqüenta, errei um zero, não é? Eram pra fazer quinhentos são cinqüenta, você monta e cai tudo, foi um errinho só. Então você tem que ter certeza que é por ali. Então... mesmo a conta de dividir, de multiplicar, você tem que ter certeza 6x5, quanto que é? É 30, mas você, poderia me provar de outra maneira? 6x5, e 5+5+5...faço ele somar, dá 30, ah então, é difícil você errar fazendo a multiplicação e a soma, não é?, você chegou num resultado, então tá bom. Então você vê cada erro... Alunos da faculdade! Eles erram as divisões, você acabou de fazer a divisão, multipica o quociente pelo divisor e soma o resto, deu esse resultado?, Ah, então está certo. Não vem me dizer que você erra na divisão, não aceito erro na divisão! Os meus alunos do Ensino Médio erram bem menos que os da Faculdade, outra bagagem....Então você vê coisas primárias, que erram, erram tudo. Então no laboratório a gente faz isso daqui; procuro fazer de duas maneiras, e a gente usa o método chamado “espiral”, que era usado na França. A gente usa o conceito de maneira bem elementar nas primeiras aulas. Depois a gente volta um pouco mais profundo; depois a gente volta um pouco mais profundo, e não damos definição nenhuma. Ele que vai fazendo, fazendo, quando ele chegar, mais o menos, sei lá dez aulas, vinte aulas, dependendo do assunto, e que a gente começa a discutir entre eles, olha que você acha aqui, que você acha, que você acha... Essa parte e uma inversão, geralmente as pessoas partem da definição...Esse e o problema, eu já fiz isso, você partir da definição não da certo, não da certo. Então, ele tem que ir chegando ate lá, e no laboratório da pra fazer isso. No laboratório a gente faz o caminho contrário; a gente procura fazer o método científico, e pega os dados, monta a equação, entendeu? A definição ele chega no final, quando o professor da teoria vai fazer a definição, ele já chegou na definição no laboratório, deu pra entender? Quando o professor vai fazer o exercício, ele já aplicou... Algumas coisas engraçadas, por exemplo, não é? Achar a altura da sala, por exemplo, para eles é engraçado, por que eu ponho uma escada e faço eles subirem, depois eu comparo a medida real com o que eles obtiveram com os transferidores, é o erro é 5%, não é? Depois que eles fizeram isso, eles vão medir o prédio, coloco em cinco grupos diferentes, posições diferentes, não é. Medir a rua sem atravessar, eles fazem isso na rua, então quando o curso da teoria vai chegar na definição, eles já tiveram um caminho até chegar lá. Já vivenciaram... Quando o professor vai fazer uma demonstração na teoria, eu já expliquei pra eles por que eu preciso daquela demonstração, porque aqueles problemas que o professor vai apresentar são mais complexos. Então você tem que ter certeza que aquelas fórmulas cabem naquele tipo de contexto, se não você vai usar uma fórmula, da física, então! Você dá mil fórmulas. O cara vai usando um monte, vai testando até chegar a um resultado. Então espera aí, então você não conhece modelo? Aquela fórmula pode ser usada em que condições? Ela foi deduzida, mas foi deduzida, em que hipóteses, não é? Então é isso que falta... essa vivência. Então, pra minha prática, a demonstração, a definição, são coisas que a gente tem que deixar em uma fase onde eles já têm um amadurecimento, uma vivencia, tem um caldo cultural, pra ele sentir que aquilo tem sentido, que a coisa esta ficando mais complicada. Olha, você sabe o que quê eu faço nas minhas aulas; eu faço um negócio que é até engraçado que ninguém faz, não é? O professor geralmente não gosta; eu peço pro aluno dar a opinião dele no final, se gostou pouco, muito ou não gostou da aula; se gostou, mais ou menos ou muito e porque. Então no começo, quando, há uns oito anos atrás, quando a gente dava as aulas de laboratório, normalmente os que gostavam, era 15 a 20%. Aí eu comecei a descobrir coisas que facilitam o entendimento deles, hoje tá em media de 50%, dos que gostam muito, e os que mais ou menos tá entorno de uns 40%, então é um processo. Eu quando apresento alguma coisa pela primeira vez, eu peço a opinião deles, o que você acha? Eu não quero que ele demonstre nada; por exemplo, ângulo que a gente começa a dar no primeiro ano colegial; a gente faz uma revisãozinha, o que quê é um ângulo? Então cada um coloca de um jeito, eu aceito, desde que tenha alguma coisa a ver; depois, quando agente vai aprimorando, nas aulas seguintes, aí começa a ser um pouquinho mais rigoroso; mais ele também consegue ter outra percepção... Então a definição, a demonstração eu deixo pra depois. Ele vai formando pouco a pouco, e depois de seis meses, por exemplo, ele já tem uma idéia razoavelmente boa, não é? Para poder... eu penso o seguinte: o conceito pra gente aprender é que nem, por exemplo, um armário atrás de várias árvores; se você olhar de uma posição, você esta detrás das arvores, você vê um cantinho do armário; se você mudar de posição, você vê outro cantinho do armário; se mudar de posição, vê outro; mudar de posição vê outro, e chega uma hora, que você viu de tantas maneiras diferentes, que se eu pedir "como é o armário?" você me faz um desenho dele. Então o armário é o conceito, então ele tem que ter uma percepção de diversos ângulos, aí depende o aluno: quem tem que mais facilidade ou tem menos facilidade, então um terá que ver de dez posições; outro, de vinte posições, mais tem uma hora, que ele chega lá... mas não adianta eu chegar para ele, ele tem que chegar. Eu digo pra eles: olha eu não vou conseguir ensinar ninguém, quem aprende é a própria pessoa; ela que aprende, é um processo individual, o que eu tenho que fazer é dar caminhos, alternativas, para ele descobrir o potencial dele é chegar até esse potencial, então eu vou dando alternativas, vou dando situações, onde ele está vendo aquele mesmo conceito e ele que vai formulando, não adianta eu definir, dá uma demonstração, se pra ele aquilo não tem nada a ver. Então eu aceito, o aluno fez assim? Bom, que aula que é? A primeira aula sobre o assunto, segunda, terceira, quarta, quinta? Então ele já tá chegando, tá chegando, tá chegando, entendeu?. Eu acho que quando a gente formaliza muito, especialmente com o aluno mediano que é 80% do aluno, você tem 10% que são excepcionais, 10% que não querem saber daquele assunto por que não tem facilidade nenhuma, mais 80%, aquela curva, não é? Dependem justamente de esse processo de você ser flexível, você permitir para o cara, poder, dentro da capacidade dele, não é? Vai de um jeito, vai do outro, vai um pouquinho, aqui, um pouquinho aqui, mais ele vai chegando.

Você vê, uma dais coisas piores que existem nos professores, desde o primário até a faculdade, é que nos somos educados – os professores – pra não aceitar a dúvida nem o erro do aluno. Então quando o aluno põe a impressão dele, superficial, sobre um assunto, e você diz: "você é uma besta, tá errada; a resposta essa, você perdeu o cara, perdeu ele. Então você tem que permitir que ele tenha dúvidas, que ele erre, que ele descubra o erro. Teve uma aluna lá que falo pra mim: olha, um aluno que é do primário, está com dúvidas: que 5 dividido 2, dava 2, e sobrava 1. Então eu falei: "por que você não pegou cinco pedras e dois alunos, divide em igual , fica 2 pedras pra um, duas pedras pra outro e sobra uma.

Então ela falou: tem um aluno... por exemplo... que 1 dividido por 2 da zero porque o 2 não cabe. Falei: ele não tá errado, mais se você fosse prática e dissesse: eu pego uma pedra; tem que dividir pra dois? Não vai dar uma pedra, a única maneira de ser honesto, seria pegar e cortar a pedra na metade, e aí seria metade pra um e metade pra o outro. Eu falei por que você não mostra... primeiro você tem que mostrar para ele, depois você vai demonstrar, porque se ele não estiver convencido não adianta, porque, pra mim ensinar e um ato de amor, fé e esperança. Amor de quem ensina, fé de que tem que aprender, se ele não tiver fé naquele conhecimento, se ele colocar obstáculos, fechar a mente dele, já era, não tem, você pode fazer o que quiser, entendeu? Então você tem que convencer a pessoa, se ela faz a dela, 5 dividido por 2, eu não sei, pô, quanto você acha? eu acho que é 3, eu acho que é 2... vamos fazer, pega duas, pega duas, sobrou uma; deu pra ver que não é 3? quando o cara vê que não é, aí, ele está convencido, aí você ganhou o cara, entendeu? Então eu falei você tem que... o professor tem que ganhar o aluno e muitas vezes tem que mostrar para ele, por que ele insiste naquilo, não adianta fazer, eu já fiz isso tantas vezes, olha não é assim, e desse jeito, aí o cara faz a prova do mesmo jeito...você diz "esse cara é uma besta"... não é assim, é desse jeito, o cara, depois de duas ou três faz a pergunta, e eu respondo do mesmo jeito, por que? porque ele não esta convencido que ele esta errado, você como professor tem que ver aonde que ele está errando, e mostrar pra ele que ele esta errado, ele tem que se convencer. Então você tem que descobrir uma maneira de ele...cair a ficha, entendeu? pô tá errado; e aí na hora que ele se convenceu: tá errado, ele abriu a mente dele, aí você pode introduzir a informação correta, não é?, então o erro é fundamenta. Ninguém aprende sem errar; então o professor tem que permitir que o aluno erre, que ele tenha dúvidas, que ele levante uma hipótese, que ele fale a opinião dele, mesmo que seja uma coisa assim sem nexo, mas é importante, porque se não ele não ta mostrando o que quê ele está enxergando daquilo. Você fica uma coisa, uma coisa hipócrita, você fala, olha: é assim que você tem que fazer. O outro não acredita, e ele finge, ele fica fingindo, pra conseguir nota, pra conseguir nota, e aí depois de alguns meses, você vai verificar o que realmente o cara sabe – porque cultura é aquilo que dentro de você, não é? - , aí você faz... vamos ver o que que... se isto entrou na cultura dele. Faz a pergunta, e o cara não diz nada com nada; então eu falo "pó então foi inútil o que eu falei pra ele", não é? Então a gente tem que permitir que o aluno erre, que o aluno tenha dúvidas, que o aluno faça as suas hipóteses. Então essas aulas de laboratório não são problemas, porque o problema, tem quatro fases, tem a interpretação do texto, algebrizar aquele texto, resolver, achar um resultado, depois interpretar o resultado, são quarto fases o problema. O que a gente faz é uma experiência. O cara pode formular o que ele quiser, ele pode achar uma coisa, pode achar uma outra, ele escreve, desde que tenha alguma coerência, tudo bem.

Para ensinar um conceito muitas vezes eu parto de uma experiência. Eu falo: "olha, nós vamos hoje medir essa sala aqui, aí eu pego, aí eu digo, "é bom aprender a fazer isso porque a próxima aula nós vamos medir o prédio", eu pego uma corda, não é?, e eu falo "quem é que vai no grupo aqui, subir no prédio?". Tem duas maneiras: uma é você subir lá em cima e descer com a corda, depois a gente pega e mede o tamanho da corda. A outra é queda livre: você põe uma bacia; o cara pula lá de cima... vê quanto tempo levou, não é?, A gente calcula quanto é a distância que ele percorreu, que é a altura do predio; e a terceira, menos traumática, é usando a matemática. E aí eu deixo eles quebrarem a cabeça... "como é que eu vou medir esse negócio?" Aí o cara vai e tal... bom eu quero que vocês meçam e calculem, eu já falei, seno, cosseno, tangente, deixo os caras quebrar a cabeça, e quebram e "como é que eu vou fazer?". Eu digo "vai lembrando tudo que a gente já fez, vai lembrando... ". Bom, você tem que medir mas sem subir em escada, você pode até confirmar a medida subindo, mais eu não quero que você suba, eu quero que você me dê a altura sem subir. Aí os caras ficam pensando... e sempre tem alguem que diz "olha, vamos fazer assim, eu só sei a minha altura ate aqui. daqui para cima eu não sei, mas tem um jeito de saber? Formar um triangulinho alí, não é?, usar a tangente, sabe a distância até a parede, o ângulo; com o transferidor, *matou* o x; soma com a altura do observador, tem a altura da sala, mas as vezes eles levam de 15 a 20 minutos pra chegar aí. E deixo eles quebrarem a cabeça, e vai e pensa e tal... então é uma experiencia onde eles vão levantar hipóteses, aonde ele vão dar sugestões, onde eles vão ter dúvidas, onde eles vão errar, uma porrada de coisas, e eu vou dando uma dica aqui, uma dica ali, e aí um começa a enxergar aqui, o outro começa a enxergar ali... na hora que eles chegam, pô dá pra fazer assim, aí eu escrevo na lousa, com um desenho, está vendo? Está! Aí eu pego cinco transferidores grandes com peso, coloco cada grupo em posição diferente, na sala, eles vão medir com trenas, ou, depois eu vou pegar o valor de cada um, e aí eu meço o real... Sabe que dá erro de 1%, 2%, entre o real e o calculado? E falo: está vendo pra que quê serve a matemática? Aí eles começam a acreditar...

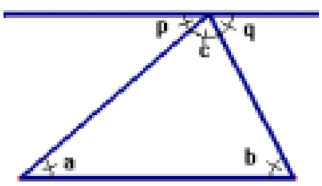
Parte II da entrevista

Vou apresentar a você algumas demonstrações feitas por alguns alunos: eles "demonstraram" que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Vamos supor que todos eles estivessem em uma classe de 8ª série, por exemplo. Analise as produções desses alunos e explicite aspectos que podem indicar o grau de compreensão de cada um deles sobre a prova solicitada. Depois vou pedir que você dê uma nota de zero a dez para cada produção. Vou dar um tempo para você pensar. Tudo bem? Você pode me responder depois.

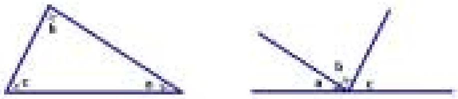
Bem, primeiro eu olhei aqui, e disse puxa vida você vai ter que fazer uma análise, se ele fez uma demonstração boa, se não fez uma demonstração boa, e é um negócio... Uns garotos de 7ª serie e 8ª série... Achei incrível mesmo!

Então eu fiz o seguinte: eu analisei cada uma separadamente, mas eu acabei comparando.

Veja esse caso, a demonstração da Bia

Resposta de Bia:  $p = a$ e $b = q$ $p + c + q = 180º$. Logo, $a + b + c = 180º$	É uma demonstração bem consistente. A aluna quando fez aqui, ela não mencionou, por exemplo, no que ela se baseia para dizer que esses ângulos são iguais (a e q). Tem um conhecimento a mais que seria saber os tipos de ângulos quando têm os feixes de retas paralelas, transversais, os ângulos internos, então essa afirmação aqui já, está dizendo, não é? Faltou dizer essas coisas ...Como recurso pedagógico, usaria três figuras triangulares formadas com os ângulos internos a, b e c e deslocando estes ângulos para a reta paralela acima, "percebe-se"com clareza que a soma é 180. Vou repetir: esse aqui está muito bem feito, muito bem feito, e eu só faria como complementação triângulos de papelão, de cores diferentes, encostaria os três aqui, dava perfeito, fica muito mais visual, não é?, Inclusive isso é feito, material didático assim, a gente vê lá na faculdade que os professores aprendem a fazer esse tipo de material, não é?

Ana

Resposta de Ana: Eu recorto os ângulos e os coloco juntos:  Eu obtenho um ângulo de 180º pois os ângulos formam uma linha reta. Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece. Logo, a firmação é verdadeira.	Como ela sabe que os ângulos nos dois desenhos são congruentes? Houve aqui um analise só em cima do triângulo eqüilátero e triângulo isósceles, faltou o escaleno. Então essa afirmação aqui, ela está particularizada nesses dois tipos de triângulos, só que ela é genérica... Mas ele não demonstrou, entendeu? Então foi um erro que eu vi em muitos casos aqui. Ele fez uma indução, pegou casos particulares, bom isso vale sempre, isso é muito comum, muito comum, vale aqui, vale aqui, vale sempre....então esse é um exemplo de um deles.

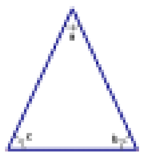
Agora a Claudia ...

A Cláudia fez a mesma coisa: partiu de um triângulo isósceles, e chegou a uma conclusão genérica. Ela induziu apenas.

Ela partiu da tese.

Mas que coisa, heim?

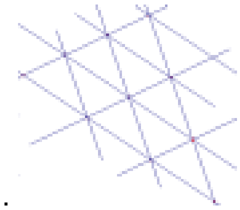
Reposta da Cláudia:



Afirmativas	Justificativas
a= 180º - 2c	Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
a= 50º	180º - 130º
b = 65º	180º- (a + c)
c = b	Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.

Logo, a + b + c = 180º

Essa daqui ...

Resposta de Dora: Eu desenhei uma rede de triângulos e marquei todos os ângulos iguais  Eu sei que os ângulos em volta de um ponto somam 360º. Logo a afirmação é verdadeira	Ela não mencionou uma coisa importante, que se tem dois feixes de retas paralelas, se ela fala: “olha, pega essas retas e monta os triângulos”, não vai dar certo, não é? Será que ele tem o conceito de retas paralelas. Não foi mencionado que os ângulos são formados por paralelas cortadas por transversais. Ela sabe o que são ângulos correspondentes, ângulos alternos internos? Ela possui esses conceitos? Tenho dúvidas. Ah, que mais?

Está certo ele induziu e procurou uma generalização de casos particulares.

Mas acho legal. Ele teve a preocupação de colocar
diversos tipos de triângulos: acutângulos, obtusângulos e retângulos.
Aqui ele fez uma dedução genérica, a partir de um resultado concreto, então eu achei que ele tem um
certo, um certo, vamos dizer, valor, embora ele não tenha dito, que foi feita uma demonstração típica,
mais ele, visualizou, não é? Conseguiu visualizar e chegar a ter uma idéia do que é definir uma
propriedade, no fundo ele tá procurando achar uma
propriedade, que vale pra todos; achei que a criatividade dele foi boa, não é? Muito boa.

Resposta de Eduardo:
Eu medi cuidadosamente os ângulos de diversos tipos de triângulos e fiz uma tabela.

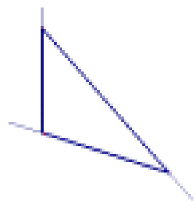
A	B	C	Total
110º	34º	36º	180º
95º	40º	45º	180º
35º	72º	73º	180º
90º	59º	31º	180º
13º	19º	148º	180º

Em todos eles a soma foi 180º. Logo a afirmação é correta.

O Fernando foi criativo. Mas por que ele transportou todos os ângulos até formar uma volta. Como ele conhece essa propriedade? Será que ele também não partiu do resultado? Não entendi bem. Como saber que isso vale para todos os triângulos? Não é? Caracterizar cada tipo de ângulo, isso aqui não está bem claro, está muito genérico.

.

Resposta de Fernando:
Se eu caminhar toda a volta sobre a linha do triângulo, termino olhando o caminho por onde comecei. Eu girei 360º.



Cada ângulo externo quando adicionado ao ângulo interno deve dar 180º porque eles formam uma reta. Isto faz um total de 540º.
540º - 360º = 180º.
Logo, a afirmação é verdadeira.

Parte III da entrevista

Vou apresentar a você algumas demonstrações feitas por alguns alunos: eles "demonstraram" que a soma de dois números pares é um número par. Analise as produções desses alunos e explicite aspectos que podem indicar o grau de compreensão de cada um deles sobre a prova solicitada. Vamos supor que todos eles estivessem em uma classe de 8ª série, por exemplo. Depois vou pedir que você dê uma nota de zero a dez para cada produção. Vou dar um tempo para você pensar. Tudo bem?

Resposta de André: x é um número inteiro qualquer. y é um número inteiro qualquer. 2x e 2y são dois números pares. $2x + 2y = 2(x + y)$. Portanto, a soma de dois números pares é sempre par.
Análise da entrevistado: Aqui por exemplo está muito bonito, bem feito...só que ele não definiu o que quê é número par, ele chegou a conclusão que 2 que duplica x + y é número par, aí ele devia ter explicado antes como o Ciro: “números pares são divisíveis por 2”. Ele devia ter feito não é?, Se não fica uma coisa meio.... Aqui ele induziu. Faltou mencionar a definição do que é um número par. Mas possui amadurecimento para algebrizar.

Resposta de Bernardo: 2 + 2 = 4   4 + 2 = 6 6 + 2 = 8   2 + 4 = 6 4 + 4 = 8   6 + 4 = 10 2 + 6 = 8   4 + 6 = 10 6 + 6 = 12   2 + 8 = 10 4 + 8 = 12   6 + 8 = 14 A soma de dois números pares é sempre um número par.
Análise da entrevistado: É um raciocínio indutivo, portanto, baseado em poucos casos. Não é suficiente para fazer uma afirmação genérica.

Resposta de Ciro: Números pares são números divisíveis por 2. Quando você adiciona números com um mesmo fator comum, 2 nesse caso, a soma terá o mesmo fator comum; portanto a soma também é divisível por 2. Assim, a afirmação é verdadeira.
Análise da entrevistado: Ele consegue compreender o que é uma definição (uma ferramenta adequada) e onde emprega-la. O seu raciocínio baseou-se de forma coerente com a definição usada.

4. Resposta de Dario: Sejam x e y dois números inteiros quaisquer. $x + y = z$ $z - x = y$ $z - y = x$ $z + z - (x + y) = x + y = 2z.$ **Portanto, a afirmação é correta.**
Análise da entrevistado: O raciocínio é criativo. Contudo, faltou definir o que é número par. Ele somou x e y, tirou o x,, tirou o Y...

Ele pôs z + z é 2z; x mais y que é z, não é?

Ele somou, ele pegou essa expressão, somou com ela, e tirou essa e tirou essa, então quando ele somou duas vezes, dá dois x, tira um x, dá x Somou duas vezes esse, dá 2y, tira y, dá y, então duas vezes isso dá isso, menos, isso, menos isso, me dá dois z. Ele pegou um número, um número que ele considera que é a soma dos números inteiros e a subtração dos números inteiros, sempre vai dar um número inteiro. Ele concluiu aqui, pegando isso daqui vai dar dois z, e dois z é sempre número par, só que ele não disse o que quê é numero par, então a afirmação está correta; está incompleta.

Resposta de Eunice:

♦ ♦ ♦ ♦   ♦ ♦ ♦   ♦ ♦ ♦ ♦ ♦
... + ... = ...
♦ ♦ ♦ ♦   ♦ ♦ ♦   ♦ ♦ ♦ ♦ ♦

Portanto, a afirmação é correta.

Análise da entrevistado:

Essa daqui, ela está naquela fase que é do concretismo, tem que fazer devagarinho, vários casos, ou seja, ela vai estar fazendo uma indução, mas ainda está mais primário, está ainda na parte de visualizar com objetos concretos. Ela precisa visualizar e partir do concreto. Contudo ela está induzindo e sempre terá um número de casos limitado.

Resposta de Flávia:

Vamos supor dois números pares:

x = 27418

y = 956136

então , x + y = 983554 que é par.

Portanto, a afirmação é correta.

Análise da entrevistado: Esse aqui induziu, chutou, pegou dois números, somou e pronto!. Análogo ao caso do Bernardo.Baseou-se em poucos casos para poder generalizar.

Resposta de Gina:

Números pares terminam sempre em um desses dígitos: 0, 2, 4, 6, ou 8. Se eu adiciono dois desses números a soma termina também em 0, 2, 4, 6, ou 8.
Portanto, a afirmação é correta.

Análise da entrevistado:

Esse aqui eu achei o mais interessante, de todos é o que tem mais criatividade. Percebeu isso e chegou a uma conclusão, quer dizer, ele não demonstrou, mais ele descobriu uma propriedade, ou seja, uma característica que existe sempre: todos os números pares têm ,algarismos, e quando somo um par com par, sempre vai dar o que está ... vai dar sempre no final um deles, portanto, é par.... o cara teve...eu acho que de todos, essa Gina, é quem tem a maior capacidade para ser... para trabalhar em laboratório, ser uma investigadora, que a observação dela foi... ou seja, ela conseguiu observar uma característica realmente que existe e chegar a uma conclusão do todoEla é muito observadora e consegue perceber propriedades, particularidades. Também consegue perceber o todo. Ela tem características adequadas para investigação científica.

Resposta de Helena:
Sejam p e q dois números pares quaisquer. Então Então, existe um número inteiro **k** tal que p = 2k. Existe também um **m** inteiro tal que q = 2m. Portanto p + q = 2k + 2m = 2 (k + m) é par Logo, a afirmação é correta.
Análise da entrevistado: Ela já possui um nível de abstração elevado que permite “algebrizar e desenvolver uma demonstração.

Resposta de Ivo:
Vamos pegar dois números pares como 10 e 26. Então $10 = 5 + 5$ $\underline{26 = 13 + 13}$ $36 = 18 + 18$ Como isso sempre é possível, a afirmação é correta.
Análise da entrevistado: Análogo ao caso de Bernardo..

Eu achei...agora a parte algébrica aqui, está bastante desenvolvida, aqui também ela induziu, pegou um caso particular. Então eu peguei depois, fui juntando tudo isso aqui, e falei “olha, é difícil para mim dar uma nota, por que cada um está num estágio, então eu fiz o seguinte, olha, podemos justificar nessas respostas diversos graus de desenvolvimento, então esses alunos: Dora, Fernando e Eunice, eles ainda estão num estágio, mais, vamos dizer, elementar; eles precisam manipular objetos, visualizar, trabalhar com coisas concretas e mesmo assim, ainda nem conseguem induzir; eles só verificam aquele caso, ahh aqui é verdade, aqui, entendeu? Está ainda naquele estágio de... induzir alguns casos pra depois tentar chegar a uma conclusão. Depois tem o segundo grupo que já esta induzindo, ele procura uma generalização, uma lei, mas usa dados numéricos e gráficos, só que ele tenta obter uma conclusão, que não dá por indução, mas ele já está chegando, ele está conseguindo enxergar que vai acontecer, vale, vale, vale, em vários casos, pô, deve valer, só que ainda não está com o algebrismo forte e fazendo raciocínio dedutivo, não é?. Agora, tem o caso, por exemplo, da Ana, da Claudia, do Eduardo, Bernardo, Flavio, Gina e Ivo, e o terceiro caso, já é o pessoal que já esta amadurecido, e já consegue trabalhar com dados algébricos e fazer uma dedução, e o caso da Bia, do André, do Ciro, do Dario e da Elena.. então eu vejo o seguinte:esses alunos aqui, eles estão no estagio mais primário sobre o assunto, e eu tenho que trabalhar com esse recurso que ele tem até que ele consiga com esse recurso chegar aqui oh....e depois chegar aqui. Agora se eu tentar atropelar ele, esse aluno com essa característica, jogando ele já pra cá, considerando que ele é capas de fazer isso , e inútil, por que ele vai voltar sempre pra cá.

Compreendeu? Então eu coloco assim, não é que um é melhor que o outro, eles estão em estágios diferentes, e a gente tem que trabalhar o máximo que a gente puder nesse estágio, até ele pular para cá, trabalhar aqui, até ele pular pra cá. Então, eu coloquei esta observação: o professor deve levar em consideração o desenvolvimento de cada aluno, e aceitar os recursos e a cultura dele, permitindo a existência da dúvida, do erro, das hipóteses levantadas. Ao longo do processo as impressões e as vivências com conceitos serão melhoradas, e aí eu coloquei alguma coisinha, aqui, no que eu me baseio, não é? Eu acho que o conceito é que nem uma pedra bruta; ela tem que ser lapidada. Não adianta querer ir já no último estágio quando você tem a jóia. Tem que ir cortando devagarzinho, às vezes tem que cortar mais, tem que cortar menos, e são esses estágios aqui, não tem jeito, e aquele exemplo que eu te dei. Que a nossa cultura seria essas árvores aqui, o armário nosso conceito, então quantas posições eu preciso? Depende, como é que eu vou saber quem tem mais crenças, quem tem mais valores? ...então eu...

O que eu posso dizer é que se eu desse uma nota em termos de um aluno atingir a capacidade de fazer uma demonstração, de poder fazer, trabalhar com álgebra não é?, poder manipular dados abstratos, eu colocaria, sei lá... daria uma nota, se eu tivesse que dar uma nota, daria, vamos supor que fosse 10, aqui eu daria nota... 5 e aqui uma nota 7, mas essa nota, veja bem , não é para o aluno, seria em função do estágio que ele se encontra.

Em síntese, pudemos verificar nestas respostas, diversos graus de desenvolvimento:

1. Trabalhar com conceitos que possam ser manipulados, visualizados, concretos: Dora, Fernando, Eunice. Nota: 5.
2. Induzindo, procurar uma generalização, uma lei, mas usando dados numéricos ou gráficos: Ana, Cláudia, Eduardo, Bernardo, Flávia, Gina e Ivo. Nota: 7.
3. Deduzindo, usando dados algébricos: Bia, André, Ciro, Dario e Helena. Nota: 10.
    - O professor desses alunos deve levar em consideração o grau de desenvolvimento de cada aluno e aceitar os recursos e a cultura dele, permitindo a existência da dúvida, do erro, das hipóteses levantadas. Ao longo do processo, as impressões e a vivência com o conceito serão melhoradas.
    - O conceito é como uma pedra bruta que deve ser gradativamente lapidada até transformar-se numa jóia.
    - A quantidade de observações sob pontos de vistas diferentes depende de cada estudante. O conceito é um armário escondido atrás de algumas hastes,. Essas hastes são crenças, valores, outros conceitos, cultura. Quantas observações diferentes serão necessárias para “cair a ficha” e perceber e desenhar todo o armário?

Para finalizar: no começo, então não adianta atropelar. Então o que acontece no nosso ensino, que é uma barbaridade, a gente prepara desde a creche, até o último dia que ele assiste a aula, no segundo grau, a gente bola um programa pra ele, um currículo, pra que ele faça um exame na universidade de São Paulo, um exame de vestibular, o que é fora totalmente da realidade, porra. Se a gente desse a metade do conteúdo, mas trabalhasse bem essa metade, nos teríamos uma qualidade de ensino muito melhor, e quem quiser fazer exame na universidade de São Paulo, que faça uma complementação, mais um ano ou dois anos, sei lá. E ele já tem a ferramenta, não é?

Professor IIB

Em alguns países as atuais orientações curriculares de Matemática preconizam um trabalho com demonstrações em escolas de educação básica. Os PCN, por exemplo, indicam um início de trabalho com a prova já no Ensino Fundamental. O senhor concorda com estas orientações? Qual deveria ser o significado do trabalho com a demonstração nas aulas de Matemática na educação básica?

Entrevistada: Eu acho que... bom, quando eu mostro um conteúdo, quando eu quero chegar numa fórmula; que eu quero atingir um ponto com eles, essa fórmula eu nunca tiro da cartola. Então eu venho, eu trabalho com eles donde que vem, como é que vem, e eu acho que o mais interessante para isto é ele se apropriar das operações e das ferramentas matemáticas. Você se apropria quando você entende as regras de um jogo, você pode sair e chegar onde você quiser, por exemplo, em trigonometria, aquelas identidades trigonométricas horrorosas, mas se você não sabe demonstrar nem a relação fundamental nada faz sentido para você... você não sabe de onde veio aquele seno ao quadrado mais coseno ao quadrado, para depois trabalhar com coisas que não fazem sentido nenhum, decorou que a tangente não sei o que... daí é muito complicado, sem sentido. Agora, se você visualiza, demonstra, eu acho que é válido. Agora, como trabalhar isto, né? Como trabalhar? Você vai demonstrar para o seu aluno? Ele vai ser um expectador assistindo você demonstrar? A proposta é que tem que ter cuidado, porque senão, também, fica mais um joguete de cartola, que ai perde o sentido. Fica mais uma coisa para o aluno decorar.

Olha, eu estou falando com você dos conteúdos que eu trabalho este ano, então, como eu trabalho com ensino médio, e tem a cobrança do vestibular, é uma pressão horrorosa, aquela batelada de fórmulas, para que? Impossível e não é por ai... decorar... física, química, matemática e cia ltda. Então eu sempre digo a eles: se você souber de onde vem, o que você está trabalhando, você monta na hora, na hora você constrói a tua fórmula. Então, PA, por exemplo, fórmula do termo geral de uma PA. Se você não entendeu a seqüência, que a tua referência é o primeiro... quantas vezes estou somando aquela razão? Ou quantas vezes estou multiplicando para chegar na posição em que você está, então perdeu o sentido. Mas se você lembra, se você sabe o que é a seqüência, a propriedade, é aí que eu falo... você se apropria das regras matemáticas, das propriedades matemáticas envolvidas, e daí você constrói na hora. E aí é legal, quando eles dizem “ah, é por isso!”. Quando você ouve eles falarem assim, na base de “ah! É por isso!” é muito bom! Agora, eu nunca pedi fórmula para demonstra alguma coisa assim, em prova minha, por exemplo uma avaliação. É aplicação do que a gente trabalhou... eu nunca cobrei... trabalhar com hipótese, a tese... onde eu quero chegar... este tipo de rigor, eu nunca fiz. Mas a minha preocupação, não dessa parte formal, mas de tudo que eu trabalho... quando eu trabalho com geometria especial, se eu vou falar de áreas e volumes, eu me preocupo com eles... com a compreensão daquilo... de não ser simplesmente ... “to usando, nem sei de onde veio”. Eu acho fundamental trabalhar algumas demonstrações, mais no sentido de ver de onde veio, saber justificar. Eu procuro fazer com que eles argumentem. Ah, sim, eu falo assim... quando a gente está resolvendo, no meio de um exercício, essa é a resolução do exercício... é a solução do meu problema? Calma! Porque você chega no valor de X e “pronto, acabei!”... trabalhando com logaritmo. Calma, você nem sabe se existe logaritmo para aquilo. Daí tem que validar... vamos ver se isto aqui satisfaz as minhas condições. Então a resolução da solução é uma coisa; você resolveu... é solução? Então isto é bem enfatizado.

Que experiências um futuro professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio deveria vivenciar em sua formação inicial para ter competência na organização e direção de situações de aprendizagem envolvendo argumentações e demonstrações na escola básica? Ou seja, para, como para um professor ensinar essa questão da argumentação e da prova o que você acha que na formação dele, o professor deveria ter?

Eu acho que o rigor matemático, a ciência, é o que prevalece. Você tem que dominar; você tem que saber demonstrar, esse conhecimento é indispensável, mesmo que você não vá ensinar ... tua álgebra tem que ser muito... a tua geometria, a tua visão..., e pode ser muito superior àquilo que você vai explicar... aliás, melhor. Isto não impede que você... agora, para quando você for dar aula... eu tive que estudar... hoje em dia, tudo bem, eu dou aula há 12 anos, mas quando eu fui dar aula, há muitos anos eu não via... nossa!... mas na faculdade eu não tive nada disso, eu não tive a matéria que eu vi no ensino médio... nunca foi tocada aqui no ensino médio. Mas você lê, você entende, você trabalha em cima. Não sei se poderia se retomar, como explicar isso... será que em didática? Não sei... por exemplo, geometria espacial, eu tive que estudar muito e para entender pros meus alunos, porque eu não tive. Essa é uma questão difícil... Será que o ensino que eu tive na universidade, garante o trânsito para o conteúdo do ensino médio? Para os bons professores eles garantiram, né? ta todo mundo bem, tem uma boa relação... agora quem ta formando estes professores? Estes professores formados, será que eles se sentem aptos a trabalhar com isto? Não sei, é uma pergunta difícil...

Olha, eu tenho sorte porque as pessoas me consideram. Porque os meus colegas de área ... a formação foi muito boa. Então tem o X, com quem eu trabalho há dez anos, se formou pela USP; tem o Y que também trabalha há muitos anos com isto. Eu peguei o bonde andando, já, e no outro colégio que estou agora os professores também são excelentes, então eu me considero, nesse sentido, com sorte, porque troca... são pessoas... eu tive sorte mesmo... me apoiaram, porque a novata fui eu, né? O Y foi que veio depois de mim, mas ele já veio com experiência, com bagagem... mas eu acho que quando comecei, eu tava muito insegura, mesmo com minha formação que é uma faculdade com um curso conceituado, mas ...A demonstração na minha formação, ela foi um muito forte.

Entrevistador: você achou válido?

Entrevistada: achei... para minha cabeça, era um poema... eu sou um pouco romântica...(risos)... mas, parece que você organiza, você entende o que você faz, aquelas coisas absurdas, e até eu falo pros meus alunos quando eles chegam no "sisteminha", que tem o absurdo, que eu escrevo na lousa que 0=3 é absurdo e todo mundo dá risada... "gente, é linguagem científica"... a gente faz demonstrações por absurdo e eu comento com eles, mas aquela distinção dos tópicos... da onde eu saí, aonde eu quero chegar, não ter furo na ciência, né? totalmente...

Qual foi o significado da demonstração em sua formação como professor de Matemática?

A demonstração na minha formação teve um papel muito importante. Quando eu fiz matemática, eu fiz bacharelado; matemática pura, então eu tinha a intenção... eu estava fazendo a matemática pela matemática minha tendência não era com educação, mas, ainda, calma, eu estava na matemática, totalmente envolvida. Depois, fiz a licenciatura, aí sim eu abracei a educação, mas se é um curso de licenciatura visando direto, desde o começo, talvez ai sim encaixasse este tipo de envolver um pouco o conteúdo, trabalhar um pouco o conteúdo que se é cobrado no ensino fundamental e médio. Eu acho que não exclui, não; eu acho que pode ter... acho bom.

O que um curso de Licenciatura em Matemática deve necessariamente oferecer para que seja possível formar um professor competente para os ensinos Fundamental e Médio?

Você tem que dominar a Matemática, não pode ficar no beabá tem que avançar. Mas eu acho válido trabalhar um pouco os conteúdos do Ensino Médio na licenciatura. Na licenciatura, é válido. Deve haver distinção entre o bacharelado e licenciatura. Não me arrependo em ter feito bacharelado, pois aprendi Matemática. Tenho segurança. Mas sei que os objetivos desses dois cursos são diferentes.

Parte II da entrevista

Vou apresentar a você algumas demonstrações feitas por alguns alunos: eles "demonstraram" que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Vamos supor que todos eles estivessem em uma classe de 8ª série, por exemplo. Analise as produções desses alunos e explicite aspectos que podem indicar o grau de compreensão de cada um deles sobre a prova solicitada. Depois vou pedir que você dê uma nota de zero a dez para cada produção. Vou dar um tempo para você pensar. Tudo bem?

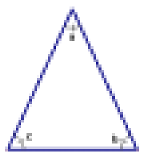
Está bom, estou super à vontade, mas ainda sem nota, ta? Vou refletir com você o que eu achei.

<u>*Cláudia*</u>

Quero falar da Cláudia primeiro. então ela já faz conjecturas, ela já atribui valores, então ela prende o trabalho dela. Ela parte do pressuposto de um tipo de triângulo.

E então ela já se restringe, ela já parte que a soma é 180º.
Então, o que ela afirma aqui, que a é igual 180 – 2c.
E a justificativa também não sai... ela... Como eu posso falar? Ela já saiu da resposta e patinou.
Aí, então a Cláudia, para mim, quis me enrolar, acho que é assim.
Não é?

I. Resposta de Cláudia:



Afirmativas	Justificativas
a= 180º - 2c	Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
A = 50º	180º - 130º
B = 65º	180º- (a + c)
C = b	Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.

Logo, a + b + c = 180º

Eduardo

O Eduardo, depois da Cláudia vem o Eduardo... ele foi prático, ele foi lá, mediu os ângulos, fez umas experiências aqui e ali.

Mas mediu cuidadosamente, foi muito lindo isto. Eu
adorei esta palavra, porque é muito sério o trabalho
dele, mas não convence. Ele constatou mas Infelizmente ele não demonstrou. Ele constatou
que estava dando 180º, ta bom foi lá e mediu.
Achei genial sua iniciativa, pegou diversos tipos de
Triângulo, gostei demais, mas infelizmente ele não provou.

1. **Resposta de Eduardo:**

Eu medi cuidadosamente os ângulos de diversos tipos de triângulos e fiz uma tabela.

A	B	C	total
110º	34º	36º	180º
95º	40º	45º	180º
35º	72º	73º	180º
90º	59º	31º	180º
13º	19º	148º	180º

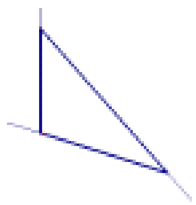
Em todos eles a soma foi 180º. Logo a afirmação é correta.

Fernando

O Fernando, ele deu um nó em mim, esse é o problema do Fernando. O Fernando... que eu falei para você que tive que ler mais de uma vez, porque do jeito que ele trabalha, eu nunca tinha pensado, então, tudo bem se ele caminhar, mas parece que ele já tem uma outra bagagem e... não é que não me convença, eu entendi o que ele quis falar, mas é que eu não posso chamar isso de demonstração, né? Não, como demonstração, não. Eu acho que ele foi criativo, demonstrou inteligência, ele pensou,
ele demonstrou vários conhecimentos geométricos, dos ângulos externos como ângulo externo com interno sempre dá ângulo raso. Eu achei interessantíssimo, mas não posso aceitar,
apesar da boa argumentação, não é uma prova.

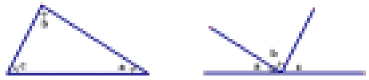
I. **Resposta de Fernando:**

Se eu caminhar toda a volta sobre a linha do triângulo, termino olhando o caminho por onde comecei. Eu girei 360º.

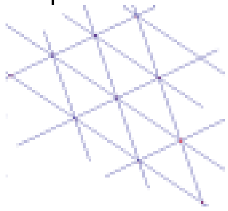
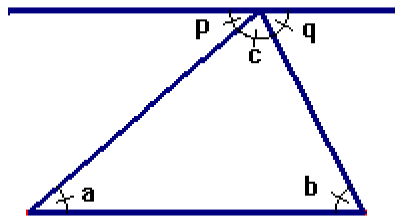


Cada ângulo externo quando adicionado ao ângulo interno deve dar 180º porque eles formam uma reta. Isto faz um total de 540º.
540º - 360º = 180º.
Logo, a afirmação é verdadeira.

Ana

Agora, a Ana eu achei uma graça, porque,tudo bem ela foi lá e rasgou... isto aqui a gente faz com material, então eu não sei se ela já visualizou, se lá já viu isto alguma vez, mas é totalmente experimental, de você unir, de você quebrar os ângulos, mas a maneira com a que ela escreve é muito informal, tudo bem, pode ser informal, mas “eu tentei para um ângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa aconteceu”... eu gostei muito da idéia, eu acho que isto aqui... mas... só se você visualiza isto. Neste papel, do conceito dela para cá é difícil, mas eu tenho certeza que esta menina visualizou isto, ela viu, ela lembrou, isto aqui marcou para ela, de ela ter visto, de ela ter demonstrado, aquela história do papel, de rasgar e... encaixar os três ângulos formando um 180º. Como demonstração, é fraca, muito fraca aliás nem é uma, mas como idéia	I. **Resposta de Ana**: Eu recorto os ângulos e os coloco juntos:  Eu obtenho um ângulo de 180º pois os ângulos formam uma linha reta. Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece. Logo, a firmação é verdadeira.

Dora e Bia

Resposta de Dora: Eu desenhei uma rede de triângulos e marquei todos os ângulos iguais  . Eu sei que os ângulos em volta de um ponto somam 360º. Logo a afirmação é verdadeira	**Resposta de Bia:**  p = a e b = q p + c + q = 180º. Logo, a + b + c = 180º

Aí a Dora e a Bia eu achei parecidas, quer dizer, o conceito de ângulos alternos *e* internos. Então a Dora ficaria em 2º lugar, que ela traçando essas paralelas, ela conclui... ela poderia ter concluído aqui, já, mas... os ângulos opostos, mas... eu sei que os ângulos em volta de um ponto... isto aqui também me... não gostei muito desta frase, mas tudo bem. Mas eu gostei da idéia da malha, eu achei interessante. Mas não posso considerar uma demonstração. E a Bia, está bom, muito bom, com propriedade, usando linguagem matemática, justificando... a Bia, para mim, foi a melhor... a demonstração da Bia é a que eu realmente gostei. Aliás é a que demonstrou de fato.

E as notas? Qual seria a nota de cada um?

Está difícil dar nota... (risos). Vou escrever as notas. Nesse caso vai ser pessoal, pois se era para demonstrar e não houve uma coisa pessoal...

Entrevistada: ta difícil... ta bom, vai... assim, para maior, eu acho que se ela foi a melhor de todas...(escreve as notas no papel)

Entrevistador: 2, 4, 5, 5, 5, 7 e 10, não é?

Entrevistada: apesar de ter classificado em posições diferentes, eu acho que um compensou um pouco o outro, um mais pela criatividade... só quem tentou me enrolar muito foi a Cláudia... ela quis me pegar... (entrevistador: talvez ela nem compreendesse o que é demonstrar, ela sabe que tem que fazer algumas coisas difíceis), é, ela quis mexer... quis falar de alguma coisa que ela conhecia... isósceles, mas ela já partiu do resultado.

Entrevistador: agora, o que eu queria também, assim é o seguinte: você já faz isto, fez uma análise de cada um, deu uma nota, agora, você faria um comentário especial para aluno, como você dirigiu este trabalho e também para a classe toda.

Entrevistada: então, meu objetivo com a classe seria demonstração? Bom, eu partiria, acho que do trabalho da Claudia. Então... de onde eu parti, aonde eu quero chegar... eu não posso partir, assim, do pressuposto de que já é 180º. Eu quero chegar lá, então o que eu preciso para isso, dos conhecimentos matemáticos, que a parte experimental é importante, ela comprovou pro Eduardo... ta certo, então não vou assim... com calma. Eu fui lá, mediu muito bem, e ele realmente comprovou, mas não demonstrou porque dá sempre isto. Foi para esses valores aqui, que ele achou que já tava... assim, que ele podia concluir, e não é bem assim. Em matemática, o rigor é outro. Falaria para ele que apesar de sua criatividade eu não poderia aceitar.

Depois, o Fernando, também, eu gostei muito do Fernando porque realmente ele foi criativo, pensou na volta de onde ele saiu, de onde chegou, de outros conhecimentos que ele tinha de geometria, mas ele já sai de que os ângulos internos são de 180, quando ele somou aqui os 180 com 360 também, então ele usou, para depois tirar os de fora, 360, então... calma, né? Fernando. Demonstrar é outra coisa.

Vamos para a Dora... ela já fez uma malha com muitos triângulos, vários triângulos, e uma rede... “marquei todos os ângulos iguais” – porque ela usou... ângulos alternos e internos, tal... aqui... “eu sei que os ângulos em volta de um pouco somam 360”. Essa frase ta complicada, eu acho que eu falaria um pouquinho do plano, do espaço, incomodou muito esta frase quando eu li, mas também...

Entrevistador: então quais comentários você faria, em geral, para classe toda, assim? Você iria mostrar os caminhos, ou não? E para cada um que você ia falar?

Entrevistada: eu não falaria nome... mas assim “olha, gente, a gente não pode partir da resposta pronta. Só fazer... eu pegaria os críticos... só fazer isto é pouco, partir deste pressuposto, tem que tomar cuidado com o rigor, no que se diz, no que se fala, com a linguagem. Eu faria um apanhado, sem mencionar nomes, tal, mas puxaria encima do que eles me mostraram. Quando a gente visualiza, quando a gente faz um experimento... então, para colocar isto, que é o caso da Ana... quem falou que o “a” fica assim, que o “b” é este... calma, como é que... e aí este rigor aqui, de traçar esta paralela, de ter duas paralelas, de poder afirmar que p = a e justificar porque que eu afirmei... assim a soma do ângulo raso, que é um ângulo de 180º. Então eu acho que é um bom começo, mas não posso aceitar como prova. É preciso ter conhecimento das propriedades e ter cuidado com a linguagem. Eu sei que é um experimento... estão tentando...valorizar... não desmoronar também, não é? Não posso aceitar uma coisa só porque houve alguma criatividade.

Parte III da entrevista

Vou apresentar a você algumas demonstrações feitas por alguns alunos: eles "demonstraram" que a soma de dois números pares é um número par. Analise as produções desses alunos e explicite aspectos que podem indicar o grau de compreensão de cada um deles sobre a prova solicitada. Vamos supor que todos eles estivessem em uma classe de 7ª série, por exemplo. Depois vou pedir que você dê uma nota de zero a dez para cada produção. Vou dar um tempo para você pensar. Tudo bem?

Entrevistada: olha, eu vou começar de novo, ta? De baixo para cima; eu vou começar pela Eunice.

Resposta de Eunice: ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ... + ... = ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ Portanto, a afirmação é correta.	Eu não entendi... não sei o que ela quis dizer, não é? Trabalhou com a linguagem dela... Mas.... não entendi, realmente não entendi.

Aí, vamos ver quem vem... vem o Dario.

4. Resposta de Dario: Sejam x e y dois números inteiros quaisquer. $x + y = z$ $z - x = y$ $z - y = x$ $z + z - (x + y) = x + y = 2z.$ Portanto, a afirmação é correta.	Porque o Dario... eu... eu não sei, ainda, se vou por nesta seqüência. Ele se achou muito inteligente fazendo isto porque ele realmente passou de dois números inteiros, nem eram dois números pares, que a soma de dois pares é par, ai ele fala que a soma de z com z dá 2z, então isto é par. Totalmente... não entendeu, somou número com número mesmo e é claro que ia dar. Mas ele quis me enganar.

Eu classificaria no mesmo grupo a Flavia, o Ivo e o Bernardo, que não demonstraram, comprovaram...

Resposta de Bernardo: 2 + 2 = 4 4 + 2 = 6 6 + 2 = 8 2 + 4 = 6 4 + 4 = 8 6 + 4 = 10 2 + 6 = 8 4 + 6 = 10 6 + 6 = 12 2 + 8 = 10 4 + 8 = 12 6 + 8 = 14 A soma de dois números pares é sempre um número par.	**Resposta de Flávia:** Vamos supor dois números pares: x = 27418 y = 956136 então, x + y = 983554 que é par. Portanto, a afirmação é correta.	**Resposta de Ivo:** Vamos pegar dois números pares como 10 e 26. Então $10 = 5 + 5$ $\underline{26 = 13 + 13}$ $36 = 18 + 18$ Como isso sempre é possível, a afirmação é correta.
O Bernardo teve um pouco mais de trabalho porque ele foi lá e pôs vários exemplos.	A Flávia, então, inventou um número muito diferente, malucão: e se der par, está provado! Pelo menos é o que ela pensou.	E o Ivo pegou dois números pares e viu que dava par...

Depois, vem a Gina.

Números pares terminam sempre em um desses dígitos: 0, 2, 4, 6, ou 8. Se eu adiciono dois desses números a soma termina também em 0, 2, 4, 6, ou 8. Portanto, a afirmação é correta.	Tudo bem, os números pares terminam com os dígitos. Ah, vai, passa, tudo bem.

Agora, o André, o Ciro e a Helena estão no mesmo grupo.

Resposta de André:	**Resposta de Ciro:**	**Resposta de Helena:**
x é um número inteiro qualquer. y é um número inteiro qualquer. 2x e 2y são dois números pares. 2x + 2y = 2(x + y). Portanto, a soma de dois números pares é sempre par.	Números pares são números divisíveis por 2. Quando você adiciona números com um mesmo fator comum, 2 nesse caso, a soma terá o mesmo fator comum; portanto a soma também é divisível por 2. Assim, a afirmação é verdadeira.	Sejam p e q dois números pares quaisquer. Então Então, existe um número inteiro **k** tal que p = 2k. Existe também um **m** inteiro tal que q = 2m. Portanto p + q = 2k + 2m = 2 (k + m) é par Logo, a afirmação é correta.
O Ciro escreveu “ser divisível por dois”, ele quis dizer a mesma coisa que o André, só que um demonstrou com português, a outra deu exemplo com álgebra, e a Helena foi bastante formal, não é? A Helena é a melhor não é? O rigor da Helena ta... “dois números pares quaisquer”...Mas é melhor colocar no mesmo grupo o Ciro, o André e a Helena.		

Agora as nota, não é? Então, pro o André e Helena nota 10. Para o Ciro nota 9. Apesar de um ser mais rigoroso que o outro, eu acho que a idéia... não importa. Aí que está: os três demonstraram. A Gina, qual que era a Gina? Ah, eu daria 5. Acho 5 até que é muito. O Bernardo, o Flavio e o Ivo teriam nota 4; o Dario ganharia 3. Engraçado, não é? O problema da Eunice foi ela usar esta linguagem que é dela só, não está nada bom: portanto nota 2 para ela. Acho que vou mudar a nota do Dario. Eunice e Dario tirariam a mesma nota: 2.

Entrevistador: O que você falaria para cada aluno a respeito da respectiva produção, e depois para a classe como um todo?

Entrevistada: bom, primeiro o padrão de linguagem... “bom, gente, eu vou demonstrar, então...”, mas eu acho que teria que ter combinado como eles o que eu quero. Não dá para inventar bolinha, coração, vamos obedecer a mesma linguagem... Eu faria e explicaria na lousa a demonstração formal, mas sem exagerar no rigor da linguagem.

Entrevistador: você conversaria com a Eunice, por exemplo, para saber o que ela quis dizer com a representação usada?

Ah, conversaria, chamaria com certeza. E também falaria, olha, quando você demonstra, faz uma parte escrita, o papel tem que me dizer, não posso pedir tua explicação. Pedi tua explicação agora, está vendo? Então você não se explicou bem e o teu papel tem que ser a sua fala. Puxa por isto, da importância de se expressar bem. O outro tem que entender. Ai, do Dario... “Dario, ó, você até... você nem partiu que eles eram pares quaisquer... qualquer número inteiro vai dar número par”, que vai dar 2z, mas, na verdade... explicaria porque que errou; é que quando você fala que chamaria um por um, a vontade é esta, mas eu não sei quantas pessoas eu tenho na minha classe, daí fica inviável. É dificílimo dar este retorno pessoal... o ideal é este; eu comento com meus alunos o que mais me chamou a atenção, porque eu lembro, eu gravo, e na hora que estou corrigindo... porque eu dou a devolutiva na lousa, “olha, gente, o que fez aqui?” Esqueceram deste sinal... e seu parênteses... você compromete... ai eu chamo, lendo, para eles é bom, eu acho que eles “pó, a professora viu que era eu, que sou eu, não era a minha prova?”. Mas eu acho que a devolutiva pessoal é a melhor; não sei se cabe, depende do contexto. Tem 45 na tua classe, não dá para tu fazer todos ... sabe? O exercício que está na lousa, todo mundo querer fazer, você tem que... não é tão simples assim, mas também comentaria os casos mais **discrepantes.** Aqui, na verdade, eu tenho 1, 2, 3, 4 grupos. Ai ficaria mais fácil comentar o grupo. Eu faria a devolutiva, pegaria alguns exemplos. Mas posso chamar os 40 em particular.

Entrevistada: quando eu fiz esta classificação, eu poderia ter dado 10 e 0, né? (entrevistador: e você não deu), não dei porque tentou, pensou, elaborou... tem que considerar. É claro, não é o que eu quero, com 4 não passa, não é isto que eu quero, mas 0? E 10, talvez nem seja merecedor... mas não é... sabe? Então está bom, pois não furou pode tirar 5 ou 6 pois estaria aprovado. Mas temos que pensar para dar nota 10! Talvez a Eunice, tenha sido a original de todos, mas a gente não sabe o que ela quis dizer, enquanto a outra, acho que a Helena, pode apenas ter reproduzido uma demonstração já feita e que ela memorizou. Mas mesmo assim, mantenho as notas dessas duas. Não era para demonstrar? Então.....

Outro problema que eu queria comentar diz respeito às demonstrações. Os alunos questionam o porquê! O problema é que hoje em dia, dando aula, você está na sala de aula, é o imediatismo do aprendizado... para que eu estou aprendendo isto? Onde que eu vou usar isso? Essa preocupação, e nem sempre você tem uma aplicação, não é? Ainda mais no ensino médio... então tem que chamar e falar que você está usando o raciocínio lógico, você está desenvolvendo esse raciocínio. Mas eles falam “para que, professora, se eu vou... na feira eu vou usar?”, então banaliza, você tem que estar puxando...Nas outras áreas também, se você vai pensar nisto, história não seria ensinada. Capitanias hereditárias você não usaria na feira, não é? Eu acho absurdo a criança usar estes argumentos...Mas ela pode ter ouvido de alguém. Mas ouviu de quem? Ouviu o pai dizendo? Eu não sei... eu fico também preocupada, e quando tem uma proposta séria de trabalho.

Professor IIC

Em alguns países as atuais orientações curriculares de Matemática preconizam um trabalho com demonstrações em escolas de educação básica. Os PCN, por exemplo, indicam um início de trabalho com a prova já no Ensino Fundamental. O senhor concorda com estas orientações? Qual deveria ser o significado do trabalho com a demonstração nas aulas de Matemática na educação básica?

É...que não é ensinada nas escolas, os nossos cursos, só por causa da parte prática. Quando a gente, no começo do ano, senta pra elaborar o nosso planejamento, ali sempre estão incluídos um trabalho com a parte de desenvolvimento do raciocínio dedutivo da criança, e ai a gente tá se referindo ao desenvolvimento da capacidade da criança buscar, chegar a conclusões, com base em fatos que ela já conhece, ainda que esse trabalho leve a criança a expressar suas idéias de uma forma... usando só a sua linguagem natural do dia a dia, ainda que seja isso, nosso trabalho pode começar desde a 5° serie, levando a criança a usar os fatos que ela já conhece, mesmo coisas simples e argumentar, com base naqueles fatos, e defender suas idéias, para chegar a alguma conclusão. Isso está incluído sempre no nosso planejamento. Eu acho que isso tem um significado quando a criança percebe que aquilo não vale só pra matemática, ehh... porque quando a criança percebe que ela, ela precisa usar alguns argumentos pra defender a sua opinião e o seu ponto de vista, e pra convencer o seu igual, daquilo que ela está pensando, ela percebe que aquilo lá ela pode usar na sua vida fora da escola, e ela percebe que aquilo não é só matemática, é uma prática social, na verdade, é uma negociação que ela faz fora da escola, nas brincadeiras, vai usar quando ela crescer... quando ela percebe isso eu acho que ela está conseguindo aprender a parte mais importante da demonstração mesmo. O significado desse trabalho deveria ser um trabalho inicial que partisse da linguagem materna..., ainda que seja simples, com a linguagem dela mesma... Para se chegar às demonstrações, não é um trabalho simples, por exemplo, a minha... meu contato com a demonstração foi na 5° serie, meu primeiro contato com demonstração. Era uma época que eu tinha 11 anos; era uma época em que as demonstrações, assim com símbolos matemáticos, eram valorizadas. O professor demonstrava e nós assistíamos aquela demonstração passivamente, e enquanto ele estava demonstração eu entendia aquilo que ele estava fazendo, eu via que havia uma cadeia, uma seqüência de idéias, que iam se encaixando; parecia uma coisa perfeita e eu percebia que ele estava querendo chegar... porque ele ensinou que aquilo no enunciado, essa parte é a hipótese, essa é a tese... não era simples da gente entender isso, e a gente percebia que ele estava querendo chegar na aquela tese, mais eu nunca, nunca me atrevi a perguntar porque ele estava usando aquele argumento, porque ele usava aquele teorema como ferramenta numa demonstração posterior... nunca me atrevi a demonstrar um teorema partindo de outro ponto ou fazendo uma figura diferente daquela. Então no dia da prova, eu ficava satisfeita quando eu conseguia lembrar de todos os passos e todos os detalhes que eu tinha visto durante a aula....Mas atualmente não acho, claro, que se deva fazer desse jeito. Eu acho que tem que partir, partir de um trabalho com a criança, com coisas simples, não é? Eu acho que se a criança for estimulada a expressar verbalmente as suas idéias e defender um ponto de vista, ainda que não seja uma coisa certa, mas se ela conseguisse se expressar e tentar defender a sua opinião aquilo pode dar a oportunidade para a discussão, pra até um erro que a criança...

Que experiências um futuro professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio deveria vivenciar em sua formação inicial para ter competência na organização e direção de situações de aprendizagem envolvendo argumentações e demonstrações na escola básica? Ou seja, para um professor trabalhar essa questão da *argumentação e da prova o que você acha que na formação dele, o professor deveria ter?*

Bom, uma pessoa que vá freqüentar um curso de Licenciatura, tem a intenção de lecionar. E é capaz de elaborar sua aula, preparar o material e organizar situações para o trabalho com a demonstração, alguém que já desenvolveu e já construiu esse conhecimento.

Parece-me importante, que o Curso de Licenciatura ofereça aos alunos, disciplinas que abordem também conteúdos Ensino Médio, mas, com um tratamento mais aprofundado e as demonstrações fazem parte desse aprofundamento. Tive demonstrações desde a 5ª série. A demonstração, como foi trabalhada com a minha classe de 5ª série, não é mais viável, agora. Nós não teríamos mais alunos no Ensino Fundamental, no Médio ou na Graduação, que aceitassem um processo de demonstração, passivamente, sem questionar "pra que?", "por que?", "onde vamos usar isso?", "precisa ser dessa forma?", "não há um jeito mais fácil?". Essa situação será enfrentada melhor e as respostas a essas questões serão mais satisfatórias, se o professor houver desenvolvido um raciocínio dedutivo que vá além daquelas questões tratadas em sala de aula. Ou seja, essas questões exigem do professor, a argumentação e as justificativas necessárias para o convencimento do aluno. Esse preparo, se não teve início antes, deveria ocorrer durante o Curso de Licenciatura, com um trabalho a respeito de conteúdos do Ensino Médio ou mesmo do Ensino Fundamental. Pode ser desenvolvido em torno de situações, criadas pelo professor ou pelo aluno, em que este último tenha necessidade de: argumentar, registrar seu raciocínio e a organização de suas idéias, buscar outras formas possíveis de argumentação e de justificativas e tentar validar suas conclusões.

Dessa forma, o "futuro professor" está se preparando para elaborar situações a serem apresentadas aos seus alunos, para desenvolver neles, o raciocínio lógico e as habilidades necessárias para a construção de uma prova formal, sem que seja necessário reproduzir exatamente, o que foi feito em sala de aula. Assim, não se trata de uma revisão de conteúdos já vistos no Ensino Fundamental e Médio. Trata-se de olhar para esses conteúdos de outra forma: com abordagens diferentes, utilizando recursos diferentes e demonstrando.

Eu acho que os conteúdos que são desenvolvidos no fundamental e no médio deveriam ser vistos, mas olhando sob outro ponto de vista. Talvez assim... um curso que desse a oportunidade pra o professor discutir metodologia que ajude num trabalho com as crianças, para desenvolver um espírito crítico, eu sei que já tem trabalho sobre isso, mas metodologias, ou, sei lá, estratégias que assim... em determinados... por exemplo, em geometria, têm trabalhos que orientam nesse sentido, elaborações de formas adequadas de conduzir um questionamento para que o aluno se sinta estimulado e desafiado a defender a suas... eu acho, tem literatura ao respeito disso, não é? Como conduzir questionamentos... tem literatura respeito disso...

Como é que você acha, essa questão da demonstração deveria ser abordada na formação?

Guardadas as proporções, e guardadas as proporções o processo de aprendizagem do professor a respeito da demonstração deveria ser semelhante ao do aluno. Também eu acho que estou considerando que os professores que estão se formando agora, talvez não tenham uma formação nesse sentido. Eu acho que alguma parte deveria existir, nesse sentido, não é? Eu acho que ele precisa saber para poder ensinar, mas não pode partir de uma coisa tão formal. Mas ele precisa desse conteúdo, formal. Ele precisa saber demonstrar o teorema, corretamente, com toda a linguagem formal, tudo pra poder trabalhar com isso, mas...

Entrevistador: Mas ele pode querer, também, que essa demonstração que ele aprendeu...

Seja a mesma que vá transmitir para os alunos? Pois é pode acontecer e recair naquele erro de antigamente, e não entender que a prova é um meio para estudar matemática e também um processo... Eu acho que precisava ter um trabalho no sentido, deveria haver um trabalho em que ele perceba... ele mesmo perceba que aquilo é construído, que ele pode fazer a construção dele, é? Não pode ser uma coisa pronta. Se ele perceber, isso eu acho que envolve um pouco a história da matemática, se ele perceber que ele mesmo pode construir esse processo da demonstração, acho que ele vai conseguir transmitir para o aluno... agora eu acho assim, falar em demonstração, é falar em convencer o outro, mas eu acho que o professor não vai conseguir convencer o seu aluno, se o aluno não acompanhar o raciocínio que ele esta fazendo. Eu acho que para um trabalho no ensino fundamental e médio, uma primeira coisa eu acho que precisaria ser o respeito pela limitação do aluno; precisaria partir de onde o aluno está, pra ir começando a construir esse processo do conceito aí da demonstração.

Agora, o processo da demonstração na sua formação como é que ela foi?

Esse processo, esse trabalho com a demonstração começou na 5° série, mas acompanhou todos anos do ginásio, que era na época. Quando eu fui fazer o colegial, que seria o ensino médio agora, é que aquelas idéias amadureceram. Então não foi um trabalho inútil, aquele, não é? Era uma semente, mas eu me interessei e fui procurar, só que no colegial eu tive professores que me incentivaram pra procurar e me davam liberdade pra questionar, pra,,, sabe? Pra não concordar com aquilo, acho que isso me ajudou muito. Agora na graduação você fala, não é? Porque na licenciatura não tive isso...

Na licenciatura você não teve demonstrações?

Eu não....Tive na graduação, era bacharelado...No bacharelado eu tive demonstrações. É. foi interessante. Era eu tive em análise, mais isso não foi uma coisa só... foi uma coisa que eu fui construindo desde a 5° série. Apesar daquilo ter sido na 5° série, uma coisa maçante e assim de reprodução, mesmo... eu não concordo com aquele processo, eu não acho que aquilo funcione agora, eu não acho, mas aquilo precisou amadurecer, não é?

O que um curso de Licenciatura em Matemática deve necessariamente oferecer para que seja possível formar um professor competente para os ensinos Fundamental e Médio?

Tudo o que já falei. Eu acho também que deveria haver uma disciplina que... incentivasse a pesquisa... professor, se ele... não é pelo hábito, pra ele ser professor ele vai ter que pesquisar de qualquer jeito, mas o curso que tenha uma disciplina que seja diretamente ligada a isso vai levar o professor a buscar outras, outros caminhos pra desenvolver o trabalho dele dentro da aula. E na historia da matemática a demonstração é uma coisa presente e forte, que a história da matemática tem isso em todo o percurso dela... não é isso? Eu acho que se o professor, na medida que ele tenha que pesquisar pra elaborar, poderia ser uma coisa de esse tipo; uma disciplina que obrigasse o estudante a realizar pesquisas relacionadas com o conteúdos dos cursos anteriores e que solicitassem desse aluno que ele desenvolvesse projetos relacionados com conteúdos dos cursos anteriores, acho que obrigaria mais esse aluno a se aprofundar, e ele seria obrigado a elaborar um desses projetos, ele seria obrigado a pensar nos objetivos, na estratégia e onde ele queria chegar, ele vai ter que convencer o outro disso...

Eu não acho que no terceiro grau deveria ser repetido o que é feito no ensino médio, não acho, poderia haver uma abordagem diferente, mais aprofundada, com outras estratégias....

Eu não acho que deveria ser repetido não, deveria aprofundar ou ver sobre outros pontos de vista, ainda que fosse desenvolvidos esses objetos... Eu acho que uma forma interessante seria essa nas próprias disciplinas de pesquisa.. Deveria haver uma integração entre as disciplinas. Me dá a impressão que as disciplinas são tratadas separadamente, acho que talvez uma forma de tratar isso fosse uma disciplina encaminhada para a pesquisa em que a pessoa devesse... Se você entrevistar os professores da rede pública, principalmente, ou os professores mais jovens, eles são unânimes em dizer que a faculdade não os preparou para dar aula... seja no ponto de vista metodológico, seja no ponto de vista de contato com os alunos, ou seja na parte de conteúdo mesmo, não é? Por exemplo os professores aqui, eles não tiveram, a maioria não teve probabilidade na faculdade. Mas o que eu acho é que o trabalho do professor no curso de graduação não é transmitir... ele, na verdade, o que ele esta fazendo é encaminhar as coisas, não é? Ele orienta e a pessoa tem que estudar, não é assim? Não é o professor que tem transmitir tudo, nos não estamos para receber tudo pronto, por isso que eu acho que uma disciplina pesquisa..eu acho que seria isso mesmo...

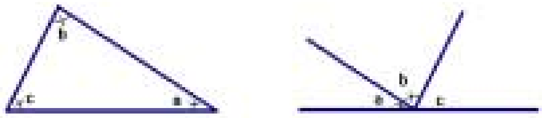
Agora, a parte da demonstração, gente... em todas as disciplinas ela está presente...

Parte II da entrevista

Vou apresentar a você algumas demonstrações feitas por alguns alunos: eles "demonstraram" que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Vamos supor que todos eles estivessem em uma classe de 8ª série, por exemplo. Analise as produções desses alunos e explicite aspectos que podem indicar o grau de compreensão de cada um deles sobre a prova solicitada. Depois vou pedir que você dê uma nota de zero a dez para cada produção. Vou dar um tempo para você pensar. Tudo bem?

Ana

Resposta de Ana:
Eu recorto os ângulos e os coloco juntos:



Eu obtenho um ângulo de 180º pois os ângulos formam uma linha reta.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece. Logo, a firmação é verdadeira.

Resposta de Ana:

a) A análise da “prova”:
A aluna utilizou um processo não formal, em sua resposta - uma verificação. Não tomou como base, para sua justificativa, alguma prova anterior... Ateve-se a dois casos particulares (triângulo eqüilátero e triângulo isósceles), demonstrando que ainda não percebe a necessidade da generalização, para que a afirmação seja considerada verdadeira. Refere-se à experimentação feita com um triângulo eqüilátero e um isósceles, mas apresenta um triângulo escaleno, em sua justificativa.

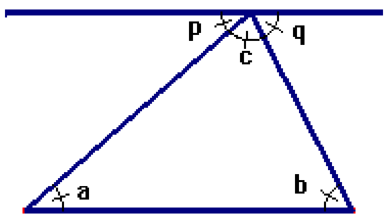
b) Nota 2

c) Comentários: Eu diria à aluna que:

- Sua estratégia é importante, para chegarmos a uma conclusão, de forma prática. Mas, em Matemática, para dizermos que uma afirmação é verdadeira, é necessário que façamos uma justificativa com base em fatos que nós conhecemos e já temos certeza de que são verdadeiros (ou por definição, ou por alguma demonstração já feita anteriormente).
- O enunciado fala sobre qualquer triângulo. Como em sua resposta, a aluna menciona um triângulo eqüilátero e um isósceles, eu poderia propor questões como: Você considera válida, essa propriedade, também para triângulos escalenos? E para triângulos retângulos? Vale para triângulos obtusângulos?
- Essas questões poderiam nos auxiliar, no sentido de levar a aluna a perceber que: 1) ainda que essa experimentação houvesse sido realizada com um número muito grande de triângulos, isso não seria suficiente para considerarmos esse processo como sendo uma demonstração convincente; 2) quando precisamos provar que uma determinada propriedade é válida para todos os elementos de um conjunto, (no caso, o conjunto de todos os triângulos possíveis), essa prova deve ser feita de forma genérica - se escolhemos uma figura para nos auxiliar nessa demonstração, devemos tomar a figura mais geral possível. (triângulos eqüiláteros e isósceles são casos especiais...); 3) nossa figura deve corresponder ao texto que estamos escrevendo... Por exemplo, se no texto falamos sobre triângulo eqüilátero, nossa figura deve conter um triângulo eqüilátero.

Bia

Resposta de Bia:



p = a   e   b = q
p + c + q = 180º.
Logo, a + b + c = 180º

Resposta de Bia:

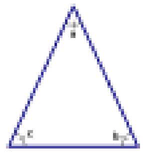
a) A Análise da prova:
A aluna mostra, com o seu trabalho, que compreende o que seja uma prova Matemática. Tomou objetos matemáticos que, certamente, foram trabalhados anteriormente, para justificar cada passo de sua demonstração. Há um encadeamento lógico, em seu registro.

b) Nota: 9

c) Comentário à aluna:
O enunciado fala apenas sobre um triângulo e sobre a soma de seus ângulos internos. Em sua prova, você menciona duas paralelas e uma transversal. Uma demonstração deve conter alguma indicação a respeito das construções auxiliares, para facilitar a compreensão de quem estiver lendo. Nesse caso, que construções ajudaram você, em sua prova? Justifique.

Cláudia:

Reposta da Cláudia:



Afirmativas	Justificativas
a= 180º - 2c	Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
A= 50º	180º - 130º
b = 65º	180º- (a + c)
C = b	Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.

Logo, a + b + c = 180º

Resposta de Cláudia

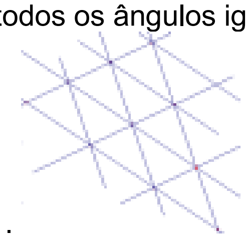
a) Análise da "prova"
A aluna demonstra que ainda não compreendeu suficientemente os conceitos de demonstração, pressupostos (hipóteses) e conclusões (teses), uma vez que utilizou a conclusão, como argumento, no corpo da demonstração, ou seja, para a primeira afirmativa, seu registro já traz como verdadeira, a idéia de que a soma dos ângulos internos do triângulo é igual a 180º: "$a = 180^{o} - 2c$". Foi utilizado um triângulo isósceles (que é um caso particular), e além disso, a aluna escolheu as medidas dos ângulos internos do triângulo escolhido (A = 50º e B = 65º), para a demonstração de uma propriedade que deve ser observada em qualquer triângulo. Este procedimento demonstra que a aluna ainda não percebe a necessidade de generalização.

b) Nota: zero

c) Comentários à aluna:
- ❖ Você pode separar o enunciado em duas partes, de tal forma que em uma delas, esteja apenas o que nós temos certeza de que é verdade, e na outra parte, fique claro o que nós desejamos provar?
- ❖ Para a demonstração de uma propriedade que deve ser satisfeita por todos os elementos de um conjunto, (no caso, o conjunto de todos os triângulos), é necessário que o processo de demonstração seja encaminhado sempre de forma genérica – por exemplo, considerando um triângulo escaleno, sem medidas específicas.

Dora

Resposta de Dora:
Eu desenhei uma rede de triângulos e marquei todos os ângulos iguais



Eu sei que os ângulos em volta de um ponto somam 360º. Logo a afirmação é verdadeira

Resposta de Dora:

a) Análise da "prova"
A aluna utilizou, como auxílio em sua demonstração, uma rede de triângulos, **aparentemente** formada por retas paralelas. Com a afirmação "marquei todos os ângulos iguais", entende-se que a aluna tenha considerado o paralelismo entre as retas dessa rede, mas não há qualquer indicação a esse respeito, na "prova" da aluna. Nesse caso, Dora estaria considerando ângulos correspondentes, alternos internos e opostos pelo vértice, mas novamente, não há menção a esses conceitos, na "prova" apresentada. O registro sugere uma transferência do conhecimento já construído a respeito das propriedades dos ângulos formados por duas paralelas e uma transversal, para uma nova situação. Mostra, porém, que a aluna ainda não desenvolveu a habilidade de formalizar suas conclusões.

b) Nota: 4.

c) Comentários à aluna:
A orientação a ser dada a essa aluna, poderia ser no sentido de justificar por escrito, todos os passos de sua demonstração, procurando mencionar definições e teoremas que serviram como base para a justificativa. Essa prática pode levar a aluna a uma observação mais cuidadosa dos registros, na construção de sua demonstração.

Eduardo

Resposta de Eduardo:

Eu medi cuidadosamente os ângulos de diversos tipos de triângulos e fiz uma tabela.

A	B	C	Total
110º	34º	36º	180º
95º	40º	45º	180º
35º	72º	73º	180º
90º	59º	31º	180º
13º	19º	148º	180º

Em todos eles a soma foi 180º. Logo a afirmação é correta.

Resposta de Eduardo:

a) Análise da "prova":
O fato de o aluno tomar medidas aleatórias, para os ângulos internos dos triângulos indica uma inclinação forte para o trabalho com casos particulares, ou indica a idéia de que essa é a única possibilidade de provar o que foi solicitado. Não ocorreu ao aluno, a hipótese de um triângulo, cujos ângulos internos tenham medidas desconhecidas. Isso mostra que o aluno não compreendeu a necessidade de estender sua conclusão, para um triângulo qualquer, num processo de generalização.

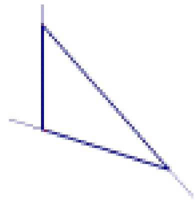
b) Nota: 2.

c) Justificativa:
O aluno tomou como ponto de partida, os elementos mais básicos: o conceito de triângulo, as medidas dos ângulos e a idéia de que a soma dos ângulos internos deveria (ou não) ser igual a 180º e procedeu à experimentação. Esse procedimento poderia ser utilizado, antes do trabalho com o raciocínio dedutivo e a demonstração.

d) Comentários para o aluno:
- ❖ O que você faria, para determinar a soma dos ângulos internos de um triângulo situado a uma distância que não permite que você obtenha as medidas dos ângulos internos?
- ❖ Considerando um triângulo, cujos ângulos internos têm medidas desconhecidas, quanto deveria medir a soma desses ângulos?

Fernando

Resposta de Fernando:
Se eu caminhar toda a volta sobre a linha do triângulo, termino olhando o caminho por onde comecei. Eu girei 360º.



Cada ângulo externo quando adicionado ao ângulo interno deve dar 180º porque eles formam uma reta. Isto faz um total de 540º.
540º - 360º = 180º.
Logo, a afirmação é verdadeira.

Resposta de Fernando

a) Análise da "prova":
O aluno mostra que já tem construído, satisfatoriamente, o conceito de ângulo, como sendo mudança de direção, assim como o conceito de ângulos suplementares. Sua prova formal é feita em língua natural, mas apresenta de forma clara, os fatos que são considerados como pressupostos, os passos de seu raciocínio e a conclusão a que chegou. Tomou um triângulo genérico, em sua representação figural, sem se referir a qualquer medida específica, para os ângulos, tendo demonstrado que compreendeu a necessidade de generalização. Seria uma boa oportunidade para trabalhar com o aluno, a demonstração do mesmo teorema, utilizando linguagem de símbolos matemáticos.

b) Nota: 10.

c) Comentário ao aluno:
- ❖ Eu poderia dizer ao aluno que sua demonstração deixou bastante claros, os elementos que foram tomados como hipóteses (verdades já conhecidas), e as conclusões a que ele queria chegar.
- ❖ Diria também que há outras formas de demonstrar essa afirmação, utilizando outros fatos matemáticos, em nossa argumentação e outra linguagem para a representação de nossas justificativas.

d). Se você fosse professor dessa 8ª série, de que forma você daria continuidade a essa atividade, com todos os alunos da classe?

Considerando as respostas dos seis alunos, e não tendo conhecimento a respeito dos conteúdos já desenvolvidos anteriormente com cada um deles, (poderiam não pertencer à mesma classe, nas séries anteriores), entendemos que poderíamos dar continuidade a esse assunto, apresentando uma seqüência de atividades, que em princípio, solicitasse dos alunos, uma verificação como aquela utilizada pelo aluno Eduardo.

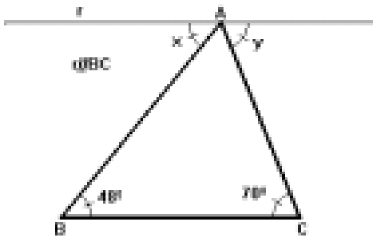
Essa atividade nos daria oportunidade de dizer que, mesmo tendo sido verificado valor igual a 180º para a soma das medidas dos ângulos internos de todos os triângulos que pudéssemos construir, isso não nos garantiria a validade da propriedade, para qualquer triângulo.

Poderíamos complementar essa idéia, apresentando uma segunda atividade que solicitasse dos alunos, o mesmo procedimento utilizado por Ana, em sua resposta. Nos ajudaria, no sentido de levar os alunos à observação de que agora, não temos as medidas dos ângulos, e com isso, já estamos considerando o "problema" de uma forma mais geral.

Se nesta atividade, cada um dos alunos construir o seu triângulo, cabe novamente, a observação de que estamos apenas realizando uma verificação, e novamente poderíamos encontrar um resultado favorável para um número muito grande de triângulos, sem que isso nos servisse de garantia, para afirmar que a propriedade é sempre válida.

Seria uma boa oportunidade para apresentarmos aos alunos, a idéia de que, mesmo não havendo essa garantia, essa nossa experimentação pode nos levar a conclusões importantes, que nos permitem construir conceitos matemáticos.

Em seqüência, poderíamos apresentar uma outra atividade, que solicitasse do aluno, a medida de um ângulo desconhecido, como por exemplo, o ângulo interno A, do triângulo ABC, na figura a seguir:



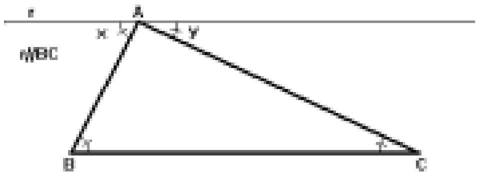
O aluno que fez as atividades anteriores, provavelmente iria determinar a medida do ângulo interno A, utilizando a conclusão de que a soma dos ângulos internos do triângulo é igual a 180º, mas, poderíamos solicitar que observasse a relação entre os ângulos x e B, e entre os ângulos y e C, no sentido de levá-los a determinar o valor do ângulo interno A, usando os conceitos de ângulos alternos internos e a soma dos ângulos x, A e y.

Se anteriormente, dissemos ao nosso aluno, que a experimentação realizada nas duas primeiras atividades não nos dá garantia de que a propriedade é válida para todos os triângulos possíveis, podemos agora, dizer-lhe que essa garantia nos será dada pelo que, em matemática, chamamos de **demonstração**, e que agora, estamos prontos a construir, apresentando o enunciado que gerou toda esta nossa discussão:

Quando se adicionam os ângulos internos de um triângulo, o resultado é sempre 180º.

Aqui, poderíamos auxiliar a aluna Cláudia, a perceber quais elementos deverão compor a nossa hipótese, e o que desejamos provar, observando também a necessidade de considerarmos a figura mais geral possível, uma vez que estaremos provando uma propriedade que deve ser válida para todo e qualquer triângulo.

Poderíamos, então, levar a classe a perceber que a construção da reta r, paralela ao lado BC, nos permite utilizar a congruência dos ângulos x e B e dos ângulos y e C, pois são alternos internos formados pelas transversais $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e pelas retas paralelas r e BC.



As questões seguintes podem auxiliar os alunos, na formalização de sua prova: “Na figura, que ângulo tem a mesma medida de x? Justifique.

Que ângulo tem a mesma medida de y? Justifique.

O que você pode dizer a respeito dos ângulos x, $\hat{A}$ e y ? Justifique.

O que você pode concluir a respeito dos ângulos internos do triângulo ABC? Justifique. “

Durante o desenvolvimento desta parte da seqüência, estaríamos comentando as respostas de Bia, cuja prova traz este processo, e de Dora, que também utilizou o conceito de ângulos formados por retas paralelas e transversais.

Finalmente, estaríamos aqui confirmando, o que foi dito a Fernando, a respeito de podermos utilizar outra linguagem e outros conceitos, para esta demonstração.

Parte III da entrevista

Vou apresentar a você algumas demonstrações feitas por alguns alunos: eles “demonstraram” que a soma de dois números pares é um número par. Analise as produções desses alunos e explicite aspectos que podem indicar o grau de compreensão de cada um deles sobre a prova solicitada. Vamos supor que todos eles estivessem em uma classe de 8ª série, por exemplo. Depois vou pedir que você dê uma nota de zero a dez para cada produção. Vou dar um tempo para você pensar. Tudo bem?

Considerando as respostas dadas por alunos da 8ª. Série, quando solicitados a demonstrar a veracidade da afirmação**: a soma de dois números pares quaisquer é um número par**, temos:

Resposta de André: x é um número inteiro qualquer. y é um número inteiro qualquer. 2x e 2y são dois números pares. 2x + 2y = 2(x + y). Portanto, a soma de dois números pares é sempre par.
Análise da entrevistada: O registro apresentado pelo aluno mostra que já compreendeu a necessidade de generalização, utilizando x e y, para a representação de dois inteiros quaisquer. O aluno soube estabelecer os pressupostos, e utilizou uma construção lógica, para chegar à conclusão solicitada. Nota- 10.

Resposta de Bernardo:

2 + 2 = 4	4 + 2 = 6
6 + 2 = 8	2 + 4 = 6
4 + 4 = 8	6 + 4 = 10
2 + 6 = 8	4 + 6 = 10
6 + 6 = 12	2 + 8 = 10
4 + 8 = 12	6 + 8 = 14

A soma de dois números pares é sempre um número par.

Análise da entrevistada:

O aluno apresentou uma verificação, utilizando números pares aleatórios (casos particulares).
O trabalho mostra que ainda não percebeu a necessidade de generalização, para a conclusão de que a afirmação é verdadeira.
Nota: 1

Resposta de Ciro:

Números pares são números divisíveis por 2. Quando você adiciona números com um mesmo fator comum, 2 nesse caso, a soma terá o mesmo fator comum; portanto a soma também é divisível por 2. Assim, a afirmação é verdadeira.

Análise da entrevistada:

O aluno partiu do conceito de número par e seu registro sugere que utilizou a fatoração como argumento, para, finalmente, concluir que a soma de números pares (divisíveis por 2) é um número também divisível por 2 (portanto, par). A formalização, neste caso, ainda foi feita em linguagem materna, mostrando que o aluno talvez não tenha desenvolvido habilidade suficiente para a conversão desse registro em representação algébrica.
Nota:7.

4. Resposta de Dario:

Sejam x e y dois números inteiros quaisquer.

$$x + y = z$$
$$z - x = y$$
$$z - y = x$$
$$z + z - (x + y) = x + y = 2z.$$

Portanto, a afirmação é correta.

Análise da entrevistada:

O aluno se enganou, em dois pontos:
Primeiro: O enunciado fala sobre a soma de **dois números pares**, e em sua “prova”, o aluno considera “dois números inteiros quaisquer”.
Segundo: Quando utilizou a propriedade aditiva da igualdade, não observou que para a conservação da igualdade, deveria adicionar (x+y) aos dois membros, e assim fazendo, chegou a uma igualdade (falsa) que indica que (x+y) é par.
Se houvesse experimentado valores para x e y, teria facilmente encontrado um contra-exemplo (x=2 e y=3, números inteiros **quaisquer,** cuja soma não é um número par, contradizendo a conclusão a que o aluno chegou).
Nota: zero

Resposta de Eunice:

♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦
... + ... = ...
♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦

Portanto, a afirmação é correta.

Análise da entrevistada:

O registro utilizado pela aluna mostra que esta percebe a necessidade de generalizar o conceito que está sendo construído (usa reticências), mas, sua representação ainda é concreta, como se estivesse agrupando objetos em dois subconjuntos – uma estratégia mais utilizada por alunos que estão cursando séries anteriores. (2ª. ou 3ª. Séries, talvez).
Nota: 2

Resposta de Flávia:

Vamos supor dois números pares:

$$x = 27418$$

$$y = 956136$$

então , $x + y = 983554$ que é par.
Portanto, a afirmação é correta.

Análise da entrevistada:

A aluna utilizou as letras x e y, em sua formalização, mas estabeleceu valores para essas letras, o que pode significar que a aluna tem a idéia falsa de que, utilizando letras, estamos generalizando as nossas considerações.
Baseou-se em um único exemplo, para chegar a uma conclusão que se refere a todos os números pares.
Consideramos, então, que a aluna ainda não compreendeu a importância da formalização e da generalização, na demonstração.
Nota: 2

Gina

Resposta de Gina:

Números pares terminam sempre em um desses dígitos: 0, 2, 4, 6, ou 8. Se eu adiciono dois desses números a soma termina também em 0, 2, 4, 6, ou 8.
Portanto, a afirmação é correta.

Análise da entrevistada:

Neste caso, a aluna utilizou uma argumentação em linguagem natural, e chegou à conclusão desejada. Não é possível perceber se a aluna teria um bom desempenho, na construção de demonstrações que exigissem uma representação mais genérica.
Nota: 4.

Resposta de Helena:

Sejam p e q dois números pares quaisquer. Então

Então, existe um número inteiro **k** tal que $p = 2k$.

Existe também um **m** inteiro tal que $q = 2m$.

Portanto $p + q = 2k + 2m = 2 (k + m)$ é par
Logo, a afirmação é correta.

Análise da entrevistada:

A aluna identificou os fatos matemáticos a serem utilizados como pressupostos (números pares), e escolheu procedimentos adequados para um encadeamento lógico (representação dos números pares na forma genérica, identificação do caso de fatoração conveniente e conservação da igualdade) que conduziu à conclusão desejada.
Tanto a formalização, quanto a generalização apresentadas pela aluna, demonstram que o conceito de demonstração está sendo construído de forma satisfatória.
Nota: 10

Resposta de Ivo:

Vamos pegar dois números pares como 10 e 26.

Então

$$\begin{array}{rcrcr} 10 & = & 5 & + & 5 \\ \underline{26} & \underline{=} & \underline{13} & \underline{+} & \underline{13} \\ 36 & = & 18 & + & 18 \end{array}$$

Como isso sempre é possível, a afirmação é correta.

Análise da entrevistada:

A resposta apresentada pelo aluno consiste na verificação feita para um par apenas, de números escolhidos aleatoriamente. A idéia de generalização está apenas na conclusão: "Como isso **sempre** é possível, a afirmação é correta." (grifo nosso). Há neste caso, alguma semelhança com o registro utilizado por Eunice, em que os números escolhidos são separados em duas parcelas iguais. Essa resposta parece sugerir que a aluna não tem ainda construído adequadamente, o conceito de generalização, utilizando apenas um caso particular, para chegar à conclusão que se refere à soma de dois números pares quaisquer.
Nota: 2.

<u>Professor IID</u>

Em alguns países as atuais orientações curriculares de Matemática preconizam um trabalho com demonstrações em escolas de educação básica. Os PCN, por exemplo, indicam um início de trabalho com a prova já no Ensino Fundamental. O senhor concorda com estas orientações? Qual deveria ser o significado do trabalho com a demonstração nas aulas de Matemática na educação básica?

Concordo sim, mas em primeiro lugar gostaria de falar que eu não trabalho muito com as demonstrações. Somente algumas e em algumas séries. É muito difícil para a maioria dos alunos. Só alguns acompanham ou entendem um pouquinho. Eles reclamam muito. Mas mesmo assim faço questão que eles vejam pelo menos um pouco as demonstrações. Eles precisam ter pelo menos algum contato com o sistema dedutivo. Na 7ª série, por exemplo, demonstro alguns teoremas usando congruências de triângulos, dependendo da classe apenas três ou quatro, e mostro o porquê das fórmulas do cálculo de áreas de retângulos, de paralelogramos, de triângulos e de trapézios; vejo também a fórmula que dá o número de diagonais de um polígono. As demonstrações dessas fórmulas eles compreendem mais. Na 8ª o teorema de Pitágoras, e também, claro, a fórmula de Baskhara. No ensino médio demonstro algumas fórmulas da trigonometria e propriedades dos logaritmos. Parece incrível, mas não trabalho com demonstrações na Geometria do Ensino Médio: além de serem difíceis, pois é geometria espacial, não sobra muito tempo. Ah, em Geometria Analítica também vejo algumas fórmulas. Na verdade, eu não sei muito bem como fazer esse trabalho com as demonstrações. Pois apenas apresento as demonstrações. Sei que não posso exagerar no rigor da linguagem mas a demonstração que faço é uma demonstração e não verificação. Lógico que eu justifico porque é importante a demonstração na Matemática. Explico muito bem cada passagem e as vezes até uso a história. Mas tenho a sensação de tempo perdido, muitos poucos se interessam. Meus alunos alegam que não cai no vestibular. Também não cobro nas avaliações: não vou saber se eles entenderam mesmo ou se apenas memorizaram o teorema. Quando me lembro da minha época de estudante na licenciatura, eu tinha aula de teoria e de exercício de cálculo dado por professores diferentes. Eu me interessava pela aula de teoria mas a maioria dos meus colegas, não. Era na aula de teoria é que se demonstravam as propriedades, os teoremas. Nas provas e exames eles preferiam colar os teoremas que caíam quando caíam. Eu não colava (risos), decorava tudo. Tenho medo de estar repetindo o mesmo com meus alunos. Por isso seleciono apenas algumas demonstrações e somente as mais fáceis. Apenas para que os interessados possam entrar em contato com a dedução, que é uma coisa maravilhosa da Matemática. Agora tem uma coisa que eu não abro mão: é pedir aos meus alunos justificarem as resoluções dos problemas, que indiquem as propriedades que usaram nos exercícios, etc. Acho que sou uma boa professora. Sinto que os alunos gostam das minhas aulas. Bem, quase todos (risos).

Que experiências um futuro professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio deveria vivenciar em sua formação inicial para ter competência na organização e direção de situações de aprendizagem envolvendo argumentações e demonstrações na escola básica? Ou seja, para um professor trabalhar essa questão da argumentação e da prova o que você acha que na formação dele, o professor deveria ter?

Acho que o professor não deve começar um assunto e logo partir para a demonstração. No meu curso de Matemática, muitas vezes a gente nem tinha entendido o conceito que o professor estava ensinando e ele já introduzia as demonstrações. Em álgebra linear aconteceu muito. Eu nem tinha entendido direito o que era um espaço vetorial e já estava demonstrando algumas propriedades do espaço. Pior, o professor cobrava nas provas somente demonstrações que ele não havia feito em sala. Eu ficava animada porque eu conseguia, claro me matava de estudar para compreender e se não conseguia partia para a memorização dos teoremas que o professor falava que eram importantes. Mas quase sempre eu entendia. Alguns dos meus colegas também, mas a maioria.... Por exemplo, quando ensino o teorema de Pitágoras, faço algumas verificações com régua e transferidor, com quebra cabeças, outras utilizando quadrados (a professora mostra os quadrados). Somente depois do aluno ter usado o teorema de Pitágoras em alguns problemas, de ter feito algumas verificações é que vou apresentar pra eles a demonstração formal, utilizando semelhanças de triângulos. Acho que o professor da licenciatura deveria fazer um trabalho mais ou menos como esse. Iria nos ajudar muito. A diferença é que se deveria ter mais rigor na licenciatura. Mas acho que a essência do trabalho com as demonstrações na licenciatura deveria ser a mesma que no Ensino Fundamental e Médio, só que com mais freqüência e maior preocupação com o rigor. Deveríamos demonstrar um teorema só depois de termos usado o resultado desse teorema em problemas e depois de ter feito experimentações. Mas é fundamental fazer demonstrações formais na licenciatura. Um professor do ensino médio que sabe demonstrar, é respeitado pelos colegas e pelos alunos. Por isso eu defendo que deve chegar no rigor. Eu poderia estar falando muito mais sobre esse assunto, mas o fundamental eu acho que já falei. Você concorda?

OK, acho que entendi.Você já comentou algo sobre a próxima questão. Você poderia complementar se for o caso. Qual foi o significado da demonstração em sua formação como professor de Matemática?

Acho que o papel da demonstração na minha formação foi muito dúbio. Sempre achei a demonstração algo muito interessante e fundamental para um professor de Matemática. Alguns teoremas todos os professores deveriam saber demonstrar. Mas conheci professores que não sabiam demonstrar o teorema de Pitágoras. Algumas demonstrações são tão bonitas. Será que existe algum matemático que não gosta demonstração? Mas a demonstração sempre me deixou frustrada. O meu esforço sempre foi no sentido de entender uma demonstração já feita pelo professor ou que já estava no livro. Mas raramente consegui demonstrar um teorema que eu não já não tivesse visto anteriormente a demonstração. Por isso sempre tive a sensação de fracasso, apesar de quase sempre ter tirado boas notas. Não tive coragem de fazer mestrado em Matemática Pura por puro medo de fracassar, nas demonstrações. Talvez seja por isso que não cobro demonstrações de meus alunos. Mas sua pergunta era sobre o quê mesmo?

Sobre o papel da demonstração em sua formação como professor de Matemática.

Acho legal mas tenho um sentimento de fracasso quando ouço falar desse assunto. Mas acho que na licenciatura ela é fundamental. No bacharelado mais ainda. Como uma pessoa pode tornar-se matemático ou professor de Matemática se ela não compreender a importância da dedução em Matemática? Sem compreender um sistema de axiomas? A demonstração é que diferencia a Matemática das outras ciências. Adoro ver demonstrações. Acho lindo. O professor em sua formação precisa ter contato com esses aspectos da Matemática. Nossos alunos também.

O que um curso de Licenciatura em Matemática deve necessariamente oferecer para que seja possível formar um professor competente para os ensinos Fundamental e Médio?

Fiz licenciatura na USP, mas não fui preparada para dar aula de Matemática no Ensino Fundamental e Médio. Quando fui dar aula, não só tive que preparar minhas aulas mas tive que estudar mesmo. Eu já havia esquecido muitos assuntos que havia aprendido no meu curso médio e no cursinho. Outros eu nem havia aprendido, acho. É claro que meu curso me preparou para ler um bom livro didático do EM e compreende-lo. Mas já encontrei colegas em algumas escolas, principalmente nas públicas, que não conseguiam compreender muita coisa do livro, principalmente trigonometria. Professores totalmente sem base. Você acredita que encontrei um professor que fez USP e dava aula na mesma escola particular comigo que não sabia o que era um radiano? E ele dava aula de trigonometria, pedia para seus alunos converterem graus em radianos e vice e versa, mas não sabia realmente o que era um radiano. Claro que seus alunos muito menos. Isso não poderia acontecer. Você sabe como descobri? Ele falou que essa medida de ângulo só servia para complicar cálculos, pois tinha que usar sempre o Pi e as medidas não eram exatas. Desconfiei e expliquei para ele o que era de fato o radiano. Ele ficou de boca aberta! Como é que pode? Isso está em qualquer livro didático. Eu tive que estudar muito para ensinar trigonometria. Apesar de eu sentir segurança em relação ao conteúdo, eu não tinha o menor preparo para dar aula. As aulas de didática que tive foram gerais e pouco ajudaram. É muita coisa, muito conteúdo e a minha escola está preocupada com o vestibular. Outra dificuldade é estimular nossos alunos a aprender. Mas parece que eles só se interessam quando a gente fala “essa questão caiu na Unicamp”, “essa caiu na Fuvest” etc. Acho que uma pessoa para ser professor de Matemática deve saber os conteúdos do Fundamental e do Médio. Por isso, as faculdades deveriam ensinar esses assuntos, mas devem ir bem além do que está nos livros do ensino Médio. Deviam dar um pouco de didática desses assuntos, deveríamos analisar livros didáticos e para-didáticos. Mas é claro que as faculdades devem ir bem além e não pode ficar apenas com os conteúdos do ensino Médio: acho que aprendi muito com álgebra linear, e com cálculo. Agora, com Análise Matemática não aprendi quase nada. O que eu sei de Geometria foi o que eu aprendi dando aula e o que vi no cursinho. Como eu dou pouco geometria no EM, e o que ensino é apenas a métrica, eu não sei muita coisa de Geometria Espacial. Não teria sido mais útil em algum momento do meu curso de Matemática ter estudado Geometria Plana e Espacial?

Parte II da entrevista

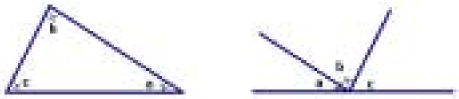
Vou apresentar a você algumas demonstrações feitas por alguns alunos: eles “demonstraram” que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Vamos supor que todos eles estivessem em uma classe de 8ª série, por exemplo. Analise as produções desses alunos e explicite aspectos que podem indicar o grau de compreensão de cada um deles sobre a prova solicitada. Depois vou pedir que você dê uma nota de zero a dez para cada produção. Vou dar um tempo para você pensar. Tudo bem?

Já estou pronta pode ser? Vamos lá. Posso ir falando de um a um ou você acha melhor eu agrupar.

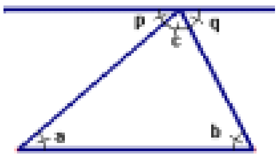
Faz o que você achar melhor.

Ok, vamos por ordem alfabética.

Ana em primeiro lugar. Vou dar agora a nota. Depois que eu ver a solução de todos eu volto.

Resposta de Ana: Eu recorto os ângulos e os coloco juntos:  Eu obtenho um ângulo de 180º pois os ângulos formam uma linha reta. Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece. Logo, a firmação é verdadeira.	Não sei se essa aluna estaria reproduzindo o que já havia sido feito na sala de aula. Caso contrário, ela foi bem criativa. Muito legal. Ela verificou que a propriedade era válida para três tipos de triângulo. Mas não provou. Como a tarefa era demonstrar sua nota é 4.

Essa nota que dei para Ana é provisória. Depois no final eu confirmo as notas. Vejamos a Bia.

Resposta de Bia:  p = a e b = q p + c + q = 180º. Logo, a + b + c = 180º	A demonstração está correta. Mas ela não informou que a reta traçada no vértice do ângulo c era paralela a um dos lados do triângulo. Faltou apenas isso. Por esse motivo eu não dou nota 10 e sim 9.

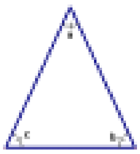
Agora vejamos a resposta da Cláudia:

A Cláudia errou porque partiu da própria tese.

Além disso, ela fez para um triângulo particular.

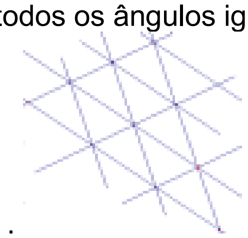
Parece que ela procurou reproduzir algo que ela já havia aprendido. Para mim, a nota dela seria zero, infelizmente.

Reposta da Cláudia:



Afirmativas	Justificativas
a= 180º - 2c	Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
a= 50º	180º - 130º
b = 65º	180º- (a + c)
c = b	Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.

Logo, a + b + c = 180º

Resposta de Dora: Eu desenhei uma rede de triângulos e marquei todos os ângulos iguais  Eu sei que os ângulos em volta de um ponto somam 360º. Logo a afirmação é verdadeira	Achei muito criativa a solução da Dora. Muito mesmo. Demais. Mas tem problemas. Não sei se o que ela fez é realmente uma prova. Nunca vi em livro em nenhum livro um tipo de prova como essa. Outra coisa: ela não informou sobre o paralelismo das retas. Mas mesmo assim eu daria nota 6 pela sua criatividade, mas não pelo trabalho.

Eduardo

Penso que o Eduardo merece a mesma nota de Ana. Ele teve bastante iniciativa e mediu ângulos de diversos tipos de triângulos.

Claro que ele deve ter feito aproximações Em suas medidas. Mas isso não tira seu mérito.
Ele apenas fez algumas comprovações.
Não demonstrou nada.
E tirou de exemplos particulares uma conclusão geral, tal como Ana fez.
Sua nota é também 4.

Resposta de Eduardo:
Eu medi cuidadosamente os ângulos de diversos tipos de triângulos e fiz uma tabela.

A	B	C	Total
110º	34º	36º	180º
95º	40º	45º	180º
35º	72º	73º	180º
90º	59º	31º	180º
13º	19º	148º	180º

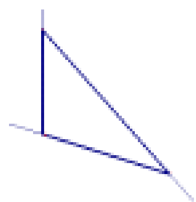
Em todos eles a soma foi 180º. Logo a afirmação é correta.

Fernando

O Fernando foi criativo e usou a noção de ângulo enquanto mudança de direção. Eu também desenvolvo essa idéia quando trabalho ângulos na 5ª e 6ª séries. Trabalhei em uma escola em que os alunos tinham aprendido o LOGO. Para esses alunos essa noção de mudança de direção é tranqüila. Mas o Fernando usou uma justificativa interessante para a situação. Mas não provou. Não considero o que ele fez uma prova.

Acho que por isso, vou dar nota 6.

Resposta de Fernando:
Se eu caminhar toda a volta sobre a linha do triângulo, termino olhando o caminho por onde comecei. Eu girei 360º.



Cada ângulo externo quando adicionado ao ângulo interno deve dar 180º porque eles formam uma reta. Isto faz um total de 540º.
540º - 360º = 180º.
Logo, a afirmação é verdadeira.

E as notas? Você pretende modificá-las, agora que viu todas as produções?

Não sei. Eu mantenho as notas da Ana, da Bia, da Claúdia e do Eduardo. Tenho dúvida para os dois que eu dei 6, Fernando e Dora. Está difícil. Foi muito legal os que eles fizeram, mas não demonstraram. Tenho que ser justo: A Ana e o Dirceu também não demonstraram e dei 4. Acho que vou dar 5 para Dora e Fernando. Não só porque foram mais criativos, mas seus processos foram mais gerais. Bem se foram mais gerais, espera, acho que vou deixar 6 mesmo.

Agora, o que eu queria que você me respondesse é o seguinte: O que você faria se esses alunos fossem seus. Qual o comentário especial para cada aluno? Como você daria seqüência a este trabalho?

Sem dizer os nomes eu colocaria todas as resoluções na lousa, menos a da Bia. E faria comentários sobre cada uma. Claro que eu procuraria incentivar, apontando a criatividade. Discutiria mérito de cada uma, mas não a nota. Mas eu chamaria atenção deles para o fato de que a proposta era demonstrar. E que a simples verificação não é uma prova matemática. Aproveitaria para discutir que em Matemática a simples verificação não basta. Falaria para eles que ainda que tivéssemos medido os ângulos de um milhão de triângulos nós não teríamos provado o teorema. Sei que é difícil convencer alguém disso, mas temos que tentar, não é? Depois colocaria a solução da Bia, só que completa, e discutiria com a classe.

Parte III da entrevista

Vou apresentar a você algumas demonstrações feitas por alguns alunos: eles "demonstraram" que a soma de dois números pares é um número par. Analise as produções desses alunos e explicite aspectos que podem indicar o grau de compreensão de cada um deles sobre a prova solicitada. Vamos supor que todos eles estivessem em uma classe de 8ª série, por exemplo. Depois vou pedir que você dê uma nota de zero a dez para cada produção. Vou dar um tempo para você pensar. Tudo bem?

Posso começar? Vou começar também por ordem alfabética. Tudo bem?

Resposta de André: x é um número inteiro qualquer. y é um número inteiro qualquer. 2x e 2y são dois números pares. 2x + 2y = 2(x + y). Portanto, a soma de dois números pares é sempre par.	Esse aluno tem domínio razoável da linguagem. Provavelmente já foi feito um trabalho com álgebra na classe dele. Mas ele cumpriu a tarefa. A nota é 10 independentemente dele já ter visto essa demonstração.

Vamos ver a demonstração do Bernardo.

Resposta de Bernardo: 2 + 2 = 4 4 + 2 = 6 6 + 2 = 8 2 + 4 = 6 4 + 4 = 8 6 + 4 = 10 2 + 6 = 8 4 + 6 = 10 6 + 6 = 12 2 + 8 = 10 4 + 8 = 12 6 + 8 = 14 A soma de dois números pares é sempre um número par.	Embora ele não tenha demonstrado o que se pediu, dá para perceber o que ele pensou. Mostrou que a soma de números de dois pares quaisquer de apenas um algarismo é sempre par. Provavelmente ele quis validar para números de qualquer ordem, porque para ser par basta que o último algarismo seja par. Ele mostrou pelos exemplos que a soma dos algarismos das unidades será sempre par se os dois números forem pares. Interessante, mas ele não provou nada. Ou melhor ele não soube comunicar o que pensou. A nota seria 4, mais pela tentativa.

Agora a do Ciro.

Resposta de Ciro: Números pares são números divisíveis por 2. Quando você adiciona números com um mesmo fator comum, 2 nesse caso, a soma terá o mesmo fator comum; portanto a soma também é divisível por 2. Assim, a afirmação é verdadeira.	Acho difícil um aluno pensar dessa forma sem ter visto esse tipo de argumentação antes. Ele foi convincente e usou o mesmo tipo de argumentação do André. Ele cumpriu a tarefa, mas eu dou apenas 7. O André ganhou 10 porque ele já usou uma representação mais Matemática.

Deixa eu entender direito o que ele fez.

4. Resposta de Dario: Sejam x e y dois números inteiros quaisquer. $x + y = z$ $z - x = y$ $z - y = x$ $z + z - (x + y) = x + y = 2z.$ Portanto, a afirmação é correta.	Esse aluno já deve ter visto outras demonstrações de álgebra. Ele procura usar uma linguagem adequada. Mas ele se confundiu totalmente e chegou a z = 2z, absurdo. Penso que ele está demasiado preso a símbolos. Sua nota é 3. Dei essa nota porque a primeira sentença foi adequada e sabe que 2z é par.

Eunice. Nossa!!!! ..... O que ela quis dizer com esses desenhos.... Ah, acho que entendi.

Resposta de Eunice: ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ... + ... = ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ♦ Portanto, a afirmação é correta.	Muito legal. Muito criativa. Acho que ela pensou do seguinte modo: dois números pares são sempre divisíveis por 2. Esse fato está representado pelas duas linhas. Cada uma seria a metade. As reticências garantiriam um número qualquer. Interessante, mas ela não demonstrou. Deve ser feito um trabalho com essa aluna. Eu daria, infelizmente apenas 5 para ela. Isso pela sua criatividade.

A da Flávia é fácil perceber o que ela pensou.

Resposta de Flávia: Vamos supor dois números pares: x = 27418 y = 956136 então , x + y = 983554 que é par. Portanto, a afirmação é correta.	Acho que ela deve ter pensado assim: pego dois números bem grandes. Se a soma der par é porque a soma de dois pares é sempre par. Mas eu daria apenas nota 2 para não dar zero.

Gina.

Resposta de Gina: Números pares terminam sempre em um desses dígitos: 0, 2, 4, 6, ou 8. Se eu adiciono dois desses números a soma termina também em 0, 2, 4, 6, ou 8. Portanto, a afirmação é correta.	Essa aluna no fundo fez a mesma coisa que o Bernardo. Apenas está mais bem escrito. Eu daria para ele nota 5.

Helena. Será que ela não tirou de um livro?

Resposta de Helena: Sejam p e q dois números pares quaisquer. Então Então, existe um número inteiro **k** tal que p = 2k. Existe também um **m** inteiro tal que q = 2m. Portanto p + q = 2k + 2m = 2 (k + m) é par Logo, a afirmação é correta.	Está perfeito. É claro que essa aluna já deve ter visto essa demonstração. Não quero dizer que ela memorizou sem compreensão, mas sozinha ela não teria feito uma demonstração dessa forma. Nota 10.

Ivo.

Resposta de Ivo: Vamos pegar dois números pares como 10 e 26. Então 10 = 5 + 5 26 = 13 + 13 36 = 18 + 18 Como isso sempre é possível, a afirmação é correta.	Essa demonstração é a mesma de Eunice só que ele exemplificou. O interessante que apesar de Eunice não usar letras ou símbolos ela generalizou muito mais que esse aluno. Ela tirou, deixa ver, nota 5. Então Ivo deve tirar nota 4.

E as notas? Você pretende modificá-las como fez com geometria?

Não, acho que vou deixar como está. Mas tive mais dificuldade de analisar essas demonstrações que as da Geometria. Vou pedir às minhas turmas do ensino médio para fazerem essa demonstração. Mas acho que eles não vão conseguir. Talvez façam algo parecido com a do Bernardo, a da Gina ou até a da Flávia.

O que você faria se esses alunos fossem seus. Qual o comentário especial para cada aluno? Como você daria seqüência a este trabalho?

Eu retomaria antes a questão da representação genérica de um número par. Os alunos aprendem essa representação na 6ª série quando aprendem equações do 1º grau e resolvem probleminhas do 1º grau. Discutiria que a demonstração tem que ser geral e não para casos particulares como eles fizeram. Depois disso eu apresentava a demonstração correta. Ah, acho que seria legal pedir que eles dissessem a diferença entre as demonstrações do André e da Helena. Acho que esse tipo de demonstração os alunos do Ensino Fundamental teriam condições de entender. Mas a minha dúvida é se eles entendem que não basta verificar para casos particulares e poder concluir. Tenho dúvidas se um aluno do Fundamental possa realmente entender o significado de uma demonstração em Matemática.

Professor IIE

Em alguns países as atuais orientações curriculares de Matemática preconizam um trabalho com demonstrações em escolas de educação básica. Os PCN, por exemplo, indicam um início de trabalho com a prova já no Ensino Fundamental. O senhor concorda com estas orientações? Qual deveria ser o significado do trabalho com a demonstração nas aulas de Matemática na educação básica?

Sobre essa parte da demonstração, um fato interessante, eu trabalho nessa instituição, e em outras também. Nessa aqui, muitos já haviam declarado isso, mas esse ano numa outra instituição que eu imaginava que o pessoal não ligasse muito, achasse ruim essas demonstrações, simplesmente um aluno chegou e falou assim:- "Marinho, que maravilha! Esse ano eu tive a visão global da matemática" porque, porque tudo que era dito, era demonstrado o porque daquilo; o porque daquilo. Então ele, recebendo aquela informação, deslumbrando aquela técnica, de demonstrações, tal, mais a inteligência própria dele, e mais a criatividade dele, ele não deu um passo, ele deu dez passos, então é uma coisa muito interessante.

O trabalho com demonstrações no Ensino Médio e Fundamental é mais que desejável. É possível não sei para todos, é desejável, mas com coisas, assim, muito elementares. O que seria feito, seria feito sem aquela formalização rigorosa, mas já induzindo a um raciocínio, com coisas muito simples, mas já iniciando o aluno, a pequenas formalizações: pequenas formalizações, assim, pra ele ter uma noção de lógica, não é? Eu acho fundamental isso, e coisas bastante simples, no livro deles, lógico, mas fundamental.

Que experiências um futuro professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio deveria vivenciar em sua formação inicial para ter competência na organização e direção de situações de aprendizagem envolvendo argumentações e demonstrações na escola básica? Ou seja, para, como para um professor ensinar essa questão da argumentação e da prova o que você acha que na formação dele, o professor deveria ter?

O que a gente percebe, por exemplo, no ensino médio, é que como nós, aqui, graças a deus, trabalhamos numa instituição muito voltada, assim, pra formação mesmo do aluno, não é? Ou seja, nós estamos preocupados com o aspecto global do aluno, mas também com o aspecto da disciplina, do conteúdo da disciplina. Mesmo porque existe uma esperança muito grande aqui das famílias que esses alunos sejam colocados nos melhores lugares, se não, não estudariam aqui, estudariam em outros lugares. Então isso é uma dicotomia que nós vivemos entre uma situação e outra, né? Uma é a que toda teoria diz pra gente fazer e outra e o que a família realmente espera que aconteça. E como o mundo está muito competitivo alguns lugares são muito poucos, eles têm que estar preparados pra aquilo, né? Então eu acho assim, nós estamos nesta instituição que já tem essa preocupação, mas no geral o que se percebe é apenas a passagem de conhecimento para o aluno do ensino médio, sem nenhuma preocupação em se explicar o porque daquilo. Como funciona, como se demonstra aquilo, e, principalmente, onde vai ser usado aquilo. Então o problema todo está no seguinte fato: uma universidade que não tem o curso de matemática tem um grande problema, pois ela recebe os alunos que não estão habituados com aquele tipo de raciocínio. Então acho que esse trabalho tem que ser feito em algumas etapas, né? Uma primeira etapa é tentar recuperar aquele aluno que já ingressou na universidade, que não está habituado a aquele tipo de raciocínio, não é? O mestre ou o doutor que está dando aquela aula pra aquele aluno, ele tem que ter noção que aquele aluno, ele não tem, eh, aquele treinamento, que já normalmente se é tido como conhecido, e que o aluno não tem a ver. Então o aluno, na verdade, no primeiro ano de um curso de matemática, quando ele vai fazer um cálculo, quando vai fazer um cálculo I, por exemplo, se o mestre partir do princípio que o aluno esta acostumado com demonstrações, que ele sabe o que está fazendo, ele está cometendo um sério engano, porque realmente, dependendo da instituição que ele esteja, tem impressão que teu trabalho é uma coisa geral, não é? Não é, por exemplo, pra um aluno que entrou no Mackenzie, que entrou numa Poli, que entrou na matemática da USP... Eu tenho a impressão assim: vamos fazer uma universidade simples, de fácil ingresso, como nos temos aqui, pulverizado pelo Brasil todo, milhões delas, né? Milhares delas. E que aí já gera o problema. Se essas instituições, na parte de matemática, não se preocuparem em pegar aquele aluno, que não tem a menor noção de demonstrações, porque o ingresso na faculdade foi livre, e não começar a fazer um treinamento nesse sentido, dificilmente nós vamos conseguir professores que vão dar importância da demonstração. Uma coisa é eu chegar para o moleque e falar assim: olha aqui, tá vendo? isso aqui é um bambuzinho; isso aqui, uma corda de nylon; isso aqui é um anzol; isso aqui é uma minhoquinha; põe a minhoca aqui, joga lá que o peixe vai comer, você vai pescar. Outra coisa é por que usa o bambu? Olha, nós vamos usar o bambu porque é muito flexível, então qualquer sinalzinho, vai ser perceptível, você vai por a minhoca por que aquele ali... às vezes não é minhoca, às vezes tem que por é um camarãozinho, olha, tem que estar vivo, porque... pó, o cara já tem uma compreensão muito mais generalizada da coisa, do que se você simplesmente descrever: pega um negocinho e faz... entendeu? Ou seja, eu acho fundamental a demonstração, para a compreensão, porque aí o camarada, compreendendo, ele realmente aprendeu aquilo; ele sabe como é que funciona; ele sabe quando ele deve usar. Agora, como é que nós vamos formar professores que estejam voltados para isso? Porque normalmente o aluno entra numa faculdade que não foi difícil ele entrar. Ele não tem base nenhuma, o mestre por sua vez, nem toma conhecimento do fato de que ele, esse tal aluno, não tem a menor noção de demonstração nenhuma, o aluno não vê nenhum sentido naquela demonstração... então o que nós vamos ter que fazer é um trabalho inicial na licenciatura, numa explanação que eu nem sabia que eu iria conversar com você sobre isso, eu tô falando pra você o que eu sinto realmente, de “supetão” sem elaboração. O que eu percebo é isso, por exemplo, o cara da universidade, o que quê ele faz, ah, esse cara entrou aqui, então ele tem que saber tudo, o problema é dele, um “caramba” e tal, eu vou partir daqui, teorema de não sei o que....falam muito de coisas que estão fora da realidade do aluno, que por sua vez vai concluir o curso, vai estar cheia de coisas fora da realidade dele, vai entrar numa classe, vai falar um monte de coisas fora da realidade do aluno dele.

O que um curso de Licenciatura em Matemática deve necessariamente oferecer para que seja possível formar um professor competente para os ensinos Fundamental e Médio?

O conteúdo matemático da licenciatura poderia incluir conteúdos do ensino médio, por exemplo. Eu tenho a impressão assim, que seria o conteúdo, aquele conteúdo... eu dou aula na faculdade de engenharia, e pego os caras no terceiro semestre. Eu falo de funções, de várias variáveis, né? Eu falo de equações diferenciais, falo de ta... uma série de coisas. Quando eu vou, por exemplo, resolver uma equação diferencial, o que significa aquilo ali, o camarada até entende porque nos vamos fazer um comentário o que é uma solução de... o que é uma equação diferencial, o que é uma solução de uma equação diferencial, ó isso, tal,tal, como é que se encontra a solução? Uma família de soluções, tal, tal aí começamos a trabalhar, aí daqui há pouco caí uma integral de 1 sobre Y .... Daí caímos no conteúdo de segundo grau de ensino médio, aí o que quê acontece? Olha, mas na hora que vem pra cá tem que subtrair, a diferença de logaritmo... ah, logaritmo de uma divisão... opa, mas ta dentro do módulo, como é que faz? ... aí "empachelou" o negócio, entendeu? Ou seja, o professor... ele tem que ter noção que no ensino médio, aquele conteúdo não foi bem desenvolvido, que ele vai ter que dar uma, sabe? Não é parar a aula pra... vou dar um curso de logaritmo... não, sempre que possível dar uma retomada, conversa alguma coisa... Eu to falando em termos, de faculdades em que o ingresso não foi tão dificultado, e que há um interesse de se aproveitar aquela mão de obra que tá ali, não é? Então é interessante, ou seja, o aluno não ter cursos específicos de, ah vou dar aula de logaritmos, ahh, vou dar aula de propriedades do módulo. E a trigonometria então? Radiano então ninguém sabe o que é. Até pode usar mas saber.... Não, não, não vou fazer nada disso, mas eu vou, quando perceber necessário, fazer uma observação pertinente, eu vou estar me rebaixando? Eu to falando pessoalmente, pensamentos que me ocorrem... pó, eu fazendo isso estou me rebaixando? Ou, ao contrário, eu estou fazendo que um cara consiga construir uma idéia assim mais clara de tudo?.Eu optei pela segunda hipótese, ou seja, é uma postura, assim, mais humana. Seria fácil ficar ali na frente exibindo conhecimentos, falando para uma platéia que não esta compreendendo nada, mas eu acho que a gente tem que pular essa. Mas para o professor, por exemplo, que vai dar aula no ensino médio, eu acho que esses conteúdos, devem ser tomados nessa perspectiva, no momento que for sendo usado, sendo retomados. Mas não um curso especifico para isso, por exemplo, logaritmos de trigonometria. Não, não, absolutamente, não, por que aí nos estaríamos fazendo uma coisa muito paternalista. "olha, as propriedades, principais são essas, a coisa funciona assim, em qualquer livro e tal... você vai encontrar...." Ao é assim, você não está dando o peixe, você esta ensinando o cara a pescar, você... é isso, é assim... lembra que você tinha pavor disso... mais isso aqui se resume a isso, pá, tais condições, tais propriedades operatórias, tal... ele já relembra aquilo e, ele que vá pesquisar, ele já tem condições de pesquisa. Eu acredito muito numa coisa que é assim: você me ensina uma coisa, isso tem uma durabilidade dentro de mim, que pode ser eterna, pode ser ou não, depende do interesse que eu tenha por aquilo, mas se eu, você me ensina um pequeno caminhozinho, e eu por meu interesse, motivado por alguma coisa, começo a pesquisar, sobre aquilo, ler, pa, ou seja me tornar um autodidata naquele item ali, aquela aprendizagem é eterna, aquilo lá é duradouro. Então, por isso eu acho fundamental a importância das demonstrações, a importância de você estar habituado a demonstrar as coisas, por que? Porque você não precisará nunca mais entrar em "decorebas". Você vai simplesmente, opa, você, como é que funciona? Você sabendo a lei, me fala qual é a lei? a lei e essa, pa, pa,pa aí você demonstra por aquela lei, você demonstra todas as propriedades. Eu te falo o que quê é uma, como é que funciona, por exemplo dois elevado a N, oh... dois elevado a N é 2 x2 x 2 x 2... N vezes; você sabe isso... o aluno que está habituado com demonstração, eu falo pra ele, e se for 2 elevado a 7ª dividido por 2 elevado a 4....mais ele já sabe o que é dois elevado a n, ele vai e faz... é isso sobre isto, todos os fatores iguais a dois, simplifica e tal, deu quanto? Opa, olha o que aconteceu?. Ou seja, ele demonstra todas as propriedades, porque ele já está, ele não é o cara que só recebe a informação pronta, mas ele sabe como funciona, e ele dali vai desenvolvendo tudo... desculpe, eu não sei se estou te ajudando muito, ...

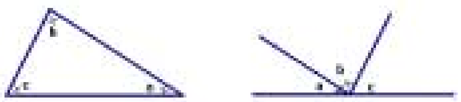
Eu acho muito interessante, sabe? Porque aqui nós trabalhamos... um parêntese... aqui nós estamos trabalhando com um público, não é? com a nossa clientela, nossos amigos, né? Alguns nem tanto... a gente procura ser amigo mas, às vezes, os caras não aceitam por uma questão qualquer, né? Mas então, o pessoal é de uma qualidade muito boa, então se você fizer um trabalho, assim, legal, e começar a jogar, sabe? Porque é assim, eles estão acostumados a pular muro de 1 metro, então eu acho que a gente, o que nos devemos fazer, é colocar, assim, uns murinhos de 1,5 m, 1,8m... eles gradativamente... eles... Hoje, por exemplo eu comecei uma lista de exercício, pó, só coisa ridícula: sabendo que F(x) é igual a 3x+1, calcule, F de 2...... pó, quando chega lá no final, dado F de X é igual a ... dado G de X igual a tal... calcule G. Como é que é a função mas aí já enrolando tudo. O cara já... “como é que eu vou fazer isso?”, tenho G... pa... pa... usa um artifício, faz isso, faz aquilo, aí eles vão... é visível o desenvolvimento deles.

Parte II da entrevista

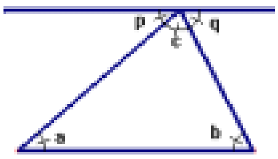
Vou apresentar a você algumas demonstrações feitas por alguns alunos: eles “demonstraram” que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Vamos supor que todos eles estivessem em uma classe de 8ª série, por exemplo. Analise as produções desses alunos e explicite aspectos que podem indicar o grau de compreensão de cada um deles sobre a prova solicitada. Depois vou pedir que você dê uma nota de zero a dez para cada produção. Vou dar um tempo para você pensar. Tudo bem? Você pode me responder depois.

Oitava serie, que maravilha!

Ana

Resposta de Ana: Eu recorto os ângulos e os coloco juntos:  Eu obtenho um ângulo de 180º pois os ângulos formam uma linha reta. Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece. Logo, a firmação é verdadeira.	essa primeira aqui foi muito criativa, e ela não dependeu de nenhuma formalização, simplesmente ela arrumou um jeito prático de adicionar esses ângulos internos e provando que dá uma línea reta, por tanto 180° graus, ótimo, achei muito criativo e independe, dependeria só de algumas condições matérias, né? tesoura, cola, coisa do tipo, mas muito interessante, e também independeria de muita... talvez alguns alunos não chegassem a concluir por não estar construindo adequadamente por colagem, não desse perfeitamente uma reta... seria uma situação que poderia gerar alguma duvida, mas muito criativo. Se ela estabelecesse um critério de corte aqui, encostando os ângulos, ela provavelmente teria a reta normalmente.

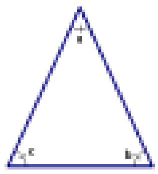
Bia

Resposta de Bia:  p = a e b = q p + c + q = 180º. Logo, a + b + c = 180º	Entrevistado: perfeito, isso aqui é a solução; dificuldade para eles é traçar a paralela, que eu acho que é um conceito que eu não sei se eles já tem condições de fazer, mas muito interessante também... esta está quase perfeita.

Claudia ...

Vamos ver as outras... afirmativas, as respostas isso b diferente de c, a = 180 – 2c, já partiu do principio... aqui já partiu, esse já furou, né?

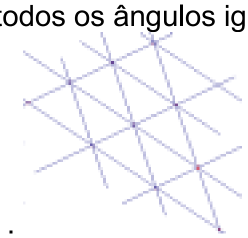
Reposta da Cláudia:



Afirmativas	Justificativas
a= 180º - 2c	Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
a= 50º	180º - 130º
b = 65º	180º- (a + c)
c = b	Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.

Logo, a + b + c = 180º

Essa daqui ...

Resposta de Dora: Eu desenhei uma rede de triângulos e marquei todos os ângulos iguais  Eu sei que os ângulos em volta de um ponto somam 360º. Logo a afirmação é verdadeira	Eu desenhei uma rede de triângulos e marquei todos os ângulos iguais... interessante.. paralelo, paralelo, esse igual a esse, esse igual a esse, esse igual a aquele, ah, perfeito... e a soma dos três. <u>(murmúrio ininteligível) </u>Muito, mas muito interessante isto aqui, você também não acha?

Agora é (murmúrio ininteligível): medi cuidadosamente os ângulos de diversos tipos de triângulos e fiz uma tabela... (risos), legal!

Chegou por medida mesmo

Resposta de Eduardo:
Eu medi cuidadosamente os ângulos de diversos tipos de triângulos e fiz uma tabela.

A	B	C	Total
110º	34º	36º	180º
95º	40º	45º	180º
35º	72º	73º	180º
90º	59º	31º	180º
13º	19º	148º	180º

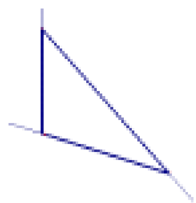
Em todos eles a soma foi 180º. Logo a afirmação é correta.

Fernando

Se eu caminhar toda a volta sobre a linha do triângulo, eu determino, olhando o caminho por onde comecei, eu girei 360º graus...” como é que é a história? Ele andou por aqui, não, ele veio por aqui, deu uma volta, deu uma volta, deu uma volta, voltou lá. “Cada ângulo externo, quando adicionado ao ângulo interno, dá 180º, porque eles formam uma reta. (murmúrio ininteligível)

Muito boa esta aqui também.

Resposta de Fernando:
Se eu caminhar toda a volta sobre a linha do triângulo, termino olhando o caminho por onde comecei. Eu girei 360º.



Cada ângulo externo quando adicionado ao ângulo interno deve dar 180º porque eles formam uma reta. Isto faz um total de 540º.
540º - 360º = 180º.
Logo, a afirmação é verdadeira.

Entrevistador: Você não apenas comentou o que achou de cada uma, mas o que sentiu em relação a cada uma? Mas que nota você daria?.

De todas, aqui só tem um realmente problema, essa aqui a três, a Claudia, aqui ela partiu do principio de que era 180º, não é verdade? Essa aqui está excluída por essa razão, agora todas as outras cada um tem uma qualidade... Essa aqui, a 2ª (Bia) é perfeita, essa aqui, a 4ª (Dora), é muita criatividade, como a da 1ª (Ana). Essas a 1ª e a 4ª, muita criatividade da idéia... Nessas, os alunos já mostraram que tem uma noção. Essa aqui, a 5ª (Eduardo) o camarada foi, matemático, não é? Ele fez por indução, “olha, se tanto dá tanto”, perfeita. Todas elas no mesmo nível, todas elas excelentes, destacado a 1ª e a 4ª, que o cara não precisa ter conceito nenhum. Essa, a 6ª (Fernando), tem que ter o conceito, volta inteira 360º, meia volta 180º, entendeu, Rui? Não sei se eu te ajudei. Resumindo: criatividade - 1ª e a 4ª; formalização matemática – a 6ª e a 2ª, é pesquisa – a 5ª, ele não precisa saber nada, ele não precisa saber que a volta é 360º, meia volta é 180º. A 3ª está excluída, não é?
Apesar do excelente nível de 5 dessas 6 justificativas, eu não poderia dar nota 10 para todas. Porque eles não demonstraram matematicamente falando, a não ser 2ª e,

também, talvez a 6ª, não sei. Mas também não posso dar zero para os outros, que talvez fosse o caso porque eles não demonstraram do ponto de vista da Matemática. Tenho que respeitar o estágio deles. Você me complicou, me colocou numa sinuca. Vamos ficar assim: 10 para a Bia e zero para a Cláudia. As notas dos outros fico devendo.

O que você faria se esses alunos fossem seus? Quais seriam seus comentários para esses alunos?

Eu diria para o Eduardo: ... talvez fosse, também, por exemplo, ele somar os ângulos externos do triângulo, e ver qual é a outra propriedade que ele poderia... eu procuraria fazer, bom, já que você percebeu que isso aqui é verdade, procuraria induzir esse aluno, a visualizar, por exemplo, disso que ele já... agora já é verdade para ele, ele visualizar, a situação 6ª, ou a situação 2ª, que é ele vir da experiência prática pra formalização matemática. Então eu acharia, assim como esse aqui também, a Ana a 1ª, eu também procuraria, eu falaria "lindo demais, pô que bacana pra caramba", tal... agora, olha só, lembra aquele negócio de ângulos alternos e internos, se a gente traçasse uma paralela, o que será que aconteceria? Ou seja, ele levar da criatividade que ele teve, esse aqui, fazendo isso e o outro, pesquisando em cada triângulo, levar pra formalização, que é a única coisa que estaria faltando.

Parte III da entrevista

Vou apresentar a você algumas demonstrações feitas por alguns alunos: eles "demonstraram" que a soma de dois números pares é um número par. Analise as produções desses alunos e explicite aspectos que podem indicar o grau de compreensão de cada um deles sobre a prova solicitada. Vamos supor que todos eles estivessem em uma classe de 8ª série, por exemplo. Depois vou pedir que você dê uma nota de zero a dez para cada produção. Vou dar um tempo para você pensar. Tudo bem?

Resposta de André: x é um número inteiro qualquer. y é um número inteiro qualquer. 2x e 2y são dois números pares. 2x + 2y = 2(x + y). Portanto, a soma de dois números pares é sempre par.
Análise da entrevistado: Esse aqui..oh. x, ta... x é um número inteiro qualquer, y também. Então, ele já sabe que dois x e dois y são pares. **E**le já conhece a propriedade distributiva, algo assim... portanto a soma dos números de pois pares é par. Essa solução aqui é a formal, tá bonitaço ...

Resposta de Bernardo:

2 + 2 = 4	4 + 2 = 6
6 + 2 = 8	2 + 4 = 6
4 + 4 = 8	6 + 4 = 10
2 + 6 = 8	4 + 6 = 10
6 + 6 = 12	2 + 8 = 10
4 + 8 = 12	6 + 8 = 14

A soma de dois números pares é sempre um número par.

Eu acho que foi a mesma coisa que aquele ali que somou todos os lados dos triângulos, olha, ele foi verificando, soma de dois números pares... aqui acho que é 4 e 4, ou não? Ah, não, aqui pode ser que ele repete...2 e 2 quatro... dois... seis e dois ... ele foi experimentando, né? mas aqui ele ainda não tem, e ele se preocupou só em pegar número par, né? ele poderia ter pego ímpares, né, 3 e 3 dá 6...
Entrevistador: é, mas a soma de dois pares, acho que ele fez certo, não foi?

Ah, a proposta é que a soma de dois números pares quaisquer é um número par... ah, tá! Então ele quis provar que a soma de dois pares... ah, tá! Tá, aqui foi experimental, como aquele do triângulo, não é? Teria que se induzir nesse aluno o raciocínio do André, pra ele.......

Resposta de Ciro:
Números pares são números divisíveis por 2. Quando você adiciona números com um mesmo fator comum, 2 nesse caso, a soma terá o mesmo fator comum; portanto a soma também é divisível por 2. Assim, a afirmação é verdadeira.

Análise da entrevistado:

Números pares são números divisíveis por 2. Quando você adiciona números com o mesmo fator comum, 2 neste caso, a soma deverá ter o mesmo fator comum, portanto a soma também é par. Essa 3ª é exatamente a 1ª, só que ele escrevendo, o que eu acho que é mais difícil (risos), porque ... x é um número qualquer, 2x é par... y é um número qualquer, 2 é... Ah.... essa explicação mostra que ele está um pouquinho além da aquilo, que ele fez uma integração entre a linguagem, ou seja, ele já é bom de linguagem também, ele tem uma compreensão além do conteúdo matemático.

4. Resposta de Dario:

Sejam x e y dois números inteiros quaisquer.

$$x + y = z$$
$$z - x = y$$
$$z - y = x$$
$$z + z - (x + y) = x + y = 2z.$$

Portanto, a afirmação é correta.

Análise da entrevistado:

Seja x e y dois números inteiros quaisquer... x=y+z z-x=y z-y=x o que ele quer fazer? 2z – (x+y)... Não entendi o que ele quis fazer... Olha, aqui ... x+y= z ele isolou depois e tirou y e x em função de z. Ta... então z+z - ... isto aqui é z, então isto aqui tem que dar z, que é x+y... igual a 2z... ta furado. (risos) Aqui não é igual, né? Aqui não tem o igual... né? quer ver? Ehh... z+z = 2z – z, então aqui só tem 1 z = a z... ta certo, que é igual a 2z? Está furado... acho que foi uma enrolada... vamos ver se o professor acredita nesta...

Resposta de Eunice: ♦ ♦ ♦ ♦ ... ♦ ♦ ♦ ... ♦ ♦ ♦ ♦ ... ♦ ... + ... = ... ♦ ♦ ♦ ♦ ... ♦ ♦ ♦ ... ♦ ♦ ♦ ♦ ... ♦
Portanto, a afirmação é correta.
Análise da entrevistado: Vamos ver o que significa estes pontinhos... aqui ela pôs assim, né? Ah! Ela quis dizer assim: se aquela quantidade lá de cima é igual à de baixo, esse número é par... essa quantidade de cima aqui ela está pondo pares e ímpares! Legais... aqui ela quis, eu acho, dizer isso. Pares e ímpares, né? E esse número é par, mesmo sendo... porque é 3, 2x3, aqui é 2x4, então isto aqui vai dar 2x (1,2,3,4,5 né?). Aqui... bom, aqui não tem nada... portanto a afirmação é correta. Perfeito, mas só que tem problemas aonde? Na formalização, no entendimento, agora, pra mim ficou claro, assim, né? Ela está pegando o mesmo número duas vezes, então é par; duas vezes? Então é par... se eu somar dois pares, também vai dar par. Pó, legal, só que a dificuldade rstá na formalização, né? Nem todos entenderão isso nem ela, num outro momento, talvez entenda. Ela precisa se comunicar. Então ela precisaria do quê? Ela precisaria aprender a formalizar, que é aquilo que eu estava te dizendo, de introduzir nos alunos desde o ginásio, pouquinha coisa de formalização, ah.. o número é par? Então x, qualquer dois x é par, o número é ímpar? Bom, então se 2x vai ser par, se eu somar 1 é ímpar... Sabe coisinhas que a gente vai jogando todo o dia, e que o cara no final...

Resposta de Flávia: Vamos supor dois números pares: x = 27418 y = 956136 então , x + y = 983554 que é par. Portanto, a afirmação é correta.
Análise da entrevistado: Se eu por dois números pares, x e y, x+y, tal... então a afirmação é correta... ela partiu, assim, de um exemplo... Acho que a idéia dela foi pegar dois números bem grandes quaisquer... Supondo que a dificuldade fosse pelo tamanho do número, não é? Então por exemplo, você percebe que aqui ela sabe o que quê é par, e ela sabe que a soma de dois pares vai dar um par, mais ela tem dificuldade de dizer quando que o número é par, ela sabe identificar um número par, mais ela não sabe dizer quando que o número é par, né? x inteiro qualquer? Então 2x é par. Oopa... legal, aprendi a descrever todos... mas ela, para indicar um número par, ela tem que escrever o número par... Ela escreve um número grande para dizer que é qualquer...É difícil, é uma coisa complicada, olha, eu sei...Ela pega um grande para dizer: eu peguei um número qualquer...Peguei aleatoriamente... Mas ela sabe identificar o par, mas ela não sabe que se x qualquer, 2x é par!

Resposta de Gina:

Números pares terminam sempre em um desses dígitos: 0, 2, 4, 6, ou 8. Se eu adiciono dois desses números a soma termina também em 0, 2, 4, 6, ou 8.
Portanto, a afirmação é correta.

Análise da entrevistado:

Números pares terminam sempre com um destes dígitos; se eu adiciono dois números, a soma termina também... olha que legal, ó? Portanto a afirmação é correta. Se eu somo dois números pares... Ele já se preocupou com o negócio de digito, né? Como se fosse uma teoria de números. Olha a preocupação do aluno, oh, olha, se terminar... quando é que vai ser par? Quando termina em 0, 2, 4, 6, 8, ele já tem essa noção, né? Ficaria muito mais simples, ele foi por um caminho muito mais difícil, né? Ele concluiu aqui, oh, se eu somar par, termina em 0 com 2, vai dar 2, tá aqui! 0 com 4, 0 com 6, sempre vai dar esses caras aqui, portanto é par. Olha que legal, mais ficaria mais fácil ele pensar, ainda, no produto por 2

Resposta de Helena:

Sejam p e q dois números pares quaisquer. Então

Então, existe um número inteiro **k** tal que $p = 2k$.

Existe também um **m** inteiro tal que $q = 2m$.

Portanto $p + q = 2k + 2m = 2(k + m)$ é par
Logo, a afirmação é correta.

Análise da entrevistado:

Ahh, sejam p e q dois pares quaisquer, então existe um número k inteiro .... (murmúrio inteligível) Legal, esse cara aqui parece... aula do professor de teoria dos números (risos): p é igual a 2K módulo m. Ah, p = 2k , existe também um número m tal que q = 2m, portanto p+q pá, pá, perfeito, ótimo, é igual a primeira, exatamente igual a primeira, só que formalizando mais ainda... O que ele que apresentou vai ver que é uma coisa que já foi feita, e tá na cara que ele reproduziu. Tenho quase certeza. Mas, legal.

Resposta de Ivo:

Vamos pegar dois números pares como 10 e 26.

Então

$$\begin{array}{rcrcr} 10 & = & 5 & + & 5 \\ \underline{26} & \underline{=} & \underline{13} & \underline{+} & \underline{13} \\ 36 & = & 18 & + & 18 \end{array}$$

Como isso sempre é possível, a afirmação é correta.

Análise da entrevistado:

Vamos pegar dois números pares, como 10 e 26, então, a mesma coisa, né? Mesma coisa...
Só que aqui já é mais, aqui ela generalizou e aqui ela pegou um exemplo, mas legal... sempre dentro do conceito do “duas vezes”....

E as notas?

Na geometria fiquei com receio de dar as notas. Acho que vou mudar. Só pra você ter uma idéia, posso te falar uma coisinha? Eu acho por exemplo, assim: todos dez, com exceção, por exemplo, desse daqui que está errado, esse do Dario ele não deu certo... ele quis enrolar ...mais todos eles, dentro do...todos foram... todos foram criativos. Vou dar dez mesmo que eles não tenham demonstrado. Vou ser bonzinho, com exceção dessa que estava furada lá... Eu vou ser franco, acho assim, eu acho fabuloso mesmo que não demonstraram.. Outro dia eu tava fazendo uma prova, e a menina lá... relações de Girard. Eu pedi pra ela calcular isso, usando... era um problema de relações de Girard, e ela não lembrava de cor isso aqui, o que ela fez? Pô caramba, é 3a então tá bom... eu vou fazer a+b+c elevado ao quadrado, mais 2A blá, blá, bla´... ao quadrado, então quer dizer tem uma criatividade, ... Daqui a pouco ela chegou na fórmula, ai ela me permitu falar, olha... porque são coisas... que ela tava pressionada, estávamos nos últimos minutos da prova, última questão, então o que ela demonstrou? Demonstrou, que ela tem inteligência e tem uma criatividade danada no sentido de pegar, desmontar um negócio, elevar por partes, tal e chegou na fórmula. Isso aqui é a primeira relação de Girard, lá no meio deu duas vezes a soma dos produtos, né? Que era a segunda relação de Girard, e o que eu queria que era isso aqui, era isso aqui,,, entendeu? Pá, pegou isto aqui, subtraiu, acabou... que maravilha! O que ela teve? criatividade, não é verdade? Às vezes, o aluno...

Entrevistador: isso você só consegue se você fazer um trabalho com justificativa, com argumentação

Sim, tudo. Eles não gostam, ele.... olha, duas retas são perpendiculares, ah por que? Eles adoram a formulinha, ah, MSxMR=-1 , mas por que? Vamos discutir isto? como é que é? pô, pá, pá, sistema, a solução do sistema... ah, por que que é isso? Eu chego a comentar com eles até, assim, por exemplo, que eles tem noção, sistemas de duas equações com duas incógnitas, isso aqui... pó, ele sabe que é intersecção de duas retas ou são duas retas paralelas ou duas retas coincidentes, ele sabe disso... mas e quando é três equações com três incógnitas? aí sai da visibilidade deles, aí às vezes eu perco um tempinho, um minutinho, pego uma equacãozinha bem simples, né? X+Y+Z+Y+Z = 3; e eu monto, olha e se eu tiver nesse planinho aqui X e Y o Z vai ser zero, não vai? não vou ter essa retinha aqui, oh, essa reta, oh, e se o outro for zero, você não vai dar essa? Não vai dar essa? O que você tem aqui? uma superfície... "pô, Marinho então nós estamos ferrados" ... é, tão, ah por que? porque se eu tiver três equações, eu tenho 3 planos, ta ai a solução... o que que vai ser? a interseção de três planos. Me mostra aqui a interseção de três planos aonde nos estamos, olha aquele canto, ah...um , dois, oh, legal, oh 0,0,0, você entende Rui?.

Um pouquinho... mas isso, o professor universitário tem que ter também, porque ele pega o cara que não tá com essa bola toda... então, se você vai formar um professor de matemática, você tem que ver, até por compaixão pelos futuros professores de matemática, a gente tem que voltar... não, não dar aula de logaritmos, mas voltar, explicar, mostrar porque, e menos erudição, sabe?, menos erudição, muito "eu sei tudo" ... não, não, menos isso e mais chegar junto. Eu tenho um exemplo aqui, nós temos um exemplo aqui no colégio, que é nosso amigo, assim de quarenta anos, eu sou amigo dele... eu to com... não vou falar minha idade, você me manda embora.. (risos) ... mais eu digo assim, nós todos estamos na mesma idade, ... então eu ando com o Vinzenzo há mais de, seguramente, trinta anos, ele é uma pessoa fabulosa, fabulosa, e vai conversar com ele sobre qualquer aspecto matemático? Você pode encontrar tudo nele, menos erudição, sabe? Aquele negocio de "eu sei mais", e eu vou falar... tudo que dito, simples, É assim: o conhecimento não implica eu me achar que sou melhor que alguém, ou seja, eu acho que o fundamental também é a humildade, a humildade dos mestres.. em chegar próximo do aluno... eu dou aula na faculdade de engenharia, se você me xingar na minha classe lá do terceiro semestre, se você falar mal de mim os caras vão bater em você, mais por que? por causa... a mesma coisa, o camarada precisa, o cara tem que fazer isso aqui, a dificuldade dele é encontrar a equação dessa reta, então a gente tem que ter a humildade de chegar pra o cara é falar: olha você tem uma ... eu sei que você deveria saber, tal , olha: mais isso funciona assim, assim. Custa? Você perde dois minutos e salva uma alma, e o cara pega o fio da meada e vai embora sozinho, e acabou... nesse aspecto a minha tese é essa, sabe?, eu acho que a gente deveria ter menos erudição e mais, sabe? Vontade de mostrar as coisas, e mostrar principalmente para que serve, como faz, qual é a utilidade daquilo. Rui, sei lá falei cada coisa aí...

Professor IIF

Em alguns países as atuais orientações curriculares de Matemática preconizam um trabalho com demonstrações em escolas de educação básica. Os PCN, por exemplo, indicam um início de trabalho com a prova já no Ensino Fundamental. O senhor concorda com estas orientações? Qual deveria ser o significado do trabalho com a demonstração nas aulas de Matemática em escolas do ensino fundamental e médio?

Concordo. As demonstrações de um mesmo conteúdo podem ter várias abordagens, dependendo do nível de abstração do aluno. Por exemplo, não teria significado para um aluno do curso fundamental, uma demonstração essencialmente algébrica, sobre área. Contudo, se esse aluno tivesse uma demonstração em nível concreto (com colagens, ele medindo figuras, etc), conseguiria entender melhor o que é superfície.Se um aluno do curso fundamental incorporasse esse conhecimento ,no curso médio poderia haver uma demonstração algébrica, que provavelmente ele conseguiria entender (o que não está acontecendo atualmente)

Que experiências um futuro professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio deveria vivenciar em sua formação inicial para ter competência na organização e direção de situações de aprendizagem envolvendo demonstrações na escola básica?

Não sei como está o curso de graduação em Matemática, atualmente. Posso dizer somente com a experiência que tive. No meu curso de graduação, não tivemos vivência sobre situações reais que pudessem ser aplicadas. O curso foi totalmente teórico (e muito abstrato). Então, quando saí da faculdade, para poder me integrar no meio levei algum tempo. Talvez isso não tivesse acontecido se na faculdade tivéssemos vivenciado situações que mais tarde poderíamos aplicar aos nossos alunos do primeiro e segundo graus. Contudo não descarto a necessidade do professor de matemática, ter uma formação mais rígida, como se tinha, isto é, continua necessário que o seu conhecimento não seja somente superficial e aplicativo.

Responder apenas se você responder negativamente à primeira questão) Que experiências um futuro professor de Matemática deve vivenciar em sua formação inicial para que possa organizar e dirigir situações de aprendizagem visando o desenvolvimento do raciocínio dedutivo e indutivo dos alunos da escola básica? (Esta pergunta será feita somente àqueles professores que responderam negativamente à questão 1)

Qual foi o significado da demonstração em sua formação como professor de Matemática?

Ela foi essencial. Contudo acredito que deveria ter passado por algumas “fases”. O rigor matemático nem sempre é necessário no curso do primeiro e segundos graus. Deveríamos ter vistos “outras maneiras” de demonstrações, para atingir um público que não seja essencialmente “matemático”.

2) *O que um curso de Licenciatura em Matemática deve necessariamente oferecer para que seja possível formar um professor competente para os ensinos Fundamental e Médio?*

Acho que já respondi essa pergunta no item 2. O curso de Licenciatura não pode descartar o rigor, isto é, é necessário que seu ensino seja bem fundamentado e profundo. Contudo deve associá-lo as mudanças que ocorrem diariamente, possibilitando as pessoas que não vão somente se dedicar a matemática que possam incorporar um conhecimento que fará parte de sua vida.

3) *Apresentaremos a seguir alguns modos pelos quais alguns alunos de uma classe de 8ª série “demonstraram” que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Analise as produções desses alunos e explicite aspectos que podem indicar o grau de compreensão de cada um deles sobre a prova solicitada.*

A seguinte afirmação foi apresentada aos alunos de uma classe de 8ª série:

Quando se adicionam os ângulos internos de um triângulo, o resultado é sempre 180º.

Os alunos deveriam provar se esta afirmação é verdadeira ou falsa.

Como esse assunto já havia sido estudado anteriormente, todos os alunos responderam que a afirmação é verdadeira. Apresentamos a seguir as “provas” elaboradas por seis alunos.

Professor IIG

Em alguns países as atuais orientações curriculares de Matemática preconizam um trabalho com demonstrações em escolas de educação básica. Os PCN, por exemplo, indicam um início de trabalho com a prova já no Ensino Fundamental. O senhor concorda com estas orientações? Qual deveria ser o significado do trabalho com a demonstração nas aulas de Matemática na educação básica? Em síntese, eu gostaria de saber se você acha que esse trabalho é desejável e possível?

Eu não sabia que os PCN indicavam demonstrações. Indicam? Eu pensei que o forte dessa proposta era a questão da cidadania, os temas transversais e coisa e tal. Aplicações práticas da Matemática, o cotidiano. Já as demonstrações estão mais ligadas à matemática pura. De certa forma estou surpreso porque eu pensava que eles diziam exatamente o oposto. Mas eu não li os PCN de cabo a rabo. Só alguns trechos. Inclusive no médio eles nem falam nos conteúdos, não é? Fiz um curso dos PCN lá no SINPRO não falaram de demonstrações. O que ficou foi a questão da contextualização, o tratamento da informação, os temas transversais.

Os PCN indicam que o professor de Matemática deve procurar significados para o que vai ensinar e que esses significados não sejam apenas por meio de situações do cotidiano. Quanto às demonstrações, esses documentos realmente não as enfatizam, mas existem considerações de que o professor as inicie ainda no Ensino

Fundamental, claro que depois de um trabalho com verificações empíricas, experimentações, etc.

Sei. Não sabia que eles faziam menção. Mas eu concordo sim. Você sabe que eu faço algumas demonstrações em sala de aula nas classes do Ensino Médio. No fundamental eu também já fiz. Sei que muitos dos meus alunos não entendem todas as demonstrações trabalhadas, mas a maioria está convencida da importância das demonstrações na Matemática. Eu acho isso, pelo menos. No semestre passado, estive de licença médica por 45 dias mais ou menos e meu substituto que é um professor bastante tradicional, mas bom, não fez nenhuma demonstração. Alguns alunos reclamaram para mim que o professor dava a fórmula, dava alguns exemplos e depois exercícios e depois corrigia. Fiquei contente com a atitude deles. Acho que eles perceberam diferenças nos dois tipos de aula. Eu trabalho com meus alunos algumas demonstrações principalmente da trigonometria e geometria analítica. Você me perguntou se esse trabalho com demonstrações é desejável e possível. Acho que sim. Desejável ele é. A demonstração não é a essência da matemática? Já possível não sei, talvez apesar de muitos alunos não compreenderem. Por isso não posso exagerar. Mas penso que devem ser feitas apenas algumas demonstrações, as mais simples. Para mim o ideal é de que elas sejam propostas à turma como uma questão a ser pesquisada, um problema a ser resolvido. Somente depois dessa pesquisa é que o professor deveria apresentar a demonstração a sua classe. É dessa maneira que faço muitas vezes. Você sabe, já te disse por telefone, que eu trabalho também muito com Resolução de Problemas e sempre exijo que meus alunos justifiquem suas resoluções. Os alunos têm que validar suas resoluções.

Que experiências um futuro professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio deveria vivenciar em sua formação inicial para ter competência na organização e direção de situações de aprendizagem envolvendo argumentações e demonstrações na escola básica? Ou seja, para, como para um professor ensinar essa questão da argumentação e da prova o que você acha que na formação dele, o professor deveria ter?

Essa é uma questão complicada. Você deve conhecer os professores de Matemática que estão saindo hoje. A grande maioria não tem a mínima condição. A mínima entendeu? Muitos dos professores formados hoje não sabem nada de demonstrações. Para o professor poder ensinar uma demonstração ele tem que saber muito o conteúdo. Ele tem que saber usar o teorema, aquela propriedade, enfim saber aplicar. Ele precisa saber um pouco da sua história. Caso contrário ele pode passar para a classe uma demonstração formal, já acabada que o aluno teria que memorizar para reproduzir na prova. Ele tem que consultar os bons livros didáticos, acho que tem paradidáticos excelentes. Pena que não tenha de todos os assuntos. Esses livros trazem informações históricas, indicam experimentações e mostram aplicações. Tudo fica bem concreto. Depois o professor complementaria com a demonstração quando fosse o caso. Acho que não pode haver demonstração na sala de aula se não houver um pouco desse caminho. Eu faço isso.

Você está falando de demonstração na educação básica ou na licenciatura?

Acho que para o professor ensinar dessa forma ele deve ter visto ele mesmo esse caminho. Se ele não teve isso no 1º grau ou no colegial ele deverá ter na faculdade. Ou seja, na faculdade não é só estudar os teoremas do cálculo, da álgebra, etc, etc, mas também os conteúdos do 1º e 2º graus. Ele precisa estudar na licenciatura Geometria Plana, demonstrar os teoremas, conhecer a axiomática da geometria euclidiana. Saber explicar e justificar as regras de divisibilidade que ele vai ensinar. Não estou dizendo que a faculdade de matemática deve refazer todo o Ensino

Fundamental e Médio, mas que retome e aprofunde alguns dos conteúdos mais essenciais. Eu acho isso mesmo que todos os alunos do curso de matemática tivessem tido um bom colegial e cursinho. Eles precisam aprofundar alguns conteúdos que já foram vistos, estudar novas maneiras de ensinar esses conteúdos e conhecer um pouco da história da Matemática. Se ele tiver isso no curso ele poderá ensinar de uma forma mais interessante, inclusive as demonstrações. E quanto às demonstrações deveria ser muito discutido o caminho a seguir. O futuro professor deve saber que a simples reprodução de um teorema na sala de aula não vai garantir nada. Ele precisa conhecer alguns caminhos até se chegar à demonstração formal. Acho que um caminho poderia ser esse: compreender o significado do teorema, saber aplicar esse teorema em problemas, pesquisar a história e depois demonstrá-lo. E algumas demonstrações nem precisariam ser feitas.

Qual foi o significado da demonstração em sua formação como professor de Matemática?

Se eu considerar a minha formação apenas o curso de licenciatura acho que ela não foi muito boa e nem muito importante. Não eram todos os professores que demonstravam. E como nas provas eram exigidas somente as demonstrações vistas em classe, eu simplesmente decorava. Em outras disciplinas eu nem tive demonstrações. Lógico que eu achava importante. Eu achava demonstração uma coisa muito bonita da matemática. Esteticamente bonita. Ela é necessária para o matemático. Mas achava que não era para mim. Eu me perguntava, e alguns dos meus alunos ainda perguntam: qual era a graça, se tudo aquilo já estava feito? Quando eu quisesse ver uma demonstração bastava procurar nos livros. Eu não via a menor graça o professor simplesmente transcrever na lousa o que estava escrito no livro. Mas foi dando aula de desenho geométrico em 1978, quando comecei a lecionar, é que despertei para a demonstração. O programa era aquela coisa toda: transporte de segmentos, de ângulos, ponto médio de um segmento, encontrar o centro de uma circunferência, divisão da circunferência, baricentro, concordância de arcos e segmentos, etc, etc. Eu ensinava apenas os procedimentos: com a ponta seca do compasso em uma das extremidades do segmento, traça-se um arco de raio maior que a metade do segmento dado, com a ponta seca no outro, e pá pá pá ..... Lógico que me sentia insatisfeito com esse trabalho e aí comecei a justificar e depois a demonstrar um teorema ou outro da geometria. Alguns alunos se interessaram por esse trabalho. Mas essa disciplina logo acabou. Mas continuei fazendo esse trabalho quando dei aula de matemática na 7ª série e na 8ª série.Por isso acho que a formação do professor de matemática começa antes da faculdade e continua depois dela. Isso se você tiver sorte de entrar numa escola que tenha um bom professor de matemática, essa troca é necessária. Um professor precisa até saber fazer as demonstrações dos teoremas, mesmo que ele não passe isso aos alunos, ficando somente com a experimentação, o que é já uma grande coisa. Vou te falar uma coisa: eu sou muito respeitado por meus colegas da rede pública por saber as demonstrações. Eles pedem auxílio para mim muitas vezes: saber o porque disso, o porque daquilo. Não fizeram uma boa faculdade. Acho que para formar um bom professor é necessário que o curso tenha demonstrações formais. Não só, mas tenha. Elas dão uma certa seriedade ao curso. Eu tive sorte, pois quase sempre tive bons colegas, até na escola estadual. Desculpe, mas a maioria dos professores da rede pública, em geral os mais novos na profissão, tem uma atitude lamentável. Em geral, não tem boa formação, não querem mudar e nem aprender; dizem aprender para quê, se eles não podem mais reprovar? São eles que deveriam ser reprovados. Mas eu quero ressaltar que existem exceções.

Você já respondeu de certa forma minha próxima questão. O que um curso de Licenciatura em Matemática deve necessariamente oferecer para que seja possível formar um professor competente para os ensinos Fundamental e Médio?

É o que estou falando. Acho que os conteúdos do Ensino Médio deveriam fazer parte do curso de licenciatura. Mesmo para aqueles que tiveram um bom curso médio. Claro que a dosagem poderia variar de curso para curso. Vou citar o meu caso. Fiz um bom cursinho porque queria entrar na politécnica. Entrei na Poli, mas eu resolvi fazer matemática porque eu poderia dar aulas antes de me formar e ganhar algum. Foi o que fiz. Aqui na periferia de São Paulo, alunos do primeiro ano do curso pegavam aulas em caráter excepcional. Gostei tanto de dar aula que a engenharia dançou. Mesmo eu não estava preparado para dar aula de alguns assuntos, mesmo em relação ao conteúdo. Vou dar um exemplo: trigonometria. Tive muita dificuldade para ensinar trigonometria no curso colegial. Claro que não só do ponto de vista pedagógico, mas também do conteúdo. Eu penso o seguinte: se a gente conhece bem um assunto, suas relações com os outros assuntos e até um pouco da história dele acho que isso vai facilitar o ensino. Eu acho que não explicava direito o que era o radiano, meus alunos não entendiam porque eu mesmo não sabia direito o que era o ciclo trigonométrico, entender, por exemplo, que existe uma função que faz corresponder cada ponto da reta numérica a apenas um ponto do ciclo e que o raio do círculo deveria ser a igual a unidade da reta. E que a cada ponto do ciclo eu poderia ter o seno, o cosseno. Os cursos de licenciatura devem ter em mente que o seu principal objetivo é formar um professor de Matemática que vai lecionar no 1º e no 2º graus. Mas é claro que se deve ir além. Acho que na licenciatura deve ter cálculo diferencial e integral, geometria analítica por meio de vetores, álgebra, um pouco de álgebra linear. Afinal um professor de Matemática precisa saber Matemática. Então, o professor precisa dominar o conteúdo que vai lecionar e além dele, saber seus resultados, deduzir as fórmulas principais de cada assunto, conhecer alguns problemas históricos e conhecer as dificuldades que os alunos têm sobre cada assunto, usar alguns softwares, o cabri para a geometria. Para a parte de funções tem o Derive, mas eu não sei usar. Ah, o que eu estava falando mesmo? Sim a formação do professor de Matemática. As teorias que a gente aprendeu nas disciplinas pedagógicas pouco ajudam Agora, do ponto de vista pedagógico, acho que a maioria dos professores de matemática tem como modelo um ou outro professor de Matemática do curso médio ou da faculdade. Eu tive como modelo de professor um antigo professor meu, o Roberto, do primeiro e do segundo colegial e procurei segui-lo no início de minha carreira. Aprendi muito com ele, cativava os alunos, era disponível e era exigente. Ainda hoje ele exerce alguma influência sobre mim. Acho que é isso. Não sei se te ajudei, porque eu tenho mais dúvidas do que certezas a respeito de um curso bom de licenciatura. Ora eu falo do curso que gostaria de ter tido, ora eu falo de um curso para atender uma boa parte das pessoas que querem ser professores hoje, pessoas sem bagagem ou pessoas que sem vocação para o magistério. Estão nessa porque não arrumaram emprego nas áreas que se formaram: administração, economia. Aí meu, não adianta a secretaria dar curso de formação continuada.

Parte II da entrevista

Vou apresentar a você algumas demonstrações feitas por alguns alunos: eles "demonstraram" que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Vamos supor que todos eles estivessem em uma classe de 8ª série, por exemplo. Analise as produções desses alunos e explicite aspectos que podem indicar o grau de compreensão de cada um deles sobre a prova solicitada. Depois vou pedir que você dê uma nota de zero a dez para cada produção.

Você quer que eu analise pela ordem?

Pode ser.

Tenho que dizer se está certo ou errado?

Não é necessário e nem é esse o objetivo. Gostaria que você analisasse essas provas do ponto de vista pedagógico e não do matemático. Imagine que eles são seus alunos.

Então eu não ensinei esse conteúdo ainda?

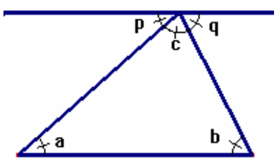
Vamos imaginar que não. Vamos supor que você não saiba ainda se eles já viram ou não esse conteúdo na série anterior. Mas todos eles sabem que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180.

Está bem. Vou começar pela Ana.

Ana

Resposta de Ana: Eu recorto os ângulos e os coloco juntos:  Eu obtenho um ângulo de 180º pois os ângulos formam uma linha reta. Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece. Logo, a firmação é verdadeira.	É interessante a maneira que ela escolheu para provar. Ela também pensou para outros tipos de triângulo, o eqüilátero e isósceles, além do escaleno que é o que ela apresentou nessa figura. Acho que essa aluna está pronta para fazer ou entender uma demonstração mais formalizada. Posso dar a nota no final depois que eu comparar todos?

Tudo bem.
Agora vou ver a 2ª, a da Bia

Resposta de Bia:  p = a e b = q p + c + q = 180º. Logo, a + b + c = 180º	Essa aluna não tira dez, não porque escreveu tese, hipótese mas ela esqueceu de dizer que a reta traçada passando por um dos vértices era paralela ao lado oposto desse triângulo. Não disse também o porque os ângulos assinalados eram congruentes. Se não fossem esses detalhes, a demonstração estaria perfeita.

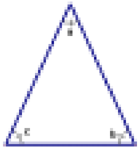
Mas você não acha que ela demonstrou? Você não acha que ela teve um grande mérito, pois ela generalizou?

Acho sim, mas ela precisa aprender a fazer a coisa 100% correta. Ela teve um grande mérito, porque ela não reproduziu a demonstração. Mas nota 10 ela não pode tirar, porque ela não disse coisas essenciais.

Cláudia

Essa garota já deve ter visto demonstrações antes. Ela parece que adotou um esquema, afirmativas e justificativas. Mas ela errou demais. Veja, ela já parte que a soma é dos ângulos é 180°. Além disso ela particulariza para um triângulo isósceles.
Depois, eu não entendi o que ela fez.
Parece que ela particularizou ainda mais o triângulo atribuindo um valor para o ângulo a. Complicado.

I. Resposta de Cláudia:



Afirmativas	Justificativas
a= 180º - 2c	Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
a = 50º	180º - 130º
b = 65º	180º- (a + c)
c = b	Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
	Logo, a + b + c = 180º

A Dora... Eu não entendi direito. Vou deixar para o final.

Vamos ver a 5ª demonstração: a do Eduardo.

Ótimo. Ele mediu os ângulos de um, dois ,..., cinco triângulos. A gente pode notar que ele procurou pegar diversos tipos de triângulos. Acho que ele não pegou os casos particulares: nem isósceles, nem eqüilátero. Mas mediu triângulo retângulo,

Obtusângulo, acutângulo.

Mas espera, será que ele mediu os ângulos, ou ele partiu do resultado e inventou as medidas? Não sei.
Em todo caso, ele teve a preocupação de apresentar uma tabela com diversos tipos de triângulos. Alguma noção ele já tem. Mas não demonstrou e isso é um fato!

I. Resposta de Eduardo:
Eu medi cuidadosamente os ângulos de diversos tipos de triângulos e fiz uma tabela.

A	B	C	total
110º	34º	36º	180º
95º	40º	45º	180º
35º	72º	73º	180º
90º	59º	31º	180º
13º	19º	148º	180º

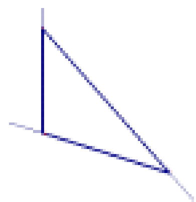
Em todos eles a soma foi 180º. Logo a afirmação é correta.

Agora tem essas duas: a do Fernando e a da Dora.

Achei muito criativa a saída do Fernando. Ele trabalhou com a mudança de direção, trabalhou intuitivamente com a noção de vetor. Muito legal. Depois fez 3 x 180º = 540º e descontou 360º, resultando 180°. Muito criativa essa maneira, mas não podemos dizer que essa seja uma demonstração em um sentido mais restrito. Não podemos, não é? Se ele fez mesmo sozinho essa demonstração esse aluno vai longe. Ele deve gostar de resolver problemas.

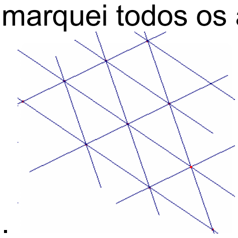
I. Resposta de Fernando:

Se eu caminhar toda a volta sobre a linha do triângulo, termino olhando o caminho por onde comecei. Eu girei 360º.



Cada ângulo externo quando adicionado ao ângulo interno deve dar 180º porque eles formam uma reta. Isto faz um total de 540º.
540º - 360º = 180º.
Logo, a afirmação é verdadeira.

Agora a última, a da Dora.

<table>
<tr>
<td>Resposta de Dora:
Eu desenhei uma rede de triângulos e marquei todos os ângulos iguais

.
Eu sei que os ângulos em volta de um ponto somam 360º. Logo a afirmação é verdadeira</td>
<td>Vamos ver: ela desenhou triângulos, todos eles congruentes, não é? Ela tem um feixe de retas paralelas e mais um outro. As retas de cada feixe mantêm as distâncias entre si. Ela usou congruência dos ângulos, ângulos alternos internos, correspondentes, opostos pelo vértice ... Interessante, mas não sei. Porque não partiu logo para apenas um triângulo e uma reta paralela a um desses lados, como a da, ..., Bia? Ela também não informou o paralelismo das retas.</td>
</tr>
</table>

E as notas?

Acho essa nota uma coisa bem relativa. Depende do momento em que esse trabalho foi proposto. Mas como essa demonstração não havia sido feito antes, claro que as notas serão bem mais altas. Vou começar pela melhor: a da Bia, que quase demonstrou formalmente. Como faltaram alguns detalhes vou dar nota 8. Vou dar 6 para a criatividade do Fernando e 5 para a Dora, pois no fundo ela fez quase que a mesma coisa que a Bia, mas complicou. O trabalho de Ana e Eduardo foi empírico e eles generalizaram, fizeram uma indução, mas tiveram pelo menos a preocupação de fazer para diversos tipos de triângulos. Por isso vou dar 4 também para esses dois. Eles foram criativos. Já a nota da Cláudia deveria ser zero, mas ela mostrou que tem algumas preocupações, como justificar cada passagem. Nota 2 para ela. Se imaginarmos que a tarefa pedida era uma demonstração, até que fui muito bonzinho em dar essas notas. Muito mesmo. Essa questão de dar nota alta para uma tarefa que não está correta pode ser interessante, porque estimula o aluno. Por outro lado, o aluno, poderá deixar de prestar atenção em aspectos importantes. Veja o caso da Bia.

Entrevistador: agora, o que eu queria também, assim é o seguinte: você já fez isto, fez uma análise de cada um, deu uma nota. Mas qual comentário você faria a cada aluno?

Acho que conversaria com cada aluno e diria os aspectos errados de cada demonstração. Mas antes eu teria uma conversa geral com a classe. Discutiria o que significa demonstrar em Matemática. Discutiria o significado das experimentações empíricas na Matemática. Falaria que procedimentos tais como Eduardo usou são excelentes para levantar conjecturas. Ele foi criativo mas seus procedimentos não provam. A da Ana também. Apresentaria a demonstração da Bia e apontaria as informações que estavam faltando. Compararia a prova da Dora com a da Bia. Talvez fosse interessante propor antes à classe que analisasse todas essas demonstrações. A demonstração da Cláudia seria um interessante contra-exemplo, pois ela partiu do resultado. Claro que os nomes dos autores não seriam divulgados.

Entrevistador: a próxima questão você já respondeu: quais seriam comentários que você faria para classe toda? Há algo que você gostaria de comentar?

Não, acho que já falei tudo.

Parte III da entrevista

Vou apresentar a você algumas demonstrações feitas por alguns alunos: eles "demonstraram" que a soma de dois números pares é um número par. Analise as produções desses alunos e explicite aspectos que podem indicar o grau de compreensão de cada um deles sobre a prova solicitada. Vamos supor que todos eles estivessem em uma classe de 7ª série, por exemplo. Depois vou pedir que você dê uma nota de zero a dez para cada produção. Vou dar um tempo para você pensar. Tudo bem?

Vou pela ordem. Depois eu volto se precisar.

Resposta de André: x é um número inteiro qualquer. y é um número inteiro qualquer. 2x e 2y são dois números pares. $2x + 2y = 2(x + y)$. Portanto, a soma de dois números pares é sempre par.
Nada a declarar, não é. Tudo bem. O cara demonstrou que tem domínio da linguagem, usou linguagem algébrica e tudo, acho que ele já tinha aprendido, não é? Só faltou uma coisinha de nada ele explicitar mais o porquê de $2(x + y)$ ser par. Mas isso não é nada, não é? Só posso dar nota 10.

Nessa série você já prefere ir dando nota.?
Acho que sim. Se eu resolver modificar nós voltamos.

Resposta de Bernardo:

2 + 2 = 4	4 + 2 = 6
6 + 2 = 8	2 + 4 = 6
4 + 4 = 8	6 + 4 = 10
2 + 6 = 8	4 + 6 = 10
6 + 6 = 12	2 + 8 = 10
4 + 8 = 12	6 + 8 = 14

A soma de dois números pares é sempre um número par.

Acho que ele fez uma experimentação para os todos os pares menores que 10 e aí generalizou. Ele fez uma indução aqui, não é? Mas acho que nesse caso ele pode ter tido um pouco de razão por causa do Sistema de Numeração Decimal: se o algarismo das unidades for par o número é par. Logo bastava ele verificar todos os casos da casa das unidades. Ele pode ter pensado nisso. Eu o chamaria para descobrir e em caso positivo ele deveria ter justificado esse procedimento. Aí, nesse caso eu daria 5 para ele, em caso contrário eu daria 2.

Resposta de Ciro:

Números pares são números divisíveis por 2. Quando você adiciona números com um mesmo fator comum, 2 nesse caso, a soma terá o mesmo fator comum; portanto a soma também é divisível por 2. Assim, a afirmação é verdadeira.

Análise da entrevistado:

Muito bom. Muito mesmo. Mas a nota dele seria 6, porque ele deveria ter explicado melhor essa questão do fator comum. Além disso, ele não usou linguagem algébrica. Seria preciso fazer um trabalho com esse aluno a respeito da linguagem, mas raciocínio para a demonstrar ele tem. Muito bom esse aluno, mas ele precisa avançar a respeito da linguagem algébrica. Mas vou manter o 6.

4. Resposta de Dario:

Sejam x e y dois números inteiros quaisquer.

$$x + y = z$$

$$z - x = y$$

$$z - y = x$$

$$z + z - (x + y) = x + y = 2z.$$

Portanto, a afirmação é correta.

Análise da entrevistado:

Puxa, o que ele quis fazer? Veja ele chegou a uma conclusão absurda: x + y = z e x + y = 2z! ou seja, z é igual a 2z! Para ele, Mas ele não percebeu isso. Claro, ele partiu de uma mesma relação escrita de três maneiras diferentes. Nada a ver. Acho que para ele essa demonstração deveria ter algumas umas sentenças matemáticas. E foi o que ele fez. A nota seria zero, mas acho que vou dar, deixa ver, 3. Ele sabe que 2z é sempre par se z for um inteiro. Por isso, ele fica com 4. Afinal, ele usou a álgebra, ele já sabe que precisa utilizar linguagem matemática para demonstrar.

Resposta de Eunice:

♦ ♦ ♦ ♦ ... ♦ ♦ ♦ ♦	+	♦ ♦ ♦ ... ♦ ♦ ♦	=	♦ ♦ ♦ ♦ ♦ ... ♦ ♦ ♦ ♦ ♦

Portanto, a afirmação é correta.

Análise da entrevistado:

Não consegui entender esses balõezinhos. Acho que é para escrever um número qualquer. Essas reticências significam qualquer. Ah, um número par qualquer. A garantia que esses balõezinhos representam um par é que eles estão em duas linhas e como há correspondência entre os balõezinhos... Bem se for isso que ela pensou então ela demonstrou, não é? Mas será que ela pensou nisso mesmo? Ela fez sozinha? Muito criativo e inteligente. Por isso, é que digo que fica difícil dar uma nota sem conversar com o aluno. Mas, independente disso eu daria apenas 3 para ela, porque ela não explicou e não escreveu numa linguagem adequada. Ela precisa aprender que nós temos que comunicar o que fazemos. Meus alunos sempre escrevem por extenso, a matéria que estou ensinando, as propriedades, etc.

Resposta de Flávia:

Vamos supor dois números pares:

$$x = 27418$$

$$y = 956136$$

então , $x + y = 983554$ que é par.
Portanto, a afirmação é correta.

Análise da entrevistado:

Ela partiu de um exemplo e generalizou para todos os pares. Provavelmente ela pensou que pegando aleatoriamente dois números "grandes" e verificasse que essa soma é par ela estaria provando. Nota 3.

Resposta de Gina:

Números pares terminam sempre em um desses dígitos: 0, 2, 4, 6, ou 8. Se eu adiciono dois desses números a soma termina também em 0, 2, 4, 6, ou 8.
Portanto, a afirmação é correta.

Análise da entrevistado:

Ela pensou corretamente. Mas não provou do ponto de vista da matemática. Ela pensou como o Bernardo, mas de uma forma mais geral. E soube argumentar melhor. Por isso sua nota seria 5.

Resposta de Helena:

Sejam p e q dois números pares quaisquer. Então

Então, existe um número inteiro **k** tal que p = 2k.

Existe também um **m** inteiro tal que q = 2m.

Portanto p + q = 2k + 2m = 2 (k + m) é par
Logo, a afirmação é correta.

Análise da entrevistado:

Utilizou linguagem matemática. Perfeita. Se a demonstração do André foi 10, esse também tem que ser não é?

Resposta de Ivo:

Vamos pegar dois números pares como 10 e 26.

Então

$$\begin{array}{cccccc} 10 & = & 5 & + & 5 \\ \underline{26} & \underline{=} & \underline{13} & \underline{+} & \underline{13} \\ 36 & = & 18 & + & 18 \end{array}$$

Como isso sempre é possível, a afirmação é correta.

Análise da entrevistado:

Se a gente analisar bem essa prova é bastante parecida com a da Eunice. Só que essa está particularizada para dois números, enquanto que a da Eunice ela usou balõezinhos e pontinhos para generalizar. O trabalho dela é bem melhor que este. Quanto eu dei mesmo para ela? três? Acho que vou mudar. Dou 4 para ela e 3 para o Ivo.

Você, de certa forma já comentou as observações que faria a cada aluno. Há algo que você deseja acrescentar? Como você daria prosseguimento a esse trabalho?

Como em Geometria, acho que eu devia comentar algumas das respostas, logo após pedir para eles fazerem os comentários. Acho esse trabalho com o coletivo essencial. O que eu devo fazer para dar continuidade está claro: trabalhar a linguagem algébrica com esses alunos, isto é generalizar a escrita de um número inteiro par, a escrita genérica de um ímpar, generalizar uma seqüência etc. Mas eu queria falar uma coisa que me incomodou ao dar as notas: pode ser que eu tenha dado as notas mais baixas justamente para os mais criativos, porque eu acabei privilegiando os que fizeram a tarefa, que era demonstrar. Mas pode ser que justamente esses que fizeram já podiam ter visto as demonstrações antes. Mas a tarefa era demonstrar, não era? Então é isso.

ANEXO IV

Unidades de significado: Provas na educação básica

Grupo I

Unidades de significado dos depoimentos dos professores do grupo I (formadores de professores e pesquisadores em Educação Matemática) em relação a questão do desenvolvimento de provas na Educação Básica.

Professor IA

IA1	No contexto que você está examinando isso aí você não está pensando em demonstração no sentido formal, demonstração formal. Certamente, com esse sentido, aí cabe discutir se isso é coisa de criança, se não é coisa de criança, onde começa e tudo mais.
IA2	Mas quando a gente alarga o significado da idéia de demonstração aí eu acho que isso é tudo. Antes de chegar na escola você tem que argumentar. E o sentido da demonstração é um sentido mais largo, demonstrar é convencer o outro, é argumentar e convencer.
IA3	Eu acho que o tempo todo demonstrar é convencer, o canal de comunicação que se estabelece entre os dois sujeitos é que vai determinar o tipo de argumentação, o que convence e o que não convence. Se eu estou conversando, eu professor de Matemática com outro professor de Matemática, então demonstrar uma coisa tem um significado, se eu estou conversando com meu aluno demonstrar tem outro significado, se eu estou conversando com o pai de meu aluno demonstrar tem outro significado.
IA4	Demonstrar é sempre argumentar visando a convencer. Convencer no sentido bem da palavra mesmo, quer dizer vencer junto com, chegar a uma meta junto com outro e aí a língua é um instrumento básico por excelência, a língua que a gente fala, a língua materna, no sentido da primeira língua que a gente fala e a matemática, a lógica no sentido da lógica formal da matemática, mas primariamente a língua e junto com ela, a partir de um certo ponto, a matemática.
IA5	A língua e Matemática são instrumentos de argumentação nesse sentido de convencimento.

IA6	A razão que é o meio para esse convencimento, a racionalidade, a idéia de razão, essa idéia também pode estar em discussão, quando se fala assim do pós-modernismo, se fala de uma crise da razão, e então o pós-modernismo é associado a esse relativismo e esse aparente elogio da irracionalidade de não haver lógica nas coisas de não haver projeto coletivo, mas na verdade, o que a gente pode estar vivendo é uma mudança no significado da razão.
IA7	Tem um autor fundamental, um autor de quem se pode discordar completamente, mas que eu acho que não para fazer um trabalho como o seu sem entrar nele, ignorando, que é Habermas, com a idéia de razão comunicativa, com a idéia de ação comunicativa, de razão comunicativa, com a ética do discurso.
IA8	Enquanto você mantém a possibilidade de argumentar você mantém essa expectativa de vamos chegar a um acordo.
IA9	O acordo por meio da palavra, mas não é ninguém enganando ninguém, é convencendo, é vencendo junto, é convencendo, e convencendo argumentando, demonstrando, argumentando.
IA10	Você está pegando uma faceta dele que isso na formação do professor, mas é um tema assim para a vida, para todo mundo, quer dizer o tempo todo o que mantém a gente com esperança é a expectativa do acordo por meio da palavra.
IA11	Agora há contextos e contextos quer dizer se você vai examinar isso na sala de aula, então há um canal de comunicação professor aluno e você tem que ver como isso se realiza aí mas isso também vai acontecer no conselho de classe, isso também vai acontecer nas reuniões da escola, para a gestão da escola, na participação, com os pais, em todos vai haver a necessidade de argumentar necessidade de convencer.
IA12	O interessante é que há um tema que parece não ter num primeiro momento haver com o teu mas tem tudo a ver com o teu, na verdade é a sombra do teu, é o espelho do teu, que é a violência. Então, a violência sempre tem sempre o significado da falência na palavra. Eu descreio da argumentação eu descreio da possibilidade de convencer, de vencer junto com o outro então eu vou vencer sozinho, eu vou fazer, bater, acontecer e aí vem a força.
IA13	E a demonstração tem sempre esse sentido de chegar num acordo.
IA14	Agora na matemática há uma expectativa de acordo universal, de consenso universal descontextuado, sem contexto, uma prova formal seria uma prova que eu convenceria qualquer pessoa em qualquer lugar do mundo, independente do contexto. Eu demonstro o teorema de Pitágoras aqui na China, no Japão onde for quem ler essa demonstração tem que se convencer sem contexto, formal.
IA15	Agora isso é um aspecto da demonstração e é um aspecto assim absolutamente particular, é um caso particular porque, por exemplo, o pensamento selvagem, o pensamento do índio e do esquimó não se desliga do contexto. Se você vai a um esquimó e dizer dois ursos vermelhos mais três ursos vermelhos dá quanto? Ele não sai do contexto dele, ele sabe que é urso e sabe que não tem urso vermelho, como é que se vai somar dois ursos vermelhos com três ursos vermelhos?
IA16	A idéia matemática de fazer provas que independem completamente do contexto essa pretensão de universalidade é uma maneira de examinar o problema mas na vida no dia a dia ninguém, por exemplo, aprende a raciocinar sem contexto.
IA17	O problema de ter contexto não é para você se amarrar no contexto você aprende no contexto, quanto mais vc sabe mais você é capaz de abstrair, quer dizer sair do contexto e contextuar em outro lugar e
IA18	Então a pretensão da demonstração formal que é a de fazer tudo independente do contexto pensando só na forma é um exercício é um tipo de exercício, mas a gente no dia a dia, lendo um jornal, lendo uma revista a gente argumenta e demonstra e tudo, viajando entre contextos, nos contextos.

IA19	Amarrar qualquer coisa a um determinado contexto é mortal para a prova, você não está provando nada você está verificando ali, mas referir-se a um contexto, entender a situação nem contexto demonstrar de um modo tal que seja possível baixar em múltiplos contextos é isso que a gente busca, não é?

Professor IB

IB1	Eu concordo sim com provas, embora dependa do que se entende por demonstração. Na Inglaterra, por exemplo, nós falamos em prova em um sentido mais largo que prova formal. Não sei se você entende por demonstração apenas tipo prova formal. Mas prova nas escolas, eu acho que você tem que introduzir o mais cedo possível.
IB2	Quando você começa a aprender matemática eu acho que alguns princípios da argumentação matemática têm que ser introduzidos. Obviamente, como os níveis vão ser muito diferentes e os tipos de argumentos também vão ser muito diferentes.
IB3	Mas eu penso que, pelo menos na Inglaterra, nós temos uma tendência, que para introduzir prova como experiência significativa, é necessário começar com argumentos que são puramente empíricos. Nós temos uma tradição no currículo que você deve, para começar, justificar seus argumentos dando evidências empíricas.
IB4	Eu acho que é um ponto muito importante, eu não queria e nem posso tirar a importância dos dados empíricos, mas somente no fim, mais ou menos quando os alunos têm 14 ou 15 anos, é esperado que eles distingam os argumentos baseados na evidência dos argumentos baseados em justificativas matemáticas. Eu acho isso um pouco tarde.
IB5	Você poderia introduzir, com problemas apropriados, muito mais cedo, essa distinção entre argumentos baseados na evidência, que são importantes, e os argumentos que são baseados nas justificativas matemáticas, isto é, nas estruturas matemáticas, que também são importantes. A verdade é que você quer que os alunos se engajem nas duas coisas, e não privilegiar apenas uma.
IB6	Não se pode imaginar que em dado momento vá ocorrer uma passagem espontânea de argumentos baseados em evidências empíricas para argumentos baseados nas estruturas matemáticas porque elas são muito diferentes. Você não poderia, não deveria, no currículo tentar separar as duas completamente, porque se são separadas, a prova realmente não vai ser muito significativa.
IB7	Acho que devemos evitar mostrar a estrutura matemática no início. Nós achamos que os alunos não vão conseguir entender e eles não vão mesmo se nós reservarmos a eles problemas mais complexos e introduzirmos apenas nesse momento, a necessidade de provas matemáticas.
IB8	Eu acho que talvez possa facilitar se nós começarmos no momento em que os alunos mostrarem uma tendência para o uso de dedução nos argumentos. Quanto mais cedo pudermos capturar esse momento melhor será para que eles possam escrever no futuro provas formais. Eu concordo que se deve procurar introduzir, o mais cedo que possível, as provas matemáticas; mas o perigo disso é você decidir então vamos introduzir primeiramente apenas as evidências empíricas.
IB9	O currículo mudou muito na Inglaterra. Eles passaram a introduzir o que chamamos de investigações. Nessas investigações eram propostas situações, no início bem acessíveis, bem simples, em que o aluno teria que manipular, procurar exemplos, fazer conjecturas, apresentar resultados em tabelas e tentar justificar matematicamente. Mas o que aconteceu? Os alunos resolviam, fazendo conjecturas, faziam tabelas bonitinhas, mas não havia um movimento espontâneo para chegar na estrutura do problema, na prova formal.

IB10	Isto a gente não pode pensar que acontece naturalmente, o uso de evidências sim. Mas tem que ter atividades cujo foco de atenção seja esse aspecto mais formal. Deve-se trabalhar esses dois aspectos, o empírico e o formal, em conjunto.
IB11	Veja, que não quero falar em idades, é sempre muito perigoso, mas crianças bem jovens, segundo nossa pesquisa, entendiam algumas coisas, por exemplo, sobre números pares e ímpares. Eles entendem, mais ou menos de forma empírica, que números que terminam em 0, 2, 4, 6, e 8 são pares e os outros são ímpares, que a soma de um par com um ímpar é um número ímpar, entendem que se dividir por 2 e se der inteiro é par, caso contrário ímpar. Essas coisas as crianças, mesmo as bem jovens, podem entender. Então eles já têm algumas noções sobre a estrutura desses números. Então, eu penso que se você explorar com eles essa estrutura, eles poderão ter alguma inspiração e entender que quando se faz um argumento é necessário olhar para essa estrutura.
IB12	Claro que, essa estrutura vai ser vista num contexto de exemplos empíricos. Você tem que explorar. Veja, alguém representa um número par como essa figura[1], ele já tem uma noção de estrutura, pois pode ser dividido em dois..... É diferente de representar um par por 2n. Mas podemos imaginar esse exemplo, como um que pode ser visto genericamente. É exatamente isso que nós temos que explorar. Eu não sei se fazendo assim, você está fazendo o empírico antes. Acho que você está fazendo ao mesmo tempo: o empírico e uma certa dose de formalidade.
IB13	Eu estou argumentando para introduzir uma certa formalidade na matemática, mas sabendo que a formalidade não tem que ser uma formalidade que nós reconhecemos hoje como uma matemática formal no fim do ensino médio.
IB14	Claro que esse é um exemplo específico (o da soma de dois pares) e sei que não é fácil encontrar outros. Nós temos que investigar novos contextos para a formalização, que possam ser acessíveis.
IB15	Nós temos que pensar quais tipos de problema que realisticamente podemos pensar em propor aos alunos do 2º e 3º ciclos. Eu acredito que algumas coisas podem ser feitas nesse sentido – o de caminhar para uma formalização. Esse é o grande desafio. Nós não temos ainda um banco de atividades que possam dar uma entrada mais leve para as provas
IB16	Nós sabemos que as provas são muitas complexas, ninguém vai negar isso, eu acho, apesar de umas serem bem mais fáceis que outras, claro. A noção de começar com alguns dados para chegar a um outro conjunto de fatos e colocar todos os passos entre eles, não é uma coisa que as pessoas chegam facilmente. Mas o problema é que ficamos evitando trabalho com provas e em dado momento que teremos que trabalhar com provas em situações bem mais complexas.
IB17	Então eu acho também importante no trabalho com provas que proponhamos situações com algum elemento de surpresa e não apenas situações que podem ser óbvias inclusive visualmente.
IB18	E muitas vezes começamos o trabalho com provas, complexas, mas provando coisas que parecem óbvias. Esse também é um outro problema. Nós apenas vamos provar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º quando os alunos estão completamente convencidos que esse fato é verdadeiro. Nós não passamos de uma fase que nós construímos essa conjectura para uma que poderia realmente demonstrar esse fato.

1 ♦ ♦ ♦ ♦
...
♦ ♦ ♦ ♦

IB19	Eu entendo que a argumentação pode ser um obstáculo para a aprendizagem da prova porque realmente tem um pouco a ver com a coisa que eu estava falando: se você consegue vinte exemplos de uma coisa você está convencido da veracidade dela e como nos outros contextos na vida esse número de exemplos seria, em geral, suficiente para se chegar na prova, mas isso não basta para a Matemática. Os alunos depois desses exemplos, não se interessam pela prova formal, pois para elas já está provado. Nesse sentido eu concordo um pouco com a primeira parte de sua questão
IB20	Alguns pesquisadores hoje falam dessa ruptura, que não é original, pois essa afirmação decorre muito do trabalho de Balacheff, porém eu não concordo com a palavra obstáculo.
IB21	Não concordo de que não poderia haver uma passagem mais leve, mais suave entre argumentação e prova, pois há muitos tipos de argumentação. Depende do tipo de argumentação. Se você tem uma argumentação baseado em dados puramente empíricos é uma coisa se você tem uma argumentação de outro tipo é outra.
IB22	Não sabemos como ensinar prova, por exemplo. Ninguém sabe. É muito fácil dizermos que a culpa do fato que as nossas crianças e adolescentes não estão aprendendo muito matemática é do professor. Aliás, é uma hipótese, uma boa hipótese até. Mas nós, educadores matemáticos estamos criticando os professores e não temos certeza, apesar das pesquisas e pesquisas, pesquisamos já há mais de trinta anos. Nós educadores temos que mostrar possibilidades.
IB23	Você não pode negligenciar a prova nem nos cursos de licenciatura e nem nos currículos da escola.

Professor IC

IC1	Eu acho que é importante a abordagem da prova nesses níveis de ensino. Mas acho importante evitar exageros. Não deve haver exageros como havia quando eu cursei o ginasial.
IC2	Os professores vindos da USP saíam embebidos daquela mentalidade e evidentemente cometiam exageros. Assim, dessa forma, claro que eu não recomendaria demonstrações
IC3	Demonstrações esparsas, sem alguma seqüência, também podem não ter significado nenhum, demonstra-se uma coisa aqui, fica-se trabalhando informalmente, depois demonstra outra coisa lá, isto pode não fazer sentido para o aluno. Como encontrar o meio termo ideal, é uma questão difícil.
IC4	Talvez, pegar certos capítulos, os mais agradáveis, e desenvolver mais formalmente e de maneira consistente e outros já nem tanto. Por exemplo, há partes demonstrativas que são mais agradáveis e outras que são menos agradáveis e, talvez, se começar com geometria, os primeiros passos, começar mais informalmente, e depois, em alguns capítulos, mais para frente, fazer uma seqüência de demonstrações.
IC5	Ele deve tomar contato com a Matemática como uma ciência dedutiva, não importam quais sejam os teoremas que aos alunos irão demonstrar. É importante que o aluno tenha contato com o sistema dedutivo mas sem pretender aquele rigor, demonstrando tudo do começo ao fim, e também evitar de chover no molhado, isto é demonstrando uma coisa aqui outra ali, mas sim escolher uma parte e desenvolver mais formalmente.
IC6	Não vejo como dissociar as argumentações das demonstrações.

Professor ID

ID1	Muitos acham que a demonstração nas escolas era coisa de Klein, mas não, Felix Klein era contra, o professor tem que ser quase como um diplomata, tem que conversar com o aluno, perceber o que eles estão sabendo e não apenas basear-se nas demonstrações.
ID2	O casal ianque, o John Young e a esposa vai mais longe, a primeira vez que eles utilizam as primeiras noções de geometria dobrando papel etc, e aí você pega os conceitos geométricos e a partir daí, você pode depois falar em ..., tornar isso mais rigoroso.
ID3	Os atuais currículos estão voltando à idéia da Educação Matemática do início do século eles estão dizendo fazer coisas concretas, materiais concretos, isso começa nesse movimento chamado matemática moderna, que ficou como se fosse algo tremendamente formal, mas não é, o formal vem como conseqüência de outras coisas. Bom o que está acontecendo agora, parece que está havendo uma maior atenção para essa parte formal pelas escolas, está havendo mais atenção para essa parte formal do que para a outra parte.
ID4	No século XX começa a ver essa coisa da Educação Matemática, como uma disciplina, onde você leva em consideração os processos mentais, a intuição, a experimentação, etc e, claro, associa isto à lógica, a formal, à demonstração. Então é um conceito de demonstração ou de prova um pouco mais amplo que simplesmente seguir os passos do formalismo.
ID5	O modelo que começa a se desenvolver no início do século XX e aí com muitas distorções, distorções no sentido de dizer: bom de tudo isso o mais importante é a parte formal. Eles estão querendo voltar agora para o formal e com isso a idéia de fazer demonstrações e provas. Eu estou vendo assim.
ID6	Se a idéia de fazer demonstrações e provas formais, se essa idéia começa a prevalecer, eu acho que é muito importante que isso aí seja trabalhado em um sentido mais amplo, próprio da Educação Matemática, se é bom ou ruim é outra discussão, mas se ela comparece eu acho bom que ela compareça desde a escola mais fundamental possível.
ID7	Aí o melhor que eu vejo nas escolas iniciais, inclusive no fundamental e até médio, é mostrar como as coisas podem ser enganadoras, os contra-exemplos de uma coisa que parece que é, mas não é, eu acho que isso é muito importante.
ID8	Eu acho que os contra-exemplos são um grande motivador para você ter a necessidade, mostrar a necessidade de uma prova. Isto infelizmente é pouco trabalhado.
ID9	Como que o argumento e a prova se complementam? Ou seriam coisas exclusivas ? Isso é uma questão difícil é uma questão filosófica difícil. Muito difícil.
ID10	O ponto fundamental é chegar onde surge a pergunta: será que é assim mesmo? E você tenta provar que é. Você propõe, cria situações em que se tenha necessidade de partir para a prova. Eu insisto que você tem de trabalhar muito com contra-exemplos
ID11	Na fala daqueles que eu gosto de colocar como fundadores da Educação Matemática, Ilya kmur, Dewey, Klein, você não entra com a demonstração antes da pessoa perceber que agora é importante por isso em pratos limpos e aí que a demonstração teria lugar.
ID12	Um outro matemático que tinha uma posição que inspirou muito os educadores matemáticos foi Whikney e ele trabalhava com crianças. Ele propunha uma questão e trabalhava com o erro da criança, pede para ela argumentar em relação a aquele erro porque ela fez isso, porque fez aquilo, vai colocando a pessoa no caminho que é uma forma de fazer também uma demonstração.

ID13	Com os cuidados que eu já mencionei acho que o processo de argumentação e prova em um sentido amplo pode ser incluído nas escolas.
ID14	Não cair nisso, por exemplo, da criança olhar a demonstração ela tenha que entender e repetir aquilo como um papagaio, não mas ela chegar, ou seja, se conseguirmos fazer que um aluno, num certo momento chegue a uma coisa onde ela tem dúvida, seja intuição, seja a observação, seja a experimentação dela, não está satisfazendo, não está respondendo, que ela recorra a um pensamento abstrato, eu acho esse momento muito importante. Agora, a minha dúvida é se você vai fazer isso como parte do programa ou se você vai fazer isso como uma maneira de convencer o aluno ou para explicar.
ID15	O aluno tem que viver um processo na escola que é o fazer matemática, mas não a parte formal mas a que antecede, na qual ele coloca sua criatividade, sua intuição, faz experimentações, ele procura exemplos e contra-exemplos, tentativa e erro.
ID16	Levantar conjecturas .... Mesmo que você não chegue a completar a demonstração nas primeiras séries, mas se você chegar a esse ponto, provavelmente o aluno vai querer seguir ...
ID17	A necessidade intelectual é o ponto de partida para a prova. Mas isso só pode ser trabalhado com criança se você trabalhar isso com os professores. No fundo, acredito que para formar um professor tudo o que o você acha que deve fazer com a criança, você deverá fazer com ele.
ID18	As provas, mesmo as formais, devem ser trabalhadas nas escolas do ponto de vista da Resolução de Problemas. O aluno teria uma tarefa a cumprir e, depois, validar os resultados e convencer seus colegas e você.
ID19	O que a gente deve entender hoje por uma demonstração? O que a gente deve entender por uma demonstração matemática? Esse conceito de prova foi modificando na história, analise esse aspecto em seu trabalho.

Professor IE

IE1	Eu acho que na educação básica o papel da demonstração seria o de convencer; a demonstração não deve ser assim algo apoiado em axiomas, numa teoria axiomática.
IE2	No nível fundamental eu trabalho na linha, a partir de uma experimentação a partir de uma conjectura que o aluno levanta a etapa seguinte seria de formalização em que seria importante apresentar a demonstração para que o aluno passe do plano perceptivo para o plano dedutivo, mas de uma maneira que não intervem todo o passado daquele teorema, deve ser algo mas uma prova, eu diria se eu posso usar a expressão, uma axiomática local.
IE3	Eu acho que ela é fundamental, não se pode ficar somente no plano perceptivo, eu acho que essa etapa é mais difícil passar do plano perceptivo para o plano dedutivo, mas ela tem que ser feita de uma maneira suave, de uma maneira que demonstração seja sinônimo de convencimento e não de tortura. Esse é um ponto que eu acho importante.
IE4	A partir de evidências, que ele vai obtendo, a partir de alguns resultados evidentes aí entra a demonstração.
IE5	Eu particularmente acho fundamental essa etapa de argumentação antes de uma formalização. Eu acho que inclusive é uma etapa que deve ser verbalizada. Eu acho que a verbalização é muita importante nesse processo. Eu acho que a argumentação ajuda no processo de formalização. Se você já verbaliza tudo aquilo que imagina ser uma prova, fica mais fácil depois formalizar. Então eu sou adepto a essa questão da argumentação precedendo, um passo anterior à demonstração.

IE6	Nessa fase inicial como, para mim, a demonstração é convencimento e o convencimento vem da palavra, vem da persuasão nesse sentido de convencer o outro. A demonstração também pode ajuda r aluno a compreender.
IE7	Existem as configurações mais importantes que são a configuração de Tales, configuração de Pitágoras, a configuração de semelhança e a configuração da congruência. São quatro etapas
IE8	Quer dizer eu colocaria hoje como conteúdos prioritários dentro de um curso de geometria as isometrias as homotetias e a semelhança e um trabalho com as configurações: seria uma geometria mais ligada a parte de medidas, Tales e Pitágoras são assuntos importantes.
IE9	Falando em demonstrações é preciso ter cuidado, escolher a hora adequada para fazê-las. Gosto da Douady, ela propõe uma nova organização para a construção de conceitos aquela proposta ferramenta-objeto, a gente trabalha primeiro como ferramenta para depois institucionalizar essa ferramenta como sendo objeto. Essa organização da Regine Douady eu acho muito interessante.

Professor IF

IF1	Então, eu concordo com isso, e eu penso o seguinte: que ao longo dessas últimas décadas a matemática, principalmente pré-universitária, acabou se reduzindo a uma coleção de algoritmos cujo sentido, para os estudantes, se perdeu, e pior ainda, atualmente para os próprios professores esse sentido também se perdeu. Em geral os professores não conhecem, não sabem justificar as etapas de um algoritmo.
IF2	Os algoritmos se constituem em uma parte importante da matemática, mas qualquer algoritmo dentro da matemática tem uma justificativa de cada uma das suas etapas, e essa justificativa pode ser dada desde sempre,
IF3	Eles podem fazer de forma mecânica/ .../ mas de maneira que os estudantes compreendam que em qualquer momento eles podem recuperar o significado de cada uma dessas etapas, e isso justifica, porque quê eu acho que deve estar desde sempre a idéia de argumento em matemática.
IF4	Também é muito fácil gerar argumentos simples, não necessariamente uma prova formal, mas gerar pequenos experimentos de generalização,
IF5	Eu acredito que o trabalho com provas só pode ser feito por um professor que tenha tido uma formação em que isso seja um elemento constante, presente nas disciplinas em geral.
IF6	Eu penso que Álgebra e Geometria têm um potencial de gerar maturidade nos professores e ao mesmo tempo gerar iniciativa neles para aproveitar conteúdos na educação básica que possibilitem gerar nos alunos essa atitude crítica, essa atitude de argumentar na direção do formal...
IF7	Então é fácil você propor pequenos experimentos, tanto com números como com geometria de modo que você não precisa enunciar uma verdade; os próprios estudantes podem ir trabalhando, e chegar a enunciar uma proposição ou algo que eles pensem que é verdade, conjecturar, enfim.
IF8	Eu acho que as crianças têm uma curiosidade natural. Na área de matemática, ela poderá encontrar um campo onde essa curiosidade pode ser muito aumentada e satisfeita. E o processo de prova pode contribuir para isso.

Professor IG

IG1	Eu concordo sim, eu já vi esse trabalho em andamento em outros países/.../ vi pessoas que trabalham com demonstrações desde a escola básica, em outros países e eu acho isso muito importante.
IG2	Eu acho que o ato de você pedir para um aluno de escola básica, justificar por que quê ele fez tal ou tal procedimento na resolução de um exercício, quando ele justifica, ele está procurando uma argumentação, essa argumentação pode evoluir as demonstrações.
IG3	.... não é que o aluno vai sair da escola básica, fazendo demonstrações formais, ele não precisa necessariamente provar tudo o que faz, mais o processo de construção da prova é importante para a formação do raciocínio dedutivo.
IG4	O professor da Educação Básica deve levar em conta que o trabalho com a argumentação é extremamente importante, é um processo que deve ser desenvolvido nas escolas.

Professor IH

IH1	Acho que sim, acho que a demonstração, a prova, deve fazer parte desde, desde o primário, entendeu? Desde o ensino fundamental, mesmo, só que de uma determinada maneira, no ensino fundamental e nas séries iniciais, e ela deve ser alterada, deve ser melhorada, ter mais rigor, ao passar do tempo, pra chegar no ensino médio e o aluno estar fazendo provas de uma maneira mais rigorosa, não é?
IH2	Mas eu acho que a questão da dúvida, se aquele resultado, é pertinente, se vale, se tem algum contra exemplo... então, determinados tipos de prova podem ser já introduzidos desde as séries iniciais.
IH3	Não é começar pelo rigor, não; eu acho é mais pela postura de inquirir, de querer investigar, de ter dúvidas sobre aqueles resultados. A prova precisa convencer o aluno e também clarear algo que ele não tenha compreendido.
IH4	... apresentar diversas resoluções pra o mesmo problema. A hora que a pessoa ver que eu resolvi de uma maneira, o outro resolveu de uma maneira, o outro resolveu de outra maneira, eles podem começar a se questionar, isto é, "e aí? Todas as respostas são válidas, todas essas maneiras são válidas, mas como eu sei que uma maneira mais rigorosa?" Qual seria assim, entre aspas, a "verdadeira", não é? Daí para a prova é um passo...

Professor Ii

Ii1	
Ii2	A demonstração deve convencer o aluno e também ajuda-lo na compreensão da matéria
Ii3	
Ii4	

Grupo II

Unidades de significado dos depoimentos dos professores do grupo II (professores do Ensino Fundamental e Médio) a respeito do desenvolvimento de provas na Educação básica.

Professor IIA

IIA1:	Pela minha experiência, o aluno de primeiro grau e de segundo grau tem que ter um amadurecimento antes de chegarmos a uma demonstração.
IIA2:	Então eu tenho conseguido algum resultado justamente partindo para esse tipo de linha: fazer alguns problemas, alguma coisa prática, pra ele perceber os elementos que ele vai ter que utilizar; e vou aumentando a complexidade gradativamente. .../dizendo pra ele: "olha quando você tem que trabalhar com questões muito mais complexas, você precisa de um baseamento, algo que sustente aquilo que você vai fazer", e aí se justifica a gente fazer uma demonstração, falar de um modelo, falar de uma teoria, o que é uma hipótese, o que é uma tese.
IIA3:	Faço com que o aluno vá necessitando gradativamente a ter um conhecimento um pouco mais complexo, um pouco mais sustentado. E aí, quando ele começa a ficar perdido, começa a pedir ajuda, aí e que eu complemento, dando justamente uma demonstração, como é que ele pode usar e em que casos.
IIA4:	Então essas questões eu creio que ele tem que sentir a necessidade, não dar apenas por exposição.. não é? "olha vamos deduzir" ... Eu já fiz isso e pra eles passam batido. Se eles não têm essa necessidade; não tem um caldo cultural, isso foi uma coisa que eu aprendi depois de muitos anos, não adianta explicar um conceito para uma pessoa se ela não vive num contexto onde aquele conceito vá, gradativamente, fazendo parte do dia a dia.
IIA5:	um radiotelescópio, explico o problema da energia/.../aproveitar a energia dos ventos, do sol/.../a gente vai envolvendo o assunto que seria parábola, /.../mostro para eles um auto-falante que é parabólico/ ... / Então eles vão percebendo: "pó, esse negocio a gente usa, não é?" E aí eu dou um exercício pra eles que consiste no seguinte: sabe aquele jato de água do bebedouro, que é uma parábola? Então eu dou uma folha de transparência quadriculada ele montam os pontinhos, voltam pro laboratório, marcam os pontinhos nos gráficos e deduzem a fórmula da equação do jato de água do bebedouro.
IIA6:	A gente constrói depois; todas as propriedades da parábola, quer dizer eles vão ter um retorno, quando já tiveram uma vivência, já viram, depois a demonstração com a teoria, quer dizer, eu acho que esse caminho torna mais aceitável pra eles, justificar pra eles qual é a importância da demonstração.
IIA7:	Concordo que podemos e até devemos, em alguns momentos, trabalhar com as provas e as argumentações nas nossas aulas, pois isso é parte da matemática. É importante. Mas considerar o trabalho com demonstrações formais, ainda que não de maneira muito rigorosa, como necessário e fundamental com todos os alunos e classes do Ensino Médio tenho cá minhas dúvidas. Nem todo mundo entende. As experimentações, as verificações e os problemas é que são imprescindíveis nas aulas de matemática.

Professor IIB

IIB1:	quando eu mostro um conteúdo, quando eu quero chegar numa fórmula; que eu quero atingir um ponto com eles, essa fórmula eu nunca tiro da cartola.
IIB2:	eu acho que o mais interessante para isto é ele primeiro se apropriar das operações e das ferramentas matemáticas para depois fazer as demonstrações Você se apropria quando você entende as regras de um jogo, você pode sair e chegar onde você quiser
IIB3:	Você não sabe de onde veio aquele seno ao quadrado mais cosseno ao quadrado, para depois trabalhar com coisas que não fazem sentido nenhum, decorou que a tangente não sei o que... daí é muito complicado, sem sentido.

IIB4:	Agora, se você visualiza, demonstra, eu acho que é válido. Agora, como trabalhar isto, né? Como trabalhar? Você vai demonstrar para o seu aluno? Ele vai ser um expectador assistindo você demonstrar?
IIB5:	A proposta é que tem que ter cuidado, porque senão, também, fica mais um joguete de cartola, que ai perde o sentido. Fica mais uma coisa para o aluno decorar.
IIB6:	Então eu sempre digo a eles: se você souber de onde vem, o que você está trabalhando, você monta na hora, na hora você constrói a tua fórmula.
IIB7:	E aí é legal, quando eles dizem “ah, é por isso!”. Quando você ouve eles falarem assim, na base de “ah! É por isso!” é muito bom! Agora, eu nunca pedi fórmula para demonstrar alguma coisa assim, em uma avaliação.
IIB8:	Eu acho fundamental trabalhar algumas demonstrações, mais no sentido de ver de onde veio, saber justificar. Eu procuro fazer com que eles argumentem.
IIB9:	Aí eu falo; tem que validar... vamos ver se isto aqui satisfaz as minhas condições. Então a resolução é uma coisa e solução é outra. “bem; você resolveu”... é solução? Então isto é bem enfatizado.
IIB10:	... trabalhar com hipótese, a tese... onde eu quero chegar... este tipo de rigor, eu nunca fiz.
IIB11:	Os alunos questionam o porquê das demonstrações! O problema é que hoje em dia, dando aula, você está na sala de aula, é o imediatismo do aprendizado... para que eu estou aprendendo isto? Onde que eu vou usar isso? Essa preocupação, e nem sempre você tem uma aplicação, não é? Ainda mais no ensino médio... então tem que chamar e falar que você está usando o raciocínio lógico.

<u>Professor IIC</u>

IIC1:	Quando a gente, no começo do ano, senta pra elaborar o nosso planejamento, ali sempre está incluído um trabalho com a parte de desenvolvimento do raciocínio dedutivo da criança, e ai a gente tá se referindo ao desenvolvimento da capacidade da criança buscar, chegar a conclusões, com base em fatos que ela já conhece.
IIC2:	Esse trabalho deve levar a criança a expressar suas idéias de uma forma... usando só a sua linguagem natural do dia a dia, ainda que seja isso, nosso trabalho pode começar desde a 5° serie, levando a criança a usar os fatos que ela já conhece, mesmo coisas simples e argumentar, com base naqueles fatos, e defender suas idéias, para chegar a alguma conclusão.
IC3:	quando a criança percebe que ela precisa usar alguns argumentos pra defender a sua opinião e o seu ponto de vista, e pra convencer o seu igual, daquilo que ela está pensando, ela percebe que aquilo lá ela pode usar na sua vida fora da escola, e ela percebe que aquilo não é só matemática, é uma prática social, na verdade, é uma negociação que ela faz fora da escola/.../ quando ela percebe isso eu acho que ela está conseguindo aprender a parte mais importante da demonstração mesmo.
IIC4:	O significado desse trabalho deveria ser um trabalho inicial que partisse da linguagem materna..., ainda que seja simples, com a linguagem dela mesma... Para se chegar às demonstrações, não é um trabalho simples
IIC5:	meu primeiro contato com demonstração foi quando eu tinha 11 anos; era uma época em que as demonstrações, assim com símbolos matemáticos, eram valorizadas. O professor demonstrava e nós assistíamos aquela demonstração passivamente ...,

IIC6:	... enquanto ele estava demonstrando eu entendia aquilo que ele estava fazendo, eu via que havia uma cadeia, uma seqüência de idéias/.../parecia uma coisa perfeita/.../no enunciado, essa parte é a hipótese, essa é a tese... não era simples da gente entender isso, e a gente percebia que ele estava querendo chegar naquela tese, mais eu nunca, nunca me atrevi a perguntar porque ele estava usando aquele argumento, porque ele usava aquele teorema como ferramenta numa demonstração posterior... nunca me atrevi a demonstrar um teorema partindo de outro ponto ou fazendo uma figura diferente daquela.
IIC7:	Mas atualmente não acho, claro, que se deva fazer desse jeito. Eu acho que tem que partir, partir de um trabalho com a criança, com coisas simples, não é?
IIC8:	Hoje, nós não temos mais alunos no Ensino Fundamental, no Médio ou na Graduação, que aceitam um processo de demonstração, passivamente, sem questionar “pra que?”, “por que?”, “onde vamos usar isso?”, “precisa ser dessa forma?”, “não há um jeito mais fácil?”
IIC9:	Eu acho que se a criança for estimulada a expressar verbalmente as suas idéias e defender um ponto de vista, ainda que não seja uma coisa certa, mas se ela conseguisse se expressar e tentar defender a sua opinião aquilo pode dar a oportunidade para a discussão, pra até um erro que a criança...

Professor IID

IID1:	Gostaria de falar que eu não trabalho muito com as demonstrações. Somente algumas e em algumas séries. É muito difícil para a maioria dos alunos. Só alguns acompanham ou entendem um pouquinho.
IID2:	Eles reclamam muito. Mas mesmo assim faço questão que eles vejam pelo menos um pouco as demonstrações. Eles precisam ter pelo menos algum contato com o sistema dedutivo.
IID3:	Na 7ª série, por exemplo, demonstro alguns teoremas usando congruências de triângulos, dependendo da classe apenas três ou quatro.
IID4:	mostro o porquê das fórmulas do cálculo de áreas de retângulos, de paralelogramos, de triângulos e de trapézios; vejo também a fórmula que dá o número de diagonais de um polígono. As demonstrações dessas fórmulas eles compreendem mais.
IID5:	Na 8ª o teorema de Pitágoras, e também, claro, a fórmula de Baskhara.
IID6:	No ensino médio demonstro algumas fórmulas da trigonometria e propriedades dos logaritmos. Parece incrível, mas não trabalho com demonstrações na Geometria do Ensino Médio: não sobra muito tempo e são difíceis, pois é geometria espacial,. Ah, em Geometria Analítica também vejo algumas fórmulas.
IID7:	Na verdade, eu não sei muito bem como fazer esse trabalho com as demonstrações. Pois apenas apresento as demonstrações. Sei que não posso exagerar no rigor da linguagem mas a demonstração que faço é uma demonstração e não verificação. Lógico que eu justifico porque é importante a demonstração na Matemática. Explico muito bem cada passagem e às vezes até uso a história para motivar. Mas tenho a sensação de tempo perdido, muitos poucos se interessam. Meus alunos do 3° ano alegam que não cai no vestibular.
IID8:	Também não cobro nas avaliações: não vou saber se eles entenderam mesmo ou se apenas memorizaram o teorema.
IID9:	Não quero cometer o erro de repetir com meus alunos a forma com que eu vi as demonstrações.
IID10:	Por isso, seleciono apenas algumas demonstrações e somente as mais fáceis. Apenas para que os interessados possam entrar em contato com a dedução, que é uma coisa maravilhosa da Matemática.

IID11:	Agora tem uma coisa que eu não abro mão: é pedir aos meus alunos justificarem as resoluções dos problemas, que indiquem as propriedades que usaram nos exercícios, etc. Dado uma propriedade um teorema eles devem exemplificar. Devem procurar exceções. Enfim devem provar, ou seria comprovar os resultados. Não tem importância que não sejam muito rigorosos ou formais. É uma questão de atitude, entende?
IID12:	Quando ensino o teorema de Pitágoras, faço algumas verificações com régua e transferidor, com quebra cabeças, outras utilizando quadrados (a professora mostra os quadrados). Somente depois do aluno ter usado o teorema de Pitágoras em alguns problemas, de ter feito algumas verificações é que vou apresentar pra eles a demonstração formal, utilizando semelhanças de triângulos. Acho que você não pode nunca começar com o formal. Tem que ser um trabalho gradativo. Se você não chegar a um certo rigor acho que não tem muita importância. O importante é o aluno saber que existe uma prova rigorosa para aquele teorema.

Professor IIE

IIE1:	eu imaginava que o pessoal não ligasse muito, achasse ruim essas demonstrações, simplesmente um aluno chegou e falou assim:- "Marinho, que maravilha! Esse ano eu tive a visão global da matemática". Porque, porque tudo que era dito, era demonstrado o porque daquilo; o porque daquilo.
IIE2:	Alguns alunos recebendo aquela informação, deslumbrando aquelas demonstrações, mais a inteligência própria dele, e mais a criatividade dele, ele não deu um passo, ele deu dez passos, então é uma coisa muito interessante.
IIE3:	O trabalho com demonstrações no Ensino Médio e Fundamental é mais que desejável.
IIE4:	É possível não sei se para todos, mas é desejável, mas com coisas, assim, muito elementares.
IIE5:	Esse trabalho deveria ser feito sem aquela formalização rigorosa, mas já induzindo a um raciocínio, com coisas muito simples, mas já iniciando o aluno, a pequenas formalizações: pequenas formalizações, assim, pra ele ter uma noção de lógica, não é?
IIE6:	Em geral, o que se percebe, é apenas a passagem de conhecimento para o aluno do ensino médio, sem nenhuma preocupação em explicar o porque daquilo. Como funciona, como se demonstra aquilo, e, principalmente, onde vai ser usado aquilo.
IIE7	Não cobro nenhuma a demonstração de fórmula na provas. Pois seria apenas a memorização.

Professor IIF

IIF1:	Eu não sabia que os PCN indicavam demonstrações. ... Eu pensei que o forte dessa proposta era a questão da cidadania, os temas transversais e coisa e tal. Aplicações práticas da Matemática, o cotidiano. Já as demonstrações estão mais ligadas à matemática pura. De certa forma estou surpreso porque eu pensava que eles diziam exatamente o oposto, as aplicações e o contexto, mas não as provas. Mas eu não li os PCN de cabo a rabo.
IIF2:	Mas eu concordo sim. Você sabe que eu faço algumas demonstrações em sala de aula nas classes do Ensino Médio. No fundamental eu também já fiz. Sei que muitos dos meus alunos não entendem todas as demonstrações trabalhadas, mas a maioria está convencida da importância das demonstrações na Matemática. Eu acho isso, pelo menos.

IIF3:	Alguns ex-alunos reclamaram para mim que o novo professor dava a fórmula, dava alguns exemplos e depois exercícios e depois corrigia mas não demonstrava as fórmulas. Fiquei contente com a atitude deles
IIF4:	Eu trabalho com meus alunos algumas demonstrações principalmente da trigonometria e geometria analítica. Mas geralmente não faço demonstrações muito formais. A demonstração mais formal, só vem depois dos alunos terem compreendido o significado do enunciado, terem procurado exemplos e contra exemplos.
IIF5:	Você me perguntou se esse trabalho com demonstrações é desejável e possível. Acho que sim. Desejável ele é. A demonstração não é a essência da matemática? Também é possível, apesar de muitos alunos não compreenderem. Por isso não posso exagerar.
IIF6:	Mas penso que devem ser feitas apenas algumas demonstrações formais, as mais simples. Para mim o ideal é de que elas sejam propostas à turma como uma questão a ser pesquisada, um problema a ser resolvido. Somente depois dessa pesquisa é que o professor deveria apresentar a demonstração formal a sua classe. É dessa maneira que faço muitas vezes
IIF7:	...eu trabalho também muito com Resolução de Problemas e sempre exijo que meus alunos justifiquem suas resoluções. Os alunos têm que validar suas resoluções.
IIF8	Alguns dos meus alunos chegam a questionar, perguntando: 'professora para que provar uma coisa que todo mundo sabe que é verdadeiro?' Eles acham inútil provar o teorema de Pitágoras, e que a soma dos ângulos internos dá 180º. Até os bons alunos consideram vêem apenas como curiosidade essas demonstrações. Acho que a falha é também minha: não consegui convencê-los sobre a importância das demonstrações?
IIF9	Quando ensino um tópico da matemática eu sei avaliar os alunos e, claro, o meu trabalho. Mas como avaliar esse trabalho com as demonstrações? O que devo esperar dos meus alunos? Que reproduzam apenas o que foi feito em classe? Não sei a melhor forma de ensinar demonstrações! Nem sei se demonstração se ensina ou se no fundo apenas apresentamos e explicamos o que foi feito. Não foi assim na nossa formação?

Professor IIG

IIG1:	Concordo plenamente com as demonstrações, mas cuidado.
IIG2:	As demonstrações de um mesmo conteúdo podem ter várias abordagens, dependendo do nível de abstração do aluno.
IIG3:	Por exemplo, não teria significado para um aluno do curso fundamental, uma demonstração essencialmente algébrica, sobre área. Contudo, se esse aluno tivesse uma demonstração em nível concreto (com colagens, ele medindo figuras, etc), conseguiria entender melhor o que é superfície
IIG4:	Se um aluno do curso fundamental incorporasse esse conhecimento mais prático mais verificações no ensino fundamental, no curso médio poderia haver uma demonstração algébrica mais formal que provavelmente ele conseguiria entender.
IIG5:	Hoje em dia a maioria dos professores do fundamental e do médio não trabalham os porquês das coisas. Demonstração? Muito, muito menos ainda

Unidades de significado: Provas na formação de professores

Grupo I

Unidades de significado dos depoimentos dos professores do grupo I (formadores de professores e pesquisadores em Educação Matemática) em relação ao desenvolvimento de provas em cursos de formação de professores.

Professor IB

FIB1	Em geral as muitas pessoas da comunidade matemática acreditam e divulgam que provar é algo muito, muito difícil e aqueles que conseguem fazer provas são, realmente, os mais inteligentes; você tem essa coisa ainda da Matemática ser um filtro que distingue as pessoas inteligentes e não e a prova tem sempre um papel muito forte nisso. Então acabamos por valorizar os argumentos mais formais e deixar outros de lado.
FIB2	Na verdade as pessoas que fazem licenciatura em matemática estão numa posição interessante mesmo: eles são matemáticos, ou seja queremos dar acesso para aprender mais matemática e atuarem como matemáticos. Ao mesmo tempo eles vão atuar na escola básica. Então é um desafio grande mesmo. De certa forma, queremos que o professor de matemática se sinta um pouco como um matemático.
FIB3	Didaticamente deveríamos começar num nível mais básico, o que não é feito, pois no ensino fundamental e médio falamos: isto é uma prova, se você apresentar assim, está bom, e se não apresentar não está bom! Mas não deveria ser assim. Nós vamos aceitar ou não essa argumentação? Nós vamos incluir essa parte nos fatos que nós vamos continuar a trabalhar? Ou ainda não estamos satisfeitos? Promover esses debates, envolver os futuros professores nessa discussão na licenciatura é fundamental.
FIB4	Por isso a prova é tão importante porque a prova dá uma certa...., ou seja a prova formal é uma característica da matemática que a diferencia das ciências empíricas, de outras áreas Não vou falar que prova é a essência da Matemática, que é o coração da matemática, mas não podemos deixar esse aspecto de lado. É a maneira que escolhemos, na nossa comunidade, para comunicar, para comunicar nossas descobertas, para comunicar nossas direções, para decidir os campos de problemas que valem a pena investigar. E o futuro professor precisa vivenciar essa experiência. Precisa ver as provas formais.
FIB5	Os conteúdos têm que contemplar as duas partes. Para mim, os conteúdos que eles vão ensinar devem ter a maior ênfase, é isso que eu penso nesse momento. Por isso a prova é tão importante porque a prova dá uma certa...., ou seja a prova formal é uma característica da matemática que a diferencia das ciências empíricas, de outras áreas. Para isso é que ela é tão importante.
FIB6	É importante ressaltar que se os futuros professores vêem uma demonstração formal eles vão simplesmente reproduzir com seus alunos e entrar com o formal pronto, pois consideram que é difícil para eles e nem estão convencidos da importância da prova. No entanto, sabemos que em outros aspectos eles reproduzem o que foi trabalhado com eles. Porque reproduzir uma atividade que foi legal, que você viu funcionar, é altamente positivo. É essa a nossa base para ir para frente, seja como professor, seja como matemático, ... Se eles tiverem experiências com provas em contextos diferentes; provas gráficas, provas visuais, provas que não são provas e sim argumentos empíricos e também argumentos formais, mas não só argumentos formais na situação de álgebra ou geometria, mas também situações computacionais.

Professor IC

FIC1	O que está acontecendo hoje, é o seguinte: há aqueles professores, os que vão formar os futuros professores, que não demonstram nada e não adianta o coordenador do curso querer implementar essa diretriz. No entanto, há outros que querem demonstrar tudo. E aí é uma incongruência porque os alunos chegam sem condições, em especial os das universidades particulares. Chega no primeiro ano tem um curso de cálculo que é puramente algorítmico, no curso de geometria analítica são dadas em geral apenas algumas receitas, e de repente no segundo ano, em álgebra linear, o professor começa a demonstrar, justamente em uma disciplina muito abstrata. É muito difícil
FIC2	Eu quero ressaltar a importância da prova no curso de formação de um professor de matemática, mas elas devem ficar mais no final do desenvolvimento da maioria dos assuntos, principalmente no Cálculo. A axiomatização de um certo assunto deveria vir apenas no final. Não se pode começar demonstrando. Mas não se trata de fazer um curso algorítmico. Já em Análise é um pouco diferente. O futuro professor já conhece os conceitos envolvidos e a demonstração é o centro do trabalho dessa disciplina.
FIC3	Deve-se escolher uma parte do programa da disciplina, a mais agradável, e desenvolvê-la axiomaticamente se for possível.
FIC4	Se um professor viu apenas demonstrações formais no seu curso ele poderá apenas apresentar os teoremas já demonstrados a seus alunos. O aluno vai ver uma prova envolvendo termos, definições que ele nem entende. E isso é muito ruim, é perda de tempo e pior, vai afastar seus alunos da Matemática.
FIC5	
FIC6	

Professor ID

FID1	É muito difícil isso e eu acho que, por ser difícil, não é dada a devida atenção na formação do professor, professores de todos os níveis. A impressão que a gente tem é que na formação do professor eles se preocupam em preparar o professor para fazer as demonstrações; mas também o futuro professor não percebe a necessidade de demonstrações para esclarecer coisas que estão .... Esse que eu acho que é ponto que mereceria a formação de professores se dedicar mais. Em outros termos, você mostrar como são as provas e as demonstrações não é tão importante quanto justificar a necessidade de uma prova e de uma demonstração.
FID2	uma pessoa mesmo com uma boa formação não pode acompanhar muitas demonstrações da matemática; são pouquíssimos que são capazes de acompanhar certos teoremas. [...] você tem que acreditar que aqueles que olharam e acompanharam e disseram que está certo .... Aí você cria um critério de verdade baseado numa demonstração que é inacessível. Por isso, essa idéia de demonstração é complicada, é filosoficamente complicada. Eu acho que esse tipo de discussão, esse tipo de reflexão, é mais importante nos cursos de formação do que a formação pura e simples para que ele faça demonstrações. Que é uma idéia que não é, acho, muito bem trabalhada na formação dos professores
FID3	. ... você ensina como demonstrar e ele vai fazer tal como aprendeu. Mas isso não conduz a nada porque a coisa principal que é – porque que eu demonstro? Seria mais frutífero o estudo das demonstrações se os alunos estudassem a prova do ponto de vista histórico, quais foram os problemas que motivaram a criação dos conceitos e a prova deve estar nesse contexto.

FID4	Na formação do professor de matemática seria muito interessante o estudo da obra do Lakatos, “a lógica do descobrimento matemático: provas e refutações”.
FID5	O importante é levar o aluno a desconfiar, procurar contra-exemplos. Nesse contexto as demonstrações teriam sentido.
FID6	Eu já falei uma coisa que escandalizou um monte de gente, eu disse: basta demonstrar um teorema nos cursos de formação de professores de matemática. Com isso, o que eu quis dizer que o importante não é o teorema em si, o importante é dar um exemplo de como a coisa que funciona. Se um professor entende um teorema. Qual é o passo seguinte? Agora, qual é o teorema importante? Depende de vários fatores, até do gosto. Se precisasse escolher um, escolha um que envolva muitos conceitos.
FID7	É isso que eu tento passar naquele artigo que escrevi. Mas teve gente que me escreveu e disse:mas um teorema só, eu acho que deveriam ser vistos pelo mesmo três, outros que não poderia ser menos de cinco. Se um curso vai ficar melhor porque dá três em vez de um, ou cinco em vez de três, tudo bem, mas a idéia não é essa: é muito importante o professor saber o que é uma demonstração, que passos ele pode dar, etc.
FID8	O estudante de Matemática que vai ser professor precisa como eu já disse, experimentar, fazer conjecturas, procurar contra-exemplos, etc, quando estudar um certo assunto. Precisa também conhecer o significado de prova num sistema axiomático, afinal ele está estudando matemática. Mas ele precisa ver também algumas formas de abordar provas quando for dar aula na escola; que teoremas provar, que caminho seguir, etc.

Professor IE

FIE1	Eu sou defensor de que na formação inicial é absolutamente necessário que um futuro professor tenha um curso axiomático. Eu defendo essa idéia. Na apresentação dos axiomas e na apresentação de todos os teoremas interligados, isso é muito importante na formação dele para depois, ele poder fazer, como eu já frisei, o convencimento.
FIE2	Se você não tem uma formação sólida, uma formação que foi vivenciada na base de uma teoria axiomática, você poderá se atrapalhar depois nessa questão do convencimento. Você não terá argumentos para colocar para o aluno.
FIE3	Numa formação inicial eu acho muito importante que o professor, o futuro professor, seja colocado nas etapas de construção, exploração, conjectura, justificação do resultado. Ele precisa dessas etapas para aprender a provar e compreender os conceitos. Essas etapas são fundamentais no processo de formação inicial. Agora quando chega na justificação, é que eu acho que, nesse caso, ele tem que Ter o apoio dos postulados para poder entender exatamente o que é uma justificativa matemática. Mas, no curso de formação inicial, eu sou totalmente contra Ter um curso somente axiomático. Eu acho que o curso axiomático tem que entrar junto com essas etapas, senão ele não entende o axiomático. É muito difícil
FIE4	Há um pesquisador francês, o Parzys, ele coloca as etapas do desenvolvimento do pensamento geométrico: geometria concreta, geometria espaço-gráfica da representação, geometria proto-axiomática que é uma geometria dedutiva, mas baseada em evidências e finalmente a última etapa que ele chama de geometria axiomática. Essa etapa é que poderia ser apresentada aos alunos numa formação inicial, uma etapa mais rigorosa. Se não houver essa etapa o futuro professor ele jamais poderá imaginar que existe atrás de um teorema todo um conjunto de axiomas que permite dizer isso ou aquilo.

FIE5	Acho que para o futuro professor ele teria que ter do Teorema de Tales um conhecimento profundo de tudo o que se passa. E como ele vai falar em Tales e Pitágoras seria interessante uma volta à história e ver que na antiguidade eles não tinham...., as grandezas naquela época eram sempre comensuráveis e depois, toda essa etapa de amadurecimento para poder chegar nas grandezas incomensuráveis, essa passagem histórica é importante para que o professor ter consciência pois senão depois vão usar o Tales e nem sabem o que está acontecendo. As demonstrações do teorema de Tales e do teorema de Pitágoras são importantes dentro daquilo que eu vejo como fundamentais. Elas teriam sentido, pois o futuro professor estaria motivado para demonstrar esses teoremas. As congruências também, os critérios de congruência para poder justificar várias propriedades fundamentais.
FIE6	No curso em que trabalho, nós temos quatro anos de geometria: a gente trabalha com a geometria plana durante um ano e é um curso em que a demonstração aparece, como também aparecem as construções, uso de Cabri, de levantamento de conjecturas, de dedução, é um curso dedutivo. Então, na verdade esse curso é uma volta a um conteúdo de 7ª e 8ª séries, mas você pode colocá-lo, todo esse desenvolvimento, num ponto de vista mais avançado. Eu gosto muito de trabalhar com a história, então quando eu apresento um curso eu gosto muito de fazer uma contraposição do sistema axiomático de Euclides com o sistema axiomático de Hilbert, eu gosto de falar do sistema axiomático de Birchofff. O Birchoff introduz as medidas, já o Hilbert é um curso mais sintético. Há essa riqueza, você está tratando do mesmo assunto só que do ponto de vista mais avançado. É isso que o professor gosta, ele não quer que você repita tal e qual ele viu no ginásio e colégio, mas se você volta naqueles conteúdos do ponto de vista histórico, misturando, quer dizer comparando os sistemas de axiomas, fica muito mais rico, muito mais interessante.
FIE7	Eu acho que na formação inicial deveríamos ter um curso axiomático, mais que os professores da licenciatura tivessem um outro olhar, um olhar assim mais crítico, propor experiências e verificações de todas as proposições, todos os teoremas da geometria, para depois então poder trabalhar com a demonstração. Mas o que não pode acontecer é o professor do ensino médio reproduzir o processo: o que foi apresentado para ele na sua formação ele repete tal e qual para seus alunos.

Professor IF

FIF1	Eu tenho esse curso de teoria dos números inteiros, esse curso quando eu dava no começo, eu dava uma abordagem axiomática, e eu renunciei a dar essa qualidade axiomática, porque não adianta você apresentar uma seqüência de axiomas pra quem não tem maturidade pra entender isso. E os alunos chegam às universidades cada vez menos preparados. É como eu acho que a historia da matemática ensina muito pra gente; se os axiomas apareceram no fim do século passado não tem por que eu achar que gente que não teve uma boa formação matemática, vai ter maturidade pra entender isso, Então, eu não faço mais assim.
FIF2	Eu acho que a historia da matemática ensina muito pra gente; se os axiomas apareceram no fim do século passado não tem por que eu achar que gente que não teve uma boa formação matemática, vai ter maturidade pra entender isso, Então, eu não faço mais assim.

Professor IG

FIG1	É, eu acho que a primeira coisa é saber se esse aluno, que está vindo para um curso de licenciatura. (...) Primeira coisa, a gente tem que saber como é que ele está chegando, pra formação inicial dele, como ele chega no curso de licenciatura, ele teve essa vivência? (...) esse professor tem que saber se ele veio com essa formação, e com isso nos vamos ter que ter o cuidado, teríamos que ter o cuidado de, primeiro, como que nós, formadores desses professores poderíamos diagnosticar se ele tem, se ele já passou por essa experiência de argumentar, de passar de uma argumentação para uma prova matemática e colocar isso desde as primeiras disciplinas, desde as primeiras horas dele aqui no curso que isso fosse uma prática, e não somente na geometria, que é um lócus privilegiado de demonstração, mas em todas as disciplinas.
FIG2	Não adianta você olhar a probabilidade como combinatória; um cálculo combinatório no numerador, um no denominador, e isso é a probabilidade do evento, não é isso. O conceito de probabilidade ele tem vários pontos de vista, e você só consegue construir o conceito se você aborda todos esses pontos de vista durante a fase de aprendizagem. Na probabilidade, por exemplo, os teoremas básicos: teorema da soma, teorema do produto, que são básicos, que eles têm que saber que isso é um teorema, não é axioma. Se é teorema eu posso demonstrar, e como demonstrar. E a demonstração facilita compreender. Nesse caso ensinar demonstrar é mais fácil. [...] No caso da Estatística, a própria demonstração, ajudaria na construção do conceito, ela é fundamental para a construção do conceito.
FIG3	[...] tem que saber o que ele vai ensinar no ensino fundamental e médio. Mas ele não pode ficar estudando só o que vai ensinar, ele precisa por exemplo aprender a provar dentro de um sistema formal, quer dizer ele precisa ver a axiomatização. Ele precisa conhecer mais do que vai ensinar.

Professor IH

FIH1	Ele não sabe que conhecimentos poderá utilizar numa demonstração. Às vezes, você faz uma demonstração muito simples ligada a números e eles não percebem, às vezes, falam: ah isso daí é truque, não é que é truque, é conhecimento que às vezes você tem sobre os conteúdos e você faz uso
FIH2	, ela viu a demonstração em uma determinada... assim... por exemplo, lógica. Não são todos os cursos de licenciatura que tem lógica, mas quando você leciona lógica, lá tem demonstração direta... demonstração por absurdo
FIH3	A hora que eles comecem a tomar consciência dos seus processos de aprendizagem, como que ele aprende, isso daí vai facilitar muito, assim no sentido de que ele vai aprender com mais facilidade, e ele, como futuro professor ainda, vai perceber como que seus alunos podem estar aprendendo.
FIH4	Eu acho que o rigor é também um processo. Num dado momento na licenciatura o aluno precisa chegar no rigor. Estudar os axiomas da teoria, as definições rigorosas, enfim demonstrar alguns teoremas formalmente.

Professor Ii

Ii2	Ele não sabe que conhecimentos poderá utilizar numa demonstração. Às vezes, você faz uma demonstração muito simples ligada a números e eles não percebem, às vezes, falam: ah isso daí é truque, não é que é truque, é conhecimento que às vezes você tem sobre os conteúdos e você faz uso
Ii3	, ela viu a demonstração em uma determinada... assim... por exemplo, lógica. Não são todos os cursos de licenciatura que tem lógica, mas quando você leciona lógica, lá tem demonstração direta... demonstração por absurdo
Ii4	A hora que eles comecem a tomar consciência dos seus processos de aprendizagem, como que ele aprende, isso daí vai facilitar muito, assim no sentido de que ele vai aprender com mais facilidade, e ele, como futuro professor ainda, vai perceber como que seus alunos podem estar aprendendo.

Grupo II

Unidades de significado dos depoimentos dos professores do grupo II (professores do Ensino Fundamental e Médio) a respeito do desenvolvimento de provas em cursos de formação de professores.

Professor FIIA

FIIA1:	O mesmo principio, que eu uso nas suas aulas do Ensino Médio, deve ser também adotado na formação de professores. Isso mesmo. Muitas das coisas que faço com os meus alunos do Ensino Médio também faço com os meus alunos da Licenciatura.
FIIA2:	O futuro professor deveria ser imerso na cultura matemática quando cursasse a licenciatura. Mas não ele não tem essa cultura.
FIIA3:	Isso eu li num artigo de um professor universitário, que a cultura do professor hoje, do primeiro e segundo graus, especialmente escolas que são mais na periferia, a cultura do professor é praticamente a mesma do aluno que ele vai dar aula. Isso daí é um problema gravíssimo. O professor tem que ter muito mais cultura do que o aluno pra poder montar uma aula interessante, e poder responder pra ele coisas que o aluno tem curiosidade e não consegue, não é?

Professor IIB

IIB1:	Eu acho que o rigor matemático, a ciência, é o que prevalece. Você tem que dominar; você tem que saber demonstrar, esse conhecimento é indispensável, mesmo que você não vá ensinar ... tua álgebra tem que ser muito...
IIB2:	Quando você for dar aula... eu tive que estudar... hoje em dia, tudo bem, eu dou aula há 12 anos, mas quando eu fui dar aula, há muitos anos eu não via... nossa!... mas na faculdade eu não tive nada disso, eu não tive a matéria que eu vi no ensino médio... nunca foi tocada aqui no ensino médio.

Professor IIC

FIIC1:	O professor demonstrava e nós assistíamos aquela demonstração passivamente, e enquanto ele estava demonstração eu entendia aquilo que ele estava fazendo, eu via que havia uma cadeia, uma seqüência de idéias, que iam se encaixando; parecia uma coisa perfeita e eu percebia que ele estava querendo chegar... porque ele ensinou que aquilo no enunciado, essa parte é a hipótese, essa é a tese... não era simples da gente entender isso, e a gente percebia que ele estava querendo chegar na aquela tese, mais eu nunca, nunca me atrevi a perguntar porque ele estava usando aquele argumento, porque ele usava aquele teorema como ferramenta numa demonstração posterior... nunca me atrevi a demonstrar um teorema partindo de outro ponto ou fazendo uma figura diferente daquela. Então no dia da prova, eu ficava satisfeita quando eu conseguia lembrar de todos os passos e todos os detalhes que eu tinha visto durante a aula....
FIIC2:	Se você entrevistar os professores da rede pública, principalmente, ou os professores mais jovens, eles são unânimes em dizer que a faculdade não os preparou para dar aula... seja no ponto de vista metodológico, seja no ponto de vista de contato com os alunos, ou seja na parte de conteúdo mesmo, não é?
fiIC3:	Parece-me importante, que o Curso de Licenciatura ofereça aos alunos, disciplinas que abordem também conteúdos Ensino Médio, mas, com um tratamento mais aprofundado e as demonstrações fazem parte desse aprofundamento.
FIIC4:	Guardadas as proporções, e guardadas as proporções o processo de aprendizagem do professor a respeito da demonstração deveria ser semelhante ao do aluno. Também eu acho que estou considerando que os professores que estão se formando agora, talvez não tenham uma formação nesse sentido. Eu acho que alguma parte deveria existir, nesse sentido, não é? Eu acho que ele precisa saber para poder ensinar, mas não pode partir de uma coisa tão formal. Mas ele precisa desse conteúdo, formal. Ele precisa saber demonstrar o teorema, corretamente, com toda a linguagem formal, tudo pra poder trabalhar com isso, mas..
FIIC5:	Mas ele pode querer transmitir a demonstração que ele aprendeu para os alunos. Pois é pode acontecer e recair naquele erro de antigamente, e não entender que a prova é um meio para estudar matemática e também um processo... Eu acho que precisava ter um trabalho no sentido, deveria haver um trabalho em que ele perceba... ele mesmo perceba que aquilo é construído, que ele pode fazer a construção dele, é? Não pode ser uma coisa pronta. Se ele perceber, isso eu acho que envolve um pouco a história da matemática, se ele perceber que ele mesmo pode construir esse processo da demonstração, acho que ele vai conseguir transmitir para o aluno...
FIIC6:	agora eu acho assim, falar em demonstração, é falar em convencer o outro, mas eu acho que o professor não vai conseguir convencer o seu aluno, se o aluno não acompanhar o raciocínio que ele esta fazendo. Eu acho que para um trabalho no ensino fundamental e médio, uma primeira coisa eu acho que precisaria ser o respeito pela limitação do aluno; precisaria partir de onde o aluno está, pra ir começando a construir esse processo do conceito aí da demonstração.

Professor IID

IID1:	Deveríamos demonstrar um teorema só depois de termos usado o resultado desse teorema em problemas e depois de Ter feito experimentações. Mas é fundamental fazer demonstrações formais na licenciatura. Um professor do ensino médio que sabe demonstrar, é respeitado pelos colegas e pelos alunos. Por isso eu defendo que deve chegar no rigor.

IID2:	Acho que o professor não deve começar um assunto e logo partir para a demonstração. No meu curso de Matemática, muitas vezes a gente nem tinha entendido o conceito que o professor estava ensinando e ele já introduzia as demonstrações. Em álgebra linear aconteceu muito. Eu nem tinha entendido direito o que era um espaço vetorial e já estava demonstrando algumas propriedades do espaço. Pior, o professor cobrava nas provas somente demonstrações que ele não havia feito em sala. Eu ficava animada porque eu conseguia, claro me matava de estudar para compreender e se não conseguia partia para a memorização dos teoremas que o professor falava que eram importantes. Mas quase sempre eu entendia. Alguns dos meus colegas também, mas a maioria....
IID3:	Acho que o papel da demonstração na minha formação foi muito dúbio. Sempre achei a demonstração algo muito interessante e fundamental para um professor de Matemática. Alguns teoremas todos os professores deveriam saber demonstrar. Mas conheci professores que não sabiam demonstrar o teorema de Pitágoras. Algumas demonstrações são tão bonitas. Será que existe algum matemático que não gosta demonstração? Mas a demonstração sempre me deixou frustrada. O meu esforço sempre foi no sentido de entender uma demonstração já feita pelo professor ou que já estava no livro. Mas raramente consegui demonstrar um teorema que eu não já não tivesse visto anteriormente a demonstração. Por isso sempre tive a sensação de fracasso, apesar de quase sempre ter tirado boas notas. Não tive coragem de fazer mestrado em Matemática Pura por puro medo de fracassar, nas demonstrações.
IID4:	Como uma pessoa pode tornar-se matemático ou professor de Matemática se ela não compreender a importância da dedução em Matemática? Sem compreender um sistema de axiomas? A demonstração diferencia a Matemática das outras ciências. Adoro ver demonstrações. Acho lindo. O professor em sua formação precisa ter contato com esses aspectos da Matemática. Nossos alunos também.
IID5:	Não fui preparada para dar aula de Matemática no Ensino Fundamental nem no Médio. Quando fui dar aula, não só tive que preparar minhas aulas mas tive que estudar mesmo. Eu já havia esquecido muitos assuntos que havia aprendido no meu curso médio e no cursinho. Outros eu nem havia aprendido, acho. É claro que meu curso me preparou para ler um bom livro didático do EM e compreender.
IID6:	Acho que uma pessoa para ser professor de Matemática deve saber os conteúdos do Fundamental e do Médio. Por isso, as faculdades deveriam ensinar esses assuntos, mas devem ir bem além do que está nos livros do ensino Médio. Deviam dar um pouco de didática desses assuntos, deveríamos analisar livros didáticos e para-didáticos. Mas é claro que as faculdades devem ir bem além e não pode ficar apenas com os conteúdos do ensino Médio: acho que aprendi muito com álgebra linear, e com cálculo. Agora, com Análise Matemática não aprendi quase nada. O que eu sei de Geometria foi o que eu aprendi dando aula e o que vi no cursinho.

Professor IIE

FIIE1:	Eu acho fundamental a demonstração na licenciatura e bacharelado, para a compreensão, porque aí o camarada, compreendendo, ele realmente aprendeu aquilo; ele sabe como é que funciona; ele sabe quando ele deve usar. Agora, como é que nós vamos formar professores que estejam voltados para isso? Porque normalmente o aluno entra numa faculdade que não foi difícil ele entrar. Ele não tem base nenhuma, o mestre por sua vez, nem toma conhecimento do fato de que ele, esse tal aluno, não tem a menor noção de demonstração nenhuma, o aluno não vê nenhum sentido naquela demonstração... então o que nós vamos ter que fazer é um trabalho inicial na licenciatura,

Professor IIF

IIF1:	O curso de Licenciatura não pode descartar o rigor, isto é, é necessário que seu ensino seja bem fundamentado e profundo. Um professor de Matemática, mesmo que vá só atuar no Ensino Fundamental precisa estudar a matemática como ela é, não somente aplicações. Deve haver um curso axiomático. Contudo, deve associá-lo as mudanças que ocorrem diariamente, possibilitando as pessoas que não vão somente se dedicar à matemática que possam incorporar um conhecimento que fará parte de sua vida.
IIF2:	Não sei como está o curso de graduação em Matemática, atualmente. Posso dizer somente com a experiência que tive. No meu curso de graduação, não tivemos vivência sobre situações reais que pudessem ser aplicadas. O curso foi totalmente teórico (e muito abstrato). Então, quando saí da faculdade, para poder me integrar no meio levei algum tempo. Talvez isso não tivesse acontecido se na faculdade tivéssemos vivenciado situações que mais tarde poderíamos aplicar aos nossos alunos do primeiro e segundo graus. Contudo não descarto a necessidade do professor de matemática, ter uma formação mais rígida, como se tinha, isto é, continua necessário que o seu conhecimento não seja somente superficial e aplicativo.
IIF3:	O significado da demonstração na minha formação como professor de Matemática foi essencial. Contudo acredito que deveria ter passado por algumas “fases”. O rigor matemático nem sempre é necessário no curso do primeiro e segundos graus. Deveríamos ter vistos “outras maneiras” de demonstrações, para atingir um público que não seja essencialmente “matemático”.

Professor IIG

IIG1:	Um professor precisa até saber fazer as demonstrações dos teoremas, mesmo que ele não passe isso aos alunos, ficando somente com a experimentação, o que é já uma grande coisa. Vou te falar uma coisa: eu sou muito respeitado por meus colegas da rede pública por saber as demonstrações. Eles pedem auxílio para mim muitas vezes: saber o porque disso, o porque daquilo. Não fizeram uma boa faculdade. Acho que para formar um bom professor é necessário que o curso tenha demonstrações formais. Não só, mas tenha. Elas dão uma certa seriedade ao curso
IIG2:	Muitos dos professores formados hoje não sabem nada de demonstrações. Para o professor poder ensinar uma demonstração ele tem que saber muito o conteúdo. Ele tem que saber usar o teorema, aquela propriedade, enfim saber aplicar. Ele precisa saber um pouco da história. Caso contrário ele pode passar para a classe uma demonstração formal, que o aluno teria que memorizar para reproduzir na prova. Ele tem que consultar os bons livros didáticos, acho que tem paradidáticos excelentes. Pena que não tenha de todos os assuntos. Esses livros trazem informações históricas, indicam experimentações e mostram aplicações. Tudo fica bem concreto. Depois o professor complementaria com a demonstração quando fosse o caso. Acho que não pode haver demonstração na sala de aula se não houver um pouco desse caminho. Eu faço isso.

IIG3:	Acho que para o professor ensinar dessa forma ele deve ter visto ele mesmo esse caminho. Se ele não teve isso no 1º grau ou no colegial ele deverá ter na faculdade. Ou seja, na faculdade não é só estudar os teoremas do cálculo, da álgebra, etc, etc, mas também os conteúdos do 1º e 2º graus. Ele precisa estudar na licenciatura Geometria Plana, demonstrar os teoremas, conhecer a axiomática da geometria euclidiana. Saber explicar e justificar as regras de divisibilidade que ele vai ensinar. Não estou dizendo que a faculdade de matemática deve refazer todo o Ensino Fundamental e Médio, mas que retome e aprofunde alguns dos conteúdos mais essenciais. Eu acho isso mesmo que todos os alunos do curso de matemática tivessem tido um bom colegial e cursinho. Eles precisam aprofundar alguns conteúdos que já foram vistos, estudar novas maneiras de ensinar esses conteúdos e conhecer um pouco da história da Matemática. Se ele tiver isso no curso ele poderá ensinar de uma forma mais interessante, inclusive as demonstrações. E quanto às demonstrações deveria ser muito discutido o caminho a seguir. O futuro professor deve saber que a simples reprodução de um teorema na sala de aula não vai garantir nada. Ele precisa conhecer alguns caminhos até se chegar à demonstração formal. Acho que um caminho poderia ser esse: compreender o significado do teorema, saber aplicar esse teorema em problemas, pesquisar a história e depois demonstrá-lo. E algumas demonstrações nem precisariam ser feitas.
IIG4:	Acho que os conteúdos do Ensino Médio deveriam fazer parte do curso de licenciatura. Mesmo para aqueles que tiveram um bom curso médio. Claro que a dosagem poderia variar de curso para curso.
IIG5:	Os cursos de licenciatura devem ter em mente que o seu principal objetivo é formar um professor de Matemática que vai lecionar no 1º e no 2º graus. Mas é claro que se deve ir além. Acho que na licenciatura deve ter cálculo diferencial e integral, geometria analítica por meio de vetores, álgebra, um pouco de álgebra linear. Afinal um professor de Matemática precisa saber Matemática. Então, o professor precisa dominar o conteúdo que vai lecionar e além dele, saber seus resultados, deduzir as fórmulas principais de cada assunto, conhecer alguns problemas históricos e conhecer as dificuldades que os alunos têm sobre cada assunto, usar alguns softwares