GLADYS DENISE WIELEWSKI

Aspectos do pensamento matemático na resolução de problemas: uma apresentação contextualizada da obra de Krutetskii

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC

São Paulo

2005

GLADYS DENISE WIELEWSKI

Aspectos do pensamento matemático na resolução de problemas: uma apresentação contextualizada da obra de Krutetskii

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Doutor em *Educação Matemática,* sob a orientação do Prof. Dr. Michael Otte e da Profª Drª Anna Franchi.

PUC

São Paulo

2005

Banca Examinadora

Michael F. Otte - Orientador
Pesquisador UFMT/Universitat der Bielefeld - Alemanha

Anna Franchi (PUC/SP) Co-orientadora

Maria Ângela Miorim (UNICAMP)

Sonia Barbosa Camargo Igliori (PUC/SP)

Sandra Maria Pinto Magina (PUC/SP)

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor orientador Dr. Michael Otte, pelos incontáveis momentos de orientações necessárias ao desenvolvimento desta Tese de Doutorado, pela paciência, disponibilidade e, principalmente, pela oportunidade de crescimento intelectual e profissional.

Agradeço à professora Drª Anna Franchi, pela sua experiência profissional e pelas inúmeras sugestões e orientações no desenvolvimento desta Tese de Doutorado.

Agradeço aos membros da Banca Examinadora desta Tese de Doutorado, que contribuíram de forma muito especial e qualitativa para o aprimoramento da mesma.

Agradeço à todos os professores da PUC–SP, pelos inúmeros conhecimentos, experiências e oportunidades de crescimento intelectual e profissional.

Agradeço às amizades estabelecidas neste Curso de Doutorado que foram fundamentais, como apoio pessoal e intelectual.

Agradeço aos treze estudantes que participaram da pesquisa exploratória, pela disponibilidade de tempo, paciência e grande contribuição, com informações que foram valiosas e muito interessantes para o desenvolvimento desta Tese.

Agradeço ao meu irmão Sergio, pelo suporte emocional e técnico, sobretudo, na formatação final desta Tese.

Agradeço à minha família pelo apoio, dedicação e compreensão nos diversos momentos desta trajetória, construída no decorrer do Curso de Doutorado.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

RESUMO

Palavras–Chave: Epistemologia, História da Matemática, pensamento matemático, resolução de problemas e representação matemática.

A presente Tese de Doutorado pretende indicar características e dimensões do pensamento matemático, em termos teóricos e experimentais, que podem ser úteis aos professores no que se refere aos processos de ensino, ao desenvolvimento de idéias matemáticas e ao delineamento de contextos de aprendizagem. Nosso estudo começou com uma análise detalhada do trabalho de Krutetskii (1968). Esse livro é muito rico em exemplos e reflexões teóricas. No entanto, é um trabalho completamente psicológico e forneceu poucas indicações a respeito dos aspectos mais gerais do conhecimento matemático e do pensamento matemático. Por esse motivo, adicionamos informações detalhadas sobre o trabalho de outros autores como Gowers, Poincaré, Boutroux, Otte e Kurz que acrescentaram outras dimensões que auxiliaram a nossa compreensão da natureza da Matemática. Esses autores se preocuparam com problemas de estilos cognitivos, de diferenças culturais e históricas, de diferenças que são resultados das várias áreas da própria Matemática e distintas formas de representação na Matemática. As dimensões experimentais consistiram na análise de dados obtidos em pesquisas qualitativas com estudantes, sendo uma da literatura (Krutetskii) e outra uma pesquisa exploratória realizada por nós para a presente Tese. Krutetskii realizou uma investigação experimental envolvendo 201 estudantes russos do Ensino Fundamental, com diferentes habilidades matemáticas. A esses estudantes foram propostas diversas séries de problemas matemáticos, em que foram observadas suas habilidades matemáticas durante o processo de resolução. Na nossa pesquisa, realizamos estudos de caso exploratório na resolução de problemas matemáticos envolvendo 13 estudantes da Universidade Federal de Mato Grosso, sendo 09 do Curso de Licenciatura Plena em Matemática e 04 do Curso de Ciências da Computação. A pesquisa exploratória foi organizada em três momentos. O primeiro foi destinado a responder um questionário com perguntas subjetivas acerca da Matemática e de preferências na forma de pensar e de lidar com a mesma. O segundo momento foi reservado para a resolução de 13 problemas matemáticos variados. E o último momento foi destinado para responder a outro questionário com perguntas subjetivas que procurava obter informações sobre a experiência dos estudantes na atividade de resolução dos problemas propostos. Com a nossa pesquisa exploratória pudemos documentar e verificar vários parâmetros e características do pensamento matemático que foram descritos nos capítulos teóricos, bem como identificar que os próprios problemas e as experiências com a resolução dos mesmos também influenciam o pensamento matemático. Como resultado geral, concluímos que o pensamento matemático deve ser considerado sob diferentes parâmetros, pois eles podem auxiliar na caracterização mais completa do pensamento matemático.

ABSTRACT

Key Words: Epistemology, Mathematic History, mathematical thinking, problem solving and mathematical representation.

This doctorate thesis aims to identify the characteristics and the dimensions of mathematical thinking in experimental and theoretical terms which may be useful to teachers with respect to teaching processes, development of mathematical ideas and the delineation of learning contexts. Our study began with a detailed analysis of the work of Krutetskii (1968). This book is very rich in theoretical examples and reflections. It is, however, a completely psychological work and provided few indications of the more general mathematic knowledge and thinking. For this reason we added detailed information about the work of other authors such as Gowers, Poincaré, Boutroux, Otte and Kurz, and this added other dimensions which assisted our understanding of the nature of mathematics. These authors were concerned with the problems of cognitive styles, cultural and historical differences, differences that are the results of mathematics itself and distinctive ways of representing mathematics. The experimental dimensions consisted of analysis of data obtained from qualitative research with students whereby one was taken from the literature (Krutetskii) and the other an exploratory survey which we carried out for the purposes of this thesis. Krutetskii carried out an experimental investigation involving 201 Russian students with different mathematic abilities, attending elementary school. These students were presented with a number of different series of mathematic problems and their mathematic abilities were observed during the problem solving process. In our survey we carried out case studies exploring mathematic problem solving involving 13 students from the Federal University of Mato Grosso with 9 students from the Mathematics/Education course and 4 students from the Computer Sciences Course. The exploratory survey was organized into 3 phases. The first was the completion of a questionnaire with subjective questions about Mathematics and preferred ways of thinking and dealing with this subject. The second phase was reserved for the solution of 13 varied mathematical problems. The final phase was the completion of another questionnaire with subjective questions which sought to obtain information about the experiences of the students when solving the problems set. With our exploratory survey we were able to document and verify several parameters and characteristics of mathematical thinking which were described in the theoretical chapters as well as being able identify the problems themselves and the experience of solving them also influenced mathematical thinking. As a general result we concluded that mathematical thinking must be considered in the light of different parameters since this can help to characterize more complete mathematical thinking.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Nosso trabalho começou pela elaboração de um projeto de pesquisa de Doutorado que teve como eixo central o pensamento matemático, analisado por meio de dimensões teóricas e experimentais. Nas dimensões teóricas apresentamos alguns aspectos que influenciam o pensamento matemático. Nas dimensões experimentais expomos algumas análises do pensamento matemático na resolução de problemas obtidas por intermédio de pesquisas envolvendo estudantes, sendo uma da literatura e outra uma pesquisa exploratória realizada para a presente Tese.

Como primeira referência teórica e experimental desenvolvemos um estudo do livro do psicólogo russo Vadim A. Krutetskii, traduzido para o Inglês por J. Teller e editado por Kilpatrick e Wirszup em 1976, sob o título *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*.

Esse livro, originalmente publicado por Krutetskii em russo no ano de 1968, é resultado de um programa de pesquisa desenvolvido por ele e sua equipe, composta por 50 pessoas, com duração de 11 anos (1955 a 1966). Eles realizaram uma ampla e longa investigação no que se refere às habilidades matemáticas, envolvendo 201 estudantes russos.

Os estudantes foram divididos em quatro grupos: estudantes muito capazes em Matemática, capazes, médios e menos capazes em Matemática. Tal avaliação foi feita pelos professores desses estudantes. Foram realizados estudos de caso com eles em que os mesmos foram observados durante a resolução de diversos problemas matemáticos. Não foram realizados somente testes estatísticos para obter pontuações, mas também foram analisados os processos de resolução dos problemas propostos.

A comparação do desempenho desses estudantes propiciou a Krutetskii (1968) descrever talento matemático na resolução dos problemas tendo como parâmetro alguns componentes de habilidades matemáticas, ou seja, características psicológicas pessoais.

Krutetskii (Ibidem, p. 352, tradução nossa) caracterizou talento matemático como “um pensamento generalizado, com redução dos passos no processo de raciocínio e pensamento flexível no reino das relações matemáticas, símbolos numéricos e literais e por uma constituição matemática da mente”.

A constituição matemática da mente foi definida por ele como uma expressão sintética de talento matemático que envolve aspectos cognitivo, emocional e da vontade (uma atitude apropriada, inclinação, interesse e uma necessidade para realizar a atividade matemática). Essa constituição incluiu alguns componentes de habilidades matemáticas, tais como: a velocidade do processo mental, habilidades computacionais, memória para símbolos, números e fórmulas, habilidade para conceitos espaciais e habilidade para visualizar relações matemáticas abstratas e dependências.

Constatamos que essa descrição de talento matemático na resolução de problemas foi feita por meio de um grande conjunto de habilidades matemáticas distintas.

Por que Krutetskii utilizou resolução de problemas? Porque é difícil definir habilidades matemáticas de forma geral. As características físicas de uma pessoa podem ser observadas visualmente. No entanto, as suas habilidades matemáticas são reveladas somente quando ela desenvolve uma atividade matemática. Isso significa que vários ramos da Matemática poderão exigir habilidades diferentes.

A pesquisa de Krutetskii foi importante porque forneceu uma imagem diferenciada sobre a variedade de talentos e de estilos cognitivos, bem como explorou vários aspectos do pensamento matemático presentes no processo de resolução de problemas. Foi uma pesquisa exploratória ampla e profunda, por isso o resultado do estudo referente à sua obra não pode se resumir na enumeração de alguns conceitos e termos.

Para que haja um entendimento científico de qualquer obra é preciso descobrir os aspectos promissores e dinâmicos em uma pesquisa, que possam ser prolongados, reconstruídos e ampliados na própria pesquisa.

Cada pesquisa sempre tem dois lados. Um lado informativo que aumenta o conhecimento sobre o assunto, propiciando algumas reflexões e indagações. E outro lado instrumental que ajuda a aperfeiçoar a metodologia utilizada, auxiliando na elaboração da estrutura da pesquisa, na definição dos aspectos teóricos e metodológicos necessários ao desenvolvimento da mesma.

O estudo da obra de Krutetskii (1968) deu origem a nossa primeira questão da pesquisa: *Podemos afirmar que o pensamento matemático está associado somente às características psicológicas pessoais e não relacionado a outros parâmetros, tais como épocas históricas diferentes, contextos culturais distintos, áreas de conhecimento e de aplicação e formas de representação (semiótica)*?

Essa questão é resultante de um entendimento científico da obra de Krutetskii, pois acreditamos que o pensamento matemático não é um assunto que possa ser esgotado somente com base em características psicológicas pessoais. O próprio Krutetskii revelou que o talento matemático envolve diversas habilidades matemáticas.

Acreditamos que o objeto principal de uma pesquisa sobre o pensamento matemático é a própria atividade. Tomando a perspectiva da atividade cognitiva na pesquisa sobre o pensamento matemático, surge a necessidade de considerar tanto as características psicológicas pessoais como os aspectos epistemológicos, culturais, sociais, históricos e semióticos. Por esse motivo fazemos uma reconstrução mais ampla do estudo de Krutetskii, considerando outras dimensões e parâmetros que também influenciam o pensamento matemático.

Na atividade há um sujeito com suas habilidades e um objeto (problema matemático, por exemplo) com suas exigências, desafios e estímulos. E é na interação entre o sujeito e o objeto que as habilidades e as características de uma pessoa são reveladas. Em outras palavras, na atividade são reveladas características do objeto, do sujeito, do ambiente social, bem como da disponibilidade, ou não, de alguns instrumentos como computadores, livros, etc.

Por exemplo, uma pessoa talentosa pode desenvolver uma atividade diferentemente, se ela dispõe de uma grande biblioteca ou se não tem nenhum livro como fonte de informação. O importante não é a pessoa, e sim, a pessoa e a atividade, bem como as condições necessárias para desenvolver essa atividade.

A atividade pode ser entendida como um processo, porém, qualquer atividade mais complexa envolve diversos processos e atividades. E, muitas vezes, diante de tarefas complexas, pode ser mais interessante ver como se inter-relacionam essas diversas atividades e pensamentos. Esse processo é construído por meio das relações que se manifestam na interação entre o sujeito e o objeto, que pode ser um problema matemático, por exemplo.

Otte (1993) comentou que essa relação tem três níveis de características diferentes que são expostas no diagrama da atividade cognitiva humana a seguir:

Substanciação teórica

$\updownarrow$

Concepções de modelagem

$\updownarrow$

Procedimentos e algoritmos

Fonte: E. JUDIN apud OTTE, 1993, p. 291.

Otte (1993) destacou que temos, de um lado, teorias ou fundamentos teóricos e, de outro, os procedimentos, regras e algoritmos. “Ambos os lados aparecem numa espécie de complementaridade que é representada em nossa cognição por meio de *modelos*. (...) O ponto vital do diagrama não é a hierarquia, mas as correlações indicadas pelas setas” (OTTE, 1993, p. 291-292).

Para nós, educadores matemáticos, o ponto de vista da atividade matemática é mais fértil porque o professor na escola ou na universidade não tem como tarefa principal classificar seus estudantes. Sua tarefa é desenvolver a atividade matemática nesses estudantes.

Pensando na atividade matemática, tendo como referência o estudo da obra de Krutetskii no que se refere à problemas matemáticos, elaboramos a segunda questão da pesquisa: Como a representação influencia o entendimento e o desenvolvimento da Matemática?

Em um problema, o aspecto decisivo para sua resolução nem sempre é muito evidente. É o problema em si? É a representação do problema? São as habilidades ou características da pessoa que está resolvendo-o?

No que se refere aos problemas matemáticos, temos alguns livros que apresentam orientações de como resolvê-los. Um deles é o famoso livro de Polya (1948), intitulado *How to Solve it*, que serviu, e provavelmente ainda serve, de referência para pesquisadores e professores.

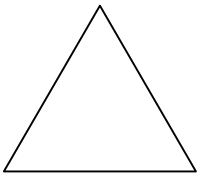
Nesse livro, dentre os diversos pontos sobre problemas matemáticos abordados, podemos destacar um, que se refere à existência de situações em que um problema pode ser resolvido por analogia, que na concepção de Polya (1948) é uma espécie de semelhança. Problemas semelhantes coincidem uns com os outros em alguns aspectos, ou seja, em certas relações das suas respectivas partes. Polya (1948) afirmou que todas as formas de analogia são importantes e podem contribuir para a descoberta da solução de um problema.

Ele recomendou que ao depararmos com um problema a resolver, uma pergunta deve ser feita *Conhecemos um problema correlato?* E declarou que:

> Nós mal podemos imaginar um problema absolutamente novo, sem qualquer semelhança ou relação com qualquer outro que já tenha sido resolvido; se tal problema pudesse existir, ele seria insolúvel. De fato, ao resolver um problema, sempre aproveitamos problemas anteriormente resolvidos, utilizando os seus resultados, ou os seus métodos, ou as experiências adquiridas ao resolvê-los. Além do que, naturalmente, os problemas de que nos aproveitamos devem ser, de alguma maneira, relacionados com o problema atual (POLYA, 1948, p. 92, tradução nossa).

Será que analogia entre problemas é algo fácil de ser percebido? Como provar que existe determinada analogia? Polya (1948) não levou em consideração o fato de que o próprio problema deve estimular a busca de analogias. Se quisermos aplicar suas recomendações chegamos ao problema da perspectiva, ou seja, precisamos ter uma perspectiva do assunto, olhá-lo de um ângulo diferente para revelar uma provável analogia. Não basta simplesmente afirmar que existe analogia entre problemas, e sim, devemos buscar elementos que a confirmem.

Além disso, não podemos nos restringir ao aspecto superficial que a aparência nos sugere. Ao contrário, devemos nos orientar por uma classificação estrutural do problema, pois é por meio dela que descobrimos a base da analogia. Por exemplo, dadas as seguintes situações:

(I)  (II) $x + y + z$ (III) $x \, . \, y + z$

De um lado, podemos supor que entre (II) e (III) há certa semelhança, tomando como referência a Álgebra. Essa conclusão poderia ser sugerida pela aparência. No entanto, essa é uma classificação empírica porque ela não expõe com precisão o critério para essa semelhança.

Por outro lado, podemos supor que (I) e (II) são semelhantes, tendo como parâmetro a simetria de rotação, se considerarmos o conceito de invariância ao inverter os vértices do triângulo eqüilátero em (I) e as parcelas da adição em (II), já que isso não provocará nenhuma alteração. Analogia depende da representação ou dos signos, na concepção de Peirce, sobretudo das representações que são mais adequadas à resolução do problema proposto.

Nesse sentido, a representação adquire um papel fundamental na resolução de problemas, pois não há pensamento ou conhecimento sem signos ou representações.

Esses pontos expostos acima correspondem à reconstrução e ampliação do estudo da obra de Krutetskii, uma vez que estamos considerando o pensamento na atividade matemática e, nesse caso, há outros fatores que também influenciam o pensamento, como os contextos culturais, históricos, epistemológicos e semióticos.

A reconstrução e ampliação dessa obra orientaram a elaboração da estrutura da Tese de Doutorado, composta por 4 capítulos, conforme resumimos a seguir.

Dedicamos o capítulo 1 desta Tese ao estudo da tradução do livro de Krutetskii. Esse estudo foi estruturado em três partes. Na primeira parte, elaboramos uma síntese de sua obra, mantendo os respectivos capítulos estabelecidos por ele.

Na segunda, destacamos os principais resultados de sua investigação experimental que o conduziram a descrever talento matemático na resolução de problemas, em termos de características psicológicas pessoais.

Na terceira parte, fazemos uma interpretação de alguns de seus resultados obtidos com a investigação experimental, caracterizando estilos cognitivos matemáticos, manifestados durante a resolução de problemas.

Aproveitamos para inserir uma descrição de estilos cognitivos identificados na pesquisa exploratória realizada para a presente Tese de Doutorado. A pesquisa exploratória envolveu treze estudantes universitários, sendo nove do Curso de Licenciatura Plena em Matemática e quatro do Curso de Ciências da Computação, ambos da Universidade Federal de Mato Grosso-Cuiabá (UFMT). Esses estudantes foram convidados por seus professores, porém, participaram da pesquisa aqueles que manifestaram interesse e disponibilidade de tempo para a mesma.

No capítulo 2 apresentamos outras dimensões do pensamento matemático, que surgiram do estudo da obra de Krutetskii (1968). Por exemplo, os estilos cognitivos surgiram durante a análise do estudo de caso de dois de seus estudantes pesquisados – Sonya e Volodya.

Nesse capítulo, primeiramente expomos as idéias de Gowers (2000), publicadas em um artigo sob o título *The Two Cultures of Mathematics*. Nesse artigo, ele retratou a existência de duas culturas na Matemática, distinguidas por solucionador de problemas ou construtor de teorias gerais. A distinção está vinculada à finalidade da Matemática, ou seja, com o que se espera de uma resolução de determinado problema. Para o primeiro, a preocupação é a aplicação; para o segundo, é obter generalizações. O autor considerou o pensamento matemático sendo influenciado pelas áreas de conhecimento, pois algumas propiciam a elaboração de teorias gerais e outras utilizam princípios heurísticos de ampla aplicabilidade, porém, não sob a forma de teoremas. Ele citou como exemplo a área de Combinatórios que se diferencia da Matemática Pura por não construir métodos ou teorias gerais. Ele apontou diferenças de pensamento matemático existentes no interior da própria Matemática.

Para esclarecer as idéias de Gowers (2000) utilizamos alguns problemas presentes no artigo de Otte (2003a) denominado *Does Mathematics Have Objects? In What Sense?*, em que são utilizados dois procedimentos de resolução: o indutivo e o axiomático. Otte (2003a) mencionou que duas idéias distintas podem ser decisivas na resolução de um problema particular e assim, parecerem equivalentes. Entretanto, a utilização delas em outro problema pode mostrar o contrário, ou seja, pode evidenciar a diferença entre essas idéias.

Em seguida, abordamos estilos cognitivos e a História da Matemática. Para tanto, apresentamos uma síntese do capítulo 1 “A Intuição e a Lógica na Matemática” do livro de Poincaré (1905) intitulado *O valor da Ciência*. O autor elucidou dois pensamentos matemáticos distintos que estão associados à natureza da pessoa e também à época no desenvolvimento da Matemática que, por exemplo, deu origem a uma mudança na intuição, ou seja, na forma de pensar e de lidar com a Matemática.

Na seqüência, buscamos Boutroux (1920), que no livro *L’idéal scientifique des mathématiciens – Dans l’Antiquité et dans les Temps Modernes* apresentou uma evolução da Matemática na história ocidental desde Platão, apontando uma grande transformação ocorrida no início do século XIX, ou seja, a modificação de um pensamento sintético para um pensamento analítico.

Ainda no capítulo 2, discutimos estilos cognitivos e formas de representação na Matemática. Nesse contexto, utilizamos os argumentos de Otte (1986), expostos no artigo *What is a text?* para destacar o papel dos livros didáticos de Matemática, no que se refere à representação, bem como a necessidade de complementá-los com atividades matemáticas. Havendo essa complementaridade podemos aumentar a chance de viabilizar o desenvolvimento do pensamento matemático associado à experiência do estudante com a referida disciplina.

Na seqüência, mencionamos uma pesquisa desenvolvida por Kurz em 1997, na qual ela descreveu pensamentos matemáticos e distintas formas de representação vinculadas às áreas do conhecimento, dadas pela formação acadêmica, e às experiências adquiridas. Ao pesquisar professores das áreas de Matemática, Química e Física ela verificou que todos empregaram conhecimentos de suas áreas para representar e resolver um problema de Cálculo.

Dedicamos o capítulo 3 ao estudo de alguns problemas matemáticos, particularmente, os problemas que possibilitam a utilização de diferentes processos de resolução e aqueles que propiciam a elaboração e utilização de idéias gerais.

Na Matemática não podemos expressar claramente uma distinção entre situação problemática, representação do problema ou pergunta e problema matemático. A representação deveria ser formulada de forma que fizesse a mediação entre a situação problemática e um problema viável.

Nesse processo, diferentes pessoas podem analisar de maneiras distintas a situação problemática, pois certa perspectiva ou representação pode ser melhor do que outra, dependendo da intenção da pessoa, de seu interesse, de sua experiência, de seu conhecimento, da sua intuição, de seu talento e dos instrumentos disponíveis.

Para contribuir com esse estudo teórico acerca do pensamento matemático, bem como para realizar um entendimento científico da investigação experimental de Krutetskii, para além dos aspectos psicológicos, foi organizada uma pesquisa exploratória com o grupo de estudantes universitários da UFMT, mencionado anteriormente.

Krutetskii investigou estudantes russos do ensino fundamental com idades variando de 9 a 17 anos. Entretanto, decidimos selecionar estudantes universitários, pela vivência e pela maturidade do pensamento matemático, em relação aos nossos estudantes do Ensino Fundamental. Nessa perspectiva, por terem mais experiências com a atividade matemática, poderiam gerar diferentes resoluções para os problemas propostos e teriam mais condições de responder às perguntas do questionário a *priori* e a *posteriori*.

Assim, no capítulo 4 apresentamos os procedimentos metodológicos que nortearam a elaboração da pesquisa exploratória expondo a descrição dos sujeitos, os dois questionários, o roteiro com os problemas matemáticos utilizados, os resultados obtidos com a nossa pesquisa e comentários acerca de alguns dos problemas propostos.

A pesquisa exploratória foi dividida em três momentos. O primeiro foi destinado a responder um questionário acerca da Matemática e de preferências na forma de pensar e de lidar com a mesma. O segundo momento foi reservado para a resolução de 13 problemas matemáticos, sendo oito problemas de aplicação da Matemática e cinco problemas teóricos. Além disso, alguns propiciavam a utilização de diferentes processos de resolução e outros a elaboração e utilização de idéias gerais. O último momento foi destinado para responder a outro questionário com perguntas subjetivas, com a finalidade de obter informações sobre a experiência dos estudantes na atividade de resolução dos problemas propostos.

Por fim, as considerações finais retomaram as duas questões da nossa pesquisa e, ao respondê-las, apresentamos as conclusões da Tese. Apontamos também algumas sugestões que podem estimular o desenvolvimento de futuras pesquisas.

CAPÍTULO 1

1. KRUTETSKII: TALENTO MATEMÁTICO E ESTILOS COGNITIVOS

Escolhemos como nossa primeira fonte de pesquisa bibliográfica uma das obras de Vadim Andreevich Krutetskii (1917-1989), cujo nome em russo é КРУТЕЦКИЙ ВАДИМ АНДРЕЕВИЧ. Ele foi um psicólogo que trouxe grandes contribuições para a Psicologia soviética, sobretudo no que se refere às habilidades matemáticas de estudantes e fez 27 publicações referentes ao tema.

Krutetskii e sua equipe, formada por 50 pessoas, dentre elas os pesquisadores Dubrovina e Shapiro, realizaram um longo e extenso estudo acerca de habilidades matemáticas evidenciadas durante a resolução de problemas. Esse estudo foi desenvolvido por meio de um programa de pesquisa que começou em 1955 e foi concluído em 1966, culminando na publicação russa do livro acima citado, no ano de 1968, contendo 431 páginas.

Os sujeitos da pesquisa faziam parte de um grupo formado por 201 estudantes com habilidades matemáticas diferentes e idade variando de seis a dezessete anos. O estudo com esses estudantes permitiu que Krutetskii caracterizasse talento matemático na resolução de problemas matemáticos.

A importância do livro foi reconhecida internacionalmente, despertando o interesse principalmente de alguns pesquisadores americanos. Kilpatrick (professor de Educação Matemática da Universidade de Geórgia) e Wirszup (professor de Matemática da Universidade de Chicago) em 1976 editaram uma tradução do livro de Krutetskii do russo para o inglês, feita por J. Teller, sob o título *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*.

Essa obra tratava de pensamento matemático e processos de resolução de problemas considerados sob o ponto de vista de características psicológicas. Nosso alvo era questionar esse ponto de vista e interpretá-lo sob o olhar matemático, no qual o que se sobressaiu foi a atividade matemática envolvida na resolução de problemas.

1.1. A Obra de Krutetskii

Krutetskii (1968) organizou seu livro em três partes, que foram subdivididas em 18 capítulos. Apresentamos abaixo o índice do livro de Krutetskii, traduzido para o português pela autora desta tese e, na seqüência, uma síntese da introdução dos editores do livro na versão em inglês, bem como um resumo do que Krutetskii discutiu em cada capítulo.

A Psicologia das habilidades matemáticas de estudantes

8. O sistema de problemas experimentais para a investigação das habilidades matemáticas de estudantes (77 páginas)
9. Organização da investigação experimental (6 páginas)

III. Análise da estrutura das habilidades matemáticas de estudantes (contendo 180 páginas)

10. Análise dos dados não-experimentais nos componentes das habilidades matemáticas de estudantes (8 páginas)
11. Análise de casos individuais de talentos matemáticos em estudantes (31 páginas)
12. Características dos processos de coleta das informações (orientação inicial para um problema) de estudantes matematicamente capazes (13 páginas)
13. Características dos processos de tratamento das informações durante a resolução de problemas de estudantes matematicamente capazes (58 páginas)
14. Características dos processos de retenção das informações (conteúdo matemático) de estudantes matematicamente capazes (7 páginas)
15. Alguns assuntos especiais na estrutura das habilidades matemáticas de estudantes (11 páginas)
16. Categoria, idade e diferenças de gênero nos componentes das habilidades matemáticas (31 páginas)
17. Habilidades matemáticas e personalidade (6 páginas)
18. Questões gerais concernentes à estrutura de habilidades matemáticas (15 páginas)

O maior número de páginas se concentrou na parte III na qual Krutetskii (1968) descreveu os resultados obtidos com a investigação experimental e com os questionários, sendo enriquecidos com teorias existentes na literatura referentes às habilidades. Vale ressaltar que foram destinadas mais páginas à análise crítica da literatura psicológica de países capitalistas no que se refere às habilidades matemáticas (capítulo 2) do que a análise da literatura psicológica de países socialistas (capítulo 3).

Antes de apresentarmos um resumo da obra traduzida para o inglês por J. Teller e editada por Kilpatrick e Wirszup, faz-se necessário situar o leitor quanto à diferença na metodologia utilizada nas pesquisas na área da Psicologia sobre habilidades matemáticas nos países capitalistas (Estados

Unidos e Inglaterra) e socialistas (União Soviética). Essa contextualização explica os argumentos utilizados pelos editores na introdução da versão em inglês do livro de Krutetskii.

Na década de 30 surgiu nos Estados Unidos uma corrente psicológica denominada Behaviorismo, voltada ao estudo do comportamento das pessoas. Os seguidores dessa corrente defendiam a idéia de que não se pode saber nada acerca das características cognitivas de um sujeito. Só se podem ter algumas informações de seu comportamento diante de algo, obtidas preferencialmente por meio de um teste, como por exemplo, teste de inteligência. Para os behavioristas não é possível fazer previsões, e sim avaliar o conhecimento de uma pessoa com base no passado e no presente.

Em contraposição, a pesquisa soviética não dava crédito aos testes. Seus seguidores alegavam que os mesmos não eram utilizados com a finalidade de se fazer previsões, de identificar potencialidades, habilidades ou talentos das pessoas, como, por exemplo, testes diferentes para verificar se o estudante aprendeu algum conteúdo escolar, etc. A medição por teste envolvia fatos isolados que não forneciam informações acerca da cognição em geral. Para averiguar se uma pessoa tinha talento era preciso observar e descrever o seu desenvolvimento cognitivo em determinada atividade, como, por exemplo, música, resolução de problemas, etc.

A divergência entre a visão de psicólogos americanos e ingleses e de psicólogos soviéticos, no que se refere ao emprego de testes para investigar habilidades matemáticas, foi grande, existindo de um lado, pesquisas objetivas (testes) e, de outro, pesquisas subjetivas (estudo qualitativo, mais interpretativo dos processos de resolução dos testes). Isso foi um reflexo da ruptura que na época existia na política dos países capitalistas e socialistas, que consequentemente provocou uma ruptura também na pesquisa em Psicologia. Países socialistas e capitalistas tinham diferenças culturais, econômicas e políticas.

Krutetskii era marxista e na primeira parte de seu livro apresentou uma revisão da literatura americana e inglesa a respeito de habilidades matemáticas na qual criticava a metodologia utilizada pelos psicólogos desses países capitalistas. Ele contestava a forma de investigação que se baseava exclusivamente na aplicação de testes para identificar talento matemático, tendo em vista que os mesmos forneciam apenas uma avaliação formalmente quantitativa apoiada em resultados numéricos.

Diante da crítica feita por Krutetskii (1968), Kilpatrick & Wirszup redigiram uma introdução caracterizando a apresentação de uma metodologia marxista em contraste com a metodologia behaviorista americana.

A introdução do livro de Krutetskii segundo os editores

Kilpatrick & Wirszup (1976) iniciaram sua introdução retratando a evolução na pesquisa ocidental (capitalistas) sobre habilidades matemáticas, justificando a metodologia empregada e apontando suas contribuições. Eles asseguraram que os psicólogos educacionais dos Estados Unidos e de outros países ocidentais fizeram grandes avanços na pesquisa durante as décadas anteriores a 1970, em virtude da adoção de técnicas que provaram serem úteis tanto na Psicologia como em outras ciências.

Tomaram como exemplo a investigação de habilidades matemáticas em que muitas pesquisas (recentes na época) eram desenvolvidas da seguinte forma: o investigador reunia vários testes supondo ter alguma relação com habilidades matemáticas, aplicava-os a uma amostra de estudantes e obtinha uma pontuação em cada teste para cada sujeito. Buscavam correlações entre as pontuações do teste, utilizando o método estatístico de Análise Fatorial, para determinar como os testes estavam correlacionados.

Os editores afirmaram que diferentes métodos de Análise Fatorial poderiam fornecer distintos aspectos das habilidades, porém, cabia ao investigador identificar cada habilidade, deduzindo o que é comum aos testes para produzir o fator geral em foco.

Na opinião deles, apesar das controvérsias existentes de como deveria ser administrada a Análise Fatorial, não se podia negar seu poder para extrair valiosa informação de pontuações obtidas por meio de testes.

Os editores enfatizaram que a Análise Fatorial era o método estatístico escolhido para desenvolver pesquisas a respeito de habilidades no

Ocidente desde o início do século XX. No entanto, admitiam que poderia ser útil obter alguma perspectiva no que se refere às influências na pesquisa, analisando o trabalho de pesquisadores que não compartilhavam a mesma tradição (como, por exemplo, dos soviéticos). Eles teceram comentários referentes ao contexto da pesquisa na União Soviética na época, com o objetivo de esclarecer a diferença na metodologia empregada.

Kilpatrick & Wirszup (1976) começaram informando que em 1936 o Comitê Central do Partido Comunista da União Soviética proibiu o uso de provas de capacidade mental, embora testes de realização continuaram sendo utilizados para medir o progresso na escola.

Os editores comentaram que os soviéticos alegavam que um teste só poderia fornecer um índice do momento atual, não indicando o nível potencial do desempenho dos estudantes ou dos processos que eles utilizavam ao responder os itens de um teste. Os soviéticos defendiam a posição de que o homem não pode ser classificado e os testes conduzem a uma classificação dos estudantes e à colocação de normas para o que seria fornecido e esperado deles na escola.

Diante disso, psicólogos educacionais soviéticos adotaram outras técnicas de pesquisa. Para estudar os processos mentais de um estudante, apresentavam-lhe um problema e pediam para que pensasse em voz alta. Se o estudante não pudesse resolvê-lo davam uma sugestão ou mudavam o problema.

Kilpatrick & Wirszup (1976) reconheceram que essas técnicas adotadas pelos soviéticos forneciam informações concernentes ao aprendizado dos estudantes, porém, criticaram que raramente elas foram utilizadas para explorar diferenças entre estudantes no que dizia respeito a como eles pensavam e aprendiam.

Eles citaram Krutetskii como um dos responsáveis pelo estudo de diferenças individuais em habilidades matemáticas na União Soviética, já que seu principal interesse foi o estudo da estrutura e formação de habilidades matemáticas, observando estudantes considerados matematicamente talentosos.

Em seguida, fizeram um breve comentário dos capítulos do livro de Krutetskii. Kilpatrick & Wirszup (1976) tecendo também algumas críticas a Krutetskii, dentre elas:

a) que a revisão da literatura de Krutetskii foi parcial para o seu objetivo, pois ele criticou (com exceções) psicólogos capitalistas, sobretudo americanos e ingleses, pela visão determinística de habilidades, bem como pela dependência por testes; e exaltou (com exceções) psicólogos marxistas pelo impressionável, apesar de incompleto, tratamento do assunto;

b) que o uso do método estatístico de Análise Fatorial por Krutetskii foi inesperado e que ele a utilizou de um modo artificial e seletivo. Ou seja, as inter-correlações de um grupo de testes selecionados para medir uma mesma habilidade foram analisadas e a presença de um único fator comum foi utilizada para discutir que uma habilidade foi isolada. Krutetskii (1968) passou para outro grupo de testes e repetiu o argumento. O problema foi que ele caracterizou o fator geral comum a cada grupo de testes de um modo diferente. Ele nunca mostrou, incluindo todos os testes em uma análise, que os grupos que ele formou estavam associados com diferentes fatores.

Kilpatrick & Wirszup (1976) não fizeram apenas críticas, eles ressaltaram a importância desse livro alegando que:

i) os problemas matemáticos propostos por Krutetskii estavam relacionados com o currículo de Matemática e podiam ser adaptados e utilizados por professores e pesquisadores de forma similar à empregada por Krutetskii;

ii) as noções de Krutetskii relativas à estrutura de habilidades matemáticas podiam fornecer dados dos diferentes componentes de habilidade e de como eles se interagiam;

iii) ele pôde ajudar pedagogos e pesquisadores a repensar a sua confiança em testes como indicadores de habilidade e estimular a busca por métodos mais produtivos para avaliar os processos de pensamento matemático.

O livro de Krutetskii (1968) contém três partes: I) Problema e objetivos de seu estudo; II) Métodos e organização de seu estudo; e III) Análise da estrutura das habilidades matemáticas de estudantes. Uma síntese dessas partes, juntamente com os respectivos capítulos, é apresentada a seguir.

1.1.1. Problema e objetivos do estudo de Krutetskii

1.1.1.1. A importância teórica e prática do problema de habilidades matemáticas na Ciência e na Educação Soviética Contemporânea

Krutetskii (1968), com base em sua época, afirmou que na Psicologia soviética, a *teoria* acerca de habilidades é ainda insuficiente para analisar a estrutura e as condições necessárias para formar e desenvolver habilidades para atividades específicas. O valor *prático* se refere à colocação de pessoas no mercado de trabalho na União Soviética, exigindo uma realização máxima das potencialidades de cada pessoa. E para alcançar isso faz-se necessário saber como descobrir e desenvolver essas potencialidades.

Ele colocou que o problema de habilidades é na verdade um problema de diferenças individuais. Se todas as pessoas tivessem o mesmo potencial para se desenvolver em todas as direções, e para a busca de qualquer atividade não haveria o que discutir em habilidades. Todos têm aptidão em algo. Pela doutrina da Psicologia soviética cada pessoa é otimamente capaz em certas atividades, no entanto, essa capacidade se apresenta em graus diferentes.

No que se refere à instrução escolar, Krutetskii (1968) informou que psicólogos soviéticos concordam que os assuntos escolares são acessíveis aos estudantes, contudo, não existem trabalhos afirmando que todos os estudantes podem ser ensinados com a mesma facilidade. Mesmo com a melhor organização de métodos de ensino temos que um estudante progredirá melhor e mais rapidamente em uma área do que em outra. E alguns estudantes mostrarão mais sucesso que outros em uma determinada área.

Esse sucesso depende dos interesses, inclinações e das habilidades dos estudantes.

Esses psicólogos acreditam que habilidades não são predeterminadas, inatas; elas são formadas e desenvolvidas por instrução, prática e domínio de uma atividade, pela vivência e pelo trabalho, destacou Krutetskii (1968). Por isso, existe a necessidade de formá-las, desenvolvê-las, cultivá-las e melhorá-las. Para tanto, é preciso entender a sua natureza e criar métodos que permitam desenvolvê-las.

Com base na época em que Krutetskii desenvolveu sua pesquisa, ele informou que em muitos países houve um interesse crescente nos problemas de Educação Matemática. Esse crescimento é resultante do aumento do valor atribuído à Matemática na sociedade humana.

O desenvolvimento da Matemática é necessário para o progresso e efetividade dos principais campos do conhecimento. Métodos matemáticos e o estilo matemático de pensar estão penetrando em toda parte. Diante disso, as escolas soviéticas deveriam desenvolver ao máximo as habilidades matemáticas dos estudantes, inclinações e interesses com o objetivo de elevar o nível de cultura Matemática. Dessa forma, Krutetskii (1968) explicou a importância de sua pesquisa a respeito de habilidades matemáticas.

1.1.1.2. Literatura psicológica não soviética a respeito de habilidades matemáticas expostas por Krutetskii

Krutetskii (1968) apresentou o desenvolvimento da pesquisa não soviética – especialmente americana e inglesa – quanto à questão da habilidade e de como estudá-la. A pergunta central girou em torno do que é inato e do que é adquirido na formação e no desenvolvimento de habilidades. A maioria dos psicólogos americanos e ingleses reconhece o biológico (inato e hereditário) como natureza de habilidade. O processo de desenvolvimento de habilidades está ligado ao processo de desenvolvimento das características biológicas herdadas do organismo, processo que é percebido em certas condições sociais.

Krutetskii (1968) mencionou pesquisas não soviéticas referentes ao tema que vão desde 1904 (Spearman) até 1965 (Duncker, Maier e outros).

Tratou ainda da gradual utilização de testes para pesquisar habilidades e discutiu sua ineficiência. A aplicação de testes começou por volta de 1905, com as idéias de Alfred Binet. A partir desse momento, os testes foram gradualmente se estabelecendo como uma parte da cultura americana. Testes de habilidades se tornaram um instrumento para a seleção de estudantes nas escolas americanas, pois eles determinavam os vários modelos de educação que os estudantes receberiam.

Krutetskii (1968) criticou o uso de testes pelos seguintes motivos:

Primeiro motivo: testes fornecem apenas o resultado final do desempenho de um sujeito em uma determinada tarefa, ignorando a natureza do processo para se atingir o resultado. Eles são uma expressão quantitativa do fenômeno e não revelam suas características qualitativas e relacionais. Krutetskii (1968) apontou que na maioria dos casos em que o mesmo resultado de teste foi obtido, os processos mentais que conduziram ao resultado podem ser essencialmente diferentes. Destacou que essa diferença pode ser o mais valioso material para estudar as características psicológicas de um pesquisado.

Podemos, com o auxílio de alguns exemplos, apresentados abaixo, ilustrar a sua crítica ao uso de testes como único recurso na investigação de habilidades matemáticas.

Problema (1): Três amigos visitam a biblioteca em dias diferentes: o primeiro uma vez a cada 3 dias, o segundo uma vez a cada 4 dias e o terceiro uma vez a cada 5 dias. A última vez que eles estiveram juntos na biblioteca foi em uma terça-feira. Em quantos dias estarão novamente juntos na biblioteca? E que dia da semana será? (KRUTETSKII, 1976, p. 14-15, tradução nossa).

Soluções:

Estudante G. S. (7ª série) rapidamente escreveu uma série de números consecutivos iniciando com 1 e começou a riscar os números da seguinte forma: todo terceiro (com uma linha), todo quarto (com um ponto), e todo quinto (com uma cruz). Obteve a resposta certa mecanicamente: 60 dias.

Contou rapidamente os dias da semana e encontrou sábado. Resposta correta; tempo de solução: 2 minutos e 2 segundos.

Estudante Yu. A. (7ª série) pensou um pouco e disse: “Isso será o Menor Múltiplo Comum!” Sem se apressar, calculou (3.4.5 = 60). Dividiu 60 por 7, obteve 8 semanas, com um resto de 4 dias. Ela declarou: “Quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado. Dois meses e no sábado”. Resposta correta; tempo de solução: 1 minuto e 22 segundos.

É importante destacar que esses dois estudantes resolveram o problema utilizando a aritmética. No entanto, os níveis de conhecimento foram diferentes, tendo em vista que o primeiro utilizou um processo experimental e o segundo recorreu ao conceito de Mínimo Múltiplo Comum.

Problema (2): Somando 360 a certo número, obtém-se o mesmo resultado que multiplicando esse número desconhecido por 4. Qual é o número?

Problema (3): Uma mãe é três vezes mais velha do que a sua filha. Dez anos depois ela será duas vezes mais velha do que a sua filha. Qual é a idade da mãe?

Soluções:

Estudante Sasha R. (7ª série). Rapidamente compôs equações e as resolveu.

(2) 360 + x = x.4   360 = 3x   x = 120

(3) x;   x + 10   3x + 10 = 2(x + 10)

3x; 3x + 10   3x + 10 = 2x + 20   x = 10

Estudante Raya Ts. (7ª série). Rapidamente obteve o diagrama:

(2) 360

\+

□ = □ □ □ □   □ = 120

(3) □ + ○

□ □ □ + ○

□ □ □ ○ = □ ○ □ ○   □ = 10 anos (a filha)

Estudante Robert N. (7ª série). Não escreveu ou desenhou nada, sua resolução foi de forma verbal. Ele rapidamente exclamou:

(2) Adicionar 360 e isso dá quatro vezes – são todos o mesmo. Então, 360 são três fatores iguais. O número é 120.

(3) A diferença entre mãe e filha sempre comporá duas idades iniciais da filha, e em 10 anos essas duas idades iniciais serão iguais à próxima idade da filha; quer dizer, em 10 anos a filha será duas vezes mais velha. A filha tem 10 e a mãe 30 anos de idade.

Analisando os cinco estudantes mencionados acima, Krutetskii (1968) ressaltou que todos resolveram os problemas propostos corretamente; todos foram considerados estudantes capazes, o tempo de solução entre eles em cada situação foi aproximadamente idêntico. Qualquer psicometria é obrigada a classificar todos eles como completamente iguais nas suas manifestações de habilidade matemática.

Krutetskii (1968) discordou dessa igualdade e acrescentou que os caminhos psicológicos que conduziram ao resultado foram muito diferentes. Até mesmo uma análise superficial do processo deveria sugestionar diferenças essenciais nos processos mentais desses estudantes, uma vez que se têm diferentes níveis de habilidade matemática no primeiro problema e diferentes estilos de habilidade matemática nos dois últimos.

Para Krutetskii (1968), foram os caminhos psicológicos que geraram os diferentes processos de resolução, porém, devemos acrescentar que esses diferentes processos também foram influenciados pelas representações utilizadas.

Segundo motivo: os testes ignoram a influência de diversos fatores que afetam o sucesso, principalmente fatores pessoais (motivação, interesse, ansiedade, nervosismo, etc.), podendo produzir resultados totalmente diferentes desses em condições normais.

Terceiro motivo: os testes normalmente indicam algo em um dado momento e não refletem o desenvolvimento dinâmico do fenômeno estudado. Isso é coerente com a noção dos psicométricos, já que acreditam que o nível intelectual de uma pessoa permanecerá inalterado (ou levemente modificado) durante a sua vida toda, podendo ser previsto ainda na infância.

Na seqüência, Krutetskii (1968) comentou a ampla disseminação do método da Análise Fatorial utilizado para investigar a estrutura de inteligência e habilidade, especialmente na Psicologia americana e inglesa. Esse método consiste em isolar fatores coincidentes na correlação dos resultados de vários testes. Após aplicar a Análise Fatorial o investigador deve interpretar psicologicamente os fatores selecionados. No entanto, nem todos os psicólogos acreditam que uma interpretação seja possível ou necessária.

Krutetskii (1968) reconheceu o valor do método da Análise Fatorial para Psicologia, pois é um aparato matemático que permite descobrir relações que estão ocultas nos dados experimentais. Porém, o considera limitado porque ignora o conteúdo psicológico do processo.

Krutetskii (1968) citou alguns estudiosos que contribuíram para o estudo de habilidades matemáticas como, por exemplo, psicólogos como Binet, Thorndike, Révész e Piaget; matemáticos como Poincaré e Hadamard; e psicólogos experimentais como Duncker, Maier e Szikely, embora esses últimos não tinham direcionado o foco principal no estudo de habilidades matemáticas.

Diversas tentativas foram feitas para definir habilidade matemática, contudo, não houve nenhuma definição que pudesse satisfazer todos os interessados no assunto, informou Krutetskii (1968). Talvez o único ponto com o qual todos os pesquisadores concordavam é que a mesma deveria distinguir entre *habilidade escolar* – para dominar informação matemática, reproduzindo-a e utilizando-a independentemente – e *habilidade matemática criativa* – relacionada à criação independente de um produto original que tem um valor social.

A maioria dos psicólogos não soviéticos que estuda habilidade escolar tende a considerá-la como sendo uma habilidade para fazer testes matemáticos ou resolver problemas, acrescentou Kruteskii (1968).

Krutetskii (1968) apresentou o processo evolutivo para definir habilidade matemática e determinar sua estrutura. As várias contribuições e avanços são destacados, partindo de observações das possíveis falhas nas concepções construídas até a década de 70.

Sua análise começou com Rogers (1918), que identificou dois aspectos de habilidade matemática: *o reprodutivo* (relacionado à função de memória) e *o produtivo* (relacionado à função de pensamento) e vai até

Werdelin (1958), que, na opinião de Krutetskii (1968), forneceu a definição mais significante e extensa de habilidade matemática escolar. Werdelin (1958), a definiu como: a habilidade para entender a natureza de problemas matemáticos (e similares), símbolos, métodos e provas; para aprendê-los, retê-los na memória e reproduzi-los; combiná-los com outros problemas, símbolos, métodos e provas; e usá-los ao resolver tarefas matemáticas (e similares).

O trabalho de Werdelin, utilizando Análise Fatorial para medir habilidade matemática e suas correlações, trouxe muitas contribuições, reconheceu Krutetskii (1968), porém, ele defendeu que habilidade matemática deveria ser submetida a uma análise psicológica combinada com análise do processo de resolução de problemas.

Além de tentar definir habilidades matemáticas, Krutetskii (1968) informou que psicólogos americanos e ingleses também procuraram estabelecer sua estrutura, recorrendo a vários métodos, com destaque para dois dentre eles. Um é o método de observação psicológica e análise introspectiva experimental do processo de pensamento na resolução de problemas matemáticos (típico de pesquisadores franceses e alemães). Outro é o método de correlação seguido por Análise Fatorial (típico de psicólogos americanos e ingleses).

Como psicólogos americanos e ingleses descreveram a estrutura de habilidade matemática utilizando estudos não fatoriais? Segundo Krutetskii (1968), um dos primeiros estudos introspectivos da estrutura de habilidade matemática foi o de Ruthe (1920), que, depois de analisar processos utilizados por estudantes resolvendo vários problemas, separou os componentes: (1) habilidade para abstração; (2) habilidade para conceitos espaciais; (3) a natureza funcional do pensamento; (4) habilidade para dedução; (5) talento para relações espaciais e aritméticas; e (6) habilidade para concentração. Para Krutetskii (1968), esses componentes refletem aspectos básicos do pensamento matemático, no entanto, alguns são muito gerais (por exemplo, 1, 3, e 4) ou muito vago (5).

Depois de expor outros trabalhos e apontar suas falhas, Krutetskii (1968) citou Haecker & Ziehen (1931), que fizeram um dos estudos introspectivos mais interessantes acerca da estrutura do pensamento matemático. Porém, vários pesquisadores, especialmente da escola fatorial, notaram a falta de conclusão em muitas das suas posições.

Haecker & Ziehen primeiro separaram quatro componentes básicos que constituíam o núcleo do pensamento matemático e depois tentaram detalhar cada um deles em componentes mais simples, conforme o esquema a seguir:

A. Componente Espacial

1. compreender figuras espaciais, formas e seus complexos (sínteses);
2. memória para formas espaciais (conceitos espaciais);
3. abstrações espaciais (habilidade para ver características gerais em objetos espaciais);
4. combinações espaciais (entender e descobrir independentemente conexões e relações entre objetos espaciais).

B. Componente Lógico

1. formação de conceitos (como seno, logaritmo, tensor, etc.) e abstrações conceituais;
2. entender, lembrar e descobrir, independentemente, conexões conceituais gerais;
3. entender, lembrar e construir conclusões e provas, independentemente, tendo por parâmetro as regras da lógica formal;

C. Componente Numérico

1. formação de conceitos numéricos;
2. memória para números, soluções numéricas;

D. Componente Simbólico

1. compreender símbolos;
2. lembrar de símbolos;
3. operar com símbolos.

Embora Krutetskii (1968) tenha reconhecido que esse esquema era interessante, ele o considerou aparentemente mal concebido, pois a relação entre os constituintes dos vários componentes estava obscura. Ele questionou por meio das perguntas: “qual é a relação entre a habilidade para entender símbolos e a habilidade para formar conceitos de logaritmo ou tensor? O anterior procede do posterior, ou vice-versa?” (Ibidem, p. 39, tradução nossa).

Krutetskii (1968) concluiu sua análise de trabalhos de psicólogos americanos e ingleses, afirmando que eles não estabeleceram um conceito claro e preciso da estrutura de habilidades matemáticas. Em alguns, os dados foram obtidos por um método introspectivo não objetivo, e outros foram caracterizados por uma abordagem puramente quantitativa, ignorando aspectos qualitativos do pensamento.

1.1.1.3. Literatura psicológica soviética relativa às habilidades matemáticas exposta por Krutetskii

Estudos de diversos psicólogos soviéticos a respeito do problema das habilidades, em geral, e das habilidades matemáticas, em particular, são citados por Krutetskii (1968). Ele mencionou trabalhos que vão desde o ano de 1908 (Mordukhai-Boltovskii) até os seus contemporâneos de 1966 (Antonova).

Uma das contribuições de Mordukhai-Boltovskii, apontada por Krutetskii (1968), refere-se às ”espécies de imaginação matemática”[1] que motivam diferentes matemáticos, identificados como geômetras e algebristas. Para Mordukhai-Boltovskii, aritméticos, algebristas e analistas – cuja descoberta é realizada na forma mais abstrata de símbolos numéricos discretos e suas inter-relações – não podem imaginar do mesmo modo como os geômetras. Krutetskii (1968) acrescentou que Mordukhai-Boltovskii também estudou alguns componentes de habilidades matemáticas.

Na década de 1920 (conforme Krutetskii é o início do período formativo na Psicologia soviética) as pesquisas em habilidades matemáticas recebiam influências de duas visões e tendências, emprestadas acriticamente das doutrinas e concepções da Psicologia predominantes naquela época.

---

1 Kinds of mathematical imagination (Krutetskii, 1978, p. 48)

Krutetskii (1968) explicou que os profissionais soviéticos das áreas de Ciência e de Educação, durante esses anos, acreditavam que as habilidades dos estudantes eram características imutáveis, definidas pela hereditariedade. A partir de 1936, psicólogos soviéticos passaram a re-examinar as doutrinas adotadas até esse momento, o que impediu um pouco o desenvolvimento de métodos experimentais para estudar habilidades.

A Teoria Geral de Habilidades, utilizada na União Soviética, foi construída mediante a combinação de esforços de muitos psicólogos soviéticos, dentre eles Teplov (1940, 1941, 1948, 1961), Vygotskii (1956), Leont'ev (1959, 1960, 1961), Rubinstein (1940, 1955, 1957, 1959, 1960) e Anan'ev (1956, 1962,1962), informou Krutetskii (1968). Ele citou alguns trabalhos relativos às habilidades que foram desenvolvidos focando atividades específicas, tais como habilidades musicais, artísticas, literárias, pedagógicas, engenharias técnicas e matemáticas.

- Krutetskii (1968) expôs alguns dos principais estudos teóricos que respaldaram a sua pesquisa, que foram:
- análises, sínteses e generalizações (Rubinstein (1955, 1958), Matyushkin (1959, 1960) e outros);
- pensamento criativo (Leont'ev (1954));
- a variedade de associações e sua composição, bem como as leis pelas quais elas são formadas (Pavlov (1951, 1954), Talyzina (1957), Stepanov (1952), Doblaev (1957), Samarin (1957, 1962, 1964))
- a redução dos passos no processo de raciocínio (Shevarev (1941, 1946, 1957, 1958, 1959, 1963,), Indik (1951), Sokolov (1954 e 1961), Talyzina (1957), Doblaev (1957)). Krutetskii (1968) informou que pela teoria das associações essa redução dos passos é interpretada como o fechamento do circuito de generalização, cuja presença simplifica e acelera o processo de resolução de um problema matemático.
- atividade mental (Antonova (1955, 1966), Kabanova-Meller (1962), Bogoyavlenskii (1959, 1962, 1963), Landa (1956, 1957);
- operações mentais durante a instrução (Gal'perin (1954, 1957, 1959, 1960, 1965)) e Talyzina (1957, 1960, 1963, 1965).

Além desses teóricos que estudaram habilidades gerais, Krutetskii (1968) buscou contribuições em trabalhos que trazem teorias a respeito da estrutura de habilidades matemáticas. Dentre eles, citou:

- Kovalev & Myasishchev (1960), que distinguiram algumas bases para determinar características do processo mental na atividade matemática;
- Menchinskaya (1946, 1955) ,que selecionou componentes de habilidade aritmética a partir de um estudo de características individuais no domínio aritmético. Por meio de observações e experimentos ele selecionou ainda propriedades ou características da atividade mental que podem servir de base para diferenciar estudantes, podendo auxiliar no progresso em aritmética;
- Khinchin (1961), que escreveu sobre características distintivas no estilo do pensamento matemático;
- Kolmogorov (1959), que mencionou a composição de habilidade matemática e as características da atividade mental, contrariando a opinião comum, de não ter relação com habilidade matemática;
- Gnedenko (1962, 1964, 1965), que enumerou alguns requisitos para o pensamento matemático;
- Shvartsburd (1964), que apresentou um resumo da literatura metodológica listando vários componentes do desenvolvimento matemático;
- Kovantsov (1965), que discutiu a natureza da habilidade, em geral, e habilidade matemática, em particular, bem como a relação entre o inato e o adquirido na psique de uma pessoa.

Após citar alguns dos trabalhos importantes da Psicologia soviética em habilidades matemáticas, Krutetskii (1968) destacou que esse assunto ainda não foi completamente exposto. Não se tem uma noção clara da essência e da estrutura das habilidades, das idades dinâmicas no desenvolvimento de sua estrutura ou das várias categorias de estruturas. E afirmou que sem isso é impossível criar métodos para diagnosticar essas habilidades ou de oferecer condições favoráveis à sua formação e desenvolvimento nos diferentes níveis. Novamente aqui ele ressaltou a importância de sua pesquisa relativa ao tema.

1.1.1.4. Exposição do problema e das metas do estudo de Krutetskii

Krutetskii (1968) fez a explanação de algumas questões relacionadas com a Teoria Geral de Habilidade, dos conceitos básicos que nortearam a sua pesquisa, do problema acerca de habilidades matemáticas e estabelece as metas de seu estudo.

Ele começou mencionando os trabalhos dos alemães Marx (1955 e 1956) e Engels (1956) que tratavam da natureza sócioistórica da habilidade humana. Psicólogos soviéticos defendiam a posição de que uma parte decisiva no desenvolvimento de habilidades está vinculada aos princípios sócioistóricos. Como conseqüência dessa posição, determinaram que o estudo de habilidades deveria ser efetivado pela observação da atividade do sujeito.

Quanto à questão de habilidades inatas ou adquiridas, Krutetskii (1968), se respaldou na doutrina psicológica soviética em que seus seguidores afirmam que habilidades não são inatas, e sim são formadas e desenvolvidas em vida, por meio da atividade humana, da instrução e do treinamento. Assim, fatores sociais têm um valor decisivo no desenvolvimento de habilidades.

Após expor algumas questões da Teoria Geral de Habilidade, Krutetskii (1968) apresentou, com base nessa teoria, as suposições que nortearam sua pesquisa, listando-as como segue:

1. Habilidades são sempre *habilidades para uma categoria definida de atividade.* Isso indica que habilidade matemática existe na atividade matemática e deveria ser manifestada nela.

2. Habilidade é um conceito dinâmico. Ela não somente se manifesta e existe na atividade matemática, mas é criada e desenvolvida nela.

3. Em certos períodos no desenvolvimento de uma pessoa, a maioria das condições favoráveis surge para formar e desenvolver categorias individuais de habilidades, sendo que algumas delas podem ser provisórias ou transitórias. Krutetskii não explica e nem exemplifica quais habilidades poderiam ser provisórias ou transitórias, apenas cita Vygotskii e Leont'ev que alegam existir um período ótimo para desenvolver certas habilidades denominado de “sensitive” (Ibidem, p. 66, tradução nossa). No entanto, no

capítulo 18 (p. 351) ele menciona que a velocidade (não de tempo, e sim de rapidez na generalização) do processo mental é uma característica temporária, podendo sugerir uma habilidade provisória ou transitória.

4. Progresso em atividade matemática depende de um conjunto de habilidades e não de uma habilidade considerada separadamente.

5. Bom desempenho em atividade matemática pode estar condicionado por diferentes combinações de habilidades.

6. A relativa fraqueza de uma habilidade pode ser compensada por outra habilidade, e assim, o desempenho próspero da atividade não é descartado.

7. Quanto à correlação do talento geral e específico Krutetskii (1968) mencionou que é um assunto complexo e que não foi totalmente resolvido pela Psicologia soviética. Sendo assim, não pretende detalhá-lo nesse livro.

No que se refere aos conceitos básicos que Krutetskii (1968) utilizou em seu estudo ele começou afirmando que habilidade matemática está presente em diferentes níveis de atividade e que seu conceito se apóia em dois aspectos:

Habilidade criativa – habilidade em atividade matemática científica que conduz a resultados novos ou realizações que são significativas para a humanidade, o que pode ser considerado um produto valioso em termos sociais;

Habilidade escolar – habilidade no estudo de Matemática (aprender, dominar), no domínio rápido e próspero de informação apropriada e habilidades ativas (skills or habits).

Ele mencionou alguns psicólogos e matemáticos que diferenciaram níveis de habilidade matemática, dentre os quais se têm Hadamard (1945), Gagné & Paradise (1961), Kovalev (1963), e outros.

No estudo de habilidade matemática, Krutetskii (1968) interpretou a essência do que poderia ser denominado de “*abilities and skills or habits*” (Ibidem, p. 71, tradução nossa) que aqui será traduzido como *habilidades potenciais* (*abilities*) e *habilidades ativas* (*skills or habits*).

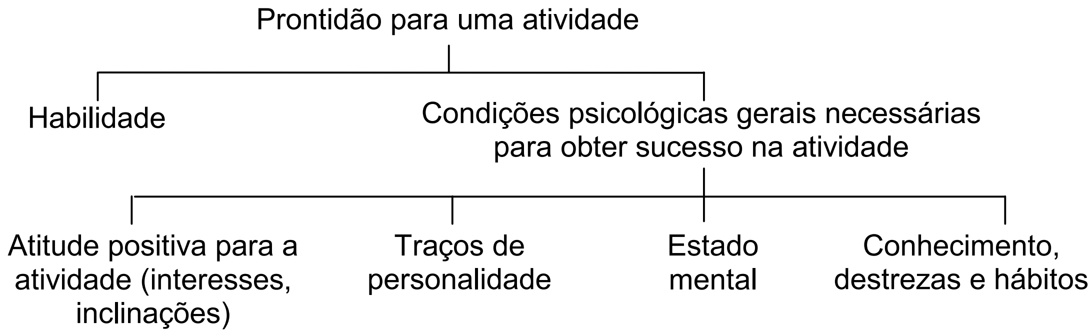
Para diferenciar esses dois conceitos ele descreveu habilidades potenciais como sendo “as características psicológicas individuais de uma pessoa que são favoráveis ao domínio rápido e fácil de uma atividade definida (análise da psique da pessoa)”; e habilidades ativas como “ações específicas em uma atividade que certa pessoa faz em um nível relativamente alto *(*análise da atividade específica*)*” (Ibidem, p. 71, tradução nossa).

Nessa perspectiva, ele destacou que se pode avaliar tanto a presença de habilidade potencial como a presença de habilidade ativa, por utilizar as características da ação de uma pessoa em uma atividade (como um matemático). Mas a atividade pode ser considerada de outro ponto de vista, e essa abordagem determina a diferença entre habilidade potencial e habilidade ativa. Ou seja, se a atividade for analisada com base nas características psicológicas da pessoa que são favoráveis ao domínio dessa atividade, se estará fazendo uma análise da habilidade potencial.

Krutetskii (1968) salientou que, sob esse ponto de vista, podemos considerar habilidade ativa compondo uma equação baseada na condição de um problema, habilidade ativa executando transformações algébricas, e assim por diante, desde que tanto a composição de equações como as transformações algébricas façam parte do conteúdo da atividade matemática de estudantes.

Podemos considerar habilidade potencial para generalizar, habilidade potencial para conceitos espaciais, habilidade potencial para pensar abstratamente, e assim sucessivamente. Ele afirmou ainda que as categorias de generalização, conceitos espaciais e pensamento abstrato também existem somente na atividade.

Tendo como foco a atividade, Krutetskii (1968) estabeleceu uma relação entre prontidão, habilidades e condições psicológicas gerais para a realização de uma atividade. Para Krutetskii (1968), uma pessoa está em estado de prontidão, com facilidade para desempenhar certa atividade, quando possui alguns fatores favoráveis ao desenvolvimento dessa atividade, como: *habilidades* para cumprir a atividade e *condições psicológicas* necessárias à execução da atividade com sucesso. As condições psicológicas podem ser uma atitude positiva para a atividade, traços de personalidade, estado mental, conhecimento, destrezas e hábitos. Isso está sintetizado no esquema abaixo:



Fonte: KRUTETSKII, 1976, p. 74.

Figura 1-Estrutura da prontidão para uma atividade

Após analisar diversas literaturas soviéticas sobre habilidades Krutetskii (1968) concluiu que habilidades são características psicológicas individuais que possibilitam a uma pessoa realizar determinada atividade com sucesso. E o conceito de habilidade refere-se "às esferas sensorial, cognitiva e motora" (Ibidem, p. 74, tradução nossa).

Para Krutetskii (1968) habilidade para aprender Matemática se refere às

> características psicológicas individuais (principalmente da atividade mental) que respondem às exigências de atividade matemática escolar e que influenciam (...) o sucesso no domínio criativo de Matemática como um assunto escolar (...) (Ibidem, p. 74-75, tradução nossa).

Para ele, a habilidade matemática é um fenômeno interno, complexo, resultante da interação de vários componentes que, para serem estudados, é preciso observar o sujeito durante a execução da atividade. Tais componentes da estrutura de habilidades matemáticas foram explicitados por ele no capítulo 6 de seu livro.

Ao discutir de forma mais pontual o problema de habilidades Krutetskii (1968) afirmou que uma tarefa essencial na Psicologia é a criação de condições para a formação, cultivo e desenvolvimento de habilidades em vários níveis de idade. Isso é válido também para o estudo de habilidades matemáticas. E a meta básica é criar fundamentos psicológicos para uma pedagogia ativa de habilidades.

O problema de pesquisa apresentado por ele consiste em descrever habilidades matemáticas, identificando “que características psicológicas individuais influenciam no domínio próspero em Matemática, quer dizer, tornam uma pessoa matematicamente capaz” (Ibidem, p. 77, tradução nossa). Para tal investigação, ele distinguiu quatro tarefas que fazem parte da meta de pesquisa, que são as seguintes:

a) esclarecer as características que descrevem a atividade mental de estudantes matematicamente talentosos, ao resolver diversos problemas matemáticos. Para isso, utilizou Análise Fatorial, juntamente com uma análise qualitativa da atividade matemática dos estudantes, ou seja, de seus processos de resolução de problemas matemáticos;

b) criar métodos experimentais para investigar talento matemático;

c) verificar se as altas realizações podem ser executadas mediante várias combinações dos componentes de habilidades;

d) estudar a influência de diferenças de idade nas manifestações de habilidade matemática em estudantes.

Algumas considerações acerca da parte I do livro de Krutetskii

Pontos importantes e alguns até polêmicos, apontados por Krutetskii, merecem comentários.

O primeiro se refere ao contexto. A premissa de Krutetskii sempre foi: as habilidades não serão analisadas isoladamente, assim como as características não serão classificadas isoladamente, e sim, como uma pessoa as utiliza. É o anti-positivismo, pois não se estuda uma habilidade fora do contexto de uma pessoa. Habilidade em que? O contexto poderia ser resolver problemas, fazer demonstrações matemáticas, na música, na literatura, etc.

No entanto, Krutetskii (1968) ao expor o problema de pesquisa (identificar que características psicológicas individuais influenciam no domínio próspero de Matemática) pretendeu descrever, de forma geral, essas características, passando a desconsiderar as atividades envolvidas, no caso de sua pesquisa problemas matemáticos. Com isso, entra em contradição pendendo para a concepção dos positivistas em que as atividades estão fora do contexto.

Outro ponto refere-se à questão: as habilidades matemáticas são inatas ou adquiridas? Aqui os psicólogos apresentam posições divergentes. Alguns deles defendem que as habilidades são inatas[2] e com isso a habilidade matemática fica desde o início dependente dos genes; outros acreditam que as habilidades podem ser adquiridas[3] ou desenvolvidas.

Como a Psicologia faz parte da Filosofia e os conceitos de empirismo e racionalismo são filosóficos, tomemos como exemplo dessas posições divergentes Locke (1632-1704), que foi um empirista, e Leibniz (1646-1716), um racionalista.

Locke acredita que tudo é adquirido do exterior para o interior, a origem das idéias encontra-se na experiência. O homem nasce como uma tábula rasa, não há nada no intelecto que não parta do sensorial, das observações externas (habilidades adquiridas).

Leibniz já pensa o contrário, as idéias são pré-existentes, ocorrendo do interior para o exterior (habilidades inatas). Para Leibniz, "a experiência só fornece a ocasião para o conhecimento dos princípios inatos ao intelecto. (...) Os empiristas teriam razão ao afirmar que as idéias surgem do contato com o mundo sensível, mas errariam ao esquecer o papel do espírito" (LEIBNIZ, 1999, p. 9).

Por um lado, se tudo for inato precisamos ter todo o conhecimento no interior do cérebro, e se está no interior precisamos de vários genes. Por outro lado, se é algo externo, como chegar à generalização? Na verdade, há a necessidade da complementaridade, ou seja, o conhecimento não vem do exterior e nem do interior, e sim de uma interação do sujeito com o objeto de estudo. O objeto fornece informações do exterior para o interior, e o que o sujeito contribui com seu raciocínio e julgamento o cérebro vai clarificar e transformar esses estímulos em proposições.

Voltando ao resumo da tradução do livro de Krutetskii, apresentamos a seguir a parte II, na qual ele expôs: os métodos utilizados na investigação experimental com estudantes e nos questionários elaborados para professores de Matemática e para matemáticos; os componentes das

---

2 Feldman (1988), Gagné (1993), Gardner (1983) entre outros.
3 Leont'ev (1959, 1960, 1961), Rubinstein (1960), Krutetskii (1976) entre outros.

habilidades matemáticas definidos para seu estudo e as séries de problemas que nortearam sua investigação experimental.

1.1.2. Métodos e organização do estudo de Krutetskii

1.1.2.1. Método geral e organização

Krutetskii (1968) descreveu nesse capítulo como ele estruturou sua pesquisa e os métodos adotados: *experimentais* e *não experimentais*.

Nos métodos *experimentais* foram feitas análises qualitativas e quantitativas (Análise Fatorial) da resolução de problemas matemáticos desenvolvida por estudantes com distintas habilidades em matemática, ou seja, estudantes considerados por seus professores como muito capazes em Matemática, capazes, médios e menos capazes em Matemática.

Os dados foram obtidos com 201 estudantes, com a idade variando de seis a dezessete anos, em que 192 deles fizeram parte do grupo básico da investigação experimental e 9, considerados matematicamente talentosos, formaram um grupo que foi estudado durante vários anos. Aos estudantes foram propostas diversas séries de problemas matemáticos para serem resolvidas.

O desenvolvimento dos componentes de habilidades matemáticas foi investigado de duas formas: (1) comparando diferentes estudantes que estavam em diferentes fases de desenvolvimento; (2) comparando os mesmos estudantes em diferentes fases de desenvolvimento.

Também foram estudados alguns grupos de estudantes com características particulares, de forma que comparações longitudinais pudessem ser feitas. Por exemplo, fizeram estudos de caso, durante vários anos, com um grupo de 25 estudantes considerados especialmente talentosos em matemática e durante um ano estudaram um grupo de 19 estudantes com pouco talento matemático. Alguns desses grupos não faziam parte do grupo básico da investigação experimental, no entanto, foram considerados fontes de informações adicionais.

Além dos métodos experimentais também foram utilizados métodos *não experimentais*, tais como a observação dos estudantes durante as aulas (às vezes, em casa); discussões com os estudantes, pais, professores e amigos, bem como o estudo da personalidade desses estudantes (persistência, diligência[4], iniciativa, etc.) e o desempenho deles em outras disciplinas.

Muitas das informações sobre habilidades matemáticas foram coletadas por Krutetskii e seus pesquisadores por meio de:

I) questionários aplicados a 62 professores de Matemática. Entre 1958 e 1960 foram pesquisados professores que responderam questões sobre: Qual sua opinião acerca da habilidade para aprender Matemática? Que critérios utiliza para julgar a habilidade? Que estudantes consideram capazes ou não e por quê?

II) questionários aplicados a 56 professores de Matemática e a 50 pesquisadores matemáticos soviéticos (dos quais somente 21 matemáticos responderam). Em 1965 foram propostas a esses profissionais as seguintes perguntas: Como a habilidade matemática se manifesta? Que qualidades da mente fazem uma pessoa matematicamente capaz? Até que ponto habilidades matemáticas são habilidades gerais ou específicas? Quais habilidades matemáticas você conhece?

III) estudo e análise da biografia de 84 matemáticos e físicos famosos. Sua intenção era identificar quando começaram a revelar habilidades matemáticas e como as expressavam, além de descobrir algumas características de seus talentos matemáticos.

IV) análise do currículo de Matemática nas escolas, a fim de determinar as habilidades que eram desenvolvidas durante o ensino formal. Esse material coletado envolveu 1000 estudantes de 7ª a 10ª séries.

V) estudo de caso de alguns estudantes matematicamente talentosos.

VI) pesquisas na literatura específica referentes a estudos de casos de estudantes matematicamente talentosos.

---

4 Cuidado ativo; zelo, aplicação; Atividade, rapidez, presteza; Investigação, pesquisa, busca.

1.1.2.2. Hipótese de Krutetskii acerca dos componentes de habilidades matemáticas

O estudo analítico-crítico das literaturas psicológicas e matemáticas existentes[5] até 1968, e a observação de diversas experiências já realizadas acerca da estrutura de habilidades matemáticas subsidiaram a elaboração da hipótese sobre os componentes de habilidades matemáticas de Krutetskii (1968). Os componentes que nortearam sua investigação experimental foram os seguintes:

1) Percepção – habilidade para formalizar conteúdo matemático, isolar forma de conteúdo, resumir a si mesmo relações numéricas concretas e formas espaciais e operar com estrutura formal (estruturas de relações e conexões);

2) Generalização – habilidade para descobrir o que é essencial, importante, abstrair para si mesmo o irrelevante, ver o que é comum no que é aparentemente diferente;

3) Lógica e raciocínio – habilidade para idéia seqüencial, corretamente segmentada no raciocínio lógico que está relacionado à necessidade de desenvolver provas, comprovações e deduções;

4) Redução – habilidade para reduzir os passos no processo de raciocínio, pensar em estruturas reduzidas, sem precisar de muito detalhamento na resolução de problemas;

5) Flexibilidade – habilidade para passar rapidamente de uma operação mental a outra, ou seja, a habilidade para trocar de um método de resolver um problema para outro método de resolver o mesmo problema. Essa característica de pensamento, segundo Krutetskii (1968), é importante para o trabalho criativo de um matemático;

6) Pensamento Reversível – habilidade para inverter um processo mental, isto é, transferir de um processo de resolução a uma seqüência inversa de pensamento;

---

5 Tais como Thorndike (1923), Doblaev (1957), Sokolov (1954), Lyapunov (1960), Kolmogorov (1959), entre muitos.

7) Analítico-sintética – habilidade para compreensão rápida das relações básicas que constituem a essência do problema, sem esquecer dos dados específicos;

8) Memória matemática – habilidade para uma memória envolvendo generalizações, estruturas formalizadas e esquemas lógicos;

9) Conceitos espaciais – habilidade para perceber e aplicar conceitos espaciais que estão relacionados diretamente com a geometria, especialmente a geometria espacial.

1.1.2.3. Métodos utilizados na investigação experimental de Krutetskii

Ao apresentar os métodos utilizados na sua investigação experimental Krutetskii (1968) enumerou os princípios que organizaram tal estudo, ressaltando que os problemas experimentais tinham que:

1. corresponder à natureza da atividade matemática dos estudantes, tais como: problemas de prova, cálculo, transformação e construção. Uma análise das soluções permitiria entender como a particularidade da atividade mental dos estudantes considerados capazes difere dos estudantes considerados menos capazes e, ao resolver problemas, revelar características individuais da atividade mental;

2. ser de vários graus de dificuldade (baixo, médio e alto), inclusive problemas não padronizados que requerem criatividade matemática;

3. possibilitar que os procedimentos de resolução ajudem a esclarecer a estrutura de habilidades, ou seja, neles devem ser manifestadas as características da atividade mental que é específica da atividade matemática;

4. permitir a identificação do processo utilizado na resolução, revelando suas características qualitativas;

5. garantir que só a habilidade influenciará nas resoluções – Krutetskii (1968) informou que seu interesse centrou-se no estudo das habilidades e não de conhecimentos ou hábitos, embora reconheceu que eles estejam inter-relacionados. Para isso, estabeleceu os seguintes critérios:

(a) selecionou problemas matemáticos que não exigissem nenhum conhecimento particular, destreza ou hábito para a resolução, ou que exigissem conhecimento que estivesse igualmente disponível a todos os estudantes;

(b) a influência de experiência passada foi reduzida porque muitos problemas experimentais eram novos aos estudantes;

(c) foram selecionados problemas envolvendo conteúdo recentemente aprendido (o pesquisador ensinou aos estudantes), possibilitando localizar características do domínio de uma nova habilidade;

(d) foram utilizados problemas com elementos de criatividade matemática – problemas não-padronizados.

6. permitir que os métodos experimentais sejam instrutivos e diagnósticos;

7. propiciar uma análise qualitativa e quantitativa do processo de resolução dos problemas experimentais.

A partir desses princípios certas indagações surgem em minha mente: Como acompanhar o processo de pensamento de uma pessoa? De que forma ele pode ser obtido?

Algumas respostas a essas questões são fornecidas por Krutetskii (1968), quando ele comentou sobre a descrição do pensamento de uma pessoa no processo de resolução de um problema. Ele apontou dificuldades que normalmente aparecem na realização de entrevistas, trazendo grandes contribuições inclusive para futuros pesquisadores.

Krutetskii (1968) comentou que a principal dificuldade consiste em conseguir identificar o processo de pensamento, pois por mais que se peça ao entrevistado para resolver o problema em voz alta, não deixando nenhuma idéia sem ser verbalizada, isso não é tão simples. Ele ressaltou que as dificuldades em organizar o pensamento em voz alta, no trabalho com estudantes, são conseqüências de algumas situações, dentre elas:

(I) Alguns estudantes não sabem como ou não têm a prática de pensar alto. Impor isso a eles pode provocar uma distorção do quadro real.

(II) Poderíamos supor que os estudantes na escola são preparados para pensar em voz alta, porém, isso não é assim. Pensar ou resolver em voz alta e explicar a solução de um problema em voz alta são processos bem diferentes. Um estudante sabe que quando um professor pede em classe para resolver um problema em voz alta significa fornecer uma solução para os outros, ou seja, uma explicação do processo que seja compreensível ao próximo.

(III) Às vezes, o estudante pode pensar que estão lhe pedindo para dar uma descrição dos seus próprios processos mentais ao resolver um problema, uma explicação exaustiva de como ele está pensando.

Para tentar superar as dificuldades apresentadas, Krutetskii e sua equipe conduziram a pesquisa da seguinte maneira:

Primeiro, foi exposto ao investigado para não contar como estava pensando, e sim, pensar alto, sem tentar explicar o processo de resolução ao pesquisador. Para não influenciar, o pesquisador não dava instruções e nem interferia pedindo resolução mais detalhada.

Segundo, uma folha de papel carbono era colocada sob a página do caderno na qual a resolução era desenvolvida. Em intervalos regulares, a página em que a resolução foi copiada era arrancada. Assim, cada folha continha um registro das operações feitas em intervalos de tempo iguais.

O processo de pensamento desenvolvido durante a resolução de problemas matemáticos foi analisado por Krutetskii da seguinte forma: por um registro objetivo da resolução (escrito ou gravado em fita), pela natureza das operações, diagramas e esboços feitos pelo investigado; pelo registro do processo de reflexão verbal revelado na resolução do problema; pela natureza das respostas às perguntas feitas durante a resolução e por material obtido com discussão referente à resolução depois de sua conclusão.

Como resultado, ele obteve uma noção objetiva bem completa da natureza da atividade mental dos estudantes sobre como eles resolveram os problemas experimentais.

1.1.2.4. O sistema de problemas experimentais utilizado por Krutetskii para a investigação das habilidades matemáticas de estudantes

Nesse capítulo são apresentadas as séries de problemas nas quais os componentes das habilidades matemáticas foram estudados, em várias situações e de diferentes maneiras. Também são expostos os objetivos estabelecidos para cada série, as técnicas utilizadas na sua apresentação e o princípio para analisar os resultados (por exemplo, a redução dos passos no processo de raciocínio foi analisada com base na argumentação).

Krutetskii (1968) informou que os problemas matemáticos, na sua maioria, foram selecionados de diversas fontes soviéticas e não soviéticas, tais como: problemas de livros didáticos de Matemática, coleções de problemas, jornais e revistas.

Os problemas experimentais foram elaborados para investigar estudantes dos graus cinco a oito[6]. Foram compostos por 26 séries[7], contendo 79 testes, nos quais 22 eram aritméticos, 17 algébricos, 25 geométricos e 15 outros (lógico, combinado, figural e especial). Cada teste continha vários problemas matemáticos totalizando cerca de 400 problemas.

Cada série continha problemas da mesma categoria que diferiram em dificuldade e foram destinados a investigar um ou mais componentes das habilidades matemáticas estabelecidas por Krutetskii no seu capítulo 6. Tais séries são explicitadas a seguir.

SÉRIE I: Problemas com uma pergunta não declarada

Nessa série de problemas a pergunta essencial não era fornecida, no entanto, essa pergunta surgia de forma lógica das relações matemáticas apresentadas no problema. Ela tinha um teste de aritmética, um de álgebra e um teste de geometria.

SÉRIE II: Problemas com informação incompleta

---

6 A palavra *grau* (por exemplo, quinto grau ou grau cinco) utilizada na Rússia corresponde à palavra *série* adotada no Brasil. Daqui por diante, nesta Tese, será utilizada a palavra série.

7 Para mais informações sobre as séries e os respectivos problemas ver Krutetskii, 1976, p. 105-174.

Foram selecionados problemas em que faltava alguma informação, o que tornava impossível obter uma resposta exata para o problema. Ao ser introduzida a informação ausente, a resposta poderia ser obtida. Essa série de problemas foi composta por um teste de aritmética e um de geometria.

SÉRIE III: Problemas com informação em excesso

Nos problemas dessa série foram introduzidas informações desnecessárias que ficavam mascarando os fatos essenciais à resolução dos problemas. Possuía um teste de aritmética e um teste de geometria.

SÉRIE IV: Problemas com elementos de sobreposição

Essa série de problemas foi construída para verificar nos estudantes a habilidade de percepção analítico-sintética de figuras geométricas sobrepostas. Foi elaborado apenas um teste de geometria.

SÉRIE V: Sistemas de problemas de uma única categoria

Foi direcionada a estudantes que ainda não estavam familiarizados com as fórmulas de multiplicação na forma reduzida (estudantes da 1ª à 6ª séries). Foi um experimento de ensino. Tal série foi formada por dois testes de álgebra em que o segundo teste tinha os problemas e as variantes. As variantes eram exemplos auxiliares que aumentavam o grau de dificuldade gradualmente.

SÉRIE VI: Sistemas de problemas de diferentes categorias

Essa série foi formada por seis testes de aritmética e um teste de geometria. Nos testes de Álgebra havia problemas de uma única categoria, de acordo com a natureza das relações e dependências dadas, e eram caracterizados por uma única estrutura matemática, porém, os problemas eram externamente diferentes uns dos outros. Outros eram externamente similares, no entanto, essencialmente diferentes em categoria. O teste de geometria foi direcionado para o estudo de generalizações de conteúdo geométrico.

SÉRIE VII: Sistemas de problemas com transformação gradual do concreto para o abstrato

Essa série foi composta por um teste combinado envolvendo aritmética, álgebra e geometria. Eram 10 problemas tendo 5 variantes em cada um em que elas eram sendo gradualmente transformadas de um contexto concreto para um abstrato.

SÉRIE VIII: Composição de problemas de uma determinada categoria

O objetivo dessa série era investigar se o estudante conseguia fazer uma generalização independente (da estrutura do problema ou da sua resolução), relativa a um número de exemplos depois de analisar um único exemplo de uma categoria, ou seja, se ele identificava uma propriedade essencial sem fazer comparações e contrastes. A série foi composta por um teste de aritmética, um de álgebra, um de geometria e um teste de lógica.

SÉRIE IX: Problemas envolvendo provas matemáticas

A intenção era analisar se os estudantes generalizavam o método de raciocínio ou faziam a transferência dos princípios de prova que aprenderam para outros problemas análogos, porém, mais complexos. Ela foi formada por dois testes de álgebra, um teste de geometria e um de lógica. Cada teste continha problemas envolvendo provas de uma única categoria.

SÉRIE X: Composição de equações que utilizam os termos de um problema

Essa série de problemas foi direcionada a um estudo da generalização de um método específico de raciocínio. Ela tinha apenas um teste de álgebra.

SÉRIE XI: Problemas irreais (”unrealistic”)

Consistiu de problemas em que fatos numéricos tornavam o problema sem sentido. Foi elaborada contendo um único teste combinado.

SÉRIE XII: Formação de conceitos artificiais

A presente série foi construída para verificar a habilidade dos estudantes para generalizar, como uma habilidade geral, não relacionada à execução de atividade matemática ou qualquer outra atividade escolar. Ela envolveu um teste utilizando símbolos visual-pictóricos para a formação de conceitos artificiais tais como kok, gok e lok. Os conceitos eram construídos com base em parâmetros como: forma, tamanho e cor.

SÉRIE XIII: Problemas que propiciam diferentes resoluções

Essa série foi composta por problemas que podiam ser resolvidos de diversas maneiras. Foi analisada a habilidade do estudante para mudar o método de resolver um mesmo problema. Foram elaborados um teste de aritmética, um de álgebra e um de geometria.

SÉRIE XIV: Problemas com mudança de conteúdo

A intenção era estudar a mudança de uma operação mental a outra. Os problemas foram construídos conforme o seguinte princípio: buscar uma segunda versão de um problema inicial em que um dos elementos era transformado, resultando na alteração do conteúdo do problema e da operação para resolvê-lo. A série foi elaborada contendo um teste de aritmética, um teste de álgebra e um de geometria. Em cada teste havia problemas e variantes.

SÉRIE XV: Problemas para reconstruir uma operação

Os problemas pretendiam investigar a facilidade do estudante para mudar de um método de operação a outro. Havia um teste de aritmética, três testes de álgebra, dois testes de geometria e um teste especial.

SÉRIE XVI: Problemas que sugerem auto-restrição

No processo de resolução dos problemas dessa série ocorria uma restrição involuntária que conduzia o estudante a acreditar que o problema não podia ser resolvido. Essa série tinha apenas um teste combinado.

SÉRIE XVII: Problemas diretos e inversos

Essa série de problemas foi elaborada para verificar a habilidade do estudante para inverter um processo mental, ou seja, pensar em relações recíprocas, operações diretas e inversas, teoremas diretos e contrários. Essa série foi formada por um teste de aritmética, dois testes de álgebra e um teste de geometria. Em cada teste havia problemas diretos e inversos ou contrários.

SÉRIE XVIII: Tarefas Heurísticas

Essas tarefas pretendiam estudar como os estudantes aprendem algo que é novo para eles. Também como descobrem, de forma heurística, princípios que lhes são desconhecidos. Indaga ainda, como independentemente estabelecem relações e dependências, bem como fazem generalizações. A série foi composta por um teste de aritmética, um de álgebra e dois de geometria.

SÉRIE XIX: Problemas de compreensão e de raciocínio lógico

Os problemas dessa série não exigiam um conhecimento especial, porém, a habilidade de raciocínio lógico era necessária, junto com certa desenvoltura do estudante. Essa série consistiu de um teste de matemática geral e um de lógica.

SÉRIE XX: Problemas envolvendo seqüências

Nessa série, o estudante precisava encontrar a regra geral utilizada na composição de cada seqüência de números ou figuras. Foi elaborado um teste numérico e um teste figural.

SÉRIE XXI: Sofismos matemáticos

Dado um problema, o estudante tinha que detectar o erro e apresentar provas, utilizando para isso, princípios da Lógica e da Matemática que ele já havia aprendido. Essa série tinha um teste de aritmética, um de álgebra, um de geometria e um teste de lógica.

SÉRIE XXII: Problemas com termos que são difíceis de se lembrar

Nessa série a complexidade consistiu na grande quantidade de dados numéricos ou de relações fornecidas pelo problema. Essa complexidade era introduzida deliberadamente para que o estudante não tivesse nenhuma chance para memorizar o problema como um todo após a leitura do mesmo. Se ele não se lembrasse de tudo, eram verificados quais aspectos ele reteve, ou seja, a estrutura do problema, as relações ou os dados específicos. Foi formulado um teste de aritmética, um de álgebra e um de geometria.

SÉRIE XXIII: Problemas com graus variados de visualização nas suas resoluções

Os problemas dessa série foram organizados em grupos dependendo do grau de visualização e do papel dos componentes visual-pictórico e verbal-lógico do pensamento representado em sua resolução. Os problemas do grupo V (visual) sugeriam a utilização de recursos visual-pictóricos, ou seja, de esquemas gráficos. Eles podiam ser resolvidos por meios verbal-lógicos, porém, com mais dificuldade. Os do grupo A_1 e A_2 (médio) apresentavam oportunidades iguais de resolução, por meio dos dois componentes acima mencionados. Os do grupo M_1 e M_2 (mental) não necessitavam de recurso visual e eram resolvidos de forma mental. Essa série foi formada por cinco testes de aritmética e um de geometria.

SÉRIE XXIV: Problemas com formulações verbais e representações visuais

Nessa série de problemas foi investigado como os estudantes percebiam e correlacionavam os níveis visual e verbal de problemas que envolviam conceitos espaciais de duas ou três dimensões. Também foram analisadas as habilidades para reduzir os passos no processo de raciocínio e de memória matemática. Para essa série foram elaborados um teste de álgebra e dois testes de geometria. Em cada teste havia problemas e variantes.

SÉRIE XXV: Problemas relacionados a conceitos espaciais

Nos problemas dessa série, o estudante tinha que resolvê-los mentalmente, sem lápis e papel e sem recorrer a figuras e objetos. O objetivo era analisar a habilidade dos estudantes para lidar com conceitos espaciais. A série consistiu de dois testes de geometria e dois testes figurais.

SÉRIE XXVI: Problemas que expõem correlações entre componentes visual-pictóricos e verbal-lógicos de atividade intelectual não matemática

Essa série teve como parâmetro o método inventado por Borisova (1956), que estudou a correlação entre os componentes visual-pictórico e verbal-lógico em condições de memorização visual. A intenção de Krutetskii (1968) era investigar a habilidade de estudantes em conceitos espaciais. A série foi composta por dois testes: o primeiro com predominância nos componentes visual-pictóricos (reconhecendo uma imagem visual) e o segundo com ênfase nos componentes verbal-lógicos (descrevendo uma imagem visualmente percebida).

Krutetskii (1968) construiu um instrumento extenso e diversificado para realizar a sua investigação experimental. Os seus componentes das habilidades matemáticas não estavam restritos a determinadas séries de problema. Muitos deles estavam presentes em diversas delas. Por exemplo, na Série VI foram investigados os componentes percepção, generalização, redução dos passos no processo de raciocínio, flexibilidade do pensamento e memória matemática. Para termos uma noção de como os componentes permearam as séries de problemas de Krutetskii (1968), organizamos o Quadro 1:

Quadro 1- Resumo da freqüência de cada um dos componentes nas respectivas Séries de Problemas

Séries	P	G	LR	Rd	F	Rv	AS	MM	CE
I	X								
II	X								
III	X								
IV	X						X		
V	X	X		X					
VI	X	X		X	X			X	
VII	X	X							
VIII	X	X						X	
IX		X	X	X					
X	X	X	X	X	X				
XI	X	X						X	
XII		X							
XIII					X				
XIV					X			X	
XV					X				
XVI					X				
XVII						X			
XVIII		X	X	X					
XIX		X	X	X				X	
XX	X	X	X				X		
XXI		X	X		X				
XXII	X	X						X	
XXIII				X	X			X	
XXIV	X			X				X	
XXV									X
XXVI									X

LEGENDAS:

P ➔ Percepção
G ➔ Generalização
LR➔ Lógica/Raciocínio
Rd➔ Redução dos passos no processo de raciocínio
F ➔ Flexibilidade do pensamento
Rv ➔ Reversibilidade
AS ➔ Analítico-Sintética
MM➔Memória Matemática
CE ➔ Conceitos Espaciais

Esse quadro revela os componentes de maior freqüência estabelecidos por Krutetskii (1968) no capítulo 6 de seu livro. Os que mais aparecem nas séries de problemas são: Percepção (13 vezes), Generalização (13), Redução dos passos no processo de raciocínio (8), Flexibilidade do pensamento (8) e Memória matemática (8). Isso evidencia a grande importância atribuída a eles por Krutetskii, na investigação da estrutura de habilidades matemáticas. Em contrapartida, os componentes de menor freqüência são: Reversibilidade (1), Analítico-sintética (2) e Conceitos Espaciais (2).

1.1.2.5. Organização da investigação experimental de Krutetskii

Para Krutetskii (1968), as habilidades podem ser investigadas com base nas diferenças individuais manifestadas em uma atividade, que em seu caso foi a atividade matemática na resolução de problemas. Sua intenção não era investigar apenas o que havia nos estudantes considerados matematicamente capazes, ou seja, que características eram peculiares a eles. Mas também o que os estudantes considerados matematicamente menos capazes não tinham, quais qualidades psicológicas individuais eram insuficientes e sua relativa condição de incapacidade em Matemática.

Diante disso, foram selecionados estudantes para compor os grupos experimentais, mediante uma classificação preliminar fornecida pelos seus professores que os consideraram como sendo: Muito Capaz em Matemática (VC), Capaz ©, Médio (A) ou Incapaz em Matemática (I)[8]. Nessa tese, o termo “incapaz” foi substituído por “menos capaz”.

Os professores dos estudantes pesquisados por Krutetskii (1968) os classificaram utilizando como critério o sucesso e o fracasso em Matemática na escola. Krutetskii (1968) manteve essa classificação ao apresentar os resultados de sua investigação experimental com os estudantes.

Utilizaremos nessa tese, para efeito de simplificação na escrita, os termos “estudantes muito capazes” em Matemática, “estudantes capazes”, “estudantes médios” e “estudantes menos capazes” em Matemática, tendo como referência a classificação dos professores desses estudantes russos e de Krutetskii (1968). Isso não significa que concordemos plenamente com tal classificação, tendo em vista que acreditamos que ela possa ser relativa, pois depende da atividade matemática envolvida.

8 As siglas se referem à nomenclatura americana: capaz em matemática (VC – very capable); capaz (C – capable); médio (A – average); incapaz em matemática (I – incapable).

Os estudantes investigados por Krutetskii foram organizados em grupos, conforme o Quadro 2.

Quadro 2 – Caracterização dos estudantes da investigação experimental

Pesquisador	Anos	Série ou idade	Estudantes estudados	Grupos			
				MC	C	M	I
Krutetskii (estágio I)	1956-58	VI, VII, VIII	19	0	9	6	4
Krutetskii (estágio II)	1958-65	6-14 anos	16	16	0	0	0
Krutetskii (estágio III)	1960-61	VI, VII	19	0	0	9	10
Krutetskii (estágio IV)	1960-64	V, VI, VII, VIII, IX, X	66	0	36	22	8
S. I. Shapiro	1962-64	IX, X	30	11	8	11	0
I. V. Dubrovina	1963-65	II, III, IV	42	7	14	9	12
Total	1956-65	Séries II→X	192	34	67	57	34

Fonte: KRUTETSKII, 1976, p. 178.

Depois de expor os métodos utilizados e a organização do seu estudo referente às habilidades matemáticas, Krutetskii (1968) apresentou, na parte III, os resultados de sua investigação não experimental e experimental.

1.1.3. Análise da estrutura de habilidades matemáticas de estudantes

1.1.3.1. Análise de Krutetskii dos dados não-experimentais acerca dos componentes de habilidades matemáticas de estudantes

Esse capítulo tratou dos dados não-experimentais obtidos por meio de questionários aplicados a professores de Matemática do Ensino Secundário e a pesquisadores matemáticos. O objetivo era obter opiniões desses sujeitos, por escrito ou oralmente, acerca de habilidades matemáticas. A seguir são apresentados os resultados obtidos.

Os professores foram divididos em dois grupos. Um grupo, com 62 deles, respondeu oralmente um questionário que indagava o que se entendia por habilidades matemáticas e que critérios eram utilizados para avaliar a presença ou ausência das mesmas nos seus estudantes. Krutetskii (1968) sistematizou as freqüências em que os itens foram mencionados pelos professores, conforme transcrição a seguir:

> 1. Domínio relativamente rápido de conhecimento matemático, destreza e hábitos; velocidade para entender as explicações do professor (95%);
> 2. Lógica e independência de pensamento (82%);
> 3. Desenvoltura e sutileza da inteligência no estudo de Matemática (67%);
> 4. Rapidez e memória estável de conteúdo matemático (50%);
> 5. Um alto nível de desenvolvimento de habilidade para a generalização, análise e síntese de conteúdo matemático (50%);
> 6. Fadiga reduzida nas lições de matemática (3%);
> 7. Habilidade para trocar rapidamente um encadeamento de pensamento direto para um inverso (1,5%) (Ibidem, p. 185-187, tradução nossa).

Outro grupo, formado por 56 professores, respondeu por escrito um questionário sobre componentes de habilidades matemáticas, e foi aplicado alguns dias depois da leitura e discussão, por parte dos professores, de um material de Psicologia, envolvendo habilidades matemáticas em estudantes. Os resultados foram:

> 1. Habilidade para generalizar (98%);
> 2. Raciocínio lógico (98%);
> 3. Sutileza e desenvoltura da inteligência (88%);
> 4. Memória matemática (82%);
> 5. Habilidade para abstrair (82%);
> 6. Flexibilidade de pensamento (73%);
> 7. Apoio de recursos visuais (63%);
> 8. Presença de conceitos espaciais (57%);
> 9. Habilidade para transferir um encadeamento de pensa-mento direto para um inverso (52%);
> 10. Esforço para economia da força mental de uma pessoa (48%);
> 11. Redução dos passos no processo de raciocínio (38%);
> 12. Fadiga reduzida durante lições de matemática (30%) (Ibidem, p. 187-189, tradução nossa).

Krutetskii (1968) acrescentou, que ao serem indagados acerca de como escolheriam estudantes com diferentes categorias de talento matemático, 47 dos 56 professores indicaram duas categorias: algebristas e geômetras, tendo por parâmetro as inclinações para pensar no reino das relações numéricas e relações espaciais.

Quanto à pesquisa com os matemáticos, Krutetskii (1968) informou que eles caracterizaram a essência de habilidades matemáticas em dois grupos: propriedades gerais da personalidade e propriedades da mente matemática.

Entre as propriedades da personalidade que podem revelar habilidades matemáticas os matemáticos indicaram: determinação como reflexo de uma meta; concentração; diligência; persistência; interesse pela Matemática; entusiasmo por ela; um esforço para adquirir conhecimento matemático; necessidade de se ocupar com a Matemática e um amor pelos números.

No que se refere às propriedades da mente matemática os matemáticos destacaram: paixão pela generalização; habilidade para ver o que distintos fenômenos têm em comum; habilidade para estabelecer uma conexão entre fenômenos heterogêneos; habilidade para isolar o que é essencial; habilidade para passar do particular para o geral; pensamento lógico; habilidade para esboçar conseqüências de premissas dadas; exatidão; concisão e clareza de pensamento.

Mencionaram como sendo próprio do matemático: a necessidade de buscar uma solução mais elegante; uma imaginação matemática; habilidade combinatória; habilidade para transferir rapidamente de um nível de pensamento a outro; habilidade para captar rapidamente a essência de um assunto e para penetrar a profundidade de uma questão, passando por estágios intermediários de raciocínio; habilidade para pensar omitindo muitas relações no raciocínio; habilidade para lembrar idéias básicas, esquemas e combinações, seqüências básicas de pensamento, com uma habilidade variada para se lembrar de números e fórmulas; habilidade para criar esquemas matemáticos gerais de raciocínio, inclinação para fazer operações formais, de acordo com regras definidas.

A especificidade ou não de habilidades matemáticas foi respondida pelos matemáticos como segue; 16 dos 21 admitiram a natureza específica de habilidades matemáticas, 3 negaram qualquer especificidade e reduziram tudo à inteligência geral e dois não expressaram um ponto de vista definido sobre o assunto.

No que diz respeito às categorias de talento Krutetskii (1968) comentou que cinco matemáticos também mencionaram a existência de analistas e geômetras alegando que essas categorias estão associadas à presença ou ausência de intuição no pensamento matemático. Outros dois acreditam que a intuição não é exclusiva da geometria, uma vez que existe intuição para número e dependência funcional. Outras categorias citadas foram: estilo analista e sintético, concreto e abstrato, com uma inclinação para criatividade fundamentada em conceitos gerais em contraposição com uma inclinação para a criatividade baseada em aparatos matemáticos formais.

Com o intuito de acrescentar algumas considerações ao que foi exposto por Krutetskii, notamos que as respostas obtidas com professores de Matemática, no que se refere às habilidades matemáticas, não diferiram muito, e em alguns momentos foram idênticas. Já os matemáticos forneceram mais informações do que os professores, citando, por exemplo, a interpretação matemática de fenômenos, as características particulares de um matemático. Provavelmente isso esteja vinculado à experiência profissional dos mesmos, ou seja, em pesquisas.

1.1.3.2. Casos individuais de talentos matemáticos em estudantes investigados por Krutetskii

Krutetskii (1968) estudou, durante oito anos, 9 estudantes matematicamente talentosos, cujas habilidades matemáticas começaram a aparecer, como uma regra, a uma idade precoce. Ele descreveu com detalhes as características psicológicas, o desempenho e os processos de resolução de problemas manifestados principalmente durante as suas lições de matemática.

As características da atividade mental desses estudantes, obtidas pela observação de professores e por experimentação de Krutetskii (1968), foram:

a) Habilidade para generalizar conteúdo matemático

Foi solicitado à Lenya (9 anos) que deduzisse uma regra, começando com o exemplo: Adivinhe por quais regras as igualdades estão compostas. Usando a regra que você obteve, componha você mesmo mais uma igualdade similar: 12 x 42 = 21 x 24; 13 x 62 = 31 x 26, ele respondeu:

Aqui há uma transposição dos dígitos. A soma dos números na primeira metade é 54, e na segunda metade 45 que também é uma transposição. Está claro. Eu posso inventar outra igualdade assim: 14 x 82 = 41 x 28. Os dígitos são transpostos. A Soma dos números na primeira metade é 96, e na segunda é o contrário, 69 (Ibidem, p. 215, tradução nossa).

b) Flexibilidade do processo mental

No problema “Galinhas e coelhos estão correndo ao ar livre. Juntos eles têm 35 cabeças e 94 pés. Quantos há de cada?” (Ibidem, p. 195, tradução nossa) Sasha o resolveu da seguinte maneira:

Nós temos animais quadrúpedes e de duas pernas que correm ao ar livre. Se só os de duas pernas estivessem correndo, seriam 70 pés... 24 pés extras – somando dois para cada, darão 12 quadrúpedes. Doze coelhos e 23 galinhas. Mas também pode ser feito desse modo: se todos fossem coelhos, então as 35 cabeças teriam 140 pés, mas não há tantos pés... Quarenta e seis pés estão faltando. Cada galinha, pela comparação com um coelho, está faltando 2 pés. Novamente nós obtemos 23 galinhas (Ibidem, p. 217).

c) Redução dos passos no processo de raciocínio

As duas resoluções acima ocuparam aproximadamente um minuto e nelas ficou aparente que Sasha tinha uma tendência para reduzir os passos no seu processo de resolução e nos sistemas de operações apropriadas.

d) Esforço para encontrar o modo mais fácil, claro e econômico para resolver problemas

Kutetskii (1968) informou que Sonya revelou essa característica de forma bem acentuada. Exemplo: Quanto pesa um peixe se seu rabo pesa 4 kg, sua cabeça pesa tanto quanto seu rabo e mais a metade do corpo, e seu corpo pesa tanto quanto sua cabeça e seu rabo juntos? Solução:

Seu corpo é igual ao peso de sua cabeça e rabo. Mas sua cabeça é igual ao peso do rabo e metade do corpo, e o rabo pesa 4 kg. Então o corpo pesa tanto quanto 2 rabos e mais a metade do corpo – quer dizer, 8 kg e metade do corpo. Então, 8 kg é a outra metade do corpo, e o corpo todo pesa 16 kg (Ibidem, p. 198, tradução nossa).

e) Habilidade para recordar relações generalizadas, esquemas de raciocínios e métodos de resolver problemas de uma única categoria

Lenya era bom para se lembrar de esquemas para resolver problemas, porém, se esquecia rapidamente dos dados concretos. Por exemplo, à idade de 8 anos ele resolveu o problema: Um tijolo pesa 1 kg e meio tijolo. Quanto pesa o tijolo? Ele não fez esse problema sozinho, pedindo ajuda ao pesquisador.

Quatro meses depois recebeu o problema: Um livro vale 1 ruble[9] e metade de seu custo. Quanto vale o livro? Sua resposta foi: “E outra metade de um livro... então meio livro custa 1 ruble, o livro inteiro custa 2 rubles. Eu já fiz esses problemas... Também havia uma metade e eu tinha que achar o todo, mas eu esqueci sobre o que era” (Ibidem, p. 215, tradução nossa).

A habilidade de Lenya em captar e reter o que é mais essencial em um problema também se manifestou na sua percepção de problemas com relações difíceis de lembrar. Depois de uma leitura, ele normalmente se lembrava de todas as relações essenciais do problema.

f) Formação de uma percepção matemática do ambiente – perceber fatos e fenômenos sob o prisma de relações matemáticas

Dima manifestou fascinação por vários assuntos, dentre os quais, geografia – se interessava pela altura comparativa entre montanhas e o comprimento comparativo entre rios; e astronomia – aos 7 anos comparou as distâncias da terra com os outros planetas.

A análise de Krutetskii (1968) foi enriquecida com alguns casos de estudantes matematicamente talentosos citados em fontes literárias, como por exemplo, Rabinovich & Shubert (1917), Leites (1950, 1960), dentre outros.

Krutetskii (1968) informou ainda que observações e experiências revelaram que diferenças tipológicas correlacionando os componentes visual-pictórico e verbal-lógico da atividade mental na resolução de problemas são notáveis a uma idade precoce em estudantes matematicamente capazes. Alguns deles não sentem necessidade de se apoiar em imagens visuais; para eles, a lógica substitui o figurativo. Outros precisam de uma interpretação visual das relações matemáticas e preferem resolver problemas que utilizam de

9 Moeda russa utilizada na época.

meios visual-pictóricos. Essas diferenças tipológicas são retomadas por Krutetskii (1968) no capítulo 16, auxiliando-o na classificação de alguns dos estudantes pesquisados.

Nos capítulos de 12 a 14, Krutetskii (1968) apresentou uma análise dos resultados da investigação experimental, a qual teve como parâmetro os componentes de habilidades matemáticas estabelecidos por ele. Para tanto, distinguiu três etapas básicas da atividade mental no processo de resolução de problemas matemáticos:

A) Coletar a informação acerca do problema (tentativa para entender o problema);

B) Processar (transformar) a informação coletada com a finalidade de resolver o problema e obter o resultado desejado;

C) Reter informação sobre o problema.

Temos a seguir uma síntese dos capítulos 12, 13 e 14, cujos resultados serão retomados com mais detalhes no item 1.2 desta Tese.

1.1.3.3. Características dos processos de coleta das informações (orientação inicial para um problema) de estudantes matematicamente capazes enunciadas por Krutetskii

Para fazer tal caracterização Krutetskii (1968) teve como material básico os problemas das três primeiras séries:

I – problemas com uma pergunta não declarada;
II – problemas com informação incompleta;
III – problemas com informação em excesso (KRUTETSKII, 1976, p. 105-111).

O grupo de pesquisados foi composto por 40 estudantes da 7ª série, sendo 18 matematicamente capazes, 14 médios e 08 menos capazes. Os dados empíricos foram analisados por meio da Análise Fatorial, cujo objetivo era verificar se a resolução dos problemas experimentais das três séries acima poderia ser explicada por uma propriedade comum da atividade matemática – por um fator geral. O resultado confirmou a existência desse fator e para identificá-lo Krutetskii (1968) fez uma análise qualitativa dos processos de resolução dos problemas.

Após a análise qualitativa, ele definiu como fator geral a "percepção formalizada de conteúdo matemático" (Ibidem, p. 233, tradução nossa). Para Krutetskii (1968) a formalização é no sentido de "captar" rapidamente a estrutura formal de um problema específico ou uma expressão matemática. A percepção formalizada é uma espécie de percepção generalizada de relações funcionais, cuja estrutura formal geral é percebida em detalhe concreto.

Krutetskii (1968) caracterizou ainda a performance de alguns estudantes que tinham habilidades matemáticas diferentes, ilustrando-a com exemplos. Fez referência a algumas pesquisas similares já realizadas por outros psicólogos tais como Kalmykova (1954, 1955, 1957), Bochkovskaya (1959), Menchinskaya (1946, 1955) e outros.

Os resultados com esses estudantes conduziram Krutetskii (1968) a concluir que "(...) sob condições idênticas para a percepção de conteúdo matemático, estudantes com habilidades matemáticas diferentes obtêm (...) ativamente diferente informação" (Ibidem, p. 233, tradução nossa).

1.1.3.4. Características expostas por Krutetskii dos processos de tratamento das informações, durante a resolução de problemas de estudantes matematicamente capazes

Krutetskii (1968) dividiu esse capítulo em seis partes. Analisou os resultados obtidos com as entrevistas por meio da Análise Fatorial e descreveu os desempenhos de cada um dos modelos de estudantes ilustrando com muitos exemplos. Também apresentou resultados de algumas pesquisas já realizadas por outros psicólogos[10] e suas opiniões sobre o assunto em cada uma das seis partes.

10 Soviéticos: Samarin (1962), Ern (1915), Bogoyavlenskii (1962), Indik (1951); não soviéticos: Johannot (1947), Duncker (1965), e muitos outros.

O processo de tratamento das informações é o que abrange um maior número de componentes das habilidades matemáticas selecionados por Krutetskii (1968). Abaixo segue a relação desses componentes, juntamente com uma síntese de como eles foram estudados.

1.1.3.4.1. – A habilidade para generalizar "objetos" matemáticos, relações e operações (27 pág.)

Krutetskii (1968) considerou a habilidade para generalizar conteúdo matemático em dois níveis: (1) habilidade da pessoa para ver algo geral e conhecido por ela no que é particular e concreto (submeter um caso particular a um conceito geral conhecido) e (2) habilidade para ver algo geral e ainda desconhecido por ela no que é isolado e particular (deduzir o geral de casos particulares para formar um conceito).

Ele próprio ponderou que "uma coisa é um estudante ver a possibilidade de aplicar uma fórmula já conhecida a um determinado caso particular e outra, deduzir uma fórmula ainda desconhecida por ele com base em casos particulares" (Ibidem, p. 237, tradução nossa).

Aproveitamos esse momento para discutir outro ponto de vista no que se refere à generalização, além desse apresentado por Krutetskii. A generalização pode ser concebida em dois aspectos:

Aspecto 1) generalizar implica substituir elementos constantes por elementos variáveis.

Exemplo: 3 + 5 = 5 + 3,   4 + 7 = 7 + 4,   a + b = b + a

Aspecto 2) generalizar para ampliar uma estrutura matemática, ou seja, indicar a estrutura original como uma subestrutura da nova estrutura, mudando as características ou não.

Exemplo: Consideremos um grupo abeliano, também chamado de grupo comutativo, que é um grupo no qual a operação entre os elementos é comutativa, ou seja: $\forall a, b \in G \rightarrow a \,.\, b = b \,.\, a$.

Partindo de um grupo abeliano, podemos construir um grupo não comutativo (não abeliano).

Começamos com um conjunto de matrizes da forma abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m+n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se temos duas matrizes dessa forma, o produto é uma matriz dessa mesma forma e ainda temos $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ como elemento neutro, por isso esse conjunto de matrizes forma um grupo. Esse grupo é comutativo, pois m+n = n+m e isomorfo com o grupo dos números inteiros, tomando a adição como a única operação. Chamemos esse grupo de Z que é um subgrupo de outro grupo do grupo de matrizes dessa forma, ou seja, que tenha o zero em a_{21}.

Generalizamos substituindo na diagonal das matrizes 1 por números variáveis diferentes de zero. Se há dois elementos é preciso provar que esse é um subgrupo. Então, definimos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$$

Para mostrar que esse é um grupo, temos que provar que o a_{21} também será zero. Então, precisamos calcular esse elemento: a_{21} = 0.a'+d.0=0.

Esse é um grupo e será chamado de Z^{G}, em que ele é não comutativo ou não abeliano. Por quê? Para responder a essa pergunta precisamos verificar a não comutatividade!

Consideremos o produto das matrizes a seguir:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & az+by \\ 0 & dy \end{pmatrix}$$

Invertendo o produto das matrizes temos:

$$\begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & xb+zd \\ 0 & dy \end{pmatrix}$$

Para que seja um grupo comutativo é preciso ter az + by = xb + zd para quaisquer números. Porém, esse não é o caso, pois em geral temos az + by $\neq$ xb + zd e esse grupo é não comutativo. Mas o nosso subgrupo $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Z}^{G}$, ou seja, Z é um subgrupo de Z^{G}. Ampliamos um grupo abeliano, um grupo que tem em a_{11} o número 1 e definimos um grupo não comutativo.

Agora, se considerarmos as diagonais das matrizes sendo todas iguais a 1, ou seja, a = d = x = y = 1, teremos:

$az + by = xb + zd \rightarrow \; z + b = b + z$ que é um grupo comutativo. Porém, se as diagonais das matrizes tiverem números diferentes de 1, ou seja, arbitrários, esse grupo deixa de ser comutativo.

Outra maneira de generalizar é substituir uma constante por uma variável (aspecto 1). Isso também pode ser constatado nesse exemplo, pois em $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ o a_{11} tem constante 1 e em $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ o a_{11} tem variável $a \neq 0$.

Houve uma generalização desse grupo para um grupo que tem outras características, dentre elas, que não é mais comutativo.

Voltando à generalização investigada por Krutetskii (1968) destacamos que, com o objetivo de estudar a capacidade para generalizar "objetos" matemáticos, relações e operações, ele agrupou 6 séries de problemas:

> V – Sistemas de problemas de uma única categoria;
> VI – Sistemas de problemas de diferentes categorias;
> VII – Sistemas de problemas com transformação gradual do concreto para o abstrato;
> VIII – Composição de problemas de uma determinada categoria;
> IX – Problemas envolvendo provas matemáticas;
> X – Composição de equações que utilizam os termos de um problema (Ibidem, p. 115-132, tradução nossa).

Nessa investigação foram envolvidos 61 estudantes capazes, 37 médios e 22 menos capazes em Matemática, totalizando 120 estudantes. Eles foram separados em quatro grupos, que Krutetskii denominou de estágios de pesquisa.

No primeiro estágio, foram estudados 19 estudantes com habilidades diferentes (9 capazes, 6 médios e 4 menos capazes). A intenção de Krutetskii era verificar a existência de diferentes graus para generalizar conteúdo matemático.

No segundo, foi investigado um grupo de 16 estudantes muito capazes almejando obter uma descrição da capacidade para generalizar conteúdo matemático e, de certa forma, verificar se os resultados confirmariam ou não o que foi obtido com estudantes capazes no primeiro estágio.

No terceiro, foram estudados 19 estudantes (9 estudantes médios e 10 menos capazes), com a finalidade de descrever algumas características específicas desse grupo no que se refere à generalização.

No quarto e último estágio, a investigação experimental foi reaplicada em 54 estudantes com habilidades diferentes (24 capazes, 22 médios e 8 menos capazes). Esses estudantes passaram por todos os testes das séries de generalização.

Por que no quarto estágio Krutetskii voltou a estudar um grupo heterogêneo? Porque ele pretendia avaliar os níveis de generalização descritos nas outras três fases de forma a confirmá-los ou refutá-los.

Para analisar os dados obtidos também foi aplicado o método da Análise Fatorial para interpretar psicologicamente *a habilidade para generalizar conteúdo matemático* como fator geral, bem como estudar a velocidade e a amplitude da generalização. Velocidade não no sentido do tempo de trabalho individual e sim em termos da rapidez na generalização.

Esse estudo de Krutetskii (1968) revelou que estudantes com distintas habilidades matemáticas manifestaram diferentes níveis de generalização de conteúdo matemático (esses níveis são apresentados no item 1.2 desta Tese).

1.1.3.4.2. A habilidade para reduzir os passos no processo de raciocínio matemático e no correspondente sistema de operações (12 pág.)

O estudo da habilidade para reduzir os passos no processo de raciocínio matemático também se deu em quatro estágios (com os mesmos grupos de estudantes utilizados para estudar a habilidade para generalizar). Nos primeiros estágios o aspecto qualitativo dos processos foi analisado e no último uma descrição quantitativa dos processos foi o centro da atenção.

As séries de problemas utilizadas para investigar esse componente de habilidade matemática foram:

V – Sistemas de problemas de uma única categoria;
VI – Sistemas de problemas de diferentes categorias;
IX – Problemas envolvendo provas matemáticas;
X – Composição de equações que utilizam os termos de um problema;
XVIII – Tarefas Heurísticas;
XIX – Problemas de compreensão e de raciocínio lógico;

XXIII – Problemas com graus variados de visualização nas suas resoluções;
XXIV – Problemas com formulações verbais e representações visuais (Ibidem, p. 115-169, tradução nossa).

Krutetskii (1968) comentou que muitos pesquisadores[11] estabeleceram que a redução dos passos no processo de raciocínio é gradual e obtida somente com base em um número mais ou menos significante de exercícios de única categoria. Ele concordou parcialmente com isso, alegando que é verdadeira para a maioria dos estudantes com habilidades comuns. No entanto, nos estudantes capazes essa condição é aparentemente não obrigatória, já que eles são distinguidos por uma tendência muito acentuada para a rápida redução dos passos no processo de raciocínio e do sistema de operações matemáticas. Nos problemas, pensavam em estruturas e deduções reduzidas, mesmo quando o problema era de uma nova categoria para eles.

Os dados da sua investigação experimental revelaram que estudantes com habilidades matemáticas diferentes manifestaram distintos processos de redução dos passos no processo de raciocínio. E ainda, que a redução dos passos começou imediatamente depois que os estudantes generalizaram o método de solução encontrado por eles, estabelecendo assim, uma correspondência entre essas habilidades, como ilustra o Quadro 3.

Quadro 3 - Generalização e redução dos passos no processo de raciocínio em estudantes com habilidades matemáticas diferentes

Estudantes	Generalização e redução dos passos no processo de raciocínio ocorreram
capazes	Imediatamente
médios	Sem muita dificuldade, porém, somente após resolver repetidos problemas de uma única categoria
menos capazes	Com muita dificuldade e após resolver repetidos problemas de uma única categoria

Outras pesquisas que também investigaram essa habilidade foram mencionadas por Krutetskii (1968), dentre elas a de Sokolov (1961), Kalmykova (1963, 1964) e Ivanitsyna (1965).

11 Menchinskaya (1959), Bogoyavlenskii (1962) e outros.

1.1.3.4.3. Flexibilidade dos processos mentais (8 pág. e meia)

O material básico para estudar esse componente foram as séries de problemas abaixo:

> XIII – Problemas que propiciam diferentes resoluções;
> XIV – Problemas com mudança de conteúdo;
> XV – Problemas para reconstruir uma operação (Ibidem, p. 135-141, tradução nossa).

O grupo de entrevistados foi composto por 17 estudantes capazes da 7ª série que foi comparado com um grupo de 24 estudantes médios e outro de 17 estudantes menos capazes. Esses estudantes desenvolveram todos os testes dessas séries.

A Análise Fatorial foi utilizada para definir como fator geral a *flexibilidade do processo mental* para as séries de problemas citadas acima.

Dos resultados obtidos, Krutetskii (1968) concluiu que estudantes capazes manifestaram grande flexibilidade nos processos mentais, entretanto, nos estudantes médios e menos capazes isso não ocorreu – o primeiro método utilizado por eles os impedia de encontrar outros métodos para resolver um mesmo problema. Isso foi mais acentuado nos estudantes menos capazes.

1.1.3.4.4. Esforço para a clareza, simplicidade e economia (elegância) em uma solução (3 pág. e meia)

Para estudar esse componente Krutetskii (1968) utilizou as séries de problemas a seguir:

> X – Composição de equações que utilizam os termos de um problema;
> XIII – Problemas que propiciam diferentes resoluções;
> XIX – Problemas de compreensão e de raciocínio lógico;
> XXIII – Problemas com graus variados de visualização nas suas resoluções (Ibidem, p. 130-161, tradução nossa).

Krutetskii (1968) assinalou que essa é uma característica típica dos estudantes matematicamente capazes, não sendo percebida nos estudantes médios e menos capazes. Os estudantes capazes sempre se esforçavam “para obter uma solução racional em um problema, uma busca de clareza, simplicidade, redução e, desse modo, o mais ‘elegante’ caminho para a meta” (Ibidem, p. 283, tradução nossa). Para Krutetskii (1968), isso parece uma tendência distintiva para a economia de pensamento, que se manifesta pelo interesse em buscar modos mais econômicos de resolver problemas e, geralmente, começa a aparecer precocemente.

Normalmente os estudantes capazes investigados não se contentavam com a primeira resolução que obtinham, e, em seguida, tentavam verificar se era possível melhorá-la ou resolver o problema de forma mais simples. Sentiam satisfação somente quando a solução obtida era econômica, racional e elegante. Às vezes, sentiam insatisfação e tristeza quando a resolução encontrada por eles era imperfeita e complicada, porém, não podiam encontrar uma melhor.

Krutetskii (1968) lembrou que o pensamento de muitos matemáticos famosos do passado e do presente também era marcado por esse esforço para a simplicidade e elegância de métodos, e indicou a obra de Rossinskii, publicada em 1950, que discutiu esse aspecto.

1.1.3.4.5. Reversibilidade de processos mentais no raciocínio matemático (4 pág. e meia)

Para Krutetskii (1968) reversibilidade de um processo mental significa uma reconstrução de sua direção no sentido de mudar um encadeamento de pensamento direto para um inverso. Esse conceito, de acordo com Krutetskii (1968) combina dois processos:

- é o estabelecimento de dois modos de associações da forma A $\leftrightarrow$ B como opostos a um modo de ligações da forma A $\rightarrow$ B, com função somente em uma direção.
- é a reversibilidade do processo mental no raciocínio, ou seja, pensamento em uma direção inversa do resultado. Em um encadeamento inverso, o pensamento nem sempre tem que percorrer a mesma rota, mas mover-se em ordem inversa. Se a direção do pensamento inicial for de A para F, agora se move na direção de F para A. No entanto, todas as ligações e a

seqüência de associações não têm que necessariamente ocorrer na ordem estritamente inversa. As ligações intermediárias podem diferir e isso implica que o caminho específico que o pensamento percorre também pode diferir. Nesse caso, um encadeamento inverso não pode ser sempre reduzido a associações inversas.

Krutetskii (1968) alertou que essa distinção não fornece uma base para isolar um processo do outro. Ligações inversas podem ser formadas ao mesmo tempo em que as diretas são estabelecidas. Ele afirmou que existem bases teóricas[12] para considerar a transição de um encadeamento do pensamento direto a um inverso como uma das manifestações da flexibilidade de pensamento.

A reversibilidade foi estudada nos problemas da Série XVII – Problemas diretos e inversos (Krutetskii, 1978, p. 143-146, tradução nossa) e o objetivo era revelar as diferenças entre os estudantes com habilidades distintas. Krutetskii (1968) não mencionou quantos estudantes foram entrevistados nessa série.

Os resultados obtidos confirmaram a existência de diferenças quanto à flexibilidade de pensamento nesses estudantes e Krutetskii (1968) os descreveu da seguinte forma:

Estudantes capazes – foram marcados por uma habilidade para reconstruir de forma rápida e nítida a direção (direto a inverso) do processo mental e por uma livre reversibilidade do processo de raciocínio (as ligações formadas se tornaram imediatamente reversíveis). Entretanto, em cerca da metade dos casos foi constatado que um problema inverso dado depois de um direto foi resolvido mais facilmente e mais rapidamente do que o problema inverso dado independentemente do direto.

Estudantes médios – resolveram os problemas sem precisar de exercícios especiais. Muitos deles (60%) identificaram o problema inverso dado como tal, porém, não fizeram isso com muita confiança. Resolver um problema inverso logo depois de um direto limitou o pensamento e as operações desses entrevistados – o primeiro problema provocou uma influência inibitória. De outro lado, o problema inverso proposto independentemente de um direto era

12 Menchinskaya (1946, 1955) e Kabanova-Meller (1950, 1962).

resolvido com muito mais confiança. Para eles estabelecerem ligações inversas era necessário resolver exercícios específicos e estar em tempo separados da formação de ligações diretas.

Estudantes menos capazes – esse processo foi extremamente difícil. Identificaram o segundo problema dado como um problema inverso apenas em casos elementares, particularmente, quando era o mesmo problema, porém transformado de direto para inverso. Um problema inverso apresentado independentemente do direto era resolvido melhor e mais confiantemente do que quando apresentado logo depois do direto.

1.1.3.4.6. Hipótese de Krutetskii no que se refere ao avaliador ("acceptor") de uma operação matemática (3 pág.)

Krutetskii (1968) destacou que a solução para muitos problemas complexos não vem imediatamente. Estudantes tentavam várias possibilidades, testavam diferentes métodos e faziam várias tentativas para obter uma resolução.

Em seus experimentos, diferenças qualitativas foram observadas nas tentativas de estudantes capazes e menos capazes. Os estudantes capazes revelaram a existência de um sistema organizado de busca subordinado a um plano definido. Suas tentativas sempre foram significativas, sistematizadas, direcionadas para verificar as suposições levantadas. Nos menos capazes, as manipulações foram desmotivadas, as tentativas caóticas e não sistemáticas para obter uma solução.

A pesquisa permitiu admitir a existência de um "acceptor" (no Latin significa *a pessoa que avalia*) de uma operação matemática como um distintivo mecanismo psicológico de controle-avaliação. Antes que qualquer operação matemática, tentativa ou busca seja efetuada, surge uma distintiva noção geral da seqüência e do resultado dessa operação, tentativa ou busca, ou seja, constrói-se uma imagem mental da situação. A correspondência entre a tentativa sendo executada e esse conceito geral atua como uma forma particular de confirmação, e é vivenciada pelo estudante como um sentimento de que o método está correto. É um mecanismo de autocontrole.

Para Krutetskii (1968) um “avaliador” é o produto de pensamento matemático generalizado, que é bem desenvolvido nos estudantes capazes e fracamente revelado nos estudantes menos capazes.

Uma observação pode ser feita ao que foi apresentado no capítulo 13. Nos processos de tratamento das informações os componentes da generalização de conteúdo matemático e da redução dos passos no processo de raciocínio foram os que Krutetskii (1968) mais investigou comparados com os outros componentes, pois utilizou um maior número de estudantes, compôs diferentes grupos e reservou mais páginas para discuti-los. Isso evidencia a grande importância atribuída por ele a esses dois componentes na caracterização de talento matemático.

1.1.3.5. Características do processo de retenção das informações (conteúdo matemático) de estudantes matematicamente capazes apresentados por Krutetskii

Essas características emergiram pela comparação de manifestações da função mnemônica entre dois grupos: o dos 38 estudantes capazes e muito capazes e o dos 17 estudantes menos capazes. Os 9 estudantes médios passaram por um estudo menos detalhado. A essência de uma memória matemática consiste na lembrança de esquemas típicos de raciocínio e de operações, destacou Krutetskii (1968).

As séries de problemas envolvidas nesse componente foram:

> VI – Sistemas de problemas de diferentes categorias;
> XI – Problemas irreais (”unrealistic”);
> XXII – Problemas com termos que são difíceis de se lembrar (Ibidem, p. 119-156, tradução nossa).

Dados desnecessários foram introduzidos nos problemas. Os estudantes tinham que reproduzir o problema depois de uma leitura, ao término da sessão experimental, após uma semana e depois de três meses. Observou-se em cada tempo como as relações essenciais, os métodos gerais de resolução, os dados concretos e os dados desnecessários foram reproduzidos.

O estudo referente ao componente de retenção das informações dos problemas (memória matemática) permitiu que Krutetskii (1968) chegasse às seguintes conclusões:

Estudantes capazes – a memória matemática deles era generalizada e operativa, relacionada à retenção e à efetivação rápida de padrões mentais generalizados, relações generalizadas de símbolos numéricos e literais. Eles também tinham uma memória seletiva, ou seja, o cérebro era purificado de dados concretos, retendo somente estruturas generalizadas.

Estudantes médios – se lembraram de dados concretos e numéricos relativamente bem, porém, não se lembraram tão bem, ou não recordaram nada, das características da categoria do problema. Tentaram, com igual dificuldade, lembrar o geral e o particular, o essencial e o secundário. Suas memórias eram "sobrecarregadas com excesso de informação" (Ibidem, p. 297, tradução nossa).

Os estudantes menos capazes foram classificados por Krutetskii (1968) em três grupos desiguais.

1º grupo: o grupo mais numeroso (10 dos 17 estudantes) revelou uma visível fraqueza da função mnemônica em Matemática (para generalizações matemáticas e dados numéricos) e muitos deles foram distinguidos por uma boa memória em seus outros assuntos escolares. Eles manifestaram uma memória pobre para esquemas de raciocínio na resolução de alguns problemas, na prova de teoremas, na dedução de fórmulas, números e conteúdo geométrico concreto. Muitos memorizaram os problemas mecanicamente e os reproduziram de forma pouco sistemática. Nenhum estudante desse grupo reproduziu um problema experimental uma semana depois de resolvê-lo, e muito menos após 3 meses. Muitos esqueceram os elementos essenciais de um problema ao término da lição.

2º grupo: composto por 3 estudantes, distinguiu-se do primeiro pelo fato que a função mnemônica era manifestada diferentemente com relação a distintos elementos dos problemas. Eles se lembraram de elementos generalizados tão pobremente quanto os estudantes do primeiro grupo, entretanto, recordaram números, valores, problemas específicos, figuras geométricas e a posição de linhas auxiliares na construção de provas geométricas.

3º grupo: formado por 4 estudantes, foi marcado por um bom desenvolvimento da habilidade para lembrar generalizações matemáticas. Embora nenhuma distinção especial fosse observada, o nível de desenvolvimento dessa habilidade era maior do que o referente aos dois primeiros grupos.

1.1.3.6. Alguns assuntos especiais na estrutura das habilidades matemáticas de estudantes explicitados por Krutetskii

Durante as entrevistas Krutetskii (1968) constatou algumas particularidades em muitos estudantes matematicamente talentosos que foram:

a) uma notável organização da mente, que denominou como "the Mathematical Cast of Mind" (Ibidem, p. 302, tradução nossa). Essa expressão foi aqui traduzida como *a constituição matemática da mente*;

b) uma inspiração ou uma solução imediata em um problema matemático; e

c) uma ausência de cansaço nos estudantes capazes durante atividade matemática prolongada e intensiva.

A constituição matemática da mente foi considerada por Krutetskii (1968) como uma tendência dos estudantes matematicamente talentosos para interpretar um fenômeno ambiental com base em categorias lógicas e matemáticas; para focar o aspecto matemático dos fenômenos, para perceber relações espaciais e quantitativas. Em outras palavras, ver o mundo com olhos matemáticos. Por exemplo, se um estudante matematicamente talentoso se interessa por astronomia, ele procurará fazer composição de tabelas astronômicas, cálculo das fases da lua, tabelas de distâncias entre os planetas e estrelas, e assim por diante. É a Matemática que guiará seu pensamento.

Krutetskii (1968) constatou que os estudantes tinham como característica a persistência para propor problemas a si mesmos enquanto caminhavam, liam, assistiam filmes, durante as lições ou até mesmo em casa. Por exemplo, calcular o volume de certo edifício, a área de um estádio (e quantas pessoas poderiam se sentar no local), a velocidade do ônibus no qual o estudante se encontrava, quantos segundos uma pessoa vive em toda vida, quanta água beberá na sua vida, etc.

Dados biográficos e autobiográficos de muitos matemáticos famosos também indicaram essa inclinação para interpretar uma realidade matematicamente, informou Krutetskii (1968).

Ele ressaltou que a constituição matemática da mente é “uma expressão sintética particular de talento matemático e inclui aspectos cognitivo, emocional e da vontade (uma atitude apropriada, inclinação e interesse, uma necessidade para a atividade matemática)” (Ibidem, p. 305, tradução nossa).

No que se refere à solução imediata, Krutetskii (1968) mencionou que já se sabe que a solução de muitos problemas não vem como um resultado claro e preciso do pensamento. Depois de insucessos e tentativas inúteis da resolução, uma inspiração, uma suposição súbita surge.

Krutetskii (1968) comentou que para a Psicologia idealista esse fenômeno de subitaneidade na resolução de um problema é a manifestação de uma habilidade para captar relações essenciais (quantitativas ou espaciais) diretamente do ambiente, independentemente de experiência passada.

Krutetskii (1968) já pensava diferente. Para ele, esse fato pode ser interpretado a partir da estrutura de habilidades matemáticas. Ou seja, muitos episódios de inspirações imediatas, aparentemente inexplicáveis na resolução de problemas, são explicados pela influência inconsciente de experiência passada. Ele afirmou que sob esses episódios está uma habilidade para generalizar no reino de “objetos” matemáticos, relações e operações e uma habilidade para pensar em estruturas reduzidas.

A título de exemplo, Krutetskii (1968) citou Sonya L. (estudante talentosa de 10 anos) que estava resolvendo o problema: Prove que todos os números da forma 276.276, 591.591, 112.112 são divisíveis por 13. Durante dez minutos ela fez tentativas sem sucesso para obter a solução. Dividiu todos os números dados por 13 e imediatamente declarou: “(...) Qualquer um pode ser escrito como: xyz000 + xyz; nós colocamos um fator comum fora dos parênteses = xyz $\times$ (1000 + 1). Dos dois fatores, um deveria ser divisível por 13, ou seja, 1001 $\div$ 13 = 77” (Ibidem, p. 308, tradução nossa).

O objetivo desse problema é encontrar uma lei comum para a construção desses números (abcabc = abc x 1001). Como Sonya conseguiu obter essa representação geral dos números? Após encontrar a solução, a própria Sonya não sabia como teve essa idéia súbita. Depois, ela se lembrou que três meses antes resolveu um problema similar: *Escreva algebricamente a forma geral de números que, quando divididos por 5, deixam resto* 7. Isso foi confirmado verificando o seu caderno. Assim, a generalização e a transferência de um dispositivo geral estão subjacentes a uma inspiração, acrescentou Krutetskii (1968).

Outro fato constatado por Krutetskii (1968) em estudantes capazes se refere à ausência de cansaço durante as atividades matemáticas em comparação com cansaço em lições sobre outros assuntos, até mesmo aqueles que os interessavam. Para verificar tal fato, algumas vezes, foram aplicadas lições demoradas (3 horas) sem interrupção. Somente no final desse período alguns sinais de fadiga foram observados como enganos, diminuição de memória, etc.

Em contrapartida, Krutetskii (1968) relatou que houve fadiga visivelmente crescente nos estudantes matematicamente menos capazes quando estudavam Matemática em comparação com a fadiga estudando outros assuntos escolares. Tanto estudantes como professores mencionaram isso, e as observações de Krutetskii (1968) confirmaram tal ocorrência.

Krutetskii (1968) citou outros pesquisadores que também constataram casos similares, dentre eles, Shapiro (1965), Ponomareva (1963) e Leites (1950, 1960).

1.1.3.7. Categoria, idade e diferenças de gênero nos componentes das habilidades matemáticas descritas por Krutetskii

Com base nos resultados de sua investigação experimental e em alguns casos da literatura, Krutetskii (1968) expôs categorias de estruturas presentes na constituição matemática da mente, discutiu as idades dinâmicas e as diferenças de gênero na estrutura de habilidades matemáticas.

No que se refere às categorias de estruturas que podem ser identificadas na constituição matemática da mente, Krutetskii (1968) comentou que, em qualquer campo da Ciência, talento, como uma combinação qualitativa de habilidades, é sempre variado e único em cada sujeito.

Ele citou Shvartsburd (1964) que acredita na existência de diferentes constituições matemáticas da mente como sendo uma conseqüência não apenas de diferenças psicológicas típicas e individuais entre pessoas, mas também das diferentes exigências feitas a uma pessoa por distintos ramos da Matemática. Por exemplo, em um ramo, habilidades para encontrar os melhores algoritmos para calcular provam ser mais úteis, em outro, habilidades combinatórias são importantes. Em alguns ramos, interpretações geométricas são freqüentemente necessárias, em outros, raramente.

Entre proeminentes matemáticos do passado e do presente há categorias diferentes de constituição matemática da mente, lembrou Krutetskii (1968). Por exemplo, o matemático Mlodzeevskii, um geômetra pela natureza de seu talento, estudou a teoria dos números com muita dificuldade. Já Hermite alegou não poder descrever os esforços despendidos para entender a geometria descritiva, a qual detestava, manifestando grande prazer em se dedicar ao ramo da Análise.

Com o objetivo de estudar se a presença de constituição matemáticas da mente na escola está relacionada com os componentes verbal-lógico e visual-pictórico[13] de uma atividade mental dos estudantes, Krutetskii (1968) fez uma investigação experimental envolvendo as séries de problemas abaixo:

> XXIII – Problemas com graus variados de visualização nas suas resoluções;
> XXIV – Problemas com formulações verbais e visuais;
> XXV – Problemas relacionados a conceitos espaciais (Ibidem, p. 156-172, tradução nossa).

Trinta e quatro estudantes capazes fizeram parte dessa pesquisa, na qual se pretendia saber: (1) Quanto um pesquisado depende de imagens visuais na resolução de problemas, se ele se esforça para visualizar relações matemáticas, se tem necessidade de uma interpretação visual até do mais

13 Método inventado por Borisova, citado na p. 46 desta Tese.

abstrato sistema matemático; e (2) Quão bem desenvolvidos são seus conceitos de geometria espacial – habilidade para visualizar a posição de um sólido no espaço e a posição de suas partes, a inter-relação de sólidos, figuras, planos e linhas (sua imaginação geométrica).

Os resultados da pesquisa permitiram a Krutetskii (1968) elaborar duas proposições: (a) Os dois componentes não são necessariamente componentes da estrutura das habilidades matemáticas, porém, determinam a categoria de talento matemático; (b) A habilidade para visualizar relações matemáticas abstratas e a habilidade para conceitos da geometria espacial revelaram alta intercorrelação.

Com esse estudo Krutetskii (1968) identificou três categorias básicas de constituição matemática da mente, que foram descritas da seguinte maneira:

Estilo analítico ("*analytic type*"[14]*)* – o pensamento é caracterizado pela predominância de um bem desenvolvido componente verbal-lógico em contraposição com um fraco desenvolvimento do componente visual-pictórico.

Estilo geométrico ("*geometric type*"*)* – o pensamento é caracterizado pela predominância de um bem desenvolvido componente visual-pictórico em contraposição com um bem desenvolvido componente verbal-lógico.

Estilo harmônico ("*harmonic type*"*)* – os estudantes possuem como característica um equilíbrio relativo dos componentes verbal-lógico e visual-pictórico, sendo que ambos componentes são bem desenvolvidos.

Essa constituição matemática da mente será discutida e exemplificada com mais detalhes no item 1.3 desta Tese.

No que diz respeito à relação entre as idades e a estrutura de habilidades matemáticas Krutetskii (1968) citou alguns estudos que revelaram a influência da idade no desenvolvimento matemático de estudantes. Por exemplo, o de Piaget (1932) – que acredita que apenas aos 12 anos a criança é capaz de desenvolver o pensamento abstrato – e de Johannot (1947) – que afirma que aos 12 ou 13 anos um estudante pensa apenas no nível

---

14 Krutetskii utilizou o termo "tipo" analítico, porém, nesta Tese o termo "tipo" foi substituído pelo termo "estilo".

visualmente concreto e somente aos 17 anos tem condições de pensar no nível formal das relações algébricas.

Krutetskii (1968) contrapôs essas opiniões mencionando estudos de psicólogos soviéticos que obtiveram resultados diferentes, como o de Blonskii (1961) que concluiu, por meio de pesquisas, que estudantes de 11 a 14 anos conseguem desenvolver generalizações, abstrações, desenvolver e compreender problemas envolvendo provas matemáticas.

A pesquisa de Krutetskii incluiu ainda um estudo das distinções de idade na estrutura de habilidades matemáticas sob a influência da instrução escolar. Tal estudo teve como sujeitos estudantes médios e capazes em Matemática, uma vez que estudantes muito talentosos em Matemática representavam uma exceção na descrição geral para suas idades.

Krutetskii (1968) fez suas análises das distinções de idade no desenvolvimento das habilidades, segundo os componentes: 1) percepção formalizada de conteúdo matemático; 2) generalização de conteúdo matemático; 3) qualidade da redução dos passos no pensamento matemático; 4) flexibilidade do processo mental; 5) busca por uma economia de esforço mental; e 6) memória matemática. Isso lhe forneceu um retrato geral e experimental do período de desenvolvimento dos componentes essenciais da estrutura de habilidades matemáticas de estudantes.

Os resultados dessa investigação indicaram a Krutetskii (1968) que nem todos os componentes de habilidades matemáticas começavam a ser formados ao mesmo tempo. O primeiro componente a ser formado era a habilidade inicial para generalizar “objetos” matemáticos, relações e operações. A habilidade para reduzir os passos no processo de raciocínio, a memória generalizada e o esforço para a economia e racionalidade nas resoluções de problemas eram formadas em estágios posteriores. Contudo, Krutetskii (1968) alertou que essa não é uma conclusão definitiva, pois isso exige estudos especiais.

Quanto as diferenças de gênero em habilidades matemáticas Krutetskii (1968) apresentou algumas posições divergentes. Por exemplo, alguns trabalhos afirmam a existência de uma superioridade dos meninos sobre as meninas (Stern (1926)); em outros, isso é completamente negado, embora algumas características do pensamento de meninos e meninas sejam indicadas (Thorndike (1923)).

A pesquisa de Krutetskii (1968) e de seus colaboradores Dubrovina e Shapiro não revelaram diferença qualitativa ou característica específica do pensamento matemático de meninos e meninas. O que ocorre é que meninos vencem Olimpíadas Matemáticas com mais freqüência do que meninas, mais meninos estudam nas escolas e classes especiais de Matemática, etc.

Krutetskii (1968) alegou ainda, que essa diferença pode estar associada à diferença na tradição, na educação de meninos e meninas e nas visões de muitas pessoas com relação às profissões tidas como masculinas e femininas.

1.1.3.8. Habilidades matemáticas e personalidade discutidas por Krutetskii

Krutetskii (1968) debateu a relação entre habilidades matemáticas e personalidade evidenciando que executar uma atividade matemática requer certa combinação de características de personalidade. Para ele, algumas habilidades, sem uma combinação com uma orientação adequada de personalidade ou de sua esfera emoção-vontade, não alcançam um desempenho alto, mesmo quando a pessoa tem um alto nível.

Do final do século XIX até início de 1920, a literatura psicológica dos Estados Unidos divulgava que os estudantes talentosos eram fisicamente fracos, doentes, emocionalmente instáveis, excêntricos por natureza e manifestavam características anárquicas e individualistas, informou Krutetskii (1968).

No entanto, na década de 30, estudos de alguns psicólogos sobre as características da personalidade de estudantes talentosos derrubaram tais concepções, elucidando que o quadro era o oposto, acrescentou Krutetskii (1968). Ou seja, revelaram que a saúde, o desenvolvimento e o padrão físico de estudantes talentosos estavam no nível normal; constataram a grande estabilidade emocional e mental deles, a presença de vivacidade, humor, originalidade, curiosidade, atitude questionadora, etc.

Krutetskii (1968) citou alguns fatores que podem determinar o desempenho do estudante em certo assunto. Por exemplo, fatores como atitude positiva e negativa para a Matemática, inclinações para a atividade matemática, a indiferença com o assunto, dentre outros, influenciam o sucesso na Matemática.

Outro aspecto se refere aos sentimentos estéticos que são importantes na criatividade matemática. Poincaré (1909) é citado por Krutetskii (1968) porque escreveu sobre o sentimento estético que os matemáticos têm, ou seja, é "um sentimento para beleza matemática, para harmonia de números e formas, para elegância geométrica" (Ibidem, p. 347, tradução nossa). Os estudantes capazes, estudados por Krutetskii, revelaram interesse em buscar uma solução elegante, além de manifestar perseverança, capacidade para o trabalho e diligência.

1.1.3.9. Questões gerais concernentes à estrutura de habilidades matemáticas expostas por Krutetskii

Nesse capítulo, Krutetskii (1968) apresentou um esboço da estrutura geral de habilidades matemáticas, definiu talento matemático, debateu a especificidade ou não das habilidades matemáticas e apontou alguns fatos acerca da natureza do talento matemático.

Apresentamos a seguir, o delineamento da estrutura de habilidades matemáticas, elaborado por Krutetskii (1968):

> 1. Coletar a informação matemática
> A. A habilidade para perceber (...) conteúdo matemático, para captar a estrutura formal de um problema.
> 2. Processar a informação matemática
> A. A habilidade para o pensamento lógico na esfera de relações quantitativas e espaciais, símbolos numéricos e literais; a habilidade para pensar em símbolos matemáticos.
> B. A habilidade para generalização rápida e ampla de "objetos" matemáticos, relações e operações.
> C. A habilidade para reduzir os passos no processo de raciocínio matemático e o sistema de operações correspondentes; a habilidade para pensar em estruturas reduzidas.

> D. Flexibilidade do processo mental em atividade matemática.
> E. Esforço para a clareza, simplicidade, economia e racionalidade nas resoluções.
> F. A habilidade para reconstrução rápida e livre de um processo mental – reversibilidade do processo mental no raciocínio matemático.
> 3. Reter informação matemática
> A. Memória matemática (memória generalizada para relações matemáticas, esquemas de argumentos e provas, métodos de resolver problemas e princípios de aproximações).
> 4. Componente geral sintético (“General synthetic component”).
> A. Constituição matemática da mente (Ibidem, p. 350-351, tradução nossa).

Para completar sua conclusão, Krutetskii (1968) enumerou alguns componentes que não são obrigatórios na estrutura, entretanto, determinam a constituição matemática da mente, que são:

> (1). A velocidade do processo mental (característica temporária).
> (2). Habilidades computacionais.
> (3). Uma memória para símbolos, números e fórmulas.
> (4). Uma habilidade para conceitos espaciais.
> (5). Uma habilidade para visualizar relações matemáticas abstratas e dependências.

A partir dessas considerações, Krutetskii (1968) definiu que talento matemático “é caracterizado por pensamento generalizado, abreviado e flexível no reino das relações matemáticas, símbolos numéricos e literais e por uma constituição matemática da mente” (Ibidem, p. 352, tradução nossa). Para ele, essa peculiaridade do pensamento matemático proporciona um aumento na velocidade ao processar informação matemática e uma economia de força mental e nervosa.

No que se refere à especificidade de habilidades matemáticas Krutetskii (1968) levantou algumas questões: Os componentes selecionados são especificamente habilidades matemáticas? Ou são habilidades gerais e apenas a constituição matemática da mente seria específica? Habilidades matemáticas não diferem de habilidades mentais gerais, e a Matemática é apenas um bom campo para sua manifestação?

Krutetskii (1968) recorreu a alguns teóricos para buscar possíveis respostas, como por exemplo, Poincaré (1908) que acredita na existência de uma natureza específica de habilidade matemática, o que torna esse conhecimento não acessível a todas as pessoas.

Mencionou algumas pesquisas que, por meio da Análise Fatorial, obtiveram baixas correlações entre habilidade geral (inteligência) e habilidades matemáticas, tais como a de Symonds (1923), de Flescher (1963), de Buckingham (1921), entre outros.

Krutetskii (1968) também fez investigação experimental envolvendo assuntos matemáticos e não matemáticos para analisar a questão da especificidade. Com todo esse estudo ele concluiu que “habilidades mentais que são gerais por natureza (como a habilidade para generalizar) em alguns casos podem manifestar-se como habilidades específicas (habilidade para generalizar “objetos” matemáticos, relações e operações)” (Ibidem, p. 360, tradução nossa).

E acrescentou que o mundo da Matemática – das relações numéricas e espaciais, expressas por símbolos numéricos e literais – é muito específico e distintivo. Nesse mundo distintivo, no processo de atividade muito específica, habilidade geral é transformada e se comporta como uma habilidade específica. Nesse sentido, ela é geral e específica.

Todo o estudo apresentado até o momento possibilitou que Krutetskii identificasse alguns fatos relativos à natureza do talento matemático, dentre eles:

(I). Freqüentemente (mas não obrigatoriamente) há uma formação muito prematura de habilidades em Matemática, normalmente sob condições desfavoráveis e com a ausência inicial de instrução sistemática e intencional;

(II). Um interesse e uma inclinação para perseguir a Matemática, também são revelados em idade precoce;

(III). Existe uma alta capacidade para trabalhar a Matemática, associada a uma fadiga relativamente baixa durante lições matemáticas intensivas; e

(IV). Uma constituição matemática da mente, característica de pessoas matematicamente capazes, se apresenta como uma distintiva tendência para perceber muitos fenômenos pelo prisma de relações matemáticas.

Krutetskii (1968) destacou a existência de pessoas que possuem “características inatas na estrutura e nas características funcionais de seus cérebros que são extremamente favoráveis (ou desfavoráveis) para o desenvolvimento de habilidades matemáticas“ (Ibidem, p. 361, tradução nossa). Esse comentário nos sugere que ele não nega totalmente o aspecto inato, o considera como características do cérebro, e não no âmbito das habilidades.

Um estudo completo e valioso de habilidades matemáticas, envolvendo análises de literaturas soviéticas e ocidentais, pesquisas experimentais e não experimentais, foi desenvolvido por Krutetskii e sua equipe composta por 50 pessoas. Essas noções podem auxiliar professores e demais interessados em diferentes componentes de habilidades e como eles poderiam funcionar juntos, além de caracterizar talento matemático.

No entanto, acreditamos que a maior contribuição do livro de Krutetskii (1968) se encontra na resolução de problemas matemáticos. Os dados experimentais despertaram um interesse particular levantando algumas indagações: Como a resolução dos problemas possibilitou identificar diferenças entre estudantes com habilidades matemáticas distintas? De que forma os resultados da investigação experimental de Krutetskii contribuíram para definir talento matemático? Para fornecer uma visão mais detalhada, a seguir são expostos alguns dos resultados da investigação experimental de Krutetskii.

1.2. Talento matemático na perspectiva de Krutetskii

Krutetskii (1968), por meio de investigação experimental, estudou a atividade mental de estudantes manifestada no processo de resolução de problemas matemáticos e distinguiu três etapas:

A. Coletar a informação apresentada no problema;

B. Processar a informação;

C. Reter a informação.

Essas etapas evidenciam a concepção que Krutetskii tem do que vem a ser resolver problemas matemáticos.

A seguir, são apresentados exemplos dos processos de resolução de problemas de alguns estudantes que propiciaram a Krutetskii (1968) explicitar diferenças entre estudantes com habilidades matemáticas distintas, bem como caracterizar talento matemático.

A. Processos de coleta das informações de um problema pelos estudantes

Para estudar os processos de coleta das informações, em que o componente percepção era o foco da pesquisa, Krutetskii (1968) analisou estudantes com habilidades matemáticas diferentes, ou seja, estudantes matematicamente capazes, médios e menos capazes em Matemática. Vejamos alguns resultados.

Estudante capaz – à V. L. (3ª série) foi dado o problema: "Uma jarra de mel pesa 500g e a mesma jarra, cheia com querosene, pesa 350g. Quanto pesa a jarra vazia?" (Ibidem, p. 230, tradução nossa). Após ouvir as informações do problema, olhou para o pesquisador de modo inquiridor e respondeu: "E então?" Pesquisador: "Esse é o problema completo". Estudante: "Não, isso não é tudo. Eu ainda tenho que saber quanto o mel é mais pesado que o querosene". Pesquisador: "Por quê?" Estudante:

> Sem isso não há nenhuma solução. Existem duas quantidades desiguais, relacionadas pelo fato que algumas de suas partes são iguais. Poderia haver várias dessas partes iguais. Para limitar seu número, devemos introduzir mais uma quantidade, caracterizando o 'resto' (Ibidem, p.230, tradução nossa).

Estudante menos capaz – V. K. (6ª série), tentou por um longo tempo, e sem sucesso, resolver o problema acima. Ele não foi capaz de perceber a relação ausente no problema. Mesmo quando essa relação era introduzida (por exemplo, o mel é duas vezes mais pesado que o querosene) por um longo tempo ele não entendeu o sentido.

Como o componente percepção foi estudado em diversas séries de problemas (Quadro 1, p. 47 desta Tese), Krutetskii (1968) mencionou que os problemas envolvendo a fórmula para a multiplicação na forma reduzida $(a+b)^2$ da Série V, utilizados para investigar a habilidade para generalizar, também forneceram informações sobre a percepção.

Na Série V foram propostos exemplos como:

A. Teste de Álgebra

1. $(a + b)^2 =$	1a. $a^2 + b^2 =$
2. $(1 + \frac{1}{2}a^3b^2)^2 =$	2a. $(\frac{1}{3}ab^3)^2 + (2a)^2 =$
3. $(-5x + 0.6xy^2)^2 =$	3a. $(-5x^2 - 0.6xy^2) . 2 =$
4. $(3x - 6y)^2 =$	4a. $(3x + 6y) . 2x =$
5. $(m + x + b)^2 =$	5a. $2(m^2 + x^2 + b^2) =$
6. $(4x + y^3 - a)^2 =$	6a. $4x^2 + y^2 - a^2 =$
7. $51^2 =$	7a. $98^3 =$
8. $(C + D + E)(E + C + D) =$	8a. $(c + m + x)(c - m + x) =$

O problema consistia em identificar um padrão comum entre os exemplos do grupo à esquerda e entre os exemplos do grupo à direita, bem como diferenciar os dois grupos de exemplos. Além disso, deveriam diferenciar os processos de resolução para cada grupo.

Krutetskii (1968) constatou que as resoluções dos estudantes capazes produziram uma distintiva formalização da estrutura do problema que ocorreu quando um exemplo como $\left(6a^x + \frac{1}{2}b^y\right)^2$ era "pego" na sua forma $(\square+\square)^2=$. Já para os estudantes menos capazes era difícil entender que a e b designavam qualquer quantidade e qualquer expressão algébrica. Não identificaram a estrutura do problema.

Outros exemplos:

Estudante capaz – À Sonya L., que aos 9 anos tinha aprendido há pouco tempo a fórmula para a diferença de dois quadrados, foi dado o exemplo: $113^2 - 112^2$. Um ou dois segundos se passaram após a apresentação do mesmo e ela exclamou "Essa é uma subtração de quadrados!" (diferença de quadrados). "Isto pode ser resolvido pela fórmula!" (Ibidem, p. 232, tradução nossa).

Estudante médio – um estudante da 6ª série (também familiarizado com a fórmula da diferença de quadrados) precisou de 5 minutos para elaborar (com a ajuda do pesquisador) uma análise-síntese das relações do mesmo exemplo.

Os resultados obtidos possibilitaram a Krutetskii (1968) identificar características distintas no que se refere à percepção em estudantes com habilidades matemáticas diferentes, conforme detalhamos a seguir:

Estudantes capazes perceberam o conteúdo matemático de um problema *analiticamente* (isolaram diferentes elementos em sua estrutura, os avaliaram diferentemente, os sistematizaram, determinaram sua “hierarquia”) e *sinteticamente* (os combinaram em complexos, buscaram relações matemáticas e dependências funcionais). Eles criaram uma imagem integral do problema. Nos estudantes capazes, a percepção analítico-sintética de problemas de uma nova categoria, ainda desconhecido, surgiu neles não como um resultado de exercícios prolongados, porém, imediatamente, ou quase tão, com um número mínimo de exercícios.

Os estudantes médios quando percebiam um problema de uma nova categoria, estavam percebendo, como uma regra, seus elementos matemáticos separados. Eles tinham como tarefa tentar *conectar* os elementos matemáticos de um problema, e no processo de análise e síntese estabelecer essa conexão.

Nos estudantes menos capazes tais conexões e correlações entre os elementos de um problema eram estabelecidas com grande dificuldade, mesmo tendo ajuda do pesquisador.

Nos experimentos, Krutetskii (1968) constatou outras características da percepção analítico-sintética. Nos estudantes capazes a orientação analítico-sintética era instrumental, ou seja, era direcionada para isolar características que serviam de base para planejar operações adequadas em sua resolução. Enquanto que nos estudantes menos capazes (e, em parte, os médios) a orientação analítico-sintética em um problema era direcionada para isolar características que permitiam distinguir o problema dado de outros.

Exemplos. Consideremos as duas expressões $(a - b)^2$ e $a^2 - b^2$. Para Krutetskii (1968), psicologicamente, duas diferentes funções de análises são possíveis:

1) analisar a expressão $(a - b)^2$ para aprender a reconhecê-la e diferenciá-la de todas as outras, em particular, de uma expressão dada por $a^2 - b^2$, ou seja, como *distinguir* uma expressão da outra; e
2) analisar a expressão $(a - b)^2$ para determinar o algoritmo de resolução, ou seja, como *operar* em um caso tão distinto de outro.

Às vezes, um estudante menos capaz conseguia distinguir uma expressão de outra, porém, ele não conseguia determinar como as operações para sua resolução se distinguiam, afirmou Krutetskii (1968).

A título de exemplo, Krutetskii (1968) descreveu o diálogo do pesquisador com V. A. (estudante média da 7ª série), quando lhe foi dada uma série de exemplos da forma $(a – b)^3$ e $a^3 – b^3$.

Estudante: “Aqui estão dois exemplos diferentes. Em alguns, a potência – o três – vai com parênteses, e em outros não há parênteses”. (Ela fez a diferenciação correta).

Pesquisador**:** “Bem, como você resolve esse grupo de exemplos que você selecionou comparando com a resolução para o outro grupo? Compare o processo de resolução”. Ela ficou silenciosa.

Pesquisador**:** “Você separou corretamente alguns exemplos de outros, você disse a diferença. Bem, o que essas diferenças significam? Em que difere o processo de resolução de um exemplo do processo de resolução dos outros?”.

Estudante**:** “Eu posso distinguir entre eles, mas eu confundo na resolução – eles são resolvidos similarmente, de alguma maneira” (Ibidem, p. 236, tradução nossa).

Com os resultados da investigação experimental Krutetskii (1968) distinguiu níveis no processo de percepção de estudantes com habilidades matemáticas diferentes. No entanto, na tradução do livro aqui referenciado não há descrição de problema desenvolvido por um estudante médio referente às Séries de problemas I, II e III, e sim, de outras Séries. Os exemplos contrastantes são sempre entre estudantes capazes e menos capazes em Matemática.

B. Processos de tratamento das informações de um problema pelos estudantes

No processo de tratamento das informações fornecidas por um problema Krutetskii (1968) considerou a utilização das seguintes habilidades:

I. Habilidade para generalizar “objetos” matemáticos, relações e operações;

II. Habilidade para reduzir os passos no processo de raciocínio matemático e os correspondentes sistemas de operações;

III. Habilidade do pensamento flexível.

Krutetskii (1968) ilustrou com vários exemplos os processos de tratamento de informação utilizados pelos estudantes para resolver os problemas propostos em sua investigação experimental e, em seguida, formalizou as distinções nas habilidades matemáticas constatadas entre os sujeitos pesquisados. Na seqüência, apresentamos alguns dos resultados obtidos com os sujeitos pesquisados.

B.I. Habilidade para generalizar “objetos” matemáticos, relações e operações

A habilidade para generalizar conteúdo matemático foi estudada por Krutetskii (1968) tendo como parâmetro estudantes com habilidades matemáticas diferentes, ou seja, estudantes muito talentosos em Matemática, capazes, estudantes médios e estudantes menos capazes em Matemática. A seguir, descrevemos alguns processos de resolução dos estudantes pesquisados, juntamente com as conclusões de Krutetskii (1968).

Estudantes muito talentosos em Matemática

Krutetskii (1968) enunciou algumas características que foram verificadas no estudo com estudantes muito talentosos em Matemática, tais como:

- Analisando um exemplo inicial ou problema sem nenhuma comparação e contraste, os estudantes captavam as relações básicas com muita rapidez e faziam com segurança a transferência da operação a exemplos bem distantes.

Exemplo: Sonya L. aprendeu o método para fatorar polinômios evidenciando o fator comum com um único exemplo: $5a + 5b = 5(a+b)$. Logo depois, lhe foi dado: $4m^2 (2p – q) – 2m(q – 2p) – 2m(q – 2p)$. Nesse, em comparação com o exemplo inicial, um fator complexo aparece fora dos parênteses e deve-se observar que o sinal em um dos parênteses pode ser invertido. Sonya não encontrou dificuldades para resolvê-lo. O pesquisador perguntou por que ela achou esse exemplo parecido com o anterior e ela exclamou: “Bem, por que não? Você pode ter tantos termos quanto quiser e qualquer termo que quiser, mas se existirem fatores comuns, podemos colocá-los fora dos parênteses” (Ibidem, p. 250, tradução nossa).

- Habilidade para generalizar está relacionada à habilidade para fazer distinções. Estudantes talentosos diferenciavam assunto sutilmente similar.

Exemplos:

(1) Uma pessoa escalou uma montanha a uma velocidade de 2 km/h e desceu a 6 km/h. Encontre sua velocidade média.

(2) Um viajante viajou a uma velocidade de 6 km/h, depois de alguma distância ele sentiu cansaço e diminuiu sua velocidade para 2 km/h. Quando ele chegou ao seu destino, percebeu que gastou o mesmo tempo viajando a 6km/h como a 2 km/h. Encontre sua velocidade média.

Nenhum dos estudantes da 7ª série com habilidades matemáticas médias constatou qualquer diferença. Todos deram as mesmas respostas: 4 km/h (mesmo quando estimulados a pensar). Todos os estudantes do grupo muito capaz deram a resposta correta: 3 km/h e 4 km/h.

Gilya Kh. Exclamou:

> Os problemas são semelhantes, mas há uma diferença. No primeiro problema, a distância a ser percorrida a qualquer velocidade é idêntica, e no outro, é o tempo gasto movendo-se a qualquer velocidade que é idêntico. No primeiro, ambas as velocidades permaneceram em diferentes tempos – a uma velocidade mais lenta levou-se mais tempo para se mover do que a uma velocidade maior, e então a velocidade média não estará no meio, porém, mais perto de 2 do que de 6. No segundo, ambas as velocidades permaneceram pelo mesmo tempo e então, a velocidade média estará no meio: 4 km/h. No primeiro é assim: para cima 1 km em $\frac{1}{2}$ hora, para baixo 1 km em $\frac{1}{6}$ hora, ele fez 1 km na média em $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\div 2=\frac{1}{3}$ hora, quer dizer, a velocidade média era 3 km/h (Ibidem, p. 250, tradução nossa).

- Estudantes muito capazes normalmente resolviam o problema em um nível geral e, às vezes, até se esqueciam dos dados concretos do problema original. Ou ainda, muitas vezes, não se limitavam ao problema concreto. Eles sentiam necessidade de generalizar.

Exemplo: Sasha estava resolvendo o problema: Um livro é 4 vezes tão caro quanto um caderno. Um caderno é 30 kopeks mais barato do que um livro. Quanto custa separadamente? Ela disse: “Como resolvemos problemas onde temos que achar o número que é tantas vezes maior do que um número dado e tanto mais que ele? Serão resolvidos desse modo, talvez...” Pesquisador: “Sasha, esse raciocínio geral não é necessário. Esse problema é simples – dê a resposta!” Sasha: “Não, eu quero entender como resolvê-lo de forma geral. Espere um segundo” (Ibidem, p. 251-252, tradução nossa).

Estudantes capazes em Matemática

Krutetskii (1968) comentou que nesse grupo, a generalização rápida e ampla era imediata durante a solução de alguns problemas, sem necessidade de exercícios auxiliares, nos quais características irrelevantes podiam variar. Exemplos:

Estudante O. V. – depois de resolver um exemplo, utilizando a fórmula do quadrado da soma de dois termos, foi lhe dado o exemplo (C+D+E) (E+C+D) da Série V.

Estudante: “O que é isso? Aqui não está na fórmula – nós devemos simplesmente multiplicar o polinômio... Mas que terá 9 termos. Que é muito. Mas nós podemos usar a fórmula – isso é um quadrado [rapidamente escreveu: $(C+D+E)^2$]. Certo. Agora quaisquer dois termos podem ser combinados [escreveu: $(C+[D+E])^2$]”.

Pesquisador: “Mas você pode fazer isso? A fórmula se aplica apenas ao quadrado de um binômio, mas você não tem um trinômio?”

Estudante: “Assim que eu combinei D e E em um termo, obtive um binômio. Um termo pode ser qualquer expressão” (Ibidem, p. 241, tradução nossa).

Ele resolveu o exemplo repetindo a fórmula em voz alta e escreveu: $C^2 + 2C(D + E) + (D + E)^2 = C^2 + 2CD + 2CE + D^2 + 2DE + E^2$. Dessa forma, ele compôs um algoritmo para resolver todos os problemas dessa categoria.

Estudante P. A. – ao resolver o problema “Prove que a soma de quaisquer três números consecutivos é divisível por 3”, esse estudante procedeu da seguinte forma:

> Números consecutivos são números tais que cada um do seguinte é 1 a mais do que o precedente, penso eu. Como eu provo isso agora? De fato 2, 3 e 4 na soma são divisíveis por 3; 12, 13 e 14 na soma dá 39. Isso pode ser provado assim: a soma de três números idênticos é, claro, divisível por 3. Então, 3 unidades são adicionadas (o segundo número é 1 unidade a mais do que o primeiro e o terceiro são duas unidades a mais do que o primeiro), que também são divisíveis por 3. Isso pode ser provado algebricamente: x + (x + 1) + (x + 2) = 3x + 3 = 3(x + 1). A última expressão sempre pode ser dividida por 3, não importa o que o número inicial x é. Bem, eu entendi o princípio da prova (Ibidem, p. 245-246, tradução nossa).

Pesquisador: “Bom, agora tente resolver o problema IX-B-6” [A soma de duas frações é igual a 1. Prove que o quadrado da primeira fração mais a segunda fração é igual ao quadrado da segunda fração mais a primeira].

Estudante: “Bem, isso é fácil. O princípio é o mesmo – algébrico. A soma de duas frações é igual a 1. Então, essas são as frações”:

$$\frac{x}{y} \text{ e } 1-\frac{x}{y};$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(1-\frac{x}{y}\right)=\left(1-\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y};$$

$$\frac{x^2}{y^2}+1-\frac{x}{y}=1-\frac{2x}{y}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{x}{y};$$

$$\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}+1=\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}+1.$$

Estudante: “O lado esquerdo é igual ao lado direito” (Ibidem, p. 245-246, tradução nossa).

Krutetskii (1968) acrescentou que esse estudante provou os demais teoremas, da Série de problemas envolvendo provas matemáticas, de forma algébrica igualmente livre e sem pausas para pensar.

Outros problemas foram mencionados por Krutetskii (1968), como os que seguem:

VI-C-1: De acordo com o planejamento, uma fábrica de móveis deveria fazer 48 mesas diariamente. Porém, fez 2 mesas a mais em cada dia que foi estipulado no planejamento, e então, durante os últimos 3 dias antes do tempo se esgotar, teve somente 100 mesas para fazer. Quantas mesas no total a fábrica planejou fazer?

VI-C-2: Estavam sendo mantidos números idênticos de mesas fabricadas em 4 armazéns de uma fábrica de móveis. Quando 90 mesas foram levadas de cada armazém, restaram em todos os 4 armazéns tantas mesas quanto previamente havia em cada um. Quantas mesas estavam sendo mantidas em cada armazém?

VI-C-3: Foi pedido a um viveiro para transplantar certo número de árvores e foi fixado um período de tempo para isso. Se o viveiro transplantar 240 árvores um dia, então 400 árvores a menos do que planejou serão transplantadas. Se transplantar 280 árvores diariamente, transplantará 200 a mais do que planejou. Quantas árvores o viveiro deveria transplantar e qual período de tempo foi fixado? (Ibidem, p. 122, tradução nossa).

Estudante V. G. – ele resolveu de forma geral os problemas **VI-C-1** e **VI-C-3**.

Depois de ler lentamente o problema **VI-C-1** duas vezes, o estudante V. G. começou sua resolução, da seguinte forma:

> Nesse problema tudo é construído sobre três fatos: o número total, a taxa de produção e o tempo. Eles estão na relação: N=R.T [ele indicou as três quantidades dessa forma]. Um deles é conhecido, outro deve ser designado por *x* e o terceiro pode ser expresso em termos dos dois primeiros e então, algo pode provavelmente ser equacionado. Bem, como olharia esse problema? Aqui estão dois exemplos [desenhou um quadro e rapidamente o preencheu, conforme diagrama 1]. E o que poderia ser equacionado? “Para os três últimos dias antes que o tempo esgotasse” significa que o tempo no segundo caso são 3 dias a menos do que no primeiro. [Ele resolveu o problema sem dificuldade]. Bem, está claro como se resolvem esses problemas (Ibidem, p. 248-249, tradução nossa).

Ao resolver um problema, esse estudante compreendeu como se resolvem todos os problemas dessa categoria. Em seguida, passou para a resolução do problema **VI-C-3** (enunciado anteriormente). Depois de ler uma vez o problema ele pronunciou: “Isso é resolvido do mesmo modo”. Rapidamente esboçou o diagrama 2 e o preencheu sem dificuldade.

1		2
N	x	$x - 100$
R	48	50
T	$\frac{x}{48}$	$\frac{x-100}{50}$

Diagrama 1

1		2
N	$x - 400$	$x + 200$
R	240	280
T	$\frac{x-400}{240}$	$\frac{x+200}{280}$

Diagrama 2

Olhando novamente o terceiro problema ele mencionou: “O tempo é o mesmo”. E rapidamente escreveu a equação: $\frac{x-400}{240} = \frac{x+200}{280}$, resolvendo-a com facilidade. Ao ser questionado sobre como fez o problema, ele respondeu:

> Eu só fiz como aquele. Aqui não há nada o que pensar – o problema se resolveu. É do mesmo tipo. (...) Em ambos há uma combinação de três índices ocorrendo: número total, tempo e um número por unidade de tempo (apontou). Há uma diferença, claro – esse problema fala sobre mesas e o outro sobre árvores e precisamos encontrar algo diferente (Ibidem, p. 249, tradução nossa).

Estudante médio em Matemática

Krutetskii (1968) informou que os estudantes médios foram capazes de generalizar de modo gradual, mediante generalizações sucessivas, com o auxílio de exercícios especiais. Tiveram sucesso nas tarefas com auxílio do pesquisador.

Estudante U. – ele não percebeu nenhuma similaridade entre os exemplos (1) [$(a + b)^2$ =] e (8) [(C+D+E) (E+C+D) =] da série V-A, porém, fez facilmente a transição do 1º para o 2º [$(1+\frac{1}{2}a^3b^2)^2$ =] e do 2º para o 3º [$(-5x+0.6xy^2)^2$ =]. Ao ver o exemplo $(3x - 6y)^2$ exclamou: “Isso é um quadrado, mas não da soma... Isso é um exemplo diferente, não pode ser resolvido pela fórmula”.

Pesquisador: “Olhe com atenção o exemplo anterior $(-5x+0{,}6y)^2$. Isso não sugere algo?”

Estudante: ”Isso é outro assunto – há um mais no meio e aqui há um menos...”

Pesquisador: “Olhe o primeiro termo e pense”.

Estudante: “Agora, se transpusermos... Pode fazer isso?”

Pesquisador: “Pense você – pode fazer isso?”

Estudante: “Eu não sei... Quando há uma soma você pode transpor, mas aqui há um menos... [escreve: $3 - 4 = +3 - 4 = -4 + 3$]. Aqui é realmente desse modo [escreve: $(-6y + 3x)^2$]. Bem, sim, nós temos uma soma, o quadrado de uma soma [e o resolve corretamente]. Agora eu sei como trabalha isso”.

O pesquisador lhe deu o exemplo $(m + x + b)^2$ e o estudante exclamou: “Eu não sei como fazer esse, há dois mais aqui, duas somas. Esse é o quadrado de duas somas”.

Pesquisador: “Pense – você pode aplicar a fórmula para o quadrado da soma de dois números nesse exemplo? Pode a expressão entre parênteses ser representada como a soma de dois números?”

Estudante: “Isso pode [escreveu $([m + x] + b)^2$]. Agora eu sei como resolver isso”. [Ele prosseguiu com sua resolução, porém, escreveu $(m^2 + x^2)$ em vez de $(m + x)^2$].

Em seguida, o pesquisador retornou ao primeiro exemplo que lhe foi apresentado: (C + D + E) (E + C + D).

Estudante: “Eu faço isso [escreveu: ([C+D]+E)([E+C]+D)]. Eu tenho algo diferente nos parênteses... Primeiro, devo reorganizar os termos [escreveu: ([C+D+E)([C+D]+E) = $([C+D]+E)^2$]” (Ibidem, p 241-242, tradução nossa).

Estudantes menos capazes em Matemática

Conforme Krutetskii (1968), os estudantes desse grupo passaram de um nível de generalização a outro com dificuldade, mesmo tendo ajuda do pesquisador. Cada nível foi reforçado com vários exercícios auxiliares.

Estudante S. A. depois de várias tentativas sem sucesso para resolver o problema **VI-C-1** (citado anteriormente), declarou que ele não era resolvível porque estava faltando o número de dias.

Pesquisador: “Mas daí não seria um problema! Pense: se o número de dias for conhecido e sabemos que o plano é de 48 mesas por dia, então não há o que encontrar – multiplicamos esses dois números e pronto. Mas você está certa observando que precisamos encontrar o número de dias. Isso pode ser feito? Você indicou por *x* o número total de mesas e a produção diária é conhecida".

Estudante: "Precisamos dividir o total por 48 que será $\frac{x}{48}$. A fábrica trabalhou assim muitos dias".

Pesquisador: "Deveria ter trabalhado. De fato, trabalhou melhor ou pior?"

Estudante: "Melhor. Fabricou 50 mesas".

Pesquisador: "Quanto tinha fabricado 3 dias antes do prazo final? O problema diz isso."

Estudante: "Cem. Então tinha fabricado x–100".

Pesquisador: "Correto. Quantos dias trabalhou?"

Estudante: "Três dias menos: ($\frac{x}{48}$ – 3)". Ao ser indagada sobre como expressar esse número, no qual tem-se que foi fabricado x–100 e fez 50 por dia, ela obteve: "$\frac{x-100}{50}$ dias".

Pesquisador: "Agora você expressou o número de dias realmente trabalhados de uma única maneira. O que devemos fazer agora?"

Estudante: "Esse número de dias é o mesmo. Podemos fazer uma equação: $\frac{x-100}{50} = (\frac{x}{48} - 3)$" (resolveu a equação com ajuda do pesquisador).

Pesquisador: "Agora olhe com atenção e lembre como trabalhar esse tipo de problema. Nele haverá sempre três elementos: o número total, o tempo e o número por unidade de tempo. Como essas quantidades estão relacionadas?".

Estudante: "O número total dividido pelo número por unidade de tempo, dá o tempo".

Pesquisador: "E se são dados o tempo e o número por unidade de tempo, você pode encontrar o número total?".

Estudante: "Devemos multiplicar o primeiro pelo segundo".

Ao ser apresentado o problema **VI-C-2** (citado anteriormente) a estudante pronunciou: "Esse é o mesmo, mas os números são diferentes. Aqui há uma fábrica de móveis e mesas também".

Pesquisador: "Encontre todos os três elementos".

Estudante: “O número total de mesas é 4.90 = 360. Mas qual é o tempo? Aqui está obscuro em qual tempo as mesas foram levadas”.

Pesquisador: “Por que você precisa saber isso? Pense no problema”.

Estudante: “Esse é o mesmo problema como aquele. Mas precisamos do tempo e temos dois desconhecidos”.

Pesquisador: “Tente fazer o problema **VI-C-3**”.

Estudante: “Eu ainda não fiz tais problemas. Indicamos o número de árvores por *x*. Mas quantos dias?” (Ibidem, p. 244-245, tradução nossa).

Com ajuda do pesquisador ela obteve a resolução correta. Ao ser questionada acerca da existência ou não de similaridade entre os três problemas e o processo de resolução ela concluiu que em essência os problemas eram semelhantes.

Estudante G. K. – depois de aprender a fórmula $(a + b)^2$ e o princípio para aplicá-la, lhe foi dado o exemplo V-A-2: $(1+\frac{1}{2}a^3b^2)^2$. Um resumo do registro do diálogo estabelecido entre o estudante e pesquisador é dado a seguir.

Pesquisador: “Esse exemplo pode ser feito com a fórmula para multiplicação na forma reduzida?”.

Estudante: “Aqui há algo diferente – ambos *a* e *b* estão à direita e não separados por um mais... [escreveu: $\frac{1}{4}a^6 + 2\frac{1}{2}a^3b^2 + b^4$]”.

Pesquisador: “O que aconteceu ao um?” O estudante ficou em silêncio.

Pesquisador: “Bem, faça o exemplo: $(2x + y)^2$”.

O estudante escreveu, repetindo a fórmula em voz alta:

“$4x^2 + 2.2x.y + y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$”.

Pesquisador: “Certo. Agora resolva o exemplo anterior do mesmo modo”.

Estudante: “Mas aqui há algo diferente... O quadrado do primeiro é $\frac{1}{2}a^3.\frac{1}{2}a^3$”.

Pesquisador: “Vamos raciocinar juntos. Para usar a fórmula, nós devemos garantir que lidamos com o quadrado da soma de dois números. Está claro para você que isso é o quadrado de uma soma?”

Estudante: "Aqui [aponta] o número 2 mostra que o que está dentro dos parênteses é para ser multiplicado por si mesmo".

Pesquisador: "Certo. Mas é um binômio nos parênteses? Mostre onde o primeiro termo está, onde o primeiro 'número' está".

Estudante: "$\frac{1}{2}a^3$ ... ou não, o que estou dizendo?... Deveria haver um sinal de mais entre os termos. Aqui não tem o primeiro termo, somente um segundo".

Pesquisador: "Mas o um? Cada termo, cada 'número', pode ser qualquer expressão, como você sabe".

Estudante: "Sim... Então o primeiro termo é um".

Pesquisador: "Bem, qual sinal separa os termos dentro dos parênteses?".

Estudante: "Um mais – que significa que é uma soma".

Pesquisador: "Agora você vê a semelhança entre esse exemplo e um que você resolveu, $(2x + y)^2$?".

Estudante: "Não, eles são diferentes. Havia letras no primeiro termo e no segundo, mas aqui somente no segundo".

Pesquisador: "Claro, está correto. Os binômios nos parênteses são diferentes. Mas você vê que há um *quadrado*, lá e aqui temos uma *soma*, lá e aqui temos *a soma de dois números*? Isso significa que nesse sentido eles têm algo em comum?".

Estudante: "Eles têm. Há uma soma de dois termos, quadrados".

Pesquisador: "E, como foi explicado a você antes, para usar a fórmula, só isto é importante: é importante a expressão algébrica ser o quadrado da soma de dois termos. Está claro? Resolva-o".

Estudante: "Está claro" (Ibidem, p. 242-243, tradução nossa). [Com o auxílio do pesquisador, o estudante resolveu o exemplo corretamente].

Krutetskii (1968) apontou uma desvantagem que pode ocorrer no processo de generalização ao relatar um fato interessante. Ele comentou que foi solicitado a um grande número de estudantes e de adultos para resolver mentalmente o mais rápido possível o problema XI-A-3: "Escreva algebricamente a forma geral de números que quando divididos por 5 deixam um resto 7" (Ibidem, p. 247, tradução nossa).

Esse problema é realístico, entretanto, a variante concreta não é, pois apesar de ser possível representar tais números algebricamente (5x+7), não faz nenhum sentido, já que não existem números que deixem resto 7 quando divididos por 5.

O que foi paradoxal é que adultos e estudantes matematicamente capazes freqüentemente deram a resposta errada (5x+7), somente depois tomando consciência. Estudantes menos capazes cometeram menos erros, apontando a insensatez do problema.

A explicação desse fato dada por Krutetskii (1968) é que o problema foi resolvido como um problema geral, abstraindo-se dos dados concretos, ou seja, foi interpretado na forma: *Encontre os números que deixam um resto ao serem divididos por um dado número*, que dá origem à solução geral ax + y. Os estudantes capazes não se detiveram aos dados concretos. Os estudantes menos capazes nunca tentaram resolver o problema de uma forma geral. Eles fizeram pelo método mais primitivo: tentaram encontrar, por substituição, todos os números específicos que obedecessem essa propriedade.

Resultados como os apresentados acima revelaram a Krutetskii (1968) que estudantes com habilidades matemáticas diferentes generalizaram conteúdo matemático de forma diferenciada. Com base nisso, ele definiu níveis de generalização de conteúdo matemático como sendo os seguintes:

1. não generaliza de acordo com as características essenciais, mesmo com a ajuda do pesquisador e após um número de exercícios intermediários de uma única categoria;

2. generaliza de acordo com as características essenciais com a ajuda do pesquisador e após um número de exercícios de uma única categoria, com inexatidões e erros individuais;

3. generaliza sozinho de acordo com as características essenciais, porém, após alguns exercícios de uma única categoria e com erros insignificantes. Generalizações próprias e perfeitas vêm com estímulos insignificantes e com questões guiadas pelo pesquisador;

4. generaliza corretamente e imediatamente, sem dificuldades e sem prática especial na resolução de exercícios de uma única categoria.

Krutetskii (1968) explicou porque estudantes capazes conseguiram generalizar a partir de um único exemplo de certa categoria. Nos problemas, eles separaram características essenciais das secundárias (os menos capazes perceberam a generalidade de características por contraste). Analisando um fenômeno não podiam ver qual característica era geral, no entanto, podiam ver o que era essencial. Ser essencial significa ser necessário e, por conseqüência, seria comum a um número de fenômenos de uma mesma categoria. Trabalharam, de forma imediata, métodos generalizados, algoritmos para resolver toda a classe de problemas de uma categoria e métodos gerais de raciocínio.

Algumas opiniões de psicólogos soviéticos relativas à generalização foram apresentadas por Krutetskii (1968). Alguns[15] afirmam que a generalização depende da comparação de casos particulares e gradual isolamento do geral, com uma ampla variação de características irrelevantes sendo garantidas, enquanto características relevantes permanecem constantes. No entanto, Krutetskii (1968) destacou que esse processo ocorre apenas com estudantes médios e menos capazes, portanto, não pode ser expandido a todos os estudantes ou ser considerado como condição necessária para a generalização matemática.

Tendo como referência seu estudo, Krutetskii (1968) fez ainda outras considerações:

i) A generalização gradual com variações em uma diversidade de casos particulares não é o único caminho para o conhecimento matemático. Há outro caminho, no qual estudantes capazes, sem comparar o similar, sem exercícios especiais ou sugestão externa, independentemente generalizam “objetos” matemáticos, relações e operações de imediato. Partindo da análise de apenas um fenômeno, utilizam um método geral para resolver problemas de uma dada categoria.

ii) Estudantes capazes generalizam:

a) conteúdo matemático rapidamente e amplamente. Encontram facilmente o essencial e o geral no particular, bem

15 Menchinskaya e Moro (1965), e outros.

como a generalidade escondida no que parecem ser diferentes expressões matemáticas e problemas.

b) métodos de solução e os princípios de uma abordagem para resolver problemas. Assim, a habilidade para generalizar influencia a eficiência na resolução de problemas matemáticos atípicos, não padronizados.

B.II. Habilidade para reduzir os passos no processo de raciocínio matemático e no correspondente sistema de operações

O estudo da habilidade para reduzir os passos no processo de raciocínio matemático também foi estudado por Krutetskii (1968), tendo como foco de observação estudantes capazes, médios e estudantes menos capazes em Matemática. A seguir, são apresentados alguns exemplos dos estudantes pesquisados.

Estudantes capazes em Matemática

S. T. depois de aprender a fórmula da multiplicação na forma reduzida, resolveu os exemplos **V-A-8**: $(C + D + E)^2$ e **V-A-5**: $(m + x + b)^2$ da série V, conforme descrição no Quadro 4.

Quadro 4 – Redução dos passos no processo de raciocínio em problemas similares

$(C + D + E)^2$	$(m + x + b)^2$
1. Há três números aqui, mas a fórmula é para dois números. ... Como pode ser isso? O número na fórmula é um dos dois termos e um termo pode ser qualquer expressão... Mas nós podemos fazer desses três [escreve: $([C+D]+E)^2$]. 2. Agora eu tenho o quadrado de uma soma. É igual, então, o primeiro número ao quadrado [escreve: $(C+D)^2$]. 3. O primeiro número é novamente um quadrado. Porque, isso é fácil com a fórmula [escreve: C^2+D^2+2CD]. 4. Agora há o quadrado do primeiro número. Eu devo adicionar o quadrado do segundo [adiciona: $+ E^2$]. 5. E agora adicionar o dobro do resultado da multiplicação desses números [adiciona: $+2E(C+D)=$]. 6. Agora tiramos os parênteses e simplificamos [escreve: $C^2 + D^2 + 2CD + E^2 + 2EC + 2ED$]. Depois de pensar um pouco ele disse: “Não, não há mais nada a fazer aqui. Isso é tudo”.	1. Nós combinamos dois termos em um [escreve: $([m+x]+b)^2$]. 2. Que será o quadrado do primeiro termo [escreve: $m^2 + x^2 + 2m$]. 3. Mais o quadrado do segundo [adiciona: $+ b^2$]. 4. Mais duas vezes o resultado da multiplicação deles [adiciona: $+2mb+2xb$]. Obs.: o estudante gastou 1/5 do tempo resolvendo esse exemplo em comparação com o anterior.

No exemplo **V-A-3**: $(–5x + 0.6xy^2)^2$ foi difícil acompanhar a seqüência de seu raciocínio, pois ele o olhou e escreveu a resposta imediatamente, sem tirar a caneta do papel: $25x^2 + 0{,}36x^2y^4 – 6x^2y^2$. Durante a resolução, pronunciou apenas as palavras "um quadrado... outro... menos com mais". Pesquisador: "Como você resolveu isso?" Estudante: "Aqui não há nada o que pensar – é só olhar o exemplo e escrever" (Ibidem, p. 265-266, tradução nossa).

S. E. lhe foi dado o problema da Série **IX-B-1**: "Prove que a soma de quaisquer três números consecutivos é divisível por 3 (para qualquer inteiro *a*)" (Ibidem, p. 128, tradução nossa). Ele o resolveu desse modo:

> 1. Números consecutivos – o que eles são? Eles sempre estão aumentando em 1, tais como 6, 7, 8, 9, etc.
> 2. Uma questão de qualquer três desses números. Pegamos um do meio como sendo *x*, então, o da esquerda será 1 a menos e o da direita 1 a mais, quer dizer, os números serão (x–1), x e (x+1).
> 3. Agora nós os colocamos em uma soma: x–1+ x +x + 1 = 3x.
> 4. É claro que 3x é sempre divisível por 3, e x é qualquer número. Então a soma de quaisquer desses números é divisível por 3 (Ibidem, p. 269, tradução nossa).

Problema **IX-B-2**: "Pense em um número qualquer, multiplique-o pelo número que é 6 a mais do que o número que você pensou, e some 9. Prove que o resultado é um quadrado" (Ibidem, p. 128, tradução nossa). S. E. não resolveu o problema, simplesmente exclamou: "Aqui não há o que provar; é evidente que $(x + 3)^2$ é obtido" (Ibidem, p. 269, tradução nossa).

A pedido do pesquisador ele explicitou seu processo de raciocínio na seguinte estrutura:

> 1. Devemos escolher qualquer número (provando realmente se tratar de qualquer número). Tomemos o número x.
> 2. Agora devemos pegar um número que é 6 a mais do que isso. Que será x + 6.
> 3. Multiplicamos o primeiro pelo segundo: $x(x + 6) = x^2 + 6x$.
> 4. Adicionamos 9 à soma. Que será $x^2 + 6x + 9$.
> 5. Mas isso é o quadrado de uma soma: $(x + 3)^2$.
> 6. Então, qualquer que seja o número escolhido, um quadrado é obtido (Ibidem, p. 269, tradução nossa).

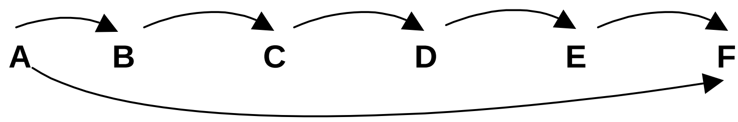
Estudante médio em Matemática

B. V., ao resolver $(– 5x + 0{,}6xy^2)^2$ raciocinou da seguinte forma:

> 1. Isso também é um exemplo do quadrado da soma de dois números, porque há números e letras entre parênteses e eles são unidos por uma soma. E tudo isso está ao quadrado.

> 2. Mas por que um menos na frente? Não é uma soma? [Pesquisador: “Você se lembra de números negativos?”] Ah, Eu sei, é menos 5x. O primeiro número é negativo, com um menos. Mas posso resolver desse modo? [Pesquisador: “Pense”]. Bem, sim, eles podem ser quaisquer números.
> 3. Levar o quadrado de uma soma, devemos fazer o quadrado do primeiro número – multiplicar por ele mesmo.
> 4. (– 5x) multiplicado por (– 5x) será... um menos por um menos dá um mais... então [escreve: $25x^2$].
> 5. Agora devemos multiplicar a parte esquerda e direita juntas e multiplicar o que obtemos por 2.
> 6. Um menos com um mais será menos: 5 multiplicado por 0,6 será... três, e x será a segunda potência. Isso será $3x^2y^2$. [Pesquisador: “Confira tudo o que você fez.”] Esqueci de multiplicar por 2 [escreve: + $(-6x^2y^2)$].
> 7. Agora levar o segundo número ao quadrado [escreve: 3,6, risca, escreve 0,36].
> 8. E o expoente deve ser somado [escreve: $xy^2 . xy^2 = x^2y^4$].
> 9. Agora colocamos todos em ordem [escreve: $25x^2 - 6x^2y^2 + x^2y^4$] (Ibidem, p. 266-267, tradução nossa).

Muitos investigadores[16] acreditam que a redução dos passos no processo de raciocínio é gradual e obtida somente mediante um número mais ou menos significante de exercícios de uma única categoria, como ilustra o diagrama abaixo. Krutetskii (1968) concordou parcialmente, afirmando que é verdadeira para a maioria (com habilidades comuns), porém, nos estudantes capazes essa condição é aparentemente não obrigatória.



Krutetskii (1968) esclareceu que:

<u>Estudantes capazes</u> – foram distinguidos por uma tendência muito acentuada para a redução rápida dos passos no processo de raciocínio e do sistema de operações matemáticas. Nos problemas, pensavam em estruturas e em deduções abreviadas, mesmo quando o problema era de uma nova categoria para eles. No esquema acima, eles compreenderam que F seguia diretamente de A.

<u>Estudantes médios</u> – generalizaram após exercícios repetidos, e conseqüentemente, a redução dos passos no processo de raciocínio surgiu depois de resolverem certo número de problemas de uma única categoria,

---

16 Bogoyavlenskii & Menchinskaya (1959), Bogoyavlenskii (1962) e outros.

estabelecendo assim uma correspondência entre essas habilidades. No desenho acima, para chegar a F partindo de A, eles percorriam algumas cadeias de associações inter-relacionadas bem complicadas. Muitas vezes seguiam todos os passos de A a F.

Estudantes menos capazes – embora Krutetskii (1968) não tenha descrito qualquer exemplo do processo desenvolvido pelos estudantes menos capazes ele relatou que nenhuma redução dos passos no processo de raciocínio foi observada, mesmo depois de fazerem muitos exercícios. O raciocínio desses estudantes sempre foi marcado por compreensão supérflua, detalhes e atividades desnecessárias, não sendo distinguido pela precisão e consistência. Geralmente repetiam os mesmos detalhes no processo de resolução.

Krutetskii (1968) apresentou as bases que possibilitaram afirmar que houve redução dos passos no processo mental:

A rapidez com que a resposta era dada, depois de perceber as relações de um problema;

A ausência de pausa nas muitas conexões de raciocínio □iminuía;

As dificuldades que o estudante manifestava, às vezes, quando o pesquisador lhe pedia para dar rapidamente uma estrutura detalhada de seu raciocínio.

B.III. Flexibilidade dos processos mentais

Os problemas utilizados para estudar esse componente eram problemas que podiam ser resolvidos de diferentes maneiras. Vejamos alguns processos de resolução, fornecidos pelos estudantes pesquisados por Krutetskii (1968).

Estudante capaz – G. Kh., ao resolver o problema XIII-A-7: “Quatro litros de água à temperatura ambiente (15º) foram adicionados em 3 litros de água a uma temperatura de 36º. Qual temperatura foi estabelecida no recipiente?” (Ibidem, p. 136, tradução nossa), sem pausa para pensar, ele o resolveu assim:

> Três litros de água deram 108º em soma.
> Quatro litros de água deram 60º em soma.
> Um total de 168º para 7 litros = 24º (Ibidem, p. 279, tradução nossa).

Sem pausar ele esboçou a seguinte resolução visual:

Sua explicação foi que a temperatura média não pode ser metade, mas sim deslocada 15º (porque há mais de 15º por litro).

“A razão será 4:3. Dividimos a diferença de 21º em tal relação ($21 \div 7 = 3$) e então, ou adicionamos 9 em 15 ou subtraímos 12 de 36” (Ibidem, p. 279, tradução nossa).

Posteriormente, pensando por cerca de 10 segundos, ele aplicou a fórmula que conhecia para a média aritmética ponderada, fazendo a seguinte notação: t_{AV} (36.3 + 15.4)/(3 + 4) = 24º. Ele levou 1 minuto e 8 segundos para resolver o problema em todas as suas variantes.

Nenhum estudante menos capaz obteve duas resoluções para esse problema. A maioria forneceu apenas uma resolução com a ajuda do pesquisador, informou Krutetskii (1968).

Estudante menos capaz – Krutetskii (1968) descreve a tentativa de V. S. para a resolução do problema: Dada uma reta no espaço e um ponto sobre ela. Quantas retas podem ser desenhadas partindo do ponto dado e sendo perpendicular à reta dada? E se o ponto estiver fora da reta, quantas perpendiculares podem ser traçadas do ponto à reta, estando no mesmo plano que a reta dada e o ponto dado fora dela?

V. S. resolveu esse problema mentalmente: “Um número infinito pode ser desenhado perpendicularmente”. A segunda pergunta não era mais difícil do que a primeira, porém, ele não respondeu. Sua resposta oscilou entre “Também uma quantidade infinita”; “Metade do infinito” (Ibidem, p. 280, tradução nossa). Seu pensamento girou em torno do infinito.

Duas semanas depois esse problema lhe foi dado novamente. Agora ele não resolveu a primeira parte do problema. O seu pensamento estava vinculado ao padrão prévio de resolução: “Uma perpendicular... não, duas... não, é ainda uma; apenas continua no outro lado”. O problema resolvido pela primeira vez exerceu uma influência inibitória na segunda resolução do mesmo problema, ou seja, a opção por uma linha de pensamento inibiu a obtenção de novas linhas de pensamento.

Tais resultados conduziram Krutetskii às seguintes conclusões:

Estudantes capazes – foram distinguidos por grande flexibilidade, pela mobilidade de seus processos mentais resolvendo problemas matemáticos. Foram caracterizados por uma: livre e fácil mudança de uma operação mental a outra qualitativamente diferente; diversidade de aspectos na abordagem para a resolução do problema; liberdade da influência obrigatória de métodos convencionais de resolução e facilidade na reconstrução de modelos e sistemas de operação.

Estudantes médios – apresentaram dificuldade na mudança para um novo método de resolver um problema que já tinha sido resolvido. Suas tentativas revelaram a influência em seus pensamentos do método previamente obtido.

Estudantes menos capazes – foram caracterizados por uma inércia, lentidão e limitação em seus pensamentos no âmbito das relações matemáticas e operações, pelo estabelecido caráter estereotipado de suas operações e pela retenção de um princípio prévio de resolução ou de um método de operação que exercia uma influência inibitória quando uma operação precisava ser reconstruída. Tudo isso determinava a dificuldade para passar de uma operação mental a uma outra qualitativamente diferente.

Krutetskii (1968) acrescentou que para os problemas da série XIII (problemas que propiciavam diferentes resoluções), estudantes capazes obtiveram, em média, um total de 48 resoluções, com velocidade média de 43 minutos; estudantes médios encontraram 29 resoluções em 60 minutos e estudantes menos capazes, 15 resoluções em 62 minutos.

C. Processos de retenção das informações de um problema pelos estudantes

A habilidade para reter informações de problemas também foi investigada por Krutetskii (1968) utilizando estudantes com habilidades matemáticas diferentes, ou seja, muito capazes em Matemática, capazes, médios e estudantes menos capazes em Matemática.

Os estudantes foram expostos a vários problemas. Eles tinham que reproduzir o problema depois de uma leitura, ao término da sessão experimental, após uma semana e depois de três meses. Algumas vezes dados desnecessários aos problemas foram introduzidos nos mesmos. Krutetskii (1968) observou em cada tempo como as relações essenciais e método geral de resolução, os dados concretos e os dados desnecessários aos problemas foram reproduzidos.

Krutetskii (1968) citou os experimentos com Sonya L., uma estudante capaz, em que lhe deram 10 problemas (Série VI e XXII) nos quais ela teve que reproduzi-los, além dos períodos citados acima, após 9 meses. Os resultados obtidos foram os seguintes:

Ela lembrou-se de signos essenciais de uma categoria de problemas até 9 meses depois em 90% dos casos;

Dados concretos começaram a ser esquecidos ao término de uma lição (em 45 minutos). Depois de 3 meses eles foram recordados em apenas 10% dos casos, em virtude de alguma significância particular;

Dados supérfluos foram lembrados no final de uma lição em apenas 10% dos casos. Depois de 3 meses, tais dados foram completamente esquecidos.

Krutetskii (1968), com base nos resultados da investigação, concluiu que há grande diferença na retenção das informações de problemas em estudantes com diferentes habilidades. Ele descreve essas distinções da seguinte maneira:

Estudantes capazes – revelaram uma memória matemática generalizada e operativa, relacionada à retenção e à possível efetivação rápida de padrões mentais generalizados, relações generalizadas no reino dos símbolos numéricos e literais.

Estudantes médios – se lembraram de dados concretos e números relativamente bem, no entanto, eles não se lembraram tão bem das características do problema ou não os recordaram nada. Eles tentaram com igual dificuldade lembrar o geral e o particular, o essencial e o secundário. Em síntese, suas memórias eram sobrecarregadas com excesso de informação.

Estudantes menos capazes – foram distinguidos por uma memória pobre para conteúdo matemático generalizado, relações matemáticas abstratas e símbolos, particularmente, para categorias de problemas, modelos de raciocínio e provas matemáticas e métodos generalizados de resolução de problemas.

A análise das três etapas da resolução de problemas possibilitou a Krutetskii (1968) definir talento matemático como uma habilidade para generalizar, para reduzir os passos no processo de raciocínio e um pensamento flexível no âmbito das relações matemáticas, símbolos numéricos e literais, e por uma constituição matemática da mente.

A constituição matemática da mente descrita por Krutetskii (1968) se refere a uma tendência acentuada para interpretar o mundo com *olhar matemático*. Estudantes capazes pensam em Matemática quase que o tempo todo, até mesmo em situações inusitadas.

Krutetskii (1968) citou a experiência desenvolvida por Shapiro com estudantes do Ensino Superior de Matemática. O estudante D, ao ver alguns trabalhadores assentando ladrilhos no chão, começou a calcular se o chão poderia ser coberto com ladrilhos de determinada forma, qual formato de chão poderia ser coberto com certos ladrilhos, em geral, qual ladrilho poderia ser posto no chão, e assim por diante. Assistindo a um jogo de bilhar, começou a pensar na teoria matemática do movimento das bolas quando atingidas. Vendo um anúncio para venda de ingressos de loteria, começou a calcular a probabilidade que diferentes categorias de premiados ocorreriam.

O talento matemático segundo Kruteskii consiste em enumerar um grande conjunto de habilidades, porém, parece difícil perceber uma estrutura nessa coleção. Pensamento matemático não pode ser estudado sem uma estrutura. Qual seria uma alternativa para essa situação?

Em vez de olhar esse problema psicologicamente, pensando no assunto em termos mentais, poderíamos instalar o conceito da atividade cognitiva como a noção principal. Dessa maneira se explica facilmente o fato de que talento matemático não poderia ser caracterizado com base em poucas habilidades.

A atividade é sempre influenciada pelo seu objeto, pelo contexto (social e objetivo) e também pelo sujeito (seus conhecimentos e suas experiências com a Matemática).

Assim, as três etapas para a resolução de problemas definidas por Krutetskii se referem à atividade cognitiva e para que ela se desenvolva são necessárias diferentes habilidades. Dessa forma, em vez de estudar a mente, como Krutetskii fez, vamos estudar a atividade matemática na resolução de problemas.

No processo de coleta da informação fornecida por um problema a habilidade matemática exigida é a percepção, em que devemos extrair a estrutura subjacente ao problema. Em outras palavras, é preciso escolher as relações do problema que têm um significado matemático básico. Depois, escolher as relações que não são essenciais para uma categoria de problema dado, porém, essenciais para a variável concreta dada. E por fim, identificar elementos secundários, não essenciais para resolver o problema específico.

Isso significa que na coleta da informação ocorre a compreensão e a interpretação do problema, sendo necessário analisá-lo como um todo, obter uma visão geral de sua estrutura. Para isso, faz-se necessário utilizar a intuição. Essa é uma atividade típica dessa etapa em que, por exemplo, a generalização não se insere aqui, entretanto, está presente no processo de tratamento da informação, que é a próxima etapa da resolução de problemas.

Ao processar a informação, a atividade cognitiva requer o emprego das habilidades de generalização, de redução dos passos no processo de raciocínio e de flexibilidade do pensamento.

No que se refere à generalização, podemos destacar dois níveis que foram estudados por Krutetskii (1968):

- encontrar o essencial e o geral no particular. Encontrar a generalidade subjacente no que parecem ser diferentes expressões matemáticas e problemas;
- generalizar métodos de solução.

Na redução dos passos no processo de raciocínio temos implícita a própria generalização, considerando que em problemas de uma única categoria, uma vez generalizado o método de resolução, a pessoa tende a reduzir os passos desse método. Pensa em uma estrutura mais sucinta, pois adquire um caráter mecânico, não sendo necessário todas as passagens em seus detalhes.

Quanto à flexibilidade dos processos mentais, deve ocorrer o desligamento do método utilizado – para que não haja a influência dele no pensamento, inibindo a descoberta de outra resolução – e uma volta à percepção da estrutura do problema para que fluam outros métodos de resolução.

Na etapa da retenção da informação, um dos aspectos é a contribuição que o problema traz para a pessoa. Ou seja, do problema resolvido o que realmente chamou a atenção: os dados concretos fornecidos pelo mesmo? Sua formulação? O método ou o algoritmo de resolução?

A retenção está associada com as habilidades de percepção e de generalização, já que se a pessoa conseguir identificar uma estrutura geral do problema e seu processo de resolução isso permitirá que em problemas similares se consiga aplicar o algoritmo ou método generalizado.

Essas etapas da resolução de problemas descritas por Krutetskii (1968) evidenciam que importância não está somente na representação utilizada na resolução de um problema e nem no problema em si, mas também no desenvolvimento da atividade matemática necessária à sua resolução.

1.3. Descobrindo estilos cognitivos na Matemática

O termo estilo cognitivo foi denominado por Allport em 1937, para indicar abordagens individuais para se resolver problemas, receber e recuperar informações já memorizadas. Em outras palavras, se referem ao modo preferido no processo de informação individual, descrevendo o pensamento típico de uma pessoa, lembrando-se ou resolvendo problemas. E para resolvê-los, faz-se necessário recorrer a alguma forma de representação.

Estilo cognitivo é normalmente descrito como uma dimensão de personalidade que influencia atitudes, valores e interação social. O que significa estilo cognitivo em Matemática? Para fornecer uma resposta a essa indagação a seguir são apresentados exemplos extraídos da obra de Krutetskii (1968) e de uma pesquisa exploratória realizada pela autora desta Tese de Doutorado.

1.3.1. Estilos cognitivos matemáticos na obra de Krutetskii

A pesquisa desenvolvida por Krutetskii (1968) fez emergir, durante a resolução de problemas matemáticos, algumas diferenças tipológicas básicas na estrutura de talento matemático que caracterizam a constituição matemática da mente. Krutetskii (1968) considerou que a existência de estilos matemáticos está relacionada com o papel relativo dos componentes verbal-lógico e visual-pictórico na atividade mental dos estudantes.

Com esse estudo, foram identificados três estilos diferentes: *estilo analítico*, *estilo geométrico* e *estilo harmônico* (esse último foi dividido em estilo abstrato-harmônico e estilo pictórico-harmônico). Para tal investigação, Krutetskii (1968) utilizou um grupo de 34 estudantes matematicamente capazes, dos quais 6 pertenceram ao estilo analítico, 5 ao estilo geométrico, 13 ao estilo abstrato-harmônico e 10 ao estilo pictórico-harmônico.

Para Krutetskii (1968), esses estilos de pensamento matemático não são mutuamente excludentes, já que o estilo analítico não se manifesta somente em Álgebra e o estilo geométrico somente em Geometria. Uma constituição analítica da mente pode se fazer presente também na Geometria e uma constituição geométrica da mente pode permear a Álgebra.

Krutetskii citou Hadamard (1945), porque ele comprovou que algumas pessoas permanecem analistas mesmo quando estão trabalhando com Geometria, enquanto outras são geômetras mesmo quando estão envolvidas com Análise Pura. Essa constatação já havia sido relatada por Poincaré em 1908.

Para verificar quais características tornam esses estilos distintos, ele fez uma descrição, conforme exposição a seguir.

Estilo Analítico

O pensamento dos estudantes desse estilo é marcado pela predominância de um bem desenvolvido componente verbal-lógico, em contraposição a um fraco componente visual-pictórico. Operam facilmente com esquemas abstratos e na resolução de problemas não sentem necessidade de um apoio visual, como diagramas, figuras geométricas, etc., mesmo quando as relações matemáticas fornecidas pelo problema sugerem conceitos visuais.

Por não possuírem uma habilidade para conceituação visual-pictórica, utilizam um método lógico-analítico de resolução mais difícil e mais complicado, enquanto que se eles recorressem a uma imagem poderiam obter uma resolução mais simples. Eles têm êxito trabalhando problemas expressos abstratamente, por isso, na medida do possível, tentam traduzir problemas representados sob a forma visual em um nível abstrato. Executam operações relacionadas com a análise de conceitos mais facilmente do que operações pautadas na análise de um esquema geométrico ou desenho.

Krutetskii (1968) descreveu algumas resoluções de problemas para exemplificar os estudantes que se enquadraram nesse estilo.

Dado o problema “Quanto pesa um tijolo se ele pesa 1 kg mais meio tijolo?” (Ibidem, p. 320, tradução nossa). Todos os estudantes com o estilo analítico o resolveram por meio de raciocínio. Nenhum deles recorreu a imagens, mesmo quando estimulados a descrever visualmente as relações dadas pelo problema.

Em contrapartida, os estudantes pertencentes ao estilo geométrico o resolveram por meio de desenho (Figura 2) ou pela concepção mental dele, e com isso, responderam que o tijolo pesava 2 kg.

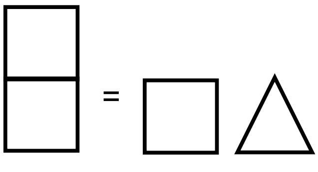


Figura 2 – Modelo de representação geométrica

O mesmo ocorreu no seguinte problema: Imagine um sólido semelhante a um aro (de pneu). Esse sólido é interceptado por quatro planos paralelos passando: (a) pelo eixo (diâmetro) do aro; (b) pelo ponto médio do raio interno do aro; (c) pelo ponto extremo do raio do aro; e (d) metade entre os pontos extremos dos raios interno e externo. Represente (mesmo que aproximadamente) a forma de cada secção (Ibidem, p. 170, tradução nossa).

Krutetskii (1968) informou que esse sólido de rotação não é estudado na escola. Se o estudante tivesse dificuldade para imaginar a situação, a Figura 3 a seguir era fornecida.

Os geômetras cortaram mentalmente a secção e disseram sua forma, já os analistas se perderam em cálculos complexos, e somente depois que perceberam o fracasso de suas tentativas raciocinaram com o apoio do desenho. Até então, não tinham nem visualizado a forma do aro.

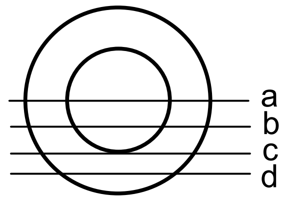


Figura 3 – Representação do sólido interceptado pelos planos

Krutetskii (1968) mencionou um fato interessante que ocorreu com Dima L. Ele resolveu mentalmente e de forma correta o problema:

> Em um triângulo ABC, o ângulo B é igual a 46º e o ângulo C é igual a 66º. Uma reta MN, desenhada pelo vértice A e sendo externa ao triângulo, forma um ângulo de 24º com o lado AB. Encontre o ângulo que a reta MN forma com o lado AC (Ibidem, p. 320, tradução nossa).

Posteriormente, o pesquisador pediu para ele representar o problema por meio de um desenho. Dima, que já tinha resolvido o problema, não conseguiu representar os dados e a resolução visualmente como um todo e não pôde fazer a tarefa de imediato. Isso evidencia que para os estudantes do estilo analítico o recurso visual, às vezes, pode atrapalhar seu pensamento.

Dentre os 34 pesquisados envolvidos nessa investigação Krutetskii (1968) destacou 9 estudantes muito talentosos que foram estudados durante oito anos. Ele descreveu com detalhes episódios, que ocorreram em idades precoces, envolvendo o desempenho e os processos de resolução de alguns problemas matemáticos. Identificou ainda certos componentes das habilidades investigadas. Teceu comentários tanto no aspecto psicológico como matemático.

A seguir, são apresentadas características dos processos de resolução de problemas de estudantes representativos do estilo analítico descritas por Krutetskii (1968).

Gilya Kh. (12 anos) nasceu em 1953 na província de Gorkii (perfil feito em 1965).

Desde a infância Gilya foi notável por ter uma excelente memória. Com 1 ano e 2 meses sabia diversas rimas e tinha memorizado muitas datas. Aos 5 anos aprendeu a ler. Aos 7 entrou na escola, ficando na 1ª série apenas uma semana e depois foi transferido para a 2ª série.

Ele aprendeu a contar quando tinha menos de 2 anos, contando os degraus de escadas, os seus dedos da mão e enumerando objetos. Aos 3 anos tentava escrever números e fazia operações simples de adição.

Na escola, os seus assuntos favoritos eram aritmética, álgebra e geometria. Tudo o que se referia à Matemática lhe fascinava, especialmente os problemas que testavam a sua inteligência.

Gilya aprendeu Matemática com muita facilidade, e na maioria das vezes, sozinho. Aos 8 ou 9 anos compreendeu o simbolismo matemático, em suas formas elementares, por exemplo, demonstrando compreender facilmente equações do primeiro grau com duas incógnitas.

Ele gostava mais de Álgebra do que de Geometria e resolvia todos os problemas experimentais da pesquisa que eram dados a ele sem qualquer dificuldade particular.

Uma característica sua muito notável era o modo como indicava uma resolução no nível geral. Por exemplo, um problema irreal foi dado a ele: “Representar a forma geral de números que deixam um resto 7 quando dividido por 5”. Gilya resolveu desse modo: “Em geral, nesses casos temos que pegar o multiplicador x para o número dado e temos que somar o resto de forma que isso seja divisível por y e haverá z no resto... Todos os números serão: xy + z. No caso dado será x.5 + 7” (Ibidem, p. 207, tradução nossa). Ele não percebeu o seu engano porque trabalhou o problema de uma forma geral e os números foram substituídos mecanicamente.

Gilya era excelente compondo (e resolvendo) equações de acordo com os dados de um problema e compreendia diagramas muito bem.

Krutetskii (1968) afirmou que Gilya tinha um pensamento abstrato, pois mesmo quando um problema sugestionava o uso de imagens visuais e diagramas, ele o resolvia sem eles. Gilya não resolvia nenhum dos problemas experimentais utilizando esquemas visuais, por isso, às vezes, surgiam dificuldades em sua resolução que poderiam ter sido evitadas.

Por exemplo, no problema: Um passageiro dormiu depois de ter viajado a metade do caminho da sua jornada. Quando despertou, restava a metade da distância que ele viajou enquanto dormia. Que parte da jornada toda ele viajou enquanto dormia? Gilya o resolveu dessa forma:

> Ele tinha viajado $\frac{1}{3}$ [8 segundos de pausa], da metade da jornada, ou [4 segundos de pausa] $\frac{1}{6}$ da distância [5 segundos de pausa], mas ele dormiu por $\frac{5}{6}$ [4 segundos de pausa], não, ele dormiu por $\frac{2}{3}$ dessa metade [12 segundos de pausa], quer dizer, um terço da viagem inteira (Ibidem, p. 207, tradução nossa).

Para complementar o que foi apresentado por Krutetskii (1968), destacamos que esse problema também pode ser resolvido por meio do desenho da Figura 4, no qual estabelecemos que:

$\overline{AB}$ = trajeto todo;

$\overline{CD}$ = percurso em que o passageiro dormiu;

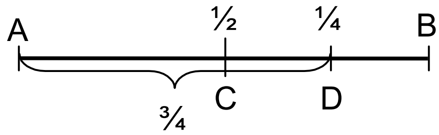


Figura 4 – Representação do percurso por meio de segmento e frações

No ponto D ele acordou, assim $\overline{AD} = \frac{3}{4}$ corresponde à parte da jornada toda que ele viajou enquanto dormia.

Krutetskii (1968) informou que quando foi dado a Gilya o problema: Qual ângulo é descrito pelo ponteiro das horas em 2 horas e o ponteiro dos minutos em 20 minutos?" os pesquisadores deliberadamente, porém como se acidentalmente, colocaram um relógio ao seu lado. Sem mesmo olhar o mostrador, Gilya começou a argumentar:

> Em 3 horas o ponteiro das horas descreve um ângulo reto, e em 2 horas descreve $\frac{2}{3}$ desse ângulo, ou 60º. Em uma hora o ponteiro

> dos minutos descreve um ângulo completo, e em 20 minutos $\frac{1}{3}$ desse ângulo, ou 120º. Pode ser resolvido de outro modo: O ponteiro dos minutos move 12 vezes mais rapidamente que o ponteiro das horas. Ou em 20 minutos o ponteiro cobriria 6 vezes menos que em 2 horas. Como resultado, em 20 minutos o ponteiro dos minutos cobrirá duas vezes tanto quanto o ponteiro das horas em 2 horas. Nós obtemos a mesma coisa, 120 minutos. Mas desse modo é mais difícil; o primeiro é muito mais fácil e melhor (Ibidem, p. 207, tradução nossa).

Os conceitos espaciais de Gilya eram precariamente desenvolvidos. Até mesmo problemas elementares, facilmente resolvíveis utilizando conceitos espaciais, ele sempre os resolvia raciocinando.

> Quantas arestas há em um cubo? Agora eu estou pensando. Um quadrado está na base de um cubo – isso será 4 arestas. A base superior também é um quadrado – mais 4 arestas. E mais 4 arestas têm que unir a base superior e a inferior... Isso será 12 ao todo (Ibidem, p. 208, tradução nossa).

Enquanto pensava, Gilya revelava uma habilidade para argumentar logicamente. Na resolução de problemas reduzia de forma considerável os passos no processo de raciocínio. Se solicitado, ele podia desenvolver o processo de raciocínio em sua estrutura completa (de seu ponto de vista). Exemplos:

1) Gilya recebeu o problema “Um pai tem 35 anos e o seu filho tem 2. Em quantos anos o pai terá quatro vezes a idade de seu filho?” Ele o resolveu utilizando a aritmética da seguinte maneira: “Ele tem 33 anos a mais, isso significa que uma parte será 11, e o filho ainda precisa de mais 9 anos. Em 9 anos”. A pedido do pesquisador desenvolveu essa resolução do seguinte modo:

> Se o pai tem 35 e o filho tem 2, então, o pai é 33 anos mais velho que o filho. Em tantos anos o pai será quatro vezes mais velho que o filho, mas 33 anos mais velho, como antes. Então a idade do pai comporá 4 partes e a idade do filho 1 parte, e a diferença entre eles 3 partes. Essas 3 partes são iguais a 33 anos. Então uma parte é igual a $33 \div 3 = 11$. Essa parte é a idade do filho. Agora ele tem 2 anos. Em 9 anos o pai terá 44 e o seu filho 11 (Ibidem, p. 208, tradução nossa).

2) Gilya resolveu sem qualquer apoio de imagens visuais o problema “Um trem atravessa um túnel de 450m de comprimento em $\frac{3}{4}$

minuto, e vai além de um guarda-chaves em 15 segundos. Qual é o comprimento do trem e a sua velocidade?" Ele entendeu a característica mais difícil do problema *Atravessar um túnel significa atravessar seu comprimento mais o comprimento do trem*, e que *a distância igual ao seu comprimento passa em 15 segundos*. Ele resolveu de forma abreviada assim:

"450 ÷ 30 = 15 m/seg = 54 km/h. 15 x 15 = 225 m" (Ibidem, p. 209).

Ira S. (12 anos) nasceu em 1952 na cidade de Kursk (perfil feito em 1964-65).

Ira era uma estudante muito boa em todos os assuntos escolares. Fazia suas lições rapidamente, amava desenhar e lia com facilidade. Aos 5 anos revelou interesse por contagem – avaliava quantitativamente fenômenos ao seu redor, por exemplo, quantos bondes passaram, quais eram seus números, quantas janelas a casa tinha, etc.

Ela adorava Matemática, e na sua opinião, a pessoa tem que pensar. Para ela, a Matemática tem regras que ajudam a pessoa a pensar. Krutetskii (1968) verificou que Ira não se cansava durante as resoluções de problemas matemáticos. Mesmo nas sessões de 2 horas seguidas se mantinha da mesma maneira, sempre alegre e concentrada em sua lição.

Tinha uma boa memória para a Matemática. Uma semana depois da primeira lição experimental lembrou-se de quase todos os doze problemas que havia resolvido. Normalmente lembrava-se não apenas do conteúdo generalizado, mas dos dados numéricos também. Além disso, se lembrava mais daqueles problemas que tinha dificuldades para resolvê-los.

Ira enfrentou os problemas experimentais com muita facilidade e dos doze problemas da primeira lição resolveu dez imediatamente. Porém, ela não teve esse êxito com problemas mais complicados – às vezes, sugestões ou instruções gerais do pesquisador foram necessárias.

Por exemplo, no problema: Se 5 estudantes puderem se sentar em cada banco, 4 permanecerão sem um assento. Se 6 estudantes se sentarem em um banco, 2 lugares estarão desocupados. Quantos bancos e estudantes têm?. No princípio, Ira não percebeu a relação básica. O pesquisador disse: "Quantos estudantes não têm nenhum lugar para sentar?".

Ira expressou alegremente: “Eu entendo! Eles sentaram 1 em cada escrivaninha e mais 2 poderiam ter sentado, 1 em cada. Havia 6 bancos” (Ibidem, p. 210, tradução nossa).

Para entender a resposta parcial de Ira (já que respondeu apenas o número de bancos), podemos resolver esse problema por meio de relações algébricas.

Denominando por **x** = o número de bancos e **y** = número de estudantes, temos:

$y = 5x + 4$ (número de estudantes = 5 em cada banco + 4 que ficaram em pé);

$y = 6x – 2$ (número de estudantes = 6 em cada banco – 2 lugares vagos).

Assim, $x = 6$ bancos e $y = 24$ estudantes.

Uma característica notável em Ira era que se ela conseguisse resolver um problema, resolvia todos os demais problemas daquela categoria sem dificuldade, ou seja, transferia livremente o algoritmo de resolução a outros problemas da mesma categoria. Diferenciava problemas com muita facilidade. Em alguns casos, guiava-se apenas pelo aspecto lógico-matemático do problema.

Ira demonstrou uma boa habilidade para argumentar durante a resolução de problemas. Por exemplo, dado o problema: Temos vasilhas de 9 e 4 litros. Como podemos medir 6 litros de água utilizando-as? A resolução de Ira foi a seguinte: “Seis litros são obtidos se pudermos despejar 3 dos 9 litros. Mas para fazer isso, já devemos ter 1 litro na vasilha menor. Agora está claro: temos que despejar 4 litros duas vezes da vasilha maior e temos que despejar o litro restante na vasilha menor” (Ibidem, p. 210, tradução nossa).

Krutetskii (1968) informou que as resoluções de Ira dos problemas das Séries XXIII e XXIV evidenciaram que o componente verbal-lógico predominou. Ela resolveu esses problemas sem utilizar esquemas visuais, até mesmo quando os dados do problema sugestionavam o uso deles.

Por exemplo, lhe foi dado o problema da Figura 5 que é facilmente resolvido, basta desenhar o raio OC.

Ira tentou por muito tempo resolvê-lo analiticamente e testou posições diferentes da linha AB (em que o ponto C algumas vezes encontrava-se no interior do círculo e, outras, exterior a ele).

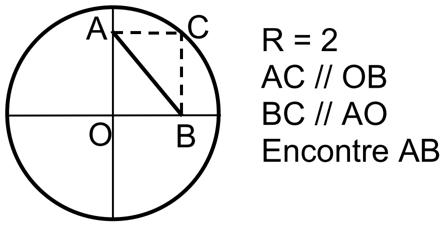


Figura 5 – Problema geométrico envolvendo o raio de uma circunferência

Finalmente, resolveu o problema quando o pesquisador lhe aconselhou que construísse o raio OC.

A pedido do pesquisador, ela foi capaz de demonstrar um método visual-pictórico de resolução em exemplos isolados, porém, somente nos problemas mais fáceis. Às vezes, recorria a imagens visuais quando sentia dificuldades ao resolver um problema, entretanto, elas não eram de muita ajuda. E se um problema não fosse resolvido por ela em um plano mental, um plano visual também não ajudava. Em outras palavras, a presença de uma resolução analítica sem dificuldade especial conduzia à formação de uma interpretação visual apropriada. Em contrapartida, a ausência de uma resolução analítica não era compensada pelos recursos visuais.

Para ilustrar essa afirmação Krutetskii (1968) citou um exemplo. Foi solicitado à Ira para resolver visualmente, por meio de esquemas, o problema: “Há quantidades idênticas de chá em 4 caixas. Nove kg de chá foram retirados de cada uma, restando em todas elas juntas tanto quanto havia em cada caixa inicialmente. Quanto chá havia nas caixas?” (Ibidem, p. 211, tradução nossa).

Apesar de todas as suas tentativas, Ira não teve sucesso resolvendo o problema da forma que lhe foi solicitado. Posteriormente, pediram-lhe para fazer o problema sem utilizar um esquema visual. Ela o resolveu imediatamente. Depois, pediram-lhe que fornecesse uma interpretação do problema utilizando recursos visuais. Dessa vez, ela conseguiu com facilidade (Krutetskii não forneceu detalhes de sua resolução).

Uma das resoluções para esse problema poderia ser:

Em cada caixa há **x** kg de chá;

Nas 4 caixas há **4x**;

Da última frase temos: 4x – 9 = x → x = 3 kg em cada caixa

Essas foram resoluções de alguns problemas desenvolvidas por estudantes pertencentes ao estilo analítico descritas por Krutetskii (1968). A seguir, apresentamos as características que distinguem o estilo geométrico.

Estilo Geométrico

Krutetskii (1968) afirmou que o pensamento desses estudantes é marcado pela predominância do componente visual-pictórico em contraposição ao componente verbal-lógico. Possuem um alto desenvolvimento de conceitos espaciais. Fazem operações relacionadas com a análise de diagramas, de desenhos e de gráficos mais facilmente do que operações relacionadas com a análise de conceitos e definições.

Eles sentem necessidade de interpretar visualmente uma relação matemática abstrata e demonstram grande ingenuidade na tentativa de traduzir um problema em um nível visual-pictórico. Para eles, o aspecto figurativo normalmente substitui a lógica. Porém, se não progridem na visualização de objetos ou de diagramas para resolver problemas eles têm dificuldades de operar com esquemas abstratos. Insistem em tentar operar com esquemas visuais, imagens e conceitos, mesmo quando um problema é facilmente resolvido pelo raciocínio, e o uso de dispositivo visual é supérfluo ou dificulta.

A seguir, são expostos alguns exemplos de estudantes representativos do estilo geométrico.

Problema (1): “Cada lado de um quadrado foi aumentado em 3 cm e, conseqüentemente, sua área foi aumentada em 39 cm^2. Encontre o lado do quadrado resultante” (Ibidem, p. 321, tradução nossa).

Krutetskii (1968) ressaltou que esse problema é considerado fácil para estudantes da 6ª série, uma vez que eles o resolvem em poucos segundos por meio da equação $(x + 3)^2 - x^2 = 39$. Ele salientou que quase todos os estudantes pesquisados que pertenceram ao estilo geométrico o resolveram de uma maneira mais complicada. Primeiro fizeram o desenho (Figura 6) e depois raciocinaram da seguinte forma:

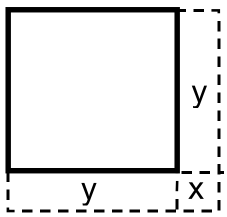


Figura 6 – Representação Geométrica da Equação

> Esse [x] tem que ser um quadrado e tem que ter lado 3, quer dizer, sua área é 9 cm2. Então, os dois retângulos [y] devem dar 30 cm2, logo 15 cm2 cada. Um lado é 3 e o outro é 5 cm. Então, era 5 e tornou-se 8 cm (Ibidem, p. 321, tradução nossa).

Problema (2): "Uma pessoa foi contratada para trabalhar por salários anuais de 12 rubles mais 1 caftan. Depois de trabalhar 7 meses, ela saiu, sendo corretamente paga com 1 caftan e 5 rubles. Qual é o preço de 1 caftan?" (Ibidem, p. 160, tradução nossa).

Todos os estudantes representantes do estilo geométrico resolveram fazendo primeiro um diagrama (Figura 7) seguido de um breve raciocínio "2 = $\frac{5}{12}$ do desconhecido. Um caftan custa 4 rubles e 80 kopeks" (Ibidem, p. 323, tradução nossa).

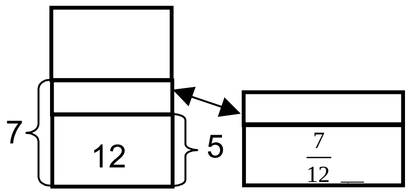


Figura 7 – Representação Geométrica do problema do salário

Para entender o que significa a igualdade estabelecida pelos estudantes apresentamos uma das resoluções para esse problema:

Em 1 ano (12 meses) receberia 12 rubles + 1 caftan: 12 + C

Em 7 meses recebeu 5 rubles + 1 caftan: 5 + C

Um mês de trabalho corresponde a 1 ruble e $\frac{1}{12}C$: $1+\frac{1}{12}C$

Trabalhando 7 meses ela deveria receber $7.\left(1+\frac{1}{12}C\right)$, porém, ela recebeu 5+C. Nesse caso, podemos igualar: $7+\frac{7}{12}C = 5 + C$

$C - \frac{7}{12}C = 7 - 5 \rightarrow \frac{5}{12}C = 2$ (essa foi a igualdade obtida pelos estudantes).

Assim, C = 4,80 (1 caftan corresponde a 4 rubles e 80 kopeks).

Problema (3): "Agora, eu sou duas vezes tão velho quanto meu irmão era quando eu era tão velho quanto ele é agora. Nós dois juntos somamos 63. Quantos anos cada um de nós tem?” (Ibidem, p. 323, tradução nossa).

Esse problema, geralmente, é resolvido por meio de um sistema de equações. No entanto, o estudante D. L. apresentou uma resolução original, começando com o desenho da Figura 8.

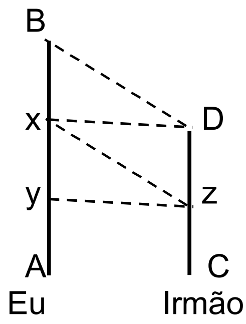


Figura 8 – Representação Geométrica das idades dos irmãos

Em seguida, exclamou: “Bx é a diferença entre nossa idade: Quando eu tinha Ax, ele tinha Cz; Cz = $\frac{AB}{2}$ (pela condição) e Ay = $\frac{AB}{2}$. Mas Bx = Dz. Isso significa que By = 2Bx; AB = $4\times$B e CD = $3\times$B; 63 anos = 7 partes; Bx = 9 anos. Resposta: 36 anos e 27 anos” (Ibidem, p. 324, tradução nossa).

Krutetskii (1968) informou que dentre os 34 estudantes pesquisados ele encontrou muitos casos em que uma dependência funcional ou uma fórmula tornou-se clara e convincente somente quando o pesquisado conseguiu obter uma interpretação geométrica.

Ele citou o exemplo da estudante S. R. (6ª série) que primeiro familiarizou-se com a fórmula da multiplicação na forma reduzida – o quadrado da soma de dois números – e ela tentou interpretar isso geometricamente por meio do desenho da Figura 9.

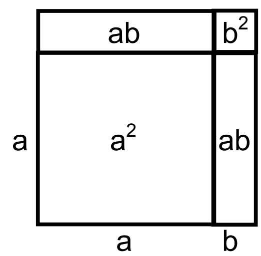


Figura 9 – Representação geométrica para o quadrado da soma de dois números

Depois de conseguir essa interpretação S. R declarou com satisfação “Agora eu realmente vejo e entendo a fórmula!” (Ibidem, p. 325, tradução nossa).

Após esse momento, essa estudante interpretou todas as outras fórmulas geometricamente, mesmo sendo um assunto mais complicado para representar visualmente. Por exemplo, ela conseguiu desenhar uma complexa representação de um sólido geométrico para indicar o cubo da soma de dois números e o cubo da diferença de dois números.

Krutetskii (1968) constatou que o estudante do estilo geométrico sentia uma necessidade de interpretar um problema em um plano geral, contudo, esse plano geral continuava sendo apoiado por imagens. Nem todos os esquemas visual-pictóricos utilizados por eles eram relativamente generalizados, muitos eram imagens visuais particulares e concretas.

Na opinião de Krutetskii (1968), os estudantes pertencentes ao estilo geométrico memorizavam dados pictóricos muito mais rapidamente, facilmente e permanentemente. Quando memorizavam dados verbal-lógicos tentavam relacionar uma generalização a uma imagem visual e reter a generalização em suas memórias dessa forma. A maioria dos geômetras capazes memorizava não o desenho geométrico todo, e sim um esquema generalizado dele.

Dos 9 estudantes matematicamente talentosos que Krutetskii estudou durante oito anos, apenas um foi considerado representante do estilo geométrico. A seguir, são descritos episódios desse estudante que podem ilustra essa afirmação de Krutetskii (1968).

Borya G. (11 anos) nasceu em 1954 na cidade de Makeevka (perfil de 1965).

Quando Borya estava na 2ª série, seus pais e professores notaram seu interesse pela aritmética e suas habilidades nessa área. Ele poderia resolver rápido e mentalmente qualquer problema da 2ª e 3ª séries, bem como muitos problemas da 4ª série. Embora resolvesse corretamente problemas mais difíceis, nem sempre conseguia explicar satisfatoriamente como raciocinou, enquanto os resolvia.

Era fascinado pela aritmética e especialmente por problemas complicados, que sempre tentava resolver pelo modo mais curto e mais claro. Às vezes, encontrava tantos métodos para resolver um problema quanto possível e os comparava.

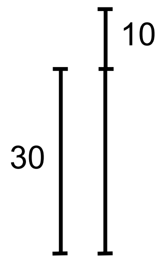
Krutetskii (1968) relatou que era interessante observá-lo, esforçando-se para utilizar meios visual-pictóricos de resolução, para "ver" as relações dadas em um problema, principalmente quando estava resolvendo um que lhe era pouco familiar. A ele foi dado o problema: “Um operador de trator trabalhou $\frac{8}{21}$ da área total de um lote de terra no primeiro dia, $\frac{7}{13}$ do resto da área no segundo dia, depois do qual sobraram $26\frac{2}{3}$ hectares. Em quantas horas ele fará o trabalho todo se ele trabalhar uma média de $2\frac{2}{5}$ hectares por hora?” (Ibidem, p. 220, tradução nossa).

Borya o resolveu da seguinte maneira: dividiu uma pequena tira no seu caderno em 21 quadrados. Separando 8 quadrados [que representava a parte do campo trabalhada no primeiro dia], ele considerou o resto (13 quadrados) como um novo número. Então, separou 7 quadrados que constituíram $\frac{7}{13}$ do novo número. Seis quadrados restaram (ou $\frac{6}{13}$ do novo número), que era igual a $26\frac{2}{3}$ hectares. Então, comparou os 21 e os 6 quadrados pelo tamanho, dividindo 21 por 6, e obteve $3\frac{1}{2}$. Na sua próxima operação, multiplicou $26\frac{2}{3}$ por $3\frac{1}{2}$ e obteve o tamanho desejado da área do lote inteiro, e assim, continuou.

Krutetskii (1968) informou que Borya começou a aprender álgebra na 5ª série e esperou impacientemente o seu encontro com a geometria.

No problema: Eu caminho de casa para a escola em 30 minutos e meu irmão leva 40 minutos. Meu irmão saiu 5 minutos antes que eu. Em quantos minutos eu o alcançarei? Borya o resolveu utilizando o desenho abaixo, explicando-o do seguinte modo:

> Movemos a segunda linha para baixo de forma que um pequeno pedaço igual a 5 apareça abaixo. Então haverá um pedaço igual a 5 em cima. Ele partiu 5 minutos depois; chega 5 minutos mais cedo; e alcança seu irmão na metade do caminho (Ibidem, p. 323, tradução nossa).



Estilo Harmônico

Krutetskii (1968) ressaltou que uma maioria significante dos estudantes capazes que foram estudados no aspecto da constituição matemática da mente pertenceu a esse estilo (23 dos 34 estudantes). Eles possuíam como característica um equilíbrio relativo dos componentes verbal-lógico e visual-pictórico, sendo que esses componentes eram bem desenvolvidos.

Os estudantes eram muito engenhosos em suas interpretações visuais de relações abstratas, porém, suas imagens visuais e esquemas estavam subordinados à análise verbal-lógica. Quando operavam com imagens visuais, eles percebiam que o conteúdo de generalização não se esgotava em casos particulares. Ao resolver muitos problemas, eles tinham êxito implementando as duas abordagens, tanto a analítica como a pictórico-geométrica.

A observação de Krutetskii (1968) quanto ao estilo harmônico deu origem a outros dois estilos que ele identificou como modificações. Com um bom desenvolvimento dos componentes verbal-lógico e visual-pictórico em equilíbrio, a modificação **A** se refere a uma inclinação para operações mentais sem o uso de meios visual-pictóricos e a modificação **B** se caracteriza por uma inclinação para operações mentais com o uso de esquemas visual-pictóricos. Com base nessa distinção, Krutetskii (1968) denominou as duas modificações como estilo *abstrato-harmônico* e estilo *pictórico-harmônico*. O Quadro 5, evidencia uma comparação das principais diferenças entre esses dois estilos.

Quadro 5 - Diferenças entre os estilos abstrato-harmônico e pictórico-harmônico

	Abstrato-harmônico	**Pictórico-harmônico**
Ambos podem descrever relações matemáticas igualmente bem por recursos visual-pictóricos, porém,	não sente essa necessidade e não se esforça para fazer dessa forma	sente uma necessidade e freqüentemente depende de esquemas gráficos durante a resolução
O apoio de meios visual-pictóricos	é de pouco auxílio	simplifica a resolução
Se necessário pode	recorrer à ajuda de imagens visuais	resolver um problema sem o apoio de modelos visual-pictóricos
Analisando conteúdo matemático prefere iniciar com	formulações verbal-lógicas	recursos visual-pictóricos

Dos 9 estudantes considerados talentosos, que foram estudados durante oito anos, Krutetskii (1968) informou que Sonya L. foi inserida no estilo abstrato-harmônico e Volodya L. no estilo pictórico-harmônico.

Para compreendermos melhor esses dois últimos estilos, mencionados por Krutetskii (1968), expomos, a seguir, exemplos de resoluções de alguns problemas desenvolvidos por Sonya e por Volodya.

Estilo Abstrato-harmônico

Sonya L. (8 anos) nasceu em Moscou em 1950 (perfil feito em 1958-59).

Segundo Krutetskii (1968), Sonya tinha um desenvolvimento físico normal, no entanto, era muito lenta em seus movimentos e falava sem pressa. Escrevia mal, não lia muito bem e não gostava de fazer suas lições.

Revelava facilidade com a aritmética, gostava de problemas complicados. Até o início da pesquisa de Krutetskii ela tinha pouco conhecimento escolar. Tudo era baseado na argumentação e feito mentalmente, pois ainda não sabia calcular por escrito. Porém, revelava algumas características interessantes na sua escrita e no discurso oral, tais como: exatidão e clareza em descrição, pobreza de imagens e ausência de metáforas, epítetos[17].

Krutetskii (1968) comentou que durante a entrevista perguntaram-lhe "De que maneira você constrói um ângulo de 1^{o}?" Sonya: "Você tem que dividir um círculo em 360 partes, tem que apagar 359, e tem que unir a parte restante em suas extremidades ao centro do círculo" (Ibidem, p. 195, tradução nossa).

Dividia frações da seguinte forma:

$$\frac{5}{8}:\frac{1}{2}=\frac{5}{8}:\frac{4}{8}=1 \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{4}\ \text{de}\ \frac{8}{8}=1\frac{2}{8}$$

Números inteiros ela dividia assim: 600 **:** 240 =   ; 600 **:** 120 = 5. Mas 120 é a metade de 240, então temos 5 meios ou $2\frac{1}{2}$.

Tais cálculos requeriam grande esforço mental e Sonya não gostava de cálculos longos, complicados. Ela gostava de argumentar, encontrar vários caminhos para resolver problemas, afirmou Krutetskii (1968).

---

17 Palavra ou frase que qualifica pessoa ou coisa.

Krutetskii e sua equipe conseguiram, nas primeiras fases do estudo com a Sonya (em 1959), evidenciar as características de sua mente enquanto resolvia problemas matemáticos, associando-as com alguns dos componentes das habilidades matemáticas, tais como:

Raciocínio rápido – era rápida para encontrar uma forma de resolver problemas acessíveis a ela. Exemplo, em poucos segundos encontrou uma maneira para provar o teorema, pouco familiar a ela, da medida de um ângulo externo de um triângulo. Quando lhe foi perguntado "Pode haver dois ângulos retos em um triângulo?" Respondeu de imediato: "Não, porque então, não haveria o terceiro ângulo" (Ibidem, p. 196, tradução nossa).

Pensamento lógico, sistemático e seqüencial – ela tinha um bom entendimento de teoremas e provas; o seu pensamento passava facilmente da premissa à conclusão. Seus argumentos eram logicamente muito compactos e persuasivos. Sem exceção, todas as suas soluções dos problemas matemáticos eram muito precisas substanciadas pela lógica.

Exemplo. Foi dado a Sonya o problema: Um pastor diz a outro: me dê 8 ovelhas e então nós teremos um número igual. O outro responde: não, você me dá 8 ovelhas e então eu terei o dobro do que você tem. A sua solução, obtida em 40 segundos, foi a seguinte:

> Se um der ao outro 8 ovelhas e eles passam a ter um número igual, então, isso significa que eles têm uma diferença de 16 ovelhas. Se, por outro lado, o outro der 8, então, a diferença torna-se 32 (desde que um perde 8 e o outro ganha 8 ovelhas). E então, obtemos que um tem 2 vezes mais, ou 32 ovelhas a mais. Isto significa que haverá 32 e 64, e antes da troca havia 40 e 56 (Ibidem, p. 196, tradução nossa).

Uma habilidade para abstração matemática e para generalização rápida e ampla – Sonya generalizava matematicamente assunto semelhante de forma muito rápida. Não tinha dificuldades para encontrar características comuns em problemas diferentes. Raramente precisava recorrer a imagens visuais ao resolver problemas. Quando tinha 5 anos, chegou facilmente ao conceito abstrato de um meio, sem precisar de imagens concretas (meia maçã, meio lápis). Krutetskii (1968) ressaltou que isso não significa que Sonya não podia visualizar as relações dadas em um problema. Por opção quase nunca utilizava imagens visuais, como se não sentisse nenhuma necessidade. Exemplos das suas generalizações:

(1) Problema: Temos dois ângulos suplementares adjacentes. Um ângulo é igual a 45º. São construídas as bissetrizes desses ângulos. Qual é o ângulo entre as bissetrizes dos dois ângulos?" Sonya deu a resposta certa (90º) rapidamente e, quase sem pensar, generalizou: "Para todos os ângulos suplementares adjacentes as bissetrizes formarão um ângulo de 90º, como a soma de ângulos suplementares adjacentes é 180º, a metade sempre será 90º" (Ibidem, p. 197, tradução nossa).

(2) Depois de provar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 2d (que significa dois ângulos retos ou 180º), Sonya, a pedido do pesquisador, muito facilmente provou que a soma dos ângulos de um quadrilátero é igual a 4d e de um pentágono 6d, fazendo as construções apresentadas na Figura 10. E, depois de pensar, exclamou:

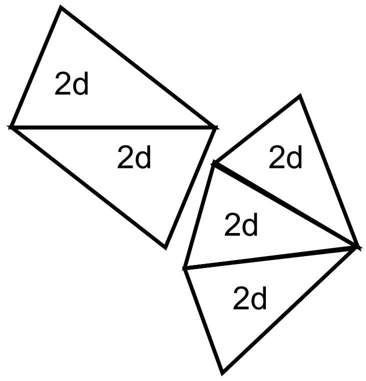


Figura 10 – Representação geométrica da soma dos ângulos internos de um triângulo

> Isso poderia ser obtido para qualquer polígono: o número de triângulos sempre será dois a menos que o número de lados (visto que cada dois lados pertencerão a dois outros triângulos e um de cada lado a todo o resto). Para encontrar a soma dos ângulos internos, devemos pegar 2 do número de lados e pegar 2d tantas vezes (Ibidem, p. 203, tradução nossa).

Por generalização Sonya independentemente chegou à fórmula 2d(n – 2), que corresponde à soma dos ângulos internos de qualquer polígono. Depois disso, ela calculou a soma dos ângulos internos do polígono de 608 lados em 2 segundos.

Flexibilidade de pensamento – Sonya mudava facilmente de uma operação mental a outra e de um método de resolução a outro. Ela revelou grande diversificação na sua abordagem para resolver problemas. Como uma regra, encontrava, por sua própria iniciativa, duas ou três maneiras para resolver um mesmo problema. Esse fato pode ser confirmado nas resoluções a seguir.

VI-B-2: “Galinhas e coelhos estão correndo ao ar livre. Juntos eles têm 35 cabeças e 94 pés. Quantos há de cada?” (Ibidem, p. 195, tradução nossa). Esse exemplo também ilustrou a lógica utilizada por Sonya. Sua resolução foi:

> Se há 35 cabeças ao todo, então são 35 galinhas e coelhos no total. Se todas fossem galinhas, seriam 70 pés. Isso significa que há 24 pés extras, porque além de algumas galinhas há coelhos. Cada coelho tem 2 pés a mais que uma galinha, isso significa que são 12 coelhos e 23 galinhas (Ibidem, p. 197-198, tradução nossa).

Ela prosseguiu relatando outra resolução, só que, ao invés de resolver utilizando o número total de cabeças, considerou agora o número total de pés. “Também pode ser feito desse modo: há 94 pés. Se todas fossem galinhas seriam 47 cabeças. Mas há 35 cabeças ao todo, 12 a menos. Então, essas 12 cabeças têm 4 pés cada uma, não 2. Então, são 12 coelhos e 23 galinhas” (Ibidem, p. 198, tradução nossa).

XIII-B-4: $113^2 - 112^2$. Nesse exemplo, Sonya (com 10 anos), fez um esquema, como o que se encontra abaixo, apontando algumas possibilidades de resolução:

$$113^2 - 112^2 \quad \left| \begin{array}{l} \rightarrow \ a^2 - b^2 = \\ \rightarrow \ (a+1)^2 - a^2 = \\ \rightarrow \ a^2 - (a-1)^2 = \end{array} \right.$$

Ela encontrou, sozinha, as duas últimas variantes, porém, somente depois que o pesquisador sugeriu que pensasse em outras abordagens para o mesmo problema.

XIII-A-6: Velejando com a corrente, um navio a vapor faz 20 km/h; contra a corrente veleja a 15 km/h. Para viajar de A para B, gasta 5 horas a menos do que quando viaja na direção oposta. Qual é a distância entre A e B?

Soluções:

> 1. Com a corrente, 1 km em 3 minutos; contra a corrente, 1 km em 4 minutos. Um minuto é obtido com cada quilômetro. Um total de 5 horas – 300 minutos – é obtido. A distância é de 300 km.
> 2. A cada hora 5 km são obtidos, e 75 km são obtidos ao todo (5 horas a cada 5 km). Então, 15 horas a 20 km/h – 300 km.

> 3. Em 5 horas, 75 km, e isso é $\frac{1}{4}$ da distância (desde que a velocidade contra a corrente é igual a $\frac{3}{4}$ da distância com a corrente) (Ibidem, p. 280, tradução nossa).

Sonya encontrou a variante (2) em 25 segundos, a variante (3) em outros 30 segundos e a variante (1) em outro 1 minuto.

Uma transferência livre e fácil de um encadeamento de pensamento direto a um inverso – essa forma de transferência não era difícil para ela. Por exemplo, quando aprendeu que ângulos retos são iguais, não houve dificuldade para concluir: "Alguns ângulos iguais são ângulos retos" (Ibidem, p. 198, tradução nossa). Krutetskii (1968) afirmou que Sonya também passava com muita facilidade da resolução de um problema direto para a resolução de um problema inverso.

Redução dos passos no processo de raciocínio – Sonya tinha uma tendência para pensar em deduções e em estruturas reduzidas, no entanto, essa tendência era particularmente bem desenvolvida na resolução de problemas de uma única categoria.

Dado o problema: Em duas caixas de dinheiro havia 140 rubles no total. Se 15 rubles são transferidos de uma para a outra, haverá quantias iguais de dinheiro em cada uma. Quanto de dinheiro tinha em cada caixa?

A resolução de Sonya, sem pausas, foi: "140 menos 30 serão 110 e metade 55. Cinqüenta e cinco e oitenta e cinco rubles. Também pode fazer assim: quantias iguais – isso é 70 cada, e antes disso, então, havia 55 e 85 rubles". A pedido do pesquisador ela explicou seu segundo método desse modo:

> Nós imaginamos que o dinheiro já foi transferido de forma que as quantias são iguais. Se elas são iguais, então há 70 rubles em cada. Mas antes disso havia 15 rubles a menos em uma (desde que se tornou 70 quando foram somados 15), quer dizer, havia 70–15 = 55 rubles. Antes, havia 15 rubles a mais na outra (desde que se tornou 70 quando 15 foram tirados), quer dizer, aqui tinha 70 + 15 = 85 rubles (Ibidem, p. 198, tradução nossa).

Uma tendência distintiva para economia de pensamento – Sonya era notável pelo seu esforço em encontrar modos mais fáceis, claros e econômicos para resolver problemas. No entanto, nem sempre tinha sucesso para obter a solução mais racional para um problema. Normalmente selecionava o modo que a conduzia à meta mais rápido e facilmente. Portanto, muitas das suas resoluções eram elegantes. Exemplos:

a) Um pai e seu filho trabalham na mesma fábrica. Eles fazem o percurso de casa até a fábrica caminhando. O pai percorre a distância em 40 minutos, o seu filho em 30 minutos. Em quantos minutos o filho alcançará o pai se o pai sair de casa 5 minutos antes do que o filho?

Método usual de resolução: Em 1 minuto o pai percorre $\frac{1}{40}$ do caminho, o filho $\frac{1}{30}$. A diferença em suas velocidades é $\frac{1}{120}$. Em 5 minutos o pai percorre $\frac{1}{8}$ da distância. O filho o alcançará em $\frac{1}{8} \div \frac{1}{120}$ = 15 minutos.

Solução de Sonya: ”O pai partiu 5 minutos mais cedo do que o filho; então, ele chegará 5 minutos depois. Logo o filho o alcançará exatamente no meio do caminho, quer dizer, em 15 minutos” (Ibidem, p. 284, tradução nossa).

b) Ela provou o teorema do ângulo externo de um triângulo de forma simples e clara, utilizando o desenho esboçado na Figura 11, argumentando da seguinte maneira:

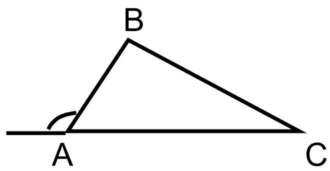


Figura 11 – Representação geométrica do ângulo externo de um triângulo

> A soma dos ângulos internos de um triângulo é 2d. O ângulo BAC é igual a 2d quando somado ao ângulo externo (como ângulos adjacentes suplementares), ou quando somado com os ângulos B e C (como ângulos internos). Então, o ângulo externo é igual à soma dos ângulos B e C (Ibidem, p. 199, tradução nossa).

Memorização rápida e completa de conteúdo matemático – Sonya resolvia os problemas mentalmente. Tinha uma memória muito boa para as relações de um problema, para todas as operações intermediárias e os seus resultados. Porém, a sua memória para dados concretos e números eram peculiares: ela somente se lembrava dessa informação enquanto resolvia o problema. Em compensação, se lembrava da seqüência fundamental de uma prova, categorias de problemas e os princípios para resolvê-los, bem como de esquemas de raciocínios básicos.

Krutetskii (1968) acrescentou que Sonya, às vezes, resolvia um problema em um nível geral que até se esquecia dos dados concretos do problema original. Dado o problema: Se um pássaro sentar-se em cada pau, não haverá lugar para um pássaro; se dois pássaros sentarem-se em cada pau, estará sobrando um pau. Quantos pássaros e paus existem?

Sonya pensou de forma geral "(...) Há dois números desconhecidos. Se o primeiro número é dividido pelo segundo, obtemos ou algum número com um resto ou um número maior, mas com uma falta. Como resolver tais problemas?" Ela expressou: "Ah, adivinhei... Isso significa que o resto mais a falta é igual ao segundo número. (...) Agora sei como resolver tais problemas".

O pesquisador pediu que explicasse melhor e ela pronunciou: "(...) Depois da segunda divisão obtemos 1 a mais, e isso é porque o resto mais uma falta constitui exatamente o segundo número. Pesquisador: "Espere, você não resolveu esse. Quantos paus e pássaros?". Sonya: "Oh, esqueci... primeiro 1 pássaro está sobrando, então há 2 faltas. Assim, 3 paus e 4 pássaros" (Ibidem, p. 251, tradução nossa). Para ela, os dados concretos eram, de certa forma, desnecessários, não os retendo na memória nem durante a resolução do problema.

Sonya resolveu esse problema verbalmente e por meio de raciocínio lógico. Ele também pode ser resolvido com o auxílio de relações algébricas, como a que segue.

Denominando ***x*** = número de pássaros e ***y*** = número de paus, temos o sistema de equações:

$$\begin{cases} y = x - 1 & \text{(o número de paus é igual ao número de pássaros – 1)} \\ 2y = x + 2 & \text{(2 pássaros em cada pau é igual ao número de pássaros + 2)} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x = y + 1 & \text{(o número de pássaros é igual ao número de paus + 1)} \\ x = 2y - 2 & \text{(número de pássaros é igual a 2 pássaros em cada pau – 2 pássaros que não estão no pau que está sobrando)} \end{cases}$$

Assim, x = 4 pássaros e y = 3 paus.

Uma possível interpretação do pensamento de Sonya nesse problema é que ela considerou as informações da quantidade que falta (no caso, 1 pau que equivale a dois pássaros) e o que sobra (1 pássaro). Fazendo a soma 1 + 2 = 3 dá o segundo número, que é a quantidade de paus (y). Para encontrar a quantidade de pássaros podemos utilizar $x = y + 1$ ou $x = 2y – 2$, cujo resultado é 4. Sonya fez esse processo rapidamente sem o recurso da álgebra elementar, entretanto, por meio dela podemos compreender seu modo de pensar.

Fadiga reduzida nas lições de matemática – Sonya, além de muito aplicada e apaixonada por resolver problemas utilizando o raciocínio, raramente se cansava durante as lições, exceto os longos cálculos que fazia mentalmente. Até mesmo lições prolongadas para a sua idade não conduzia Sonya à fadiga. Para fins experimentais foram elaboradas algumas lições para ela de uma 1 hora e meia, sem interrupção. Somente no final desse período ela revelou sinais de fadiga, tais como enganos e diminuição de memória.

Constituição matemática da mente – Sonya até certo ponto era caracterizada por uma inclinação distinta para encontrar um significado lógico e matemático em muitos fenômenos da vida. Por exemplo, ela se lembrava de versos de forma muito insuficiente, no entanto, tentava captar o significado lógico do arranjo das palavras em um poema. Lembrava o significado, o tema de um poema, porém, ao reproduzir o poema freqüentemente mudava a ordem da palavra e o reconstruía logicamente. Enquanto desenhava, esforçava-se para interpretar dimensões, relações e proporções matematicamente.

Krutetskii (1968) inseriu Sonya no estilo abstrato-harmônico, porque, embora tivesse um excelente desenvolvimento de conceitos espaciais, ela não gostava de resolver problemas que exigissem esses conceitos.

Ela fez a maioria dos problemas da Série XXV, que envolviam conceitos espaciais, corretamente e rapidamente, incluindo problemas bem complexos. Exemplos:

Problema (1): Um lápis é amarrado por uma extremidade, e a outra toma qualquer possível posição no espaço. Que superfície essa última extremidade descreve? Resposta correta em 3 segundos: “a superfície de uma esfera” (Ibidem, p. 328, tradução nossa).

Problema (2): Qual é o ângulo formado pela intersecção das bissetrizes dos ângulos agudos de um triângulo retângulo isósceles? De imediato ela respondeu: “Metade de dois ângulos que formam 90º quando somados é 45º, e de 2d subtraímos 45º = 135º” (Ibidem, p. 329, tradução nossa). Ela o resolveu sem apoio visual.

Krutetskii (1968) informou que para Sonya, aparentemente, a lógica ou o raciocínio normalmente substituía o apoio de imagens visuais. Ela não tinha dificuldades para operar com esquemas abstratos e, por isso, não sentia necessidade de ligá-los à imagens visuais. As características de Sonya descritas acima eram manifestadas apenas na sua atividade matemática e não eram observadas em outras categorias de atividade.

Estilo Pictórico-harmônico

Volodya L. (10 anos) nasceu em Moscou em 1949 (perfil feito em 1959-60).

Krutetskii (1968) comentou que Volodya era um menino impetuoso, desorganizado, muito curioso. Era fora do normal. Aos 2 anos e meio aprendeu a contar até 100 e aos 3 até 1000. Aos 4 aprendeu as operações de adição e subtração com os primeiros 100 números. Aos 5 ou 6 anos já multiplicava mentalmente números de dois dígitos e construiu sozinho uma tabela com quadrados de números. Aos 6 operava com frações, extraia a raiz quadrada de qualquer número e familiarizou-se com as funções trigonométricas, ficando imediatamente fascinado pela trigonometria. Ele chegou, independentemente, ao conceito de uma média geométrica. Aos 8 anos dominava o sistema binário e outros sistemas de numeração.

As experiências com Volodya L. propiciaram a Krutetskii (1968) a identificação de algumas características do seu talento matemático. Ele afirmou que em certo aspecto Volodya e Sonya possuíam talentos diferentes, e Krutetskii (1968) apontou as seguintes distinções:

- A excelente memória de Volodya chamou a atenção de Krutetskii. Além de lembrar (como fazia Sonya) modelos generalizados de argumentos, conclusões e provas, ele tinha uma ótima memória para números, e as relações de problemas muito complicados eram retidas por muito tempo. Essa memória para números era típica desde a sua infância. Por exemplo, aos 6 ou

7 anos ele rapidamente memorizava os números dos veículos que encontrava ao acaso; lembrava-se e poderia reproduzir o número de páginas de qualquer livro entre os 400 volumes existentes na biblioteca de sua casa.

- Volodya era melhor nos cálculos do que a Sonya. Durante a pesquisa ele recorria à técnica de cálculo mental rápido, não utilizando de muita argumentação. Krutestkii (1968) destacou que isso não significa que ele não sabia como, ou não gostava de argumentar logicamente, é que ele preferia fazer cálculos. A seguir, são apresentados dois exemplos:

a) Há 4 caixas de massa. Nove kg foram tirados de cada caixa, restando em todas elas juntas tanto quanto havia em cada caixa inicialmente. Quanto de massa sobrou em cada caixa? Sua resolução foi: “Devemos selecionar uma relação entre dois números de forma que um será 4 vezes o outro e 9 kg a menos: 1, 10; 2,13; 3,12; aí restou 3 kg” (Ibidem, p. 203, tradução nossa).

b) No problema das galinhas e coelhos ele resolveu assim:

> Há tantas galinhas quantos coelhos quase duas vezes. Se todos fossem galinhas, então haveria 70 pés, e se todos fossem coelhos 140 pés. 94 está duas vezes mais perto de 70 do que de 140. Tentemos: 20 e 10; 21 e 11; 22 e 12; 23 e 12... 23 galinhas e 12 coelhos (Ibidem, p. 203, tradução nossa).

Perguntaram-lhe como explicaria esse problema a um amigo mais jovem e Volodya explanou: “Se todas fossem galinhas, seriam 70 pés. Mas de fato há 94 pés. Somando um coelho dá + 2 pés. Então, são 12 dessas adições, quer dizer, 12 coelhos” (Ibidem, p. 203, tradução nossa). Ao explicar, ele mudou sua forma de pensar, assemelhando-se à resolução de Sonya.

Tal episódio merece um adendo porque ele evidencia que ao se resolver um problema temos uma maneira de pensar, porém, o fato de ter que explicar a alguém implica em uma mudança de raciocínio. Krutetskii (1968) apresentou esse fenômeno como uma das dificuldades da pesquisa: *pensar ou resolver em voz alta* e *explicar a resolução em voz alta* são processos completamente diferentes.

Skemp (1976, p. 51 e 53) discutiu a diferença entre fazer alguma coisa e explicar como se fez. Na opinião dele, explicar um processo de resolução pressupõe o uso de inteligência reflexiva, pois temos que pensar na tarefa em si, no processo mental envolvido para realizar certa tarefa ou ação.

Podemos acrescentar ainda que toda pessoa pode mudar seu estilo se houver necessidade. Isso implica que estilos cognitivos e modos de representação não devem ser considerados apenas como aspectos psicológicos, como características mentais, mas também em termos de estágios da atividade matemática – descoberta e comunicação – e dos assuntos e conteúdos trabalhados.

Krutetskii (1968) ressaltou que Volodya e Sonya gastaram aproximadamente o mesmo tempo para resolver os problemas, e à mesma idade fizeram problemas de complexidade e dificuldade idênticas. Sonya pensava sem pressa, entretanto, normalmente encontrava o caminho certo imediatamente; Volodya raramente encontrava a resolução de imediato, porém, tinha tempo para fazer várias tentativas, mudando rapidamente de uma tentativa para outra.

Krutetskii (1968) mencionou outras características de Volodya que foram constatadas na sua resolução de problemas, tais como:

Redução dos passos no processo de raciocínio – enquanto resolvia problemas matemáticos, Volodya reduzia bastante os passos no processo de raciocínio, e aparentemente esse era o modo usual de seu pensamento. Tinha dificuldades tanto para desenvolver como para explicar uma resolução em sua estrutura completa. Às vezes, era possível adivinhar como ele pensou, somente durante a resolução do problema.

Por exemplo, dado o problema: “Dois irmãos vivem juntos e trabalham na mesma fábrica. Para Ivan a viagem ao trabalho leva 30 minutos, e para Peter 40 minutos. Peter deixou o trabalho 5 minutos antes de Ivan. Qual o segmento da viagem em que Ivan alcança Peter?” (Ibidem, p. 203, tradução nossa).

Volodya o resolveu em 32 segundos, no entanto, muitas vezes não conseguiu explicar sua resolução. A transcrição de sua resolução é: “Em 5 minutos ele cobre $\frac{1}{8}$ da distância, em seguida $\frac{1}{4}$ e o outro só $\frac{1}{6}$, em mais 5 minutos $\frac{3}{8}$ e o outro $\frac{1}{3}$. Em mais 5 minutos $\frac{4}{8}$ e $\frac{3}{6}$... Em 15 minutos, metade do caminho” (Ibidem, p. 203, tradução nossa). Somente depois de alguns esforços teve sucesso explicando que o seu esquema de resolução era:

> Para os 5 minutos em que somente o Peter estava viajando, ele cobriu $\frac{1}{8}$ da distância. Depois que o segundo 5 minutos expirou, ele cobriu $\frac{2}{8}$ ao todo, e o Ivan cobriu $\frac{1}{6}$ da distância nesses 5 minutos. Depois dos próximos 5 minutos terem transcorridos, Peter cobriu um total de $\frac{3}{8}$, e Ivan $\frac{2}{6}$. Em outros 5 minutos Peter cobriu $\frac{4}{8}$ e Ivan $\frac{3}{6}$ da distância, quer dizer, cada um cobriu metade da distância. Isso significa que eles se encontraram em 3 intervalos de 5 minutos depois do início do movimento de Ivan, ou na metade do caminho (Ibidem, p. 204, tradução nossa).

Pensamento geométrico – Volodya, em contraste com Sonya, confiava espontaneamente em imagens visuais e fazia uso de diagramas variados. A sua resolução para quase todo problema era acompanhada por uma necessidade de expressar a informação visualmente.

O mesmo problema dos dois irmãos mencionado anteriormente foi resolvido por ele utilizando agora dois segmentos divididos em intervalos de 5 minutos, como ilustra a Figura 12 (Ibidem, p. 204, tradução nossa).

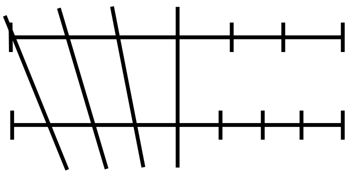


Figura 12 – Representação geométrica por meio de segmentos

No problema Um menino diz à sua irmã: Se você me der 8 nozes, então nós teremos um número igual. Mas ela responde: Se você me der 8 nozes, eu terei duas vezes mais. Quantas nozes tinha cada um? (Ibidem, p. 204, tradução nossa) ele apresentou a resolução pelo diagrama da Figura 13.

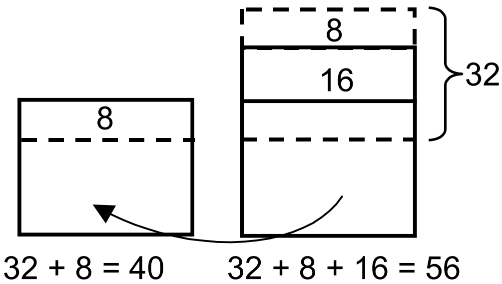


Figura 13 – Representação geométrica do Problema das Nozes

O problema: Um pai tem 35 anos e o seu filho tem 2. Em quantos anos o pai terá quatro vezes a idade de seu filho? (Ibidem, p. 208, tradução nossa) também foi resolvido mediante um diagrama (Figura 14), sem qualquer argumentação.

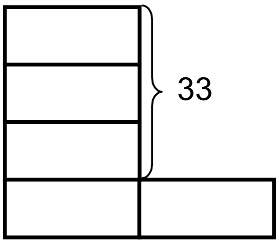


Figura 14 - Representação geométrica de um problema envolvendo idades

Pensamento flexível – Volodya também manifestou essa característica. Por exemplo, no problema **XIII-A-6** (citado na p. 123 desta Tese) ele apresentou 3 formas de resolução, que são análogas à de Sonya descritas anteriormente. No entanto, encontrou a variante (1) em 30 segundos, a variante (3) em outros 40 segundos e a variante (2) em mais 20 segundos.

Krutetskii (1968) comentou um pouco da trajetória escolar de Volodya durante alguns anos e informou que nas séries posteriores ele começou a estudar sozinho seções inteiras de Matemática de cursos universitários, em particular, Fundamentos da Análise Matemática. Seus professores e supervisores comentaram que ele estava se desenvolvendo mais como um analista do que como um geômetra. Isso significa que, com a idade, certa reconstrução da constituição matemática da mente de Volodya ocorreu. Os componentes verbal-lógicos do seu pensamento matemático adquiriram um significado crescente em comparação com o visual-pictórico.

Os distintos pensamentos matemáticos manifestados pelos estudantes e os processos de resolução de problemas apresentados no item 1.3 desta Tese revelaram certa predominância na forma de pensar matematicamente. Isso foi mais marcante em Sonya e Volodya. Ambos dispunham de um bom desenvolvimento dos componentes verbal-lógico e visual-pictórico, contudo, suas opções por certos procedimentos foram bem acentuadas.

Sonya em alguns problemas fez uso de imagens visuais, como, por exemplo, para provar o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo e o teorema do ângulo externo de um triângulo, porém, isso não era uma condição necessária. Ela até poderia fazê-lo sem apoio visual. Na medida do possível, resolvia os problemas, mesmo os de geometria, por meio de um pensamento analítico em termos de utilização dos conceitos presentes no problema e da lógica.

Volodya também conseguia resolver problemas sem recurso visual, como no problema das galinhas e coelhos, porém, normalmente necessitava de imagens, e as preferia muito mais em contraste com Sonya.

Nesse problema os dois o resolveram por meio da argumentação e do método aritmético. No entanto, Sonya utilizou um pensamento lógico – distribuindo primeiramente os animais com duas pernas, para depois voltar e distribuir o que faltava, pensando nos animais com quatro pernas. Volodya adotou uma forma experimental, observando a estrutura dos números – estabeleceu o intervalo entre a quantidade total com duas pernas e a total com quatro pernas e concluiu que o valor dado no problema (o número total de pés) correspondia a quase o dobro do número de galinhas, comparado com o número de coelhos. Mesmo recorrendo a um mesmo método, eles pensaram e organizaram as informações de maneiras diferentes.

Essa diferença entre os dois pode ser justificada pela possibilidade de se representar uma mesma situação de diferentes maneiras, pela existência de vários meios de representação e pela diversidade de pensamento. Assim, a existência de certa predominância na forma de pensar a Matemática é caracterizada como estilo cognitivo, que pode ser identificado por meio da representação escolhida.

1.3.2. Estilos cognitivos matemáticos em uma pesquisa exploratória

Foi realizada uma pesquisa exploratória para analisar o pensamento matemático na resolução de problemas, envolvendo estudantes da Universidade Federal de Mato Grosso, sendo 09 do Curso de Licenciatura Plena em Matemática (indicados pelos códigos de MA_1 a MA_2) e 04 estudantes do Curso de Ciências da Computação (indicados pelos códigos de CO_1 a CO_4). Foi proposto a eles 13 problemas matemáticos para serem resolvidos, além de um questionário com perguntas subjetivas a *priori* e um questionário a *posteriori*. Entre esses estudantes constatamos a existência de certa predominância no pensamento matemático durante a resolução dos problemas.

Tomando como referência a classificação utilizada por Krutetskii, os sujeitos dos dois cursos acima mencionados foram inseridos no estilo harmônico. Por serem universitários, pressupomos que tiveram acesso, no percurso escolar, aos diferentes símbolos verbal-lógico e visual-pictórico, podendo fazer uso de qualquer um deles quando necessário.

Os problemas 2, 3 e 4 de nossa pesquisa exploratória forneceram indícios de um pensamento matemático característico entre alguns dos sujeitos pesquisados.

Por exemplo, os estudantes MA_3, MA_5, MA_6 e MA_9 revelaram certa predominância na utilização de relações algébricas para resolver esses problemas, evidenciando um pensamento mais analítico. Por esse motivo eles foram ser inseridos no estilo abstrato-harmônico.

Esse pensamento analítico foi confirmado pelos sujeitos MA_3 e MA_6 no questionário a *priori*, no qual eles responderam que:

- gostam mais de utilizar o raciocínio matemático;
- gostam de pensar de forma mais analítica;
- a preferência é maior pela Matemática Pura.

Os estudantes MA_5 e MA_9, embora tenham utilizado um pensamento analítico na resolução dos problemas, responderam o questionário indicando que:

- gostam mais de resolver problemas matemáticos;
- gostam de pensar de forma mais intuitiva;
- a preferência é maior pelas Idéias Matemáticas.

Outros, como os estudantes MA_1, MA_2, MA_4, MA_7 e CO_3 revelaram certa predominância por um pensamento mais experimental, atribuindo valores e estabelecendo relações para fazer comparações. Algumas vezes, recorreram ao auxílio de símbolos visual-pictóricos. Esses estudantes foram considerados como representativos do estilo pictórico-harmônico.

No questionário a *priori*, os estudantes MA_1, MA_2, MA_4, MA_7 e CO_3 não responderam as questões de forma a confirmar seus processos de pensamento durante a resolução dos problemas, como constatamos no quadro 6:

Quadro 6 - Preferências em alguns aspectos da Matemática

Sujeitos	Gosta mais		Gosta de pensar de forma		Preferência maior	
	RPM	RA	I	A	IM	MP
MA_1		X	X		X	
MA_2	X		X			X
MA_4	X		X		X	
MA_7	X			X	X	
CO_3		X		X	X	

LEGENDAS:
RPM: resolver problemas matemáticos
RA: utilizar o raciocínio matemático
I: intuitiva
A: analítica
IM: Idéias Matemáticas
MP: Matemática Pura

O estudante CO_3 respondeu que gosta mais de utilizar o raciocínio matemático e de pensar de forma mais analítica, no entanto, na resolução dos problemas empregou procedimentos de caráter experimental. Em alguns problemas, apesar de reconhecer que existem processos mais formais, como por exemplo, conceitos da Física, uma vez não conseguindo utilizá-los, não desistia de resolver os problemas. Sua preocupação não era mostrar que sabia aplicar conhecimentos já adquiridos. Ele sempre procurava resolver os problemas, buscando relações ou valores numéricos para compará-los e obter suas respostas.

Os demais estudantes pesquisados (MA_8, CO_1, CO_2 e CO_4) não evidenciaram um pensamento tão predominante de modo que pudessem ser classificados em um dos dois estilos harmônicos. A forma de pensar deles variou de acordo com os problemas propostos e com os conhecimentos disponíveis no momento.

A seguir, são apresentados os problemas e os respectivos processos de resolução dos estudantes que fizeram emergir a predominância por uma forma típica de pensamento matemático.

Problemas

Problema 2: De todos os retângulos que têm o mesmo perímetro, qual o que tem maior área?

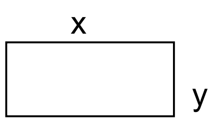
Problema 3: A uma equipe de homens foi atribuída a tarefa de ceifar dois pastos, um tendo o dobro do tamanho do outro. Até meio dia todos os homens ceifaram juntos no pasto maior. Depois, a equipe foi dividida em dois grupos iguais. O primeiro grupo permaneceu no pasto maior e concluiu todo o trabalho no final da tarde. O segundo grupo foi ceifar o pasto menor, mas no final da tarde ainda restou uma porção desse pasto para ceifar. Essa porção foi ceifada no outro dia por apenas um homem que trabalhou durante um dia inteiro. Quantos homens estavam ceifando?

Problema 4: Dois trabalhadores, um mais velho e outro mais jovem, moram na mesma casa e trabalham na mesma fábrica. Caminhando até a fábrica o homem mais jovem leva 20 minutos. O homem mais velho percorre a mesma distância em 30 minutos. Quando o trabalhador jovem alcançará o homem mais velho, se esse partir 5 minutos antes do jovem?

Estilo abstrato-harmônico

Estudante MA_3

Problema 2. Ele sabia que a resposta era o quadrado, porém, precisava demonstrar. Pensou por um tempo. Depois desenhou o retângulo e escreveu:



Área = x.y, supor x > y,

O perímetro é x + x + y + y = 2 (x + y) = P

MA_3 tentou resolver o problema de forma abstrata. Pensou na variação dos lados do retângulo. Para manter o mesmo perímetro ele disse: “se aumenta 1 em y, diminui 1 em x”. Em seguida, escreveu:

“Se aproximar x de y, em 1 unidade temos:

(x – 1), (y + 1), Área = (x – 1)(y + 1) = xy + x – (y + 1). Se após aumentar y para y + 1, e diminuir x para x – 1, estes valores forem iguais, então teremos Área = xy + x – (x – 1) = xy + 1. A área aumenta em 1 unidade".

Porém, ele não conseguiu obter uma prova matemática. Após outras tentativas de resolução sem sucesso ele procedeu da seguinte forma:

$\text{Área} = x.\left(\frac{P}{2} - x\right)$ [o segundo fator surgiu de 2(x+y) = P acima]

$A(x) = -x^2 + \frac{Px}{2}$

A = 0 quando x = 0 ou quando

$-x + \frac{P}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{P}{2}$

Ponto médio $x = \frac{P}{4} \rightarrow P = 4x$,

como se trata de um retângulo, os lados são todos iguais quando se tem a maior área".

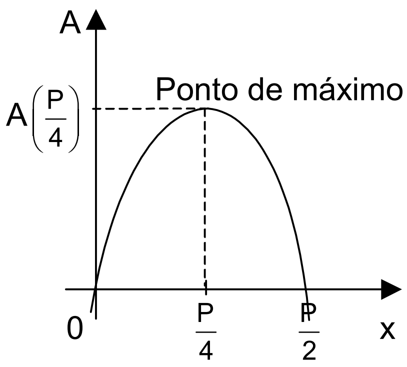


Figura 15 – Representação gráfica associando os lados de retângulos com suas respectivas áress

Durante a resolução, ele mencionava que o problema poderia ser resolvido pelo conceito de função, no entanto, ele não se recordava do procedimento. Por isso, tentou outros processos de resolução antes de resgatar esse por meio de função na qual recorreu à representação gráfica (Figura 15).

Problema 3. Começou a resolução desse problema fazendo uma representação visual-pictórica (Figura 16), que o auxiliou na organização dos dados, como ilustramos abaixo:

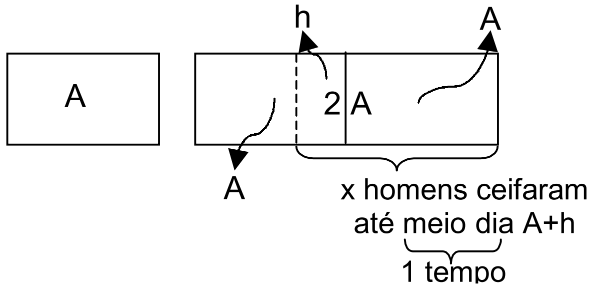


Figura 16 – Representação geométrica dos pastos feita por MA_3

Até meio dia x homens na área 2A

$$\begin{array}{ll} \text{A tarde} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} \text{ homens ceifaram A - h} \\ \frac{x}{2} \text{ homens ceifaram A - h} \end{array} \right. \\ \text{(1 tempo)} & \end{array}$$

$\underbrace{\text{No outro dia}}_{\text{2 tempos}}$: 1 homem ceifou h

Abaixo o que está entre colchetes corresponde às construções que ele desenvolveu até chegar ao esquema que registrou na folha.

$$\left[\left\{ \begin{array}{lllll} \textbf{H} & & \textbf{A} & & \textbf{tempo} \\ x & \text{——} & A + h & \text{——} & 1 \\ \frac{x}{2} & \text{——} & A - h & \text{——} & 1 \\ 1 & \text{——} & h & \text{——} & 2 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} \textbf{H} & & \textbf{A} & & \textbf{tempo} \\ x & \text{——} & A + h & \text{——} & 1 \\ \frac{x}{2} & \text{——} & A - h & \text{——} & 1 \\ 1 & \text{——} & \frac{h}{2} & \text{——} & 1 \end{array} \right. \right]$$

Ele fez relação 2 + relação 3: $\frac{x}{2}+1$ —— $A - h + \frac{h}{2}$ $\rightarrow$ $\frac{x}{2}+1$ —— $A - \frac{h}{2}$

Depois dessas construções, ele obteve em sua folha de resolução o esquema que apresentamos a seguir:

[Registro de MA_3]

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \textbf{H} & & \textbf{A} & & \textbf{tempo} \\ x & \text{——} & A + h & \text{——} & 1 \\ \frac{x}{2}+1 & \text{——} & A - \frac{h}{2} & \text{——} & 1 \\ 1 & \text{——} & \frac{h}{2} & \text{——} & 1 \end{array} \right.$$

Em seguida, escreveu:

$x - 2$ ______ A

$\frac{x}{2} + 2$ ______ A

$x - 2 = \frac{x}{2} + 2 \quad \Rightarrow \quad x - 2 = \frac{x+4}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x - 4 = x + 4 \quad \Rightarrow$ **x = 8 homens**

[Da terceira relação de seu esquema $1 — \frac{h}{2}$ concluiu que **h = 2**, ou seja, que para fazer a área **h** seriam necessários 2 homens, e substituiu isso na primeira relação ($x — A+h \rightarrow x - h — A+h - h \rightarrow x - 2 = A$)].

Problema 4. Ele tentou primeiramente resolver utilizando conceito de Física, entretanto, obteve um resultado negativo. No próximo encontro, retomou o problema e o resolveu da seguinte maneira:

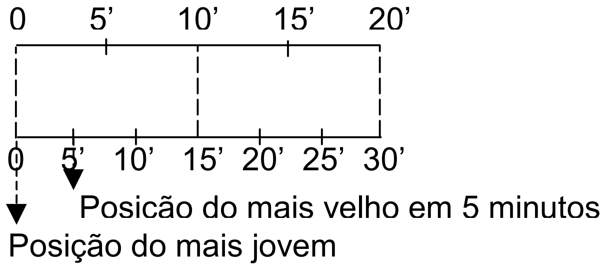


Figura 17 – Representação geométrica por meio de segmentos feita por MA_3

Se considerarmos o tempo começando quando estiverem nessa posição.

$x_2(t) = 5V_2 + V_2t$ $\qquad\qquad V_2 = \frac{2}{3}V_1$

$x_1(t) = V_1t$

$x_1 = x_2$

$$5V_2 + V_2t = V_1t \rightarrow \frac{10}{3}V_1 + \frac{2}{3}V_1 = V_1t \rightarrow \left(\frac{10}{3} + \frac{2}{3}t - t\right)V_1 = 0$$

$$\left(\frac{10 - t}{3}\right)V_1 = 0 \quad \text{com } V_1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{t = 10\ min}$$

MA_3 começou a resolução desse problema utilizando relações algébricas, porém, não obteve a resposta correta. Num segundo momento, partiu de uma representação geométrica (Figura 17 acima) que o auxiliou na resolução por meio de relações algébricas. Essa representação por si só já fornecia a resposta, no entanto, aparentemente para ele não era suficiente, o problema tinha que ser resolvido analiticamente.

Essa sua resolução confirmou o que Krutetskii mencionou, ou seja, os representantes do estilo harmônico possuem um bom desenvolvimento dos componentes verbal-lógico e visual-pictórico, podendo utilizá-los sem dificuldades. No entanto, há uma preferência mais acentuada por um ou por outro componente na resolução de problemas. O visual-pictórico vem em segundo plano, isto é, ele é empregado quando o verbal-lógico não é suficiente em um primeiro momento.

Vale acrescentar que no problema 5, abaixo, ele também empregou um processo de resolução baseado em conhecimentos padronizados, uma vez que para resolver o sistema de equações utilizou escalonamento de matrizes.

Problema 5: No quadro 4 x 4 ao lado, cada símbolo representa um número diferente. Está indicada a soma dos símbolos em três das linhas e três das colunas. Quais são os dois totais que faltam?

♦	✯	π	✯	32
π	■	♦	■	
■	✯	♦	✯	30
π	♦	π	■	32
32		31	31	

Escreveu: “Faz-se ♦ = a; π = b; ■ = c e ✯ = d”.

Definiu dois sistemas com 3 equações e 4 incógnitas, utilizando Linhas e Colunas:

1º) L_4, C_3 e L_3

$$\sim \begin{cases} a+2b+c=32 \\ 2a+2b=31 \\ a+c+2d=30 \end{cases}$$

2º) C_1, $(L_1 - L_3)$ e C_3

$$L_1 - L_3 \sim \begin{cases} a+2b+c=32 \\ 2b-2d=2 \\ 2a+2b=31 \end{cases}$$

Para resolver os sistemas utilizou inicialmente o processo de isolar as incógnitas, conforme verificamos na sua resolução:

$$\sim \begin{cases} a+2b+c=32 \\ 2b-2d=2 \\ 2a+2b=31 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{b = 1 + d} \Rightarrow$$

31

$$eq_1 - eq_3 \quad \sim \begin{cases} a+2b+c=32 \\ 2a+2b=31 \end{cases} \rightarrow \sim \{ -a + c = 1 \Rightarrow \mathbf{c = 1 + a}$$

Em seguida, escreveu: a + 2c + b = ? (soma a ser obtida na L_2)

$2c + \frac{31}{2}$ = ? [substituiu a + b = $\frac{31}{2}$].

Como não conseguiu encontrar os valores para as letras a, b e c, optou por utilizar o escalonamento de matrizes aplicado no primeiro sistema. Assim escreveu:

$$\begin{cases} a+2b+c+0d=32 \\ 2a+2b+0c+0d=31 \\ a+0b+0c+2d=30 \end{cases}$$

Ele não constatou que na terceira equação c valia 1 e não 0.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 32 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 31 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 30 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c & b & a & d \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 32 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 30 \end{array}\right) \end{array} \text{[Trocou as colunas]}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 31/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 30 \end{array}\right) \text{[Dividiu } L_2 \text{ por 2]} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 31/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 30 \end{array}\right) \text{[Fez } L_1 - 2L_2\text{]}$$

Com isso encontrou que:

$$\begin{cases} c - a = 1 \\ b + a = 31/2 \\ a + 2d = 30 \end{cases}$$

[alguns resultados foram iguais aos obtidos pelo 1º processo, porém, a terceira equação estava incorreta pelo erro cometido anteriormente].

Em seguida, escreveu outro sistema com 2 equações e 4 incógnitas, utilizando L_1 e C_4 equações ainda não usadas: $\begin{cases} a + b + 2d = 32 \\ 2c + 2d = 31 \end{cases}$

De 2c + 2d = 31 → **2d = 31 – 2c**

a + b + 31 – 2c = 32 → a + b – 2c = 1

Daqui por diante, ele resolveu utilizando o processo de substituição nas equações.

Constatamos que na resolução de alguns desses problemas ele não teve dificuldades em utilizar representações visual-pictóricas, entretanto, somente as utilizou quando não conseguia resolver o problema por meio de relações algébricas.

Estudante MA_6

Problema 2: Primeiramente, tentou resolver esse problema desenhando os dois retângulos (Figura 18) e recorrendo à notação formal das demonstrações geométricas. No entanto, não conseguiu resolvê-lo. Em outro dia o retomou e desenvolveu da seguinte forma:

Figura 18 – Representação de um quadrado e de um retângulo feita por MA_6

$P_1 = 2a + 2b = 2.(a+b)$ $\quad$ $P_2 = 4c$

$A_1 = a.b$ $\quad$ $A_2 = c^2$

Se $P_1 = P_2$

$2.(a+b) = 4c \rightarrow a + b = 2c \rightarrow c = \frac{a+b}{2}$

Suponha que A_1 é maior que A_2, então

$A_1 > A_2 \rightarrow a.b > c^2 \rightarrow a.b > \frac{(a+b)^2}{4} \rightarrow 4ab > (a+b)^2$

$4ab > a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow 2ab > a^2 + b^2$ que não é verdade pois se a = 1 e b = 2, temos:

$2.(1.2) > 1^2 + 2^2 \rightarrow 4 > 3$ (falso)

Portanto, a área do retângulo 1 é menor que a área do retângulo 2 (quadrado).

Esse estudante procurou resolver o problema de forma geral, porém, não prosseguiu com a demonstração até o final, recorrendo a um caso particular para concluir a resolução do problema.

No **problema 3**, desenhou os dois pastos e utilizou relações algébricas para resolvê-lo. E no **problema 4** tentou inicialmente aplicar conceitos de Física, no entanto, sem sucesso. Depois, escreveu a razão entre o tempo de cada trabalhador:

"$\frac{velho}{jovem} = \frac{30'}{20'} = 1{,}5' \rightarrow$ a cada 1'do velho corresponde a 1,5' do jovem".

Essa relação não o auxiliou na obtenção da resposta. Por último decidiu desenhar dois segmentos (Figura 19).

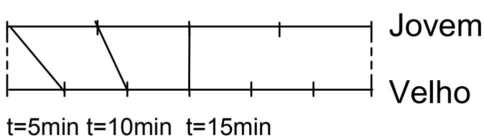


Figura 19 – Representação geométrica por meio de segmentos feita por MA_6

MA$_6$ não manifestou dificuldade em recorrer a desenhos, porém, sempre procurava resolver os problemas por meio de relações algébricas.

Estilo pictórico-harmônico

Estudante MA$_1$

Problema 2. Essa estudante definiu o perímetro sendo 16 e desenhou os retângulos (Figura 20) a seguir:

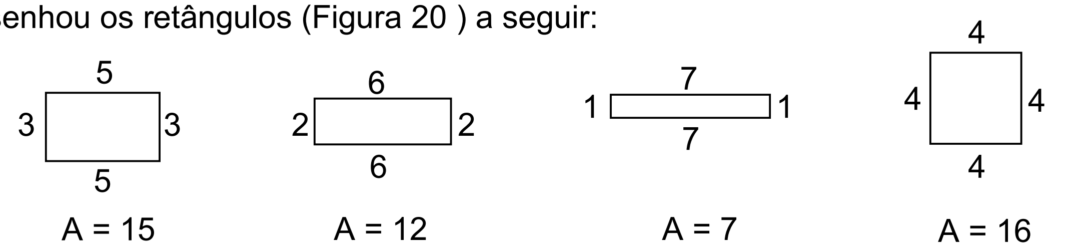


Figura 20 – Comparação de diferentes retângulos de mesmo perímetro

Comparando essas áreas, concluiu que o quadrado é o retângulo de maior área.

Problema 3. Nesse problema, ela não fez nenhum desenho. Depois de algumas tentativas para organizar os dados, embora sem sucesso, pensou no que ocorreu em cada pasto e expressou isso por meio de equações, como apresentamos a seguir:

$$a \ - \ \text{pastos} \ - \ \frac{H}{2}$$

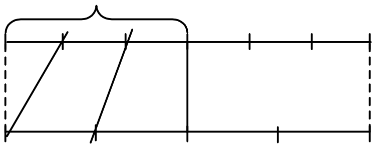
$$\begin{cases} H + \dfrac{H}{2} = 2a & \dfrac{2H+H}{2} = \dfrac{4a}{2} \rightarrow 3H = 4a \rightarrow H = \dfrac{4a}{3} \\ \dfrac{H}{2} + 1 + 1 = a & \dfrac{H}{2} - a = -2 \rightarrow \dfrac{4a}{6} - a = -2 \end{cases}$$

$$\frac{4a-6a}{6} = -\frac{12}{6} \rightarrow -2a = -12 \rightarrow \mathbf{a = 6}$$

[Substituiu **a** na equação $H = \frac{4a}{3}$] $\rightarrow$ $H = \frac{24}{3}$ $\rightarrow$ **H = 8**

Essa resolução de MA$_3$ evidencia que ela não tem dificuldades de pensar de forma analítica e nem sempre necessita de apoio visual-pictórico. Esse fato também vem reforçar a afirmação de Krutetskii quanto à característica de representantes do estilo harmônico, ou seja, há um equilíbrio entre os componentes verbal-lógico e visual-pictórico.

Problema 4. Fez um segmento, escreveu ao lado “distância é a mesma” e pensou nessa representação. Como estava com dificuldades, a pesquisadora sugeriu que fizesse um segmento para cada homem, pensasse no tempo de cada um e na informação dos 5 minutos. Com isso, ela desenhou a Figura 21 e desenvolveu a seguinte resolução:



Distância é a mesma.

Tempo	Dist.
5	$\frac{1}{4}$
x	$\frac{1}{6}$

$$\frac{x}{4} = \frac{5}{6}$$

$$x = \frac{20}{6}$$

$$\mathbf{x = 3{,}33}$$

Figura 21 – Representação geométrica por_meio de segmentos feita por MA_1

MA_1 disse: “Se eles saíssem juntos, o mais jovem percorreria 3,33”. Com base no desenho escreveu: “quando o mais velho tiver caminhado 15 minutos eles se encontram, e o mais novo 10 minutos, ou seja, metade do caminho”.

Estudante CO_3

Problema 2. Iniciou sua resolução pelo desenho dos retângulos da Figura 22 a seguir, no qual revelou a compreensão de que o lado do quadrado é diferente dos lados do retângulo.

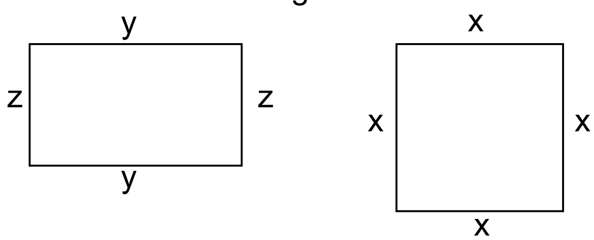


Figura 22 – Representação de um quadrado e um retângulo feita por CO_3

Escreveu:

yz $\qquad 2z + 2y = 4x$

$x = \frac{2z}{4} + \frac{2y}{4} \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}y \quad \rightarrow \quad x = \frac{z+y}{2}$

Em seguida, pensou na área do quadrado e escreveu:

$x^2 \quad \rightarrow \quad x = \frac{z^2 + 2zy + y^2}{4}$ [1]

[Esqueceu de elevar o primeiro membro ao quadrado]

Para concluir a resolução do problema, atribuiu medidas para os lados do retângulo, sendo 2 e 4. Calculou a área do retângulo [2.4 = 8] e substituiu as medidas dos lados na função obtida em [1] para a área do quadrado, fazendo $\frac{4+16+16}{4}=9$. Comparou as áreas 8 e 9, concluindo que o quadrado era o de maior área.

Problema 3: Ele leu várias vezes o enunciado do problema e pensou por muito tempo, indicando dificuldades para representar os dados fornecidos pelo mesmo. Fez os seguintes registros:

x y = 2x

1º período, 2 grupos = > x [> x significa que ceifaram uma área maior do que o pasto x]. Nesse momento, a pesquisadora, junto com ele, analisou geometricamente essa sua constatação, conforme Figura 23 abaixo.

Em seguida, ele escreveu:

$\frac{3h}{2}=2x$ → PMaior

$\frac{h}{2}=\frac{1}{3}.2x$ → PMenor

$\frac{h}{2}=\frac{2}{3}x$ → $\frac{h}{2}-\frac{2}{3}x \neq x$

h = $\frac{2x}{3}.2$ → h = $\frac{4}{3}x$

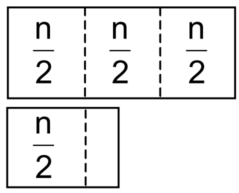


Figura 23 – Representação geométrica dos pastos feita por CO_3

Pensou por mais um tempo sem conseguir encontrar um caminho para resolver, mesmo com a intervenção da pesquisadora sugerindo para que pensasse no que aconteceu em cada pasto (número de homens e períodos para concluir o trabalho).

Depois, ele disse: “se eu encontrar o quanto 1 homem fez, encontrarei quantos homens trabalharam”. Pensou mais um pouco e decidiu atribuir valores para os pastos, sendo 6 e 3, e exclamou:

“Cada $\frac{1}{2}$ equipe trabalhou $\frac{1}{3}$ do pasto maior.

$\frac{1}{2}$ equipe fez 2 de área. [Considerou $\frac{1}{3}$ da área que media 6]

equipe toda fez 4 de área.

Se a equipe tivesse continuado junta teriam feito 8”.

Problema 4: Nesse problema, o estudante CO_3 identificou que poderia aplicar conceitos da Física, até tentou, porém, sem concluir a resolução. Pensou por algum tempo e, em seguida, estabeleceu uma comparação entre os tempos de cada irmão até conseguir uma igualdade, que ocorreu em 15 min. Diante disso, ele disse que teria que descontar os 5 min que o mais velho saiu antes do mais jovem, obtendo 10 min. Suas anotações foram as seguintes:

Velho = 30

Jovem = 20 $\rightarrow$ $\frac{1}{3}$ mais rápido

Trajeto = d

v = t.d $\qquad$ $t = \frac{v}{d}$ $\qquad$ e $\qquad$ $d = \frac{v}{t}$

$d_v = d_j$ $\qquad$ $\frac{v_v}{t_v} = \frac{v_j}{t_j}$ $\qquad \rightarrow \qquad$ $\frac{v_v}{30} = \frac{v_j}{20}$

	J		V	
	40	-	30	
	0	-	150	
10 -	400	-	450	[o 10 na frente corresponde aos minutos]
11 -	440	-	480	
12 -	480	-	510	
13 -	520	-	540	
14 -	560	-	570	
15 -	600	-	600	

Ele explicou que definiu 40 e 30 sendo o quanto cada um percorre em 1 minuto. O 40 surgiu da condição estabelecida por ele em que o mais jovem é $\frac{1}{3}$ mais rápido que o mais velho ($30 + \frac{1}{3}.30 = 40$). Com isso, calculou algumas distâncias percorridas e contadas em passos nos tempos 5 min, 10 min, 11 min, 12 min,..., 15 min, na qual encontrou uma igualdade na distância percorrida sendo de 600 passos.

Esses problemas e seus processos de resolução revelaram certa predominância por um pensamento matemático, tendo como parâmetro o referencial utilizado por Krutetskii (1968), o que pode ser denominado por estilo cognitivo.

Krutetskii (1968) apresentou seu resultado sobre talento matemático na resolução de problemas, analisado sob a luz dos componentes de habilidades matemáticas, ou seja, baseado em características psicológicas.

Na verdade, sua obra retratou um estudo do pensamento matemático e de diferentes estilos cognitivos. O próprio Krutetskii (1968) concluiu que talento matemático pode ser descrito somente por meio de muitas habilidades distintas. Isso indica que o pensamento matemático não é algo simples, ao contrário, é muito complexo. Por isso, acreditamos que apenas uma interpretação psicológica não é suficiente para estudar o pensamento diante de um conteúdo matemático. Outros parâmetros são necessários para construir uma caracterização do pensamento matemático.

Diante disso, no capítulo 2 ampliamos a visão apresentada por Krutetskii (1968), buscando outros olhares sobre o pensamento matemático, que envolvem aspectos como diferentes épocas históricas, contextos culturais distintos, áreas de conhecimento e de aplicação, bem como diferentes formas de representação na Matemática.

CAPÍTULO 2

2. ESTILOS COGNITIVOS E DIFERENTES CULTURAS NA MATEMÁTICA

Krutetskii (1968) definiu talento matemático com base em habilidades matemáticas manifestadas durante a resolução de problemas. Mas na Matemática devemos analisar somente sob esse aspecto? Não!

Problemas matemáticos detêm a atenção do homem desde a Antiguidade, como, por exemplo, os da duplicação do cubo, da quadratura do círculo, que são os famosos problemas gregos da época de 500 a.C. Alguns matemáticos tentaram resolvê-los por métodos geométricos, outros por métodos algébricos e, às vezes, tentando combinar ambos os métodos.

Alguns problemas tornaram-se objetos de estudo que subsistiram durante muitos séculos. O que leva as pessoas a investigarem um mesmo problema durante anos e até séculos? A buscarem uma perfeição na resolução de um problema? É somente a resolução que importa? Ou pretende-se encontrar algo mais?

Um problema matemático pode ser foco de atenção ou por não ser resolvido ou por não fornecer uma solução satisfatória. Muitas vezes o que move algumas pessoas a investigar um problema matemático é a busca pelo estabelecimento de uma estrutura, de uma lei geral.

Os problemas pressupõem uma mesma concepção quanto ao seu significado? Eles despertam a mesma atitude nas pessoas? Gowers (2000), em um artigo publicado sob o título *The Two Cultures of Mathematics*, afirmou que não, já que a perspectiva de um problema está relacionada com a finalidade da Matemática, com o que se espera de uma resolução de determinado problema. E essa finalidade se desdobra em duas culturas na Matemática, ou seja, o interesse maior consiste em solucionar problemas ou construir e compreender teorias.

A seguir, apresentamos, de forma mais detalhada, essas duas culturas na Matemática, bem como o contraste entre elas e uma conexão entre resolução de problemas e construção de idéias gerais.

2.1. Duas Culturas na Matemática

Um problema matemático pode originar pontos de vista diferentes e provocar reações distintas. Tomamos como ilustração um problema que foi enunciado pela primeira vez, sob forma de uma conjectura matemática, em 1852 por Francis Guthrie (1831-1899) que é o teorema das quatro cores: Quantas cores são necessárias para colorir um mapa, com qualquer número de países, de forma que países fronteiriços não tenham a mesma cor?

Já havia sido constatado que quatro cores são suficientes, não importando a quantidade de países envolvidos no mapa, porém, não se tinha uma prova matemática desse fato. Durante mais de 100 anos tentou-se construir, sem sucesso, tal prova. Nesse problema não existem métodos gerais.

Em 1976, Kenneth Appel e Wolfgang Haken apresentaram uma demonstração desse teorema obtida por meio de uma técnica de prova por computador. Appel e Haken consideraram seu trabalho como uma demonstração definitiva, completa e rigorosa. Argumentaram ainda que o fato de utilizar o computador não implica numa mudança na concepção de uma demonstração matemática. Ele é apenas um instrumento que verifica mais detalhes em menos tempo do que um ser humano.

Essa demonstração não convenceu muitas pessoas. Hersh (1985) foi uma delas e manifestou sua decepção da seguinte forma:

> Quando soube que o teorema das quatro cores tinha sido demonstrado, minha primeira reação foi “Maravilhoso! Como é que eles o conseguiram?” Eu esperava alguma nova percepção brilhante, uma demonstração que tivesse em seu núcleo uma idéia cuja beleza transformaria meu dia. Mas quando recebi a resposta “Eles o

> conseguiram decompondo-o em milhares de casos, e testando-os em um computador caso a caso", senti-me desencorajado. Minha reação então foi, "Isso mostra que realmente não se tratava de um bom problema" (DAVIS & HERSH, 1985, p. 427-428).

Os pontos de vista de Appel e Haken e de Hersh revelam diferenças de atitudes frente à resolução de problemas e ao seu significado.

Para os primeiros, o que importa é a resolução do problema em si, ou seja, se preocupam com o fato de se conseguir resolver o problema ou não, mesmo que para isso sejam utilizadas algumas observações particulares, ao invés de regras gerais.

Em contrapartida, para o segundo – que se enquadra na visão dos matemáticos puros – esse procedimento não é suficiente, porque é necessário obter uma idéia geral que seja aplicável a outros problemas. Os que pensam como o segundo se preocupam com a construção de teorias gerais. Ou seja, com o desenvolvimento dos instrumentos intelectuais, com os meios de pensamento como idéias, regras e métodos que sejam gerais.

Para Hersh, se um problema não pode gerar um método mais geral, então, não vale a pena pensar nele. Essa atitude pode, no entanto, conduzir à construção de teorias vazias, não havendo mais preocupação com a aplicação das mesmas.

Assim, diante de um problema matemático podemos ter duas posturas distintas, dependendo do significado que se atribui a uma resolução de problemas. Gowers (2000) discutiu essas atitudes associando-as a duas culturas existentes na Matemática.

Na opinião dele, essas culturas deveriam ser familiares a todos os matemáticos profissionais. Gowers (2000) se refere à distinção entre matemáticos que consideram a resolução de problemas como sendo o ponto central e aqueles que estão mais preocupados com a construção e compreensão de teorias. Podemos classificar Appel, Haken e Gowers como solucionadores de problema e Hersh como construtor de teorias.

Gowers (2000) apresentou uma categorização, sugerindo que se alguém não tem certeza a que classe de matemáticos pertence, deve refletir e optar por uma das duas afirmações seguintes:

a) A finalidade de se resolver problemas é para compreender melhor a Matemática (do problema à generalização);
b) A finalidade de compreender a Matemática é para se ter mais capacidade para resolver problemas (isso se refere à aplicação).

A maioria dos matemáticos concordaria que há certa verdade em ambas as posições, enfatizou Gowers (2000). De um lado, nem todos os problemas são igualmente interessantes, e uma maneira de distinguí-los é demonstrar que eles melhoram nossa compreensão da Matemática como um todo. De outro lado, se alguém gasta muitos anos tentando entender uma área difícil da Matemática, porém, não fazendo nada com esse entendimento, ou seja, não lhe atribuindo um significado, ou uma aplicação, por que qualquer outra pessoa se preocuparia?

Embora se reconheça a veracidade dessas posições, provavelmente a maioria dos matemáticos não concordará igualmente com as duas posições. A título de exemplo, Gowers (2000) citou Michael Atiyah e Paul Erdös que atribuíram pesos diferentes para cada posição.

Em uma entrevista dada por Atiyah, em 1984, lhe perguntaram como selecionar um problema para estudar. Ele começou respondendo que parte do princípio que existe uma resposta. E comentou que algumas pessoas dizem “eu quero resolver esse problema", "Como faço para resolver esse problema?" (ATIYAH apud GOWERS, 2000, p. 66, tradução nossa). Já Atiyah declarou que não age assim. Ele só se move “ao redor das águas matemáticas, pensando sobre coisas, sendo curioso, interessado, falando com as pessoas, estimulando idéias; coisas emergem e eu as sigo” (Ibidem, p. 66, tradução nossa). Ou estabelece conexões com qualquer outra coisa que já sabe acerca do assunto, e tenta colocar tudo junto, e as coisas se desenvolvem.

Atiyah relatou que praticamente nunca começou com qualquer idéia do que estará fazendo ou para onde vai. Ele sempre está interessado em Matemática; seja falando, aprendendo, discutindo e, então, perguntas interessantes simplesmente emergem. Confessou ainda, que nunca começou com uma meta particular, exceto a meta de compreender a Matemática.

Paul Erdös, que deixou para o mundo numerosos problemas fascinantes, bem como soluções para muitos outros, não tinha a preocupação direcionada na mesma extensão com o desenvolvimento de teorias. Porém, isso não significa que Erdös não estava tentando entender a Matemática. Gowers (2000) relatou que muitas pessoas que resolveram um problema de Erdös confirmarão que tiveram que pensar muito no problema. E foram conduzidas em direções inesperadamente frutíferas, revelando que o problema era mais divertido do que parecia a princípio.

Quando Gowers (2000) classificou os matemáticos em construtores de teoria e solucionadores de problema, ele estava se referindo às prioridades estabelecidas. Isso não significa que eles são exclusivamente dedicados para uma só categoria de atividade matemática.

A Matemática precisa das duas culturas, e ramos diferentes da Matemática exigem aptidões variadas, afirmou Gowers (2000). Em alguns ramos, como teoria de número algébrico ou geometria, parecem ser importantes, por exemplo, para construir uma considerável habilidade e conhecimento do trabalho que outros matemáticos estão desenvolvendo. Como progresso, temos o resultado de combinações inteligentes de uma grande variedade de resultados existentes.

Gowers (2000) ponderou que:

> se alguém seleciona um problema, trabalha nele de forma isolada por alguns anos e finalmente o resolve, a menos que o problema seja muito famoso, corre-se um grande risco porque ele poderá não ser mais considerado importante (Ibidem, p. 67, tradução nossa).

Ele acrescentou que a outra extremidade do espectro é, por exemplo, teoria de grafos, na qual um grafo pode ser rapidamente compreendido. Não se chegará a qualquer lugar em teoria de grafo sentando-se numa poltrona e tentando entender melhor essa teoria, ressaltou Gowers (2000). Nem é necessário ler muito da literatura antes de abordar um problema. É útil saber algumas das técnicas mais importantes, no entanto, os problemas interessantes tendem a ser abertos porque as técnicas estabelecidas não podem ser facilmente aplicadas.

Outro ponto que Gowers (2000) destacou se refere ao assunto, pois os assuntos que despertam o interesse dos construtores de teorias estão, atualmente, muito mais em moda do que aqueles que atraem os solucionadores de problemas. Matemáticos ligados à “construção de teorias consideram freqüentemente o que eles estão fazendo como o núcleo central da Matemática” (Ibidem, p. 67, tradução nossa). Assuntos referentes a combinatórios eles julgam como algo periférico e sem relevância especial para os principais propósitos da Matemática.

Essa atitude nos remete ao depoimento de Hersh, citado anteriormente, quanto à demonstração do teorema das quatro cores, ou seja, um problema só é interessante na Matemática se dele originarem teorias gerais.

O objetivo de Gowers (2000) com esse artigo era defender alguns dos assuntos menos populares contra críticas que comumente são feitas. Ele esclareceu que dedica uma maior atenção para combinatório, pois é a área que mais conhece. No entanto, o que ele afirmou ser aplicado às outras áreas. A palavra "combinatório", utilizada por ele, se refere aos problemas que podem ser resolvidos por métodos apropriados e princípios heurísticos de ampla aplicabilidade. Normalmente nesses problemas muitas idéias importantes não aparecem na forma de teoremas precisamente declarados.

Devemos chamar a atenção para o fato de que Gowers (2000) demonstrou que há algo mais por trás dessas diferenças do que tendências psicológicas ou gostos individuais. Os matemáticos que se preocupam com combinatórios geralmente têm como prioridade a resolução de problemas. E muitos problemas para serem resolvidos precisam de um pensamento intuitivo e contextual ou situado, de uma observação ampla e nítida da situação, de uma experiência concreta, em vez de regras e estratégias gerais, pois os dados são mais importantes do que as leis gerais.

Por exemplo, num jogo de cartas a distribuição das mesmas é determinante. O mesmo pode ocorrer na área de combinatórios, na data analisys ou na teoria dos números. "Em Matemática, o contexto obscurece a estrutura. Em Análise de Dados, o contexto fornece o significado", escreveram Moore e Cobb (MOORE & COBB, 2000, p. 615).

Gowers (2000) indagou: Por que o assunto relativo à resolução de problemas deveria ser menos considerado do que os de cunho teórico? Para buscar uma resposta a essa pergunta ele levantou outra: O que faz uma parte da Matemática mais interessante do que outra?

Gowers (2000) expôs a opinião de Atiyah sobre esse ponto. Atiyah declarou que tanta Matemática é produzida que é difícil que tudo possa ser lembrado. Diante disso, os processos de abstração e generalização são importantes como um meio de dar sentido a um grande número de dados (provas de teoremas individuais) e de viabilizar que pelo menos alguns deles podem ser repassados.

Atiyah alegou que por esse motivo, os resultados que permanecerem deverão ser organizados coerentemente e explicados de forma econômica para futuras gerações de matemáticos.

Para muitos, combinatório corresponde a um grande número de problemas e resultados isolados, e, nesse sentido, pode ser uma desvantagem continuou Atiyah. Cada resultado pode particularmente exigir muita simplicidade, porém, “pessoas engenhosas existem e gerações futuras de combinatorialísticos não terão tempo ou inclinação para ler e admirar mais do que uma fração minúscula de sua produção” (GOWERS, 2000, p. 68, tradução nossa).

Gowers (2000) concordou em parte com a opinião de Atiyah. Ele confirmou que é raro encontrar na área de combinatórios uma proposição muito geral que possa inserir um grande número de resultados existentes em seu próprio contexto. É também verdadeiro que muitos dos resultados provados por combinatorialísticos estão um pouco isolados e poderão ser completamente esquecidos. Contudo, é falso afirmar que não existe nenhuma estrutura referente ao assunto. Muitos matemáticos acreditam que a área de combinatórios se reduz a uma coleção mesclada de problemas e resultados particulares, e que os princípios organizados são menos explícitos.

Se os processos de abstração e de generalização, que são tão importantes em Matemática, são de uso limitado em combinatório, então como pode o assunto ser transmitido para gerações futuras? questionou Gowers (2000).

Para refletir sobre essa indagação Gowers (2000) fez outra pergunta: “Quais são as prováveis exigências dos combinatorialísticos do futuro?” (Ibidem, p. 68, tradução nossa). Sua prioridade provavelmente é resolver problemas. Nesse caso, seu interesse em um dos resultados de hoje estará vinculado a se, compreendendo os problemas, eles melhorarão sua própria habilidade para resolvê-los. E isso conduz para o centro do assunto. As idéias importantes na área de combinatório, geralmente, não aparecem sob a forma de teoremas declarados, porém, mais freqüentemente sob princípios gerais de ampla aplicabilidade.

Com essa discussão, Gowers destacou a importância de pesquisar assuntos que não conduzem às teorias gerais, como problemas combinatórios, pois não devemos nos restringir a apenas uma abordagem da Matemática.

Podemos ressaltar que na cognição, as duas culturas são interdependentes, isto é, uma pertence à outra. De um lado, um problema além de ser resolvido pode dar origem a idéias gerais, sem ser necessariamente uma teoria geral. De outro lado, um problema pode ser classificado se ele pertencer a uma classe de problemas, ou seja, se uma idéia geral se aplica a uma classe de problemas.

Essa reflexão das duas atitudes é importante para o âmbito escolar, no qual se tem uma predominância na resolução de problemas, enfatizando métodos gerais. Os estudantes, por exemplo, na resolução de equações, simplesmente aplicam o algoritmo padronizado sem pensar no problema, sem se perguntar se existe solução.

No caso de (9 – 4), se conhecemos os números naturais e suas operações temos uma resposta. Já no cálculo (4 – 9) se considerarmos somente os números naturais, não há solução. Nesse caso, em qual campo numérico temos uma solução? O mesmo ocorre com a equação (x^2 + 1), em que sentido existe solução? Os estudantes não fazem tais questionamentos, apenas repetem os modelos apresentados pelo professor.

Duas atitudes também podem ser observadas em jogos. Por exemplo, o jogo de paciência Spider no computador pode provocar duas reações: uma é simplesmente jogar, e uma vez não conseguindo vencer, parte-se para uma nova jogada; outra é repetir a mesma jogada várias vezes com o intuito de tentar vencer, estudando várias possibilidades que permitam avançar em cada jogada.

Outro jogo é o NIM, também disponível no computador, no qual podemos jogar infinitas vezes. Contudo, quando percebemos uma estrutura no jogo, dada pelo sistema binário, determinamos uma teoria que possibilita elaborar estratégias para qualquer jogada. Porém, com isso corremos o risco de perder o estímulo para jogar, já que é possível ganhar quase todas as partidas.

Atitudes diferentes também foram percebidas já na Antiguidade. A título de exemplo, podemos comparar Speusippus e Meneachmus. Os Elementos de Euclides apresentaram tanto problemas de construções geométricas com régua e compasso como de demonstração de teoremas.

Com base nisso, alguns, como os seguidores de Speusippus, denominaram "todas as proposições de 'teoremas', considerando 'teoremas' como designações mais apropriadas do que 'problemas' para os objetos das ciências teóricas, desde que essas ciências lidam com coisas eternas" (Otte, 2003b, p. 6, tradução nossa). Já os matemáticos da escola de Meneachmus afirmaram que todas as investigações eram problemas.

Otte (2003b) informou que Proclus, em seus *Commentarious* aos *Elementos* de Euclides, mencionou que as duas posições estavam corretas. De um lado, a escola de Speusippus estava certa porque os problemas de Geometria eram de uma categoria diferente daqueles tratados pela mecânica. De outro lado, sem entrar no assunto não havia descoberta de teoremas.

Para distinguir essas duas culturas sob mais uma perspectiva tomamos como exemplo um experimento mental[18] em um labirinto.

Imagine estarmos no meio de uma floresta. Se quisermos sair dela, como devemos proceder? Podemos andar aleatoriamente adotando a estratégia da tentativa e erro, porém, há o perigo de caminhar em círculos. Para evitar isso, utilizamos um meio simples que é definir uma direção, com o auxílio de uma bússola, e seguimo-la constantemente. Se nos depararmos com uma árvore, viraremos à direita e a contornaremos, sempre nos mantendo à direita dela, até que possamos retomar à direção definida inicialmente.

Agora supondo que, no lugar dessa floresta, estejamos num complicado labirinto. Nesse caso, esse simples algoritmo nem sempre funcionaria, e provavelmente terminaríamos andando em círculos. Para que isso não ocorra, além da bússola, necessitaremos de um segundo instrumento que possibilite contar nossas voltas completas. Esse algoritmo aperfeiçoado, chamado de algoritmo da certeza, pode ser formulado do seguinte modo:

> 1. Escolha uma direção inicial arbitrária, chame-a de ‘norte’ e vire-se para essa direção.
> 2. Vá em direção ao “norte” em linha reta até encontrar um obstáculo.
> 3. Vire à esquerda até que esse obstáculo esteja à sua direita.
> 4. Contorne esse obstáculo, mantendo-o à sua direita até que a volta total (incluindo a volta inicial do passo 3) seja igual a zero (OTTE, 1993, p. 286).

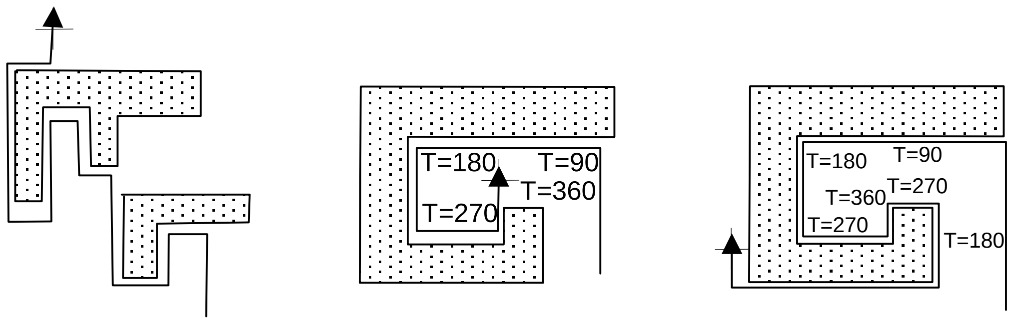


Diagrama A — Diagrama B — Diagrama C

Diagrama A – É um esboço do primeiro algoritmo em funcionamento.

Diagrama B – Indica um problema para o primeiro algoritmo, evidenciando sua fragilidade. A tartaruga andará em círculos eternamente, procurando retornar para o “norte”.

Diagrama C – O algoritmo da certeza faz com que a tartaruga saia da armadilha, por não fazer uma volta completa.

O algoritmo da certeza permite que se saia do labirinto independentemente de sua construção. No entanto, ele não propicia o conhecimento do labirinto, pois ele não explica nada. Com ele não podemos construir o mapa do labirinto.

Podemos considerar que o pensamento algorítmico é o conhecer sem a percepção. O algoritmo resolve o problema, em que o importante é encontrar a saída, porém, não fornece nenhuma idéia para a descrição desse labirinto. Para fazer um mapa do labirinto é preciso descrevê-lo. Se fôssemos

---

[18] Esse experimento consta no livro de Michael Otte (Otte, 1993, p. 285-286).

colocados novamente nesse labirinto, teríamos que utilizar de novo o algoritmo. Isso pode ser comparado a uma “máquina cega” (Ibidem, p. 287).

Resolver um problema normalmente significa representá-lo para que a resolução se torne clara. O mapa seria uma representação do labirinto. No pensamento teórico o importante é elaborar um plano para encontrar a saída.

Por isso, diante de um problema, a Matemática Pura no século XIX (a Matemática teórica, aquela que se separava das aplicações e da Ciência Natural e pretendia se dedicar somente à honra do espírito humano), em vez de mergulhar na busca de uma solução, começava com a pergunta: Será realmente possível resolver esse problema?

Abel, um dos primeiros que tomou essa atitude teórica, fazia indagações como essa, e a citou em sua memória *On the Algebraic Resolution of Equations*, de 1826. Antes de resolver uma equação, questionava se tal relação era possível. O objetivo primordial era pensar no problema antes de resolvê-lo.

Um mapa corresponde à perspectiva do olho de um pássaro. Dessa forma, a teoria proporciona a libertação do algoritmo. Para Otte

> A Matemática teórica tenta relacionar-se às “coisas mesmas”, pois uma idéia teórica pode servir na solução de muitos e diferentes tipos de problemas e, por essa razão, estará ligada a muitos tipos de representações (Ibidem, p. 287).

A opção por utilizar o algoritmo da certeza pode ser comparada com a atitude de resolver problema, sem se preocupar com algo mais geral. Em contrapartida, a opção por representar o labirinto por meio de mapa corresponde à atitude de construir uma teoria. Ele permite encontrar a saída mesmo sem estar no interior do labirinto. Contudo, o mapa é geral apenas para esse labirinto, uma vez que um mapa representa um labirinto particular.

As atitudes das duas culturas na Matemática, de acordo com Gowers (2000), estão vinculadas às prioridades estabelecidas em um dado momento. Solucionar problemas e construir teorias são ações incompatíveis? Não! Existem problemas em que elas são interdependentes, como podemos constatar no próximo item.

2.1.1. Conexão entre resolução de problemas e idéias gerais

Otte (2003a) no artigo *Does Mathematics Have Objects? In What Sense?* fez uma reflexão acerca da atividade cognitiva, evidenciando que ela poderia ser descrita como um sistema de objetos e meios, e a dialética de objetos e meios poderia ser resumida como segue:

- Objetos e meios de cognição estão relacionados com atividade matemática. Matemática não pode proceder de uma orientação exclusiva para métodos universais, formais. Matemática também forma conceitos específicos planejados para nos ajudar a compreender fatos matemáticos.

- Objetos e meios não estão apenas relacionados, também podem estar em oposição. Objetos ou problemas são resistentes à cognição. Eles não produzem os meios para suas próprias soluções.

Otte (2003a) concebeu *Objeto* como sendo qualquer problema e *meio* como qualquer coisa que pareça apropriada para realizar a mediação entre o sujeito e o objeto de cognição, qualquer idéia que possa ajudar a resolver o problema e qualquer representação dessa idéia.

Idéias fundamentais e conceitos teóricos são auto-referentes, ou seja, eles mesmos e, pelo menos em parte, organizam e articulam o processo de seu próprio desenvolvimento, ressaltou Otte (2003a).

Otte (2003a) continuou, na Matemática, entender uma idéia ou um conceito significa aplicá-lo e desenvolver uma teoria. Essas idéias são, entretanto, ao mesmo tempo o começo e a base do desenvolvimento. Isso significa que elas precisam ser intuitivamente impressionantes, devendo motivar e guiar a atividade, bem como orientar a representação.

Cada problema tem uma estrutura específica. Uma resolução pode desenvolver idéias gerais que provavelmente serão aplicadas a outros problemas e poderão se tornar independentes dos mesmos. Em outras palavras, as idéias são descontextualizas porque são aplicáveis a outros contextos ou problemas.

Há problemas nos quais podemos identificar, de forma mais nítida, certa interdependência entre resolução de problemas e construção de teorias, uma vez que é pouco provável que exista um problema totalmente novo. Todo problema tem um aspecto geral, caso contrário, seria sem solução. Polya (1978) evidenciou esse fato ao mencionar que os problemas matemáticos não estão isolados, havendo sempre algum vínculo que pode ser estabelecido.

No entanto, é preciso ressaltar que algumas idéias podem ser aplicadas em alguns problemas, porém, não em todos. Para indicar certa conexão entre resolução de problemas e teorias ou idéias gerais, são desenvolvidos alguns exemplos, como acompanhamos a seguir.

Caso A: Problema da corda e o problema do epiciclóide

O problema da corda proporciona uma discussão de dois procedimentos de resolução: o indutivo e o axiomático. Tais procedimentos são ao mesmo tempo contrastantes e dependentes entre si. Otte (2003a) mencionou que duas diferentes idéias podem ser decisivas na resolução de um problema particular e assim, parecer como equivalentes nesse sentido. Contudo, outro problema pode elucidar a sua diferença. Para evidenciar tal diferença é apresentado na seqüência o problema do epiciclóide.

1 – Problema da corda[19]: Imagine uma corda ao redor da circunferência da Terra, que para essa proposta será considerada como uma esfera perfeitamente lisa, com seis mil quilômetros de raio.

De acordo com Papert (PAPERT apud OTTE, 2003a), alguém sugeriu colocar a corda acima da Terra, utilizando postes de 2 metros de altura (Figura 24). Isso implica que a corda deveria ser mais comprida. A discussão girou em torno do comprimento adicional da corda.

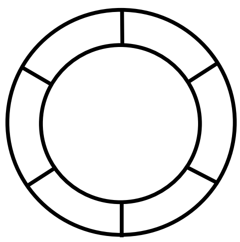


Figura 24 – Representação da corda ao redor da Terra

[19] Problema selecionado do livro de S. Papert “Mind-storms” Basic Books, 1980 e citado por M. Otte no artigo publicado na Synthese 134, Kluwer Academic Publishers, 2003a.

Muitas pessoas que cursaram a escola secundária sabem como calcular essa resposta. Porém, antes de fazê-lo ou de continuar a leitura tentam adivinhar: a corda é aproximadamente mil quilômetros mais comprida; ou cem mil quilômetros, ou dez mil quilômetros?

Para resolver esse problema, Papert propôs utilizar inicialmente uma versão simples, que é a versão linear, na qual consideramos nesse problema uma terra quadrada (Figura 25). Otte (2003a) denominou esse processo de *Cur* (idéia de curvatura).

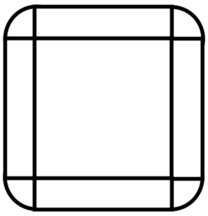


Figura 25 – Representação da Terra quadrada e da corda ao redor da mesma

Papert (PAPERT apud OTTE, 2003a) mencionou que essa versão linear é uma boa regra geral para simplificar o problema. Assim, aumentando o lado do quadrado não se muda a quarta parte do círculo – que se encontra nos quatro vértices do quadrado menor – de forma que a corda extra necessária para aumentar a corda da terra numa altura h é a mesma, tanto para uma terra quadrada muito pequena como para uma muito grande. Isso resolve o problema. Portanto, o aumento da corda necessária é $(2\pi.h)$.

O próprio Papert destacou que a finalidade de se trabalhar com o problema não é para obter a resposta certa, e sim, para contemplar o conflito existente entre diferentes maneiras de pensar no problema.

De uma forma diferente, e talvez mais coerente, Leibniz poderia sugerir uma versão linear como ilustra a Figura 26.

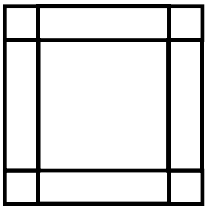


Figura 26 - Representação da Terra em termos de um quadrado

Essa versão de Leibiniz propicia proceder indutivamente do quadrado para o octógono, conforme Figura 27.

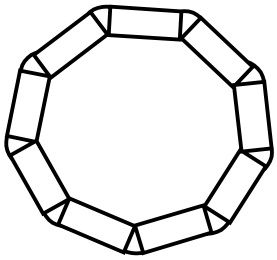


Figura 27 - Representação da Terra em termos de um octógono

Na verdade, ambas as resoluções indicam que suas idéias apontam para o fato de que o tamanho da terra não faz diferença para a quantidade extra de corda necessária, o que eventualmente resolve o problema. Mas a primeira resolveu com base em uma fórmula, enquanto a segunda criginou diretamente da linearidade.

Assim, as duas idéias, que são chamadas por Otte (2003a) de *Cur* (a idéia de curvatura) e *Lin* (a idéia de linearidade) respectivamente, parecem equivalentes com respeito ao problema em questão.

Podemos chamar a pequena distância do centro ao perímetro de: o raio desse polígono. Aumentando o raio para *h*, aumenta o comprimento do perímetro para o perímetro de um polígono regular semelhante de raio *h* (Figura 28).

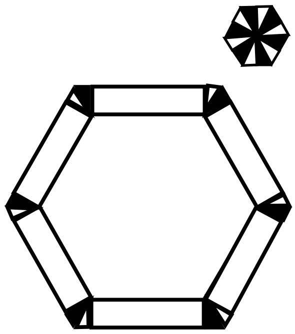


Figura 28 - Identificação de polígonos regulares semelhantes

Essa é a linearidade da função representada pela forma geométrica em si. O todo é a soma das partes: se o raio aumenta de *x* para (*x*+*h*) o perímetro aumenta de *f(x)* para *f(x)* + *f(h)*.

Temos $f(x + h) = f(x) + f(h)$ e $f(0) = 0$. O perímetro de um polígono é uma função linear de seu raio. E o princípio de continuidade fornece o mesmo resultado para o círculo.

O interessante, informou Otte (2003a), é que podemos verificar esse fato diretamente das figuras geométricas. Podemos constatar visualmente que o aumento do perímetro é novamente representado por um polígono de mesma forma. Para derivar outra, uma representação da função linear mais construtiva do que descritiva, Leibniz indicou o fato de que a forma do polígono não mudou ao colocar a corda ao redor dos postes (isto é, aumentando os raios para *h*), ou seja,

$$\frac{f(x+b)}{x+b} = \frac{f(x)}{x} = \text{constante} \;\; \text{e} \;\; y = f(x) = c \, . \, x$$

Otte (2003a) fez a ressalva de que as potencialidades da idéia *Cur* de Papert podem somente ser apreciadas quando consideramos a expressão algébrica $y = c \, . \, x$ como a nova e relevante forma. Em contraste com

Leibniz temos a mesma função linear para todos os modelos de terra (em que o perímetro pode ser qualquer curva fechada lisa sem intersecção).

O fator de proporcionalidade 1.2π produz o número de círculos completos que a ponta dos postes estende-se quando segue a curva. Assim, o valor alternativo de *c* seria *n* . 2π (*n* sendo qualquer número inteiro) e da descontinuidade da distância se entende que pequenas deformações da curva não poderiam mudar o valor de *c*.

Otte (2003a) destacou que o objeto geométrico é o campo vetorial ao longo da curva e não a curva. O número inteiro *n* é mais usualmente chamado de *índice* do campo vetorial referente à curva. O *índice* não mudaria contanto que deformações da curva não passassem por um zero do campo vetorial.

Ambas as abordagens resolvem o problema 1 e desse ponto de vista parecem equivalentes. A seguir, é apresentado um segundo problema em que constatamos que as idéias *Cur* e *Lin* não são equivalentes.

2 – Problema do epiciclóide[20]. Consideremos um pequeno círculo que gira, sem deslizar, ao redor de um círculo maior (podemos pensar neles como se fossem engrenagens). O raio do círculo maior é três vezes o tamanho do raio do círculo menor. Quantas vezes vemos o círculo menor girar?

Davis (DAVIS, apud Otte, 2003a) informou que os especialistas aparentemente raciocinam assim: se o raio do círculo maior é três vezes maior, nesse caso, o perímetro é três vezes maior. “Girando sem deslizar” significa que os comprimentos do arco serão iguais. Desde que o comprimento do arco ***s*** é o produto do raio vezes o ângulo central, o ângulo do círculo menor deve ser três vezes tão grande quanto o ângulo do círculo maior. Porém, o ângulo no círculo maior deve aumentar em 2π, logo o ângulo no círculo menor deve aumentar em $3x2\pi = 6\pi$, e o círculo menor gira três vezes. Essa resposta é errada.

Constatamos que os especialistas tentaram utilizar a idéia *Lin*, que não conduziu à resposta correta. Quais resultados a idéia *Cur* poderia produzir? Assim, substituímos o círculo maior por um quadrado.

[20] Esse problema encontra-se no livro Learning Mathematics de Robert Davis (1984).

Podemos verificar na Figura 29 que nos quatro cantos o círculo menor gira sem progredir, ao longo do perímetro da figura maior. Por substituir o círculo maior pelo quadrado somos incapazes de perceber que duas diferentes rotações são sobrepostas no movimento do círculo menor. Como ele gira em um ângulo de 90º em cada um dos quatro cantos, compreendemos que a resposta correta seria quatro vezes!

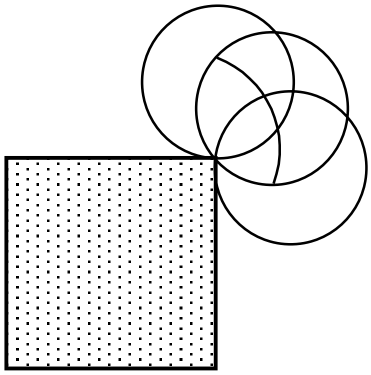


Figura 29 - Representação da rotação do círculo menor por meio da idéia *Cur*

O ponto central do círculo menor descreve um epiciclóide, que tem três "folhas" (Figura 30). Isso é o que a idéia *Lin* explicita. Os especialistas devem ter usado essa idéia e se desviaram dela porque negligenciaram a curvatura, ou seja, as duas diferentes rotações do círculo menor, que também são sugeridas por Davis.

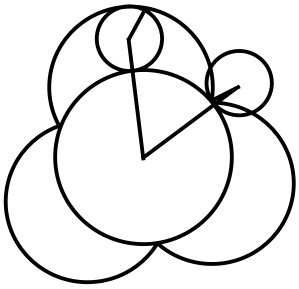


Figura 30 - Representação da rotação do círculo menor por meio da idéia Lin

Davis escreveu: Os especialistas aparentemente raciocinaram que se o raio do círculo grande é três vezes maior, então, o perímetro é três vezes maior.

Pela Figura 30, baseada na idéia *Lin* exposta anteriormente, concluímos que o círculo menor gira três vezes. Que é a resposta errada!

Otte (2003a) concluiu que, da mesma forma como na análise do problema 1 de Papert, essa apresentação do problema 2 é influenciada pelo interesse tradicional nas fórmulas. As alternativas Leibinizianas, em contraste, estão mais interessadas na estrutura relacional e nos objetos intuitivos.

Em termos da mera resolução do problema 1, não há diferença entre os dois procedimentos. No entanto, em termos gerais essa diferença é acentuada.

Caso B: O problema das Torres

Esse problema é interessante porque evidencia algumas limitações do pensamento teórico, mais precisamente, do sistema axiomático. O problema tem o seguinte enunciado:

> Há duas torres altas. Um homem parado na base da torre mais alta mede o ângulo de elevação ao topo da torre mais baixa e encontra como medida um ângulo de 40°. Ele caminha na direção da torre mais baixa e, quando chega à sua base, nota, olhando para trás, que o ângulo de elevação da torre mais alta é 70°. Porém, ele continua indo na mesma direção até perceber que os topos das duas torres estão alinhados. Essa linha está a um ângulo *q* na horizontal. A situação é representada na Figura 31, com AD e BE sendo as torres. Qual é o valor de *q*? (GOLDSTEIN, 1996, p. 80, tradução nossa).

Goldstein (1996) apresentou esse problema a vários matemáticos, dando-lhes cerca de um minuto para pensar. Eles não encontraram o valor de *q*, no entanto, indicaram qual método era aplicável ao problema. Assim, duas respostas surgiram: (i) não há informação suficiente para obter uma única solução; (ii) o problema pode ser resolvido de forma não computacional, isto é, sem utilizar tabelas matemáticas.

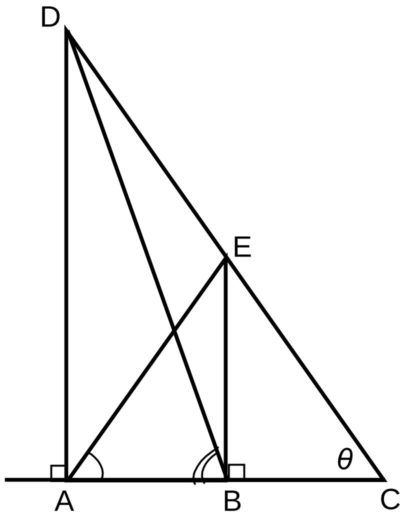


Figura 31 Representação geométrica do problema das torres

Tanto (i) como (ii) estão errados, alegou Goldstein (1996). Para explicar sua afirmação ele forneceu uma prova de que o problema não é resolvível por intermédio de métodos não computacionais e que um outro problema aberto emergirá dessa prova.

Sua prova consistiu no seguinte:

Construa uma reta EF paralela a AC, cortando AD até F. Seja o comprimento de AB indicado por *x* (Figura 32). Com base nos valores numéricos do problema, temos: AF = BE = x.tan40° e AD = x.tan70°.

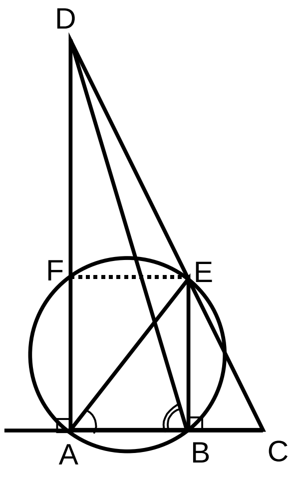


Figura 32 - Construção geométrica auxiliar para desenvolver a prova matemática

Assim, DF = AD – AF = x.(tan70° – tan40°).

Portanto, como EF = AB = x e q = FED, o valor de q é:

$q = \tan^{-1}(\tan 70° – \tan 40°) = 62{,}345°$.

Em geral, para valores inteiros de a e b, o valor de $\tan^{-1}(\tan a – \tan b)$ será não-inteiro (por causa da natureza transcendental da função tangente). Ou seja, quando BAE e ABD têm valores inteiros, q será não-inteiro. Conseqüentemente, q não pode ser obtido por métodos não computacionais.

Goldstein (1996) reconheceu que esse não era um argumento dedutivo, porém, afirmou que a prova estava convincente. Ele perguntou: Por quê? Uma de suas explicações residiu no fato de que nem todas as proposições ou verdades podem ser deduzidas.

Ele citou os cientistas da computação e suas dificuldades para formalizar o conhecimento de senso-comum na notação da lógica de primeira-ordem. Com isso, estão considerando como errônea a suposição de que grande parte da argumentação seja dedutiva.

Em síntese, Goldstein (1996) quis, com essa discussão, evidenciar que explicações matemáticas vão além do que se pode alcançar por procedimentos de provas formais. Ou seja, não é porque não conseguimos desenvolver uma prova com recursos do sistema axiomático que devemos descartar um problema, ou considerá-lo desinteressante, como opinou Hersh (1985).

Nesse sentido, Goldstein e Gowers têm a mesma opinião, já que para eles problemas abertos ou problemas combinatórios podem consistir em um campo de investigação matemática muito frutífera.

Na verdade, as duas culturas na Matemática não são excludentes e podem ser vistas como complementares. Deve haver um equilíbrio entre solucionadores de problemas e construtores de teorias.

Não devemos ter em mente apenas a resolução de um problema, sem almejar a aprendizagem de algo novo. Também não podemos nos restringir somente à construção de teorias, correndo o risco de transformá-las em teorias vazias, sem aplicações. Um matemático, mesmo preferindo a resolução de problemas, teria que apreciar o valor das idéias gerais e vislumbrar a generalização. Construir somente teorias sem resolver problemas específicos caracterizaria mais um filósofo do que um matemático.

O pensamento matemático para Gowers (2000) está associado às áreas de conhecimento em que algumas são mais propícias ao desenvolvimento de teorias gerais e outras não. Gowers (2000) apontou diferenças existentes no interior da própria matemática, ou seja, que há pensamentos distintos até mesmo entre os matemáticos puros.

A matemática foi caracterizada em seu artigo para uma complementaridade entre generalização e aplicação. Krutetskii em alguns momentos também apontou essa complementaridade. Ele fez uma pesquisa com professores e os itens indicados por eles (em 90%) como os mais importantes foram generalização e aplicação de idéias gerais, em termos de provas formais e de resolução de problemas.

Gowers (2000) elucidou a existência de duas culturas na Matemática, que estão associadas às áreas de conhecimento. Será que a diferença na forma de pensar a Matemática é algo que ocorreu recentemente? A seguir, são apresentados alguns relatos históricos que auxiliam a resposta dessa questão.

2.2. Estilos Cognitivos e a História da Matemática

Maneiras diferentes de pensar e de representar usando a Matemática não é algo contemporâneo. Isso pode ser verificado na própria evolução do conhecimento matemático. Na História da Matemática podemos encontrar certas diferenças na forma de pensar, tendo como referência a cultura, a região e o conhecimento disponível. Temos momentos em que, por exemplo, ora a Geometria ora a Álgebra guiava a construção de teorias matemáticas.

Alguns estudiosos abordaram o pensamento matemático focando a História da Matemática. Tomamos como referência as idéias expostas por Jules-Henri Poincaré (1854-1912) e Pierre Boutroux (1880-1922).

2.2.1. Poincaré e pensamentos matemáticos distintos

Poincaré fez doutorado em Ciências Matemáticas. Como professor lecionou as disciplinas de Física, Matemática, Cálculo das Probabilidades, Astronomia, Mecânica Celeste e Eletricidade Teórica.

Publicou cerca de 500 trabalhos, sobretudo em Mecânica Celeste, Física, Eletricidade e em todas as áreas da Matemática, pura e aplicada. Escreveu vários livros, dentre eles *La valeur de la science*, com primeira publicação em 1905, que é uma coletânea de alguns de seus artigos. Em 1995 foi editada uma tradução do francês para o português desse livro.

No capítulo I, denominado “A Intuição e a Lógica na Matemática”, Poincaré (1905) descreveu duas formas distintas de pensamento que os matemáticos geralmente manifestam, e que é possível constatar isso ao estudar as obras tanto dos grandes como dos pequenos matemáticos. Ele identificou entre matemáticos duas tendências opostas ou dois espíritos inteiramente diferentes, em que uns são guiados pela lógica e outros pela intuição.

Desde o início do século XIX, uma discussão acerca do contraste entre intuição e lógica no pensamento matemático havia sido proposta. Poincaré destacou que a intuição era indispensável para criar novas generalizações, produzir hipóteses férteis enquanto que a lógica e a prova rigorosa serviam para justificar e estabelecer fundamentos sólidos do conhecimento matemático.

Até recentemente, tanto na Filosofia como na Matemática dominavam o interesse no rigor e nos Fundamentos Lógicos da Matemática. Isso trouxe grande desvantagem para a Educação Matemática e para todas as teorias que centravam a atenção em como o pensamento matemático se desenvolve no ser humano.

Em sua caracterização referente às duas tendências do pensamento matemático Poincaré (1905) acrescentou que não era o assunto que os matemáticos estudavam que determinava uma ou outra tendência de pensamento, no entanto, era a própria natureza de seu espírito que os tornavam lógicos ou intuitivos, e faziam uso desse espírito quando estudavam algo novo. Ele chamou os lógicos de analistas e os intuitivos de geômetras e afirmou que uns podiam permanecer analistas mesmo quando abordavam a geometria, e outros podiam permanecer geômetras mesmo estudando “análise pura” (POINCARÉ, 1995, p. 13).

Poincaré (1905) afirmou que também não era a educação que influenciava as tendências, porque “o indivíduo nasce matemático, não se torna matemático, e parece também que nasce geômetra ou nasce analista” (Ibidem, p. 13).

Para exemplificar a última afirmação Poincaré (1905) comparou dois personagens da Ciência francesa, Bertrand e Hermite. Os dois foram estudantes da mesma escola na mesma época, tiveram a mesma educação, as mesmas influências e, no entanto, eram completamente diferentes, tanto nas obras escritas como no ensino e no modo de falar. Bertrand enquanto falava estava sempre em ação, via e buscava representar as figuras que estudava, desenhando-as por meio do gesto, agindo de forma intuitiva. Já Hermite agia como se seus olhos parecessem “fugir ao contato do mundo; não é fora, é dentro que procura a visão da verdade” (Ibidem, p. 14).

Para ilustrar as duas tendências no pensamento, Poincaré (1905) citou dois matemáticos: Méray e Félix Klein. Méray queria demonstrar que se pode sempre subdividir um ângulo. Poincaré indagou: “Quem duvidará que um ângulo pode sempre ser dividido em um número qualquer de partes iguais?” (Ibidem, p.13-14). Com base na intuição direta acredita-se que isso seja verdadeiro. Entretanto, Méray não acreditava nessa intuição. Para ele, essa proposição não era evidente e a sua demonstração ocupava muitas páginas, fundamentando-se na lógica.

Em compensação, Klein estudando uma das equações mais abstratas da teoria das funções desejava saber se numa determinada superfície de Riemann sempre existia uma função que admitia singularidades dadas. Para desenvolver esse estudo, ele substituiu a superfície de Riemann por uma superfície metálica na qual a condutibilidade elétrica variava de acordo com certas leis. Colocou dois de seus pontos ligados com os dois pólos de uma pilha. Sua hipótese era que a corrente deveria passar e a forma como essa corrente se distribuísse na superfície definiria uma função, cujas singularidades seriam aquelas que foram previstas pelo enunciado.

Poincaré (1905) comentou que Klein desenvolveu seu estudo de forma intuitiva. Mesmo não fornecendo uma demonstração rigorosa, ele se deu por satisfeito com alguma certeza moral.

Poincaré (1905) mencionou ainda os matemáticos alemães Weierstrass e Riemann que estabeleceram a teoria geral das funções. Weierstrass reduziu a Análise Matemática a um prolongamento da Aritmética, sem usar nenhuma figura em suas obras. Riemann fez uso da Geometria, e “cada uma de suas concepções é uma imagem que, uma vez compreendido seu sentido, ninguém pode esquecer” (Ibidem, p.15).

Poincaré (1905) destacou que essa diferença entre tendências é perceptível até mesmo entre os estudantes nas escolas. Alguns gostam de resolver os problemas por meio da análise, sendo incapaz, ou não necessitando de uma visualização geométrica. Outros os resolvem recorrendo à Geometria, cansando-se ou evitando muitas vezes os longos cálculos.

Apesar de diferentes ele confirmou que ambas as categorias de pensamento eram igualmente importantes para o progresso da Ciência. Tanto a análise quanto a síntese tinham um papel legítimo.

Poincaré (1905) constatou algo surpreendente, relatando que na leitura de Obras Matemáticas antigas temos a impressão que todos foram intuitivos, e “contudo a natureza é sempre a mesma” (Ibidem, p. 15). Como explicar essa impressão? Poincaré (1905) afirmou que com o passar do tempo mudanças ocorreram, porém, não foram os espíritos que mudaram, e sim a própria intuição. Ele ressaltou que para evitar as ilusões da intuição, uma evolução foi criada, começando com o rigor sendo inserido nas definições. Isso ocorreu porque durante um longo tempo, muitos dos objetos estudados pelos matemáticos eram mal definidos, exigindo grandes esforços dos lógicos.

Um dos exemplos que ele utilizou para explicar a mudança da intuição foi o da continuidade. Ele comentou que atualmente sabemos que existem funções contínuas desprovidas de derivadas. Nossos antepassados com base na intuição diriam: “É evidente que toda função contínua tem uma derivada, já que toda curva tem uma tangente” (Ibidem, p. 16).

Poincaré (1905) questionou: “Como pode a intuição nos enganar a tal ponto?” (Ibidem, p. 16). E explicou que quando imaginamos uma curva, não podemos representá-la sem espessura; assim como quando representamos uma reta, admitimos certa largura. Entretanto, essas linhas não têm espessura, e ao imaginá-las cada vez mais finas, aproximam-se do limite. No entanto, esse limite jamais será atingido. Podemos sempre representar essas duas faixas estreitas – uma retilínea e outra curvilínea – numa posição que as duas se invadam ligeiramente, sem se cruzarem. Poincaré (1905) alertou que sem o auxílio de uma análise rigorosa podemos concluir que uma curva sempre tem uma tangente. Isso conduz à necessidade de ir além da intuição, estabelecendo-se um maior rigor na Matemática.

Poincaré destacou que até 1905 a Análise se restringiu à abordagem dos números inteiros, ou sistemas finitos ou infinitos de números inteiros, conectados entre si por um conjunto de relações de igualdade e desigualdade. Assim, a Matemática foi aritmetizada e a única intuição matemática que permanece é a intuição dos números.

Ele alegou que a intuição é necessária, porém, não pode ser aquela baseada nos sentidos, tendo em vista que “os sentidos logo se tornariam impotentes” (Ibidem, p. 18).

A título de exemplo ele citou Poncelet (1788-1867) que concebeu o princípio de continuidade como sendo “O que é verdadeiro para uma quantidade real (...) deve sê-lo para uma quantidade imaginária; o que é verdadeiro para a hipérbole, cujas assíntotas são reais, é portanto verdadeiro para a elipse, cujas assíntotas são imaginárias” (Ibidem, p. 18).

Poincaré (1905) considerou Poncelet como um dos espíritos mais intuitivos deste século, entretanto, ressaltou que Poncelet não estabeleceu esse princípio respaldado no testemunho dos sentidos.

Diante disso, Poincaré (1905) afirmou que existem várias categorias de intuição: a) o apelo aos sentidos e à imaginação; b) a generalização por indução, baseada nos procedimentos das ciências experimentais; c) a intuição do número puro, que consiste no raciocínio por recorrência, e que, na sua opinião, “pode engendrar o verdadeiro raciocínio matemático” (Ibidem, p. 19).

Ele assinalou que as duas primeiras intuições não podem dar a certeza desejada, somente a terceira, por acreditar que ninguém duvidará da aritmética.

Em outro livro intitulado *A Ciência e a hipótese*, de 1902, ao discutir a natureza do raciocínio matemático, Poincaré explicou porque atribui tanta importância ao raciocínio por recorrência. Esse raciocínio possibilita resumir, em uma única fórmula, uma infinidade de silogismos. Para esclarecer, apresentamos alguns silogismos hipotéticos:

> O teorema é verdadeiro para o número 1.
> Ora, se é verdadeiro para 1, é verdadeiro para 2.
> Logo, é verdadeiro para 2.
> Ora, se é verdadeiro para 2, é verdadeiro para 3.
> Logo, é verdadeiro para 3, e assim por diante (POINCARÉ, 1984, p. 26-27).

Ele comentou que a conclusão de cada silogismo serve de premissa maior para o próximo. Essa seqüência de silogismos, que não teria fim, pode ser reduzida, isto é, as premissas maiores de todos os silogismos podem ser expressas por uma única fórmula: se o teorema é verdadeiro para n – 1, o é para n.

Podemos verificar se o teorema é verdadeiro, considerando alguns números. Por exemplo, para mostrar que é verdadeiro para o número 8, basta estabelecer os 7 primeiros silogismos. O número pode ser bem maior e ainda seria possível atingi-lo analiticamente. No entanto, por mais que se tente verificar a veracidade de um teorema com casos particulares, jamais se chegará ao teorema geral, aplicável a todos os números, já que para isso seria necessário “transpor um abismo que a paciência do analista (...) não conseguiria nunca transpor” (Ibidem, p. 27).

Diante disso, Poincaré (1902) afirmou que o raciocínio por recorrência é o único instrumento que possibilita uma passagem do finito para o infinito, pois dispensa verificações extensas e monótonas, que se tornariam impraticáveis. Devemos acrescentar que o princípio da recorrência não é um princípio lógico, pois na lógica de primeira ordem o número de premissas precisa ser finito (princípio da compacidade da lógica clássica).

Outro ponto discutido por Poincaré (1905) se refere à realidade, em que todos buscam conhecê-la. Ele perguntou: E o que é a realidade?

Para responder a essa indagação ele repousou sua reflexão na demonstração, levantando outras perguntas: Na Matemática, quando um lógico desenvolve uma demonstração por meio de uma série de operações elementares e alguém examina cada passo e conclui que todos estão corretos, isso garante a verdadeira compreensão da demonstração? O fato de conseguir pela memória reproduzir uma demonstração na seqüência correta é sinônimo de compreensão?

Poincaré (1905) respondeu que isso não garante o conhecimento da realidade por completo. Afirmou que a Análise Pura fornece uma quantidade de procedimentos diferentes e confiáveis, no entanto, indagou, qual deles é o melhor? Quem nos dirá qual deles escolher?" Ele relatou que é a intuição que pode nos guiar, ela "é necessária ao explorador para que possa escolher sua rota". E concluiu que "a lógica e a intuição têm cada uma seu papel necessário. Ambas são indispensáveis" (POINCARÉ, 1995, p. 22-23).

A lógica é o instrumento da demonstração e a intuição é o instrumento da invenção.

Poincaré (1905) comentou que os analistas também são inventores, porém, não utilizam a intuição baseada nos sentidos e na imaginação e sim, na intuição de número puro e das formas lógicas, alegando que é essa intuição que permite não só demonstrar, mas também inventar. Ele alegou que o matemático não deve deixar de ser intuitivo, contudo, deve saber usar essa intuição.

2.2.1.1. Discutindo algumas idéias de Poincaré

Poincaré (1905) foi o primeiro a distinguir, desse ponto de vista, duas categorias de matemáticos, de acordo com o processo predominante no pensamento matemático. No entanto, não está correto considerar como sinônimos os conceitos do estilo intuitivo e estilo geométrico, como fez Poincaré (1905), embora com reservas. Ele mesmo reconheceu que os antigos parecem ser intuitivos, mas foram analistas. Para ele, intuição se apresenta de modos diferentes. Como um processo quase inconsciente, de captação imediata de conexões essenciais e relações, e como um processo relacionado a componentes pictóricos para conceitos espaciais. Esses dois esquemas poderiam ter sido bem separados.

Ao lermos o primeiro capítulo de Poincaré (1905) verificamos uma contradição, pois num primeiro momento, ele afirmou que era a própria natureza do espírito que tornava os matemáticos lógicos ou intuitivos e, num segundo momento, ele mesmo se surpreendeu declarando que ao lermos as obras dos antigos tendemos a classificá-los como intuitivos, embora muitos dos geômetras foram analistas. A título de exemplo ele citou Euclides que desenvolveu uma estrutura científica em que seus contemporâneos, a princípio, não poderiam encontrar defeito. Euclides axiomatizou a geometria e, por isso, foi considerado um lógico.

Por que a Geometria foi utilizada por Poincaré (1905) para esta comparação? Porque na Antiguidade a Matemática era reduzida essencialmente à Geometria, ou seja, a Matemática se referia às teorias geométricas. Até o Renascimento a Aritmética era uma arte prática. Somente a Geometria era realmente uma arte filosófica.

Ele também mencionou Poncelet classificando-o como “um dos espíritos mais intuitivos deste século” (POINCARÉ, 1995, p. 18). Nessa afirmação ele não quis afirmar que alguns usam de intuição e outros não.

Poncelet foi um matemático moderno que forneceu grandes contribuições no campo da geometria projetiva. Não tratava da aritmetização da Geometria, ao contrário, quis criar uma geometria anti-cartesiana. Grassmann também. Eles explicitamente afirmaram que o que Descartes fez, substituindo objetos geométricos por fórmulas aritméticas ou algébricas, foi esconder o caráter do pensamento geométrico, destruindo a relação entre o método e o objeto na área da Geometria.

Parece um paradoxo o fato de alguém ser ao mesmo tempo intuitivo e moderno. Poncelet admitia que precisamos da intuição, porém, de uma intuição das relações e não a intuição referente aos objetos, como na Antiguidade. Na Geometria de Poncelet não existiam objetos, somente estruturas relacionais. Por isso sua teoria foi a primeira fonte para a axiomática moderna e objetivava a construção de teorias. Na axiomática antiga, tinham-se os objetos e depois as características, e as relações entre os objetos eram descritas por meio dos axiomas. Na axiomática moderna, temos a estrutura das relações.

Poncelet foi engenheiro e, em virtude da profissão, fazia uso de aplicações da Matemática. Se considerarmos que a intuição está relacionada com a aplicação, e a resolução de problemas é uma forma de aplicação, nesse caso, Poincaré tinha razão ao considerar Poncelet um intuitivo.

Constatamos que pessoas como Poncelet, Grassmann e Hilbert são considerados modernos por destacar a importância do pensamento relacional e das estruturas axiomáticas, enquanto pessoas como Poincaré e outros, que se dedicaram à aritmética, trabalham da mesma forma como os antigos, apenas mudaram de campo, ou seja, da Geometria para a Aritmética.

Como Poincaré resolveu essa contradição? Ele mantinha a posição de que a natureza era sempre a mesma, ser um matemático lógico ou intuitivo é inerente ao sujeito. As Obras Matemáticas antigas nos induzem a pensar que todos parecem intuitivos, quando na verdade foram analistas, isso sugere que as obras e a interpretação do leitor são os responsáveis por tal contradição.

Otte (1993, p. 304), quando discutiu em seu livro intuição e lógica em Matemática, de certa forma contrapôs Poincaré (1905) quanto à questão da natureza. Otte (1993) mencionou que os matemáticos não são formados só pela natureza, e sim, pela história cultural e social, pelo desenvolvimento da Matemática, pelas experiências com a atividade matemática e pelo conteúdo envolvido.

Como o pensamento não muda nem um pouco quando o conteúdo muda? Como imaginar um pensamento sem conteúdo? É difícil imaginar que não existe uma conexão direta entre pensamento e conteúdo, tendo em vista que qualquer mudança no conteúdo implica conseqüentemente numa mudança na maneira de pensar.

O próprio Poincaré (1905), com o exemplo da continuidade, evidenciou que, até um determinado momento, se acreditava que toda função contínua tinha uma derivada porque toda curva tem uma tangente. A análise provocou uma mudança na intuição e na forma de conceber o conteúdo matemático e, com isso, influenciou o pensamento, pois se descobriu que a intuição não dava conta de explicar esse fato matemático.

A história é produzida pelo homem, e assim, o desenvolvimento influencia o pensamento dos sujeitos. O estilo e as obras das pessoas contribuem para o desenvolvimento da Ciência e, conseqüentemente, da Matemática e, nesse sentido, são objetivamente importantes.

Para justificar essa idéia tomamos como referência Otte (1993), que comentou a posição da Filosofia marxista. Seguidores dessa Filosofia afirmavam que “os grandes homens, que formaram os núcleos históricos para profundas mudanças sociais ou invenções, são, num certo sentido, irrelevantes para as modificações que desencadearam”, pois se acredita que alguém deverá tomar a iniciativa, não importando quem (OTTE, 1993, p. 76).

Em contraposição, Otte (1993) assegurou que, na verdade, importa quem começa uma tendência, e para exemplificar citou os cientistas Wallace e Darwin, escrevendo que:

> Se tivesse sido Wallace em vez de Darwin, teríamos hoje uma teoria da evolução bem diferente. Todo o movimento da cibernética poderia ter ocorrido cem anos mais cedo, em virtude da comparação de Wallace entre a máquina a vapor como regulador e o processo da seleção natural (Ibidem, p. 76).

Esses argumentos podem exemplificar o fato de que estilos cognitivos e formas de representação não são apenas características psicológicas de pessoas, mas influenciam a evolução histórica da Ciência e do conhecimento. Eles podem ainda explicar o fato de hoje em dia a maioria das pessoas serem analistas, enquanto que antigamente se tinha a maioria como intuicionista. Muitas pessoas tiveram acesso à escola e isso pode influenciar na forma de pensar, tendo maior predominância o processo analítico. A realidade da Matemática é a atividade práxis e os estilos cognitivos são aspectos ou etapas dessa atividade.

Poincaré (1905) mencionou que a Matemática foi aritmetizada. Mas por que surgiu a aritmetização? Ele informou que como a intuição não era suficiente para o desenvolvimento da Matemática estabeleceu-se um rigor, e isso deu origem à aritmetização da Matemática.

Temos assim dois movimentos marcantes na História da Matemática, a aritmetização e a axiomatização, criando um contraste. A axiomatização se baseia em premissas (proposições que se admitem como verdadeiras), geralmente não formalizadas logicamente, no entanto, utilizadas para se deduzir uma teoria ou um sistema lógico ou matemático. E a aritmetização se utiliza dos objetos, que são os números estabelecidos por relações e propriedades.

O que significa estilo axiomático e estilo aritmético? No axiomático pensa-se de forma lógica se $\Rightarrow$ então, seguindo-se um método. E no aritmético utiliza-se o pensamento numérico, a intuição ou experimentação.

Para Otte (1993) a aritmetização envolve dois aspectos:

> 1) a atitude de transformar uma propriedade intuída ou observada de um objeto numa definição daquele objeto;
> 2) somente aquelas definições que tinham significado real poderiam, em última instância, ser manipuladas em termos aritméticos (Ibidem, p. 306-307).

A primeira axiomatização foi feita por Euclides (330 a.C-260 a.C) e a segunda foi feita por Peano (1858-1932), na segunda metade do século XIX. Existia muita controvérsia no que se refere à axiomatização.

Por exemplo, as análises de Hilbert (1862-1943) foram estimuladas exatamente porque a lógica apresentada na axiomática de Euclides parecia defeituosa. Os axiomas são os fundamentos para a Matemática e os teoremas são derivados dos axiomas. Isso era verdadeiro para Euclides, pois ele distinguia axioma de teorema, já Hilbert não fazia tal distinção. Porém, isso não pode ser interpretado como se Euclides aceitasse coisas intuitivamente que atualmente deveriam ser analisadas.

Em 1879, Peano estabeleceu os axiomas, admitindo três conceitos primitivos: número natural, zero e sucessor, relacionados entre si por cinco axiomas. Otte (2001) explicitou os 5 axiomas de Peano como sendo:

> (1) 0 é um número.
> (2) O sucessor de qualquer número é um número.
> (3) Dois números não têm o mesmo sucessor.
> (4) 0 não é sucessor de nenhum número.
> (5) Qualquer propriedade que pertence a 0, e também ao sucessor de todo número que possui a propriedade, pertence a todos os números (OTTE, 2001, p. 18, tradução nossa).

A estrutura dos axiomas dá uma teoria acerca dos números. Os axiomas fornecem relações por meio de propriedades. Porém, a crítica que normalmente se faz é que os axiomas não são suficientes para explicar o que é exatamente um número.

Quando desejamos construir uma teoria, buscamos um teorema mais importante, levantamos as premissas. Assim são escolhidos os axiomas atualmente, os que servem para deduzir todos os teoremas de uma teoria. É no sentido do instrumentalismo.

Poincaré (1905) não é o único que se posiciona contra a análise e a identifica com o método axiomático. Russell (1954) tem opinião similar a ele, na medida em que alega que a teoria axiomática sozinha não oferece descrições completas no campo dos objetos.

Ambos consideram o pensamento axiomático ou o pensamento relacional insuficiente para caracterizar os números, porque os axiomas não dizem o que é um número. Na opinião deles, número é uma coisa absoluta e não relacional.

Na axiomática, se há apenas as estruturas das relações, não se tem uma escala absoluta. Como podemos medir uma mesa em termos de centímetros, polegadas e outras medidas? A estrutura será a mesma, apenas a unidade de medida se diferenciará. Nesse caso, o valor que representa a mesa será diferente.

Russell (1954) (RUSSELL apud OTTE, 2001), para sua reflexão crítica, também tomou como exemplo os axiomas de Peano, e sugeriu que em vez de estabelecer “0”, “número” e “sucessor” como termos dos quais sabemos o significado, mesmo não podendo defini-los, podemos deixá-los representarem quaisquer três termos que verifica os cinco axiomas de Peano. Assim, eles seriam variáveis.

A abordagem axiomática expressa a aritmética não sobre coisas existentes no sentido concreto, e sim sobre relações gerais ou objetos ideais. Russell (1954) criticou que isso não permite que saibamos como aplicar o sistema formal e sua explicação baseou-se em dois motivos. Primeiro, não permite saber se há alguns conjuntos de termos que verificam os axiomas de Peano. Segundo, desejamos que os números sejam utilizados para contar objetos comuns, e isso exige que os números tenham um significado definido e não somente certas propriedades formais.

Russell (1954) concordou com a definição de número dada por Frege, em que:

> (...) termos primitivos são substituídos por estruturas lógicas, em que é necessário provar que eles satisfazem as cinco proposições primitivas de Peano. Esse processo é essencial para relacionar aritmética com lógica pura (...) (OTTE, 2001, p. 19, tradução nossa).

A Lógica é interpretada de um modo totalmente realístico.

Essas declarações sugerem que tanto Poincaré como Russell se preocupavam com aplicações da Matemática e esse fato pode ser associado com a atitude de matemáticos que se interessam por resolução de problemas.

A diferença entre Russell e Poincaré se refere a uma mudança de intuição. Russell considerava a intuição da estrutura e Poincaré a intuição do número puro.

O assunto realmente não é mais se é intuição ou não, e sim, se é pensamento relacional ou não. Pensamento relacional se refere às relações entre os objetos, já o pensamento instrumental ao o que posso fazer, ou como aplicar. Resolver um problema tem um sentido instrumental porque há uma preocupação com a aplicação de conhecimentos, de métodos, etc. Na modernidade, temos um novo entendimento da axiomática. A Matemática foi aritmetizada.

Quando Poincaré (1905) apresentou três intuições diferentes ele alegou que somente a terceira garante a certeza. No entanto, devemos ressaltar que ela também não garante a certeza, como revelou a aritmética não-standard de Skolem, na qual ele investigou o que aconteceria se o 5º axioma de Peano fosse desconsiderado. Verificou que nesse caso obtemos um outro resultado, chegando a uma outra categoria de número.

A análise não-standard introduziu os números infinitos, aumentando a quantidade dos números naturais, ou seja, os números naturais acrescidos de funções, como verificamos abaixo:

$$1, 2, 3, 4, ..., \omega, \omega + 1, \omega + 2$$

Skolem evidenciou que existem estruturas aritméticas diferentes.

O 5º axioma de Peano é semelhante ao axioma das paralelas de Euclides, pois temos implícita a questão dos infinitos. Assim, existe um paralelismo entre a Geometria e a Aritmética, tendo em vista que na Geometria também ocorreu situação semelhante à da Aritmética. A mudança na interpretação do axioma das paralelas de Euclides conduziu a uma concepção diferente da Geometria, dando origem às Geometrias não-euclidianas.

Os axiomas, na verdade, também não garantem essa certeza tão desejada, pois eles podem ser interpretados de diferentes maneiras, resultando em teorias diferentes. Esse paralelismo depõe contra a opinião de Poincaré, que acreditava que a intuição pudesse auxiliar na busca da certeza.

Poincaré (1905) afirmou que houve mudança na intuição e não no espírito humano. No entanto, o que mudou foi o fundamento da Matemática.

Antigamente a Matemática era concebida como um conhecimento que vinha do exterior. Por isso a Geometria foi, durante muito tempo, considerada como o método mais apropriado, porque ela abordava o espaço físico, sendo o reflexo de aspectos do mundo externo. No entanto, isso pode nos enganar, pois nem sempre podemos perceber tudo do mundo. Além disso, as pessoas têm percepções diferentes do mesmo aspecto exterior.

Atualmente, a Matemática é concebida como a expressão do pensamento do homem, um conhecimento interno, um reflexo das estruturas mentais. Hoje, o que importa são os números e a aritmética, de onde as teorias derivam, e que para Poincaré o fundamental é a intuição do número puro.

Em síntese, Poincaré (1905), quando elucidou dois pensamentos matemáticos distintos, oscilou entre associá-los à natureza das pessoas e às épocas da História da Matemática (mudança da intuição). Parece que ele admitia que o pensamento matemático não se restringia apenas a um aspecto.

Não foi somente Poincaré (1905) que discutiu o pensamento matemático. Boutroux e sua análise histórica sobre a mudança no pensamento matemático foram motivos de interesse no próximo item desta Tese.

2.2.2. Boutroux e pensamentos matemáticos na História

O francês Pierre Boutroux (1880-1922), filho do famoso filósofo da Ciência Emile Boutroux e sobrinho de Henri Poincaré, descreveu formas de pensamento distintas tendo como parâmetro a História da Matemática, ou seja, o desenvolvimento da Matemática.

Em seu livro *L'idéal Scientifique des Mathématiciens*, publicado em 1920, mais precisamente no capítulo IV, identificou dois pontos de vista, ou duas tendências distintas, que se fizeram presentes no desenvolvimento do pensamento matemático. Ele, pensando em termos conceituais, fez uma categorização de diferentes estilos matemáticos, tomando como parâmetro a História da Matemática.

Para sua análise, Boutroux (1920) considerou o período compreendido entre a Antiguidade grega e o século XIX e o dividiu em três partes:

a) Platão (429-348) – Euclides (c. 330 a.C-260 a.C);
b) Descartes (1596-1650) – Leibniz (1646-1716);
c) Bolzano (1781-1848) – Cantor (1845-1918), que são representantes da Matemática Moderna do início do século XIX.

Embora tenha identificado esses três períodos, Boutroux agrupou (a) e (b), por considerar que ambos se dedicaram à Matemática sintética e eram regidos por uma harmonia pré-estabelecida entre objeto e método. E os distinguiu de (c) por uma ruptura na forma de desenvolver a Matemática, ou seja, uma quebra na harmonia entre objeto e método.

A ruptura na História da Matemática, que ocorreu no início do século XIX, foi caracterizada por Boutroux (1920) com base em dois eventos (BOUTROUX apud OTTE, 2003c, p.13-14):

a) A Matemática passou de uma Ciência sintética para uma Ciência analítica, baseando-se apenas no pensamento conceitual.

b) Houve a quebra da harmonia entre os meios e os objetos da Matemática.

Em Euclides e Descartes havia harmonia entre objeto e método, porém, eram atribuídos pesos distintos.

A ruptura entre objeto e método foi causada pela aritmetização da Matemática, que é a principal característica da Matemática Moderna. A aritmetização pensa em termos de objeto, que são os números e as suas propriedades, e a axiomatização pensa por meio do método. Antigamente havia uma maior unidade entre método e objeto ou representação. Hoje a Matemática perdeu essa unidade.

Para entender melhor a trajetória do pensamento matemático, quais mudanças ocorreram e os fatores que as provocaram, Boutroux (1920) resgatou a concepção de Ciência da Antiguidade.

Ele informou que antes, o sábio se restringia a fazer constatações. Para Platão, o sábio não observava em volta de si apenas com seus olhos – a visão não permite atingir os objetos sensíveis satisfatoriamente – porém, utilizava a visão intelectual que possui o entendimento e que lhe possibilita apreender as verdades matemáticas essenciais. Dessa forma, são identificadas as propriedades harmoniosas do mundo dos números e das figuras, tais como as grandezas mensuráveis, em que se efetua a síntese da quantidade e da figura, a reunião da Aritmética com a Geometria.

No entanto, a Ciência tida como *contemplativa* sofreu alteração, provocada pela difusão da Álgebra, e passou a ser uma Ciência *construtiva*, dando origem a um método e um ponto de vista completamente novos.

Depois dessa alteração, a tarefa do matemático mudou, explicou Boutroux (1920). Partindo de elementos simples, de associações cada vez mais complexas ele construía a edificação da Ciência. Ele não se preocupava em interpretar e utilizar as teorias elaboradas, ficando esse aspecto sob responsabilidade dos práticos. O matemático da escola algebrista atribuía menos valor às teorias construídas e aos resultados obtidos do que ao método utilizado. Sua intenção não era conhecer os fatos novos, e sim aumentar seu poder criativo e seus meios de construtor, aprimorando cada vez mais seus processos.

Boutroux (1920) destacou que os próprios progressos da Matemática algébrica não deixariam de originar certas dificuldades e de conduzir a uma reação. Uma das maiores dificuldades foi a resolução de equações. Mesmo antes que essa Matemática concluísse o desenvolvimento de seus métodos e que a edificação da Ciência fosse estabelecida em bases lógicas rigorosas, um desconforto fez tendências novas se manifestarem.

A concepção algebrista tinha como norma que a Matemática ideal se reduziria a uma síntese algébrico-lógica, conduzida por regras arbitrárias. Contudo, os matemáticos do fim do século XIX não puderam mais aceitar tais normas.

Por outro lado, o matemático não conseguia construir no vazio, no fundo ele vislumbrava que suas teorias fossem aplicáveis à Geometria e à Física, salientou Boutroux (1920). Contudo, essas Ciências exigiram do sábio o estudo de relações matemáticas que não podiam ser reduzidas às combinações algébricas. E para justificar e hierarquizar as teorias, assim como discutir as hipóteses vinculadas às teorias, para aperfeiçoá-las e enriquecê-las era preciso utilizar outras operações do espírito que ultrapassassem a pura e simples combinação lógica.

Diante da viabilidade de se construir Ciências fictícias infinitamente diversificadas, pautadas nas definições e nos postulados arbitrários, uma escolha deveria ser feita entre as inumeráveis construções que se podia desenvolver. Assim, no trabalho do matemático, que era composto por *seleção das idéias* e *demonstração*, a primeira adquiria maior importância em relação à segunda, acrescentou Boutroux (1920).

Constatamos que a concepção sintética da Matemática perdeu o caráter de absoluta e Boutroux (1920) comentou que para saber se essa concepção foi substituída por outra e se novas idéias, novos princípios de pesquisas foram estabelecidos, era necessário analisar o aspecto atual da Ciência Matemática [vigente na década de 1920].

Para tanto, ele ressaltou que o que chama a atenção quando se compara a Matemática até 1920 com a de épocas anteriores é a grande diversidade e o aspecto inesperado dos caminhos e dos desvios em que essa Ciência se engajou, bem como a desordem aparente na qual ela caminhou. Boutroux (1920) acentuou que a bela unidade que Euclides deu à geometria e que Descartes conferiu à álgebra, parece não ter chance de ser preservada.

Com o objetivo de ilustrar essa diversidade, Boutroux (1920) utilizou a impressão de um não matemático acerca da Matemática. Ele comentou que quando um observador do movimento científico de hoje analisa uma obra de um matemático ele não procura observar a harmonia dos resultados, nem a segurança e a simplicidade do método, e sim a engenhosidade, a flexibilidade que o autor a todo instante utiliza para atingir seus fins. Na Matemática contemporânea não temos mais métodos fixos, porém, temos uma gama infinita de pontos de vista.

Boutroux (1920) destacou que o matemático provavelmente desenvolveu seu estudo com a preocupação de chegar a resultados interessantes, fecundos e obter sucesso. Porém, ele alertou que se nos restringirmos ao domínio da Análise Pura o sucesso pode não ser satisfatório. Diante disso, o matemático deve dirigir sua atividade, reportando-se à sua intuição, esperando que ela lhe indique novos caminhos. A invenção, nas Ciências de uma forma geral, consiste na descoberta de um ponto de vista novo para classificar e interpretar os fatos.

Diante da possibilidade de construir infinitas teorias tendo inúmeras direções a percorrer, o matemático moderno não podia mais olhar a Ciência como o resultado puro e simples de suas construções, como fazia o algebrista do século XVII. Seu trabalho adquiriu uma fisionomia que se diferenciava das “especulações dos antigos geômetras e dos algebristas” (BOUTROUX, 1920, p. 193, tradução nossa).

Boutroux (1920) afirmou que há semelhança entre a concepção grega da Matemática e a concepção contrária dos algebristas sintéticos. Ambas supõem uma harmonia pré-estabelecida entre o objeto e o método da Ciência Matemática, ou seja, entre os objetos que ela persegue e os procedimentos que permitem atingir esses objetos.

Nesse caso, na Geometria euclidiana, as mesmas propriedades que eram procuradas enquanto fins, como belas e harmoniosas, faziam também o papel de intermediárias “conduzindo às propriedades mais distantes; todo teorema era, às vezes, um objeto e um instrumento de pesquisa” (Ibidem, p. 193, tradução nossa).

Na Matemática contemporânea essa harmonia desapareceu quase que completamente, informou Boutroux (1920). E explicou que é porque quando se propõe um problema é quase impossível prever quais são os processos que permitirão resolvê-lo. Por outro lado, qualquer ruptura que haja no mecanismo de sua arte, o matemático não identifica explicitamente quais são os problemas nos quais pode aplicar essa arte. Temos assim, o que Boutroux descreveu como:

> esse não é necessariamente o mesmo homem que é, na Matemática, um inventor original e um habilitado técnico; as qualidades que fazem de um inovador perspicaz, capaz de descobrir, e de outro um mestre da demonstração, acabaram, parecem eles, ser os mesmos (Ibidem, p. 194, tradução nossa).

Devemos fazer uso do aparelho demonstrativo, porém, ele fornece um ponto de vista parcial dos fatos que a Matemática persegue, sendo necessário não se limitar a ele, completou Boutroux (1920).

Quando discutiu a objetividade dos fatos matemáticos, Boutroux (1920) afirmou que sob as fórmulas e deduções matemáticas estão implícitas noções objetivas, contudo, essas noções não são de origem exploratória.

Ele comentou que o pensamento dos matemáticos não recebeu muita influência das doutrinas que se fizeram presentes na história da humanidade, como, por exemplo, a doutrina empirista. Porém, o mesmo não ocorreu com as idéias filosóficas.

Boutroux (1920) relatou que os fundadores da Ciência grega sempre procuravam se manter afastados do empirismo. A mesma atitude se fez presente em Descartes e Leibniz. Os algebristas puros tinham como principal preocupação seguir os princípios de sua arte, se desprendendo da natureza dos elementos que eles combinavam e, com isso, não se caracterizavam nem como empiristas e nem como pertencentes às doutrinas contrárias.

No final do século XIX, alguns matemáticos com tendências filosóficas discutiam aspectos da origem das noções matemáticas com enfoque científico rigoroso, como uma forma de negar a doutrina dos empiristas.

Boutroux (1920) fez algumas considerações:

- as noções matemáticas não são provenientes no mundo sensível e não são um produto da abstração pura;
- as proposições matemáticas não seriam vistas como objetivas, pois nenhuma experiência física poderia revelar a verdade ou a falsidade de seus postulados.

No entanto, reconheceu que isso não significa que a Ciência Matemática seja independente da experiência, uma vez que, de acordo com Poincaré, a maioria das teorias matemáticas seria concebida por reflexões de origem experimental. Entretanto, para Boutroux (1920) isso não é uma questão de necessidade, porém, ocorre por motivos acidentais.

Boutroux (1920) reconheceu que no intuito de se construir uma Matemática que fosse aplicável a outras ciências e que estivesse em consonância com as condições do conhecimento humano, era preciso, diante de uma diversidade de sistemas de postulados teoricamente possíveis, fazer escolhas. E essas escolhas eram conduzidas pela experiência dos sentidos. No entanto, Boutroux (1920) afirmou que não era essa escolha que fornecia aos postulados e às noções da Ciência um caráter de objetividade.

Ele relatou que a doutrina pragmatista tentava explicar o papel da escolha na edificação das teorias matemáticas e era em função de uma “série de escolhas sucessivas entre várias construções possíveis que obteríamos uma Ciência adaptada às nossas necessidades práticas” (Ibidem, p. 199, tradução nossa).

Boutroux (1920) salientou que essa explicação não abrange todos os casos, bastando pensar nas condições nas quais repousa a escolha do matemático, tendo em vista que essa escolha intervém tanto na determinação das definições e dos postulados, como nas teorias as mais derivadas e as mais elevadas da Matemática – aquelas cujo caminho a percorrer é mais incerto.

Instaura-se assim um conflito quando se pretende estabelecer uma Ciência “cômoda” e “adaptada” às necessidades, apontou Boutroux (1920). Cômoda e adaptada não na visão atribuída pelos pragmatistas, porém, cômoda no sentido de estar em conformidade com nosso espírito e bem adaptada às condições nas quais se exerce a atividade intelectual matemática.

Boutroux (1920) alegou que apesar do esforço do matemático em tentar constituir uma Ciência cômoda, ela não era suficiente, e que o método matemático melhor adaptado às necessidades intelectuais era o da álgebra. Em sua opinião, existe uma "contradição entre as exigências desse método e algumas especulações que se impõem ao espírito do matemático", provocando assim um conflito (Ibidem, p. 201, tradução nossa).

Ele considerou a existência de fatos matemáticos sendo independentes da construção científica e para justificar isso escreveu que:

> O fato matemático é independente do vestuário lógico ou algébrico sob o qual buscamos representá-lo: de fato a idéia que temos é mais rica e mais plena que todas as definições que podemos dar, que todas as formas ou combinações de signos ou de proposições pelas quais nos é possível exprimir. A expressão de um fato matemático é arbitrária, convencional. Em compensação, o fato em si, quer dizer a verdade que ele contém, se impõe ao nosso espírito alheio de toda convenção (Ibidem, p. 203, tradução nossa).

Diante disso, Boutroux (1920) afirmou que as fórmulas algébricas e as combinações lógicas não eram suficientes para abarcar o objeto na sua totalidade. Eram apenas uma linguagem que traduzia um conjunto de noções e de fatos objetivos.

Constatamos, de forma marcante, a caracterização de estilo cognitivo quando Boutroux comentou que os algebristas e os lógicos estão certos ao ver a Matemática como um sistema algébrico-lógico, pois é dessa maneira que se apresentam as teorias já construídas. E, como conseqüência, é sob essa forma que se tem destinado esforços para exprimir os fatos novos que são incorporados na Ciência. Temos uma influência do sistema algébrico-lógico nos trabalhos dos matemáticos, numa tendência que se configura pela experiência.

De acordo com Boutroux (1920), a beleza e a solidez de uma teoria eram reconhecidas pela simplicidade e precisão das definições e dos postulados e pela seqüência rigorosa e bem ordenada das deduções e das construções. Mas ao estudarmos os fatos matemáticos, descobrimos que eles são totalmente indiferentes à ordem na qual são obtidos. Ele destacou que para conhecê-los era necessário empobrecê-los, no sentido de olhá-los parcialmente. Isso significa que os fatos matemáticos não poderiam ser expressos na sua totalidade por meio da linguagem algébrico-lógica, o que reforça sua opinião exposta acima.

Boutroux (1920) acrescentou que para inserir a realidade matemática (fatos matemáticos) no modelo algébrico-lógico era preciso esculpí-la, dividí-la, conformar-se em penetrá-la parcialmente e sob um determinado ângulo, até mesmo em retomá-la de um outro modo. Como conseqüência, temos a variabilidade, a indeterminação, o aspecto sempre provisório das teorias. Um fato matemático só poderia ser compreendido completamente, se pudesse ser abordado por uma infinidade de pontos de vistas diferentes e multiplicar, sem limites, o número de combinações algébrico-lógicas possíveis.

Com base nessa concepção, o ponto de vista do sábio tendia a se distanciar do ponto de vista sintético dos lógicos e algebristas, completou Boutroux (1920). O matemático desenvolvia seu trabalho vislumbrando sempre obter uma síntese. No entanto, isso deixava de ser o ponto central nas preocupações do sábio, considerando que o que era tido como primordial no trabalho de descoberta era a *análise*.

Essa alteração implica numa mudança de atitude do matemático e Boutroux (1920) revelou isso quando relatou que desde o século XV ou XVI o matemático foi especialmente um construtor, um generalizador. Porém, agora ele tornou-se um estruturador, que analisa, de forma semelhante ao químico, uma matéria desconhecida, infinitamente complexa.

Boutroux (1920) continuou sua comparação tendo o século XIX como o marco para a mudança. Antes, o que interessava ao matemático eram as demonstrações, os processos e os sucessos do cálculo. Os resultados e as combinações alcançadas podiam diferir em todos os sentidos e serem infinitas. Para a Ciência, bastava haver uma unidade no método.

Depois, o interesse do matemático estava centrado no resultado e era o que dava à obra sua unidade. Os artifícios da demonstração eram apenas os trabalhos de arte sem os quais, parece que não se sabia perseguir.

Boutroux (1920) ressaltou que há certa similaridade entre a concepção atual [até 1920] e a dos gregos (de Platão e dos geômetras contemplativos da Grécia). Porém, existe, entre nossas concepções e a dos pensadores gregos, uma diferença fundamental.

Para os Gregos, a Ciência Matemática era antes de tudo una e harmoniosa, esclareceu Boutroux (1920). A dualidade que se vê hoje, a oposição da matéria e da forma, na qual repousa a presente idéia de objetividade, não poderia ser admitida pelos antepassados. E o sistema de Euclides, tende a fazer deduzir o acordo que reina entre as verdades perseguidas pelos matemáticos e os meios empregados para atingi-las. Dessa forma, para os Gregos, as noções matemáticas estudadas eram as imagens fiéis das idéias que elas representavam. Assim, para orientar seus trabalhos numa boa direção, o matemático tinha apenas que pesquisar o que era simples e o que era belo.

Em contrapartida, entre os modernos – que não acreditavam mais em uma harmonia pré-estabelecida entre a matéria e a forma das teorias – o trabalho do pensamento matemático adquiriu uma característica diferente. O objetivo era de apreender, de forçar um objeto que resistia. Com isso, a preocupação central não era fazer uma obra “bela”, e sim perseguir o resultado desejado, empregando para isso os meios e os artifícios mais variados.

Boutroux (1920) acentuou que a pesquisa científica não seria mais uma contemplação passiva, ao contrário, seria uma indústria ativa, “utilizando todos os procedimentos que os progressos dos métodos algébricos e lógicos venham colocar à disposição do matemático” (Ibidem, p. 213, tradução nossa).

Para Boutroux (1920), a Matemática Moderna passou a ser tão ampla, tão complexa que se tornou desprovida de representações, ou seja, não havia mais ligação entre objeto e representação. A construção de teorias era permeada por uma variabilidade, por uma indeterminação e possuía um aspecto sempre provisório.

Em outras palavras, no pensamento moderno há uma flexibilidade de troca de representação. Símbolos têm um sentido fixo e os objetos têm suas expressões semióticas variadas.

Com o intuito de exemplificar essa mudança tomamos como referência Otte (1993) que apresentou a necessidade da Matemática avançar com as concepções predominantes até o século XVII e assim resolver “a conexão entre o conceito de função e sua representação simbólica ou descrição estrutural” (OTTE, 1993, p. 231).

Otte transcreveu o que Lobatschewsky (1793-1856) escreveu no ano de 1834 acerca desse assunto, como se segue:

> A definição geral exige que uma função de x seja um número para cada x dado, e que ela varie progressivamente com x. O valor de uma função pode ser dado por uma expressão analítica, ou por uma condição que forneça um meio de verificar todos os números e escolher um entre eles; finalmente pode existir a dependência, mas permanecendo todavia desconhecida (Ibidem, p. 231).

Otte (1993) acrescentou que nessa descrição definitória, embora aparentemente supérflua, devemos destacar “a enumeração das diferentes modalidades, pelas quais uma correspondência funcional poderia ser dada” (Ibidem, p. 231). Ou seja, evidenciamos uma heterogeneidade e pluralidade que norteiam a “formação do conceito abstrato-teórico de função pelo processo de definição por abstração” (Ibidem, p. 231-232).

O que Poincaré e Boutroux têm em comum? Ambos discutem a intuição na Matemática. Poincaré (1905) acredita que a Matemática só pode construir coisas novas por intermédio da intuição do número puro. A lógica por si só não gera novas descobertas e Boutroux (1920) destaca a presença da intuição no desenvolvimento da Matemática. Ela permeou o pensamento de matemáticos desde Platão, no entanto, sendo concebida de diferentes maneiras.

Para Platão “A verdadeira Ciência das idéias não seria a Matemática humana; e sim um tipo de meta-matemática cujo método seria puramente intuitivo” (Boutroux, 1920, p. 218, tradução nossa).

Boutroux (1920) informou que alguns matemáticos modernos, assim como os Platônicos, reconheceram que as noções matemáticas podem ser obtidas de duas maneiras: por intuição e por raciocínio.

> A intuição precede a demonstração, e é ela que inspira e dirige nossos trabalhos nos mostrando confusamente quais são os fatos, quais são as propriedades, que podem e devem ser objeto de nossos estudos. Em compensação, somente o conhecimento demonstrativo nos permite introduzir esses fatos nas teorias científicas, uma vez que sem ele nenhuma dedução, nenhuma

> construção lógica, portanto, nenhuma teoria é legítima nem mesmo possível (Ibidem, p. 214-215, tradução nossa).

Após vários séculos de abandono, a doutrina intuicionista renasce e se moderniza na filosofia de Descartes, assinalou Boutroux (1920). Para Descartes, a intuição não se consistia na crença dos sentidos ou nos julgamentos enganadores da imaginação. O conhecimento intuitivo para ele era uma espécie de experiência supersensível, a qual a imaginação e o sentido não faziam parte.

Boutroux (1920) acrescentou ainda que o sábio moderno não vislumbrava compreender completamente em que consiste e em quais condições a intuição pode agir. As verdades matemáticas não eram originadas de fatos experimentais, nem dos resultados de construções ou deduções lógicas. Assim, elas supunham um modo de ver que não se confundia nem com a experiência dos sentidos, nem com o raciocínio.

Poincaré é mencionado por Boutroux (1920, p. 215-216), no que se refere à intuição. Boutroux (1920) relatou que, nos primeiros escritos, Poincaré utilizou a palavra intuição no sentido de intuição sensível e classificou Klein como um intuitivo porque ele se utilizava do gesto para pensar. Já Hermite foi considerado um lógico, assim como Méray e Weierstrass.

Posteriormente, Poincaré optou pela intuição supersensível, e com isso, mudou sua classificação inicial dos matemáticos. Dessa forma, Hermite passou a ser um intuitivo, pois era um dos pesquisadores que mais recorreu à visão intelectual direta denominada intuição.

Boutroux (1920) considerou a mudança no pensamento matemático de sintético para analítico, ocorrida no século XIX, sendo motivada pelas épocas históricas. Algumas descrições das mudanças no pensamento apresentadas por ele revelaram estilos cognitivos distintos. O que hoje parecem ser dois estilos cognitivos, antigamente eram duas concepções diferentes de Matemática, formas diferentes de conceber e construir a Matemática. Não se pensava na Matemática axiomatizada. Antigamente existia uma correspondência entre estilos cognitivos e modelos de Matemática. Atualmente esse relacionamento é bem variável.

Os estilos se manifestaram distintamente porque há uma estreita ligação das exigências da Ciência e da sociedade, das necessidades prementes em cada época da história, da cultura, do conhecimento envolvido e disponível. Essas mudanças foram caracterizadas pela própria evolução da Matemática, e isso revela que o pensamento matemático não é influenciado apenas pela natureza do sujeito, como afirmou Poincaré, mas também pelo contexto.

Para comparar diferentes pensamentos matemáticos na História, citamos Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716). Eles foram caracterizados por pensamentos matemáticos distintos que permearam suas realizações matemáticas. Tal distinção é mais acentuada nos trabalhos na área de Cálculo.

O cálculo infinitesimal teve sua origem nas especulações filosóficas dos antigos gregos e se estendeu até o século XVII, quando “mudanças significativas ocorreram – tanto na quantidade de trabalho realizado quanto na natureza dos métodos” (BARON, 1985, p. 5).

A variedade de obras produzidas exigiu que se estabelecesse uma estrutura unificada e organizada, para que teoremas gerais pudessem ser apresentados e depois obtidos resultados especiais.

Dentre os matemáticos que se ocuparam da tarefa acima mencionada, destacam-se Newton e Leibniz. Baron (1985) informou que Newton, em Cambridge, estendeu e unificou vários processos de cálculo; Leibniz, em Paris, os uniu por meio de uma notação eficaz e de um novo cálculo operacional. Ambos desenvolveram o Cálculo mediante o estudo de curvas e suas equações, em que se tinham quantidades variáveis.

A diferença entre eles consistiu na forma de conceber as quantidades variáveis. Baron (1985) assinalou que:

> Newton considerou as variáveis *dependentes do tempo*. Ele aplicou conceitos de movimento; as variáveis foram consideradas como quantidades fluentes. Estes são conceitos (...) cinemáticos. Formulados numa teoria moderna poderíamos dizer que Newton considerava todas as variáveis como função do tempo.
> Leibniz considerava as variáveis como *percorrendo seqüências de valores infinitamente próximos*. No seu cálculo há pouco uso de conceitos de movimento (Ibidem, p. 70).

Newton utilizava uma intuição direta do tempo, pensando no sentido concreto por meio de metáforas. Ele tinha um pensamento geométrico, intuitivo. Já Leibniz pensava por meio de sistemas de signos e de cálculos algébricos e não em termos de processos reais, e era regido por um pensamento analítico.

O fato de o matemático ter que, em determinados momentos, fazer escolhas diante de uma variedade de caminhos, evidencia que essas escolhas são guiadas não só pela intuição ou pela experiência dos sentidos, como mencionou Boutroux (1920), mas também pelo estilo cognitivo adotado pelo matemático e pela representação empregada.

2.2.3. Construindo algumas relações entre as duas culturas na Matemática e pensamentos matemáticos distintos

Pensando nas duas culturas na Matemática, ou seja, resolver problemas ou construir teorias, podemos ressaltar que a necessidade da intuição e da aplicação. Porque nas teorias, as relações já estão explícitas nas definições, nos axiomas e nas regras. Na aplicação é o oposto, a realidade não se encaixa nas definições, pois as relações não estão claramente enunciadas.

Antigamente foi explicado o fato de que não podemos definir ponto, reta, plano, porque isso só pode ser percebido intuitivamente. O mesmo ocorre em uma distribuição de cartas em que temos que analisar a situação para saber como resolver. Precisamos da intuição porque os dados são diferentes a cada distribuição das cartas. Em uma situação de aplicação também é fundamental o seu uso.

Nesse sentido, Russell e Poincaré tinham razão, porque na hora da aplicação não basta apenas conhecer toda a estrutura axiomática, mas também ter uma intuição das relações entre os campos dos objetos em que se quer aplicar e a Aritmética.

Desse ponto de vista temos uma vinculação entre as duas culturas na Matemática e pensamentos matemáticos distintos, porque tem a ver com o problema de aplicação, ou seja, com a matematização. E resolver problema é algo similar porque para resolvê-lo faz-se necessário aplicar a Matemática que conhecemos em uma situação particular.

Na matematização, temos, de um lado, instrumentos matemáticos, teorias, regras, métodos que conhecemos e, de outro, uma realidade, um problema, um fenômeno, ou uma área que pretendemos matematizar – como Newton matematizou a Física – que não está delimitada, que se apresenta ainda de forma desorganizada.

O interesse pela intuição está associado com o problema das fronteiras da Matemática e com o fato de que a Matemática deve ser aplicada, introduzida e crescente.

Podemos ainda salientar que as duas culturas na Matemática e os dois pensamentos matemáticos distintos apresentam pontos que denotam certa dependência e independência. Por um lado, são dependentes se considerarmos que as duas culturas na Matemática são definidas em termos de pensamentos distintos. Por outro lado, as duas culturas são independentes porque estão relacionadas com os seguintes aspectos:

a) Tem a ver com a pessoa, que podemos associar com estilos cognitivos. Estilos cognitivos podem ser diferentes como foi exemplificado por Krutetskii. Um mesmo problema pode ser desenvolvido de maneiras diferenciadas de acordo com a preferência do sujeito pelos métodos e conhecimentos disponíveis. Sonya tinha um pensamento conceitual verbal, usava de análise nas suas resoluções dos problemas enquanto Volodya pensava nos padrões dos dados, nas estruturas, como no problema das galinhas e coelhos.

b) Tem a ver com a área de conhecimento. Por exemplo, a área de Estatística é mais propícia a ser uma área aplicada voltada, em grande parte, para resolução de problemas. Nos problemas combinatórios não temos teorias gerais que podem ser aplicáveis em contextos variados, o que temos são métodos para resolver situações ou problemas particulares.

c) Tem a ver com o estado de desenvolvimento da área de conhecimento, pois ele influencia as duas culturas na Matemática. Temos a intenção de resolver problemas? De desenvolver idéias universais ou teorias?

Algumas áreas propiciam essas opções, outras não. Quando não podemos construir idéias gerais temos apenas a resolução de problemas específicos.

Por exemplo, a teoria dos números não tem métodos gerais. O que importa são os dados e, nesse caso, a intuição tem um papel fundamental. Na teoria dos números temos a contribuição de Gauss com a congruência dos números pares. Números pares são aqueles que deixam o mesmo resto no módulo 2.

Gowers, Poincaré e Boutroux com seus pontos de vista diferenciados acentuaram que o pensamento matemático recebe influências da natureza de uma pessoa, das áreas de conhecimento, do conteúdo envolvido, da história cultural, social e do desenvolvimento da Matemática.

O próximo item apresenta uma discussão referente ao aspecto didático presente nos livros de Matemática, pois eles também influenciam o pensamento matemático. Nesse caso, a representação ou signos tem um papel essencial. A representação é fundamental em qualquer área de conhecimento, no entanto, é maior em algumas áreas do que em outras.

Por exemplo, a Biologia pode ser estudada por meio de uma pesquisa no campo, pois os objetos da Biologia estão disponíveis no ambiente.

Em contrapartida, na Matemática os objetos são os textos, os livros didáticos e a apresentação do professor, havendo um simbolismo e uma formalidade bem maior. Nesse sentido, a representação ou signos são essenciais.

2.3. Estilos cognitivos e formas de representação na Matemática

Para discutir alguns aspectos da representação na Matemática tomamos como referência a definição de signo fornecida por Peirce (1839-1914). Um signo é qualquer coisa

> que está relacionada a uma segunda coisa, seu objeto, com respeito a uma Qualidade, de tal maneira a trazer uma Terceira coisa, seu interpretante, em relação ao mesmo Objeto, e de tal maneira a trazer uma Quarta em relação àquele Objeto, da mesma forma, ad infinitum (PEIRCE apud OTTE, 2001, p. 24).

A diferença entre objeto e signo é que o primeiro se refere a si mesmo e o segundo representa outra coisa diferente – o objeto. A definição de signo de Peirce pode ser ilustrada por meio de uma estrutura triádica (Figura 33) em que temos a relação entre objeto, signo e sujeito interpretante.

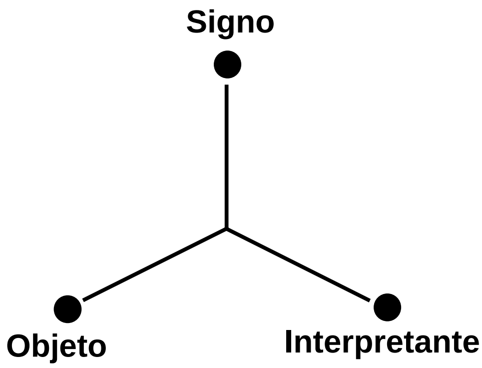


Figura 33 - Relação entre objeto, signo e interpretante

Nessa tríade está implícita uma estrutura recursiva em que o signo é considerado também como um processo e não somente uma "coisa", ou seja, "signo dentro do signo, dentro do signo, etc. *ad infinitum*" (PEIRCE apud OTTE, 2001, p. 24).

Peirce dividiu os signos em *ícone*, *índice* e *símbolo*. Ícone "exibe sua similaridade ou analogia com o tema do discurso". Índice, "como um pronome demonstrativo ou relativo, força a atenção para o objeto particular intencionado, sem descrevê-lo". Símbolo corresponde ao "nome geral ou descrição que dá significado ao seu objeto por meio de uma associação de idéias ou conexão habitual entre o nome e o caráter significado" (PEIRCE apud OTTE, 2001, p. 25).

Essa definição de signo revela uma grande dinâmica e flexibilidade nas relações entre objeto, idéia ou pensamento e sujeito interpretante, pois não existe um pensamento sem signos. Por outro lado, não podemos identificar o pensamento ou conhecimento com suas representações, pois não há uma ligação mecânica, absoluta. Ou seja, o pensamento não é idêntico à representação.

Por exemplo, a Figura 34 reversível é um coelho ou um pato? Não é coelho e nem pato, porém, poderia ser ambos! Do ponto de vista semiótico a figura do pato-coelho não tem significado definido, nem estrutura definida. Depende do interpretante, pois um interpretante pode ver um pato e outro pode ver um coelho.

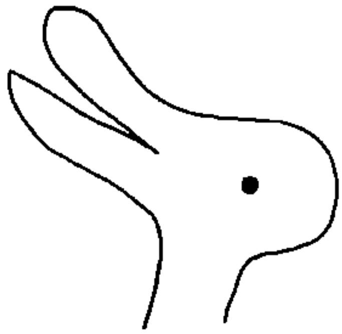


Figura 34 - ***Figura reversível pato-coelho***

As duas visões do pato-coelho são momentaneamente exclusivas, pois os dois animais não podem ser vistos simultaneamente. Porém, podemos voltar de um para outro sem dificuldade.

Outro exemplo encontra-se em Otte (1993) que ao discorrer sobre a intuição citou o ponto de vista de Wertheimer referente à resolução de um dos paradoxos de Zenão.

Uma solução é desenvolvida por meio da convergência de uma série geométrica dada por $S = 1 + a + a^2 + ...$, em que multiplicamos essa série por *a* e depois efetuamos a diferença de uma pela outra, ou seja:

$$aS = a(1 + a + a^2 + ...) \qquad e \qquad S - aS = 1 \text{ ou } S = \frac{1}{1-a}$$

Wertheimer criticou esse processo, alegando que ele fornece um resultado, porém somente a manipulação de símbolos não é suficiente para dar

> a compreensão de como essas séries [contínuas] aproximam-se de um certo valor em seu crescimento. Uma compreensão real ocorre considerando o que ocorre com o crescimento destas séries e o que deriva da lei desse crescimento, tendendo, assim, ao limite (OTTE, 1993, p. 298).

No apêndice de seu livro *Productive Thinking*, de 1945, Wertheimer reapresentou essa resolução utilizando-se de significados de alguns conceitos, como, por exemplo, fração. Ele enfatizou que “se quero compreender, eu devo compreender desde o início o que o primeiro termo $\frac{1}{a}$ significa enquanto uma parte de seu todo” (WERTHEIMER apud OTTE, 1993, p. 298).

Otte (1993) explicou que Wertheimer se baseou em uma abordagem fundamentalista, uma vez que reduziu um problema relativo a um conceito A (séries) ao significado de um outro B (frações). Wertheimer procurou explicar cada etapa da resolução buscando os fundamentos que respaldam cada uma. Porém, não devemos tentar detalhar ou fundamentar cada passo dado na Matemática porque já temos à nossa disposição representações ou simbologias que são padronizadas e auxiliam, por exemplo, na resolução de certos problemas. Não devemos sempre recomeçar como se não houvesse nada para ser utilizado. Na verdade, precisamos concentrar esforços para criar coisas novas na Matemática.

Otte (1993) acrescentou que a primeira resolução apresentada estaria inserida em uma abordagem complementarista por acentuar

> os aspectos simétricos das relações concebíveis entre A e B. Podemos, por exemplo, interpretando uma fração periódica decimal (B) como uma série geométrica (A), provar diretamente que essas frações decimais são números racionais (OTTE, 1993, p. 299).

Nesse exemplo de Wertheimer há duas noções, número racional-decimal periódico e série geométrica. A facilidade de um processo ou outro depende da pessoa, cujo entendimento varia de uma para outra.

Esse exemplo ilustra a insuficiência do ponto de vista psicológico. Wertheimer era um psicólogo e por isso sempre pensava na estrutura da mente e essa estrutura impunha uma hierarquia no conhecimento. Ele achava que havia alguns conhecimentos mais profundos, mais básicos, mais próximos do entendimento do insight, e outros mais distantes.

Algumas pesquisas mostraram que imagens ou ícones são muito mais difíceis. Por exemplo, a figura pato-coelho é considerada muito ambígua na sala de aula, por isso a Matemática escolar é muito dominada pela Álgebra. Muitos professores gostam da Geometria, no entanto, ela é pouco ensinada e as representações geométricas não são muito utilizadas. Um professor, às vezes, busca o mais rápido possível uma fórmula para representar um fato matemático em vez de um desenho ou uma imagem (ícone).

A crença de que existe hierarquia na Matemática está colocada em dúvida pelo ponto de vista semiótico, porque o conhecimento sempre tem que ser representado. E a relação de uma pessoa com certo conhecimento é influenciada pela sua relação com as formas de representação.

2.3.1. Algumas formas de representação na Matemática

Uma contribuição para o estudo da representação é fornecida por Otte (1986), no artigo *What is a text?*, referindo-se ao aspecto didático. Ou seja, ele fez uma análise de alguns livros textos de Matemática e as representações utilizadas nos mesmos, fornecendo uma interpretação do ponto de vista da complementaridade.

Para Otte (1986), o texto é concebido como uma complementaridade de função comunicativa, de um lado, e estruturas de significados, de outro. Palavras e texto não têm significados fora de um contexto.

Otte (1986) comentou que muitos estudiosos da literatura debateram nas últimas décadas a questão: *É o texto ou o leitor que é a fonte de significado?* Alguns deles acreditam que é o leitor, e não o autor do texto, quem cria o significado. Nesse caso, o texto é considerado como interpretação subjetiva.

Quanto a esse assunto, Otte (1986) destacou que o texto pode servir somente como uma função comunicativa, contanto que o leitor acredite no significado objetivo do texto.

E admitir que o texto é uma função comunicativa corrobora com a teoria psicológica de significado, ou seja, está vinculada à questão "O que realmente significava para o autor?" (OTTE, 1986, p. 176, tradução nossa). Isso equivale a não mais considerar o leitor como fonte de significado.

Otte (1986) acrescentou que:

> texto como função comunicativa ou interpretação subjetiva versus texto como estrutura materializada puramente objetiva representam dois aspectos da cognição que não podem convenientemente ser trazidos juntos ao mesmo tempo. Como esse dilema pode ser resolvido? (Ibidem, p. 177, tradução nossa).

A solução proposta por Otte (1986) envolveu a adoção do conceito da complementaridade.

2.3.1.1. A complementaridade entre texto e atividade matemática

Para responder à indagação acima, Otte (1986) argumentou que textos não contêm a realidade como um todo, ou seja, o pré-requisito de conhecimento e aprendizagem se fundamenta na “experiência simultânea de conhecimento e seu uso, sua aplicação” que é fornecida pela cooperação social (Ibidem p. 177, tradução nossa). Textos de certa forma substituem essa cooperação, no entanto, eles estão delimitados no espaço. Otte (1986) acrescentou que processos subjetivos necessitam da possibilidade para uma reflexão construtiva fornecida pelo produto delimitado.

Na opinião dele, os textos são úteis justamente por não conterem a realidade como um todo, cumprindo uma função produtiva somente com base em uma perda seletiva de detalhes. A construção de textos deve ser uma análise da realidade e uma abstração, porém, isso funcionaria apenas “se a distinção entre modelo e objeto, entre teoria e realidade fosse permanentemente observada” (Ibidem, p. 178, tradução nossa).

Diante da impossibilidade de um texto conter a realidade na sua totalidade, Otte (1986) estabeleceu dois termos: “textual structure and activity”[21] (Ibidem, p. 178). O texto é tido como uma estrutura que precisa ser acompanhada por atividade, pois sem atividade não podemos compreender o significado de um texto e ele não pode exercer funções cognitivas. Ou seja, novamente uma complementaridade. De um lado, parece para a imaginação do leitor um contexto real. Palavras ou frases não têm sentido fora de um contexto. De outro lado, textos são instrumentos ou funções da atividade das pessoas.

Otte (1986) reforçou que

> Se eu descrevo o texto como uma função de atividade ou comunicação todas as diferenciações estruturais evaporariam

[21] Estrutura textual e atividade.

> rapidamente, seriam relativizadas e se tornariam virtualmente dependentes (dependentes de intenções) (Ibidem, p. 178, tradução nossa).

No que se refere à complementaridade, Otte (1986) esclareceu que esse conceito foi desenvolvido na Física como uma conseqüência da dificuldade de se encontrar uma distinção objetiva e absolutamente fixa entre o sujeito cognoscente e o objeto sob consideração.

Abbagnano (2000) trouxe algumas definições para o termo complementaridade, uma delas é baseada na Geometria em que "(...) denominam-se complementares dois conceitos opostos que se corrigem reciprocamente e se integram na descrição de um fenômeno". A outra é baseada na Física, cujo princípio de complementaridade foi elaborado por Bohr e "exprime a incompatibilidade da mecânica quântica com a concepção clássica de causalidade" (ABBAGNANO, 2000, p.156).

Otte (1986) acrescentou que a complementaridade não indica um déficit, ao contrário, caracteriza-se especialmente como uma ajuda na medida em que uma abordagem unilateral não é produtiva. A unilateralidade deve ser relativizada para ser produtiva e "so as to avoid running into blind alleys" (para evitar encontrar ruas sem saída) (OTTE, 1986, p. 178, tradução nossa). Ele afirmou que o princípio da complementaridade considera essa dupla exigência.

Otte (1986) destacou a necessidade de utilizarmos livros didáticos de Matemática, juntamente com atividades matemáticas. Havendo essa complementaridade podemos viabilizar o desenvolvimento do pensamento matemático associado à experiência do estudante com a Ciência Matemática.

2.3.1.2. Formas de representação em textos de Matemática

Outro ponto que Otte (1986) discutiu nesse artigo se refere à relação entre conhecimento e suas representações, em que se tem implícito o papel dos sistemas simbólicos nos textos.

De um lado, o conhecimento, presente nos textos, está associado à representações simbólicas e os sistemas de signos ou símbolos são indicadores de aspectos do conhecimento. De outro lado, a dinamização da relação entre conhecimento e representação simbólica é uma fonte básica de insight – por exemplo, tradução da linguagem cotidiana para a linguagem formal, das representações geométricas para os símbolos algébricos, etc.

Tomando como referência a perspectiva de fazer Matemática, devemos identificar dois níveis essenciais: a) signos e símbolos – que se referem a modelos, imagens, etc; b) procedimentos – máquinas, transformações, etc. E as conexões entre esses dois elementos são flexíveis, variando de acordo com o texto.

Qualquer texto em Matemática exige diferentes atividades, afirmou Otte (1986). E apontou que uma das grandes desvantagens nos livros textos de Matemática é que eles não refletem a diversidade de aplicações textuais na correspondente diferenciação de sua estrutura.

Ao focalizar fórmulas matemáticas constatamos que existe uma relação entre a representação e o procedimento, por exemplo:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = ?$; $\quad 1 + 2 + . . . + 6 = ?$ $\quad$ e $\quad \sum_{i=1}^{6} i = ?$

Embora essas três representações sejam matematicamente equivalentes, Otte (1986) mencionou que psicologicamente são diferentes. Cada uma das três determina diferentes processos de resolução.

Na primeira, todas as informações estão visíveis, basta calcular. A segunda e a terceira situações correspondem à representações cada vez mais abreviadas, exigindo procedimentos distintos, já que as informações não estão tão completas ou visíveis. Na última, é necessário um conhecimento ainda maior, que é do símbolo do somatório e a interpretação de seu significado. Além do fato de que a terceira pode ser generalizada, isto é, ao invés de n = 6, pode tender ao infinito ($n = \infty$).

Otte (1986) acrescentou que visualizações pelo significado de tais diagramas indicam a complementaridade de estrutura (forma) e função (atividades, procedimentos, etc).

Ele tomou como exemplo a fórmula da área de um triângulo e analisou a maneira como os livros didáticos de Matemática apresentam essa fórmula. O objetivo era evidenciar que os aspectos complementares não estavam estritamente ligados e que os sistemas simbólicos diferentes forneciam os fundamentos para o caráter variável dessa ligação. A seguir, apresentamos a análise de Otte (1986).

Caso 1: A área ***A*** de um triângulo é dada pela metade do produto da base pela altura relativa à base: A = $\frac{b.h}{2}$.

Entre o texto verbal e a fórmula, o que chama mais a atenção é a fórmula. Isso pode induzir uma pessoa a pensar que a área do triângulo se resume à regra de cálculo, sem se interessar com as relações e o significado da fórmula.

Caso 2: A área de um triângulo é metade de sua base *b* vezes a altura relativa a essa base.

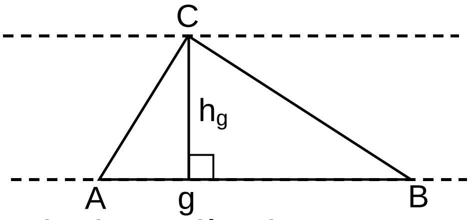


Figura 35 - ***Desenho de um triângulo e sua respectiva altura, enquanto distância entre duas retas paralelas***

$$A = \frac{1}{2} . b . h_g$$

Nesse caso 2, o texto verbal aparece como um simples apêndice para uma fórmula, que também não é interpretada, tendo maior destaque o símbolo visual.

Caso 3: Ao cortar um paralelogramo, dois triângulos de mesma base e mesma altura são obtidos, porém, ambos têm metade da superfície do paralelogramo.

$$\text{Superfície dos triângulos} = \frac{1}{2} . \text{base} . \text{altura}$$

$$A = \frac{1}{2} . b . h$$

O caso 3 é considerado um método pedagógico mais consistente, que tenta justificar a fórmula partindo de um paralelogramo. No entanto, para isso, é necessário apresentar primeiramente as características do paralelogramo e como determinar sua área. Nesse exemplo, temos a idéia de construção da fórmula da área do triângulo, porém, não é utilizado nenhum diagrama.

Caso 4: Para encontrar a área de um triângulo, multiplique a base e a altura. Então, considere metade do produto.

$$A = \frac{1}{2}\, bh$$

$$A = \frac{b.h}{2}$$

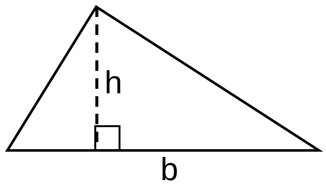
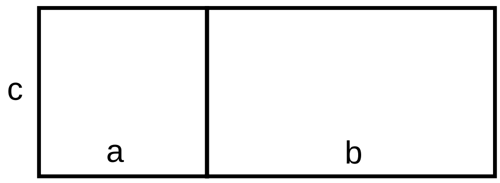


Figura 36 – D*esenho de um triângulo e sua respectiva altura*

Otte (1986) mencionou que no caso 4, os sistemas simbólicos algébrico-gráfico e o verbal-numérico poderiam indicar papéis complementares, com a apresentação verbal acentuando o aspecto algorítmico e a apresentação algébrica enfatizando o aspecto holístico e ideográfico[22].

Outro exemplo exposto por Otte (1986) é o da propriedade distributiva da adição em relação à multiplicação.

Os professores, ao discutirem essa propriedade, muitas vezes preferem atribuir valores numéricos em vez de abordá-la geometricamente (Figura 37).



(a + b). c = a . c + b . c

Figura 37 – *Representação geométrica da propriedade distributiva*

Ao tecer algumas conclusões desses exemplos, Otte (1986) destacou que eles nos conduzem “(...) a assumir dois códigos que pareceriam estar ligados com a ordem temporal linear do processo, de um lado, e com a multidimensionalidade contemporânea de visualização ideográfica, de outro” (OTTE, 1986, p. 184, tradução nossa).

E completou que ao mesmo tempo, tal designação não pode ser estabelecida como absoluta, “mas em todas as dimensões da atividade cognitiva e da interação social” (Ibidem, p. 184, tradução nossa). Ele concluiu que a idéia de texto como uma função social e a orientação de expressá-lo estão relacionadas diretamente com a preocupação de manter o controle, seja pela escola ou pela sociedade.

[22] Representação das idéias por meio de sinais que reproduzem objetos concretos. Sistema de sinais constitutivos de escrita analítica.

Com base nessa discussão acerca das representações, podemos afirmar que os signos ou meios de expressão utilizados determinam o pensamento? Eles são adequados ou são menos apropriados?

Não existe uma representação matemática sem alguns elementos visuais, ou seja, sem usar ícones, porque a Matemática é um pensamento relacional, e são eles que podem dar indícios das características do pensamento de uma pessoa. Os símbolos visuais são ambíguos, não há determinação precisa, porém, não há pensamento sem símbolos, nesse caso, há uma relação intrínseca.

Nesse artigo Otte (1986) também teceu comentários sobre os diferentes modos de empregar a visualização. Para isso, distinguiu dois aspectos: visualização algorítmica e visualização ideográfica, que correspondem de alguma maneira à terminologia lingüística no sentido literal e compreensão metafórica. Ele colocou que o modo de representação geométrico-visual em si já contempla esses dois aspectos.

Uma comparação entre duas visualizações algorítmicas por meio de dois diagramas é feita por Otte (1986).

A primeira, referenciada em Knuth (KNUTH apud OTTE, 1986, p. 195), associa visualização algorítmica com uma ordem de duas ou três dimensões do espaço geométrico, conforme descrevemos a seguir.

Por exemplo, há $\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$ caminhos diagonais em um retângulo com grades de lados *m* e *n*.

Cortando as grades pelos eixos variáveis e contando os caminhos nos quais eles cruzam o corte, derivam-se várias identidades significantes. Otte (1986) destacou que a “atividade cognitiva está duplamente determinada, primeiro por si só como um processo guiado por regras, e segundo pelo objeto fornecido na visualização, e isso fica particularmente claro no exemplo apresentado na Figura 38 a seguir (Ibidem, p. 195, tradução nossa).

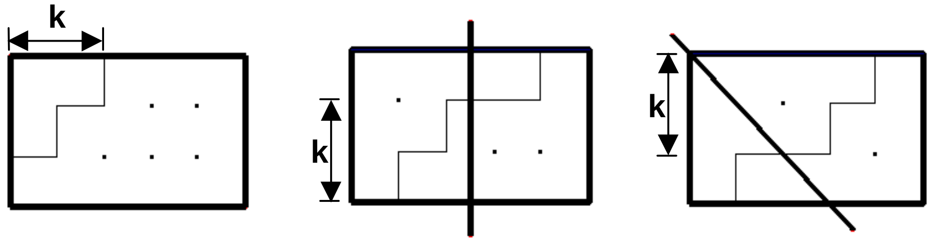


Figura 38 - ***Visualização algorítmica envolvendo dimensões do espaço geométrico***

Em contrapartida, a visualização algorítmica da equação na Figura já é menos clara e Otte (1986) explicou que é porque usa virtualmente apenas o espaço vazio, em que a reflexividade é indiferente nas relações entre dois pontos no espaço. Ou seja, podemos considerar um ou outro ponto no espaço geométrico, não havendo pontos privilegiados.

Dada a equação ((x + 2) . 5 – 10) : 4 = 100 e o diagrama a seguir (Figura 39):

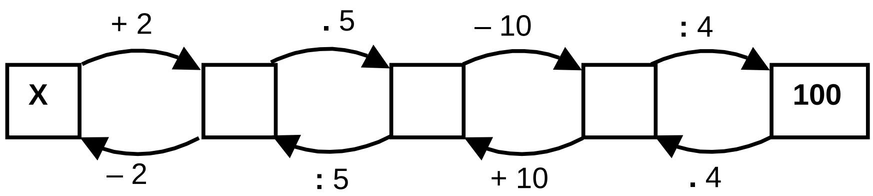


Figura 39– ***Visualização algorítmica de uma equação do primeiro grau***

Fazendo as operações inversas obtemos o valor de x da seguinte forma: (100 . 4 + 10) : 5 – 2 = x → x = 80

Otte (1986) indagou: “É a simples seta, sem qualquer definição adicional, um operador, quer dizer algo subjetivo, ou significa uma relação, quer dizer algo que é também determinado realisticamente?” (Ibidem, p. 195, tradução nossa). Ele concluiu que pela falta de definição, tal diagrama conduz a uma concepção reducionista do algoritmo.

A percepção visual está relacionada ao objeto em si e não aos dados percebidos, completou Otte (1986). Um conceito matemático não é uma coisa empírica. Conceitos matemáticos são compostos por relações entre coisas e não substâncias.

Para Otte (1986), a complementaridade de objetos e operação, estrutura e processo ou metáfora e algoritmo é essencial na Matemática. Noções como função ou equação tem importância na Matemática porque “elas incorporam essa dupla posição de uma maneira muito pronunciada” (Ibidem, p. 196, tradução nossa).

Metáforas são essenciais para o pensamento teórico. No entanto, Otte alertou que deve haver fases com oportunidades limitadas de orientação de atividade e controle.

Com um exemplo – conceber uma equação como sendo uma balança – Otte (1986) revelou a fraqueza de certo uso metafórico da visualização. Ele destacou que a metáfora *a equação é uma balança* não é um diagrama operacional, mostrando regras para resolver equações.

Essa frase metafórica não reduz o aparentemente abstrato e geral (equação algébrica) ao aparentemente concreto e empírico (a balança) em um processo de redução e ilustração visual, mas é ao contrário. Otte (1986) explicou que a balança permanece uma metáfora altamente geral de interação ou “interplay” (reciprocidade), ou simétrica e dissimétrica. Nessa frase, o geral, ou universal, é utilizado para explicar o particular, bem como a dinâmica para explicar o estático.

A balança, como metáfora visualizada (ou visualização ideográfica) compreende a conexão entre o sentido e o significado, assim como entre diferentes formas de conhecimento. Na verdade, há muito mais coisas por trás dessa representação da balança, como, por exemplo, fundamentos físicos, pois ela envolve força, peso, movimento, etc.

Essa reflexão nos conduz a concluir que a representação tem um papel fundamental na Matemática, já que não há representação matemática sem alguns símbolos visuais. Entretanto, devemos desenvolver um sentido crítico que possibilite optar por representações adequadas a cada situação. Devemos evitar representações ou visualizações ideográficas que desenvolvam um caráter artificial na Matemática, como é o caso da balança.

Os livros textos em Matemática são importantes, porém, devem ser permeados pela atividade matemática para que o aluno possa interagir com o texto e desenvolver sua experiência com a Matemática.

Para ilustrar como a representação pode dar indícios das características do pensamento de uma pessoa e retratar seu relacionamento e experiências com a Matemática, a seguir, são apresentados três exemplos obtidos por Kurz em uma pesquisa empírica na área de Cálculo.

2.3.2. Estilos cognitivos e diferentes representações na resolução de um problema de Cálculo

No intuito de tornar mais nítida a reflexão referente ao pensamento matemático e à representação, apresentamos na seqüência os resultados de uma experiência de pesquisa em Matemática com três profissionais de diferentes disciplinas acadêmicas.

Kurz[23] (1997) desenvolveu uma pesquisa na qual apresentou um problema da área de Cálculo, envolvendo equação diferencial ordinária de 1ª ordem, a três entrevistados: um era professor de Matemática, outra era professora de Química e o terceiro era professor de Física.

Para destacar a importância da representação na Matemática e de como ela pode fornecer indícios de estilos cognitivos, que podem estar associados com a formação acadêmica e com a experiência da pessoa, apresentamos o problema utilizado por Kurz, que é conhecido como o *problema do frasco,* cujo enunciado traduzido por Nascimento (2000) é:

> Um frasco contém 10 litros de água e está sendo adicionado uma solução de sal que contém 0,3 kg de sal/litro. Esta solução de sal está sendo colocada numa razão de 2 litros/minutos. A solução resultante está sendo misturada e drenada simultaneamente, e a mistura é drenada de tal maneira que o frasco contenha, em todo o tempo, sempre 10 litros. Qual a quantidade de sal no frasco após 5 minutos? (NASCIMENTO, 2000, p. 59).

De acordo com Kurz, esse problema pode ser representado de três maneiras diferentes:

Notação Newtoniana:

$$\dot{x} = \dot{x}_{in} - \dot{x}_{out} = 0{,}6 - 0{,}2x$$

na qual x indica a quantidade de sal em quilos

---

[23] Tese de Doutorado de Kurz (1997) citada na Dissertação de Mestrado de Nascimento (2000).

Notação Leibniziana:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_{in}}{dt} - \frac{dx_{out}}{dt} = 0{,}6 - 0{,}2x$$

na qual x indica a quantidade de sal em quilos

Notação de Derivada:

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g_{in}(t + \Delta t) - g_{in}(t)}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g_{out}(t + \Delta t) - g_{out}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = 0{,}6 - 0{,}2f$$

na qual g_{in}, g_{out} e f são funções reais.

Como resultado, Kurz constatou que os três especialistas utilizaram diferentes representações para obter a solução do problema. E essas foram analisadas e comparadas, sob o enfoque da abordagem histórico-cognitiva, procurando estabelecer um vínculo entre a prática representacional do Cálculo Diferencial do presente com o desenvolvimento histórico do Cálculo. Segue abaixo as representações adotadas por cada um dos entrevistados.

2.3.2.1. O MATEMÁTICO

O matemático era um jovem que atuava no estudo da Análise Matemática e membro de uma faculdade em nível de doutorado.

Ele resolveu o problema em 25 minutos, modelando-o por meio de uma equação diferencial. Sua resolução foi apoiada por uma representação pictórica que pudesse retratar a situação física do problema. Assim, o frasco foi representado por um retângulo e a solução que entrava e saía, por setas.

Ele considerou intervalos de tempo de 1 minuto, de 30 segundos e de 15 segundos e, com isso, descobriu que a razão que entrava era constante. Depois, sua indagação, passou a ser *a que razão pode sair o líquido?* O que o conduziu à elaboração da equação diferencial. A seguir tem-se a reprodução do algoritmo de resolução desenvolvido pelo matemático.

$\frac{dx_t}{dt} =$, após 1 minuto. Adicione 2 litros de solução de sal e retire 2 litros de água pura após 1 minuto.
1º minuto: adicione 2 litros/min. 1 min. 0,3kg de sal/litro = 0,6 kg
Foi adicionado 0,6 kg de sal após 1 minuto.
30 segundos: adicionou 2 litros/min. 0,5 min. 0,3 kg de sal/litro = 0,3 kg de sal
30 seg. – 60 seg.: foi adicionado 0,3 kg de sal
A quantidade de sal que saiu nos primeiros 30 seg.:
Em 30 seg., 0,3 kg de sal/10 litros = 0,03 kg de sal/litro
Assim, 2 litros de solução de sal que se perde/min x 0,5 min = 1 litros de solução de sal que se perde.
Então, 0,03 kg de sal/litro x 1 litro = 0,03 kg ➔ total de sal que sai
Logo, o total aproximado de sal que permanece no frasco após 1 minuto é 0,57 kg.
Então, a razão de sal que entra é:
0,3 kg de sal/litro x 2 litros/min = 0,6 kg de sal que entra/min
a razão de sal que sai é:
2 litros/min x X kg sal/litro = 2X kg de sal/min, onde X é a concentração por litro da solução salina. [aqui o matemático cometeu um erro, pois não percebeu que a solução saía do frasco numa mesma razão em todo tempo, isto é, como no frasco continha sempre 10 litros, logo deveria sair 2 litros/min X X kg de sal/10 litros = 0,2 X kg de sal/min]
Sua equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = 0{,}6 - 0{,}2x \qquad \rightarrow \qquad \frac{dx}{0{,}6 - 0{,}2x} = \int dt$$

$$t = -\frac{1}{2}\ln(0{,}6 - 0{,}2x) = \ln(0{,}6 - 0{,}2x)^{-\frac{1}{2}} = \ln\frac{1}{\sqrt{0{,}6 - 0{,}2x}}$$

$$5 = \ln\frac{1}{\sqrt{0{,}6 - 0{,}2x}} \Rightarrow e^5 = \frac{1}{\sqrt{0{,}6 - 0{,}2x}} \Rightarrow e^{-10} = 0{,}6 - 0{,}2x$$

$$e^{-10} - 0{,}6 = -0{,}2x \Rightarrow x = \frac{0{,}6 - e^{-10}}{2} \Rightarrow total$$ = 3 – 5e^{-10} kg de sal (NASCIMENTO, 2000, p. 66).

De acordo com Nascimento, Kurz (1997) concluiu que a representação e o procedimento utilizado pelo matemático era similar à adotada por Leibniz. O matemático utilizou intervalos finitos de tempo, embora pudessem ser considerados intervalos infinitamente pequenos ou diferenciais, como o fez Leibniz.

Nascimento (2000) relatou que Newton e Leibniz estudavam quantidades variáveis, porém, concebidas de forma diferente. As quantidades variáveis para Leibniz variavam com base em uma seqüência de intervalos infinitamente fechados, enquanto Newton pensava no cálculo fluxionário variando no tempo.

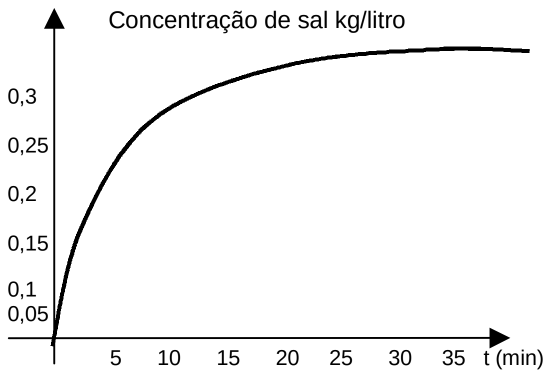
2.3.2.2. A QUÍMICA

A química atuava na área de Físico-química e era membro do Departamento de Química de uma faculdade em nível de doutorado. Desenvolvia pesquisas e já havia publicado vários artigos.

Ela chegou à solução do problema em 40 minutos, porém, não modelou o problema físico por intermédio de uma equação diferencial, e sim, respaldando-se em um procedimento construtivo, usando simulações.

Seu primeiro questionamento foi: “O que seria a concentração em equilíbrio e quanto tempo levaria para chegar a este estado?” (Ibidem, p. 69).

Tal indagação a conduziu para uma representação gráfica (Figura 40), na qual a ordenada representava a concentração em kg/litros e a abscissa o tempo (em minutos).



Gáfico que representa a concentração de sal no frasco ao longo do tempo

Figura 40 – *Representação gráfica associando a concentração de sal na solução e o tempo*

O processo de resolução da química consistiu em transformar a variação de sal no frasco em movimentos contínuos, e isso foi feito por meio de um gráfico no tempo. Por esse motivo Kurz atribuiu a representação da química como sendo uma representação Newtoniana, já que Newton considerou as quantidades matemáticas como deslocamentos de objetos geométricos.

2.3.2.3. O FÍSICO

O terceiro entrevistado era um físico teórico, de fama internacional em virtude de suas contribuições na área em que atuava. Ensinava Física na graduação e na pós-graduação em mestrado, na faculdade em que trabalhava.

Resolveu o problema proposto em 50 minutos. Sua resolução foi considerada por Kurz como sendo perfeita, pois “utilizou um modelo matemático adequado para representar o modelo físico dado pelo problema. (...) O conceito de função e o conceito de derivada foram essenciais para a resolução do problema” (Ibidem, p. 73).

O físico definiu x para a quantidade de sal que havia no tanque (variável dependente). Ao escrever a equação, constatou que o lado esquerdo da igualdade tinha que ser composto pela derivada de x (representada em notação Newtoniana). Enquanto o lado direito era composto pela representação que indicava a quantidade que entrava menos a quantidade que saia. Para resolver a equação, descreveu-a utilizando a notação Leibniziana (quociente de diferenciais) e prosseguiu com uma separação de variáveis.

Nascimento (2000), com base em Kurz, descreveu o processo de resolução desenvolvido pelo físico como sendo o seguinte:

Quadro 7 – Processo de resolução do problema pelo físico

Qual a quantidade de sal que está sendo adicionada? Em 10 litros de água foi adicionado (...) sal. 3 kg de sal foi adicionado 10 litros de água fluía (10/20) metade da concentração da mistura que entrava 1,5 kg saía ... x = quantidade de sal no tanque em kg. $\dot{x}$ = 0,6kg/min – $\dot{x}$ = 0,3. (2) – $\frac{x(2)}{10}$ $\dot{x}$ = 0,6 – 0,2x $\frac{dx}{dt}$ = 0,6 – 0,2x $\frac{dx}{0,6-0,2x} = dt$ y = 0,6 – 0,2x dy = – 0,2 dx $\frac{dy}{-0,2(y)} = dt$ ln y = – 0,2t ln (0,6 – 0,2x) $\Big\vert_{x=0}^{x=x} = -0,2t\Big\vert_0^t$ y = $e^{-0,2t}$	0,6 – 0,2x = $e^{-0,2t}$ – 0,2x = $e^{-0,2t}$ – 0,6 x = $\frac{0,6-e^{-0,2t}}{0,2}$ A partir deste ponto, mudou seu procedimento para o seguinte: $\ln\frac{0,6-0,2x}{0,6} = -0,2t \Rightarrow$ $\frac{0,6-0,2}{0,6} = e^{-0,2t}$ 0,6 – 0,2x = 0,6 $e^{-0,2t}$ 3 – x = 3 $e^{-0,2t}$ 3 – 3 $e^{-0,2t}$ = x x(t) = 3 $\left(1-e^{-0,2t}\right)$ t $\rightarrow \infty$ x $\rightarrow 3$ t = 0, x = 0 assim, x(5) é dado por: x(5) = 3 $\left(1-e^{-0,2(5)}\right)$ =3(1 – e^{-1}) = 1,896kg Solução obtida pelo físico.

Fonte: Nascimento, 2000, p. 76.

O esquema de derivada utilizado pelo físico possibilitou-lhe fazer a transição entre a noção de derivada e de taxa, assim como entre a notação Newtoniana e a notação Leibniziana, enquanto resolvia a equação.

Esses três exemplos evidenciam que a representação na Matemática é determinante e orientadora no processo de resolução de problemas, contudo, não é absoluta, já que não há apenas uma única representação que permite resolver um problema.

Constatamos que Kurz (1997) apresentou distintos pensamentos matemáticos na resolução de um problema de cálculo e evidenciou que a compreensão do problema, a representação do mesmo e os processos de resolução foram distintos e associados às áreas do conhecimento (formação acadêmica) e às experiências profissionais das pessoas. Podemos verificar que todos os três podem ser inseridos no estilo harmônico, mencionado por Krutetskii. No entanto, a química recorreu à uma representação gráfica para simular o problema, ou seja, utilizou de meios visual-pictórico. Como essa pesquisa ocorreu mediante um único problema, não podemos classificá-los como representativos de um ou outro estilo harmônico.

Em outras palavras, o matemático procurou utilizar conceitos do Cálculo Diferencial, que está ligado com sua própria prática, pois ele era um matemático que trabalhava com Análise. A química fez uso de conhecimentos de sua prática para resolver o problema, como, por exemplo, a busca do estado de equilíbrio da solução e a construção do gráfico no tempo que retratasse tal situação. O físico, assim como a química, empregou conceitos internalizados para resolver o problema proposto. Ele utilizou não apenas a Derivada, mas também o *tempo derivado* que é uma terminologia adotada particularmente pelos físicos, já que esse termo não consta nos Dicionários de Matemática.

O capítulo 2 da presente Tese de Doutorado evidenciou que o pensamento matemático é muito complexo, por isso não é resultante apenas de características psicológicas individuais ou da natureza da pessoa, porém, é ainda influenciado pelos seguintes aspectos:

- pelas áreas de conhecimento e pelo conteúdo envolvido;
- pela história cultural e social;

- pelo desenvolvimento da Matemática;
- pelos livros textos em Matemática;
- pelas experiências com a atividade matemática; e
- pelos estilos cognitivos, que já foram mencionados no capítulo 1.

Se a atividade matemática for a resolução de problemas, que outros fatores podem influenciar o pensamento matemático? Como a representação influencia o entendimento e o desenvolvimento da Matemática? O capítulo 3 trata de algumas categorias de problemas matemáticos e da resolução dos mesmos, em que destacamos o papel da representação matemática. Isso fornecerá subsídios para responder essas questões.

CAPÍTULO 3

3. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Na formalização padrão da Matemática não podemos expressar a distinção entre situação problemática, representação do problema ou pergunta e problema matemático. A pergunta deveria ser formulada de forma que possibilitasse a mediação entre a situação problemática e um problema viável[24].

Por exemplo, na escola, quando um professor propõe um problema matemático, ele ainda não é um problema para o aluno, mas é uma situação problemática porque, às vezes, o aluno nem entende o que lhe foi apresentado. Ele apenas sabe que tem que resolver algo e de alguma forma.

O mesmo ocorre com um texto, que para entendê-lo precisamos de uma interpretação, que por sua vez é baseada em uma análise do texto. Ele ainda não é um problema, e sim, uma situação problemática. Um problema (ou mais de um) surgirá na interpretação do texto, que consiste em fornecer uma perspectiva do mesmo.

Nesse processo, diferentes pessoas podem analisar de maneiras distintas a situação problemática, pois, dependendo da intenção da pessoa, de seu interesse, de sua experiência, de seu conhecimento, de sua intuição, do seu talento e dos instrumentos disponíveis, certa perspectiva ou representação pode ser melhor do que outra.

Sabemos que, muito frequentemente, a resolução de um problema depende de um amplo grau na escolha de uma representação

---

[24] Essa distinção é exposta por Otte (1973) no artigo intitulado *Mathematik an der allgemeinbildenden Schule, Probleme im Mathematikunterricht*.

adequada. No entanto, não podemos em geral distinguir, com antecedência e em termos estático formal, o que sabemos do que não sabemos. Não podemos determinar as fronteiras de nosso conhecimento sem formular novos problemas. Certamente seremos capazes de formular novas perguntas.

Como saber, entretanto, se essas perguntas fazem algum sentido? Como saber se elas podem ser transformadas em bons problemas e como fazer isso? Para saber tais coisas, devemos ser capazes de atravessar as fronteiras de nosso conhecimento ou determiná-las em termos positivos, o que parece meio impossível.

Hilbert (1900) justificou seu programa original de meta-matemática afirmando que qualquer pergunta matemática, claramente formulada, deve ter uma resposta. Entretanto, isso não é verdade. Muitas vezes podemos formular um problema matemático sem resolução. Por exemplo, a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução no campo dos números reais. Historicamente, sua solução somente se tornou possível depois da invenção dos números imaginários (ou complexos) pelo matemático Gauss, no século XVIII. A resolução para essa equação, e muitas outras, foi viabilizada com a ampliação dos conjuntos numéricos.

Devemos generalizar o tempo todo e a generalização exige o que Piaget denominou de abstração reflexiva, que é a abstração da atividade matemática, em vez de objetos pré-determinados (BETH & PIAGET, 1961).

No entanto, a atividade matemática deve iniciar e ganhar dinâmica e orientação de alguma forma. Kant (1994), baseado em sua epistemologia critica, afirmou que para ganharmos experiência por meio da atividade, algo mais é exigido além do que meramente experimentar passivamente uma situação problemática. Nenhuma teoria é determinada somente por dados. E a resolução de qualquer problema matemático não-trivial requer muito conhecimento e métodos extras que, freqüentemente, parecem não ter nada em comum com a pergunta elaborada. Quase nenhum problema ou situação problemática produz os métodos ou o conhecimento para sua resolução por si só.

Boutroux (1920) fez dessa afirmação uma das características da Matemática Moderna. Ele escreveu que o programa de fundamentação de

Hilbert foi frustrado pelo teorema da incompletude de Godel, como foi freqüentemente comentado. A situação pode, entretanto, ser mais difícil e errada ao assumir que toda a Matemática, conhecida ou não, pode ser formalizada com a teoria axiomática dos conjuntos. Essa afirmação não apenas implica alegar que Matemática está completa ou mapeada em princípio, embora muitos detalhes devam ser preenchidos e muitas perguntas devam ser ainda respondidas, mas deveria também exigir que podemos claramente afirmar que ainda não sabemos. Finalmente, é necessário que qualquer pergunta matemática imaginável seja formulada em termos da teoria axiomática dos conjuntos.

Havendo interesse no momento com a resolução de problemas, nos sentimos induzidos pelas considerações anteriores, ao introduzir uma distinção conceitual entre situação problemática, pergunta e problema.

A pergunta formulada pelo solucionador do problema pode ser uma representação mais ou menos adequada da situação problemática. A situação problemática é algo complexo e indefinido e ela pode gerar problemas e estimular resoluções dos mesmos, que, à primeira vista, há pouco a fazer com a pergunta formulada ou a situação problemática, como foi percebida e talvez ela seja respondida de modo meramente indireto e muito complexo.

A relação entre situação problemática experimentada e o problema trabalhado é o que determina principalmente a dinâmica da atividade do solucionador do problema.

Essa relação pode ser sintetizada na forma de uma tríade, conforme Figura 41.

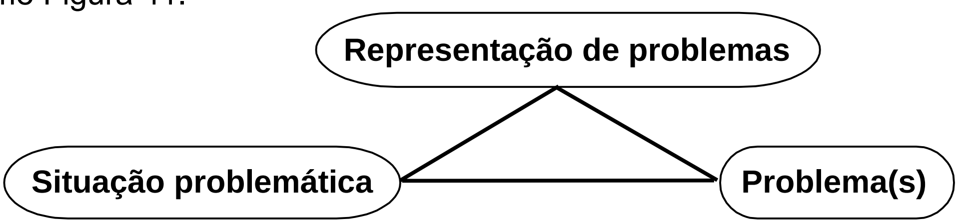


Figura 41 – Relação entre situação problemática, problema e representação

Otte (1973) ressaltou que a representação é caracterizada como mediadora entre a situação problemática e o(s) problema(s) formulado(s). Os elementos de uma mediação dessa forma podem ser vários, dentre eles, o conhecimento (como as teorias matemáticas) e os sistemas simbólicos. A representação é mais do que uma língua, ou um simbolismo, é também uma semântica, uma forma de enxergar as coisas.

Muitas vezes é preciso construir uma representação que possa traduzir uma situação problemática em um objeto matemático ou um teorema. Tudo o que faz a mediação entre situação problemática e problema chamamos de representação da situação problemática, que é transformada em um problema.

Os dois exemplos, a seguir, podem ilustrar a distinção entre situação problemática, problema e representação.

Problema da mosca: Dois ciclistas andam em direção oposta. Depois de 5 horas eles se encontram. Junto com o primeiro ciclista parte uma mosca, que está localizada em seu nariz. Porém, ela voa mais rápido do que os ciclistas. A mosca sai do nariz do primeiro ciclista e toca no nariz do segundo e, em seguida, retorna para o nariz do primeiro. Ela faz essa viagem várias vezes. Quantos quilômetros a mosca percorre até os ciclistas se encontrarem no meio do caminho?

Se tentarmos resolver esse problema simulando as idas e vindas da mosca, isto é, se olharmos apenas para o fenômeno, teremos um raciocínio infinito, porque a distância inicial entre os ciclistas não foi delimitada. É preciso, então, formular um problema: Qual a velocidade do homem e da mosca?

Considerando que o homem se movimenta a uma velocidade de 10 km/h e a mosca a 15 km/h podemos, então, contar. Supondo que a distância inicial entre os ciclistas é de 100 km, depois de 5 horas eles se encontram e a mosca não terá mais tempo para voar. Isso significa que ela ficará voando durante as 5 horas. Assim, ela percorrerá 5 h x 15 km = 75 km/h.

Ao estabelecermos as velocidades do homem e da mosca ficou mais fácil escolher a representação, por meio de cálculo aritmético, para obter uma resposta.

Problema do café e do leite: Uma pessoa coloca todo o café em seu copo e outra coloca todo o leite em outro copo. Em seguida, mudam de idéia. A primeira pessoa quer um pouco de leite e a segunda quer um pouco de café. Como não há um terceiro copo, alguém tem que começar a misturar os dois líquidos. Assim, a segunda pessoa mistura um pouco de café em seu copo e devolve parte dessa mistura para a primeira pessoa. A primeira volta a devolver mais um pouco da última mistura. No início e no fim, ambas têm a mesma quantidade de líquido nos copos. Pergunta: Há mais leite no café? Ou mais café no leite? Ou são iguais? Se são iguais, por quê?

Um estudante normalmente explicaria: em um copo havia leite puro. Quando se acrescenta o café e a pessoa devolve, já é uma mistura. No segundo copo tem mais leite do que café. Esse é o raciocínio comum.

As diversas misturas realizadas alterariam a quantidade de moléculas dos líquidos? Não devemos pensar nas misturas de forma isolada. É necessário abstrair e passar a pensar que se as quantidades eram iguais no início, depois da troca, cada molécula que foi tirada de um copo foi substituída pela molécula do outro, caso contrário, não poderiam ser iguais. Então devem ser iguais, mesmo tendo leite puro em um copo e leite misturado no outro.

Os exemplos apresentados não evidenciam muita matemática, entretanto, revelam um aspecto muito geral e importante. São problemas que ilustram que matematizar significa transformar um fenômeno complexo, um processo ou um acontecimento em uma estrutura estática.

É preciso buscar fundamentos que transformem o mundo real – no qual há fenômenos que sempre se movimentam, se modificam – em um mundo estático da Matemática. Esse processo é denominado de substantivação. A substantivação é a caracterização mais profunda e importante da Matemática Moderna, que teve sua origem em Platão.

A matematização é caracterizada por dois aspectos:

1. Transformar um processo ou uma atividade em um objeto estático (substantivação);
2. Representar esse objeto em uma maneira inesperada, às vezes. Por exemplo, colorir um tabuleiro de xadrez de uma forma adequada que permita contar melhor as possibilidades da pavimentação utilizando k-minós[25].

[25] Os k-minós correspondem a figuras geométricas formadas pela junção de quadrados unitários, por exemplo, dominó (2 quadrados), triminó (3 quadrados), tetraminó (4 quadrados), etc.

Esses são dois processos fundamentais, além do conhecimento da área específica, já que é preciso saber calcular, equacionar, que são os instrumentos matemáticos. Podemos pensar que resolver problema significa matematizar, porque temos implícitas essas características.

Considerar o problema como um objeto da atividade matemática é resultado da convicção que, às vezes, pode haver diferença entre as maneiras como uma pessoa enxerga a situação problemática e o conteúdo da própria atividade matemática. As pessoas normalmente não são totalmente conscientes do que estão fazendo. Em grande parte o próprio pensamento é um pensamento intuitivo e implícito.

Na Matemática a experiência e a maturidade do pensamento de uma pessoa têm um grande peso, porém, nem sempre ela consegue representar explicitamente essas experiências e intuições.

Um exemplo desse fato ocorreu com Poincaré. Ele, Krutetskii e outros matemáticos escreveram sobre o fenômeno de uma solução repentina.

Poincaré comentou que, na época em que estava no exército, pensava muito a respeito de alguns problemas que ele ainda não tinha a solução. Ao concluir o serviço militar, imediatamente obteve a solução. Isso ocorreu porque ele pensava nos problemas matemáticos, estava em constante atividade cognitiva e, muitas vezes, sem mesmo ter consciência disso.

A representação tem uma função de destilar ou abstrair, da situação problemática, alguns aspectos ou formas que possibilitam realizar uma atividade matemática. A complexidade pode proibir que o pensamento se refira diretamente à realidade; por esse motivo são importantes os processos de abstração, de simplificação, de modelagem, etc.

No capítulo 2 desta Tese destacamos a importância de se complementar os livros didáticos com a atividade matemática, pois os livros também não se referem diretamente à realidade, ou seja, eles não contêm a realidade como um todo. Nesse caso, a atividade é que pode fornecer o significado de um texto, possibilitando que ele exerça suas funções cognitivas, dentre elas a de divulgar conhecimentos e suas representações.

Dentre as várias categorias de problemas matemáticos, trazemos duas delas para a nossa discussão, caracterizando, portanto, as duas partes desse capítulo. Na primeira, apresentamos alguns problemas matemáticos que podem ser resolvidos de maneiras diferentes. Nesse caso, o lado subjetivo se revela de forma mais evidente, pois distintas perspectivas podem ser consideradas na situação problemática, originada pelos problemas propostos.

Na segunda parte, tratamos de resolução de problemas e construção de idéias gerais. Esse é um assunto muito importante porque já na Antiguidade havia distinção entre Geometria e Álgebra, em termos de resolução de problemas.

A Geometria não dispunha de métodos gerais para resolver os problemas ou para desenvolver provas geométricas. Cada caso era um caso particular e o processo de demonstração poderia ser bem distinto em cada um deles. Os modernos, dentre eles Descartes, argumentavam que os matemáticos da Antiguidade tinham muita engenhosidade, porém, todas as resoluções, particularmente as da geometria, eram tão específicas que pareciam truques, não havendo como generalizar.

A idéia da modernidade, sobretudo da álgebra, foi fornecer um método geral, uma máquina para resolver problemas. Hoje é possível equacionar problemas de diversas áreas de conhecimento.

Historicamente havia pessoas que gostavam mais de problemas que pudessem ser generalizados, que produzissem métodos para ser utilizados e resolver outros problemas. Enquanto outras pessoas não tinham esse propósito tão acentuado, a preocupação era resolver problemas, mesmo que fossem casos particulares.

Isso nos remete à distinção das duas culturas na Matemática, exposta por Gowers (2000), e que ainda se faz presente nos dias atuais, pois ele mesmo apontou que no coração da Matemática Pura também temos essa distinção. Ou seja, temos áreas como Combinatórios, que possuem poucos teoremas universais; a maioria deles são problemas singulares, como era na Geometria da Antiguidade.

A seguir, expomos alguns problemas matemáticos e seus possíveis processos de resolução.

3.1. Estudo de alguns problemas matemáticos

Existem problemas matemáticos que possibilitam a utilização de diversos processos de resolução. Por esse motivo, podem proporcionar a identificação de certas preferências no modo de representação, que está vinculado ao aspecto subjetivo, e, conseqüentemente, podem evidenciar estilos cognitivos.

Por outro lado, alguns problemas, dependendo da representação escolhida, podem apenas ser resolvidos, obtendo uma resposta, ou eles podem originar idéias ou teorias gerais. No entanto, temos casos em que uma idéia ou uma representação pode ser utilizada em um problema de forma satisfatória e revelar-se insuficiente para resolver outra situação, como ocorreu no problema da corda, apresentado no capítulo 2 desta Tese, p. 160. Foram utilizadas duas representações, uma associada ao processo indutivo e outra ao axiomático, e chegamos à duas soluções distintas para o problema. Cada uma delas tem um valor instrumental diferente.

As duas partes desse capítulo tratam dessas duas categorias de problemas, como acompanhamos a seguir.

3.1.1. Problemas matemáticos com diferentes maneiras de resolver

Muitos problemas matemáticos podem ser resolvidos por diferentes processos, que são desencadeados pelos problemas formulados pelas pessoas e pelas representações escolhidas.

Em uma representação temos implícita a experiência, o conhecimento e até mesmo a preferência de uma pessoa por certas representações.

Davis (2001) cita um exemplo em que a experiência com a atividade matemática e a utilização de uma representação adequada foi importante na resolução de um problema.

Qual inteiro positivo **N** que em notação de congruência da teoria dos números é expresso por

$N \equiv 1 \pmod 2$
$N \equiv 2 \pmod 3$
$N \equiv 3 \pmod 4$
$N \equiv 4 \pmod 5$
$N \equiv 5 \pmod 6$ (DAVIS, 2001, p. 206).

Esse problema foi proposto a S., um professor de Matemática de uma Universidade, e a K., uma estudante de 16 anos considerada a melhor solucionadora de problemas. K., porém, não conseguiu resolvê-lo.

O professor S. o resolveu imediatamente. Ele estranhou o fato de K. não resolver o problema proposto porque sabia que K. era melhor solucionadora de problemas do que ele. Depois ele se lembrou de que no mesmo dia havia resolvido um problema de Álgebra (em que um polinômio P(x) dividido pelo polinômio Q(x) deixa resto 1) por meio de uma representação similar à que ele utilizou. O problema de Álgebra ainda estava de algum modo na mente de S. Quando K. contestou sua resolução, S criou um problema modificado:

$M \equiv 1 \pmod 2$
$M \equiv 1 \pmod 3$
$M \equiv 1 \pmod 4$
$M \equiv 1 \pmod 5$
$M \equiv 1 \pmod 6$ (Ibidem, p. 207).

O professor S. explicou que se **M** é dividido por 2, ou por 3, ou por 4, ou por 5, ou por 6, o resto, em qualquer caso, será sempre 1. Isso significa que **M** tem um a mais do que o Mínimo Múltiplo Comum de 2, 3, 4, 5 e 6.

M = MMC (2, 3, 4, 5, 6) + 1 = 60 + 1 = **61**.

S. continuou relatando que o problema **N** seria mais ou menos o mesmo, ou seja, em vez de deixar restos 1, ele deixa restos de 1 negativo.

N = MMC (2, 3, 4, 5, 6) – 1 = 60 – 1 = **59**.

O professor S. tinha em sua memória uma boa representação para o problema **M** e a aplicou e a transferiu para a resolução do problema **N**. Davis (2001) destaca que a busca por representações pode tornar certos problemas específicos muito fáceis. E acrescenta que representar um problema já é mais da metade da resolução do mesmo.

A seguir, apresentamos alguns exemplos de problemas matemáticos que podem ser resolvidos por meio de diferentes representações.

(1) Dois trabalhadores, um mais velho e outro mais jovem, moram na mesma casa e trabalham na mesma fábrica. O homem mais jovem leva 20 minutos caminhando até a fábrica. O homem mais velho percorre a distância em 30 minutos. Quando o trabalhador jovem alcançará o homem mais velho, se o último partir 5 minutos antes dele? (PERELMAN, 1979, p. 52 e 56-57, tradução nossa).

Esse problema pode ser resolvido de cinco diferentes maneiras. As duas primeiras por intermédio da aritmética, a terceira por meio de um quadro e de frações da distância, a quarta por meio de segmentos e a quinta pelo conceito de proporcionalidade. Esses são conceitos específicos da Matemática; o problema pode ainda ser resolvido por meio de conceitos da Física, que não serão apresentados nesse capítulo, e sim no capítulo 4.

- **Resolução A**: Em cinco minutos o trabalhador mais jovem percorre $\frac{1}{4}$ do caminho e o mais velho $\frac{1}{6}$, ou seja, $\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$ menos do que o trabalhador mais jovem.

Como o homem mais velho estava $\frac{1}{6}$ do caminho à frente do trabalhador mais jovem, o último o alcançará depois de $\frac{1}{6}\div\frac{4}{12}=2$ intervalos de 5 minutos, ou seja, em 10 minutos.

- **Resolução B**: Para chegar à fábrica, o trabalhador mais velho precisa de 10 minutos a mais do que o jovem (30’ – 20’ = 10’). Se ele sair de casa 10 minutos antes, ambos chegarão no local ao mesmo tempo. Se o trabalhador mais velho sair apenas 5 minutos antes, o homem mais jovem o alcançará na metade do caminho para a fábrica, ou seja, 10 minutos antes (desde que ele leve 20 minutos para percorrer a distância toda).

- **Resolução C**: Podemos pensar na distância da casa até a fábrica sendo percorrida, considerando intervalos de 5 minutos. Assim, temos o Quadro 8:

Quadro 8 – Comparação entre as distâncias percorridas por cada irmão em intervalos de 5 minutos

Mais velho	Mais jovem
5 min → $\frac{1}{6}$ da distância	
+ 5 min → $\frac{2}{6}$ da distância	5 min → $\frac{1}{4}$ da distância
+ 5 min → $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ do caminho	+ 5 min → $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ do caminho
Resposta: Se encontrarão na metade do caminho após 10 minutos	

➢ **Resolução D**: Desenhamos dois segmentos de medidas iguais (mesma distância), um para cada irmão. Em cada segmento, consideramos o tempo gasto no percurso dividido em intervalos de 5 minutos (frações da distância com base no tempo) (Figura 42).

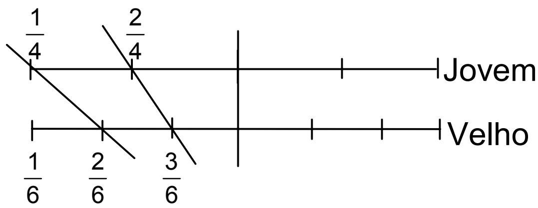


Figura 42. Representação geométrica por meio de segmentos

Assim, o percurso do jovem contém 4 intervalos de 5 minutos (20 mintos) e o trabalhador mais velho, 6 intervalos de 5 minutos (30 mintos). Com essa representação de segmentos visualizamos que os dois homens se encontrarão na metade da distância, depois de dois intervalos de 5 minutos, que correspondem a 10 minutos.

➢ **Resolução E**: podemos ainda resolver esse problema aplicando o conceito de proporção, em que temos:

Jovem percorre a distância x em $\frac{20}{t}$

Velho percorre a mesma distância x em $\frac{30}{t+5}$

Como a distância **x** percorrida é a mesma, podemos estabelecer a igualdade:

$$\frac{20}{t}=\frac{30}{t+5} \rightarrow 30t = 20t + 100 \rightarrow 10t = 100 \rightarrow \mathbf{t = 10\ min}$$

(2) A uma equipe de homens foi atribuída a tarefa de ceifar dois pastos, um tendo o dobro do tamanho do outro. Até meio dia, todos os homens ceifaram juntos no pasto maior. Depois, a equipe foi dividida em dois grupos iguais. O primeiro grupo permaneceu no pasto maior e concluiu todo o trabalho no final da tarde. O segundo grupo foi ceifar o pasto menor, entretanto, no final da tarde ainda restou uma porção desse pasto para ceifar. Essa porção foi ceifada no outro dia por apenas um homem que trabalhou durante um dia inteiro. Quantos homens estavam ceifando na fazenda? (PERELMAN, 1979, p. 227-229, tradução nossa).

➢ **Resolução A**: Esse problema pode ser resolvido por meio da Álgebra elementar, estabelecendo sistema de equações construídas a partir de uma representação geométrica, conforme Figura 43 .

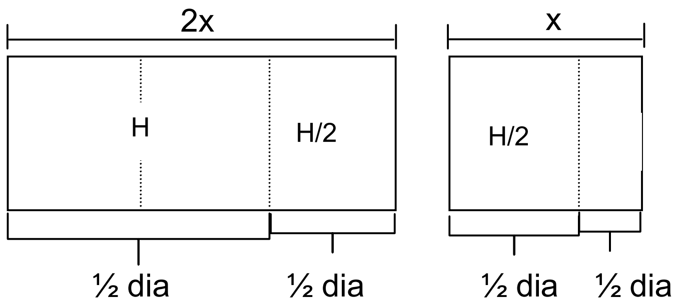
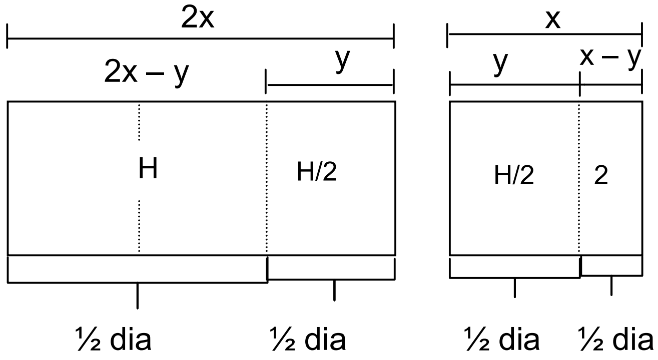


Figura 43 - Representação geométrica e Álgebra elementar

$$\begin{cases} H + \dfrac{H}{2} = 2x \\ \dfrac{H}{2} + 2 = x \end{cases} \qquad H + \frac{H}{2} = 2\left(\frac{H}{2} + 2\right)$$

$$H + \frac{H}{2} = H + 4 \rightarrow \mathbf{H = 8\ homens}$$

➢ **Resolução B**: Podemos ainda utilizar a álgebra elementar, porém, recorrendo ao conceito de proporcionalidade, o que torna a resolução um pouco mais elaborada, mais trabalhosa, exigindo mais relações do que a anterior, como descrevemos no que se segue:



Área do pasto	nº homens
$2x - y$ ----------------------	H
y ----------------------	$\frac{H}{2}$
$x - y$ ----------------------	2

Figura 44 - Representação geométrica e proporcionalidade

$$\frac{2x-y}{H}=\frac{y}{\frac{H}{2}}=\frac{x-y}{2}$$

(I) $\frac{2x-y}{H}=\frac{y}{\frac{H}{2}}$ → *2x – y = 2y* → *2x = 3y* → ***x =*** $\frac{3y}{2}$

(II) $\frac{y}{\frac{H}{2}}=\frac{x-y}{2}$ → $\frac{2y}{H}=\frac{x-y}{2}$ → H (x – y) = 4y

Substituindo (I) em (II) temos:

$H=\frac{4y}{\frac{3y}{2}-y}$ → $H=\frac{4y.2}{y}$ → **H = 8 homens**

➢ **Resolução C**: Nesse problema, além da incógnita principal – número de homens, denotado por *h* – é conveniente introduzir outra incógnita auxiliar, indicando a área ceifada por um único homem em um dia, denotando-a por **a**. Embora o problema não peça para encontrar **a**, ela ajudará a obter a incógnita principal.

Expressando a área do pasto maior em termos de **h** e **a**, essa área foi trabalhada na metade de um dia por *h* homens; eles ceifaram $h\times\frac{1}{2}\times a=\frac{ha}{2}$.

Durante a segunda metade do dia o pasto maior foi ceifado pela metade da equipe, ou seja, $\frac{h}{2}$ ceifadores; eles fizeram $\frac{h}{2}\times\frac{1}{2}\times a=\frac{ha}{4}$.

Como o pasto todo foi concluído à tarde, a área total era $\frac{ha}{2}+\frac{ha}{4}=\frac{3ha}{4}$.

Utilizando **h** e **a** para expressar a área do pasto menor, um total de $\frac{h}{2}$ ceifadores trabalharam nele na metade de um dia e ceifaram uma área igual a $\frac{h}{2}\times\frac{1}{2}\times a=\frac{ha}{4}$. Acrescentando a porção não cortada, que é igual a **a** (a área cortada por um único homem), obtemos a área do pasto menor:

$\frac{ha}{4}+a=\frac{ha+4a}{4}$. Resta, portanto, expressar em linguagem algébrica a frase "o primeiro pasto tem o dobro do tamanho do segundo pasto" e temos a equação:

$$\frac{3ha}{4}\div\frac{ha+4a}{4}=2 \quad \text{ou} \quad \frac{3ha}{ha+4a}=2 \rightarrow \frac{3h}{h+4}=2 \rightarrow 3h = 2h + 8$$

Cujo resultado é **h = 8**, isto é, a equipe era coposta por 8 homens.

- **Resolução D**: Podemos resolver o problema de forma simples e direta, por meio do conceito de frações e da Geometria, conforme constatamos na Figura 45:

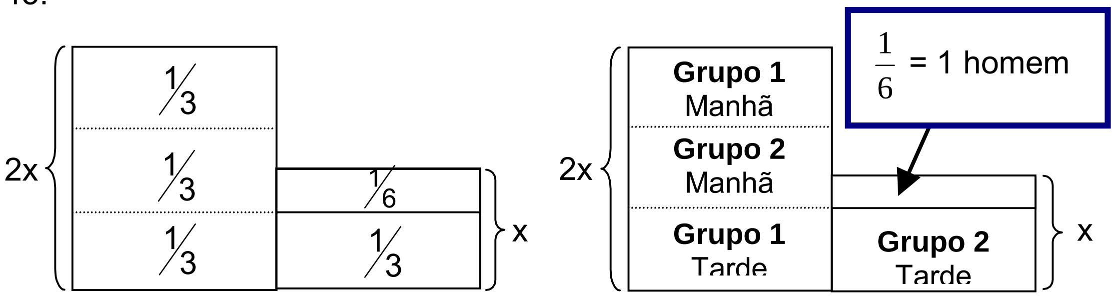


Figura 45 - Representação geométrica e fração

Se a equipe toda trabalhou no pasto maior em um período do dia (manhã) e metade da equipe no outro período do dia (tarde), portanto, metade da equipe pode cortar $\frac{1}{3}$ do pasto em um período do dia.

Analisando o pasto menor, verificamos que há uma porção sem cortar igual a $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. Dessa forma, $\frac{1}{6}$ corresponde ao trabalho de um homem.

Considerando o pasto maior e o menor, temos $\frac{3}{2}$ (2x + x = 3x, pelo desenho constatamos os $\frac{3}{2}$). Retirando da área total o que corresponde à porção do pasto que falta ceifar obtemos: $\frac{3}{2}-\frac{1}{6}=\frac{8}{6}$.

Como $\frac{1}{6}$ equivale ao serviço de um homem temos 8. $\frac{1}{6}$, portanto, a equipe era formada por 8 homens.

Essa resposta também poderia ser obtida da seguinte maneira: se um homem pode cortar $\frac{1}{6}$ de um pasto em um dia e uma área total de $\frac{6}{6}+\frac{2}{6}=\frac{8}{6}$ foi cortada, então, havia 8 homens trabalhando.

(3) Adriano Alves, Benedito Buarque, Carlos Castro, Donizete Duarte e Eduardo Esteves são os 5 principais membros de um Clube. Cada um possui um pônei em que é dado o nome da esposa de um dos outros.

O pônei do Sr. Alves é nomeado de Glória; Carlos Castro possui Joana; e Sr. Esteves possui Inez. Flavia, possuída pelo Sr. Duarte, é dado o nome da esposa do Sr. Alves. O esposo da Glória possui o pônei que tem o nome da esposa do Sr. Buarque. Helena Castro é a única esposa que sabe como montar um cavalo. Quem é o esposo da Joana? Quem possui Helena? (AVERBACH & CHEIN, 2000, p. 2 e 7-10, tradução nossa).

➢ **Resolução A**: Façamos inicialmente uma lista das informações dadas no problema:

1. O pônei do Sr. Alves é Glória;
2. O pônei do Sr. Carlos Castro é Joana;
3. O pônei do Sr. Esteves é Inez;
4. O pônei do Sr. Duarte é Flavia;
5. Flavia é casada com Sr. Alves;
6. Helena é casada com Sr. Carlos Castro;
7. O esposo de Glória possui o pônei que é dado o nome da esposa do Sr. Buarque;
8. O pônei de cada homem é nomeado com o nome da esposa de outro e não com o da sua própria esposa.

Nesse caso, um quadro com 3 colunas pode auxiliar – uma coluna para o nome do Cavalheiro, outra para o nome de seu cavalo e a terceira para o nome da sua esposa. Preenchendo com as informações dadas temos o Quadro 9.

Quadro 9 - Relação entre cavaleiro, cavalo e esposa

Cavalheiro	Cavalo	Esposa
Sr. Alves	Glória (1)	Flavia (5)
Sr. Castro	Joana (2)	Helena (6)
Sr. Esteves	Inez (3)	
Sr. Duarte	Flavia (4)	
Sr. X	Y	Glória (7)
Sr. Buarque		Y (7)

O único caminho no qual a pista 7 poderia entrar no quadro era introduzir símbolos tais como X e Y para representar pessoas que ainda não tinham sido identificadas. (Esse processo é similar à técnica da Álgebra elementar, no qual letras são usadas para representar quantidades desconhecidas. No quadro, Sr. X representa o esposo de Glória e Y representa o nome da esposa do Sr. Buarque que é também o nome do cavalo do Sr. X).

Algumas observações:

- O cavalo do Sr. Buarque deve ser Helena porque os outros 4 nomes já estão atribuídos na coluna do cavalo;
- Sr. X não pode ser Sr. Castro, porque o último é casado com Helena, enquanto Sr. X é casado com Glória;
- Por isso, como Sr. Castro possui Joana e Sr. X possui Y, Y não pode ser Joana;
- Y também não pode ser Flavia ou Helena, desde que Y é casada com Sr. Buarque, e Flavia e Helena não são;
- Y não pode ser Glória, já que o marido de Glória possui Y, de acordo com a pista 8;
- A única possibilidade restante é que Y é Inez. Então Sr. X deve ser Sr. Esteves (já que ele possui Inez).

Pelo processo de eliminação podemos completar o Quadro 10 e descobrir que Joana é casada com Donizete Duarte.

Quadro 10 - Conclusão da relação entre cavaleiro, cavalo e esposa

Cavalheiro	Cavalo	Esposa
Sr. Alves	Glória	Flavia
Sr. Castro	Joana	Helena
Sr. Esteves	Inez	Glória
Sr. Duarte	Flavia	***Joana***
Sr. Benedito	***Helena***	Inez

➢ **Resolução B**: Podemos utilizar outro quadro, no qual as letras A, B, C, D e E são as primeiras letras dos sobrenomes dos cavalheiros e as letras F, G, H, I e J são as iniciais dos primeiros nomes das esposas (Diagrama I). Quando descobrimos que um cavalheiro particular é casado com uma senhora particular, marcamos com √ quando sua linha encontra sua coluna, se sabemos que eles não são casados, colocamos X. Quando um check aparece, então as outras células daquela linha e coluna têm que conter X's, porque cada homem é casado com apenas uma mulher e cada mulher é casada com um único homem. Podemos construir o Diagrama II, com base nas pistas 5 e 6.

Quadro 11 – Seqüências de preenchimento dos diagramas

Esposas

	F	G	H	I	J
A					
B					
C					
D					
E					

Diagrama I

	F	G	H	I	J
A	√	X	X	X	X
B	X		X		
C	X	X	√	X	X
D	X		X		
E	X		X		

Diagrama II

	F	G	H	I	J
A	√	X	X	X	X
B	X	X	X		
C	X	X	√	X	X
D	X		X		
E	X		X	X	

Diagrama III

Também, da pista 3, sabemos que E não é casado com I, e da pista 7, que B não é casado com G. (Caso contrário, o pônei do Sr. B seria nomeado com a esposa de B, contrário à pista 8). Com essas informações Obtemos o Diagrama III. Mas agora parece que estamos presos. Parece que não fizemos uso completo da pista 7. Como podemos utilizar isso?

Como no Diagrama III há apenas duas possíveis alternativas para o esposo de Glória, podemos observar o que acontece quando assumimos que uma delas é verdadeira.

Primeiro vamos casar Glória com Sr. Duarte. Então, da pista 7, Sr. Duarte possui o pônei que é nomeado com a esposa de Sr. Buarque. Mas nós sabemos que o pônei de Sr. Duarte é Flávia (pista 4) e que Flávia não é esposa de Sr. Buarque (pista 5). Obtemos então uma contradição, e assim, esse matrimônio não funciona, e talvez nunca poderia haver:

Glória não é casada com Sr. Duarte.

Quando uma suposição conduz logicamente a uma contradição, a suposição deve ser incorreta. O item assumido como verdade deve ser falso.

Essa nova informação foi inserida, obtendo o Diagrama IV. Notamos que há agora apenas uma possibilidade para o esposo de Glória – Sr. Esteves.

	F	G	H	I	J
A	√	X	X	X	X
B	X	X	X		
C	X	X	√	X	X
D	X	X	X		
E	X		X	X	

Diagrama IV

Podemos, entretanto, colocar um check na célula E-G da tabela e então, colocar um X na célula E-J (Diagrama V).

Utilizando a pista 7 novamente, Sr. Esteves possui o pônei nomeado com a esposa do Sr. Buarque. Mas Sr. Esteves possui Inez. Segue que: *Sr. Buarque é casado com Inez*.

	F	G	H	I	J
A	√	X	X	X	X
B	X	X	X	√	
C	X	X	√	X	X
D	X	X	X		
E	X	√	X	X	X

Diagrama V

Registrando essa informação, chegamos ao Diagrama V.

Colocamos agora os X's nas células B-J e D-I; conseqüentemente, a célula D-J deve receber um check. Assim, como encontramos antes:

Joana é casada com Sr. Duarte.

Como um passo final na solução, sem importar com qual abordagem foi usada, o problema original poderia ser conferido para verificar que a conclusão obtida é consistente com os fatos dados.

- **Resolução C**: Há outros recursos visuais relevantes, que podem ajudar a obter a solução. Por exemplo, no Diagrama A podemos encabeçar as linhas com os nomes dos cavalos e as colunas com os nomes das mulheres.

Esposas

	F	G	H	I	J
F					√
G					
H					
I					
J					

Cavalos

Diagrama A

Podemos colocar um check na linha-F, coluna-J se Flávia é o nome do cavalo que pertence ao homem que é casado com Joana.

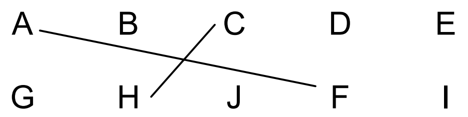
Ou podemos marcar os homens em contraste com seus cavalos. Dessa vez, ao invés de checks, utilizamos círculos com as iniciais das esposas, como ilustra o Diagrama B.

	F	G	H	I	J
A		F			
B				X	
C					
D					
E					

Diagrama B

O Diagrama B nos informa que o Sr. Alves é casado com Flávia e possui Glória, Sr. Buarque não possui Inez e Sr. Duarte possui Flávia (mas ainda não sabemos com quem ele é casado).

Outro diagrama que podemos utilizar é o indicado ao lado.



As letras G, H, J, F, I representam as siglas de ambas as esposas e cavalos. Indicamos um cavalo particular pertencente a um proprietário particular, escrevendo a sigla do cavalo abaixo do seu dono. As linhas ligam as siglas dos esposos e esposas. Por exemplo, Sr. Alves possui Glória e é casado com Flávia.

Averbach e Chein (2000) afirmaram que em geral, é difícil saber com antecedência exatamente qual forma de ajuda visual seria mais adequada. Algumas vezes, nem é necessário. Outras vezes, mais do que uma é necessária.

(4) Numa reunião de amigos há 6 pessoas. Se cada um trocar um aperto de mão com todos os outros, quantos apertos de mão terão ao todo? (DANTE, 1991, p. 18-19).

Resoluções por meio de:

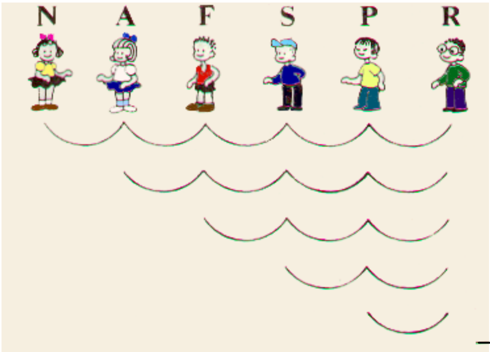
Uma lista

Noemi	**Anelise**	**Felipe**	**Sérgio**	**Paulo**	**Ricardo**
Anelise	Felipe	Sérgio	Paulo	Ricardo	
Felipe	Sérgio	Paulo	Ricardo		
Sérgio	Paulo	Ricardo			
Paulo	Ricardo				
Ricardo					

5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15

Diagramas

a)



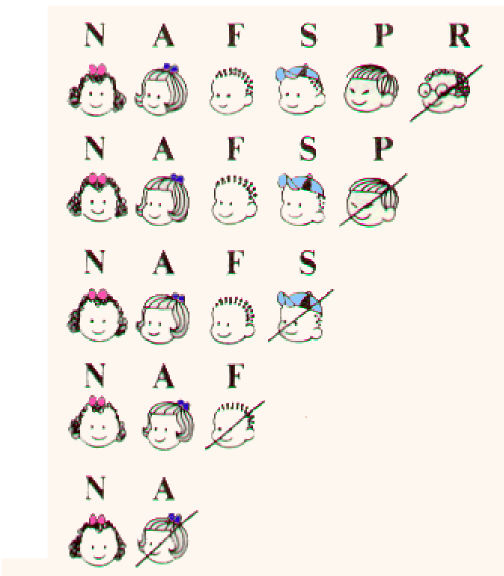
5
4
3 +
2
1
15 (apertos de mão)

Figura 46 – Esquema dos apertos de mãos

b) **Quadro 12 – Representação dos apertos de mãos entre as pessoas**

	N	A	F	S	P	R	
N		o	o	o	o	o	5
A			o	o	o	o	4
F				o	o	o	+ 3
S					o	o	2
P						o	1
R						(total)	15

c)



Ricardo cumprimenta todos os outros 5 e sai. 5
Paulo cumprimenta todos os outros 4 e sai. 4
Sérgio cumprimenta todos os outros 3 e sai. + 3
Felipe cumprimenta todos os outros 2 e sai. 2
Annelise cumprimenta a única que sobrou e sai. 1
Total 15

Figura 47 – Representação de um processo combinatório

Fórmula de Combinação Simples

$$C_{(n,p)} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \rightarrow C_{(6,2)} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = 15$$

Alguns problemas matemáticos podem ser resolvidos aritmeticamente pensando de forma inversa, ou seja, pensar nas informações dadas pelo problema de trás para frente ou utilizando a Álgebra elementar, como acompanhamos nos problemas a seguir.

(5) Certo dia um homem entrou em uma igreja, rezou para o santo e pediu: “se você dobrar o que eu tenho no bolso eu te dou 200”. O santo dobrou o valor do dinheiro que o homem tinha no bolso. Ele entrou em outra igreja e pediu ao santo: “se você dobrar o que eu tenho no bolso eu te dou 200”. O santo dobrou. Em seguida o homem entrou na 3ª igreja e disse ao santo: “se você dobrar o que eu tenho no bolso eu te dou 200”. O santo dobrou, o homem pagou e saiu da igreja sem dinheiro. Qual era a quantia em dinheiro que o homem tinha quando entrou na 1ª igreja?

- **Resolução A**: utilizando a aritmética e pensando no problema de trás para frente.

Quadro 13 – Pensando na ordem inversa do problema

Igrejas	Saiu	Entrou
3ª igreja	0 = 200 – 200 = 2 x 100 – 200	100
2ª igreja	100 = 300 – 200 = 2 x 150 – 200	150
1ª igreja	150 = 350 – 200 = 2 x 175 – 200	175

- **Resolução B**: utilizando a Álgebra elementar

Quadro 14 – Resolução por meio da Álgebra elementar

Igrejas	Entrou	Saiu
1ª igreja	x	2 x – 200
2ª igreja	2 x – 200	2 (2 x – 200) – 200
3ª igreja	2 (2 x – 200) – 200	2 [2 (2 x – 200) – 200] – 200 = 0

$2\,[2\,(2x - 200) - 200] - 200 = 0 \quad \rightarrow \quad 2\,[4x - 400 - 200] - 200 = 0$

$2\,[4x - 400 - 200] - 200 = 0 \quad \rightarrow \quad 8x - 1\,200 - 200 = 0$

$8x = 1\,400 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 175}$

(6) Três irmãos repartiram 24 maçãs, cada um obtendo um número igual à sua idade três anos antes. O mais jovem propôs uma troca:

Eu ficarei apenas com metade das maçãs que eu tenho, e dividirei o resto igualmente entre vocês dois. Entretanto, o irmão do meio, ficando com metade de suas maçãs acumuladas, deve dividir o resto igualmente entre o irmão mais velho e eu, e depois, o irmão mais velho deve fazer o mesmo.

Eles concordaram. O resultado é que cada um terminou com 8 maçãs. Quantos anos os irmãos tinham? (KORDEMSKY, 1972, p. 97).

➢ **Resolução A**: Uma das resoluções envolve a aritmética e o pensamento inverso à seqüência dos dados do problema.

Antes do mais velho dar metade de suas maçãs aos seus irmãos ele tinha 16; o do meio e o mais jovem tinha 4 cada um.

Antes do irmão do meio dividir suas maçãs ele tinha 8; isso significa que o mais velho tinha 16 – $\frac{1}{2}$(4) = 14 e o mais jovem tinha 2.

Antes do mais jovem dividir suas maçãs ele tinha 4; o irmão do meio tinha 8 – $\frac{1}{2}$ (2) = 7 e o mais velho 13. Para finalizar, basta acrescentar 3, já que essas quantidades correspondem às idades 3 anos antes.

Assim, concluímos que as idades são as seguintes: O irmão mais jovem tem 7 anos, o irmão do meio tem 10 e o mais velho tem 16 anos.

➢ **Resolução B**: Ainda pensando na ordem inversa à apresentada pelo problema, podemos registrar os dados em uma tabela. Partimos da informação em que todos terminaram com 8 maçãs.

Quadro 15 – Pensando na ordem inversa do problema

Divisão	Irmão mais jovem	Irmão do meio	Irmão mais velho
Final	8	8	8
3ª	No final para ficar com 8 tendo recebido 4 do irmão mais velho significa que 8 – 4 = 4 Ele tinha 4 maçãs.	Idem ao irmão mais jovem. 8 – 4 = 4 Ele tinha 4 maçãs.	Para o mais velho ficar com 8, antes da divisão tinha 16. **8x2=16** Ficou com metade (8) e o resto dividiu igualmente com os outros dois (8:2 = 4).
2ª	Para ficar com 4, tendo recebido 2 do irmão do meio, significa que 4 – 2 = 2 Ele estava com 2 maçãs.	Para o irmão do meio ficar com 4, depois da divisão, antes ele tinha **2 x 4 = 8** Ficou com metade (4) e o restante dividiu igualmente com os outros dois (4:2 = 2).	Para ficar com 16 maçãs tendo, recebido 2 do irmão do meio, significa que antes tinha 16 – 2 = 14 Ele tinha 14 maçãs.
1ª	Para o mais jovem ficar com 2 maçãs, depois da divisão, significa que antes tinha **2 x 2 = 4** Ficou com a metade (2) e o resto dividiu igualmente com os outros irmãos (2:2=1)	Para ficar com 8 maçãs, depois de receber 1 do irmão mais jovem, implica que antes tinha 8 – 1 = 7 Possuía 7 maçãs.	Para ficar com 14 maçãs, depois de receber 1 do irmão mais jovem, implica que antes tinha 14 – 1 = 13 Possuía 13 maçãs.

A partir dessas quantidades iniciais de maçãs determinamos as respectivas idades somando 3:

Irmão mais jovem: 4 + 3 = 7 anos

Irmão do meio: 7 + 3 = 10 anos

Irmão mais velho: 13 + 3 = 16 anos.

- **Resolução C**: Utilizando a Álgebra elementar e um quadro

Quadro 16 – Resolução por meio da Álgebra elementar

Divisão	Irmão mais jovem nº de maçãs = a	Irmão do meio nº de maçãs = b	Irmão mais velho nº de maçãs = c
1ª	* $\frac{a}{2}$	b + $\left(\frac{a}{2} \div 2\right)$ = $\frac{4b+a}{4}$ Se o irmão jovem fica com $\frac{a}{2}$ cada um dos outros dois irmãos ficará com $\frac{a}{4}$	c + $\frac{a}{4}$ = $\frac{4c+a}{4}$
2ª	$\frac{a}{2}+\frac{\frac{4b+a}{4}}{4}=\frac{a}{2}+\frac{4a+b}{16}$ $\frac{9a+4b}{16}$	* $\frac{\frac{4b+a}{4}}{2}=\frac{4b+a}{8}$	$\frac{4c+a}{4}+\frac{4b+a}{16}$ $\frac{5a+4b+16c}{16}$
3ª	$\frac{9a+4b}{16}+\frac{\frac{5a+4b+16c}{16}}{4}$ $\frac{4(9a+4b)+5a+4b+16c}{64}$ $\frac{41a+20b+16c}{64}=8$	$\frac{4b+a}{8}+\frac{5a+4b+16c}{64}$ $\frac{8(4b+a)+5a+4b+16c}{64}$ $\frac{13a+36b+16c}{64}=8$	* $\frac{\frac{5a+4b+16c}{16}}{2}$ $\frac{5a+4b+16c}{32}=8$

OBS. (1) O símbolo * indica quem está dividindo as maçãs em cada momento.

(2) Na terceira divisão cada uma das frações é igualada a 8, porque é a quantidade final com que cada irmão ficou.

Do enunciado do problema (três irmãos repartiram 24 maçãs: a+b+c=24) e das três equações obtidas acima determinamos um sistema com 4 equações e três incógnitas.

$$\begin{cases} a + b + c = 24 & (1) \\ 41a + 20b + 16c = 512 & (2) \\ 13a + 36b + 16c = 512 & (3) \\ 5a + 4b + 16c = 256 & (4) \end{cases}$$

Esse sistema pode ser resolvido utilizando vários métodos (escalonamento, substituição, etc). Apresentamos a resolução pelo método da adição e da substituição.

De (3) e (4) temos:

$$\begin{array}{lcl} 13a + 36b + 16c = 512 & & 13a + 36b + 16c = 512 \\ 5a + 4b + 16c = 256 & \times(-1) & -5a - 4b - 16c = -256 \\ \hline & & 8a + 32b = 256 \\ & & a = 32 - 4b \qquad (5) \end{array}$$

De (1) e (5): $32 - 4b + b + c = 24 \rightarrow c = 3b - 8$ (6)

Substituindo (5) e (6) em (2) temos:

$41(32 - 4b) + 20b + 16(3b - 8) = 512$

$1312 - 164b + 20b + 48b - 128 = 512$

$-164b + 68b = 512 - 1184$

$-96b = -672 \rightarrow$ **b = 7**

Substituindo o valor de b em (5) e (6), obtemos os valores de **a** e **c**, ou seja: $a = 32 - 4.7 \rightarrow$ **a = 4**

$c = 3.7 - 8 \rightarrow$ **c = 13**

Em seguida, acrescentamos 3 em cada quantidade de maçã obtida pelas equações.

Irmão mais jovem: a + 3 = 4 + 3 = **7 anos**

Irmão do meio: b + 3 = 7 + 3 = **10 anos**

Irmão mais velho: c + 3 = 13 + 3 = **16 anos**

(7) De todos os retângulos que têm o mesmo perímetro, qual o que tem maior área?

- **Resolução A**: Por relações algébricas.

Partimos da hipótese de que o quadrado é o que tem maior área!

Área do retângulo	→	a . b
Perímetro do retângulo	→	2a + 2 b = 2 (a + b)
Área do quadrado	→	x^2
Perímetro do quadrado	→	4x

Uma idéia para resolver o problema é relacionar o perímetro do retângulo com o perímetro do quadrado:

2a + 2b = 4x	→	2 (a + b) = 4x
Lado do quadrado	→	$x = \frac{a+b}{2}$
A área do quadrado	→	$A = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > a.b$
$A = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > a.b$	→	$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$
$a^2 - 2ab + b^2 > 0$	→	$(a-b)^2 > 0$

Essa desigualdade será válida, a menos que a = b, ou seja, que o retângulo em questão seja um quadrado.

Esse problema foi resolvido com o recurso da álgebra elementar, fazendo uma comparação de áreas e perímetros entre retângulo e quadrado.

- **Resolução B**: Por derivada ou também conhecido como processo de maximização.

$S = x.y$ e $u = \frac{1}{2}$ perímetro → $u = x + y$ **(I)**

$F(x) = x(u - x) = xu - x^2$

A área é máxima quando a derivada primeira de F(x) é igual a zero, ou seja, $F'(x) = 0$ →$u - 2x = 0$ **(II)**

Substituindo (I) em (II) temos:

$x + y - 2x = 0$ → $y = x$, isso significa que a área é máxima quando y e x são iguais, ou seja, quando temos um quadrado.

- **Resolução C**: Por Geometria Analítica.

O presente problema pode se transportado para uma resolução totalmente diferente, utilizando o conceito de simetria associado às coordenadas cartesianas, ou seja, à Geometria Analítica.

Podemos representar cada retângulo por meio de um ponto no plano cartesiano. No gráfico a seguir (Figura 48), temos a representação gráfica do perímetro, que associa retângulos diferentes que têm em comum o fato de possuírem o mesmo perímetro. Por exemplo, perímetro igual a 16.

Retângulo	Lados
R_1	1 x 7
R_2	2 x 6
R_3	3 x 5
R_4	4 x 4
R_5	5 x 3

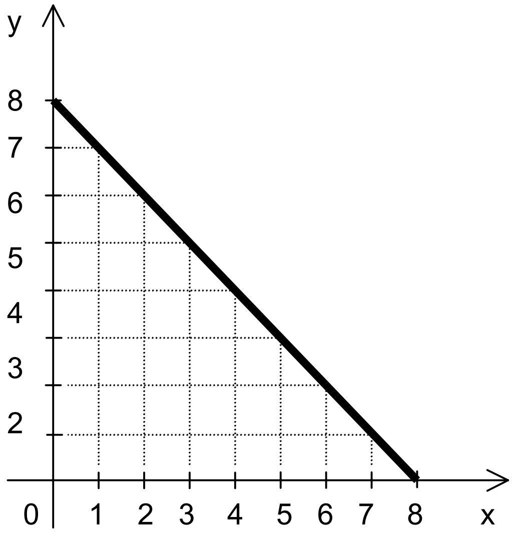


Figura 48 – Tabela e representação gráfica de diferentes retângulos com mesmo perímetro

A reta acima representa todos os retângulos de perímetro 16 e é definida por U = x + y, em que u = $\frac{P}{2}$ (metade do perímetro).

No próximo gráfico temos a representação gráfica da área que associa diferentes retângulos que possuem a mesma área. Nesse caso, a área de cada retângulo também é representada por um ponto, definindo assim uma hipérbole: A = x.y. Considerando Área = 16, temos:

Retângulo	Área
R_1	1 x 16
R_2	2 x 8
R_3	4 x 4
R_4	8 x 2
R_5	16 x 1

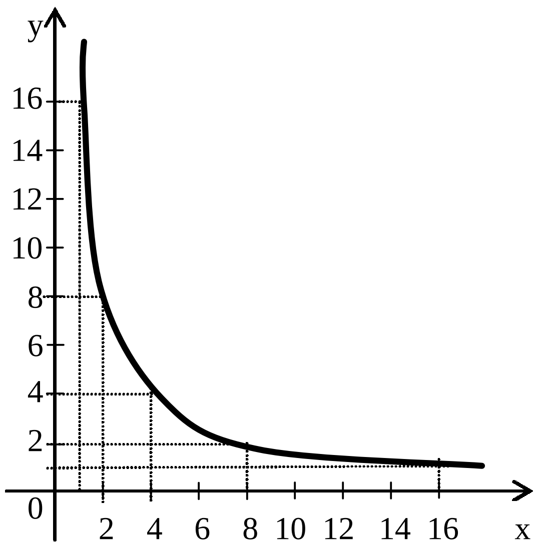
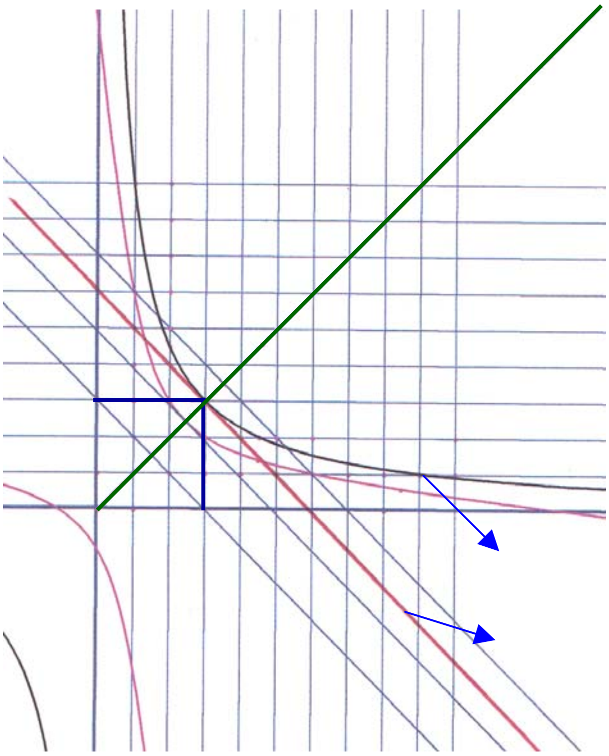


Figura 49 – Tabela e representação gráfica de diferentes retângulos com mesma área

Dessa forma, a hipérbole representa todos os retângulos que têm área igual a 16.

Fazemos a sobreposição dessas duas representações gráficas num mesmo plano cartesiano. Além dessas, podemos construir outras retas (que relacionam retângulos de mesmo perímetro) e outras hipérboles (que relacionam retângulos de mesma área) formando curvas de nível.

Nesse plano cartesiano constatamos que existem alguns pontos de intersecção entre retas e hipérboles. Dentre esses pontos, há alguns que coincidem com a bissetriz do primeiro quadrante do plano cartesiano, ou seja, com a função identidade. Essa intersecção sempre ocorre na representação do quadrado. Nos demais pontos da hipérbole há simetria entre os pontos dois a dois, conforme observamos no gráfico seguinte.



De todos os retângulos que estão contidos em uma determinada reta o de maior área é aquele que tem intersecção com uma hipérbole que representa a área. Essa intersecção coincide com a reta que representa a bissetriz do primeiro quadrante.

Por exemplo, de todos os retângulos de perímetro 12, o de maior área é o quadrado de lado 3, que intercepta a hipérbole de área 9; os demais retângulos têm área menor do que 9. Ou de todos os retângulos de perímetro 16, o de maior área é o quadrado de lado 4, que intercepta a hipérbole de área 16. E assim por diante

Figura 50 – Representação gráfica de retas e hipérboles associando perímetros e áreas de diferentes retângulos

Nessa resolução, a Geometria Analítica tornou-se um instrumento que possibilitou representar e comparar retângulos de mesmo perímetro com retângulos de mesma área.

(8) Um comerciante até o momento vendia por mês 300 unidades de uma mercadoria e tinha R$ 2000,00 de lucro por unidade. Ele começou a pensar de que forma poderia mudar o preço para vender mais. Uma pesquisa de marketing informou-o que para cada 5 reais de redução do preço atual ele iria vender uma peça a mais. Qual será o melhor preço?

- **Resolução A**: Um estudante sabendo que a relação entre a quantidade e o lucro é linear, poderia escrever essa relação como y = ax + b, em que y significa o número das vendas e x o lucro por unidade. Devemos calcular a e b, sabendo que:

$$300 = 2000a + b \qquad (1)$$

$$301 = 1995a + b \qquad (2)$$

Concluímos que a = – 0,2 e b = 700 → y = – 0,2x + 700.

Pretendemos escolher x e y para fazer (x . y) maior possível. Definimos z = 0,2x, portanto, y = – z + 700. Se (x . y) é máximo, (z . y) também será máximo.

Sabemos que o quadrado tem a maior área entre todos os retângulos de mesmo perímetro. Assim, escolhemos z = y e sabendo que z + y = 700, os valores y = 350 e x = 1750 dão o lucro máximo, ou seja, o comerciante deverá vender 50 unidades a mais que o normal (300).

A resolução desse problema apoiou-se na Álgebra elementar. Podemos ainda, com base nela, escolher um caminho melhor, menos padronizado, menos estático. A semântica, (interpretação das incógnitas) da língua matemática ou algébrica, precisa acompanhar a dinâmica das atividades matemáticas. Na segunda resolução a relação essencial está entre o crescimento das vendas *x* e a redução do preço que é y = 5x, conforme acompanhamos a seguir.

- **Resolução B**: Seja x o crescimento das vendas. Para vender x unidades a mais o comerciante precisa baixar o preço em 5x. O lucro é:

$$(300 + x).(2000 - 5x) = 600000 + 5x\ (100 - x) = 5\ [120000 + x\ (100 - x)]$$

O maior lucro depende do valor máximo de x . (100 – x). Como a área do quadrado é maior do que qualquer retângulo de uma mesma circunferência, temos x = (100 – x), então x = 50.

Apesar de termos duas resoluções utilizando o mesmo método, o da Álgebra elementar, verificamos enfoques matemáticos distintos. A primeira partiu da denominação das incógnitas (x, y e z) e houve uma repetição de conceitos. Já a segunda resolução se desenvolveu em termos da atividade matemática, ressaltando a estrutura do problema. Com isso, a resolução foi mais simples, objetiva, reduzida e com a atribuição de apenas uma incógnita.

No próximo item, apresentamos alguns problemas matemáticos que propiciam a elaboração ou identificação de idéias gerais, que podem ser aplicadas em outras situações.

3.1.2. Resolução de problemas e construção de idéias gerais

Alguns problemas matemáticos podem estar ligados por uma idéia ou por um conceito que pode ser aplicado em outros problemas ou utilizado para construir idéias gerais. Essas idéias gerais possibilitam analisar qualquer situação do problema em questão.

Outros problemas possuem casos particulares que não podem ser transferidos para outros contextos, como ocorreu com a geometria clássica, em que cada caso é um caso sigular que exige, muitas vezes, provas singulares. Um exemplo é o Teorema dos Cossenos, em que a prova deve ser analisada quando o triângulo tem um ângulo agudo, quando tem um ângulo obtuso e um ângulo reto, cujas demostrações para cada caso são bem diferentes.

Teorema dos Cossenos: “Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo por eles formado” (JÚNIOR, 1988, p. 146).

Hipótese: ABC é um triângulo (Figura 51)

Tese: $a^2 = b^2 + c^2 – 2b.c.\cos Â$

Demonstração: há três casos a considerar, quanto ao ângulo Â: ou seja, Â reto, Â agudo e Â obtuso.

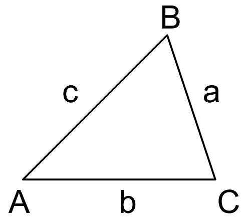


Figura 51 – Triângulo ABC

Caso 1 – Â é agudo

Traçamos a altura BH = h, que é interna ao triângulo ABC, e chamamos **m** à projeção do lado **c** sobre o lado **b**.

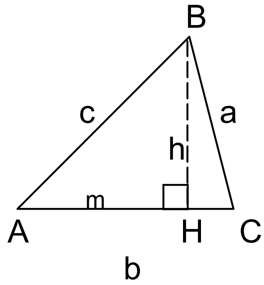


Figura 52 – Triângulo ABC acutângulo

Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos CBH e ABH (Figura 52), temos:

$$\begin{cases} a^2 = h^2 + (b – m)^2 \\ c^2 = h^2 + m^2 \end{cases}$$

Eliminando h^2 por substituição, resulta em:

$$a^2 = c^2 – m^2 + (b – m)^2 \quad \rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 – 2bm \qquad (\mathrm{I})$$

Do ΔABH, temos: $\cos Â = \frac{m}{c}$ ou $m = c. \cos Â$

Substituindo **m** em (**I**), obtemos: $a^2 = b^2 + c^2 – 2.b.c. \cos Â$

Caso 2 – Â é obtuso

Traçamos a altura BH = h e chamamos **m** à projeção do lado **c** sobre a reta que contém o lado **b**, pois a altura é externa ao triângulo obtusângulo.

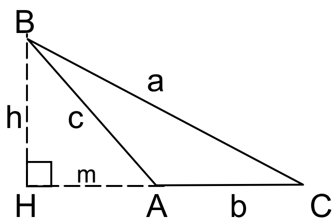


Figura 53 – Triângulo ABC obtusângulo

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos BHC e BHA (Figura 53), temos:

$$\begin{cases} a^2 = h^2 + (b + m)^2 \\ c^2 = h^2 + m^2 \end{cases}$$

Eliminando h^2 por substituição, resulta em:

$a^2 = c^2 - m^2 + (b + m)^2 \quad \rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 + 2bm \qquad (I)$

Do ΔABH, temos: $\cos(180^\circ - \hat{A}) = \frac{m}{c}$ ou $m = -c \cdot \cos\hat{A} \qquad (I)$

Substituindo **m** em (I), obtemos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$

Caso 3 – Â é reto

A altura BH coincide com o lado AB (Figura 64). Nesse caso, recaímos no Teorema de Pitágoras, em que temos $a^2 = b^2 + c^2$, pois $\cos\hat{A} = \cos 90^\circ = 0$, anulando o termo $- 2.b.c.\cos\hat{A}$.

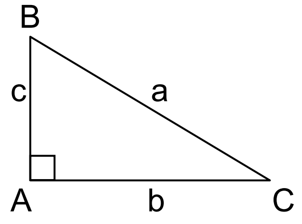


Figura 54 – Triângulo ABC retângulo

O enunciado vale para qualquer triângulo, porém, a demonstração deve ser feita para os três triângulos particulares, em que temos a altura BH sendo diferente em cada um dos três casos.

No grande universo de problemas matemáticos há alguns que não podem ser resolvidos por uma fórmula, por um teorema, ou por uma representação padrão. Às vezes, há um número muito grande de informações que se torna quase impossível sua resolução, sendo necessário estabelecer uma estratégia ou um diagrama particular para a organização dos dados e a compreensão do problema. Esses problemas dependem essencialmente da escolha de uma representação apropriada, como podemos constatar nos exemplos que se seguem.

(9) Ms. X, Ms. Y e Ms. Z – uma Americana, uma Inglesa e uma Francesa, mas não necessariamente nessa ordem, sentaram-se em volta de uma mesa circular, para jogar Baralho. Cada uma passou três cartas para a pessoa à sua direita. Ms. Y passou três cartas para a Americana. Ms. X passou a rainha de espadas e dois ouros para a pessoa que passou sua carta para a Francesa. Quem era a Americana? A Inglesa? A Francesa? (AVERBACH & CHEIN, 2000, p. 2 e 5-7).

Resolução: Foi dada a seguinte informação:

1. Cada pessoa passou para a sua direita;

2. Ms. Y passou para a Americana (o fato dela ter passado três cartas é irrelevante).
3. Ms. X passou para a pessoa que passou para a Francesa.

De que forma podemos utilizar essas informações? Um diagrama ajudaria (Figura 55).

Como Ms. Y passou para a Americana, ela não é a pessoa que passou para a Francesa (*Esquema I*). Ms. X passou para a pessoa que passou para a Francesa (*Esquema II*). Ms. X passou para Ms. Y? Não, quando comparamos os *Esquemas I* e *II*. Então, Ms. X passou para Ms. Z (*Esquema III*) e Ms. Y é a Francesa (*Esquema IV*). Combinando os *Esquemas III* e *IV* figuras com o *Esquema I*, encontramos que Ms. X é a Americana (*Esquema V*), e, conseqüentemente, Ms. Z é a Inglesa (*Esquema VI*).

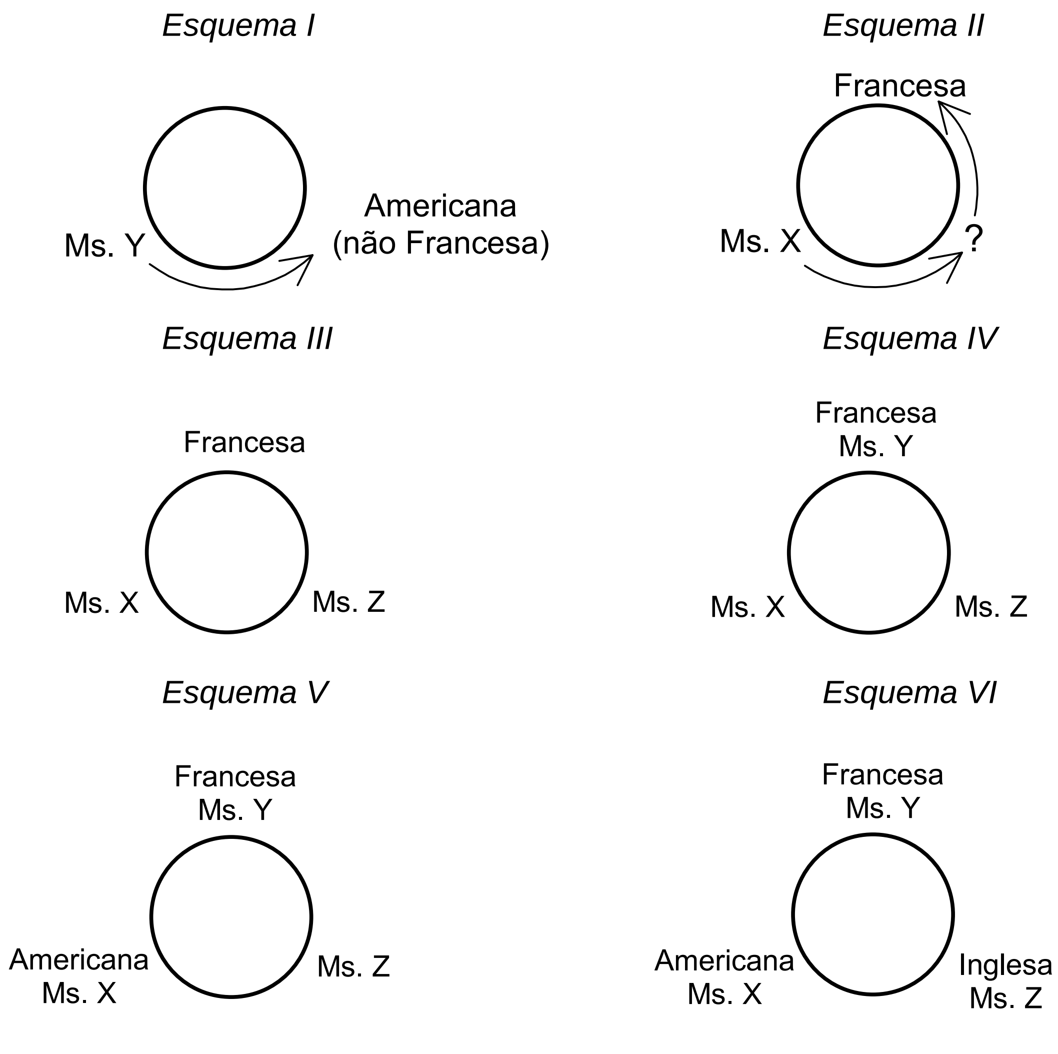


Figura 55 – Registro sequencial das informações fornecidas pelo problema

A lista das informações pertinentes e o auxílio de vários diagramas contribuíram para a resolução do problema.

(10) Seis pessoas, denominadas A, B, C, D, E, F, estão no vagão restaurante de um trem. Cada uma delas é de uma cidade diferente: New York, Chicago, Tulsa, St. Louis, Milwaukee e Atlanta. Os fatos seguintes são conhecidos:

1. **A** e o homem de New York são médicos.
2. **E** e a mulher de Chicago são professores.
3. A pessoa de Tulsa e **C** são engenheiros.
4. **B** e **F** são veteranos da guerra do Golfo, mas a pessoa de Tulsa nunca prestou serviço militar.
5. A pessoa de Milwaukee é mais velha do que **A**.
6. A pessoa de Atlanta é mais velha do que **C**.
7. Em St. Louis descem **B** e o homem de New York.
8. Em San Francisco descem **C** e o homem de Milwaukee.

Compare o nome das pessoas com as suas profissões e as suas cidades (KRANTZ, 1996, p. 177-179).

Quadro 17 – Registro das negações entre cidades e pessoas

	A	B	C	D	E	F
New York	X	X	X		X	
Chicago	X		X		X	
Tulsa	X	X	X		X	X
St. Louis						
Milwaukee	X	X	X			
Atlanta			X			

Um **X** é colocado em uma célula da tabela quando a conexão é impossível. Por exemplo, a declaração 1 garante que A não é um homem de New York, então colocamos um X na coluna A e na linha de New York. Igualmente, a declaração 7 garante que B não é de New York. As declarações 1 e 2 juntas implicam que A, que é um médico, não pode ser de Chicago (porque a pessoa de Chicago é professora). Os outros X's vêm de raciocínio similar.

Tendo colocado todos esses X's, podemos ver que C só pode ser de St. Louis. Entretanto, a única possível cidade para A é Atlanta. Como St. Louis foi fixada para C, ela foi eliminada para as outras cinco pessoas e podemos marcá-las com o símbolo #. Igualmente, podemos eliminar Atlanta para todas menos para A. Faz-se necessário adotar um outro símbolo ✶ para indicar que a cidade já foi marcada com uma pessoa:

Quadro 18 – Registro das eliminações de possibilidades e afirmações entre cidades e pessoas

	A	B	C	D	E	F
New York	X	X	X		X	
Chicago	X		X		X	
Tulsa	X	X	X		X	X
St. Louis	#	#	✶	#	#	#
Milwaukee	X	X	X			
Atlanta	✶	#	X	#	#	#

Agora podemos verificar rapidamente que B tinha que ser de Chicago, E de Milwaukee, F de New York e finalmente D de Tulsa.

As declarações 1-3 relacionam seis iniciais ou cidades às profissões. Com isso, concluímos que:

- A é de Atlanta e é médico;
- B é de Chicago e é professora;
- C é de St. Louis e é engenheiro;
- D é de Tulsa e é engenheiro;
- E é de Milwaukee e é professor;
- F é de New York e é médico.

Outra forma de confrontar os dados é organizando a tabela de outra maneira, utilizando apenas as letras S (Sim) quando temos uma afirmação e N (Não) quando temos uma eliminação, como constatamos a seguir.

Quadro 19 – Registro das negações e afirmações entre cidades, profissões e pessoas

	Méd	**Prof**	**Eng**	**Mil**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
New York	**S**	N	N	N	N	N	N	N	N	**S**
Chicago	N	**S**	N	**S**	N	**S**	N	N	N	N
Tulsa	N	N	**S**	N	N	N	N	**S**	N	N
St. Louis	N	N	**S**	N	N	N	**S**	N	N	N
Milwaukee	N	**S**	N	N	N	N	N	N	**S**	N
Atlanta	**S**	N	N	**S**	**S**	N	N	N	N	N
A	**S**	N	N	N						
B	N	**S**	N	**S**						
C	N	N	**S**	N						
D	N	N	**S**	N						
E	N	**S**	N	N						
F	**S**	N	N	**S**						

Primeiramente marcamos com S as afirmações feitas de 1 a 4.

Das afirmações 1, 2 e 3 temos as seguintes conseqüências:

A não é de New York.

A não é de Chicago porque a pessoa de Chicago é professora e não médica.

A também não é de Tulsa porque a pessoa de Tulsa é engenheira.

A mesma análise é feita com as outras informações e com isso preenchemos a tabela com a letra N.

Da afirmação 4 temos que **B** e **F** não são de Tulsa. Com isso concluímos que **D** só pode ser de Tulsa. Colocamos **S** na célula Tulsa-D (linha de Tulsa com a coluna **D**). Conseqüentemente, completamos com N toda a coluna de D. Como a pessoa de Tulsa e C são engenheiros e D é a pessoa de Tulsa, marcamos **S** na célula D-Eng (linha D e coluna Eng).

A afirmação 5 indica que **A** não é de Milwaukee. E a 6 informa que C não é de Atlanta.

A afirmação 7 define que **B** não é de New York. E a 8 indica que **C** não é de Milwaukee. Essa última informação estabelece que **C** só pode ser de St. Louis e automaticamente definimos que **A** é de Atlanta. Completando com N as linhas de St. Louis e de Atlanta, resta apenas a célula Milwaukee-E, o que significa que E é de Milwaukee.

Resta ainda a célula Chicago-B para completar com S, na qual determinamos que **B** é de Chicago. Por último, definimos que **F** é de New York. Como a afirmação 2 menciona que a pessoa de Chicago é professora, devemos marcar essa informação na célula B-Prof., que indica que além de ter servido na guerra do Golfo ela é professora. O mesmo deve ser feito para **F** que é médico e também veterano da guerra do Golfo.

Preenchendo por completo o quadro que associa as cidades iniciais dos nomes das pessoas, resta fazer a relação com as profissões, chegando à mesma conclusão da resolução anterior. Por exemplo:

A é de Atlanta e é médico;

B é de Chicago e é professora; e assim por diante.

Como **A** e **F** são médicos, **F** é de New York e **A** é de Atlanta. Assim, marcamos com um **S** a coluna médico e linha Atlanta. As demais células da coluna “médico” são preenchidas com N. Com isso, concluimos que os médicos moram em New York e Atlanta.

O mesmo raciocínio é desenvolvido nas outras colunas das profissões com as linhas das cidades, tendo como referência as respostas já obtidas com os nomes. Em outras palavras, para completar a tabela, no campo das profissões e das cidades, devemos repetir as informações envolvendo **S** tanto nas linhas como nas colunas.

Para resolver problemas como esses apresentados, não bastam aplicações de fórmulas, porque dificilmente chegaríamos a um resultado. Sua resolução exige apenas o uso de uma representação adequada para que se encontre a resposta desejada.

Se olharmos um problema em certa perspectiva, naturalmente seremos conduzidos para uma área ou para um tipo de problema. Se resolvermos de outra maneira, seremos conduzimos para outro campo, como ilustra o próximo problema.

(11) Uma eliminação de um torneio de boxe foi organizada. Havia 114 participantes e, portanto, 57 partidas seriam realizadas no primeiro round do torneio. No segundo round, os 57 pugilistas restantes foram emparelhados, resultando em 28 partidas; um pugilista recebeu um “adeus” (quer dizer, não tinha que lutar naquele round). Os 29 pugilistas restantes foram novamente emparelhados, e assim por diante.

a) Quantas partidas ao todo foram necessárias para determinar o vencedor do torneio?

b) Quantas partidas seriam necessárias se *n* pessoas participassem do torneio (em que *n* representa um número inteiro fixo, porém, não especificado)? (AVERBACH & CHEIN, 2000, p. 2 e 4).

Resolução: Para resolver o item (a) do problema podemos pensar da seguinte forma:

1º round:	57 partidas,	57 pugilistas restantes.
2º round:	28 partidas,	29 pugilistas restantes.
3º round:	14 partidas,	15 pugilistas restantes.
4º round:	7 partidas,	8 pugilistas restantes.
5º round:	4 partidas,	4 pugilistas restantes.
6º round:	2 partidas,	2 pugilistas restantes.
7º round:	1 partida,	1 vencedor restante.

Assim, 57 + 28 + 14 + 7 + 4 + 2 + 1 = 113 partidas que devem ocorrer.

Esse raciocínio conduz à resposta correta, no entanto, ele não possibilita obter uma resposta para o item (b) do problema.

Muitas vezes, a representação é essencial para proporcionar a construção de uma idéia geral. Outra representação que pode ser utilizada para resolver o item (a), e que conduz a uma generalização do item (b), é exposta a seguir.

Como deve haver apenas um vencedor, dos 114 pugilistas, 113 devem ser eliminados. Para eliminar 113 pugilistas são necessárias 113 partidas.

Ambos os métodos de resolver o item (a) estão corretos, no entanto, a vantagem da segunda representação é que ela conduz automaticamente à resposta do item (b), ou seja, como $(n - 1)$ pugilistas devem ser eliminados, $(n - 1)$ partidas devem ser realizadas.

(12) Dados um jarro de 3 litros e outro de 5 litros (sem qualquer marcação), é possível obter exatamente 1 litro de água? Se sim, como? Se não, por quê? (Adaptado de AVERBACH & CHEIN, 2000, p. 101 e 117-118).

➢ **Resolução A**: Encher o jarro de 3 litros com água e esvaziá-lo no jarro de 5 litros. Encher novamente o jarro de 3 litros e usar parte de seu conteúdo para encher o jarro de 5 litros (que já tem 3 litros nele). Isso deixa 1 litro no jarro de 3 litros (e 5 litros no jarro de 5 litros, que podem ser jogados fora).

Esse procedimento pode ser ilustrado por meio de desenhos, representando as respectivas etapas e começando a encher o jarro de 3 litros (Figura 56).

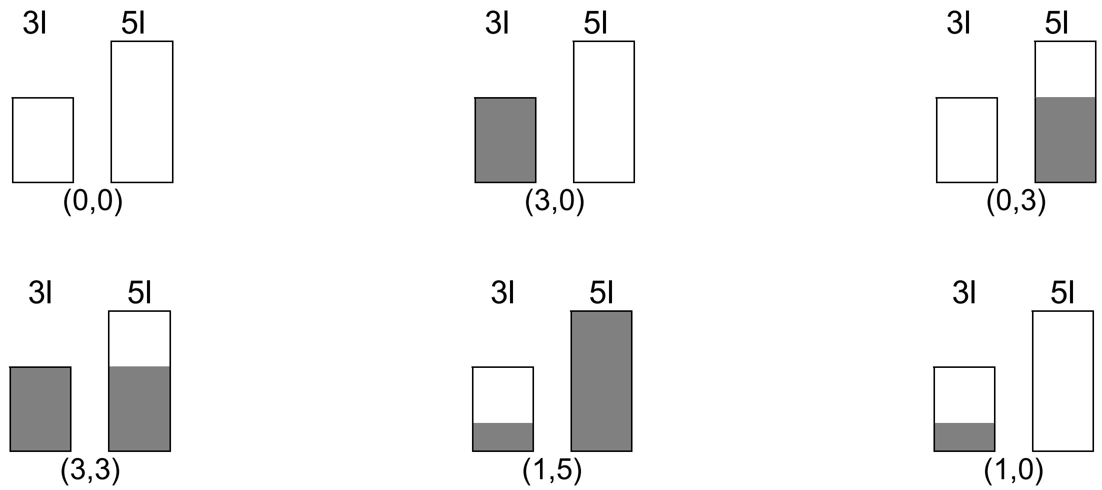


Figura 56 – Representação de cada etapa para obtenção de 1 litro, começando a encher o jarro de 3 litros

Esse problema pode ser representado algebricamente como segue:

Contar + 1 toda vez que o jarro de 3 litros estiver completamente cheio e – 1 toda vez que ele estiver completamente vazio. Obtemos então, um inteiro *x* que representa aquele número final de enchimentos e esvaziamentos completos do jarro de 3 litros. (Se o jarro de 3 litros é enchido mais freqüentemente do que é esvaziado, então *x* será positivo; se ele é esvaziado mais frequentemente do que enchido, então *x* será negativo). Da mesma forma, obtemos um número *y* para o jarro de 5 litros. Derramando de um jarro para outro, como no movimento da etapa 3 acima, não muda *x* e *y*.

Se 1 litro é obtido pelo enchimento (ou esvaziamento) do jarro de 3 litros por *x* vezes e do jarro de 5 litros por *y* vezes, nesse caso, temos a equação $3x + 5y = 1$, em que $3x + 5y$ é a quantidade final de água que foi removida completamente. (Notemos que, se um jarro contém 1 litro, então, o outro deve estar ou vazio ou cheio. No último caso, pode ser esvaziado, deixando apenas 1 litro). Essa é uma equação Diofantina, desde que *x* e *y* sejam números inteiros.

Uma vez que os coeficientes de *x* e *y* são pequenos, é fácil encontrar (por tentativa e erro) soluções para essa equação. Uma das soluções é quando temos $x = 2$ e $y = -1$. Mas o que isso significa? De acordo com a interpretação de *x* e *y*, isso significa que devemos encher completamente o jarro de 3 litros duas vezes e esvaziar totalmente o jarro de 5 litros uma vez. Como encher algo duas vezes sem esvaziá-lo? Como esvaziar algo que não tinha nada no início?

A resposta é simples. Primeiro enchemos completamente o jarro de 3 litros e, em seguida, o esvaziamos, jogando o líquido no jarro de 5 litros. (Como ele não está sendo esvaziado por completo, isso não afeta *x*). Assim, podemos encher o jarro de 3 litros pela segunda vez.

Agora é preciso esvaziar o jarro de 5 litros por completo, porém, ele não está cheio. Nesse caso, ele deve ser completado com a água do jarro de 3 litros (deixando apenas 1 litro no jarro de 3 litros), e assim, o jarro de 5 litros é esvaziado completamente. Esse é o mesmo procedimento realizado anteriormente.

As relações algébricas possibilitam obter as possíveis resoluções para esse problema. Na primeira, começamos enchendo o jarro de 3 litros e a resposta foi obtida nesse mesmo jarro. Ele pode também ser resolvido começando a encher o jarro de 5 litros. Apresentamos a resolução pela álgebra elementar e por desenhos.

➢ **Resolução B**: Outra possível resolução para a equação definida anteriormente é $x = -3$ e $y = 2$, que corresponde à Figura 57, começando a encher o jarro de 5 litros.

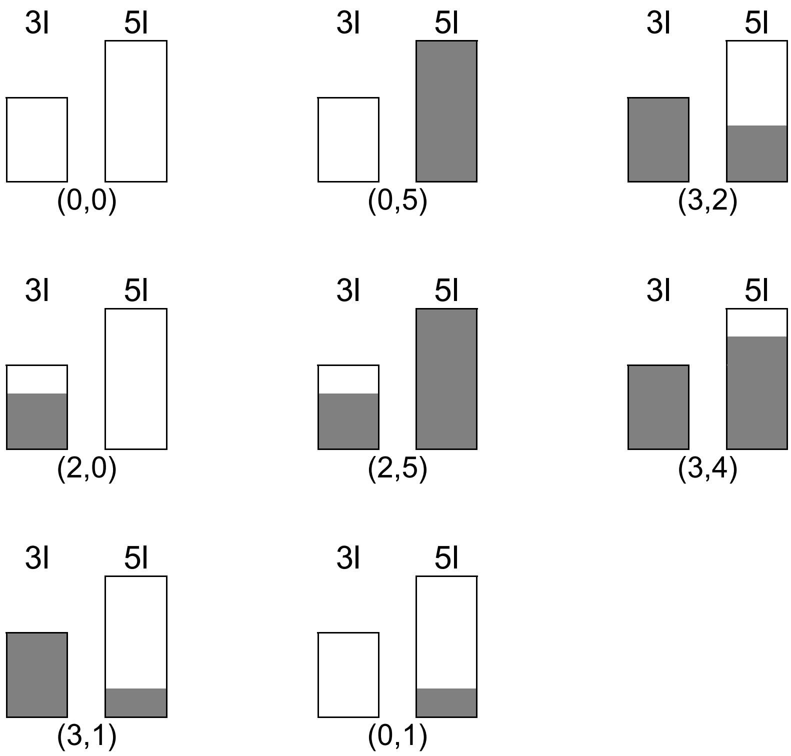
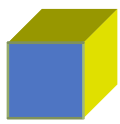


Figura 57 – Representação de cada etapa para obtenção de 1 litro, começando a encher o jarro de 5 litros

A vantagem da representação algébrica é que ela propicia a generalização, e isso facilita o estudo de diferentes possibilidades, sem precisar executar experimentalmente as ações nem por desenhos caso a caso.

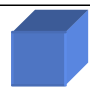
(13) Dispondo de um conjunto de 27 cubinhos unitários com faces de cores diferentes, algumas azuis e outras amarelas, construir um cubo de aresta 3 tendo todas as seis faces somente na cor azul.



Ao tentar montar o cubo de forma aleatória, provavelmente serão necessárias várias tentativas. Uma estratégia para construí-lo é utilizar o conceito das faces expostas no cubo de aresta 3. Devemos pensar nas possíveis posições de cada cubinho, considerando as faces azuis que ficarão expostas.

Primeiramente, podemos fazer uma classificação dos cubinhos em função da quantidade de faces azuis. Assim, dos 27 cubinhos:

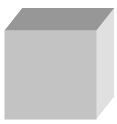
Quadro 20 – Classificação dos cubos unitários de acordo com as cores

8 cubinhos terão três faces azuis, que estarão localizados nos vértices do cubo de aresta 3	
12 cubinhos terão duas faces azuis	
6 cubinhos terão uma face azul	
1 não terá nenhuma face azul (cubinho interno sem face exposta)	

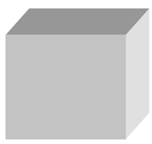
Em seguida, precisamos construir mentalmente o cubo, percebendo cada cubinho com sua posição em relação ao cubo maior. Nesse caso, a percepção está associada aos conceitos espaciais. É preciso pensar na forma tridimensional do cubo, relacionando cada parte (cubinho unitário) com o todo (cubo de aresta 3) e vice-versa. Esse problema possibilita identificar no cubo de aresta 3 a existência de um cubo central, que pode ser constatado em cubos de arestas maiores.

(14) Cortar os cubos da Figura 58 para obter cubinhos com 1 unidade de volume, fazendo os cortes necessários. Podemos obter a mesma quantidade de cubinhos com menos cortes?

i) 2 x 2 x 2



ii) 3 x 3 x 3



iii) 4 x 4 x 4

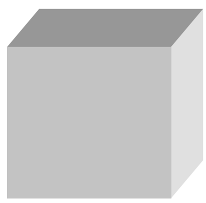


Figura 58 – Desenhos de três cubos com medidas de arestas 2, 3 e 4

No cubo de **aresta 2** Figura 59, cubinhos unitários são obtidos somente com três cortes.

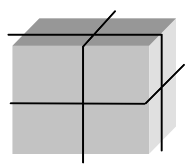


Figura 59 – Cortes dados no cubo de aresta 2

O problema 3 contribui na resolução do problema 4, podendo ser caracterizado como um problema auxiliar, porque a constatação da existência de um cubo central pode ser a idéia principal para se chegar à parte da resolução do problema.

Ao cortar o cubo de **aresta 3** Figura 60, para obter 9 cubinhos, só conseguimos com 6 cortes, e não menos, porque esse cubo tem 1 cubinho interno, que é central (sem faces expostas), e esse deve ter 6 faces. Portanto, precisamos fazer 6 cortes para defini-lo. Assim, a idéia de que um cubo possui 6 faces é o **conceito**, utilizando-o não há a necessidade de realizar todos os cortes para obter a resposta.

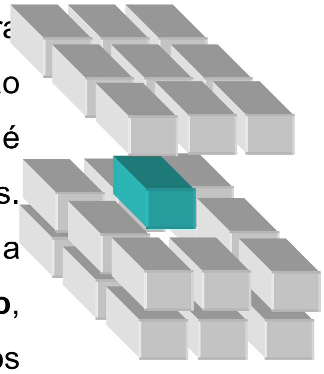


Figura 60 – Representação dos 9 cubos unitários que formam o cubo de aresta 3

No cubo de **aresta 4**, para dividir em unidades, serão necessários 9 cortes (3 em cada sentido), no entanto, podemos economizar cortes cortando sempre ao meio. Depois, agrupamos as partes para dar um novo corte.

Dando um corte em cada uma das dimensões (comprimento, largura e altura) Figura 61, obtemos 8 cubos de aresta 2, que podem ser agrupados de forma a dar novos cortes atingindo todos os cubos restantes. Como já foi visto, no cubo de aresta 2, são necessários 3 cortes, dessa forma, não precisamos fazer todos os cortes.

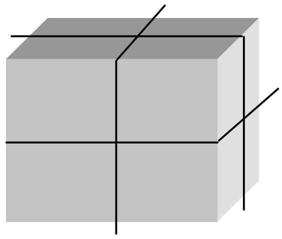


Figura 61 – Cortes dados no cubo de aresta 4

Utilizando o **princípio** de que com alguns cortes obtemos cubos anteriormente estudados, podemos encontrar o número mínimo de cortes a ser dado. Assim, no cubo de aresta 4 temos 3+3 = **6** cortes.

O fato de começar a cortar o cubo de aresta 4 sempre ao meio, indica a presença de um pensamento lógico no sentido de se conseguir uma organização espacial mental, uma seqüência de cortes, até obtermos cubos de aresta 2. A partir daí, já concluímos o número total de cortes, com base no cubo anteriormente analisado, descobrindo a essência do problema.

E para o cubo de **aresta 5**? Como resolver?

Fazendo dois cortes em cada uma das dimensões (comprimento, largura e altura) Figura 62, temos **6** cortes dados, que são inevitáveis, porque são necessários para liberar o cubo central. Com isso, obtemos: 8 cubos de aresta 2; 12 paralelepípedos de arestas 2, 2 e 1; e 6 paralelepípedos de arestas 1, 1 e 2, conforme Figura 63.

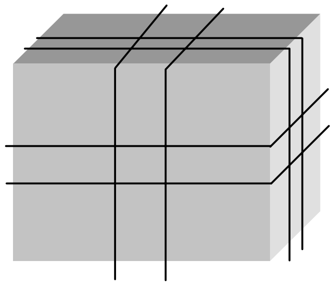
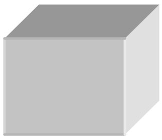
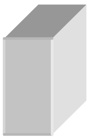


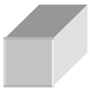
Figura 62 – Cortes dados no cubo de aresta 5



8 cubos de aresta 2



12 paralelepípedos de arestas 2, 2 e 1



6 paralelepípedos de arestas 1, 1 e 2

Figura 63 – Representação dos paralelepípedos contidos no cubo de aresta 5, após os cortes

As partes obtidas com os cortes podem ser agrupadas de forma a dar novos cortes, atingindo todos os cubos restantes. Como o cubo que necessitará de mais cortes é o de aresta 2, nesse caso, bastam mais **3** cortes, totalizando 9 cortes. Novamente utilizamos o **princípio** de que, com alguns cortes, obtemos cubos anteriormente estudados, no caso o de aresta 2, e concluímos o número mínimo de cortes a ser dado.

No entanto, podemos ainda resolver esse problema construindo um princípio mais geral que é:

Dividir qualquer cubo ao meio, ou mais próximo do meio, para obter cubos anteriormente estudados, no qual já se sabe o número mínimo de cortes – idéia da recursividade.

Utilizando um **conceito** e estabelecendo um **princípio** comum, conseguimos obter uma generalização em alguns problemas. Nesse problema dos cubos podemos determinar o número mínimo de cortes para cubos com diversas medidas de aresta, conforme ilustramos a seguir:

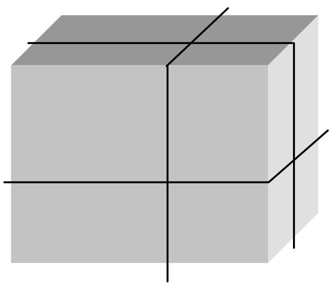


Figura 64 – Generalização para obter cortes em cubos de aresta n

N: medida da aresta do cubo
K: nº de cortes em uma das dimensões: comprimento, ou largura ou altura
C: nº total de cortes reduzidos no cubo
AC = aumento do nº de cortes
Q = quantidade de (C) cortes repetidos

Quadro 21 – Estudo de cortes em vários cubos

N	K	C = 3K	AC	Q
2	1	3	2^1	1 ➔ 2^0
3	2	6		
4	2	6	2^2	2 ➔ 2^1
5	3	9		
6	3	9		
7	3	9		4 ➔ 2^2
8	3	9	2^3	
9	4	12		
10	4	12		
11	4	12		
12	4	12		
13	4	12		8 ➔ 2^3
14	4	12		
15	4	12		
16	4	12	2^4	
17	5	15		
18	5	15		
19	5	15		
20	5	15		
21	5	15		
22	5	15		
23	5	15		
24	5	15		16 ➔ 2^4
25	5	15		
26	5	15		
27	5	15		
28	5	15		
29	5	15		
30	5	15		
31	5	15		
32	5	15	2^5	
33	6	18		
34	6	18		
35	6	18		32 ➔ 2^5
36	6	18		
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
			2^{n-1} ou 2^{k}	2^{n-2} ou 2^{k-1}

Com $2^k \geq n > 2^{k-1}$. Essa idéia geral propicia determinar o número mínimo de cortes para cubos com diversas medidas de aresta, sem precisar recorrer aos cortes dados no cubo imediatamente anterior.

(15) A grama em um pasto cresce igualmente grossa e rápida. Sabemos que 70 vacas podem comer o pasto em 20 dias, enquanto 30 vacas podem fazer isso em 60 dias. Quantas vacas aparariam a grama do pasto inteiro em 30 dias? (PERELMAN, 1979, p.229-234, tradução nossa).

A seguir, apresentamos dois aspectos do problema: a resolução em si e a construção de uma idéia geral.

I) Resolução do Problema

Podemos pensar que se 70 vacas aparam a grama em 20 dias, em quantos dias 60 vacas farão isso? Naturalmente, 2/3 de 70 são 46 2/3 vacas. No entanto, essa resposta não tem sentido. Por outro lado, se 30 vacas aparam a grama em 60 dias e 30 dias é a metade de 60, nesse caso, é necessário o dobro do número de vacas, ou seja, 60 vacas para comer todo o pasto. Porém, se 70 vacas fizerem o trabalho em 20 dias, 30 vacas precisariam de aproximadamente 46 dias, e não de 60, como declarado no problema.

O que há de errado? Por que as respostas não têm sentido? Elas são incoerentes e se contradizem. Na verdade, não se levou em conta que a grama está crescendo o tempo todo.

Para resolver o problema, a informação fundamental está no início do enunciado: A grama em um pasto cresce igualmente grossa e rápida. Isso significa que se a grama está crescendo constantemente, e isso é desconsiderado, será impossível resolver o problema.

70 vacas $\longrightarrow$ 20 dias

30 vacas $\longrightarrow$ 60 dias

? vacas $\longrightarrow$ 30 dias

Indicamos um desconhecido auxiliar que denota o crescimento diário da grama em fração de sua provisão no pasto. Em um dia cresce uma quantia **a**. Em 20 dias cresce 20a. Se o total for, por exemplo, 1, nesse caso, em 20 dias as vacas comerão 1 + 20a.

<u>70 vacas comem o pasto em 20 dias</u>

em 20 dias o rebanho comerá: 1 + 20a

em 1 dia o rebanho comerá: $\frac{1+20a}{20}$

em 1 dia 1 vaca comerá: $\frac{1+20a}{20} \cdot \frac{1}{70} = \frac{1+20a}{1400}$

<u>30 vacas comem o pasto em 60 dias</u>

em 60 dias o rebanho comerá: 1 + 60a

em 1 dia o rebanho comerá: $\frac{1+60a}{60}$

em 1 dia 1 vaca comerá: $\frac{1+60a}{60} \cdot \frac{1}{30} = \frac{1+60a}{1800}$

No entanto, a quantia de grama consumida por uma vaca em um dia é o mesmo para ambos os rebanhos, portanto:

$$\frac{1+20a}{1400} = \frac{1+60a}{1800} \longrightarrow a = \frac{1}{120}$$

Uma vez obtido o valor de **a**, que corresponde ao crescimento da grama, podemos determinar que porção da quantidade original de grama foi consumida por uma vaca em um dia:

$$\frac{1+20a}{1400} = \frac{1+20\cdot\frac{1}{120}}{1400} = \frac{1}{1200}$$

Finalmente, escrevemos uma equação para a solução final do problema, em que desejamos saber quantas vacas comem o pasto em 30 dias. Indicando por **n** o número de vacas, temos:

$$\frac{1+30\cdot\frac{1}{120}}{30x} = \frac{1}{1200} \longrightarrow n = 50$$

Assim, 50 vacas teriam aparado toda a grama em 30 dias.

Essa é a resposta para o problema. Será que ele pode originar uma idéia mais ampla? Podemos ir além dessa resolução? Existe algum critério para mudar alguns valores de seu enunciado? Uma conexão entre resolução de problemas e construção de teoria também pode ser destacada nesse problema.

II) Construção de uma idéia geral

Denominando: a = crescimento da grama

x_1 e x_2 = quantidade de dias em que as vacas comem todo o pasto

y_1 e y_2 = quantidade de vacas no pasto

$$\frac{1+x_1 a}{x_1 y_1} = \frac{1+x_2 a}{x_2 y_2} \quad \Rightarrow \quad x_2 y_2 + x_1 x_2 y_2 a = x_1 y_1 + x_1 x_2 y_1 a$$

$$(x_2 y_2 - x_1 y_1) = x_1 x_2 a (y_1 - y_2) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{(x_2 y_2 - x_1 y_1)}{x_1 x_2 (y_1 - y_2)} > 0$$

($a>0$ porque não faz sentido o crescimento da grama ser negativo e nem nulo).

$x_2 y_2 - x_1 y_1 > 0 \Rightarrow x_2 y_2 > x_1 y_1$ ou $x_1 y_1 < x_2 y_2$.

Com isso, podemos estabelecer as seguintes relações:

Se $y_1 > y_2$, $x_1 < x_2$, então $x_1 y_1 < x_2 y_2$

Se $y_1 < y_2$, $x_1 > x_2$, então $x_1 y_1 > x_2 y_2$

Elas possibilitam analisar as relações existentes entre as 4 variáveis. Por exemplo:

Se $y_1 > y_2$ e $x_1 < x_2$. Supondo serem conhecidos 3 valores e se desejarmos atribuir um quarto valor: $x_1 = 30$ e $y_1 = 70$; $x_2 = ?$ e $y_2 = 50$

Temos que $x_1 y_1 < x_2 y_2 \Rightarrow 30 . 70 < x_2 . 50 \Rightarrow x_2 > 42$

Isso significa que para o crescimento da grama (a) ser positivo e o problema ter solução, a quantidade mínima de dias (x_2) a ser estabelecida deve ser maior do que 42. Para confirmar isso, podemos testar as 3 possibilidades:

Para $x_2 > 42$, $a > 0$	Para $x_2 = 42$, $a = 0$	Para $x_2 < 42$, $a < 0$

Outra forma de atribuir valores é observando, por exemplo, as condições de $y_1 < y_2$ e $x_1 > x_2$, que tornam a desigualdade $x_1 y_1 > x_2 y_2$ verdadeira. Definindo $x_1 = 45$ e $y_1 = 50$; $x_2 = 30$ e $y_2 = 70$, temos que:

$x_1 y_1 > x_2 y_2 \Rightarrow 45 . 50 > 30 . 70 \Rightarrow 2250 > 2100$ (V)

Com a utilização da Álgebra elementar, analisamos a viabilidade nas possíveis variações do problema. Isso contribuiu para revelar as dependências existentes entre a quantidade de dias em que as vacas comem todo o pasto e a quantidade de vacas no pasto. As condições estabelecidas correspondem à construção de uma idéia geral, que possibilita elaborar outros problemas similares a esse.

Já na Álgebra se apresentam ambas as culturas existentes na Matemática – A Álgebra, de um lado, é uma língua analítica (bastante presente na construção de teorias), como Condillac já afirmou no século XVIII, e, de outro, ela está inteiramente ligada com os algarismos aritméticos, que são sintéticos. A aritmética busca diferenciar valores específicos. No cotidiano ela é utilizada para resolver assuntos particulares, estando mais ligada com as aplicações, que estão presentes ao se resolver problemas.

Na resolução de problemas podemos construir séries de problemas, tendo como referência núcleos norteadores. Por exemplo, Krutetskii, para desenvolver sua pesquisa experimental, elaborou 26 Séries ao todo, envolvendo a Aritmética, Álgebra, Geometria e Lógica. No entanto, os problemas eram similares aos apresentados na escola, quer dizer, eram resolvidos utilizando os conhecimentos escolares.

Podemos estruturar séries de problemas somente com base nesses conhecimentos? É claro que conhecimentos formais permeiam grande parte dos problemas matemáticos e são imprescindíveis a um bom desempenho na matemática, porém, existem alguns problemas em que o ponto de partida para a resolução são princípios matemáticos ou idéias estrangeiras, que são idéias que não aparecem no enunciado dos problemas. A seguir, apresentamos alguns exemplos.

(16) Dado um tabuleiro 8 x 8 sem cores, em que são cortados dois quadrados das extremidades opostas, (o primeiro e o último de uma das diagonais), restam então, 62 pequenos quadrados no tabuleiro (Figura 65). É possível pavimentar esse tabuleiro cortado com retângulos de tamanho 1 x 2? (adaptado de WICKELGREN, 1995, p. 29, tradução nossa).

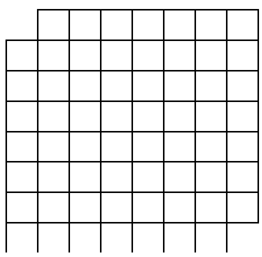
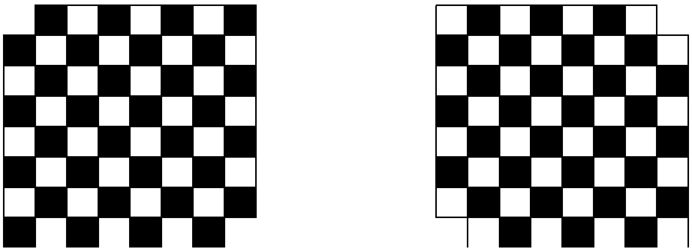


Figura 65 – Desenho do tabuleiro sem dois cantos

Para resolver esse problema, podemos utilizar cores, pois isso facilitará a identificação da possibilidade ou não de pavimentar o tabuleiro 8x8 (Figura 66).

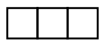


ou

Figura 66 – Desenho das possibilidades de dois tabuleiros sem dois cantos

Resposta: Não! Porque se fosse possível, os números de quadrados brancos e pretos seriam iguais, pois cada retângulo cobre um preto e um branco! No entanto, na diagonal principal os quadrados são todos da mesma cor (ou todos brancos ou todos pretos). Então, o tabuleiro cortado não tem mais números iguais de cores, ou seja, são excluídos dois quadrados brancos ou dois pretos!

Essa resolução se apoiou no raciocínio e na observação das cores existentes no tabuleiro, não havendo necessidade de tentar manualmente cobrir o tabuleiro com o retângulo. A atribuição de cores pode ser considerada uma idéia estrangeira que facilita a contagem dos quadrados unitários. O ato de colorir um tabuleiro de xadrez decorrre de uma idéia geral que pode ser utilizada em outros problemas, envolvendo tabuleiros de xadrez.

(17) É possível cobrir todos, exceto uma casa de um tabuleiro de xadrez 8x8 usando 21 triminós? Um triminó como  é considerado o tamanho certo para cobrir três casas do tabuleiro de xadrez (AVERBACH & CHEIN, 2000, p. 274 e 283-284, tradução nossa).

Resolução: Como estamos interessados em triminós, nós colorimos o tabuleiro com três cores diferentes, de forma que qualquer triminó colocado no tabuleiro deve necessariamente cobrir uma casa de cada cor, conforme Figura 67.

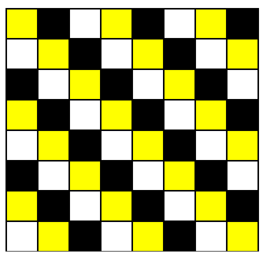


Figura 67 – Coloração do tabuleiro pelas diagonais

Um conjunto de 21 triminós deve cobrir 21 casas de cada cor. Porque existem 22 casas amarelas e somente 21 de cada uma das outras cores. A casa que não seria coberta deve ser uma das amarelas. Em outras palavras, todas as casas pretas ou brancas no tabuleiro da Figura 67 devem ser cobertas. Qualquer outro esquema de coloração, no qual cada triminó deve cobrir uma casa de cada cor, poderia ser utilizado. Aplicando qualquer simetria nesse tabuleiro produz outra coloração, tendo 22 casas amarelas e 21 casas de cada uma das outras cores. Em particular, usando reflexão vertical, obtemos o Diagrama A, da Figura 68.

Novamente, a casa descoberta deve ser uma das amarelas. As únicas casas que são amarelas, em ambas colorações, são aquelas mostradas no Diagrama B, abaixo. Essas casas são equivalentes, como base na Figura 67 e no Diagrama A, sob todas as simetrias do tabuleiro e assim, podemos selecionar qualquer uma delas para ser a casa que permanece descoberta.

Sabendo qual casa fica descoberta, devemos encontrar uma cobertura que funcione. Essa cobertura é apresentada no diagrama C abaixo.

Diagrama A　　　Diagrama B　　　Diagrama C

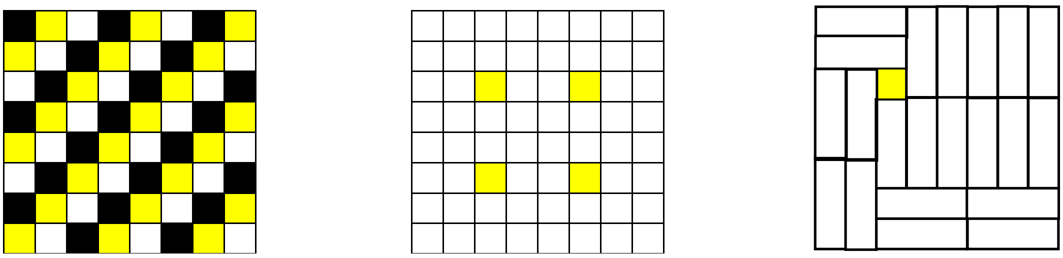


Figura 68 – Processo de coloração para obter a resposta do problema

(18) Consideremos um tabuleiro contendo 33 buracos, como mostra a Figura 69. Há um pino em cada buraco, exceto no buraco central. Quando dois buracos adjacentes estiverem ocupados e o próximo buraco naquela mesma linha estiver vazio, podem ser removidos os dois pinos dos buracos ocupados e um deles colocado no terceiro buraco. Em outras palavras, um pino salta sobre os outros, sendo colocado no buraco vago. O pino que foi saltado é retirado. O objetivo do jogo é deixar apenas um pino no tabuleiro. Quando isso ocorre, em quais buracos o pino final poderia possivelmente ficar? (AVERBACH & CHEIN, 2000, p. 274, 286-288).

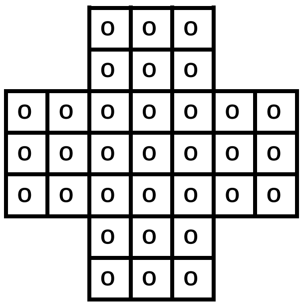


Figura 69 – Tabuleiro de buracos e pinos

Resolução: Podemos pensar no tabuleiro de pinos como tendo quadrados em vez de buracos. Se pudermos colorir o tabuleiro como no problema do triminó, obteremos a Figura 70.

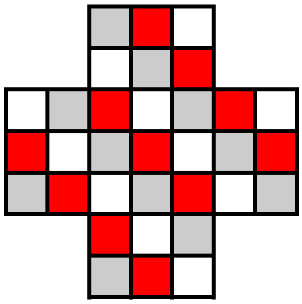
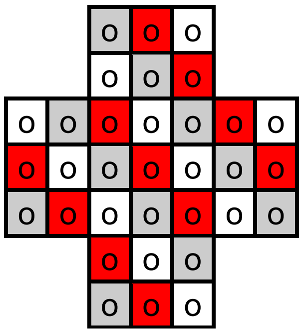


Figura 70 – Tabuleiro colorido com três cores, pela diagonal, sem os buracos

Qualquer movimento nesse jogo envolve uma célula de cada cor. Duas dessas três células envolvidas foram originalmente ocupadas, mas terminaram vagas, e a terceira célula que estava originalmente vaga, terminou ocupada. Então, se C, V e B respectivamente denotam o número de células Cinzas, de células Vermelhas e de Brancas que foram ocupadas por pinos, então, qualquer movimento muda C, V e B em 1 (duas delas diminuem em 1 e a terceira aumenta em 1).

Isso significa que as paridades relativas de C, V e B não são alteradas em qualquer movimento. Quer dizer, se C e V foram originalmente da mesma paridade – ambas as células eram ímpares ou ambas eram pares – então, elas são ainda da mesma paridade depois de qualquer movimento. (A paridade de cada uma é alterada e, portanto, elas permanecem da mesma paridade como cada uma das outras). Similarmente, se C e V estão originalmente em paridades opostas – um ímpar e um par – então, as células permanecem em paridade oposta, após qualquer movimento. Uma discussão similar se aplica a C e B e a V e B.

Na posição inicial do problema, utilizando a coloração indicada acima, obtemos a Figura 71. Notamos que C e B são da mesma paridade e V é da paridade oposta. Na posição final, com apenas um pino restante, devemos ter uma das seguintes situações:



C = 11; V = 10 e B = 11

Figura 71 – Tabuleiro colorido com três cores, pela diagonal, com os buracos

C = 1, V = B = 0;   V = 1, C = B = 0;   B = 1, C = V = 0.

No entanto, C e B devem ter a mesma paridade, depois de cada movimento, já que essas células tinham a mesma paridade no início. Então, a única possibilidade é V = 1, C = B = 0; assim, o pino restante deve terminar em um quadrado vermelho.

Aplicando esse mesmo raciocínio no modelo simétrico (Figura 72), encontramos que o último pino deve novamente estar em um quadrado vermelho.

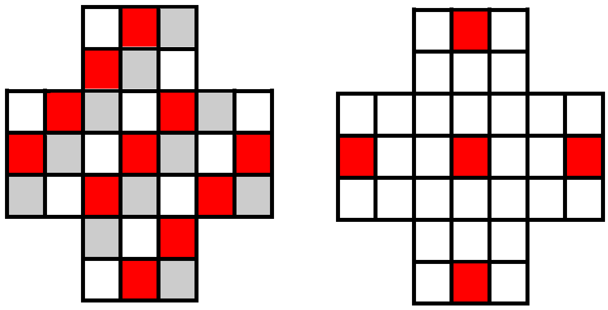


Figura 72 – Aplicação de simetria na coloração e obtenção da resposta

E os únicos quadrados vermelhos, em ambos os esquemas de coloração, são os cinco apresentados na Figura acima.

Para sabermos se é possível ter o pino restante em qualquer um desses 5 quadrados, é necessário apenas obtermos uma seqüência de saltos que realizam a tarefa desejada. Não conhecemos abordagem algorítmica ou teórica para encontrar essa seqüência; isso parece exigir um raciocínio por tentativa e erro e de paciência.

Para obter uma seqüência que funciona, numeramos as células do tabuleiro, como na Figura 73. Notamos que o primeiro dígito em cada casa representa o número da linha (de cima para baixo) e o segundo dígito representa o número da coluna (da esquerda para a direita).

		13	14	15		
		23	24	25		
31	32	33	34	35	36	37
41	42	43	44	45	46	47
51	52	53	54	55	56	57
		63	64	65		
		73	74	75		

Figura 73 – Numeração das casas do tabuleiro

Um salto seria denotado pelo número da célula em que a peça saltadora parte seguida pelo número da célula em que pousa. Por exemplo, 46-44 significa que a peça 46 salta sobre a peça 45 e pousa na 44.

A seqüência de movimentos saindo uma peça de 44 é a seguinte: 46-44, 65-45, 57-55, 54-56, 52-54, 73-53, 43-63, 75-73, 73-53, 35-55, 15-35, 23-43, 43-63, 63-65, 65-45, 45-25, 45-25, 37-57, 57-55, 55-53, 31-33, 34-32, 51-31, 31-33, 13-15, 15-35, 36-34, 34-32, 32-52, 52-54, 54-34, 24-44.

Somente antes do último movimento na seqüência acima restam dois pinos: um no 24 e um no 34. Se o último movimento tivesse sido 34-14 ao invés de 24-44, então, um único pino seria deixado em 14.

Para obter um único pino em 47, 74 ou 41 precisamos apenas aplicar a simetria rotacional na seqüência que deixa um único pino em 14.

Averbach & Chein (2000) destacaram que começamos com 32 pinos e terminamos com 1, portanto, um total de 31 saltos devem ser resalizados. Entretanto, se contarmos saltos sucessivos pelo mesmo pino como parte do mesmo movimento, isso se torna significante para perguntar “Qual é o número de movimentos em que reste apenas um pino?” (AVERBACH & CHEIN, 2000, p. 288).

Eles relataram que, por vários anos pensou-se que a resposta era 19, até E. Bergholt, em 1912, apresentar a resposta de 18 movimentos. Eles afirmaram que até recentemente não foi realmente demonstrado que uma resolução com poucos movimentos é possível. Se um espaço diferente fica vago na posição inicial, então, é possível deixar um único pino com menos de 18 movimentos. Porém, o pino restante não termina em 44. Em geral, questões de minimização são muito difíceis porque considerações teóricas parecem ser de pouca ajuda, concluíram Averbach & Chein (2000).

O que foi exposto, respaldado em muitos problemas presentes em livros de Matemática, evidenciou a diversidade de resoluções de problemas que pode ser originada por meio das representações adotadas, bem como idéias gerais que podem ser estabelecidas e reaplicadas em outras situações.

O capítulo 4 contém informações da pesquisa exploratória elaborada para esta Tese de Doutorado, envolvendo alunos universitários, dos cursos de Licenciatura Plena em Matemática e de Ciências da Computação, ambos da Universidade Federal de Mato Grosso. Essa pesquisa investigou o pensamento matemático desses estudantes em dois aspectos. Um referente às opiniões deles sobre a Matemática e a preferência na forma de pensar e de lidar com a mesma, obtidas por meio de dois questionários com questões subjetivas. O outro referente ao pensamento matemático na resolução de problemas, obtido por meio de um roteiro com treze problemas matemáticos variados.

CAPÍTULO 4

4. PESQUISA EXPLORATÓRIA

4.1. Procedimentos Metodológicos

Nas últimas décadas vários autores têm destinado esforços para o estudo e utilização da pesquisa qualitativa. Dentre esses autores mencionamos Triviños (1987), que, em seu livro denominado Introdução à pesquisa em Ciências Sociais: a pesquisa qualitativa em educação, apresentou algumas metodologias de pesquisa empregadas na área de Ciências Sociais.

Ele começou afirmando que uma pesquisa pode se desenvolver segundo uma abordagem quantitativa ou qualitativa. Na pesquisa quantitativa, as variáveis devem ser medidas e na qualitativa, elas devem ser descritas. Ressaltou que toda pesquisa pode ser, ao mesmo tempo, quantitativa e qualitativa, pois elas não são mutuamente excludentes.

Triviños (1987) ainda chamou a atenção para o fato de que, na pesquisa qualitativa, não se tem, a princípio, o estabelecimento de hipóteses que devem ser testadas empiricamente e de esquemas levantados a priori. Isso permite uma flexibilidade para formular e reformular hipóteses, à medida que se realiza a pesquisa qualitativa.

Alves-Mazzotti & Gewandsznajder (1999) escreveram o livro *O método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa*. Nele, comentaram que as pesquisas qualitativas podem ser multimetodológicas, permitindo a utilização de uma grande variedade de procedimentos e instrumentos de coleta de dados. Os mais utilizados são a observação (participante ou não), a entrevista (livres, estruturadas, semi-estruturadas ou mistas) e a análise de documentos.

Na opinião de Triviños (1987), para certas pesquisas qualitativas, a entrevista semi-estruturada é um dos melhores caminhos que o pesquisador tem para viabilizar a coleta de dados. É uma pesquisa livre que valoriza a presença do investigador, bem como oferece todas as possibilidades para que o sujeito da pesquisa alcance a liberdade e a espontaneidade necessárias, enriquecendo a investigação.

Uma das modalidades da pesquisa qualitativa é a pesquisa exploratória, que tem como uma das principais metas esclarecer e ilustrar os aspectos teóricos utilizados em um trabalho científico. Mattar (1994) ressaltou que a pesquisa exploratória propicia ao pesquisador um maior conhecimento sobre o tema ou problema de pesquisa em perspectiva. O planejamento da pesquisa exploratória é bem flexível, porém, normalmente ela adquire ou a forma de pesquisa bibliográfica ou de estudo de caso. O estudo de caso é caracterizado pelo estudo profundo e exaustivo de um ou de poucos objetos, de forma que possibilite a investigação de seu amplo e detalhado conhecimento.

A pesquisa realizada nesta Tese de Doutorado consistiu de uma pesquisa exploratória qualitativa, na forma de estudo de caso, tendo como objetivo investigar o pensamento matemático de alguns estudantes universitários, externalizado durante a resolução de problemas matemáticos.

Partindo do pressuposto de que a Matemática é uma atividade e como nossa pesquisa exploratória envolveu resolução de problemas, acreditamos que essa pesquisa possa revelar aspectos da Matemática, bem como da epistemologia da resolução de problemas, que estão associados com as duas culturas na Matemática, ou seja, preocupação em resolver problemas ou em construir teorias.

Para operacionalizar essa pesquisa foram realizadas entrevistas estruturadas, tendo como base dois questionários, contendo questões subjetivas, denominados de questões subjetivas a *priori* e questões subjetivas a *posteriori* (aplicados antes e depois dos problemas), e um roteiro composto por 13 problemas matemáticos.

O termo entrevista foi utilizado porque houve diálogos entre pesquisadora e estudantes, no decorrer da pesquisa exploratória, principalmente durante a resolução dos problemas matemáticos. Ao constatar certas dificuldades por parte dos estudantes, a pesquisadora fazia perguntas referentes às informações dadas pelo problema e, às vezes, discutia suas resoluções, buscando entender seus processos de raciocínio.

Nesse sentido, nossa pesquisa se diferenciou do modelo utilizado por Krutetskii. Os estudantes investigados por ele tinham que pensar em voz alta, não tendo interferência por parte do pesquisador. Na nossa pesquisa houve diálogo entre pesquisador e pesquisado, de acordo com a necessidade de cada estudante.

As questões subjetivas foram incluídas nas entrevistas porque elas poderiam fornecer informações relativas às emoções do estudante em relação à Matemática, que estão diretamente vinculadas à razão.

Damásio (1996), no livro *O erro de Descartes: Emoção, razão e o cérebro humano*, apresentou uma nova perspectiva para o papel das emoções no ser humano. Ele reconheceu que o bom senso tradicional comprovou que, em certas circunstâncias, "as emoções e os sentimentos podem provocar distúrbios destrutivos nos processos de raciocínio (...), e investigações recentes sobre o processo normal do raciocínio têm igualmente colocado em evidência a influência potencialmente prejudicial das emoções" (DAMÁSIO, 1996, p. 12). No entanto, em contrapartida, a ausência de emoções pode comprometer a racionalidade do ser humano, isto é, "a redução das emoções pode constituir uma fonte igualmente importante de comportamento irracional" (Ibidem, p. 78). Damásio escreveu ainda

> (...) certos aspectos do processo da emoção e do sentimento são indispensáveis para a racionalidade. No que têm de melhor, os sentimentos encaminham-nos na direção correta, levam-nos para o lugar apropriado do espaço de tomada de decisão onde podemos tirar partido dos instrumentos da lógica. (...) As emoções e os sentimentos (...) auxiliam-nos na assustadora tarefa de fazer previsões relativamente a um futuro incerto e planejar as nossas ações de acordo com estas previsões (Ibidem, p. 12-13).

Essas conclusões foram resultados de pesquisas desenvolvidas por Damásio, com pacientes que tiveram lesões na região pré-frontal do cérebro. Esses pacientes mantiveram intactos seus conhecimentos, suas memórias, suas linguagens, suas capacidades de efetuar cálculos, bem como de lidar com a lógica de um problema abstrato. Entretanto, revelaram uma alteração na capacidade de sentir emoções que comprometia a tomada de decisão. Os pacientes tinham conhecimentos, porém, não sabiam aplicá-los, não conseguiam decidir o que e como fazer.

Com base na idéia exposta por Damásio, podemos acrescentar que as emoções podem ser mais importantes na aplicação da Matemática do que na Matemática Pura. Como a resolução de problemas faz parte da aplicação podemos ressaltar que também pode haver a influência das emoções na resolução de problemas, pois às vezes é mais necessária uma avaliação da situação em vez de um conhecimento abstrato.

Diante disso, consideramos importante obter de nossos estudantes pesquisados opiniões de cunho emocional em relação à Matemática. Assim, no questionário a *priori* elaboramos dois blocos de perguntas. Primeiro, algumas questões pessoais e profissionais, tais como, sexo, semestre em que se encontravam, se já lecionaram Matemática e, em caso afirmativo, por quanto tempo, com a intenção de caracterizar os sujeitos da pesquisa. Segundo, foram selecionadas questões que contemplaram:

- O que gostam na Matemática? (Com a finalidade de identificar preferências por assuntos ou áreas da Matemática que estejam, de alguma forma, associados às duas culturas na Matemática, expostas por Gowers);
- Acham a Matemática difícil ou cansativa? (Com a intenção de obter informações a respeito da relação deles com essa Ciência);
- O que consideram que seja um problema matemático? (Pretendendo identificar a concepção deles sobre o tema);
- Que aspectos consideram necessários para se resolver problemas matemáticos? (Com a finalidade de identificar se eles consideravam somente o conhecimento matemático ou outros aspectos);
- Gostam mais de resolver problemas matemáticos ou de utilizar o raciocínio abstrato? (Com o objetivo de identificar preferências em uma das duas culturas na Matemática, citadas por Gowers);

- Gostam de pensar de forma mais intuitiva ou analítica? (Com a intenção de identificar alguma preferência por tendências explicitadas por Poincaré);
- Preferem mais as Idéias Matemáticas ou a Matemática Pura? (Também relacionadas com as duas culturas na Matemática, mencionadas por Gowers).

O questionário a *posteriori* teve por finalidade obter informações dos problemas matemáticos propostos e da experiência dos estudantes em resolvê-los. Para tanto, foram elaboradas questões como:

- Nos problemas propostos o que mais auxiliou na resolução foram as Idéias Matemáticas ou a Matemática Pura? (Com o propósito de novamente identificar as duas culturas na Matemática, citadas por Gowers);
- O que consideram importante para se resolver problemas matemáticos? (Com a finalidade de comparar e verificar se a experiência com a resolução dos problemas provocou alguma modificação no pensamento deles);
- .Quais foram os problemas que mais gostaram? (Com o intuito de identificar preferências por certos problemas – problemas de aplicação ou problemas teóricos – e associar às duas culturas na Matemática);
- Alguns problemas foram mais difíceis do que outros? (Com a finalidade de identificar níveis de dificuldades, onde estavam essas dificuldades – se no processo de coleta das informações ou no tratamento das mesmas, quais problemas consideraram mais difíceis e por quê);
- A forma de representar os dados do problema são importantes para entendê-lo e resolvê-lo? (Com a intenção de verificar se os estudantes constataram a necessidade de representações adequadas, já que muitos problemas propiciavam o uso de diferentes resoluções);
- O que aprenderam com os problemas resolvidos? (com o intuito de obter informações sobre sua experiência com a atividade de resolver problemas matemáticos).

Para elaborar o roteiro com os problemas matemáticos, levamos em consideração os seguintes critérios:

- Não serem problemas muito especializados ou muito complexos;
- Terem a possibilidade de diferentes resoluções;

- Alguns propiciassem a construção de idéias gerais;
- Que envolvessem linguagens diferentes, para que o entrevistado pudesse expressar espontaneamente seu pensamento, suas habilidades, suas formas de representação e conceitos matemáticos utilizados;
- Que fossem interligados para que pudessem proporcionar a aprendizagem de algo novo.

Com base nesses critérios foram elaborados 13 problemas matemáticos, sendo oito deles problemas de aplicação da Matemática, e cinco de cunho teórico. Alguns problemas possibilitavam o uso de diferentes processos de resolução, outros envolviam poucos processos. Os demais propiciavam a elaboração/identificação e utilização de idéias gerais.

4.2. A realização da Pesquisa Exploratória

A pesquisa exploratória teve início no dia 23-08-2004 e foi concluída no dia 14-09-2004. Os encontros com os estudantes variaram de 1 a 3, dependendo do ritmo e do tempo disponível de cada um. O tempo total utilizado para as entrevistas variou de 145 minutos (2 h 25 min) a 359 minutos (5h 59 min).

A pesquisadora começava a entrevista entregando um documento que continha o objetivo da pesquisa, bem como a autorização do estudante para gravação digital e para utilização dos dados coletados na Tese de Doutorado¸ na publicação de artigos acadêmicos e na apresentação em eventos científicos. Em seguida, entregava o questionário a *priori* para ser respondido. Logo após, o roteiro com os 13 problemas matemáticos, que foram distribuídos em três folhas: a primeira folha tinha os problemas de 1 a 5, a segunda 6 e 7 e a terceira os problemas de 8 a 13. E por último, entregava o questionário a *posteriori*.

Antes que os estudantes começassem a ler o primeiro problema, a pesquisadora fazia algumas recomendações, tais como:

- não comentassem com colegas os detalhes referentes aos problemas que resolveram, para não influenciar as resoluções dos outros estudantes;
- não apagassem nada do que fizessem, pois o processo de construção da resolução do problema era muito importante para descrever o desenvolvimento do pensamento;

Foi informado ainda que poderiam resolver os problemas sem seguir a ordem estabelecida pelo roteiro. Se encontrassem dificuldades em um deles, poderiam passar para outro e retomá-lo depois.

4.2.1. Sujeitos da Pesquisa Exploratória

Os sujeitos da pesquisa foram 16 estudantes, sendo 12 do Curso de Licenciatura Plena em Matemática (04 do sexo feminino e 08 do sexo masculino) e 04 estudantes do Curso de Ciências da Computação (todos do sexo masculino). Os dois cursos eram da Universidade Federal de Mato Grosso.

Os 12 estudantes da Matemática se encontravam entre o 3º e o 6º semestres e os da Computação entre o 5º e o 9º semestres.

Por que estudantes universitários? Krutetskii investigou estudantes russos, do Ensino Fundamental, com idades variando de 9 a 17 anos. No entanto, optamos por selecionar estudantes universitários, em função da vivência e maior maturidade em relação ao pensamento matemático, se comparados aos nossos estudantes do Ensino Fundamental. Essas características aliadas às suas experiências com a atividade matemática poderiam fazer emergir diferentes resoluções para os problemas propostos e, conseqüentemente, tendo mais subsídios para responder às perguntas do questionário a *priori* e a *posteriori*.

A seleção desses estudantes foi mediada pelos seus professores que faziam o convite para participar de uma pesquisa referente a resolução de problemas. Nem todos se interessaram, alguns até marcaram horários, porém, não compareceram. Assim, os 16 estudantes que se propuseram a participar da pesquisa demonstraram interesse e disposição para tal.

No entanto, dos 16 estudantes, 03 do Curso da Matemática não concluíram a pesquisa, uma vez que os cursos estavam encerrando o semestre de 2004/1 e os estudantes tinham pouco tempo disponível para as entrevistas (elas eram realizadas nos horários em que eles não tinham aulas ou trabalho).

Assim, concluíram as entrevistas 09 estudantes do Curso de Licenciatura Plena em Matemática (03 do sexo feminino e 06 do masculino), e os 04 estudantes do Curso de Ciências da Computação. Para a análise dos resultados obtidos serão considerados os 13 estudantes que participaram da pesquisa até o final.

Com o objetivo de manter o anonimato dos sujeitos, os estudantes do Curso de Licenciatura Plena em Matemática foram identificados pelos códigos de MA_1 a MA_9 e os estudantes do Curso de Ciências da Computação pelos códigos de CO_1 a CO_4. Os índices se referem à numeração da seqüência na entrevista.

A maioria das entrevistas foi realizada individualmente, com exceção de quatro estudantes da Matemática, que fizeram parte de duas duplas, sendo as mesmas entrevistadas em momentos distintos. As duplas não diferiram muito das entrevistas individuais, já que os estudantes liam os problemas e discutiam as informações, mas cada um os resolvia em sua própria folha. Às vezes, optavam por resolver problemas diferentes, não havendo discussões conjuntas.

No Quadro 22 fizemos uma caracterização dos sujeitos da pesquisa, com base em algumas questões pessoais e profissionais dos mesmos, presentes no questionário a *priori*. São informações acerca do sexo, do semestre em que se encontravam, se já lecionaram matemática e, em caso afirmativo, por quanto tempo.

Quadro 22 – Caracterização dos sujeitos da pesquisa, nos aspectos pessoais e profissionais

Sujeitos	Sexo	Semestre	Lecionou matemática	Tempo
MA_1	F	5º	**N**	–
MA_2	F	5º	**S** (EF)	1 semana (substituição)
MA_3	M	6º	**S** (EF)	1ano
MA_4	F	5º	**N**	–
MA_5	M	5º	**S** (não indicou nível de nsino)	3 meses (substituição)
MA_6	M	5º	**S** (EF e EM)	12 anos
MA_7	M	6º	**S** (EF)	4 meses
MA_8	M	3º e 5º	**N**	–
MA_9	M	3º	**S** (EM)	5 meses
CO_1	M	5º	**S** (EM)	6 meses
CO_2	M	9º	**N**	–
CO_3	M	5º	**N**	–
CO_4	M	5º	**N**	–

LEGENDAS: **EF** – Ensino Fundamental
EM – Ensino Médio

O estudante MA_8 não estava em um semestre específico, pois ele cursava disciplinas dos dois semestres mencionados.

Quase metade deles não teve nenhuma experiência como professor de Matemática. Dentre os que já lecionaram Matemática, a grande maioria atuou em sala de aula por pouco tempo.

No Quadro 23 apresentamos um panorama do número de encontros com cada estudante (para **MA** – Matemática; **CO** – Computação), a duração total com cada um, os problemas resolvidos e a seqüência de resolução dos mesmos.

Quadro 23 – Informações acerca dos estudantes e da pesquisa exploratória

Estudantes	Nº de encontros	Duração total	Problemas resolvidos	Seqüência de resolução dos problemas
MA_1	2	5h e 5 min	P_1 a P_{11}	1,2,3(NC),4,3,5(NC),6,7,5,8,9,10,11
MA_2	2	5h e 5 min	P_1 a P_{11}	1,2,3(NC),7,5(NC),6,3,4,5,8,9,10,11
MA_3	3	4h	P_1 a P_{12}	2,5,4,1,3,6,7,8,9,10,11,12
MA_4	3	5h e 18 min	P_1 a P_{11}	1,4,5,3,2,6,7,8,9,10, 11
MA_5	1	3h e 35 min	P_1 a P_{12}	1 a 12 na seqüência
MA_6	2	5h e 59 min	P_1 a P_{11}	1,2(NC),3,4,5,6,7,8,9, 10,11,2
MA_7	2	5h e 25 min	P_1 a P_{11}	1 a 11 na seqüência
MA_8	2	5h e 15 min	P_1 a P_{11}	5,2,1,4,3,6,7,8,9,10,11
MA_9	1	2h e 50 min	P_1 a P_{12}	1 a 12 na seqüência
CO_1	2	4h e 8 min	P_1 a P_{11}	1 a 11 na seqüência
CO_2	2	4h e 20 min	P_1 a P_{11}	1 a 11 na seqüência
CO_3	1	3h e 37 min	P_1 a P_{11}	1 a 11 na seqüência
CO_4	1	2h e 25 min	P_1 a P_{13}	1 a 13 na seqüência

LEGENDAS**: P_1, P_2, ..., P_{13}** – são os problemas de 1 a 13.
(NC) – Não Concluiu

A maioria dos estudantes não conseguiu resolver os problemas 12 e 13, que envolviam o Princípio de Dirichlet, e se referiam à situações de provas matemáticas.

A maior parte dos estudantes seguiu a seqüência dos problemas propostos. Os que não seguiram, procuravam pelos problemas que consideravam mais fáceis e, quando não conseguiam resolvê-los, passavam para outros problemas.

4.3. Resultados da Pesquisa Exploratória

Nesse item apresentamos os resultados e as análises dos dados coletados na pesquisa exploratória, com os treze estudantes universitários. As respostas deles nos questionários, a *priori* e a *posteriori*, apontaram alguns dos aspectos teóricos expostos nos capítulos 1 e 2 desta Tese de Doutorado e o roteiro com os problemas matemáticos ilustraram algumas das situações expostas no capítulo 3 desta Tese, como podemos constatar no detalhamento dos dois itens que se seguem.

4.3.1. Pontos de vista dos estudantes pesquisados acerca da Matemática e da resolução de problemas

Questões subjetivas a *priori*

1. O QUE VOCÊ GOSTA NA MATEMÁTICA? POR QUÊ?

MA$_1$: Gosto muito das demonstrações, apesar da dificuldade, acho que visualizamos melhor de onde surgiu alguma fórmula.

MA$_2$: Gosto das atividades práticas e das possibilidades que temos de demonstrar um conteúdo através da álgebra. Além da satisfação de resolver um problema que apresenta mais dificuldade.

MA_3: A abstração matemática me chama a atenção, pelo fato de poder estar trabalhando com algo que diz respeito somente ao próprio indivíduo e ao objeto estudado.

MA_4: A praticidade e a facilidade que a matemática nos dá, em estar solucionando ou achando um caminho que responda algumas questões/situações vividas em nosso dia-a-dia. Como, por exemplo, estar encontrando a área ou volume de um determinado lugar. Um exemplo entre muitos outros.

MA_5: Gosto do “despertar do raciocínio lógico” que os problemas matemáticos oferecem, porque através disso você compreende tudo com maior facilidade.

MA_6: Sim, porque é a ferramenta mais adequada para eu entender meu mundo.

MA_7: Gosto da forma, da maneira como a matemática proporciona seus desafios e limites. Com a matemática aprendi a me questionar mais.

MA_8: Gosto de geometria e partes em que são aplicadas na Física. Porque tem uma demonstração mais plausível, não é abstrato, facilita assimilação e se aprende desde criança, pelo menos na prática, só vendo a parte teórica posteriormente em sala de aula.

MA_9: A exatidão e técnicas utilizadas para resolução de problemas, pois em outras áreas dificilmente temos n-meios de chegarmos a um ponto em comum. Portanto, a matemática dá oportunidades ao pensamento de várias pessoas com um mesmo objetivo.

CO_1: Universalidade. O fato de a matemática ser compreensível, na maioria das vezes, de forma objetiva e sem ambigüidades, além de acessível a pessoas com formações culturais distintas, independente de culturas e idiomas. A matemática trilha um caminho independente.

CO_2: A matemática é uma ciência exata e lógica. Isto me atrai. Além do que quem consegue interpretar números tem grande chance de ter sucesso, em todas as áreas (computação, administração, etc.).

CO_3: A exatidão e o fato de que tudo é apontado como verdade, possui uma prova, uma explicação racional. Porque não consigo acreditar em algo que não tem uma explicação.

CO_4: Geometria, teoria dos grafos e alguns aspectos da álgebra. Gosto disso porque sou um viciado em jogos eletrônicos e programação, e são essas as áreas que mais são usadas na programação de jogos eletrônicos.

As respostas dos estudantes apontaram vários aspectos da Matemática que podemos inseri-los em duas grandes categorias: os associados às teorias matemáticas e os vinculados às aplicações da Matemática, em que a resolução de problemas faz parte da aplicação.

Essa categorização tem como referência as duas culturas na Matemática, explicitadas por Gowers (2000), e que de alguma forma estiveram presentes nas respostas desses estudantes.

Constatamos que quase metade dos estudantes pesquisados revelou gostar mais da teoria na Matemática, pois eles mencionaram que apreciam as demonstrações, a abstração matemática, a exatidão e a lógica existentes nessa Ciência, o seu caráter objetivo e sem ambigüidades e a universalidade, que pode ser viabilizada pelas teorias.

Esse último ponto nos remete à exposição de Gowers (2000), em que apresentou a opinião de Atiyah sobre a importância dos processos de abstração e generalização, culminando em teorias, para viabilizar o repasse delas às futuras gerações de matemáticos, adquirindo assim um caráter universal.

Um pouco mais da metade dos estudantes indicou gostar mais das aplicações e da resolução de problemas na Matemática, pois eles afirmaram que têm preferências pelas atividades práticas, pela resolução de problemas, pelo raciocínio lógico que os problemas oferecem, pela exatidão e técnicas utilizadas para resolver problemas, ou seja, pela diversidade de procedimentos pela geometria e aplicação da Matemática à Física, e pelos aspectos socioculturais (que também se caracterizam como uma aplicação da Matemática).

Um dos estudantes mencionou que gosta de ambas, ou seja, das atividades práticas e problemas, bem como das demonstrações desenvolvidas por meio da Álgebra.

Dois estudantes não forneceram respostas que pudessem ser inseridas nessas duas grandes categorias, pois MA_6 não explicitou qual ferramenta ele considerou, e MA_6 alegou que Matemática proporciona desafios e limites, porém, isso pode ocorrer tanto no aspecto teórico como na aplicação.

2. VOCÊ ACHA A ATIVIDADE MATEMÁTICA DIFÍCIL? POR QUÊ?

MA_1: Difícil não, mas trabalhosa sim, geralmente precisamos de vários conceitos para resolver um problema, temos que agrupar essas informações para chegar no nosso objetivo.

MA_2: Não. Acho que ela não é difícil, mas sim trabalhosa às vezes. Porém, se ela for apresentada aos estudantes de forma clara, eles poderão ter menos dificuldades.

MA_3: É igual a qualquer outra ciência, em termos de dificuldade, o que indica se algo é mais difícil que outro é o quanto você estuda daquilo.

MA_4: De forma alguma. A matemática é muito fácil e se torna interessante quando se trabalha de maneira correta. Esse trabalhar melhor a matemática deve ser feito desde as séries iniciais. Quando são compreendidos os conceitos e os algoritmos, a matemática torna-se fácil para todos.

MA_5: Não, sempre tive facilidade com a linguagem matemática.

MA_6: Em certos momentos, pois meu Ensino Médio e Fundamental foi puramente mecânico e memorizado, isto dificulta a manipulação de alguns conceitos matemáticos.

MA_7: Não é que seja difícil. Para mim o que mais me prejudica na área acadêmica é o fato de não poder me dedicar por inteiro, pois ainda dependo do meu trabalho.

MA_8: Na área de Cálculo e Álgebra tenho dificuldade de assimilar, pois não vejo com o que comparar e ficam muito vagas as explicações das teorias, que por muitas vezes se tornam repetitivas, mudando pouca coisa no significado e definição, não tendo aplicação lógica no dia-a-dia.

MA_9: Acho que a matemática é uma ciência com a qual devemos nos relacionar o máximo possível, no intuito de estarmos sempre nos aperfeiçoando junto a ela. Desse modo, aquilo que uma hora tornou-se difícil, agora é um meio para solucionarmos outras questões. Concluo que há a dificuldade, ela serve para abrir nosso horizonte nesta área.

CO_1: Comparando-se com outras áreas científicas, a matemática é um pouco mais complexa, em virtude de focar o raciocínio lógico-analítico. No entanto, muito da dificuldade apregoada à matemática está relacionada à forma como ela nos é apresentada/ensinada no Ensino Fundamental e Médio (foco na memorização e prática repetitiva, e não na flexibilidade de raciocínio).

CO_2: Sim, porque é baseada em fórmulas e não gosto de decorá-las.

CO_3: Não acho difícil, mas também não acho a coisa mais fácil, depende muito da atividade. Porque a matemática exige bastante dedicação e concentração, acho que aí é que se encontra a maior dificuldade.

CO_4: Depende muito do lugar onde é empregada e por que ela é empregada. Se for aplicada em uma área que eu não gosto, não domino ou não compreendo, mesmo os problemas mais simples se tornam difíceis. Já nas áreas que mais gosto, mesmo os problemas mais complicados me fascinam, mesmo que eu demore meses para solucioná-los.

Quase metade dos estudantes afirmou que não acha a atividade matemática difícil. Alguns deles alegaram que a consideram, às vezes, trabalhosa, por exigir muitos conceitos distintos, porém, isso não indica dificuldade. Uma estudante colocou na educação, mais precisamente nos modos de transmissão do conhecimento, a responsabilidade por tornar a Matemática mais fácil ou mais difícil. Outro pesquisado explicou que a matemática se torna fácil desde que haja compreensão de conceitos e algoritmos.

Mais da metade dos estudantes considerou a atividade matemática difícil, apontando que a dificuldade pode estar associada:

- a um ensino centrado em rotinas, ou seja, em termos de uma prática repetitiva de exercícios, de memorização e de utilização de fórmulas;
- ao desenvolvimento de teorias sem aplicações;
- ao fato da Matemática ser mais complexa do que outras Ciências e exigir dedicação, concentração e o uso do raciocínio lógico-analítico;
- ao não gostar da área ou do assunto envolvido;

- à falta de compreensão de conceitos matemáticos.

Um estudante mencionou que há dificuldade ao lidar com a atividade matemática. No entanto, o que é difícil num primeiro momento pode tornar-se um meio para solucionar outras questões. Isso evidencia a existência de um processo dinâmico na Matemática, ou seja, o que é “novo” pode ser difícil, porém, havendo compreensão torna-se um instrumento para ser utilizado em outras situações.

3. VOCÊ ACHA A ATIVIDADE MATEMÁTICA CANSATIVA? POR QUÊ?

MA_1: Quando eu acho a matéria estudada interessante não, pois quando fazemos algo que gostamos não fica cansativa, mas para mim existem algumas áreas dentro da matemática que não acho interessante, aí então ela fica cansativa.

MA_2: Somente quando os conteúdos são aplicados de forma mecânica e exigindo do aluno mais do que lhe foi apresentado. Um exemplo seriam as extensas listas de exercícios que são muitas vezes bem parecidos.

MA_3: Não. Acredito que é por identificação. Se me identifico, ou melhor, se gosto de estudar, aquilo nunca será cansativo.

MA_4: Não, mas aí vale destacar o papel do professor em sala, ele é um incentivador (direto) do aluno no processo de aprendizagem. A atividade matemática se tornará cansativa, se o professor não der um incentivo ao aluno, trazendo em sala atividades repetitivas que acabarão desanimando os estudantes.

MA_5: Nem um pouco, acho muito saudável e ao mesmo tempo estimulante.

MA_6: Não, porque a atividade mental realizada em uma atividade matemática me faz sentir bem.

MA_7: Não, não a acho de maneira alguma. Uma atividade cansativa é sim uma atividade que pede um pouco mais de tempo em tudo o que se faz.

MA_8: Sim e não. **Sim**, porque em cálculos e álgebras você fica resolvendo um monte de questões que são parecidas, mas diferentes, e com o excesso de exercícios. Ao invés de aprender de forma prazerosa se acaba tendo resistência ou má vontade em ver aquela matéria, por ser estafante. **Não** na área de geometria porque se pode trabalhar com aplicações práticas após teoria, o que deixa a pessoa descontraída e capta melhor o conteúdo onde pode-se fazer até brincadeiras...

MA_9: Não, visto que se estivermos por dentro daquele estudo, as dificuldades tornar-se-ão desafios, os quais tentaremos solucioná-los. Assim, em vez de cansaço, estaremos sentindo um “certo prazer” em estudar a matemática.

CO_1: A atividade matemática, quando focada na prática repetitiva e na memorização de conceitos, regras e fórmulas, é extremamente cansativa e até decepcionante (muitos estudantes passam a rejeitar o estudo matemático por este motivo). No entanto, quando o estudo foca o desenvolvimento da flexibilidade de raciocínio e desafios práticos (exemplos mensuráveis no dia-a-dia), o estudo adquire um caráter mais prazeroso e atrativo.

CO_2: Não, apesar de requerer uma enorme atenção. Já que qualquer erro pode implicar na não resolução ou resolução errada de um problema.

CO_3: Depende, se o problema a ser resolvido for extremamente difícil fica cansativo, acho que porque grandes dificuldades levam as pessoas a se cansarem e desistirem mais facilmente.

CO_4: Isto também depende dos lugares onde é empregada, pelos mesmos motivos da questão anterior. Quando o problema aparece em algo que considero “chato”, logo o problema também é chato e cansativo. Se o problema aparece em algo que eu quero resolver, ele é apenas mais um desafio, exceto se depois de vários dias eu ainda não tiver solucionado. Aí ele passa a ser algo cansativo, mas que inevitavelmente devo solucionar.

A maioria dos estudantes pesquisados não julgou a atividade matemática cansativa e, em grande parte, isso está relacionado ao fato deles gostarem da Matemática ou do assunto envolvido, como por exemplo, quando se têm situações da Geometria ou de aplicações da Matemática.

Alguns estudantes, embora não considerassem a atividade matemática cansativa, apontaram que ela pode se tornar cansativa se a mesma ficar restrita à rotina, ou seja, atividades de caráter repetitivo, de memorização de conceitos, regras e fórmulas, sem aplicações práticas e sem sentido em termos do ponto de chegada com a utilização de tais conhecimentos, sem a compreensão do porquê estudá-los.

Outros alegaram que a atividade matemática também pode ser cansativa, se um problema matemático for muito difícil. A questão (3) está associada à questão (2), pois a atividade matemática pode ser cansativa se ela for considerada difícil ou mesmo se não existir o gostar da Matemática ou de alguns assuntos pertencentes à ela.

Krutetskii (1968), com sua pesquisa, trouxe contribuições a respeito do cansaço durante o estudo da Matemática. Ele verificou que os estudantes talentosos em matemática, pesquisados por ele, não esboçaram cansaço ao resolver os problemas matemáticos. A ausência de cansaço também está associada com o gostar da Matemática. Ele apontou que a diferença entre uma pessoa bem sucedida e uma pessoa com menos sucesso em uma área, é que a primeira pode desenvolver uma atividade por um longo tempo, sem interrupção, e não sentir cansaço.

4. EM SUA OPINIÃO, O QUE VOCÊ CONSIDERA QUE SEJA UM PROBLEMA MATEMÁTICO?

MA_1: Problema matemático é uma maneira de relacionar o aluno de uma forma mais direta com os conceitos apresentados em sala de aula, podendo estes problemas estar relacionados ao dia-a-dia do aluno. Desta maneira, o aluno pode ter um interesse maior pelo conteúdo, mas, às vezes, isso não será possível.

MA_2: É um processo em que o aluno encontra um meio desconhecido para solucionar uma questão. Durante esse processo o aluno poderá relacionar conceitos dados em aula pelo professor, ou até mesmo elaborar novos conceitos matemáticos, sempre utilizando seu raciocínio.

MA_3: Uma situação em que você deve tomar uma decisão, digamos uma decisão mais precisa.

MA_4: O problema matemático pode ser a busca para encontrar o resultado do problema. Para se chegar à solução devemos seguir ou não, um determinado caminho estabelecido.

MA_5: Um problema matemático é um problema lógico, seja ele numérico ou abstrato.

MA_6: Uma situação na qual se espera uma explicação razoável e lógica.

MA_7: O meu próprio eu interior! Pois quando me fecho para os conceitos matemáticos, a Matemática, de certa forma, se torna um problema, um problema que eu mesmo criei.

MA_8: Onde existe uma incógnita a ser descoberta, um valor a ser encontrado.

MA_9: Algo que necessita de uma solução.

CO_1: Um problema que possa ser descrito de forma objetiva e através de ferramentas analíticas (gráficos, diagramas, tabelas) ou comprovados por meio de teoremas e conceitos simples.

CO_2: Qualquer problema quantitativo que exista eu considero problema matemático. Todo problema que pode ser resolvido com números, fórmulas e lógica.

CO_3: São problemas que envolvem números e/ou lógica, e a sua solução também é um valor numérico e/ou lógico.

CO_4: Um problema matemático pode ser qualquer coisa, desde como fazer um desenho bonito em uma folha de papel até calcular o volume lateral de um politopo de 4 ou mais dimensões ou determinar a origem do universo.

Nessa questão, o que se destaca é a variedade e a grande divergência entre as respostas dos estudantes pesquisados.

Alguns estudantes responderam, considerando um problema de forma geral. O que eles escreveram se aplica a qualquer problema e não apenas a um problema matemático, como, por exemplo, tomada de decisão.

Outros estudantes focaram especificamente problemas matemáticos, porém, com reduções. Para eles, o termo “problema matemático” se refere mais às situações de aplicação e de pouca produção de conhecimento matemático. Um estudante ressaltou a possibilidade de "elaborar novos conceitos matemáticos" o que indica que um problema pode contribuir para a construção de teorias ou idéias gerais.

Podemos constatar que alguns estudantes destacaram na resolução de problemas a obtenção de um resultado, indicando que isso é o fundamental. Outros revelaram a idéia de um processo, no qual são necessários a utilização de conceitos matemáticos, fórmulas, teoremas, representações por meio de gráficos, diagramas e tabelas.

Um estudante forneceu uma característica interessante dos conceitos matemáticos. Enquanto a maior parte das Ciências trabalha com conceitos e noções bem amplas, às vezes, vagas e até metaforicamente, a Matemática sempre fornece definições muito nítidas e precisas. Os conceitos matemáticos são mais restritos e específicos.

Do ponto de vista cognitivo a tendência é destacar mais os aspectos que a Matemática tem em comum com outro campo de conhecimento, com outro tipo de pensamento. Em contrapartida, se o olhar é para o lado objetivo da Matemática, nesse caso, a tendência é buscar diferenciar o campo da Matemática de outras áreas do conhecimento humano.

5. QUE ASPECTOS SÃO NECESSÁRIOS PARA SE RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS?

MA_1: Primeiramente, os professores devem procurar apresentar o conceito de uma maneira clara para maior visualização dos estudantes, e não só dar uma pincelada no conceito e já partir para os exercícios, resolvendo-os de forma mecânica, sem saber o porquê. Dessa forma, essa resolução vai ficar desmotivada, e a matemática vai morrendo com isso. O professor tem que despertar este interesse.

MA_2: Para se solucionar um problema matemático é necessário ter: paciência, conhecimento, estratégias, saber interpretar o problema, saber relacionar o conteúdo que foi aprendido com o problema e ser um bom observador.

MA_3: Fazer uma análise acerca do problema; como ele foi construído; quais os meios disponíveis (ferramentas, conhecimento prévio).

MA_4: Desenvolver uma estratégia do caminho a seguir e aplicá-la em busca da solução.

MA_5: Fundamentação teórica e/ou raciocínio lógico.

MA_6: Atenção, conhecimentos da matemática básica, experiências anteriores, vontade de encontrar respostas.

MA_7: Na minha opinião, considero de grande importância a parte teórica que a mesma possui, mas talvez para outros, essa etapa não seja necessária.

MA_8: Conhecimento do conteúdo, tomada de dados, aplicação dos conhecimentos adquiridos em sala de aula ou mesmo fora. Em síntese, da teoria para a prática.

MA_9: 1º Conhecimento acerca do que é cobrado. 2º Campo de visão abrangente. 3º Gostar daquilo que se propõe a fazer.

CO_1: Clareza na descrição do problema; apresentação de um número mínimo de atributos para a análise; pensamento focado e concentrado, por parte de quem se propõe a estudar o problema.

CO_2: Conhecer o problema e saber interpretá-lo, escolher o método adequado para a resolução, aplicar as fórmulas e teorias, ser paciente e atencioso. Ser racional.

CO_3: Concentração, raciocínio lógico, dedicação e conhecimento matemático prévio.

CO_4: Primeiro é necessário conhecer o problema. Também é importante conhecer não só as operações que devem ser utilizadas, mas deve-se conhecer o porquê delas serem utilizadas e também como elas funcionam.

Muitas pessoas consideram que o valor educativo da Matemática reside no ato de educar para um pensamento crítico, lógico, analítico, racional, etc. Isso é reforçado por documentos oficiais que tratam do Currículo de Matemática. Não se menciona a importância da experiência com a Matemática, com o conhecimento específico. Como uma conseqüência disso, normalmente ao se pensar nos aspectos que são necessários para se resolver problemas matemáticos supõe-se que serão destacados itens, como o valor do raciocínio lógico, do pensamento analítico, etc.

No entanto, a maior parte de nossos estudantes pesquisados apontou a importância da experiência matemática, fato que não é comum. Isso evidencia tanto a existência como a necessidade da *experiência* na área da Matemática. Muitas das capacidades para resolver problemas na Matemática estão associadas à experiência.

As respostas dos estudantes contemplaram os fatores a seguir:

1) o raciocínio lógico – capacidade de analisar ou interpretar uma situação-problema, de utilizar o raciocínio lógico, de efetuar cálculos, etc. Esse fator pode ser associado com a primeira etapa da resolução de problemas exposta por Krutetskii (1968), apresentada no capítulo 1, item 1.2 desta Tese, que corresponde ao processo de coleta das informações de um problema. Podemos acrescentar que também é o momento da formulação de problema(s) originada pela situação problemática, explicitada no capítulo 3 desta Tese.

2) a importância da experiência matemática – estudantes ressaltaram a necessidade de se ter teorias e conhecimentos prévios e saber aplicá-los, bem como ter experiências anteriores para resolver problemas. Esse segundo fator corresponde ao processo de tratamento das informações, esboçado por Krutetskii (1968), em que também se tem implícita a escolha de uma representação adequada para resolver o problema.

Houve estudantes que citaram um ou outro fator e três mencionaram ambos os fatores, evidenciando a idéia de um processo completo para a resolução de um problema matemático.

Uma estratégia importante é buscar na memória a resolução de um problema similar. Essa busca terá sucesso se já tivermos bastante *experiência* na resolução de muitos problemas matemáticos e bem variados. Vale ressaltar que mesmo a experiência com a utilização do raciocínio lógico também ajuda na resolução de problemas.

6. DO QUE VOCÊ GOSTA MAIS:
(   ) RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS
(   ) UTILIZAR O RACIOCÍNIO ABSTRATO
POR QUÊ?

MA_1: (X) Utilizar o raciocínio abstrato. Porque é através desse raciocínio que muitas vezes achamos o porquê das coisas. Às vezes, é tão claro, mas não enxergamos.

MA_2: (X) Resolver problemas matemáticos. Porque desta forma acredito que consigo aprender mais o conteúdo matemático. Pois vejo a aplicação do mesmo nos problemas e tento relacionar vários conceitos.

MA_3: (X) Utilizar o raciocínio abstrato.

MA_4: (X) Resolver problemas matemáticos. É tão satisfatório quando conseguimos encontrar uma saída para determinado problema. Mais ainda porque tenho certa dificuldade em reconhecer o abstrato. A Álgebra, por exemplo, é uma disciplina que pede muitas demonstrações. Fica um pouco difícil demonstrar aquilo que, às vezes, não consigo reconhecer, identificar.

MA_5: (X) Resolver problemas matemáticos. Porque os problemas são elementos-chave para que você possa avaliar o seu raciocínio e a teoria. OBS: não gosto de problemas diretos que só exijam aplicações de fórmula.

MA_6: (X) Utilizar o raciocínio abstrato. Porque amplia o mundo a minha volta, fazendo com que eu possa enxergar, com mais detalhes, tudo ao meu redor.

MA_7: (X) Resolver problemas matemáticos. Talvez porque neste momento eu esteja colocando em prática meus conhecimentos e ao mesmo tempo me auto-avaliando.

MA_8: (X) Resolver problemas matemáticos. Porque vai seguir um parâmetro previamente determinado, de conhecimentos já existentes e que são aplicados na prática, como em construção, comércio, etc.

MA_9: (X) Resolver problemas matemáticos. Acho que os problemas matemáticos trazem soluções “mais concretas”; acrescento também que desde a infância estive em contato com a área citada.

CO_1: (X) Resolver problemas matemáticos. Problemas matemáticos procuram apresentar situações facilmente mensuráveis e tangíveis no mundo real.

CO_2: (X) Utilizar o raciocínio abstrato. Muitos problemas matemáticos já possuem fórmulas e teoremas para serem resolvidos. Não gosto de decorá-los. Acho muito gratificante quando um problema é resolvido somente com o raciocínio e lógica.

CO_3: (X) Utilizar o raciocínio abstrato. Porque no meu curso (Ciência da Computação) é largamente utilizado o raciocínio abstrato, no desenvolvimento de algoritmos. Daí, passei a gostar mais, já que sempre o utilizo.

CO_4: As duas coisas! Uma não faz sentido sem a outra, a matemática é abstrata, resolver problemas matemáticos é abstraí-los do mundo real. Com o raciocínio abstrato é possível criar soluções, que só podem ser consideradas soluções com a resolução, e assim provar se a solução é válida ou não.

As opiniões dos estudantes pesquisados foram divididas em partes quase iguais, ou seja, um pouco mais da metade deles gostam de resolver problemas matemáticos e os outros gostam mais de utilizar o raciocínio abstrato, pois auxilia na explicação dos porquês na Matemática, ou por ter mais familiaridade, em virtude do curso que está fazendo. Um estudante da Computação indicou que gosta dos dois.

Um estudante respondeu que gosta mais de utilizar o raciocínio abstrato para resolver problemas. A sua resposta contempla duas variedades de problemas matemáticos – aqueles que envolvem a aplicação de fórmulas, teoremas e outros que podem ser resolvidos por meio do raciocínio lógico, como os heurísticos, por exemplo.

Em termos das duas culturas na Matemática, apresentadas no capítulo 2 desta Tese, podemos constatar que são poucos os estudantes que estão interessados em buscar responder à pergunta “por que” se tem um fato matemático, “por que” ele ocorre. A maioria quer saber “o que é” o fato matemático. Em outras palavras, muitos dos estudantes preferem resolver problemas e não construir teorias.

7. VOCÊ GOSTA DE PENSAR DE FORMA MAIS: (   ) INTUITIVA   (   ) ANALÍTICA   POR QUÊ?

MA_1: (X) Intuitiva. Porque para nós que convivemos com a Matemática, a nossa intuição muitas vezes tem lógica matemática. Claro que precisamos de base para isso, principalmente lá na matemática básica, que aprendemos nas nossas primeiras séries.

MA_2: (X) Intuitiva. Acredito que pensar de forma intuitiva pode nos ajudar a trabalhar o raciocínio lógico e chegar de forma mais rápida aos objetivos.

MA_3: (X) Analítica.

MA_4: (X) Intuitiva. É claro que os conceitos são muito importantes, mas em alguns casos a intuição pode ajudar bastante. Pressupor que aquilo possa ser verdadeiro, e então verificá-lo.

MA_5: (X) Intuitiva. Porque gosto de ter certa liberdade para pensar da minha forma de resolver determinado problema.

MA_6: (X) Analítica. Na maioria das vezes, sempre que me deparo com alguma situação nova tento representar minhas idéias no papel, o mais fiel possível, para poder mais tarde retomar a idéia novamente.

MA_7: (X) Analítica. Considero a forma analítica mais segura.

MA_8: (X) Analítica. Somente analisando um problema vamos ter noção do que se deve fazer e como proceder.

MA_9: (X) Intuitiva. Pois acho que é uma forma mais viável de buscar soluções.

CO_1: (X) Analítica. Considero o pensamento analítico mais preciso e de simples comprovação, por apresentar uma menor margem de análises subjetivas.

CO_2: (X) Analítica. Uso muito a intuição para tentar prever um resultado, mas acho que a intuição não leva a resultados concretos. Portanto, me sinto mais seguro com o pensamento analítico.

CO_3: (X) Analítica. Porque acho mais seguro e confiável do que utilizar a intuição.

CO_4: (X) Analítica. Embora a "analítica" e a "intuitiva" se misturem em alguns pontos e não possam ser separadas, eu peso mais para o lado da analítica. Analisar significa deduzir a resposta e intuir significa adivinhar a resposta, por isso sou mais para o lado da analítica.

Essa pergunta revelou certa diferença entre os estudantes da Matemática e os da Computação. Todos os estudantes da Computação preferem lidar com a matemática por meio do pensamento analítico por considerarem mais preciso e confiável, enquanto que a intuição para eles é algo subjetivo, mais ligado à previsão ou "adivinhação". Entre os estudantes da Matemática a opinião se dividiu entre a preferência pelo pensamento intuitivo e pelo analítico. Duas estudantes que assinalaram a forma intuitiva alegaram que ela auxilia no raciocínio lógico, outros dois indicaram que a intuição é importante para buscar soluções, para supor que algo é verdadeiro e depois verificar essa veracidade. Esses dois últimos estudantes nos lembram as idéias expostas por Poincaré (1905), quando afirmou que a intuição é o instrumento da invenção e a lógica o da demonstração.

8. SUA PREFERÊNCIA É MAIOR: (   ) PELAS IDÉIAS MATEMÁTICAS   (   ) PELA MATEMÁTICA PURA POR QUÊ?

MA$_1$: (X) Pelas Idéias Matemáticas. Porque as Idéias Matemáticas têm um resultado, você parte de um princípio que vai poder tirar alguma conclusão no final.

MA$_2$: (X) Pela Matemática Pura. Sempre achei mais interessante as aplicações da matemática e suas demonstrações.

MA$_3$: (X) Pela Matemática Pura.

MA$_4$: (X) Pelas Idéias Matemáticas. Acho a matemática pura um tanto cansativa.

MA$_5$: (X) Pelas Idéias Matemáticas. Porque o que há de mais belo e estimulante na matemática são as idéias a que um problema te leva.

MA$_6$: (X) Pela Matemática Pura. Ao conhecer a álgebra no curso de matemática, percebi que minhas idéias e o meu conhecimento anterior poderiam ser melhorados em muito.

MA$_7$: (X) Pelas Idéias Matemáticas. Ao longo do tempo vejo que a matemática foi evoluindo e ainda está evoluindo, devido às grandes idéias que surgem a cada dia para suprir nossas necessidades.

MA$_8$: (X) Pela Matemática Pura. Porque a Matemática Pura e Aplicada é mais fácil de entender e aplicar no cotidiano, tendo várias formas de se aplicar.

MA_9: (X) Pelas Idéias Matemáticas. Pois nelas verificamos que a Matemática não é somente feita de números e contas, dando abrangência para novos meios de soluções.

CO_1: (X) Pelas Idéias Matemáticas. A forma que eu costumeiramente pratico a Matemática é focada em situações facilmente descritíveis no mundo real, no cotidiano. Sendo assim, adquiri uma afinidade maior com a matemática aplicada.

CO_2: (X) Pelas Idéias Matemáticas. Acho que a Matemática Pura é muito cansativa e repetitiva. O computador foi criado para fazer esta tarefa. Mas as Idéias Matemáticas são importantíssimas. Adoro idealizar problemas e métodos para resolvê-los.

CO_3: (X) Pelas Idéias Matemáticas. Porque é o que utilizo no dia-a-dia, principalmente no meu curso.

CO_4: (X) Pelas Idéias Matemáticas. As idéias nascem de problemas que precisam ser resolvidos e destes problemas nasce a “Matemática Pura”. Aprender Matemática Pura é chato e cansativo, se eu (e provavelmente quase todas as pessoas) não conseguir enxergar algum uso ou utilidade grande o suficiente para me convencer de que preciso saber aquilo. Só assim o cérebro absorve aquilo e vê mais do que números e fórmulas abstratas.

Ao elaborarmos essa questão não tínhamos a intenção de afirmar que na Matemática Pura não existem Idéias Matemáticas, porém, queríamos destacar a diferença entre um campo de pensamento mais fechado em si, em contraste com um pensamento que buscasse idéias universais, ou seja, idéias que pudessem ser aplicadas e divulgadas em contextos diferentes.

Todos os estudantes da Computação preferem as Idéias Matemáticas ou porque elas estão mais associadas à aplicação da Matemática e aos problemas, ou por eles terem mais familiaridade por causa do curso, ou por considerarem a Matemática Pura cansativa. Já os estudantes da Matemática quase se dividiram entre a preferência pelas Idéias Matemáticas e pela Matemática Pura. Os que assinalaram as Idéias Matemáticas explicaram seus motivos de forma bem variada, ou seja: porque as Idéias Matemáticas propiciam partir de um princípio e chegar a uma conclusão; ou por considerarem a Matemática Pura cansativa; ou por elas estarem presentes na evolução da Matemática; ou por considerarem estimulantes as idéias inseridas em problemas matemáticos; ou por elas proporcionarem novos meios de soluções. Os que escolheram a Matemática Pura manifestaram o gosto pelas aplicações e demonstrações e porque a Álgebra propicia um maior conhecimento.

Se analisarmos as respostas dos estudantes nas perguntas de seis a oito, alguns deles revelaram coerência em suas respostas. Por exemplo, os estudantes MA_4, MA_5 e MA_9 gostam mais de resolver problemas matemáticos, de pensar de forma mais intuitiva e de utilizar mais as Idéias Matemáticas, o que pode indicar que eles têm uma preferência maior pelo aspecto prático, de aplicação, ou subjetivo da Matemática. Em contraposição, os estudantes MA_3 e MA_6 gostam mais de utilizar o raciocínio abstrato, de pensar de forma mais analítica e de utilizar a Matemática Pura. Esses preferem mais a matemática teórica.

Questões subjetivas a posteriori

1. NOS PROBLEMAS PROPOSTOS O QUE VOCÊ ACHA QUE MAIS TE AJUDOU A RESOLVÊ-LOS: (   ) IDÉIAS MATEMÁTICAS (   ) MATEMÁTICA PURA POR QUÊ?

MA_1: (X) Idéias Matemáticas. Porque na maioria dos problemas foi usado o raciocínio-lógico, e teríamos que montar estratégias para poder sair deles, vários ou praticamente todos teriam várias maneiras de serem resolvidos.

MA_2: (X) Idéias Matemáticas. Dependendo do problema surgem várias opções para resolvê-lo, que não necessariamente são fórmulas. E a forma mais rápida de resolver os problemas e entendê-los é utilizando várias Idéias Matemáticas.

MA_3: <u>As duas</u>. Para confirmar suas idéias é preciso formalizar, ou seja, demonstrar algebricamente na maioria das vezes, onde entra a matemática pura. Não podemos tratá-las separadamente.

MA_4: (X) Idéias Matemáticas. O conhecimento matemático que eu trouxe foi de grande ajuda na hora de resolver os problemas. Tive certa dificuldade, mas acredito que o conhecimento dos conceitos na hora de encontrar a solução é indispensável, mesmo que haja apenas uma pequena noção do que se trata.

MA_5: (X) Idéias Matemáticas. Porque os problemas exigiam mais do raciocínio lógico que a Matemática Pura.

MA_6: (X) Idéias Matemáticas. Porque ao tentar solucionar as questões propostas, alguns deles se mostram de melhor entendimento, através das sugestões, porém, a Matemática Pura foi suficiente para resolver outros exercícios.

MA_7: (X) Idéias Matemáticas. Com as Idéias Matemáticas tive uma forte aliada, pois me possibilitava ver vários caminhos a serem tomados.

MA_8: (X) Idéias Matemáticas. Porque tendo conhecimento de outras áreas, conseqüentemente aplica-se naquela que não tem domínio, ou mesmo usa-se por ser métodos mais fáceis e ágeis de se aplicar.

MA_9: (X) Idéias Matemáticas. Pois na sua maioria não se fez necessário a utilização de equações; num todo, utilizou-se de raciocínio lógico para resolvê-los.

CO_1: (X) Idéias Matemáticas. Através de Idéias Matemáticas pude criar mais facilmente analogias com exemplos reais, auxiliando-me a criar exemplos que serviram de referência para a resolução dos problemas.

CO_2: (X) Idéias Matemáticas. Porque os problemas, de um modo geral, não exigiam conhecimento profundo nos teoremas e fórmulas da Matemática. A maioria dos problemas envolvia interpretação e raciocínio, usando somente conceitos básicos da Matemática.

CO_3: (X) Idéias Matemáticas. Porque foram poucos os problemas que necessitavam de Matemática Pura, e também porque meu conhecimento em Idéias Matemáticas é bem mais amplo que na Matemática Pura.

CO_4: (X) Idéias Matemáticas. Neste caso, a maior parte dos problemas não tinha muitos dados e boa parte deles se baseava em resolver e compreender o problema, logo não dava para resolver em “Matemática Pura” já que não havia problemas do tipo “calcule o valor da expressão”. Uma vez visualizado o problema, a solução seria simples.

Nessa questão, as alternativas referentes às Idéias Matemáticas e à Matemática Pura caracterizam uma distinção entre o lado subjetivo e o lado objetivo da Matemática. A Matemática Pura pode se tornar tão complexa que objetivamente não pode ser reduzida a algumas idéias. No entanto, em termos da motivação e da dinâmica do pensamento matemático, as idéias têm um papel essencial. Então, elas são subjetivamente indispensáveis, enquanto a Matemática objetiva não poderia ser reduzida a elas.

Diante da pergunta proposta, o que se pode pensar depois da experiência da própria atividade de resolver problemas? Uma hipótese é que poderá ser destacado o lado subjetivo da Matemática. Foi o que ocorreu. Todos os estudantes pesquisados ressaltaram em primeiro lugar as Idéias Matemáticas que mais auxiliaram nas resoluções, uma vez que eles ficaram com a impressão e o impacto da própria experiência em suas mentes.

Muitos deles explicaram que foram as Idéias Matemáticas, porque os problemas podiam ser resolvidos por diferentes processos, às vezes, sem recorrer às fórmulas e equações. Apenas um estudante da Matemática assinalou que tanto as Idéias Matemáticas quanto a Matemática Pura foram importantes na resolução dos problemas propostos.

2. O QUE CONSIDERA IMPORTANTE PARA SE RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS?

MA$_1$: Primeiramente, que ele seja um problema bem elaborado para poder ter uma boa compreensão, saber o que o problema está pedindo, quais os caminhos que podem ser seguidos, ou seja, situações. Usar todos os seus conhecimentos referentes àquele problema e, por fim, analisá-lo e ver o que ele pode ter contribuído para nós de alguma maneira.

MA$_2$: Concentração ao ler o problema, para que você possa interpretá-lo de maneira correta e saber utilizar os conhecimentos já adquiridos, pois não adianta você saber a estratégia que irá aplicar, se não souber como aplicá-la.

MA_3: Analisar o enunciado para verificar a sua validade e depois traduzir o texto para a linguagem matemática e somente aqui, a análise será mais confiável.

MA_4: Ter um bom embasamento dos conceitos teóricos, para que assim possamos encontrar a saída para solucionar os problemas.

MA_5: O mais importante é saber interpretar a questão, por isso a importância da linguagem matemática. Depois é verificar se os dados estão corretos e coesos. O restante é prática e teoria matemática.

MA_6: Atenção, uma leitura criteriosa do enunciado, capacidade de separar informações dadas. E a mais importante, um conhecimento amplo dos conceitos matemáticos.

MA_7: Uma boa leitura dos problemas. Pude perceber que sem uma boa interpretação não se pode fazer muita coisa ou quase nada. Entender para depois resolver ainda é o melhor e o mais seguro caminho.

MA_8: O conhecimento do que está se pedindo tem que ser claro e bem definido, não deixando dúbias interpretações. Como tudo em Matemática deve ser exato e coeso, deixando o aluno com vontade de resolver o problema.

MA_9: 1º Conhecimento acerca do assunto em pauta. 2º Utilização de “Idéias Matemáticas”. 3º Interesse por parte do aluno (aquele que está a resolver a questão).

CO_1: Praticidade e interpretação objetiva da questão.

CO_2: A capacidade de interpretar o enunciado do problema e idealizar ou criar um raciocínio lógico para resolver o problema, e, quando necessário, aplicar fórmulas e conceitos.

CO_3: Concentração, raciocínio lógico, intuição e conhecimento matemático prévio.

CO_4: Capacidade de interpretá-los e de imaginá-los no mundo real.

O que pode ser importante na resolução de problemas? O aspecto mais importante deveria ser analisar, entender e absorver completamente o problema e, somente depois disso, conseguir trabalhar no desenvolvimento do problema, ou seja, transformar o problema em um objeto da própria atividade.

A maioria dos estudantes destacou a importância de captar, analisar, entender, transformar as informações disponíveis no enunciado de forma intuitiva, que possibilite resolver o problema. Isso significa que antes de resolver é preciso reformular o problema em uma maneira adequada para a sua própria atividade, sua própria percepção. Apenas três estudantes ressaltaram a importância dos conhecimentos anteriores.

A interpretação do problema esteve presente em grande parte das respostas dos estudantes. A atividade de resolução dos problemas provocou uma mudança na opinião deles, já que antes de resolverem os problemas matemáticos propostos, somente dois deles citaram a interpretação do problema, como sendo um dos aspectos importantes para a resolução do mesmo.

É interessante ressaltar que nessa questão, seis estudantes descreveram de forma mais completa o processo de resolução de problemas, ou seja, reconheceram a importância do processo de coleta das informações do problema (interpretação dos dados) e utilização do conhecimento matemático e conhecimentos anteriores (experiência), que corresponde ao processo de tratamento das informações, em que se tem a escolha de uma representação adequada ao problema.

3. QUAIS FORAM OS PROBLEMAS QUE VOCÊ MAIS GOSTOU? POR QUÊ?

MA_1: Os últimos, porque tive oportunidade de ver o Princípio de Pigeonhole, que para mim é novo, nunca nem tinha ouvido falar.

MA_2: Os problemas heurísticos, pois permitem tentar várias estratégias para resolvê-los; se você não consegue por uma pode tentar por outro caminho, não necessariamente seguindo um padrão. Gostei também dos problemas de lógica que ajudam a trabalhar o raciocínio.

MA_3: Todos os problemas que exigem uma reescrita em linguagem matemática me chamam a atenção, devido a me avaliar o quanto estou imaturo em relação aos conceitos matemáticos e o quanto penso e analiso usando a linguagem matemática.

MA_4: Dos problemas 2, 8, 9, 10, porque podemos chegar à solução testando as possibilidades de resultado positivo e do problema 4, que através da representação feita do tempo, por uma escala horária (minutos), ficou mais fácil a visualização do resultado.

MA_5: Os de números 8 a 13, pois ao passo que você usa o raciocínio abstrato, você fundamenta esse raciocínio na teoria.

MA_6: Os problemas que envolveram diretamente o uso da álgebra e seu formalismo.

MA_7: De todos, sem exceção, pois foram de grande contribuição. Aprendi muito o que me parecia desconhecido e muitas vezes complicado.

MA_8: A resolução dos problemas em tabuleiros. Deu mais imaginação e ânimo nas resoluções, tirando o estresse e o cansaço.

MA_9: Problema 03: necessita que tenhamos uma maior atenção para os seus dados. Problema 07: pois pude verificar uma forma bem mais fácil de resolvê-lo, visto a demora do meio que utilizei.

CO_1: Os problemas que envolviam situações facilmente mensuráveis no ambiente real.

CO_2: Gostei de todos os problemas, principalmente os que cheguei ao resultado usando somente a lógica e/ou a indução. Achei muito interessante os problemas, pois com exceção dos problemas 12 e 13, não utilizei nenhum tipo de fórmula, apenas raciocínio e algumas noções de Matemática básica. Destaques para os problemas 1, 2, 4, 7, 8, 9, 10, 11.

CO_3: O problema 7, que utilizou bastante lógica; os problemas 1, 3 e 4, onde a dedução é importante.

CO_4: Todos eram muito interessantes. Os de tabuleiros eram extremamente fáceis, exceto o 11, pois este era genérico. O 11, 12 e 13 eram os mais difíceis, pois eram do tipo “prove que” e eram mais abstratos que os outros. O problema 7 na verdade nem é de Matemática, mas nem por isso deixa de ser interessante. Nos demais era necessário calcular, eu achei muito interessante.

Dos problemas matemáticos propostos, alguns podem ser considerados situações de aplicação da Matemática a um contexto cotidiano e a um contexto do jogo tabuleiro de xadrez. Outros se referem à Ciência

Matemática propriamente dita. Assim, podemos classificá-los em oito problemas de aplicação (1, 3, 4, 7, 8, 9, 10 e 11) e cinco problemas teóricos (2, 5, 6, 12 e 13).

A partir dessa classificação dos problemas, constatamos uma diferença entre as preferências dos estudantes da Matemática e da Computação. Entre os estudantes da Matemática houve divisão nas opiniões em partes quase iguais, ou seja, um pouco mais do que a metade deles prefere os problemas de aplicação. Alguns estudantes da Matemática gostam de ambos.

Entre os estudantes da Computação a maioria prefere os problemas de aplicação. Apenas um mencionou que gostou de ambas as categorias de problemas. Nenhum deles gostou apenas dos teóricos, talvez seja um reflexo da característica de seu Curso, ou seja, a Computação é uma Ciência Aplicada.

4. VOCÊ ACHOU QUE ALGUNS PROBLEMAS FORAM MAIS DIFÍCEIS DO QUE OUTROS? POR QUÊ?

MA_1: Não diria difíceis, mas sim que exigiam conhecimentos de conceitos diferentes, em que até o momento eu os desconhecia e, com isso, eles se tornaram difíceis.

MA_2: Sim. Muitas vezes por não conseguir interpretá-los de maneira correta, deixando de perceber o que realmente está se pedindo. Ou, às vezes, por não saber expressar, de forma escrita, os meios que foram utilizados para chegar à solução.

MA_3: Sim. Acredito que está relacionado a cada indivíduo e ao conceito em relação a cada situação. Um problema difícil pode se tornar muito fácil quando estamos bem entendidos sobre os conceitos necessários para resolver tal problema.

MA_4: Sim. O problema 7, por exemplo, não precisei do conhecimento matemático para resolvê-lo, porém, precisava ter um raciocínio lógico considerável para poder solucioná-lo.

MA_5: Com certeza, pois alguns não requeriam tanto conhecimento quanto outros. Por exemplo: 0 número 13 é o mais difícil de todos, te induz a buscar os axiomas algébricos para chegar a uma solução.

MA_6: Sim. Em particular um, que envolveu um conceito que eu não conhecia.

MA_7: Sim! Porque a cada etapa você tinha que ter um pouco mais de atenção e um raciocínio maior.

MA_8: Sim. Talvez pela forma como foram confeccionados, deixando muitas vezes dúvida se estavam todos os dados disponíveis no problema para que pudesse resolvê-lo da melhor maneira possível.

MA_9: Com certeza, alguns necessitavam de uma atenção bem maior por parte do aluno do que em outros, sendo que no geral não foi necessária a utilização de Matemática Pura.

CO_1: Sim! Devido a abordagem inicial utilizada, alguns problemas acabaram sendo resolvidos em poucos passos, às vezes, sem a necessidade de uma descrição algébrica ou geométrica (apenas usando regras de três e tabelas).

CO_2: Sim, alguns problemas consegui interpretá-los bem e conseqüentemente, ter uma boa visão de como resolvê-los. Outros foram mais demorados e exigiam uma atenção maior, como é o caso do problema 7.

CO_3: Sim, porque alguns necessitavam de alguns conceitos de Matemática Pura, área que não é meu forte.

CO_4: Sim, pois eles eram diferentes. Mas mesmo assim nenhum foi difícil o suficiente para que eu pensasse em desistir ou deixar para depois. Os mais abstratos (11, 12 e 13) foram os mais difíceis.

Os estudantes foram unânimes em apontar níveis diferentes de dificuldades nos problemas propostos. Eles indicaram dificuldades na interpretação das informações dos problemas e mencionaram que muitos deles exigiram atenção e raciocínio lógico, além de envolver conceitos diferentes e, às vezes, ainda desconhecidos (como nos problemas 12 e 13).

Constatamos que houve dificuldades ou no processo de coleta das informações ou no tratamento das mesmas, em que a representação foi fundamental, ou em ambos os processos. A estudante MA_2 indicou a dificuldade em ambas, ou seja, na interpretação e em “saber expressar de forma escrita os meios que foram utilizados” que corresponde à representação adequada.

5. VOCÊ ACHA QUE A BUSCA POR UMA FORMA DE REPRESENTAR OS DADOS DO PROBLEMA SÃO IMPORTANTES PARA ENTENDER E RESOLVER O PROBLEMA?

MA_1: Com certeza, pois quando visualizamos o problema podemos tem uma melhor interpretação do mesmo, conseqüentemente, tendo um melhor entendimento daquele problema, podemos, muitas vezes, ver os vários caminhos para resolvê-los.

MA_2: Sim, pois desta forma é possível analisar os dados de uma forma mais clara e perceber estratégias que talvez não seriam vistas somente lendo o problema.

MA_3: Sim. Muitas vezes analisamos várias situações de validação para fortalecer nossas suspeitas e, então, partimos para a resolução em si.

MA_4: Com certeza. Devemos transcrever para um esquema todos os dados fornecidos pelo problema, procurando sempre estar representando e identificando da melhor forma.

MA_5: Acho que isso é pessoal, cada um pode interpretar de uma maneira, eu geralmente equaciono os problemas usando incógnitas iniciais das palavras representadas por estas.

MA_6: Sim, pois a compreensão do que se pede em um exercício, acredito eu, fica melhor visualizada, com uma representação das informações dadas.

MA_7: Sim! Pude perceber que cada vez que tinha que fazer umas anotações do problema, rendia mais, pois tinha recursos e caminhos a seguir.

MA_8: Com certeza, é o mais importante, pois se o aluno não entender de uma forma, certamente poderá entender por outra interpretação, que seja uma linguagem do conhecimento do aluno, pois ele nem sempre está acostumado com termos técnicos utilizados na elaboração do material didático.

MA_9: Sim, pois em muitos casos a organização dos dados trará uma facilidade para aquilo que buscamos responder, dando-nos um aparato melhor para nossa solução, bem como uma confiança extra, visto que temos conhecimento sobre o que é questionado.

CO_1: Sim! A forma como os dados são representados pode apresentar, por dedução lógica ou por meio de poucos passos, uma saída para o problema.

CO_2: Com certeza. Quando conseguimos representar os dados de uma forma que nos facilite para a resolução do problema, significa que entendemos o problema e estamos no caminho certo, muito perto de resolvê-lo. Por exemplo, no problema 1 cheguei à resposta rapidamente depois de conseguir representar as árvores, o rio, o peixe e os pássaros.

CO_3: Com certeza, fica mais fácil de visualizar os dados, as variáveis e as possíveis soluções.

CO_4: Não são importantes, são fundamentais e necessários. Não é possível ensinar matemática se não houver um bom motivo para aprender (na verdade é assim com o ensino de qualquer coisa). Sem representar o problema não é possível entendê-lo. Pode ser que até solucione, mas mesmo assim fica difícil entender porque foi solucionado.

O primeiro passo para se resolver um problema é reformulá-lo. Na realidade o que encontramos primeiramente é uma situação problemática e não um problema. Um problema surge quando já estamos envolvidos nele, ou seja, nos deparamos com uma situação problemática em que o primeiro passo é reformular ou reorganizar essa situação, de forma que nos possibilite o acesso ao assunto principal. Isso foi indicado por todos os estudantes.

Houve unanimidade entre eles no que se refere à relevância da representação, pois representar os dados de um problema é um processo importante para interpretar, entender e resolver o problema.

6. O QUE VOCÊ APRENDEU COM OS PROBLEMAS RESOLVIDOS?

MA_1: Pude colocar em prática o que aprendemos em sala de aula. Eu como aluna de Didática para a Matemática, apresentei um seminário sobre a resolução de problemas, toda a parte teórica, sobre os tipos, as etapas,..., e isso foi muito interessante, e que podemos trabalhar isso com nossos estudantes, apresentar-lhes situações de problemas em que eles tenham que criar estratégias para resolvê-los.

MA_2: Aprendi que devemos sempre buscar mais de uma opção (estratégias) para resolvê-los, isso sempre que possível, e também a ler com mais atenção o problema. Já que nem sempre podemos utilizar fórmulas prontas para resolvê-los e sim criar nossa própria maneira, verificando sempre a que estiver mais viável à questão.

MA_3: O quanto precisamos evoluir e a cada situação que nos é colocado percebemos o tão pouco que sabemos.

MA_4: Aprendi que devo prestar muita atenção nos dados fornecidos e encaixá-los no contexto, de forma que seja possível a representação por meio de números e letras, mesmo que nos problemas só tenham informações.

MA_5: Aprendi que a Matemática, quanto mais profunda mais linda se torna, e, nesse sentido, devo me afogar nessa profundeza de conhecimento e deslumbrar essa beleza da rainha das Ciências.

MA_6: Alguns exercícios fizeram com que eu tivesse uma nova visão ou uma nova maneira de trabalhar os meus conceitos matemáticos. Outros, porém, nada se acrescentou, pois já havia resolvido exercícios bem semelhantes.

MA_7: Que sempre estamos aprendendo e que o óbvio, muitas vezes, é extraordinário e muito surpreendente.

MA_8: Muito e que apesar de estar vendo Matemática no dia-a-dia, existe carência de conhecimentos que podem agilizar na resolução dos problemas que por hora foram acessíveis e de fácil resolução, faltando apenas lembrança mais rápida de como se deve proceder em tais situações.

MA_9: Várias são as maneiras de chegarmos a um ponto em comum, confirmando o que fora escrito na 1ª questão subjetiva a *priori*. Desse modo, podemos concluir que se estudarmos em grupo teremos uma maior facilidade de compreendermos e buscar aquilo que a Matemática nos oferece.

CO_1: Problemas aparentemente muito complexos podem ser resolvidos em etapas simples.

CO_2: Aprendi que a interpretação do problema é muito importante. E podemos resolver um problema de diversas maneiras e chegar no mesmo resultado.

CO_3: Que a intuição é muito importante na resolução de problemas.

CO_4: “Pombos e buracos” questão 12 e 13. Aprimorei um pouco a minha teoria dos números...

A pré-condição de qualquer aprendizagem é conduzir uma pessoa a perceber a si mesma mais objetivamente, reconhecer suas próprias capacidades, suas dificuldades, suas maneiras de se desenvolver, de ganhar novas capacidades e de inventar novas estratégias.

Todos os estudantes se encaixam nessa categoria de auto-percepção. Na Educação Matemática o que deve ser formada é a personalidade, ou seja, formar um estudante mais completo, mais maduro, mais receptível, mais atento às emoções, etc.

A experiência de resolver os problemas matemáticos propostos despertou em muitos estudantes a necessidade de interpretar um problema e de buscar distintos processos de resolução, que podem ser desencadeados pelas diferentes representações escolhidas.

Na questão (7) do questionário a *priori*, CO_3 assinalou que prefere pensar de forma mais analítica, pois a considera mais segura e confiável do que a intuição. Depois de resolver os problemas matemáticos ele “aprendeu” com os mesmos, que a intuição é importante na resolução de problemas.

Nas respostas dos estudantes permearam algumas idéias expostas por Gowers e por Poincaré e apresentadas no capítulo 2, pois as duas culturas na Matemática e as duas tendências de pensamentos matemáticos foram apontadas. Constatamos preferências:

- mais acentuadas por problemas matemáticos de aplicação da Matemática ou por problemas teóricos, ou ainda por utilizar mais as Idéias Matemáticas ou mais a Matemática Pura;
- por assuntos ou áreas específicas da Matemática (gostam mais da Geometria e menos da Álgebra e do Cálculo);
- por um pensamento mais intuitivo ou mais analítico.

Identificamos ainda em suas respostas:

- a importância da experiência com a atividade matemática, sobretudo, com a resolução de problemas, que reforça o que Kurz explicitou e apresentamos no capítulo 2 desta Tese;
- algumas das etapas da resolução expostas, por Krutetskii, apresentadas no capítulo 1 desta tese, ou seja, o processo de coleta das informações do problema – interpretação e formulação de problema(s) – e tratamento das mesmas, em que se tem a escolha por uma representação adequada para resolver o problema.

Os questionários forneceram uma imagem emocional dos estudantes em relação à Matemática e de como lidar com ela, bem como suas preferências por certos aspectos. Com relação aos aspectos matemáticos na resolução dos problemas, os principais resultados obtidos e a diferença na forma de pensar desses estudantes serão tratados no próximo item.

4.3.2. Pensamentos matemáticos na resolução de problemas extraídos de uma pesquisa exploratória

Nesse item apresentamos o pensamento matemático revelado durante a resolução de treze problemas matemáticos variados, obtido por meio de uma pesquisa exploratória, com alguns estudantes universitários.

Para cada um dos problemas, foram elaborados quadros contendo os conceitos, idéias ou processos utilizados para resolvê-los, os estudantes que os aplicaram, bem como os que o resolveram de forma completa ou incompleta. Como nos problemas 12 e 13 não emergiram diferentes resoluções, já que a maioria dos estudantes não os resolveu, essas tabelas destacam os estudantes que tentaram resolver ou não esses dois problemas.

Os quadros forneceram informações sobre os aspectos psicológicos que guiaram tais resoluções, no sentido que o estudante fez uma opção por certo procedimento, com base em conhecimentos ou experiências já adquiridas, ou ainda com base em uma idéia ou mesmo na intuição.

Na seqüência, após cada quadro, os problemas foram descritos focando o aspecto matemático, ou seja, evidenciando os diferentes processos de resolução que estavam intimamente ligados com a representação escolhida para resolvê-los.

Em muitos desses processos foi possível constatar o papel que a representação teve, evidenciando assim, o quão determinante ela pôde ser para auxiliar na resolução dos problemas. Em outros, uma idéia "estrangeira", no sentido que ela não estava explicitada no enunciado do problema, também foi importante para o desenvolvimento da resolução.

Problema 1: Há duas árvores, uma oposta à outra em cada lado de um rio. Uma tem 30 cúbitos de altura, a outra, 20 cúbitos. A distância entre os pés de cada árvore é de 50 cúbitos. No topo de cada árvore há 1 pássaro empoleirado. De repente, os pássaros vêem um peixe surgir na superfície do rio e entre as duas árvores. Eles mergulham ao mesmo tempo, alcançando juntos o peixe. Encontre a distância entre o pé da árvore mais alta e o peixe.

Todos os estudantes iniciaram o problema recorrendo a uma representação visual e registrando nela as informações dadas no enunciado. Alguns eram detalhistas a ponto de desenhar as árvores, os pássaros e o peixe. Outros utilizavam segmentos para as árvores e um ponto para o peixe. Os pássaros eram omitidos no desenho.

O Quadro 24 fornece uma imagem dos estudantes que conseguiram resolver esse problema e dos que o resolveram de forma incompleta.

Quadro 24 – Relação dos estudantes que fizeram esse problema de forma correta e de forma incompleta

	RESOLVEU	**RESOLUÇÃO INCOMPLETA**	
	Teorema de Pitágoras (TP)	**Raciocínio correto, resposta incorreta**	**Raciocínio incorreto, resposta correta**
ESTUDANTES	MA_1, MA_2, MA_3, MA_4, MA_5, MA_6, MA_7, MA_8, MA_9, CO_1, CO_3	CO_4 (Aplicou **TP**, mas fez um cálculo aritmético errado)	CO_2 (utilizou área de triângulo)
TOTAL	11	01	01

Como verificamos no Quadro 24, a maioria dos estudantes utilizou o Teorema de Pitágoras, com exceção do estudante CO_2, que considerou os dois triângulos como tendo áreas iguais. Esse procedimento o conduziu ao resultado correto porque os triângulos nesse problema eram congruentes. Porém, esse procedimento não foi válido porque no enunciado do mesmo não havia dados suficientes para afirmar que os dois triângulos eram congruentes.

Quase todos os estudantes o resolveram da mesma maneira porque era um problema fechado, na medida em que não propiciava diferentes resoluções. Era resolvido somente por meio do Teorema de Pitágoras.

Os estudantes MA_4 e MA_5 começaram a resolução do problema por meio de semelhança de triângulos. Nesse momento, a pesquisadora discutiu com eles os critérios para a semelhança de triângulos. Como o enunciado e nem o desenho construído por eles forneciam dados para supor a semelhança entre os dois triângulos, eles concluíram que esse não era um caminho viável. Em seguida, utilizaram o Teorema de Pitágoras. A seguir, descrevemos a resolução que foi comum à maioria dos estudantes.

Resolução de MA_1

Essa estudante desenvolveu o problema com base no desenho esboçado por ela e na Aplicação do Teorema de Pitágoras, nos dois triângulos.

$y^2 = 30^2 + x^2$ e $y^2 = 20^2 + (50 - x)^2$

$30^2 + x^2 = 20^2 + (50 - x)^2$

$900 + x^2 = 400 + 2500 - 100x + x^2$

$100x = 2000 \rightarrow \mathbf{x = 20}$

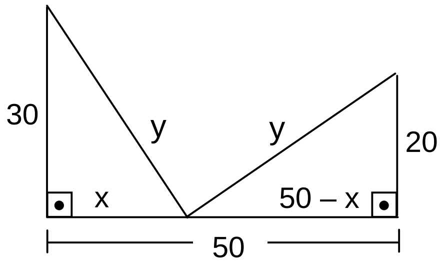


Figura 74 – Representação geométrica do problema

Problema 2: De todos os retângulos que têm o mesmo perímetro, qual o que tem maior área?

Para resolver esse problema, convém destacar dois aspectos que são fundamentais para sua resolução:

1º) considerar o quadrado como sendo um retângulo;

2º) provar que a área do quadrado é maior do que a área do retângulo.

Com base nesses aspectos, o Quadro 25 agrupou os estudantes que, nesse problema, desenvolveram uma resolução incompleta (**RI**) – não abordando o segundo aspecto – ou uma resolução completa (**RC**) – apresentando os dois aspectos.

Quadro 25 – Relação dos estudantes que resolveram o problema de forma completa e incompleta

	RI	**RC**
Estudantes	MA_1, MA_2, MA_3, MA_4, MA_5, MA_6, MA_7, MA_9, CO_1, CO_2, CO_3 e CO_4	MA_8
Total	12	01

Constatamos que apenas um estudante resolveu o problema de forma completa. Os demais utilizaram processos diferentes. No entanto, não conduziram à solução completa do problema.

O Quadro 26 apresenta um panorama dos processos utilizados para resolver esse problema e os estudantes que os empregaram.

Quadro 26 – Processos e conceitos utilizados pelos estudantes na resolução do problema

Processos	**Conceitos**	**Estudantes**	**Total**	
Numericamente (tentativa e erro)	Produto de 2 números	MA_5 e CO_4	02	08
	Cálculo de perímetros e áreas de retângulos	MA_1, MA_2, MA_4, MA_7 e CO_2	05	
	Cálculo de perímetros e áreas de retângulos e representação gráfica	CO_1	01	
Relações Algébricas	Função	MA_6, MA_8, MA_9 e CO_3	04	05
	Função e representação gráfica	MA_3	01	

Dos treze estudantes pesquisados, oito resolveram o problema numericamente, no sentido de pensar nos retângulos em termos de valores numéricos, enquanto que cinco o fizeram por relações algébricas.

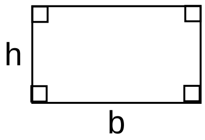
A representação numérica foi utilizada de três formas:

a) pensando no produto de dois números

Resolução de MA_5

O estudante MA_5 pensou no produto de dois números, cujo resultado foi o maior possível. Começou sua resolução escrevendo o seguinte:

“O quadrado é um retângulo onde a base e a altura são iguais”. Depois, fez o desenho (Figura 75) e as anotações como transcrevemos a seguir:

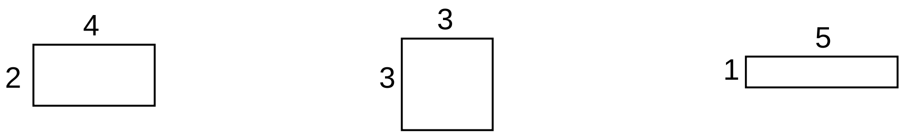


$A = b.h \rightarrow b = h \rightarrow A = b.b$

Figura 75 – Desenho de um retângulo feito por MA_5

Escreveu sua conclusão da seguinte forma: “Se a área é um produto de dois números, quanto mais próximos tiverem estes números, maior será o produto”. Ele não mencionou a condição de igualdade dos perímetros.

Em seguida, ilustrou o que escreveu com um exemplo. Estabeleceu 2p = 12, construiu três retângulos diferentes com esse perímetro e calculou as respectivas áreas, conforme Figura 76.

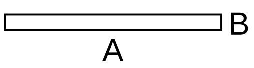


$A_1 = 2.4 = 8$ **$A_2 = 3.3 = 9$** **$A_3 = 1.5 = 5$**

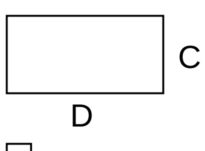
Figura 76 – Comparação de diferentes retângulos de mesmo perímetro

Resolução de CO_4

Esse estudante também pensou em termos de produto de dois números, ao analisar áreas de retângulos. Desenhou quatro retângulos (Figura 77) e estudou a variação entre as medidas dos lados, conforme descrevemos na seqüência.

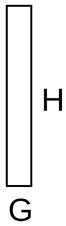


$B \rightarrow 0$
$A \rightarrow n$
$\text{Área}_{AB} \rightarrow 0$



C < D
D < A
D > C
$\text{Área}_{CD} > \text{Área}_{AB}$

E > F
E > C
F < D



Área é semelhante a CD

Área é semelhante a AB

Figura 77 – Estudo da variação das medidas dos lados de diferentes retângulos

CO_4 escreveu “Conclusão: aumentando-se um lado o outro diminui, quanto mais próximo um deles estiver de zero, menor é a área. Portanto, ambos os lados devem estar o mais distantes possível de zero, o que significa que seriam iguais, portanto, o quadrado é o retângulo que tem a maior área”.

Sua resolução fundamentou-se na noção intuitiva de limite.

b) definindo um perímetro, construíram vários retângulos de mesmo perímetro e calcularam suas respectivas áreas

Resolução de MA_2

A estudante MA_2 definiu o perímetro sendo 16 e desenhou os retângulos da Figura 78:

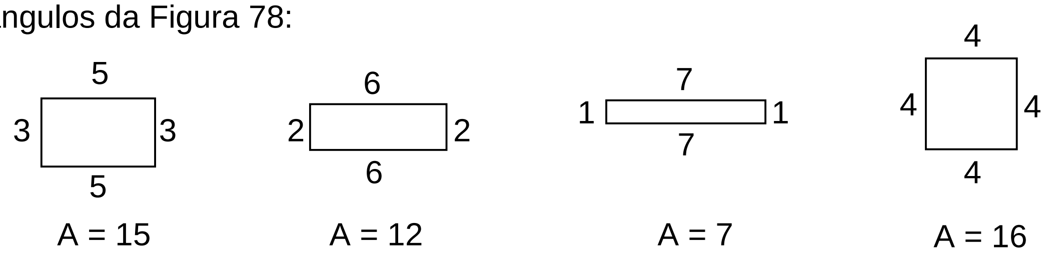


Figura 78 – Comparação de diferentes retângulos de mesmo perímetro

Comparando essas áreas, ela concluiu que o quadrado é o retângulo de maior área, porém, foi com base em um caso particular.

c) definindo um perímetro e representando graficamente alguns retângulos

Resolução de CO_1

Esse estudante foi o único que definiu um perímetro e representou alguns retângulos em um mesmo plano cartesiano (Figura 79).

Primeiro desenhou um retângulo, expressou sua área e fez a representação do quadrado de lado 3 no plano cartesiano [considerou perímetro igual a 12]. Disse que a linha que divide o plano ao meio [bissetriz do primeiro quadrante] passa pelos vértices do quadrado, então o retângulo de maior área é o quadrado.

Pesquisadora: “Isso não ocorre com os outros retângulos de mesmo perímetro?”. Diante do questionamento, ele desenhou no mesmo plano cartesiano os retângulos 1x5 e 2x4 e concluiu que não, somente com o quadrado.

Sua resolução consistiu nos desenhos abaixo:

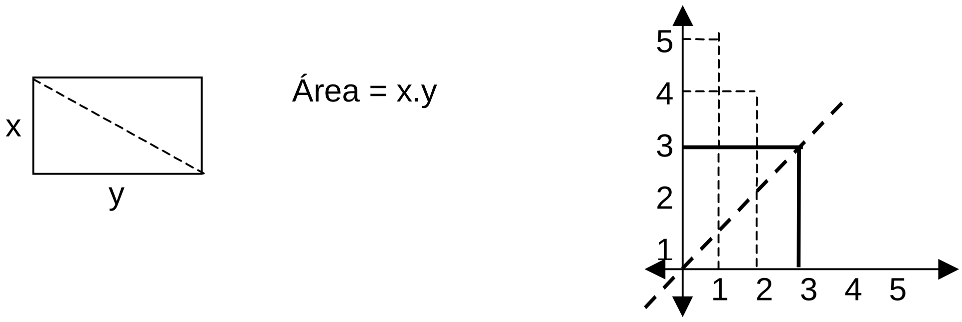


Figura 79 – Desenho de um retângulo e representação gráfica de diferentes retângulos de mesmo perímetro

O estudante CO_1 associou que o retângulo de maior área é aquele em que a sua diagonal coincide com a bissetriz do primeiro quadrante do plano cartesiano, que no caso é o quadrado. Para concluir que o quadrado tem a maior área, basta calcular a área de cada retângulo representado no plano cartesiano.

CO_1 desenvolveu sua resolução por meio de uma representação numérica, associada a uma representação gráfica, na qual registrou, em um único plano cartesiano, alguns retângulos de mesmo perímetro.

A Geometria propicia a utilização de um pensamento relacional porque associa áreas e retângulos de mesmo perímetro e isso pode ser representado graficamente.

Os estudantes que utilizaram a representação numérica tiveram a preocupação de resolver o problema, mesmo que fosse mediante casos particulares. Nenhum deles teve o interesse em analisar casos gerais, ou seja, por meio de provas, de teorias matemáticas. O pensamento foi mais intuitivo do que analítico.

A representação por meio de relações algébricas foi utilizada de duas formas:

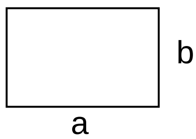
I) relacionando perímetros e áreas (conceito de função – um lado é representado em função do outro lado)

Resolução de MA_6

O estudante MA_6, num primeiro momento, pensou numericamente, construindo retângulos em que as alturas eram sempre as mesmas e as bases eram diferentes. Analisou os perímetros dos retângulos construídos e constatou que eram diferentes, o que não obedecia ao enunciado do problema (retângulos de mesmo perímetro).

Depois, construiu um retângulo de lados **x** e **y** e um quadrado de lado **x** (Figura 80). Analisou alguns retângulos de perímetro 12 e constatou que o quadrado teria um lado diferente de **x** e de **y**. Retomou o problema no próximo encontro, no qual desenvolveu da seguinte maneira:

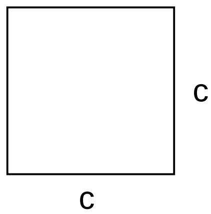
Retângulo 1



$P_1 = 2a + 2b = 2.(a+b)$

$A_1 = a.b$

Retângulo 2



$P_2 = 4c$

$A_2 = c^2$

Figura 80 – Representação de um quadrado e de um retângulo feita por MA_6

Se $P_1 = P_2$

$2.(a+b) = 4c \rightarrow a + b = 2c$

$c = \frac{a+b}{2}$ (média aritmética dos lados do retângulo)

Suponha que A_1 é maior que A_2, então

$$A_1 > A_2 \rightarrow a.b > c^2 \rightarrow a.b > \frac{(a+b)^2}{4} \rightarrow 4ab > (a+b)^2$$

$4ab > a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow 2ab > a^2 + b^2$ que não é verdade, pois se $a = 1$ e $b = 2$, temos:

$2. (1.2) > 1^2 + 2^2 \rightarrow 4 > 3$ (falso)

Portanto, a área do retângulo 1 é menor que a área do retângulo 2.

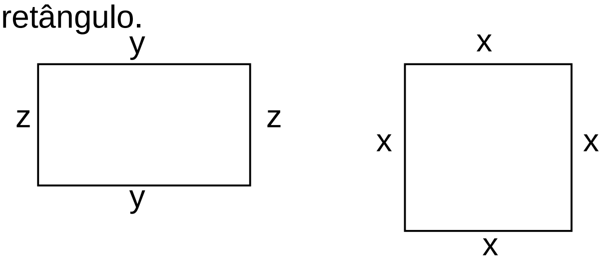
Essa resolução é interessante, porém, também é incompleta, pois utiliza valores numéricos para constatar que a sentença obtida é falsa. Ele poderia ter continuado da seguinte forma:

$2ab > a^2 + b^2 \rightarrow 0 > (a - b)^2$, que é uma sentença falsa.

É importante destacar que, após a discussão da relação entre os lados de um retângulo e um quadrado de mesmo perímetro, nos seus últimos desenhos, ele fez um quadrado maior do que os dois lados do retângulo. O que sugere que ele não conseguiu compreender que o lado do quadrado está em função dos lados do retângulo, quando ambos têm o mesmo perímetro.

Resolução de CO_3

O estudante Co_3, de imediato, desenhou os retângulos da Figura 81, revelando a compreensão de que o lado do quadrado é diferente dos lados do retângulo.



Escreveu:

yz $2z + 2y = 4x$

Figura 81 – Representação de um quadrado e de um retângulo feita por CO_3

$$x = \frac{2z}{4} + \frac{2y}{4} \rightarrow x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}y \rightarrow x = \frac{z + y}{2}$$

Em seguida, pensou na área do quadrado e escreveu:

$$x^2 \rightarrow x = \frac{z^2 + 2zy + y^2}{4} \quad [1]$$

[Esqueceu de elevar o primeiro membro ao quadrado]

Depois disso, atribuiu medidas para os lados do retângulo, sendo 2 e 4, calculando a área do retângulo [2.4 = 8] e substituindo essas medidas na igualdade obtida em [1] para a área do quadrado, fazendo $\frac{4 + 16 + 16}{4} = 9$. Comparou as áreas 8 e 9 e respondeu que o quadrado era o de maior área.

Os estudantes MA_6 e CO_3 tiveram a preocupação de resolver o problema de forma mais geral. No entanto, o mesmo foi finalizado por meio de substituições numéricas para se chegar a uma conclusão.

Resolução de MA_9

A resolução desse estudante foi a seguinte:

S = a.b

$$2P = 2a + 2b \quad \rightarrow \quad k = 2a + 2b \quad \rightarrow \quad b = \frac{k}{2} - a$$

$$S_{máx} = a.\left(\frac{k}{2} - a\right) \quad \rightarrow \quad S_{máx} = -a^2 + \frac{ak}{2}$$

$$\rightarrow \quad S' = -2a + \frac{k}{2} = 0 \quad \text{[derivou]} \quad \rightarrow \quad \mathbf{a = \frac{k}{4}}$$

[Substituiu **a** na equação $b = \frac{k}{2} - a$]

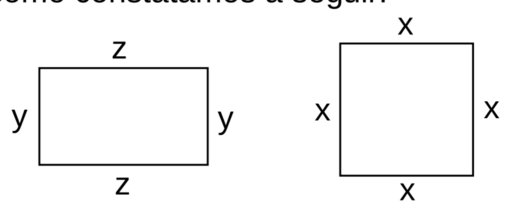
$$\mathbf{b = \frac{k}{4}} \qquad \mathbf{a = b} \quad \rightarrow \quad \textbf{Quadrado}$$

A sua resolução fundamentou-se no conceito de Derivada. No entanto, também não foi uma resolução completa porque não fez uma prova matemática.

Todas as resoluções expostas até o momento são resoluções incompletas, porque não provam que de todos os retângulos de mesmo perímetro o quadrado é o que tem maior área.

Resolução de MA_8

No primeiro encontro, esse estudante formou dupla com uma colega, que não concluiu a pesquisa. Esse problema foi resolvido pelos dois, por um processo semelhante ao do estudante MA_6, porém, de forma completa, como constatamos a seguir:



$$P_1 = P_2$$

$$2y + 2z = P_1 \qquad z.y = A_1$$

$$4x = P_2 \qquad x^2 = A_2$$

Figura 82 – Representação de um quadrado e de um retângulo feita por MA_8

$$x = \frac{2y + 2z}{4} \quad \rightarrow \quad x = \frac{y}{2} + \frac{z}{2}$$

$$x^2 > y.z \quad \rightarrow \quad \left(\frac{y}{2} + \frac{z}{2}\right)^2 > y.z \quad \rightarrow \quad \frac{y^2}{4} + \frac{2yz}{4} + \frac{z^2}{4} > yz$$

$$\frac{1}{4}(y^2 + 2yz + z^2) > yz \quad \rightarrow \quad y^2 + 2yz + z^2 > 4yz \quad \rightarrow \quad y^2 + 2yz + z^2 - 4yz > 0$$

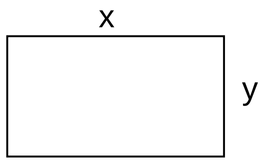
$$\rightarrow \quad y^2 + z^2 - 2yz > 0 \quad \rightarrow \quad (y - z)^2 > 0, \quad y \neq z.$$

Essa resolução está completa porque a demonstração foi feita sem recorrer a valores numéricos, como procedeu o estudante MA_6.

II) relacionando perímetros e áreas e representando graficamente lados e áreas de retângulos

Resolução de MA_3

O estudante MA_3 começou analisando um retângulo de lados x e y, desenhando-o como ilustra a Figura 83.



Área = x**.**y, supor x > y,

Figura 83 – Desenho de um retângulo feito por MA_3

O perímetro é x + x + y + y = 2 (x + y) = P

Área = A = x.y maior possível. Fazendo $y = \frac{A}{x}$.

Pensou por um tempo e resolveu analisar, aumentando 1 unidade em y, e escreveu:

“Se aproximar x de y, em 1 unidade temos: (x – 1), (y + 1).

Área = (x – 1)(y + 1) = xy + x – (y + 1). Se após aumentar y para y+1, e diminuir x para x – 1 e se esses valores forem iguais, então, teremos:

Área = xy + x – (x – 1) = xy + 1. A área aumenta em 1 unidade”. [Ele supôs que diminuindo 1 unidade em um dos lados e aumentando 1 unidade no outro lado já se teria um quadrado, o que não é verdade, pois depende do retângulo considerado].

É importante destacar que esse estudante teve uma boa idéia para resolver o presente problema, porém, não a organizou de forma que lhe conduzisse à solução do mesmo. Com essa idéia, ele poderia prosseguir da seguinte forma:

Seja um quadrado de lado x e área x^2. Se diminuirmos 1 unidade em um dos lados, aumentamos 1 unidade no outro lado. Nesse caso, temos um retângulo de lados (x – 1).(x + 1).

Sua área é: $(x – 1).(x + 1) = x^2 – 1$, em que $x^2 – 1 < x^2$, ou seja, a área do retângulo é menor que a área do quadrado.

Podemos pensar em diminuir os lados do quadrado em **a** unidades, obtendo $(x – a).(x + a) = x^2 – a^2 < x^2$. Dessa forma, construímos um retângulo de lados $(x – a)$ e $(x + a)$ que tem área $(x^2 – a^2)$ menor do que a área do quadrado x^2. Essa resolução também se caracteriza como uma prova para esse problema.

Retornando à resolução de MA_3, ele abandonou essa idéia e mudou o processo de resolução para a seguinte maneira:

"Área = $x.\left(\frac{P}{2} - x\right)$

[o segundo fator surgiu de 2(x+y) = P acima]

$A(x) = -x^2 + \frac{Px}{2}$

A = 0 quando x = 0 ou quando

$-x + \frac{P}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{P}{2}$

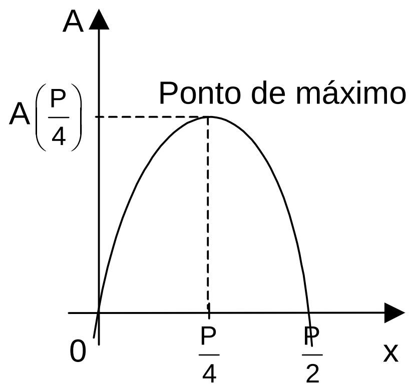


Figura 84 – Representação gráfica associando os lados de retângulos com suas respectivas áreas

Ponto médio $x = \frac{P}{4} \rightarrow P = 4x$, como se trata de um retângulo, os lados são todos iguais quando se tem a maior área".

Com exceção do estudante MA_8, os demais estudantes não fizeram uma resolução completa desse problema, ou seja, não desenvolveram uma prova. Os problemas sempre fazem parte de uma rede de relações e a mais completa culmina na resolução do problema. O pensamento matemático que exige uma resolução completa de um problema isolado é raro, por isso as relações são fundamentais.

Problema 3: A uma equipe de homens foi atribuída a tarefa de ceifar dois pastos, um tendo o dobro do tamanho do outro. Até meio dia todos os homens ceifaram juntos no pasto maior. Depois, a equipe foi dividida em dois grupos iguais. O primeiro grupo permaneceu no pasto maior e concluiu todo o trabalho no final da tarde. O segundo grupo foi ceifar o pasto menor, mas no final da tarde ainda restou uma porção desse pasto para ceifar. Essa porção foi ceifada no outro dia por apenas um homem que trabalhou durante um dia inteiro. Quantos homens estavam ceifando?

Na resolução desse problema surgiram, dentre os estudantes, três processos distintos, resultantes da utilização de diferentes conceitos, como verificamos no Quadro 27.

Quadro 27 – Conceitos utilizados pelos estudantes na resolução do problema

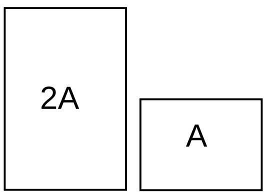
Conceitos	Estudantes	Total
Fração	CO_3 e CO_4	02
Equações	MA_1, MA_2, MA_3, MA_4, MA_6, MA_7, MA_8, MA_9 e CO_2	09
Equações e representação do trabalho de 1 homem	MA_5 e CO_1	02

As resoluções desse problema que se diferenciaram foram as seguintes:

a) utilizando conceito de fração

Resolução de CO_4

O estudante CO_4 resolveu esse problema fazendo o desenho de dois retângulos (Figura 85) representando os pastos e, em seguida, expressou a área ceifada em cada pasto, em cada período e por cada equipe, em termos de fração e escreveu o seguinte:



A = 2B
x = um grupo de homens

Figura 85 – Representação geométrica dos pastos feita por CO_4

> "Considerando que todos os homens ceifam sempre na mesma velocidade e ritmo:
> Se ambos os grupos ceifaram uma quantidade do terreno **A** de manhã e metade deles terminou à tarde, então de manhã ceifou-se $\frac{2}{3}$ do terreno maior e outro $\frac{1}{3}$ foi pelo outro grupo.
> O terreno menor foi ceifado à tarde no mesmo ritmo do maior, logo ceifou-se um terço do maior que é $\frac{2}{3}$ do menor.

Um homem demora dois períodos para ceifar $\frac{1}{3}$ do menor que é $\frac{1}{6}$ do maior. Logo para ceifar $\frac{2}{3}$ do menor em dois períodos teríamos 2 homens, e em um período 4. Estes quatro homens que ceifaram o menor em um período eram a metade de todo o grupo. Logo eram 8 homens".

Resolução de CO_3

Quando esse estudante leu o enunciado do **Problema 3** exclamou: "Este problema é mais difícil porque não tem valores numéricos e pede um resultado numérico". Entretanto, isso não é verdade, já que temos um número que é o trabalho de um dia, ou seja, poderíamos perguntar: quantos homens são necessários para concluir o trabalho no pasto maior num dia? E no pasto menor?

No pasto maior temos n + $\frac{n}{2}$ homens e no pasto menor temos $\frac{n}{2}$+2. Os estudantes CO_4, MA_9 e outros constataram isso.

O estudante CO_3 pensou por muito tempo, indicando dificuldades para representar os dados do problema. Depois fez os seguintes registros:

x y = 2x

1º período, 2 grupos = > x [> x significa que ceifaram uma área maior do que o pasto x].

Nesse momento, a pesquisadora, junto com ele, analisou geometricamente sua constatação, como ilustra a Figura 86.

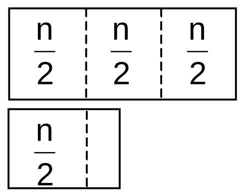


Figura 86 – Representação geométrica dos pastos feita por CO_3

Em seguida, ele escreveu:

$\frac{3h}{2} = 2x$ → PMaior

$\frac{h}{2} = \frac{1}{3}.2x$ → PMenor

$\frac{h}{2} = \frac{2}{3}x$ → $\frac{h}{2} - \frac{2}{3}x \neq x$

h = $\frac{2x}{3}.2$ → h = $\frac{4}{3}x$

Pensou por mais um tempo, sem vislumbrar um caminho para resolver o problema. Nesse momento, a pesquisadora sugeriu que ele pensasse no que ocorreu em cada pasto, ou seja, no número de homens e nos períodos para concluir o trabalho.

Em seguida, ele disse: “se eu encontrar o quanto 1 homem fez, encontrarei quantos homens trabalharam”. Pensou mais um pouco e decidiu atribuir valores para os pastos, 6 e 3 e exclamou:

> “Cada $\frac{1}{2}$ equipe trabalhou $\frac{1}{3}$ do pasto maior.
> $\frac{1}{2}$ equipe fez 2 de área. [Considerou $\frac{1}{3}$ da área que media 6].
> Equipe toda fez 4 de área.
> Se a equipe tivesse continuado junta teriam feito 8”.

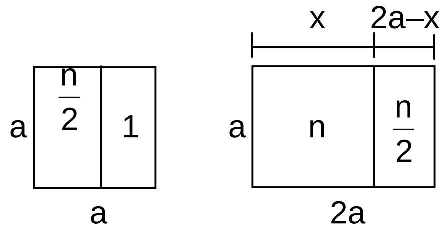
Esse estudante concluiu o problema de forma intuitiva, atribuindo valores para os pastos e comparando o número de homens em cada período com as áreas dos pastos.

Como não conseguiu resolver por outro processo, ele quis saber outra forma de resolver esse problema e a pesquisadora discutiu com ele a resolução por meio de relações algébricas. Ele teve interesse em conhecer uma resolução que não fosse apenas numérica, ou seja, por tentativa e erro.

b) escrevendo equações

Resolução de MA_9

Esse estudante fez desenhos para representar cada pasto, anotando os respectivos dados fornecidos pelo problema (Figura 87), e resolveu, de forma muito rápida, conforme descrevemos a seguir:



1º grupo
2º grupo
nº homens = n (par)

Figura 87 – Representação geométrica dos pastos feita por MA_9

$\cancel{a}^2 \rightarrow \frac{n}{2} + 2$ $\qquad\qquad$ $n + \frac{n}{2} = n + 4$

$2\cancel{a}^2 \rightarrow n + \frac{n}{2}$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{n = 8}$

Interpretando sua resolução:

Nos retângulos ele registrou as informações dadas pelo problema:

Pasto maior: n homens até meio dia e $\frac{n}{2}$ à tarde

Pasto menor: $\frac{n}{2}$ homens à tarde e 1 homem o dia inteiro.

No entanto, ao escrever as equações pensou da seguinte forma: Um dia de trabalho no pasto menor é dado por $\frac{n}{2}+ 2$ homens. E um dia de trabalho no pasto maior é dado por $n + \frac{n}{2}$ homens. Então, $\frac{n}{2} + 2 = 2(n + \frac{n}{2})$.

Ele fez uso de uma intuição direcionada para as informações essenciais do problema e, com isso, estabeleceu como unidade de medida homens-dias. Um empirista buscaria a unidade de medida, sendo a área dada em cm^2, m^2, etc., como fez o estudante CO_3 descrito acima. Essa forma de MA_9 estruturar esse problema evidencia um pensamento relacional.

Sua resolução foi desencadeada por uma idéia “estrangeira”, ao considerar o pasto menor sendo um quadrado. O problema não mencionava essa condição, porém, essa representação o auxiliou na realização da comparação entre os pastos. Ou seja, a representação adotada foi determinante para a sua resolução.

Resolução de MA_8

Esse estudante fez os desenhos (Figura 88). [Quando escreveu $\frac{1}{2}$, ele estava se referindo à metade dos homens H, porém, não escreveu isso].

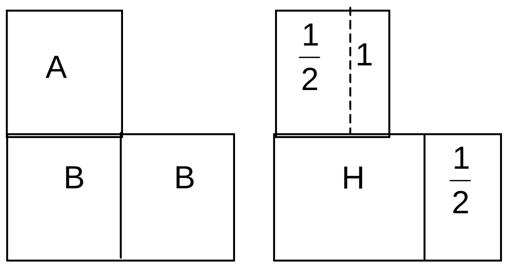


Figura 88 – Representação geométrica dos pastos feita por MA_8

Esses desenhos o auxiliou a escrever as seguintes equações:

$H + \frac{H}{2} = 2x \rightarrow \frac{3H}{2} = 2x \rightarrow 3H = 4x$

$\frac{H}{2} + 1 + 1 = x \rightarrow \frac{H}{2} + 2 = x \rightarrow H + 4 = 2x$

$\begin{cases} 3H - 4x = 0 \\ H - 2x = -4 \quad (-2) \end{cases} \qquad \begin{cases} 3H - 4x = 0 \\ -2H + 4x = 8 \end{cases}$

H = 8

No entanto, depois que encontrou H, determinou o valor de x, que é a área do pasto menor, sem constatar que não havia essa necessidade.

Resolução de MA2

Essa estudante não utilizou uma representação visual para indicar os pastos, apenas registrou as informações dadas pelo problema. Ela revelou certa dificuldade para organizar tais informações. Somente vislumbrou uma possibilidade quando a pesquisadora sugeriu que pensasse no que ocorreu em cada pasto. Assim resolveu como descrevemos abaixo:

a - pastos - $\frac{H}{2}$

$\begin{cases} H + \frac{H}{2} = 2a \\ \frac{H}{2} + 1 + 1 = a \end{cases}$

$\frac{2H + H}{2} = \frac{4a}{2} \rightarrow 3H = 4a \rightarrow H = \frac{4a}{3}$

$\frac{H}{2} - a = -2 \rightarrow \frac{4a}{6} - a = -2$

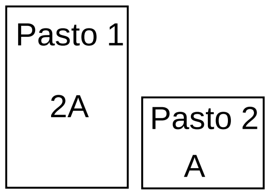
$\frac{4a - 6a}{6} = -\frac{12}{6} \rightarrow -2a = -12 \rightarrow$ **a = 6**

[Substituiu **a** na equação $H = \frac{4a}{3}$]

$H = \frac{24}{3} \Rightarrow$ **H = 8**

Resolução de MA_6

Esse estudante iniciou o problema desenhando os pastos, anotando as informações sobre cada um (Figura 89), de acordo com os períodos usados para ceifar.



x = Quantidade de homens

$$\text{Pasto 1}\begin{cases}\frac{1}{2}\text{ dia } = x\\ \frac{1}{2}\text{ dia } = \frac{x}{2}\end{cases}\qquad 1\text{ dia} = \frac{x}{2} + x = \frac{3x}{2}$$

$$\text{Pasto 2}\begin{cases}\frac{1}{2}\text{ dia } = \frac{x}{2}\\ \frac{1}{2}\text{ dia } = 1\\ \frac{1}{2}\text{ dia } = 1\end{cases}\qquad \frac{3}{2}\text{ dia} = \frac{x}{2} + 2$$

Figura 89 – Representação geométrica dos pastos feita por MA_6

$$\begin{cases}2A = \dfrac{3x}{2}\\ A = \dfrac{x}{2} + 2\end{cases} \rightarrow \quad 2\left(\frac{x}{2}+2\right)=\frac{3x}{2}$$

Ele resolveu a equação e obteve o valor de x = 8, que corresponde à quantidade de homens que trabalharam nos pastos.

Resolução de MA_3

O estudante MA_3 começou fazendo dois retângulos para representar os dois pastos (Figura 90). Ele perguntou se em cada período o tempo de trabalho seria o mesmo. Sua resolução foi a seguinte:

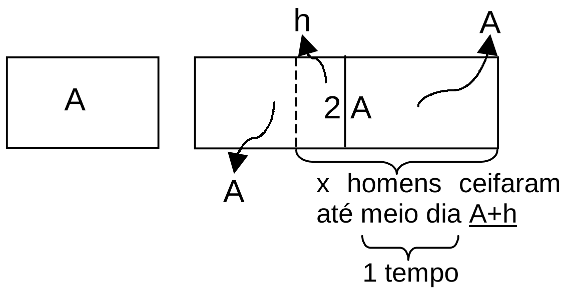


Figura 90 – Representação geométrica dos pastos feita por MA_3

Até meio dia x homens na área 2A

$$\begin{array}{l} \text{A tarde} \\ \text{(1 tempo)} \end{array}\begin{cases}\frac{x}{2}\text{ homens ceifaram } A - h\\ \frac{x}{2}\text{ homens ceifaram } A - h\end{cases}$$

$\underbrace{\text{No outro dia}}_{\text{2 tempos}}$: 1 homem ceifou h

A seguir, colocamos entre colchetes a construção das relações que ele estabeleceu até chegar ao esquema e registrou na sua folha de resolução.

$$\left(\left\{\begin{array}{lcccc} \mathbf{H} & & \mathbf{A} & & \mathbf{tempo} \\ x & \text{——} & A+h & \text{——} & 1 \\ \frac{x}{2} & \text{——} & A-h & \text{——} & 1 \\ 1 & \text{——} & h & \text{——} & 2 \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcccc} \mathbf{H} & & \mathbf{A} & & \mathbf{tempo} \\ x & \text{——} & A+h & \text{——} & 1 \\ \frac{x}{2} & \text{——} & A-h & \text{——} & 1 \\ 1 & \text{——} & \frac{h}{2} & \text{——} & 1 \end{array}\right.\right)$$

Ele fez relação 2 + relação 3: $\frac{x}{2}+1 \text{ —— } A-h+\frac{h}{2} \rightarrow \frac{x}{2}+1 \text{ —— } A-\frac{h}{2}$

Depois dessas análises, ele obteve, como esquema, o que apresentamos a seguir:

[Registro de MA_3]

$$\left\{\begin{array}{lcccc} \mathbf{H} & & \mathbf{A} & & \mathbf{tempo} \\ x & \text{——} & A+h & \text{——} & 1 \\ \frac{x}{2}+1 & \text{——} & A-\frac{h}{2} & \text{——} & 1 \\ 1 & \text{——} & \frac{h}{2} & \text{——} & 1 \end{array}\right.$$

Em seguida, escreveu:

$$x-2 \text{ —— } A$$

$$\frac{x}{2}+2 \text{ —— } A$$

$$x-2=\frac{x}{2}+2 \rightarrow x-2=\frac{x+4}{2} \rightarrow 2x-4=x+4 \rightarrow \mathbf{x=8\ homens}$$

[Da terceira relação de seu esquema $1 \text{ —— } \frac{h}{2}$ concluiu que **h = 2**, ou seja, que para fazer a área **h** seriam necessários 2 homens, e substituiu isso na primeira relação ($x \text{ —— } A+h \rightarrow x-h \text{ —— } A+h-h \rightarrow x-2=A$)].

c) escrevendo equações e calculando o trabalho de 1 homem

Resolução de MA_5

Esse estudante, sem recorrer a qualquer representação visual, resolveu o problema de forma construtiva, transformando o trabalho dos dois pastos em 1 dia, fazendo os seguintes registros:

Pasto 1 | Pasto 2

$T_1 = x$ | $T_2 = 2x$

$\frac{n}{2} \rightarrow 2x - y \rightarrow$ tarde | $n \rightarrow y \rightarrow$ manhã

$1 \rightarrow x - (2x - y) \rightarrow 1$ dia | $\frac{n}{2} \rightarrow 2x - y \rightarrow$ tarde

1 → y – x → 1 dia [trabalho de 1 homem]

$\frac{n}{2} \rightarrow x + x - y \rightarrow$ tarde | $\frac{n}{2} \rightarrow 2x - y$ tarde

[Em ambos os pastos converteu a relação acima de 1 período para dois períodos (1 dia). Ele pensou: se $\frac{n}{2}$ homens fazem a área 2x – y em uma tarde, para fazer essa mesma área em 1 dia, seriam necessários metade de $\frac{n}{2}$ homens. Com esse raciocínio obteve o que descrevemos a seguir].

$\frac{n}{4} \rightarrow x + x - y \rightarrow 1$ dia | $\frac{n}{4} \rightarrow 2x - y$ 1 dia

$\frac{n}{4} \rightarrow x - (y - x)$ 1 dia | $\frac{n}{4} \rightarrow 2x - \frac{n}{2}$ 1 dia

$\frac{n+4}{4} \rightarrow x \rightarrow 1$ dia | $\frac{n}{4} + \frac{n}{2} \rightarrow 2x$ 1 dia

[Substituiu (y – x) = 1 (trabalho de 1 homem)

e fez: $\frac{n}{4} + 1 \rightarrow x$]

$\frac{n+4}{2} \rightarrow 2x \rightarrow 1$ dia | $\frac{3n}{4} \rightarrow 2x$ 1 dia

$\frac{n+4}{2} = \frac{3n}{4} \rightarrow 2n + 8 = 3n \rightarrow$ **n = 8 homens**

Problema 4: Dois trabalhadores, um mais velho e outro mais jovem, moram na mesma casa e trabalham na mesma fábrica. Caminhando até a fábrica o homem mais jovem leva 20 minutos. O homem mais velho percorre a mesma distância em 30 minutos. Quando o trabalhador jovem alcançará o homem mais velho, se esse partir 5 minutos antes do jovem?

O problema foi resolvido de quatro formas diferentes, de acordo com os conceitos ou procedimentos utilizados, como verificamos no Quadro 28.

Quadro 28 – Conceitos utilizados pelos estudantes na resolução do problema

Conceitos	Estudantes	TTotal
Segmentos	MA_1, MA_2, MA_4, MA_6, MA_7, MA_8, e CO_2	07
Física	MA_3, MA_9, e CO_4	03
Proporção	MA_5	01
Fração	CO_1	01
Comparação entre os tempos	CO_3	01

Os processos de resolução foram os seguintes:

a) Conceito de segmentos

Resolução de MA_2

Essa estudante desenhou dois segmentos iguais (representando a mesma distância) um para o mais velho e outro para o mais jovem (Figura 91). Ambos foram divididos em intervalos de 5 minutos. A cada 5 minutos foi associada uma fração: $\frac{1}{6}$ para o mais velho e $\frac{1}{4}$ para o mais jovem. Essas frações indicaram a distância percorrida por cada irmão a cada 5 minutos. Sua representação foi a seguinte:

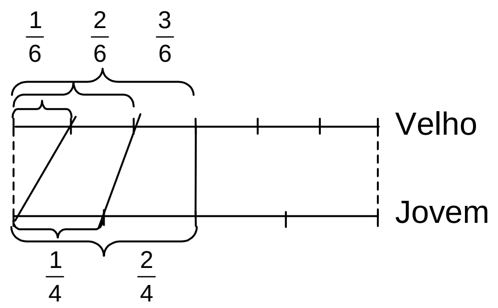


Figura 91 – Representação geométrica por meio de segmentos feita por MA2

Os segmentos transversais que unem os dois segmentos representando as distâncias conduzem à resposta, já que constatamos que o velho caminhou 3 intervalos de 5 min, totalizando 15 min, e o jovem 2 intervalos, ou seja, 10 min.

Assim, eles se encontrarão 10 minutos depois que o jovem partiu, e isso ocorrerá na metade do caminho.

Resolução de MA_4

A estudante MA_4 também utilizou segmentos, no entanto, não os uniu como fez MA_2. Ela interpretou a resposta pelos intervalos de 5 minutos, conforme Figura 92.

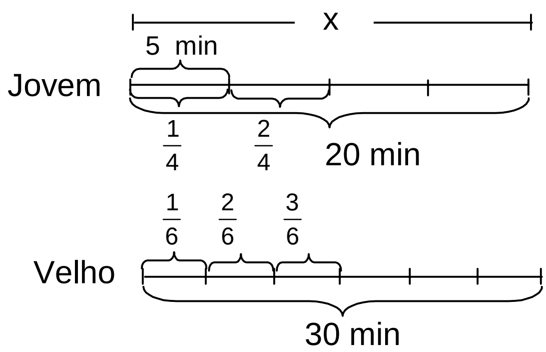


Figura 92 – Representação geométrica por meio de segmentos feita por MA_4

Esse processo de resolução por meio de segmentos foi similar à resolução do estudante Volodya, de 10 anos, pesquisado por Krutetskii e citado no capítulo 1 desta Tese (KRUTETSKII, 1976, p. 204). Volodya, na maioria das vezes, resolvia os problemas recorrendo às imagens visuais.

b) Conceito de Física que foram utilizados de forma diferente

Resolução de MA_3

O estudante MA_3 utilizou fórmulas da Física para resolver esse problema. No entanto, não conseguiu interpretar o resultado obtido, pois encontrou o tempo sendo t = – 15.

Somente no encontro seguinte retomou o problema, utilizando segmentos (Figura 93), e refez os cálculos usando novamente fórmulas da Física, encontrando a resposta correta da seguinte forma:

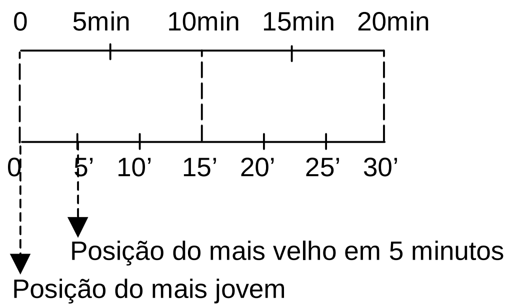


Figura 93 – Representação geométrica por meio de segmentos feita por MA_3

Se considerar tempo começando quando estiverem nessa posição.

$x_2(t) = 5V_2 + V_2t$ $\qquad\qquad V_2 = \frac{2}{3}V_1$

$x_1(t) = V_1t$

$x_1 = x_2$

$$5V_2 + V_2t = V_1t \quad \rightarrow \quad \frac{10}{3}V_1 + \frac{2}{3}V_1 = V_1t \quad \rightarrow \quad \left(\frac{10}{3} + \frac{2}{3}t - t\right)V_1 = 0$$

$$\left(\frac{10-t}{3}\right)V_1 = 0 \quad \text{com } V_1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{t = 10\ min}$$

MA_3 primeiramente tentou resolver esse problema por meio de relações algébricas, entretanto, obteve uma resposta negativa para o tempo. No outro dia, iniciou a resolução partindo de uma representação geométrica que o auxiliou na resolução por meio de relações algébricas.

Resolução de MA_9

O estudante MA_9 também desenhou um segmento, porém, não de forma detalhada como MA_3, e sim utilizando mais fórmulas da Física, como constatamos a seguir:

J $\rightarrow$ 20 min

V $\rightarrow$ 30 min

J

V Δs

$$V_j = \frac{\Delta s}{20} \qquad S_j = \cancel{S_0} + V_j(t-5)$$

$$V_v = \frac{\Delta s}{30} \qquad S_v = \cancel{S_0} + V_it$$

$$S_j = S_i$$

Primeiro fez: $\frac{\Delta s}{20}.(t-5) = \frac{\Delta s}{30}.t \quad \rightarrow \quad 3t - 15 = 2t \quad \rightarrow \quad \mathbf{t = 15}$

Depois mudou para: $\frac{\Delta s}{20}.t = \frac{\Delta s}{30}.(t+5)$

$$3t = 2t + 10 \quad \rightarrow \quad \mathbf{t = 10\ min}$$

Resolução de CO_4

A forma de resolução desse estudante é similar à desenvolvida por MA_9, na medida em que partiu das mesmas relações. No entanto, escreveu a equação de forma diferenciada. Ele começou atribuindo que:

Distância casa-fábrica = x

Velocidade do jovem = $\frac{x}{20}$

Velocidade do velho = $\frac{x}{30}$

Posição do jovem quando sai de casa = 0

Posição do velho quando o jovem sai de casa = $5.\frac{x}{30}$

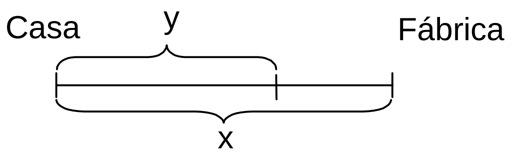
$S = S_0 + Vt \qquad \rightarrow \qquad 0 + \frac{x}{20}.t = 5.\frac{x}{30} + \frac{x}{30}.t$

$\frac{x}{20}.t - \frac{x}{30}.t = 5.\frac{x}{30} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{60}.t = 5.\frac{x}{30} \quad \rightarrow \quad xt = 10x \quad \rightarrow \quad$ **t = 10 min**

c) Proporção aplicada em segmentos

Resolução de MA_5

Esse estudante fez um segmento e nele marcou o tempo de cada trabalhador (Figura 94). Em seguida, aplicou o conceito de proporção da seguinte forma:



Jovem: $\frac{x}{y} \rightarrow \frac{20}{t}$

Velho: $\frac{x}{y} \rightarrow \frac{30}{t+5}$

Figura 94 – Representação geométrica por meio de proporção de segmentos feita por MA_9

$\frac{20}{t} = \frac{30}{t+5} \quad \rightarrow \quad 30t = 20t + 100 \quad \rightarrow \quad 10t = 100 \quad \rightarrow \quad$ **t = 10 min**

d) Conceito de fração

Resolução de CO_1

Esse estudante resolveu, pensando em termos de frações, da seguinte maneira: $30 \rightarrow x \qquad 20 \rightarrow x$

$5 \rightarrow \frac{1}{6}x \qquad 5 \rightarrow \frac{1}{4}x$

Após 5 min: $\frac{2}{6}x \qquad \frac{1}{4}x$

Após 10 min: $\frac{3}{6}x \qquad \frac{2}{4}x \quad \rightarrow \quad \frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Conclusão: Eles se encontram após 10 min na metade do caminho.

Essa forma de pensar também foi análoga a outro processo de resolução desenvolvido por Volodya e apresentado por Krutetskii (Ibidem, p. 203).

e) Fazendo a comparação entre os tempos

Resolução de CO_3

Nesse problema, o estudante CO_3 reconheceu que poderia utilizar conceitos da Física para resolvê-lo. Até tentou, porém, não conseguiu. Suas anotações iniciais foram as seguintes:

Velho = 30

Jovem = 20 $\rightarrow \frac{1}{3}$ mais rápido

Trajeto = d

$v = t.d \qquad t = \frac{v}{d} \qquad e \qquad d = \frac{v}{t}$

$d_v = d_j \qquad \frac{v_v}{t_v} = \frac{v_j}{t_j} \qquad \rightarrow \qquad \frac{v_v}{30} = \frac{v_j}{20}$

Pensou um pouco, e depois relacionou o tempo com a quantidade de passos de cada irmão, tendo como parâmetro que o mais jovem é $\frac{1}{3}$ mais rápido que o mais velho. Ele estabeleceu uma comparação entre os tempos de cada irmão até conseguir uma igualdade, que ocorreu em 15 minutos. Ele disse que teria que descontar os 5 minutos em que o mais velho saiu antes do mais jovem, obtendo como resposta 10 minutos. Sua resolução consistiu no seguinte registro:

	J		V	
	40	-	30	
	0	-	150	
10	- 400	-	450	[o 10 na frente corresponde aos minutos]
11	- 440	-	480	
12	- 480	-	510	
13	- 520	-	540	
14	- 560	-	570	
15	- 600	-	600	

A pesquisadora pediu para que ele explicasse como pensou para obter essa resposta. Ele explicou que definiu 40 e 30 como sendo o número de passos que cada irmão dá em 1 minuto. Na verdade, o número 40 surgiu da condição estabelecida por ele, em que o mais jovem é $\frac{1}{3}$ mais rápido que o mais velho, ou seja, $30 + \frac{1}{3} . 30 = 40$. Com esse parâmetro, calculou o número de passos dados por cada irmão em 5 min, 10 min, 11 min, 12 min,..., 15 min, encontrando uma igualdade de 600 passos.

Sua resolução, como no problema anterior, consistiu em atribuir valores numéricos para obter a resposta, ou seja, utilizou um processo por experimentação.

Após fazer essa resolução, quis saber outra forma de se resolver esse problema. Assim, a pesquisadora discutiu o processo, envolvendo segmentos.

Problema 5: No quadro 4 x 4 ao lado, cada símbolo representa um número diferente. Está indicada a soma dos símbolos em três das linhas e colunas. Quais são os dois totais que faltam?

♦	✯	π	✯	32
π	■	♦	■	
■	✯	♦	✯	30
π	♦	π	■	32
32		31	31	

Quadro 29 – Relação dos estudantes que resolveram o problema ou apresentaram uma resolução incompleta

	Resolveu	Resolução incompleta
Estudantes	MA_1, MA_2, MA_4, MA_5, MA_6, MA_7, MA_8, MA_9, CO_1, CO_2 e CO_4	(raciocínio correto – algumas respostas erradas) MA_3 e CO_3
Total	11	02

Aparentemente esse problema não sugere diferentes processos de resolução. Basta substituir figuras por incógnitas, ou utilizar as próprias figuras, escrever sistemas de equações e resolvê-los.

No entanto, surgiram distintas resoluções para esse problema, não somente no registro dos sistemas de equações, mas também nos processos de resolução dos sistemas. Um estudante aplicou escalonamento de matrizes. Essa variedade de processos pode ser verificada no Quadro 30 e na descrição das resoluções.

Quadro 30 – Conceitos utilizados pelos estudantes na resolução do problema

Conceitos	Estudantes	Total
Equações com figuras	MA_6, MA_7, MA_8, CO_1 e CO_4	05
Figuras e equações resultantes de operações	MA_5 e CO_3	02
Equações com incógnitas	MA_1, MA_2 (começou com figuras, depois mudou), MA_3, MA_4, MA_9 e CO_2	06

Para escrever as equações desse problema alguns estudantes as organizavam por linhas e por colunas; outros as organizavam por somas iguais (31 e 32), enquanto outros pelas figuras repetidas nas linhas e colunas.

Além dessas estratégias, outras resoluções emergiram, com base nos símbolos e nos processos utilizados, como acompanhamos a seguir.

a) equações com figuras

Resolução de MA_6

Esse estudante agrupou as equações se baseando nos resultados das somas. Sua resolução foi bem detalhada, no sentido de registrar todas as operações, sem reduzir os passos no processo de raciocínio.

$$\begin{cases} 2\pi + \blacksquare + \blacklozenge = 32 \\ 2\bigstar + \pi + \blacklozenge = 32 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\pi + 2\blacklozenge = 31 \\ 2\bigstar + 2\blacksquare = 31 \end{cases} \qquad 2\bigstar + \blacksquare + \blacklozenge = 30$$

$$2\bigstar = 31 - 2\blacksquare$$

$$2(\pi + \blacklozenge) = 31 \quad \rightarrow \quad \pi + \blacklozenge = \frac{31}{2}$$

$$2\bigstar + \frac{31}{2} = 32 \quad \rightarrow \quad 2\bigstar = 32 - \frac{31}{2} \quad \rightarrow \quad 2\bigstar = \frac{33}{2} \quad \rightarrow \quad \bigstar = \frac{33}{4}$$

$$2\bigstar + 2\blacksquare = 31 \quad \rightarrow \quad 2.\frac{33}{4} + 2\blacksquare = 31 \quad \rightarrow \quad \frac{33}{2} + 2\blacksquare = 312$$

$$\rightarrow \quad 2\blacksquare = 31 - \frac{33}{2} \quad \rightarrow \quad 2\blacksquare = \frac{29}{2} \quad \rightarrow \quad \blacksquare = \frac{29}{4}$$

$$2✯ + ■ + ♦ = 30 \rightarrow 2.\frac{33}{4} + \frac{29}{4} + ♦ = 30$$

$$\rightarrow \frac{66}{4} + \frac{29}{4} + ♦ = 30 \rightarrow ♦ = 30 - \frac{29}{4} \rightarrow ♦ = \frac{25}{4}$$

$$2✯ + \pi + ♦ = 32 \rightarrow \pi = 32 - ♦ - 2✯ \rightarrow \pi = 32 - \frac{25}{4} - 2.\frac{33}{4}$$

$$\rightarrow \pi = 32 - \frac{25}{4} - \frac{66}{4} \rightarrow \pi = 32 - \frac{91}{4} \rightarrow \pi = \frac{37}{4}$$

$$2✯ + ■ + ♦ = 2.\frac{33}{4} + \frac{29}{4} + \frac{25}{4} = \frac{66}{4} + \frac{29}{4} + \frac{25}{4} = \frac{120}{4} = \mathbf{30}$$

$$\pi + ■ + ♦ = \frac{37}{4} + 2.\frac{29}{4} + \frac{25}{4} = \frac{37}{4} + \frac{58}{4} + \frac{25}{4} = \frac{120}{4} = \mathbf{30}$$

b) uso de figuras e equações resultantes de operações entre linhas ou entre colunas

Resolução de MA_5

O estudante MA_5 resolveu o problema fazendo mentalmente operações entre linhas ou entre colunas, registrando apenas os respectivos resultados. Sua resolução tornou-se simples e rápida, como constatamos a seguir:

$■ - ♦ = 1$ $[C_1 - C_3]$

$\pi - ■ = 2$ $[L_1 - L_3]$ → $■ = \pi - 2$

$\pi - ✯ = 1$ $[(L_4 - L_3): 2]$ → $✯ = \pi - 1$

$x - 30 = \pi + ■ - 2✯$ $[L_2 - L_3]$

$x - 30 = \pi + \pi - 2 - 2(\pi - 1)$ → $x = 30$ $[L_2]$

No decorrer da resolução ele identificou que $C_2 = L_3 = 30$, colocando o resultado na própria folha dos problemas.

c) equações com incógnitas

Os estudantes MA_9 e CO_2 primeiro desenharam na folha um quadro 4x4 e escreveram letras nas células para substituir as figuras. Depois, escreveram as equações.

É interessante descrever a resolução de MA_9 para evidenciar a importância de adotar uma representação que possa auxiliar na resolução de um problema.

MA_9 não fez simplesmente cálculos fundamentais. Ele pensou de forma a estabelecer relações entre as equações, obtendo igualdades que facilitassem sua resolução. Como tinha que determinar a soma de x + 2w + z, trabalhou as equações de modo a obter **x + z** e **2w** e não apenas x, y e w isoladamente.

Ele fez o quadro ao lado e depois escreveu as equações agrupando-as, pelas somas, como constatamos a seguir:

x	y	z	y	32
z	w	x	w	
w	y	x	y	30
z	x	z	w	32
32		31	31	

x + 2y + z = 32

x + w + 2z = 32 x + 2w + z = ?

x + 2y + w = 30 x + 2y + w = ?

2x + 2z = 31 → $x + z = \frac{31}{2}$

2y + 2w = 31

Ao escrever as equações constatou que $C_2 = L_3 = 30$, registrando o resultado no quadro desenhado na sua folha de resolução dos problemas.

Em seguida, multiplicou por 2 a equação x + 2y + z = 32 e subtraiu a equação 2x + 2z = 31.

$$\begin{array}{r} 2x + 4y + z = 64 \\ 2x + 0 + 2z = 31 \\ \hline 4y = 33 \end{array} \quad \rightarrow \quad 2y = \frac{33}{2}$$

Depois, substituiu o valor de 2y na equação 2w = 31 – 2y:

$$2w = 31 - \frac{33}{2} = \frac{62-33}{2} \quad \rightarrow \quad 2w = \frac{29}{2}$$

Para obter a soma da segunda linha ele substituiu os respectivos valores de x + z e de 2w, ou seja: $\frac{31}{2} + \frac{29}{2} = 30$.

Outros estudantes já escreveram as equações fazendo as correspondências como as que seguem.

Resolução de MA_1

Essa estudante denominou: ✯ = a; ♦ = b; π = c e ■ = d. Escreveu os dois sistemas, um utilizando apenas as linhas e outro somente as colunas:

1º) L_1, L_3 e L_4

$$\begin{cases} 2a+(b+c)=32 \\ 2a+b+d=30 \\ b+2c+d=32 \end{cases}$$

2º) C_1, C_3 e C_4

$$\begin{cases} b+2c+d=32 \\ 2b+2c=31 \\ 2a+2d=31 \end{cases} \rightarrow 2(b+c)=31 \Rightarrow \mathbf{b+c=15{,}5}$$

$$2(a+d)=31 \quad \rightarrow \quad (a+d)=\frac{31}{2} \quad \rightarrow \quad \mathbf{a+d=15{,}5}$$

[Substituiu b + c = 15,5 na equação 2a + (b + c) = 32]

$$2a+15{,}5=32 \quad \rightarrow \quad a=\frac{32-15{,}5}{2} \quad \rightarrow \quad \mathbf{a=8{,}25}$$

$$a+d=15{,}5 \quad \rightarrow \quad d=15{,}5-8{,}25 \quad \rightarrow \quad \mathbf{d=7{,}25}$$

[Substituiu os valores de **a** e **d** na equação 2a + b + d = 30]

$$2(8{,}25)+b+7{,}25=30 \quad \rightarrow \quad b=30-7{,}25-16{,}50 \quad \rightarrow \quad \mathbf{b=6{,}25}$$

$$b+c=15{,}5 \quad \rightarrow \quad c=15{,}5-6{,}25 \quad \rightarrow \quad \mathbf{c=9{,}25}$$

LINHA	COLUNA
c + 2d + b = x	2a + b + d = y
9,25 + 2(7,25) + 6,25 = x	2(8,25) + 6,25 + 7,25 = y
x = 30	**y = 30**

Resolução de MA_3

Esse estudante teve um raciocínio correto. Porém, errou em algumas substituições, obtendo a resposta final certa. Ele começou resolvendo os sistemas, depois mudou para o processo de escalonamento de matrizes. Porém, ao reescrever as equações do primeiro sistema, para depois representar em uma matriz, substituiu um valor errado para **c**, e como conseqüência, obteve valores errados para **a** e **b**.

A seguir, temos a descrição de sua resolução do problema, com as mudanças, nos processos utilizados.

Ele escreveu: "Faz-se ♦ = a; π = b; ■ = c e ✯ = d". Definiu dois sistemas com 3 equações e 4 incógnitas, utilizando Linhas e Colunas:

1º) L_4, C_3 e L_3

$$\sim \begin{cases} a+2b+c=32 \\ 2a+2b=31 \\ a+c+2d=30 \end{cases}$$

2º) C_1, $(L_1 - L_3)$ e C_3

$$L_1 - L_3 \sim \begin{cases} a+2b+c=32 \\ 2b-2d=2 \\ 2a+2b=31 \end{cases}$$

Ao escrever essas duas equações, constatou que $C_2 = L_3 = 30$, escrevendo o resultado na folha dos problemas.

Na resolução dos sistemas, utilizou inicialmente o processo de isolar as incógnitas, conforme transcrevemos a seguir:

$$\sim \begin{cases} a+2b+c=32 \\ 2b-2d=2 & \rightarrow \quad b = 1 + d \\ 2a+2b=31 & \rightarrow \quad a + b = \frac{31}{2} \end{cases}$$

$$eq_1 - eq_3 \quad \sim \begin{cases} a+2b+c=32 \\ 2a+2b=31 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \sim \{-a + c = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c = 1 + a}$$

Em seguida, escreveu: a + 2c + b = ? [soma a ser obtida na L_2]

$2c + \frac{31}{2}$ = ? [substituiu $a + b = \frac{31}{2}$].

Esse processo não lhe possibilitou obter os valores para as letras a, b e c. Diante disso, optou por utilizar o escalonamento de matrizes, aplicado ao primeiro sistema, escrevendo:

$$\begin{cases} a+2b+c+0d=32 \\ 2a+2b+0c+0d=31 \\ a+0b+0c+2d=30 \end{cases}$$

No entanto, na terceira equação ele cometeu o erro ao indicar c sendo 1 e não 0.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 32 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 31 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 30 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c & b & a & d \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 32 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 30 \end{array}\right) \end{array} \text{[Trocou as colunas]}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 31/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 30 \end{array}\right) \text{[Dividiu } L_2 \text{ por 2]} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 31/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 30 \end{array}\right) \text{[Fez } L_1 - 2L_2\text{]}$$

Com isso obteve que: $\begin{cases} c - a = 1 \\ b + a = 31/2 \\ a + 2d = 30 \end{cases}$

[alguns resultados sendo iguais aos encontrados pelo 1º processo].

Na seqüência, seguida, escreveu outro sistema com 2 equações e 4 incógnitas, utilizando L_1 e C_4, equações ainda não usadas por ele:

$$\begin{cases} a + b + 2d = 32 \\ 2c + 2d = 31 \end{cases}$$

De $2c + 2d = 31 \rightarrow$ **$2d = 31 - 2c$**

$a + b + 31 - 2c = 32 \rightarrow a + b - 2c = 1$

$a + b = \frac{31}{2} \rightarrow 2d = 32 - \frac{31}{2} \rightarrow 2d = \frac{33}{2} \rightarrow \mathbf{d = \frac{33}{4}}$

$2c = 31 - \frac{33}{2} \rightarrow 2c = \frac{29}{2} \rightarrow \mathbf{c = \frac{29}{4}}$

MA_3 comparou as equações *a + b + 2d = 32* e *a + 2d = 30* e concluiu que **b = 2**. Porém, essa segunda equação era resultante da substituição do valor errado de c (0 em vez de 1), no segundo processo de resolução. Nesse caso, o resultado de **b** não está correto.

Ele substituiu o valor de **b** na equação $a = \frac{31}{2} - b$, obtendo $a = \frac{27}{2}$**.**

Em seguida, substituiu os valores de **a**, **b** e **c** na equação da L_2:

$a + 2c + b = \frac{27}{2} + \frac{29}{2} + 2 =$ **30** [Mesmo tendo valores errados para **a** e **b**, coincidentemente, obteve a resposta correta para a soma].

A princípio acreditávamos que esse problema não geraria diferentes resoluções. Entretanto, ocorreu o contrário, havendo variações tanto na forma de representar as equações quanto na forma de resolver os sistemas de equações. Alguns estudantes foram detalhistas nas resoluções, outros reduziram os passos no processo de raciocínio, nos quais a pesquisadora deveria ficar atenta para acompanhar e compreender o que faziam. Alguns buscavam relações entre as equações de forma distinta e diversos estudantes utilizavam as próprias figuras para escrever as equações, enquanto outros as substituíam por letras para escrever na linguagem algébrica.

Problema 6: Dados dois números, se subtrairmos metade do número menor de cada um dos números, o resultado com o número maior é três vezes maior que o resultado com o número menor. Quantas vezes o número maior é maior do que o número menor?

Esse problema não propicia resoluções muito distintas. No entanto, mesmo assim, constatamos duas formas de registrar as informações, como explicita o Quadro 31 e, na seqüência, as resoluções.

Quadro 31 – Processos utilizados pelos estudantes na resolução do problema

Processos	Estudantes	Total
Utilizou 2 incógnitas	MA_3, MA_4, MA_5, MA_7, MA_8, MA_9, CO_1, CO_2 e CO_4	09
Utilizou 3 incógnitas	MA_1, MA_2, MA_6 e CO_3	04

a) Utilizou 2 incógnitas

Resolução de MA_3

Esse estudante estabeleceu **x** e **y**, x > y e escreveu:

“Se fazer: $x - \frac{y}{2}$ e $y - \frac{y}{2}$ → $x - \frac{y}{2} = 3(y - \frac{y}{2})$

$2x - y = 6y - 3y$ → $2x = 4y$ → $\mathbf{x = 2y}$

R: O maior é o dobro do menor”.

b) Utilizou 3 incógnitas

Resolução de MA_6

Esse estudante resolveu da seguinte forma:

“x → menor número

y → maior número, então

$x - \frac{x}{2} = a$ → $2x - x = 2a$ → $\mathbf{x = 2a}$

$y - \frac{x}{2} = 3a$ → $2y - x = 6a$ → $2y = 6a + 2a$

$\mathbf{y = 4a}$

Logo, $\mathbf{y = 2x}$.

R = o maior número é o dobro do menor número”.

A maioria dos estudantes resolveu o problema por meio de duas incógnitas, em que a resposta foi evidente (x = 2y), enquanto que ao utilizar três incógnitas a resposta precisou ser interpretada, ou seja, foi necessário extrair a relação entre x e y (x = 2a e y = 4a) em que y é o dobro de x.

Problema 7: Patrícia acabou de conhecer três moças que estudarão na mesma universidade que ela. Na conversa, descobriram que moram no mesmo bairro. Cada uma das moças escolheu uma carreira distinta e cada qual mora em um condomínio e rua também diferentes. Com as dicas dadas, descubra as carreiras escolhidas por elas, os condomínios e as ruas onde moram.

1. A moça que mora na Rua Rios não é a que estudará Música, nem é a que mora no Condomínio dos Castelos.
2. A moça que mora na Rua Lajes (que não é Eliana) não é a que vive no Condomínio Dourado, nem no Condomínio dos Castelos.
3. Janaína não mora na Rua Vaz (que não é onde mora a futura estudante de música), nem a que vive no Condomínio das Sombras.
4. Nem Eliana nem a estudante de Matemática moram na Rua Americana.
5. O Condomínio Royal (que não é onde vive a estudante de música) não fica na Rua Rios.
6. Carolina (que não é quem mora no Condomínio Royal) não é quem estudará Música.
7. Eliana não é a estudante de Administração.
8. A moça que fará Enfermagem mora no Condomínio Dourado.
9. A estudante de Matemática (que não é Janaina) não vive no Condomínio Dourado.
10. A estudante de Administração não mora na Rua Rios.
11. A estudante de Música não mora na Rua Americana.

Uma imagem dos diferentes processos emergidos durante a resolução desse problema e os respectivos estudantes se encontra no Quadro 32.

Quadro 32 – Processos utilizados pelos estudantes na resolução do problema

Processos	Estudantes	Total
Registro das informações e construção de quadros	MA_1, MA_2, MA_4, MA_5, MA_7, MA_9, CO_2 e CO_3	08
Registro das informações e união por traços	CO_1	01
Utilização do quadro impresso	MA_3, MA_6, MA_8 e CO_4	04

O problema de Lógica demandou certo tempo, por conter muitas informações, na sua maioria, de negações e porque alguns estudantes mudaram de representações duas ou três vezes até conseguir uma mais viável.

Surgiram estratégias como fixar as ruas ou os nomes, etc., para, a partir delas, relacionar as informações, bem como anotá-las, na medida em que eram apresentadas.

Três diferentes formas de resolver esse problema foram, obtidas de acordo com a representação utilizada.

a) registro das informações e construção de quadros

A maioria dos estudantes, na medida em que lia as informações do problema, as registravam na folha e as respostas eram anotadas em um quadro, conforme o exemplo abaixo:

Resolução de MA_2

Essa estudante riscava algumas informações já inseridas no quadro das respostas, como constatamos a seguir:

Quadro 33 – Registro das informações do problema pela estudante MA_2

Patrícia	Eliana	Janaina	Carolina
Música Rua Lajes Cond. Sombras	Rua Rios Cond. Dourado Enfermagem	Administração Cond. Royal Rua Americana	Cond. Castelos Matemática Rua Vaz

1º) ~~Rua Rios~~ / 2º) ~~Rua Lajes~~ / 3º) Rua Vaz / 4º) ~~Rua Americana~~
~~Música~~ / Matemática / ~~Administração~~ / Enfermagem
~~Cond. Castelos~~ / ~~Cond. Dourado~~ / ~~Cond. Sombras~~ / ~~Cond. Royal~~
~~Patrícia~~ / Eliana / ~~Janaina~~ / ~~Carolina~~
1º) ñ música 2º) ñ Eliana 3º) ñ Janaina 4º) ñ música

ñ Castelos	ñ Dourado	ñ música	ñ Rios
	ñ Castelos	ñ Sombras	ñ Carolina
			ñ Eliana
			ñ Matemática

→ Enfermagem mora no Condomínio Dourado.

→ Música mora na Rua lajes no Condomínio Sombras é Patrícia.

No Quadro 33, MA_2 não registrou as respostas de forma organizada como outros estudantes, ou seja, não definiu linhas para anotar ruas, condomínios, etc.

Resolução de MA_5

Esse estudante registrou todas as informações em um quadro e nele riscou as negações, restando apenas as respostas, como verificamos no Quadro 34.

Quadro 34 – Registro das informações do problema pelo estudante MA_5

Nome	~~E~~ ~~J~~ ~~C~~ **P**	~~E~~ ~~J~~ **C** ~~P~~	~~E~~ **J** ~~C~~ ~~P~~	**E** ~~J~~ ~~C~~ ~~P~~
Profissão	**Música** ~~Mat.~~ ~~Adm.~~ ~~Enf.~~	~~Mús.~~ **Mat**. ~~Adm.~~ ~~Enf.~~	~~Mús.~~ ~~Mat.~~ **Adm**. ~~Enf.~~	~~Mús.~~ ~~Mat.~~ ~~Adm.~~ **Enf.**
Residencial	~~Castelos~~ ~~Dourado~~ **Sombras** ~~Royal~~	**Castelos** ~~Dourado~~ ~~Sombras~~ ~~Royal~~	~~C~~ ~~D~~ ~~S~~ **R**	~~C~~ **D** ~~S~~ ~~R~~
Rua	~~Rios~~ **Lajes** ~~Vaz~~ ~~Americ.~~	~~R~~ ~~L~~ **V** ~~A~~	~~R~~ ~~L~~ ~~V~~ **A**	**R** ~~L~~ ~~V~~ ~~A~~

Esse estudante MA_5 procurou anotar as informações do problema, de forma mais organizada, facilitando seu processo de resolução.

O estudante MA_9, durante sua resolução, tentou primeiramente utilizar o Diagrama de Venn. Entretanto, abandonou esse processo, optando também pelo auxílio de um quadro.

Resolução de CO_2

Ele desenhou um quadro dividido em três partes, em que cada parte continha as mesmas informações sobre as carreiras, os condomínios e as ruas. Na medida em que descartava uma informação, riscava-a. No centro de cada parte anotava as respostas corretas, como podemos constatar no Quadro 35.

Quadro 35 – Registro das informações do problema pelo estudante CO_2

	~~Administração~~ ~~Música~~ ~~Matemática~~ Enfermagem	Rios ~~Americana~~ ~~Vaz~~ ~~Lajes~~ **Eliana** **Enfermagem** **Dourado** **Rios**	~~Castelos~~ Dourado ~~Sombras~~ ~~Royal~~
Patrícia **Música** **Sombras** **Lajes**	~~Administração~~ ~~Música~~ Matemática ~~Enfermagem~~	~~Rios~~ ~~Americana~~ Vaz ~~Lajes~~ **Carolina** **Castelos** **Matemática** **Vaz**	Castelos ~~Dourado~~ ~~Sombras~~ ~~Royal~~
	Administração ~~Música~~ ~~Matemática~~ ~~Enfermagem~~	~~Rios~~ Americana ~~Vaz~~ ~~Lajes~~ **Janaina** **Administração** **Royal** **Americana**	~~Castelos~~ ~~Dourado~~ ~~Sombras~~ Royal

Abaixo desse quadro ele registrou as informações que o problema fornecia ou algumas conclusões as quais chegava, como por exemplo:

Música → ñ é rua Rios, nem Castelos, ñ Dourado, ñ Royal, ñ é rua Americana, ñ rua Vaz.

Condomínio Dourado e Castelo ñ fica na rua Lajes

Janaina pode ser estudante de música

Matemática – ñ Americana

Royal ñ fica na rua Rios

Música → Sombras → Lajes

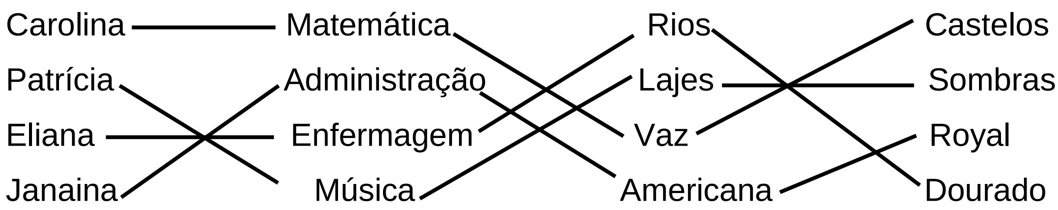
b) registro das informações e união por traços

Resolução de CO_1

Esse estudante anotou todos os nomes, carreiras, ruas e condomínios e relacionou, a cada um, as negações indicadas por (x) na frente das palavras. Na medida em que ia obtendo as respostas voltava e marcava com (x) nessa primeira lista. Logo abaixo dessa lista escreveu os nomes, carreiras, ruas e condomínios. As respostas obtidas eram unidas por traços.

Esses traços eram ligados de forma organizada, ou seja, cada linha de uma coluna era ligada às respectivas linhas da coluna imediatamente posterior. Por exemplo, as linhas da primeira coluna não eram ligadas com as linhas da terceira ou quarta colunas, apenas com as da segunda coluna. Sua resolução se desenvolveu, conforme acompanhamos a seguir:

Carolina x Royal x Música x Lajes	**Matemática** x Dourado x Janaina x Lajes x Patrícia x Rios	**Rios** x Música x Castelos x Royal x Administração x Patrícia x Sombras x Matemática	**Castelos** x Música x Lajes x Enfermagem x Patrícia
Patrícia x Matemática x Administração x Enfermagem x Rios x Vaz x Americana x Castelos x Royal x Dourado	**Administração** x Eliana x Dourado x Rios x Lajes x Patrícia	**Lajes** x Eliana x Dourado x Castelos x Matemática x Administração x Enfermagem x Carolina	**Sombras** x Janaina x Enfermagem x Rios
Eliana x Lajes x Administração x Música	**Enfermagem** x Royal x Castelos x Sombras x Lajes x Patrícia	**Vaz** x Janaina x Música x Patrícia	**Royal** x Música x Rios x Carolina x Enfermagem x Patrícia
Janaina x Vaz x Sombras x Matemática x Música	**Música** x Rios x Vaz x Royal x Carolina x Dourado x Americana x Eliana x Janaina	**Americana** x Música x Patrícia	**Dourado** x Lajes x Matemática x Administração x Música x Patrícia



c) utilização do quadro impresso

Quando alguns estudantes começavam a fazer anotações envolvendo **N** e **S**, porém, encontravam dificuldades de organizar as informações, a pesquisadora colocava, à disposição, um quadro já impresso no qual poderiam registrar os símbolos já definidos por eles (N e S). Dos quatro estudantes que utilizaram esse quadro impresso, dois já conheciam e começaram a fazê-lo no papel. Diante disso, a pesquisadora oferecia o que já estava pronto.

Resolução de MA_3

O estudante MA_3 foi um dos que utilizou o quadro impresso. Houve pouca variação na forma de anotar as informações nesse quadro. Ao contrário dos outros três, esse estudante não completou todo o quadro, porque só lhe interessa as respostas que se encontravam nas linhas dos nomes, associadas às colunas da carreira, do condomínio e da rua.

Quadro 36– Registro das informações do problema pelo estudante MA_3

		CARREIRA				CONDOM				RUA			
		MÚSICA	MTEMÁTICA	ADMINISTRAÇÃ	ENFERMAGEM	CASTELOS	DOURADO	ROYAL	SOMBRAS	RIOS	LAJES	VAZ	AMERICANA
NOMES	Eliana	N	N	N	S	N	S	N	N	S	N	N	N
	Patrícia	S	N	N	N	N	N	N	S	N	S	N	N
	Janaina	N	N	S	N	N	N	S	N	N	N	N	S
	Carolina	N	S	N	N	S	N	N	N	N	N	S	N
RUA	RIOS	N		N		N		N					
	LAJES	S	N	N	N	N	N						
	VAZ	N							N				
	AMERICAN	N	N										
COND.	CASTELOS				N								
	DOURADO	N	N	N	S								
	ROYAL	N			N								
	SOMBRAS				N								

Na medida em que ele registrava uma letra S no quadro, também completava com a letra N a linha e a coluna onde se localizava esse S. Por exemplo, na linha do nome Eliana havia um S na coluna da enfermagem;

então, ele completava com N as colunas das outras carreiras e as linhas dos demais nomes.

Problema 8: Dado um tabuleiro 8 x 8 sem cor, é possível pavimentar esse tabuleiro com dominós (retângulos de tamanho 1 x 2)?

Sugestão: analise um tabuleiro de 4x4, depois 5x5, etc.

Esse problema originou três diferentes procedimentos para se obter a resposta, conforme sintetização no Quadro 37.

Quadro 37 – Processos utilizados pelos estudantes na resolução do problema

Processos	Estudantes	Total
Contando os dominós	MA_1, MA_2, MA_3, MA_4, MA_9, CO_1, CO_2, CO_3 e CO_4	09
Utilizando cores	MA_5, MA_7 e MA_8	03
Relacionando com área	MA_6	01

A maioria dos estudantes respondeu à pergunta desse problema, analisando diferentes tabuleiros quadrados (4x4, 5x5, 6x6, etc.) e por meio de contagens, de dois em dois quadradinhos, simulando os dominós. Nesse estudo, constataram que os tabuleiros que são pavimentáveis por dominós (1x2) são aqueles, cujos lados são números pares, ou que têm área sendo um número par.

Apenas 1 dos 13 estudantes não utilizou o tabuleiro 8x8 impresso, preferindo fazer o desenho no papel, conforme Figura 95:

Resolução de CO_4

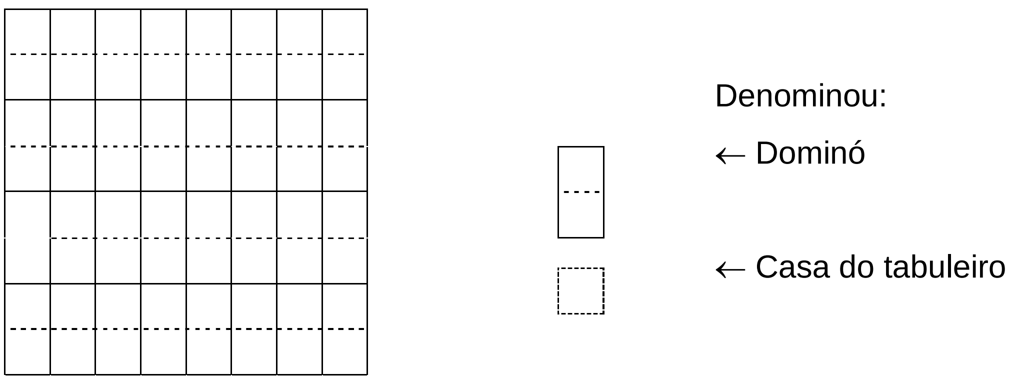


Figura 95 – Desenho do Tabuleiro feito por CO_4

Três estudantes utilizaram cores representando os dominós, porém, resolveram de forma diferenciada:

MA_5: cada dominó era formado por duas cores e colocado apenas na primeira linha, concluindo que nas demais linhas era só repetir os dominós da primeira linha.

MA_7: cada dominó era composto por duas cores e colocado cobrindo todo o tabuleiro.

MA_8: utilizou duas cores, no entanto, definiu que os dominós teriam cores iguais, ou seja, um dominó (1x2) era vermelho e outro (1x2) era azul. Dessa forma, cobriu todo o tabuleiro 4x4 e 5x5. Nesse último, constatou que sobrava 1 quadrado. No tabuleiro 8x8 disse "fecha" e não colocou mais os dominós. A palavra "fecha" foi utilizada para indicar que o tabuleiro era pavimentável com dominós.

O estudante MA_6 respondeu esse problema fundamentando-se no conceito de área desse tabuleiro, ou seja, 64 : 2 = 32 dominós.

Problema 9: Dado um tabuleiro 8 x 8, em que são cortados dois quadrados das extremidades opostas (o primeiro e o último de uma das diagonais), restam, então, 62 pequenos quadrados no tabuleiro. É possível pavimentar esse tabuleiro cortado com dominós?

Nesse problema também foram identificados dois procedimentos distintos. No entanto, um deles conduziu à resposta correta por um raciocínio incorreto, como ilustra o Quadro 38 e, posteriormente, o comentário das resoluções.

Quadro 38 – Estudantes que resolveram o problema corretamente ou apresentaram uma resolução incompleta

	Resolveu	**Resolução incompleta** Raciocínio incorreto – resposta correta
	Contando os dominós	**Considerando L_1, L_8, C_1 e C_8 contendo 7 quadrados (ímpar)**
Estudantes	MA_1, MA_2, MA_3, MA_4, MA_7, MA_9, CO_1, CO_2, CO_3 e CO_4	MA_5, MA_6 e MA_8
Total	10	03

Nenhum estudante, em um primeiro momento, utilizou cores para resolver esse problema. A maioria deles contou os dominós no tabuleiro. Alguns contaram de maneiras diferentes. Por exemplo, primeiro contaram em espiral, depois, contaram o quadrado central (6x6) e, em seguida, as extremidades (as primeiras e últimas colunas e linhas), com o intuito de confirmar suas respostas.

O estudante CO_3 não utilizou cores, apenas representou cada dominó no tabuleiro marcando com os símbolos **X** e **O**.

As estudantes MA_1 e MA_2 contaram quantos dominós caberiam nesse tabuleiro, procedendo da seguinte forma:

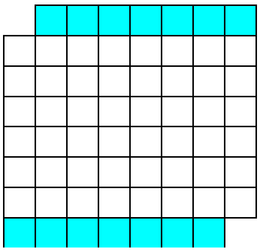
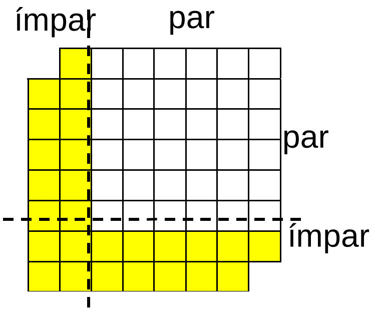


Figura 96 – Processo de contagem dos dominós feito por MA_1 e MA_2

Excluíram a primeira e a última linha, obtendo um tabuleiro 6x8, que é pavimentável com dominós. Depois, somaram 7 + 7 = 14 (quadradinhos das linhas excluídas), que é par, e concluíram que era possível. Em seguida, utilizaram cores colocando os dominós em espiral e constataram que não era possível pavimentá-lo.

Com isso, retomaram a primeira forma de contar os dominós e verificaram que não poderiam somar 7 + 7 porque eles estavam separados, o que inviabilizava a colocação de dominós completos. Em 7 quadrados cabem 3 dominós e sobra 1 quadradinho.

MA_9 não contou todos os dominós possíveis. Disse "8x8 = 64, mas têm 62 quadradinhos". Ele separou o tabuleiro para contar da seguinte maneira:



Delimitou um tabuleiro 6x6, conforme Figura 97, e contou as linhas e colunas restantes, que davam um número ímpar de quadradinhos. Com isso, constatou que sobrava 1 quadradinho.

Figura 97 – Processo de contagem dos dominós feito por MA_9

Três estudantes, de imediato, afirmaram que não era possível pavimentar esse tabuleiro com dominós porque ele tinha nas quatro extremidades 7 quadradinhos, que é um número ímpar. Esse raciocínio não é correto porque na verdade não temos 4 extremidades com 7 quadradinhos. Quando contamos, por exemplo, os quadradinhos da coluna 1 e da linha 8, temos 13 (7 + 6) e não 14 quadradinhos. Essa resposta não é suficiente para a resolução.

Depois que os estudantes resolviam esse problema a pesquisadora discutia um processo de utilizar cores, como descrevemos a seguir:

Coloríamos duas ou três linhas e analisávamos as cores dos quadradinhos que estavam nas duas diagonais e contávamos as respectivas quantidades. A diagonal com quadradinhos brancos tinha dois quadradinhos a menos que a diagonal com quadradinhos vermelhos.

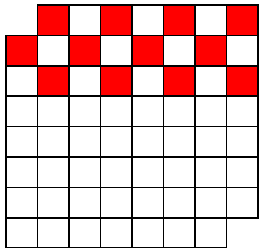
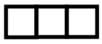


Figura 98– Processo de colorir o tabuleiro

Como um dominó era formado por duas cores (branco e vermelho), não era possível pavimentar o tabuleiro, já que estavam faltando duas casas brancas.

Problema 10: É possível cobrir um tabuleiro de xadrez de 8x8 usando 21 triminós? Um triminó como  é considerado o tamanho certo para cobrir três casas do tabuleiro de xadrez.

Para resolver esse problema emergiram três procedimentos diferentes, como constatamos no Quadro 39.

Quadro 39 – Processos utilizados pelos estudantes na resolução do problema

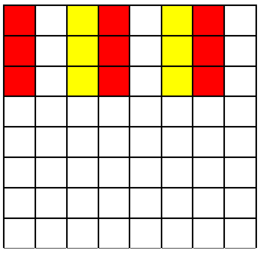
Processos	Estudantes	Total
Contando os dominós	MA_7, CO_2 e CO_3	03
Relacionando com área	MA_3, MA_5, MA_6, MA_9, CO_1 e CO_4	06
Utilizando cores	MA_1, MA_2, MA_4 e MA_8	04

Três estudantes contaram os triminós para constatar se era possível cobrir o tabuleiro. Seis basearam-se no cálculo de sua área (64 : 3), para concluir que não era pavimentável. E outros quatro estudantes utilizaram cores para representar os triminós, sendo que um deles coloriu não as linhas ou colunas, e sim, as diagonais do tabuleiro.

Para compreender a diferença entre os processos de colorir pelas linhas ou colunas e pelas diagonais discutimos, a seguir, cada um desses processos.

<u>1º Processo</u>: Se colorirmos as linhas ou colunas, a resposta pode ser obtida com base na quantidade de cada cor utilizada, ou na quantidade de triminós completos, que podemos colocar na primeira linha ou na primeira coluna.

Coluna



Linha

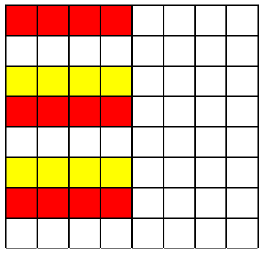


Figura 99– Processo de colorir o tabuleiro por colunas e por linhas

No primeiro tabuleiro colorimos as colunas (não há necessidade de colorir a coluna toda) e constatamos que temos 3 colunas vermelhas, 3 brancas e 2 amarelas. Como um triminó é composto por três cores, então, para o tabuleiro ser pavimentável o número de cores nas colunas teria que ser o mesmo, ou seja, 3 colunas vermelhas, 3 brancas e 3 amarelas, o que não ocorreu nesse tabuleiro.

Em outras palavras, colocamos na primeira linha dois triminós completos (vermelho-branco-amarelo) e mais duas das três casas de um triminó incompleto (vermelho-branco). Nas duas colunas finais (C_7 e C_8) da primeira linha temos um número par de quadradinhos (2), que não é múltiplo de 3. Concluímos que na primeira linha não conseguimos colocar três triminós completos, assim como nas linhas subseqüentes, não sendo possível pavimentar esse tabuleiro com triminós.

No segundo tabuleiro, em que a coloração é feita por linhas, o raciocínio é análogo.

<u>2º Processo</u>: Os quadradinhos coloridos colocados à disposição dos sujeitos da pesquisa eram da forma 1x1. Isso permitiu que o estudante MA_8 utilizasse as cores de forma diferente. Sua resolução foi a seguinte:

Como a coloração foi pela diagonal, a resposta se baseou na quantidade total de quadradinhos de cada cor, ou seja, nesse tabuleiro há 22 quadradinhos vermelhos, 21 brancos e 21 amarelos. Há um vermelho a mais do que as outras cores. Como um triminó é formado por 3 cores e temos no tabuleiro quantidade de cores diferentes, não é possível pavimentá-lo com triminós.

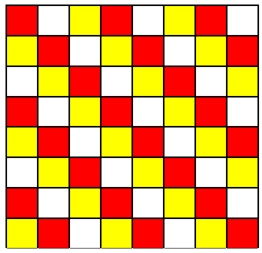


Figura 100 – Processo de colorir o tabuleiro utilizado por MA_8

A coloração pela coluna ou pela linha é mais simples do que pela diagonal, já que a última requer o preenchimento de todo o tabuleiro, enquanto que o primeiro processo não.

Problema 11: Dado um tabuleiro de xadrez não convencional, de tamanho ***m***x***n*** e sem cores (o tabuleiro é um retângulo onde ***m*** e ***n*** podem ser diferentes), estude a possibilidade de um tabuleiro ***m*** *x* ***n*** ser pavimentado com as seguintes condições:

a) com retângulos de 1 x 3; e

b) com retângulos de 1 x 4.

Esse problema foi desenvolvido mediante três processos distintos, no entanto, no item (b) alguns estudantes responderam de forma incorreta, como verificamos no Quadro 40.

Quadro 40 – Relação dos estudantes que resolveram o problema corretamente ou apresentaram uma resolução incompleta

Processos	Resposta certa		Resposta incorreta
	a) m ou n múltiplos de 3 ou nxm = 3k	**b) m ou n múltiplos de 4**	**b) mxn=4k**
Analisando diferentes tabuleiros e contando as respectivas peças	MA_1, MA_2, MA_4, MA_5, MA_7, CO_1, CO_2 e CO_3	MA_4, MA_7, CO_1, CO_2 e CO_3	MA_1, MA_2 e MA_5
Analisando diferentes tabuleiros usando cores	MA_8	MA_8	-
Constatando de imediato a relação de *m* e *n* com 3 e 4	MA_3, MA_6, MA_9 e CO_4	MA_3, MA_9 e CO_4	MA_6

Um dos processos se desenvolveu mediante o estudo de diferentes tabuleiros retangulares mxn e contando as peças 1x3 e depois 1x4 para obterem as respostas. Para as peças 1x3 os tabuleiros que foram utilizados pelos estudantes para serem estudados foram: 1x3, 2x3, 2x6, 4x3, 4x6, 5x3, etc. E para as peças 1x4 os tabuleiros utilizados tiveram o formato: 1x4, 2x4, 2x6, 4x5, 5x6, 6x6, 8x4, 8x5, 8x6, etc. Os estudantes é que definiam os tabuleiros e a seqüência em que os estudavam.

O segundo processo foi desenvolvido pelo estudante MA_8 que continuou colorindo pela diagonal. Ele foi o único que adotou o recurso da coloração no tabuleiro. Outros estudantes não utilizavam cores principalmente nos últimos problemas com tabuleiros. CO_1 exclamou: “Não sou muito chegado em cores”.

Podemos ressaltar que, de forma geral, o terceiro processo foi uma conseqüência do problema 10, já que quatro estudantes, sem precisar contar ou utilizar cores, constataram a relação que **m** e **n** têm com os triminós e tetraminós, ou seja, com 3 e 4. Porém, um deles obteve a resposta incorreta para o item (b), porque concluiu que era similar ao (a).

Todos os estudantes acertaram o item (a), porém, no item (b) quatro estudantes o consideraram análogo ao item (a) concluindo que mxn = 4k, fornecendo assim, uma resposta incorreta.

Mesmo os estudantes que estudaram alguns tabuleiros retangulares não pensaram em casos como, por exemplo, 2x6 = 12, 2x10 = 20, 6x6 = 36, etc, em que 12, 24 e 36 são múltiplos de 4, porém, os tabuleiros 2x6, 2x10 e 6x6 não são pavimentáveis por retângulos da forma 1x4. A condição é que ou **m** ou **n** deve ser um número múltiplo de 4.

Nos problemas de 8 a 11, a pesquisadora sempre discutia uma resolução por meio de cores, como outra forma de se obter as respostas.

Problema 12: Dados ***n*** números inteiros, prove que um ou outro deles é um múltiplo de ***n***, ou alguns deles, quando somados, resultam em um múltiplo de ***n***.

Nesse problema apenas cinco estudantes tentaram esboçar uma solução, sendo que nem todos escolheram um processo que conduzisse à resposta, como podemos constatar no Quadro 41.

Quadro 41 – Relação dos estudantes que tentaram resolver o problema e os que não o resolveram

	Estudantes	Total
Não resolveu	MA_1, MA_2, MA_4, MA_6, MA_7, MA_8, CO_1 e CO_3	08
Tentou resolver	MA_3 (por PA), MA_5 (Álgebra), MA_9 (por PA), CO_2 e CO_4	05

Dos cinco estudantes que tentaram resolver esse problema dois utilizaram Progressão Aritmética. Um recorreu à Álgebra e outros dois utilizaram somatório, conforme acompanhamos na seqüência:

Resolução de MA_3

Ele pensou por um tempo sobre o enunciado. Diante disso, a pesquisadora e ele discutiram as informações dadas pelo problema – números inteiros e soma, e definiram:

Dados **n** números inteiros expressos por a_1, a_2, ..., a_n e

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + ... + na$

Em seguida, ele escreveu:

“A seqüência a_1, a_2,..., a_n de **n** números inteiros, forma uma progressão aritmética de razão 1, cuja soma é $S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2}\,.\,n$, que é um múltiplo de **n**”.

Resolução de MA_5

Sua resolução, fundamentada na Álgebra, foi a seguinte:

“Sejam x, y e k $\in \mathbb{Z}$.

$x|y$ e $y|k \rightarrow x|k$

$x|y \rightarrow y = ax, \forall a \in \mathbb{Z}$

$y|k \rightarrow k = by, \forall b \in \mathbb{Z}$

$y = ax \rightarrow k = b.ax \rightarrow k = abx$

a e b $\in \mathbb{Z} \rightarrow a.b = c \in \mathbb{Z} \rightarrow k = c.x$

Logo k e y $\in \mathbb{Z}$ são múltiplos de $x \in \mathbb{Z}$”.

Em seguida, apresentou outra resolução:

“Sejam x, y e k $\in \mathbb{Z}$

$x \mid y$ e $y \nmid k$

$y = ax,\ \forall a \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $k = b.y + c\ \{\forall\ b \text{ e } c \in \mathbb{Z},\ c \neq 0\}$

$k = b.y + c$ e $y = ax$ $\rightarrow$ $k = a.b.y + c$ a e b $\in \mathbb{Z}$ $\rightarrow$ $a.b = d \in \mathbb{Z}$

$k = dx + c,$ $\quad$ $d, c \in \mathbb{Z},\ c \neq 0.$

Logo, k é o resultado do múltiplo de x somado com c não nulo”.

Resolução de CO_4

Esse estudante iniciou o problema indicando: $\mathbb{N}$ contém **n** inteiros.

$$i \in \mathbb{N} \quad \rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} i = i.n \quad \leftarrow \text{ múltiplo de } \mathbf{n}.$$

Resolução de CO_2

Ele apenas escreveu: n + n = 2n

n + n + n + n + n + ... + n = x.n que é um múltiplo de **n**.

A pesquisadora refletiu com CO_2 e CO_4 que essa forma de expressar um múltiplo de **n** indicava que seriam adicionados apenas números iguais. No entanto, o enunciado do problema não menciona essa condição.

Após as tentativas de resolução, ou não, desse problema, a pesquisadora discutiu um processo que utilizava o Princípio de Dirichlet, ou Princípio de Pigeonhole, ou também conhecido como o Problema dos pombos e nichos (buracos).

Esse problema consiste no seguinte enunciado: Se *kn + 1* pombos (k e n são números inteiros) são colocados em *n* nichos (pequena habitação ou buraco), então, pelo menos um dos buracos contêm, pelo menos, *k+1* pombos. (SOIFER, 1987, p. 8-9, tradução nossa).

Prova:

Assumimos que não existem buracos que contêm pelo menos *k+1* pombos. Nesse caso,

$$\begin{array}{lr} \text{o primeiro buraco contém} & \leq k \text{ pombos} \\ \text{o segundo buraco contém} & \leq k \text{ pombos} \\ \vdots & \\ + \quad \text{o n-ésimo buraco contém} & \leq k \text{ pombos} \\ \hline \text{número total de pombos} & \leq k \times n \end{array}$$

Isso contradiz o fato de que existiam $kn + 1$ pombos. Então, há um buraco que contém pelo menos $k + 1$ pombos.

Após apresentar esse Princípio, a pesquisadora fazia indagações sobre as informações dadas pelo problema e as registrava em uma folha. A resolução consistiu no seguinte:

Prova:

Denotamos os inteiros por $a_1, a_2, ..., a_n$. Definimos:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

Se um dos números $S_1, S_2, ..., S_n$ é um múltiplo de n, nós resolvemos o problema. Agora, suponhamos que nenhum dos números $S_1, S_2, ..., S_n$ é um múltiplo de n. Então, na divisão desses números por n temos os possíveis restos: $1, 2, ..., n–1$.

Temos: n números e S_n somas (pombos)

$n – 1$ possíveis restos (nichos)

Isso significa que entre os números $S_1, S_2, ..., S_n$ existem dois números, S_k e S_{k+t} que dão os mesmos restos na divisão por n. E ainda,

(1) $S_{k+t} – S_k$ é um múltiplo de n;

(2) $S_{k+t} – S_k = a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{k+t}$.

Em outras palavras, encontramos alguns dos números dados, a saber, $a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_{k+t}$, cuja soma é um múltiplo de n.

Para que compreendessem as conclusões (1) e (2), analisávamos o seguinte exemplo:

Considerando n = 12 e um conjunto dos números inteiros sendo a seqüência dos números de 1 a 12, ou seja, C = {1, 2, 3,..., 11, 12}, construímos o Quadro 42.

Quadro 42– Obtenção de somas de números inteiros e seus respectivos restos na divisão por 12

Somas	Restos na divisão por 12
$S_1 = 1$	
$S_2 = 1 + 2 = 3$	
$S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$	
$S_4 = 10$	
$S_5 = 15$	R = 3
$\mathbf{S_6 = 21}$	**R = 9**
$S_7 = 28$	R = 4
$S_8 = 36$	R = 0
$\mathbf{S_9 = 45}$	**R = 9**
$S_{10} = 55$	R = 7
$\mathbf{S_{11} = 66}$	**R = 6**
$\mathbf{S_{12} = 78}$	**R = 6**

$$S_{k+t} - S_k = S_9 - S_6 = 45 - 21 = \mathbf{24}$$

$$a_7 + a_8 + a_9 = a_{6+1} + a_{6+2} + a_{6+3}$$

$$= 7 + 8 + 9 = \mathbf{24}$$

Problema 13: Consideremos um subconjunto A = {a_1, a_2, a_3..., a_{n+1}} com ***n + 1*** números que foram escolhidos do conjunto B = {1, 2, 3,..., 2n}. Prove que existe sempre em A dois números divisíveis um pelo outro.

Esse problema provocou certa dificuldade entre os estudantes, visto que apenas um tentou esboçar uma solução, não consistindo em uma prova.

Quadro 43 – Estudantes que tentaram resolver o problema e os que não o resolveram

	Estudantes	Total
Não resolveu	MA_1, MA_2, MA_3, MA_4, MA_5, MA_6, MA_7, MA_8, MA_9, CO_1, CO_2 e CO_3	12
Tentou resolver	CO_4	01

Apenas o estudante CO_4 tentou resolver o problema, escrevendo o seguinte:

> "B contém um número par de elementos, logo a tem um número ímpar de elementos. Se A conteve todos os **n** ímpares de B, A ainda conteria um par que seria múltiplo de pelos menos um outro elemento de A. Se houvesse mais números pares em A, esses seriam múltiplos de outros elementos. Logo sempre teremos um número par múltiplo de um ímpar em A".

Da mesma forma como no problema 12, no final sempre discutíamos uma resolução que no caso também seria aplicando o Princípio de Dirichlet, como descrevemos a seguir:

Prova:

O conjunto B tem *n* números pares e *n* números ímpares. Se pegarmos algum número ***x***, ou ele é ímpar ou ele é divisível por 2.

Pesquisadora: “Há uma forma geral de representarmos um número par ou ímpar?”

Analisamos alguns exemplos:

$2 = 2^1.1$; $4 = 2^2.1$; $8 = 2^3.1$; $24 = 2^3.3$;

Pesquisadora: “Um número ímpar também pode ser obtido como produto, em que um dos fatores é uma potência de base 2?”.

Pensaram, porém, não responderam. A pesquisadora escreveu: 3= ? e eles responderam “$2^0 . 3$”.

Analisamos outros números ímpares: $7 = 2^0 . 7$; $15 = 2^0 . 15$. Assim, concluímos que esse *x* pode ser escrito como $x = 2^k . m$, onde *m* é um número ímpar. Temos que:

Em B há **n** números ímpares (nichos)

Em A há **n+1** números (pombos)

Isso significa que entre os números $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ de A existem dois números (a_i e a_j) que têm o mesmo resto **m**, ou seja, que são expressos com o mesmo número ímpar **m**. A saber,

$$\begin{cases} a_i = 2^{k_1} . m_1 \\ a_j = 2^{k_2} . m_2 \end{cases} \quad \text{com } i = 1, 2, ..., n+1,\ i \neq j \text{ e } m_1 = m_2.$$

Para entender melhor o que foi demonstrado, analisamos um exemplo, definindo n = 8. Então,

B = {1, 2, 3, ..., 14, 15, 16} e A (9 elementos) construído da seguinte forma: A = { 3, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15}.

Tomemos $a_1 = 3$, $a_4 = 9$ e $a_6 = 12$ para escrevê-los pela fórmula geral $x = 2^k . m$:

$3 = 2^0 . \mathbf{3}$; $9 = 2^0 . 9$ $12 = 2^2 . \mathbf{3}$

Os números 9 e 12 são divisíveis por três, porém, o 3 e o 12 têm em comum o mesmo resto **3**.

Os problemas 12 e 13 foram os mais difíceis para os estudantes porque envolviam um princípio desconhecido por eles. Mesmo construindo em conjunto a prova matemática, alguns estudantes pareciam não acreditar na conclusão e sentiam a necessidade de analisar os problemas atribuindo valores numéricos. Por esse motivo a pesquisadora incluiu casos particulares, inclusive para que compreendessem o enunciado do problema.

Os processos de resolução dos problemas propostos revelaram pensamentos matemáticos distintos. Alguns estudantes se contentavam em obter respostas para os problemas, não importando se mediante casos particulares ou com o auxílio da intuição. Outros já manifestavam uma preocupação em utilizar uma representação mais geral, por meio de um pensamento algébrico, mais analítico.

Os estudantes MA_3 e MA_6 revelaram certa predominância na utilização de relações algébricas para resolver muitos dos problemas matemáticos propostos, evidenciando um pensamento mais analítico. Isso foi confirmado por eles nas suas respostas ao questionário a *priori*, no qual eles indicaram que:

- gostam mais de utilizar o raciocínio matemático;
- gostam de pensar de forma mais analítica;
- a preferência é maior pela Matemática Pura.

Os diferentes processos de resolução foram desencadeados pelas distintas interpretações dos problemas propostos, pelas experiências com a atividade de resolução de problemas, pelas representações adotadas e também pelos próprios problemas, pois alguns deles propiciaram distintos processos de resolução e outros não (como os problemas 1 e 6 de nosso roteiro).

Comentário de alguns problemas matemáticos da Pesquisa Exploratória

Alguns dos problemas selecionados para a entrevista como os estudantes revelaram um grau de dificuldade maior do que outros. Dentre eles destacamos:

Problema 1 – Alguns estudantes não interpretaram, ou utilizaram num primeiro momento, a frase “Eles mergulham ao mesmo tempo e alcançam o peixe ao mesmo tempo”.

Nesse caso, a pesquisadora indagava: “Qual o significado dessa frase no desenho?” Mesmo assim, certos estudantes diziam que a velocidade é que era igual e não a distância dos dois pássaros ao peixe.

A pesquisadora discutia as diversas posições em que o peixe poderia surgir na superfície do rio e o que ocorria com as distâncias. Com isso, eles conseguiam concluir que as distâncias eram iguais e anotavam essa informação em seus desenhos.

Esse problema se diferia dos demais, por possuir apenas uma resolução. Ele foi inserido no roteiro de problemas para que os estudantes pudessem ter um parâmetro, caso necessário, para responder algumas perguntas do questionário a *posteriori*, como, por exemplo, a questão (3): Quais foram os problemas que você mais gostou? e a questão (4): Você achou que alguns problemas foram mais difíceis do que outros?

Problema 2 – A maioria dos estudantes começou desenhando um retângulo e um quadrado. No entanto, muitos resolveram o problema recorrendo a valores numéricos e poucos buscaram uma resolução geral, por meio, por exemplo, de relações algébricas.

Outra dificuldade foi identificar a relação de dependência entre o lado do quadrado e os lados do retângulo. Dois dos estudantes atribuíram lados x e y para o retângulo e lado x para o quadrado. A pesquisadora discutiu a condição de que todos os retângulos teriam que ter o mesmo perímetro e, dessa forma, o quadrado não poderia ter lado x e nem y.

Problema 3 – Nesse problema, houve dificuldade para conseguir encontrar uma representação adequada, que relacionasse as três informações do problema: a relação entre o tamanho dos pastos, os períodos utilizados e o número de homens.

As estudantes MA_1 e MA_2 acharam que esse problema não tinha solução, que era uma “pegadinha”.

O estudante CO_3 exclamou: “Esse problema é mais difícil porque não tem valores numéricos e pede um resultado numérico”.

Problema 4 – Esse também gerou dificuldade em encontrar uma forma de representação dos dados. Alguns reconheceram que poderiam resolver utilizando o conceito da Física, porém, nem todos conseguiram expressar os dados por meio desse conceito.

As estudantes MA_1 e MA_2 disseram que esse problema tinha um enunciado fácil, mas que era difícil colocar no papel, saber como resolver.

Problema 5 – A dificuldade desse problema foi o aspecto trabalhoso, no sentido de envolver várias equações com 4 incógnitas, bem como seus valores fracionários, o que demandou certo tempo. Porém, foi rico nas diferentes estratégias, para escrever e agrupar as equações. Algumas representações utilizadas facilitaram bastante a resolução. Por exemplo, a do estudante MA_5 que, embora utilizasse as próprias figuras, fez subtrações de linhas ou colunas envolvendo figuras iguais, tornando as equações resultantes bem simples e de rápida resolução.

Problema 7 – Esse problema também gerou dificuldades, em virtude da quantidade de informações fornecidas pelo mesmo, na sua maioria, na forma de negações, e pelos estudantes não encontrarem uma representação adequada. Alguns deles mudaram de representação várias vezes até obter uma mais satisfatória.

No **Problema 9** as estudantes MA_1 e MA_2, que responderam o problema 8 baseadas nas áreas, constataram que essa idéia não podia ser aplicada para resolver esse problema, já que havia 62 quadradinhos (área par), no entanto, não era pavimentável. Depois disso, MA_1 voltou à resposta dada no problema 8 (em termos de quantidade de quadradinhos sendo par) apagou e reescreveu, em termos dos lados serem pares ou ímpares.

A resolução fundamentada nas áreas dos tabuleiros, sendo par ou ímpar para pavimentar com dominós, é uma condição necessária, porém, não suficiente. Esse problema evidencia tal fato.

Os problemas 12 e 13 foram os mais difíceis, pois envolveram demonstração matemática. Nenhum dos estudantes conhecia o Princípio de Dirichlet ou Princípio de Pigeonhole. Depois de discutir a resolução desses problemas por esse Princípio, alguns estudantes gostaram e mencionaram que aprenderam algo novo.

A nossa pesquisa exploratória possibilitou documentar e constatar várias características do pensamento matemático e diversos parâmetros que o influenciam (descritos nos capítulos teóricos), bem como identificar que os próprios problemas e as experiências com a resolução dos mesmos também influenciam o pensamento matemático.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta Tese de Doutorado, o pensamento matemático foi considerado sob dimensões teóricas e experimentais. Nas teóricas explicitamos idéias de diferentes estudiosos sobre os fatores que influenciam o pensamento matemático. Nas dimensões experimentais mencionamos análises referentes ao pensamento matemático, obtidas por meio de pesquisas qualitativas com estudantes, sendo uma da literatura e outra uma pesquisa exploratória, realizada para a presente Tese.

Nosso primeiro foco de análise teórica foi a obra de Krutetskii (1968), traduzida do russo para o inglês e denominada *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Krutetskii (1968) caracterizou talento matemático de estudantes, manifestado na resolução de problemas matemáticos, em particular, pelas habilidades para coletar, processar e reter na memória as informações fornecidas pelo problema. Para ele, o pensamento matemático é influenciado por características psicológicas individuais.

Porém, esse olhar sobre a obra de Krutetskii fez emergir uma outra interpretação de seus resultados, pois a capacidade humana de perceber e transformar dados é fortemente influenciada pelos métodos de representá-los. Em outras palavras, do ponto de vista da Matemática, o que se sobressai é a atividade cognitiva, que além de exigir diferentes habilidades matemáticas, utiliza vários instrumentos na resolução de problemas e maneiras diferentes de representá-los. A Matemática é famosa, em virtude de seus símbolos especiais e de sua linguagem particular.

Krutetskii e sua equipe estudaram o comportamento de estudantes talentosos e menos talentosos em Matemática e obviamente podemos interpretar seus resultados de maneiras bastante diferentes, como por exemplo:

- Identificar nas pessoas estilos cognitivos distintos, como podemos observar os estudantes Sonya e Volodya, investigados por Krutetskii;
- Considerar as habilidades matemáticas desses estudantes, como características ou exigências do próprio pensamento matemático, em geral, em vez de atribuí-las às pessoas talentosas;
- Destilar uma definição da própria Matemática, pois para saber o que é a Matemática temos que observar como pessoas capazes a praticam.

Como educadores, não estamos interessados em pesquisas psicológicas em si, mas sim em maneiras de organizar atividades matemáticas, bem como em construir meios e ambientes apropriados para estimular e orientar essas atividades.

Por isso, os resultados apresentados por Krutetskii conduziram à nossa primeira questão da pesquisa: *Podemos afirmar que o pensamento matemático está associado somente às características psicológicas pessoais e não relacionado a outros parâmetros, tais como épocas históricas diferentes, contextos culturais distintos, áreas de conhecimento e de aplicação e formas de representação (semiótica)*?

Para responder essa questão, sentimos a necessidade de ampliar o estudo desenvolvido por Krutetskii e trouxemos outros parâmetros que também influenciam o pensamento matemático, que foram expostos por Gowers, Poincaré, Boutroux, Otte e Kurz.

Gowers (2000), quando apresentou o contraste entre duas culturas na Matemática, considerou o pensamento matemático motivado pelas áreas do conhecimento. Para exemplificar, ele mencionou que a área de Combinatórios se distingue da Matemática Pura, por nem sempre ser possível construir teorias gerais. Na maioria das vezes, se têm métodos para resolver problemas particulares e nem por isso eles deixam de ser importantes para o desenvolvimento da Matemática.

Poincaré (1905), ao discutir diferentes pensamentos matemáticos, não fez uma afirmação categórica. Ele oscilou entre considerar o pensamento matemático ora vinculado às pessoas (natureza), ora às épocas que desencadearam mudanças no desenvolvimento da Matemática.

Boutroux (1920), baseando-se em uma análise da História da Matemática, apresentou a transformação de um pensamento sintético para um pensamento analítico, ocorrida no século XIX. Ele explicitou a mudança de pensamento matemático atrelada às épocas históricas, ou seja, ao desenvolvimento da Matemática.

A distinção entre o pensamento analítico e o sintético é interessante, pois foi utilizada para caracterizar a Matemática desde a Antiguidade. No entanto, dificilmente poderemos fornecer uma interpretação final e unânime dessa oposição entre o analítico e o sintético.

Por exemplo, Sonya e Volodya foram dois estudantes russos muito talentosos que utilizaram diferentes raciocínios e diferentes métodos na resolução de problemas matemáticos. Volodya pensou mais em termos de imagens, diagramas ou padrões de informações (por exemplo, de números), enquanto Sonya demonstrou um estilo de raciocínio estritamente analítico, lógico e uma pobreza de imagens (KRUTETSKII, 1976, p. 193-205).

Psicólogos, talvez, identifiquem pensamentos matemáticos com estilos pessoais que pertencem a diferentes assuntos (Matemática Pura versus Matemática Aplicada, por exemplo). Os filósofos da Ciência, talvez, os atribuam a diferentes estágios que permeiam os trabalhos dos matemáticos (o contexto da descoberta versus o contexto de justificação e prova, por exemplo). Os historiadores, talvez, caracterizem os pensamentos matemáticos como aspectos de diferentes períodos culturais na História da Matemática ou os associem aos vários meios culturais da representação, podemos utilizar como exemplo, a Geometria Cartesiana, que é chamada “Analítica” em nossas salas de aula, pois utiliza métodos algébricos. Porém, Boutroux tentava nos convencer que na realidade é sintético, ao trabalhar com os próprios objetos matemáticos em vez das descrições axiomáticas.

Isso evidencia que não podemos falar sobre a Matemática em si, assim como sobre o pensamento ou talento matemático em si, e sim sobre aspectos do pensamento matemático, como ao exemplificar a Matemática como teoria ou como instrumento para resolver problemas, e várias representações presentes na Álgebra, Geometria, Cálculo, Combinatória, etc.

Por exemplo, Otte (1986) acentuou a influência que os livros didáticos de Matemática exercem no desenvolvimento do pensamento, sobretudo, no que se refere à representação utilizada na Matemática. Ele apontou a necessidade de se complementar os livros didáticos com atividades matemáticas para que ocorra uma experiência mais significativa para os estudantes.

Kurz (1997) também apresentou distintos pensamentos matemáticos na resolução de um problema de Cálculo e revelou que o entendimento do problema, a representação do mesmo e os meios de resolvê-lo foram diferentes e associados às áreas do conhecimento, à formação acadêmica e às experiências das pessoas, pois participaram da pesquisa professores de Matemática, de Física e de Química.

Constatamos que Gowers e Kurz, de certa forma, compartilham da mesma opinião ao considerar o pensamento matemático vinculado às áreas de conhecimento. No entanto, Gowers apontou diferenças existentes no interior da própria Matemática, ou seja, nela há pensamentos diferentes. Em contraste, Kurz utilizou um único problema de Cálculo e destacou como as tentativas de resolvê-lo dependiam das experiências anteriores e das formações acadêmicas das pessoas pesquisadas.

Krutetskii e Poincaré têm opinião similar quando concebem a diversidade no pensamento matemático como algo inerente à pessoa, ou seja, ligado às características psicológicas pessoais ou à natureza da pessoa.

Boutroux e Poincaré comungam a idéia de que o pensamento matemático está vinculado às épocas históricas. Entretanto, também há uma grande diferença entre eles. Poincaré tomou uma atitude psicológica, alegando que a natureza humana é sempre a mesma e só se manifesta diferentemente, dependendo do progresso da própria Matemática. Em contraste, Boutroux apresentou uma análise epistemológica sem mencionar os estilos e talentos das pessoas.

A pesquisa exploratória realizada para esta Tese de Doutorado também evidenciou distintos pensamentos matemáticos, manifestados na resolução de problemas. Nesse caso, a ênfase maior foi na atividade de resolução de problemas, o que contribuiu para revelar que certo problema pode gerar ou não diferentes pensamentos e, conseqüentemente, distintos processos de resolução.

Por exemplo, comparando o problema 1 e o 3 (p. 307 e p. 318-319 desta Tese), verificamos que o problema 1 não proporcionou diferentes resoluções, pois foi resolvido por um único método (Teorema de Pitágoras), em contrapartida, o problema 3 gerou oito diferentes resoluções, desencadeadas por distintas representações empregadas. Isso nos fez constatar que o pensamento é influenciado pela atividade, pelo próprio problema matemático e pela experiência, seja ela em relação ao conhecimento matemático ou à resolução de problemas.

Esses pontos de vista respondem à primeira questão da pesquisa, ou seja, que o pensamento matemático não é influenciado apenas por características pessoais, mas também pela história cultural e social, pelo desenvolvimento da Matemática, pelos livros didáticos, pelas representações semióticas, pelo conteúdo ou áreas envolvidas, pela formação acadêmica, pelas experiências com a atividade matemática e pelos próprios problemas matemáticos.

A segunda questão da pesquisa: *Como a representação influencia o entendimento e o desenvolvimento da Matemática?* pode ser respondida com base nos experimentos de Krutetskii e na pesquisa exploratória, desenvolvida para esta Tese de Doutorado,

Krutetskii, com seus resultados, permitiu-nos olhar as diferentes representações que desencadearam distintos processos de resolução de problemas, dentre os quais preferências por certas representações foram mais marcantes, delineando estilos cognitivos.

Entre os diversos exemplos que Krutetskii (1968) citou, podemos mencionar um, que se encontra em sua caracterização do estilo geométrico, na qual ficou evidente que a representação exerceu grande influência na compreensão da Matemática.

Retomemos o caso da estudante S. R. (6ª série), citada por ele, que conseguiu compreender a fórmula do quadrado da soma de dois números, na sua forma reduzida, somente depois de obter uma interpretação geométrica (p. 116 desta Tese).

Ela também sentiu necessidade de interpretar geometricamente outras fórmulas, como, por exemplo, o cubo da soma de dois números e o cubo da diferença de dois números. As fórmulas só se tornaram claras, por meio de representação geométrica.

A representação não é única, pois está vinculada com a característica da Matemática, na qual cada fato matemático pode ser expresso ou representado de infinitas maneiras, como ilustramos no capítulo 3 desta tese. E se há certa predominância na forma de representar esses fatos, isso pode caracterizar um estilo cognitivo de pensar e de lidar com a Matemática.

A resolução dos problemas de nossa pesquisa revelou que para muitos estudantes a representação foi crucial para a compreensão do problema e para desencadear o processo de resolução. E ainda, uma representação adequada, às vezes, surgia após algumas tentativas sem sucessos. O estudante MA_9 é um caso que pode exemplificar esses dois aspectos.

Para ilustrar a importância da representação, no entendimento e desenvolvimento da resolução de um problema, tomemos como referência novamente o Problema 3. Ele não faz menção à forma geométrica dos pastos, somente informa que um pasto é o dobro do outro. No entanto, MA_9 representou o pasto menor sendo um quadrado, e isso o auxiliou na resolução do problema. Às vezes, podemos definir uma representação com base em uma idéia estrangeira, ou seja, uma idéia que não está explicitada no enunciado do problema, como nesse caso, o pasto menor sendo um quadrado.

Outra idéia que esse estudante utilizou nesse problema foi traduzir numericamente o trabalho de um homem. Se um homem termina de ceifar a porção restante no pasto menor em um dia inteiro, então, dois homens ceifariam essa porção em um período. Com isso, ele reduziu em dois períodos o trabalho no pasto menor, facilitando a elaboração das equações. Assim,

Pasto maior (2x): n homens até meio dia e $\frac{n}{2}$ à tarde $\rightarrow$ $2x = n + \frac{n}{2}$

Pasto menor (x): $\frac{n}{2}$ homens à tarde e 2 homens de manhã $\rightarrow$ $x = \frac{n}{2} + 2$

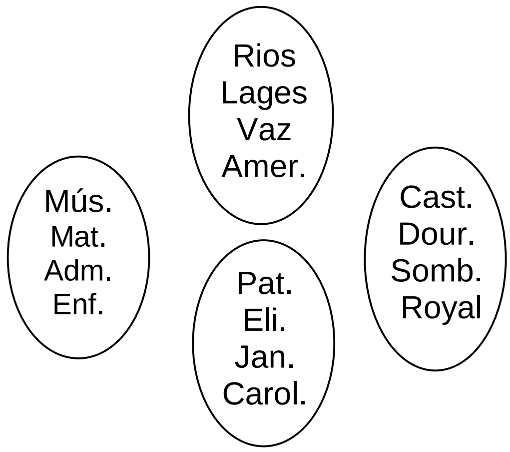
Para exemplificar que uma representação surge após várias tentativas, utilizamos o Problema 7 (p. 339 desta Tese).

Na resolução desse problema, MA_9 começou fazendo um quadro. Depois, ele tentou utilizar o Diagrama de Venn, em que cada conjunto era formado pelas informações de uma mesma categoria, ou seja, conjunto das ruas, profissões, etc. Porém, abandonou esse processo, voltando a fazer outro quadro auxiliado por uma lista das informações do problema. Sua resolução foi a seguinte:

1º) Fez o quadro abaixo:

Curso	**Condomínio**	**Rua**	**Estudante**
Música	Castelos	Rios	Patrícia
Matemática	Dourado	Lages	Eliana
Administração	Sombras	Vaz	Janaina
Enfermagem	Royal	Americana	Carolina

2º) Fez conjuntos utilizando Diagrama de Venn. Leu novamente as informações dadas pelo problema, porém, não conseguiu aplicá-las no diagrama.



3º) Optou por fazer uma lista com algumas informações do problema e anotá-las em um quadro, como ilustramos a seguir:

Rios (Mat. Adm. Enf.) (Dour. Somb. Roy.)

Lages (Pat. Jan. Carol.) (Somb. Roy.)

Vaz (Pat. Eli. Carol.) (Mat. Adm. Enf.) (Cast. Dour. Roy.)

Amer. (Pat. Jan. Carol.) (Mús. Adm. Enf.)

Analisando essas informações, ele conseguiu construir o quadro a seguir:

	Patrícia	**Eliana**	**Janaína**	**Carolina**
Curso	(Mús.)	(Mat.) (Enf.)	Adm.	(Mús.) (Mat.)
Condomínio	Sombras	(Dour.) (Somb)	(Somb.) (Roy)	Cast.
Rua	Lages	Rios	Americana	Amer. Vaz

No questionário a *posteriori* ele fez referência a esse problema, quando respondeu à pergunta “Quais foram os problemas que você mais gostou? Por quê?”

Resposta de MA_9: “(...) Problema 07: pois pude verificar uma forma bem mais fácil de resolvê-lo, visto a demora do meio que utilizei”.

Com essa resposta, o estudante evidenciou a importância da representação e que nem sempre a mais adequada surge na primeira tentativa. É a atividade quem vai determinar a representação mais adequada ou necessária. Na Matemática temos a possibilidade de representar um mesmo fato ou fenômeno de diferentes maneiras e isso contribui para o entendimento e desenvolvimento de uma solução matemática para um problema.

Outros estudantes também conseguiram resolver certos problemas somente depois de testarem diferentes representações, como por exemplo, o estudante MA_3 nos problemas 2, 4 e 5, descritos no capítulo 4.

Nós concluímos, com esse estudo teórico e experimental que nem a Matemática nem o pensamento matemático são coisas do mundo Platônico das idéias puras e também não podem ser abordados diretamente. Por isso, para construirmos uma idéia sobre o que é pensamento matemático faz-se necessário considerar o pensamento sob várias perspectivas, que são complementares, e em diferentes contextos.

Acreditamos que o estudo referente à capacidade de pensar matematicamente pode contribuir para a Educação Matemática, oferecendo subsídios teóricos e práticos.

Se existem estilos cognitivos distintos o professor não deve se restringir a um único processo de resolução, e sim explorar as várias possibilidades, aproveitando o potencial criativo dos estudantes e promovendo a troca de conhecimentos. Esse estudo auxilia o trabalho do professor em sala de aula, pois o mesmo poderá, com mais facilidade, tratar um problema matemático sob várias perspectivas, de forma que o estudante possa tomar decisões e escolher os processos de resolução que achar mais conveniente.

Esses foram alguns aspectos do pensamento matemático discutidos nesta Tese de Doutorado. No entanto, esse assunto não se esgotou, por isso apontamos algumas perspectivas para futuras pesquisas.

Identificamos no nosso estudo que o pensamento matemático é influenciado por diversos fatores. Porém, outras questões podem ser feitas: a) Haverá outros fatores, além desses mencionados, que também influenciam o pensamento matemático? b) Se existem outros fatores, quais serão eles? c) De que forma eles influenciam? d) Como investigar a influência de cada um deles?

Outro ponto refere-se ao problema das duas culturas na Matemática. Ele precisa ser melhor investigado, pois mesmo no ensino da Matemática temos provas, teorias e resolução de problemas. Os estudantes, normalmente, têm mais facilidade com a resolução de problemas do que com as teorias matemáticas. Porém, o ensino da Matemática não pode se resumir apenas a um enfoque. Com base nisso, lançamos outras questões: I) Como são relacionadas essas duas culturas? II) Como podemos utilizar a resolução de problemas para entender melhor a Matemática e o valor de idéias gerais e de teorias?

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. 4. ed., São Paulo: Martins Fontes, 2000.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. & GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas Ciências Naturais e Sociais**: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

ANAN'EV, B. G. On interrelationships in the development of abilities and character. In: **Reports at the Conference on Questions in the Psychology of Personality**. Moscow: APN Press, 1956.

_________. On the correlation between abilities and giftedness. In: V. N. Myasishchev (Ed.), **Problems of abilities**. Moscow: APN Press, 1962.

_________. The formation of giftedness. In: V. N. Myasishchev (Ed.), **Inclinations and abilities**. Leningrad: LGU Press, 1962.

ANTONOVA, G. P. **Individual characteristics of the mental activity of primary school-children**. Voprosy Psikhologii, 1955.

_________. **On the correlation between individual differences in pupil's mental activity and characteristics of their higher nervous activity**. Voprosy Psikhologii, 1966, n. 1.

AVERBACH, B. & CHEIN, O. **Problem solving through recreational mathematics**. New York: Dover Publications, 2000.

BARON, M. E. **Curso de História da Matemática**: origens e desenvolvimento do cálculo. Trad. de José R. B. Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985, unidade 3.

BLONSKII, P. P. **Selected pedagogical works**. Moscow: APN Press, 1961.

BOCHKOVSKAYA, O. T. **On mistakes in pupil's independent solution of arithmetic problems and the reasons they arose**. Doklady: APN, 1959, n. 2.

BOGOYAVLENSKII, D. N. Psychological preconditions of developing instruction. In: **Theses of reports at the Second Congress of the Society of Psychologists**. V. 5. Moscow: APN Press, 1963.

_________. **The formation of modes of mental work for pupils as a way to develop thinking and to activate learning**. Voprosy Psikhologii, 1962, n. 4.

BOGOYAVLENSKII, D. N. & MENCHINSKAYA, N. A. **Psychology of the mastery of knowledge in school**. Moscow: APN Press, 1959 (English translation of Chapter 4 in Educational psychology in the USSR, p. 50-67).

BORISOVA, M. N. Methods of determining the interrelation of the first and second signal systems in conditions of visual recall. In: B. M. Teplov (Ed.), **Typological characteristics of man's higher nervous activity**. V. 1. Moscow: APN Press, 1956.

BOUTROUX, P. **L'idéal scientifique des mathématiciens** – Dans l'Antiquité et dans les Temps Modernes. Paris: Librairie Saint Alcan, 1920.

BUCKINGHAM, B. R. **Mathematical ability as related to general intelligence**. School Science and Mathematics, 1921.

CAMPELLO, R. E. & MACULAN, N. **Algoritmos e Heurísticas**: desenvolvimento e avaliação de performance. Rio de Janeiro: EDUFF, 1994.

COLEÇÃO COQUETEL. **Desafios de Lógica**. n. 16. Rio de Janeiro: Ediouro, fev./2004.

DAMÁSIO, A. **O erro de Descartes**: Emoção, razão e o cérebro humano. Trad. Portuguesa Dora Vicente e Georgina Segurado. São Paulo: Companhia das Letras, 1996.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 3. ed. São Paulo: Ática, 1991.

DAVIS, P. J. & HERSH, R. **A Experiência Matemática**. 2. ed. Trad. de João B. Pitombeira, Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DAVIS, Robert B. **Learning Mathematics** – The Cognitive Science Approach to Mathematics Education. London & Sydney: Croom HELM, 2001.

DOBLAEV, L. P. **Mental process in the composition of equations**. Izvestiya: APN, 1957. English translation in Soviet studies, V. 3, p. 103-83.

DUNCKER, K. The psychology of productive (creative) thinking. (Chapter on the processes of solving mathematics problems). Translated from German. In: A. M. Matyushkin (Ed.), **The psychology of thinking**. Moscow: Progress, 1965.

ERN, F. A. **Essays on methods in arithmetic**. Riga, 1915.

FELDMAN, D. H. Creativity: Dreams, insights, and transformations. In: **The nature of creativity**. Ed. R. J. Sternberg. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

FLESCHER, I. **Anxiety and achievement of intellectually gifted and creatively gifted children**. Journal of Psychology, 1963.

GAGNÉ, F. Constructs and models pertaining to exceptional human abilities. In: **International handbook of research and development of giftedness and talent**. Ed. K. A. Heller, F. J. Mönks & A. H. Passow. Oxford: Pergamon Press, 1993.

GAGNÉ, R. M. & PARADISE, N. E. **Abilities and learning sets in knowledge acquisition.** Psychological Monographs, 1961, (14, Whole n. 518).

GAL'PERIN, P. Ya. An experimental study of the formation of mental operations. In: **Reports at the Conference on Questions in Psychology**, Moscow: APN Press, 1954. (English translation in Psychology in the Soviet Union, p. 213-25)

_________. The development of research on the formation of mental operation. In: B. G. Anan'ev & others (Eds.) **Psychological science in the USSR**. V. 1. Moscow: APN Press, 1959. English translation: Washington, D. C.: U. S. Joint Publications Research Service, 1961.

_________. **Some interpretations of the hypothesis of mental operations**. Voprosy Psikhologii, 1960, n. 4.

_________. Supervising the process of learning. In: **New research in the pedagogical sciences**. Collection 4. Moscow: Prosveshchenie, 1965.

GAL'PERIN, P. Ya. & TALYZINA, N. F. **The formation of elementary geometric concepts on the basis of a pupil's organized action**. Voprosy Psikhologii, 1957, n. 1. English translation in Recent Soviet Psychology, p. 247-72.

GARDNER, H. **Frames of mind**: A theory of multiple intelligences. New York: Basic Books, 1983.

GARDNER, M. **Divertimentos Matemáticos**. Trad. Bruno Mazza, São Paulo: IBRASA, 1967.

GNEDENKO, B. V. **The role of mathematics in the development of technology and industry**. Matematika v Shkole, 1962, n. 1.

_________. **On the cultivation of a mathematics teacher**. Matematika v Shkole, 1964, n. 6.

_________. **On perspectives in mathematics education**. Matematika v Shkole, 1965, n. 6.

GOLDSTEIN, L. Representation and geometrical method, of problem-solving. In: **Forms of Representation: An interdisciplinary Theme for Cognitive Science**. Donald Peterson (Editor). Exeter: Intellect Books, 1996.

GOWERS, W. T. The Two Cultures of Mathematics. In: **Mathematics**: Frontiers and Perspectives, edited by V. Arnold et al., AMS, 2000.

HADAMARD, J. **An essay on the psychology of invention in the mathematical field**. Princeton: N. J. Princeton University Press, 1945.

HAECKER, V. & ZIEHEN, T. **Beitrag zur Lehre von der Vererbung und Analyse der zeichnerischen und mathematischen Begabung, insbesondere mit Bezug auf die Korrelation zur musikalischen Begabung**. Zeitschriftfür Psychologie, 1931, p. 120-21.

HOUAISS, A. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Editora Objetiva, 2004.

INDIK, N. K. **Mental processes in the formation of a new operation**. Candidate's dissertation, Moscow, 1951.

IVANITSYNA, E. P. **Rational and nonrational methods of thinking (on material for solving geometric problems on proof)**. Voprosy Psikhologii, 1965, n. 3.

JOHANNOT, L. **Le raisonnement mathématique de l'adolescent**. Paris: Delachaux et Niestlé, 1947.

JÚNIOR, O. G. **Matemática por assunto**: Geometria Plana e Espacial. V. 6. São Paulo: Editora Scipione Ltda, 1988.

KABANOVA-MELLER, E. N. **A psychological analysis of the application of geographic concepts and principles**. Izvestiya: APN, 1950.

_________. **The psychology of the formation of knowledge and skills in pupils**: The problem of modes of mental activity. Moscow: APN Press, 1962.

KALMYKOVA, Z. I. **The processes of analysis and synthesis in the solution of arithmetic problems**. Izvestiya: APN, 1954.

_________. **The processes of analysis and synthesis in the solution of arithmetic problems**. Izvestiya: APN, 1955.

_________. **Psychological peculiarities of the application of knowledge to the solution of physics problems**. Doklady: APN, 1957, n. 4.

_________. Towards criteria of mental development. In: **Theses of reports at the Second Congress of the Society of Psychologists**. V. 5. Moscow: APN Press, 1963.

_________. Some methods of diagnosing mental development in the process of instruction. In: **Questions in the activation of pupil's thinking and creativity**: Theses of reports from the Lenin MGPI. Moscow: Lenin MGPI Press, 1964.

KHINCHIN, A. Ya. **On the educational effect of mathematics lessons**. Matematicheskoe Prosveshchenie, 1961. (Reprinted in Matematika v Shkole, 1962, n. 3).

KASNER, E. & NEWMAN, J. **Matemática e imaginação**. Rio de Janeiro: Zahar, 1968.

KOLMOGOROV, A. N. **On the mathematician’s profession**. (3. ed.) Moscow: MGU Press, 1959.

KORDEMSKY, B. A. **The Moscow Puzzles**. New York: Charles Scribner’s Sons, 1972.

KOVALEV, A. G & MYASISHCHEV, V. N. **Man’s mental characteristics**. V. 2. Abilities. Leningrad: LGU Press, 1960.

KOVALEV, A. G. **The psychology of personality**. Chapter 9. Abilities. Leningrad: Herzen LGPI Press, 1963.

KOVANTSOV, N. I. **Are mathematical abilities innate?** Voprosy Psikhologii, 1965, n. 3.

KRANTZ, S. G. **Techniques of Problem Solving**. USA: American Mathematical Society, 1997.

KRUTETSKII, V. A. **The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren**. Translated from the Russian by Joan Teller. Edited by Jeremy Kilpatrick and Izaak Wirszup. USA: The University of Chicago, 1976.

KURZ, Elke M. **Representational practices of differential calculus**: A historical-cognitive approach. University Ohio USA, Tese (Doutorado), 1997.

LAKATOS, E. M. & MARCONI, M. de A. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 3ª ed. Revisada e ampliada. São Paulo: Atlas, 1991.

LANDA, L. N. **On some deficiencies in the study of pupils’ thinking**. Sovetskaya Pedagogika, 1956, n. 11.

_________. **Some data on the development of mental abilities**. Doklady: APN, 1957, n. 3.

LEIBNIZ, G. W. **Leibniz**: Novos ensaios sobre o entendimento humano. Os Pensadores. Trad. Luiz João Baraúna. São Paulo: Editora Nova Cultural Ltda, 1999.

LEITES, N. S. **An inclination for effort as a factor in giftedness**. Izvestiya: APN, 1950.

_________. **On mental giftedness**. Moscow: APN Press, 1960.

LEONT'EV, A. N. An experimental study of thinking. In: **Reports at the Conference on Questions in Psychology**. Moscow: APN Press, 1954.

_________. **Problems in the development of mind**. Moscow: APN Press, 1959.

_________. **On the formation of abilities**. Voprosy Filosofii, 1960, n. 1.

_________. **On the social nature of man's mind**. Voprosy Filosofii, 1961, n.1.

LYAPUNOV, A. A. **On the foundation and style of modern mathematics**. Matematicheskoe Prosveshchenie, 1960.

MAIER, N. R. F. Reasoning in humans. Translated from English. In: A. M. Matyushkin (Ed.), **The psychology of thinking**. Moscow: Progress, 1965.

MARX, K. **Capital**. V. 1. Moscow: Gospolitizdat, 1955.

MARX, K. & ENGELS, F. **From the early works**. Moscow: Gospolitizdat, 1956.

MATTAR, F. N. **Pesquisa de marketing**. São Paulo: Atlas, 1994.

MATYUSHKIN, A. M. **On two ways of generalizing relationships**. Doklady: APN, 1959, n. 3.

_________. The analysis and generalization of relationships. In: S. L. Rubinstein (Ed.), **The thought process and principles of analysis, synthesis, and generalization**. Moscow: APN Press, 1960.

_________. **An investigation of psychological principles of the process of analysis**. Voprosy Psikhologii, 1960, n. 3.

MENCHINSKAYA, N. A. **Intellectual activity in solving arithmetic problems**. Izvestiya: APN, 1946, n. 3. English translation in Soviet studies, V. 3, p. 7-51.

_________. **The psychology of teaching arithmetic**. Moscow: Uchpedgiz, 1955.

MENCHINSKAYA, N. A. & MORO, M. I. **Questions in the methods and psychology of teaching arithmetic in the elementary grades**. Moscow: Prosveshchenie, 1965.

MOORE, D.S. & COBB, G.W. Statistics and Mathematics: Tension and Cooperation. In: **The Mathematical Association of America**, Monthly 107, Aug- Sept, 2000, p. 615-630.

MORDUKHAI-BOLTOVSKII, D. **The psychology of mathematical thinking**. Vprosy Filosofii i Psikhologii, 1908.

NASCIMENTO, D. B. **Representações e processos cognitivos na área do cálculo**. Dissertação (Mestrado em Educação Pública) UFMT, Cuiabá, Mato Grosso, 2000.

OTTE, M. **Mathematik an der allgemeinbildenden Schule, Probleme im Mathematikunterricht** (mit Th. Mies, H. Steinbring). Zetralblatt für Didaktik der Mathematik, ZDM Heft 3/1975, p.120-125.

_________.**Textual Strategies**. FLM 3, 1983.

_________. What is a text? In: **Perspectives on Mathematics Education**. D. Reidel Publishing Company, 1986.

_________. **O formal, o social e o subjetivo: uma introdução à filosofia e à didática da matemática**. Trad. Maria Aparecida Bicudo. São Paulo: Editora da Universidade Estadual Paulista, 1993.

_________. B. Russell's "Introduction to mathematical philosophy". In: **Educação Matemática Pesquisa**, V. 3, n. 1, São Paulo: EDUC, 2001, p. 11-55.

_________. Epistemologia matemática de um ponto de vista semiótico. In: **Educação Matemática Pesquisa**, V. 3, n. 2, São Paulo: EDUC, 2001, p. 11-58.

_________. **Does Mathematics Have Objects? In What Sense?** Synthese 134, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, Jan.-Feb, 2003, Issue 1-2, p. 181-216, (2003a).

_________. Construction and Existence. In: V Seminário Nacional de História da Educação Matemática. Rio Claro. **Anais …** UNESP, 13 a 16 de abril 2003b, p. 141-153.

_________. **Complementary, Sets and Numbers**. Educational Studies in Mathematics 00, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2003c p. 1-26.

PAVLOV, I. P. **Complete collected works**. Book 2. (2. ed.). Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press, 1951.

_________. **Pavlov's Wednesday Clinics**. V. 2-3. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press, 1954.

PERELMAN, Ya. I. **Algebra can be fun**. English translation, Moscou: Mir Publishers 1979.

PIAGET, J. **The language and thought of the child**. Translated from French. Moscow, Leningrad: Uchpedgiz, 1932.

POINCARÉ, A. **Mathematical discovery**. Translated from French. Yur'ev, 1909.

POINCARÉ, H. **L'invention mathématique**. Revue du Móis, 1908.

_________. Sobre a natureza do raciocínio matemático. In: **A ciência e a hipótese**. 2. ed., Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1984, p. 21-31.

_________. A Intuição e a Lógica na Matemática. In: **O valor da Ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

_________. **How to Solve It**. Princeton: Princeton University Press, 1957.

PONOMAREVA, A. V. **Developing pupils' abilities in the middle school**. Sovetskaya Pedagogika, 1963, n. 12.

RABINOVICH, S. Ya. & SHUBERT, A. M. **Two cases of mathematical giftedness in children**. Psikhologiya I Deti, 1917, n. 3-4.

ROGERS, A. L. **Experimental tests of mathematical ability and their prognostic value**. Teachers College Contributions to Education, 1918, n. 89.

ROSSINSKII, S. D. **Boleslav Kornelievich Mlodzeevskii** (1858-1923). Moscow: MGU Press, 1950.

RUBINSTEIN, M. F. **Tools for thinking and problem solving**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1986.

RUBINSTEIN, S. L. **Foundations of general psychology**. Moscow: Uchpedgiz, 1940.

_________. **Questions in psychological theory**. Voprosy Psikhologii, 1955, n. 1. English translation in Psychology in the Soviet Union, p. 264-78.

_________. **I. M. Sechenov's psychological views and Soviet psychological science**. Voprosy Psikhologii, 1955, n. 5.

_________. **Being and consciousness**. Moscow: USSR Academy of Sciences Press, 1957.

_________. **Theoretical questions in psychology and the problem of personality**. Voprosy Psikhologii, 1957, n. 3.

_________. **The principles and direction of psychology**. Moscow: USSR Academy of Sciences Press, 1959

_________. **The problem of abilities and questions in psychological theory**. Voprosy Psikhologii, 1960, n. 3.

RUTHE, P. **Über mathematische Begabung, ihre Analyse und ihre Prüfung bei 13 jährigen begabten Volksschülern**. Praktische Psycologie, 1920.

SAMARIN, Yu, A. **On the associative nature of mental activity**. Voprosy Psikhologii, 1957, n. 2.

_________. **Essays in the psychology of mind: Characteristics of the pupil's mental activity**. Moscow: APN Press, 1962.

_________. The systematic, dynamic nature of mental activity as a basis for creativity. In: **Questions in the activation of pupil's thinking and creativity**: Theses of reports from the Lenin MGPI. Moscow: Lenin MGPI Press, 1964.

SHAPIRO, S. I. **A study of pupils' individual characteristics in processing mathematical information**. Voprosy Psikhologii, 1965, n. 2.

SAWYER, W. W. **Introducing Mathematics**: 3 – The Search for Pattern. Great Britain: Penguin Books, 1970.

SHEVAREV, P. A. **Toward the question of the nature of algebraic skills**. Uchenye Zapiski GIP, 1941.

_________. **An experimental psychological analysis of algebraic mistakes**. Izvestiya: APN, 1946.

_________. **Thought processes in a pupil's school work**. Sovetskaya Pedagogika, 1946, n. 3.

_________. **Some remarks on the problem of associations**. Izvestiya: APN, 1957, n. 80.

_________. **Generalized associations**. Voprosy Psikhologii, 1958, nº 1.

_________. **Generalized associations in pupil's school work**. Moscow: APN Press, 1959.

_________. Toward the question of basis types of associations. In: **Theses of reports at the Second Congress of the Society of Psychologists**. V. 5. Moscow: APN Press, 1963.

SHVARTSBURD, S. I. **On the development of pupils' interests, inclinations, and abilities in mathematics**. Matematika v Shkole, 1964, n. 6.

SYMONDS, P. M. **Special disability in algebra**. Teachers College Contributions to Education, 1923, n. 132.

SKEMP, R. R. **The Psychology of Learning Mathematics**. Harmondsworth: Penguin Books, 1971.

_________. **Mathematics in the Primary School**. London: Routledge, 1989.

SOIFER, A. **Mathematics as Problem Solving**. Colorado: Center for Excellence in Mathematical Educational, 1987.

SOKOLOV, A. N. **Thought processes in pupils' solutions of physics problems**. Izvestiya: APN, 1954.

_________. **The graphic contrast between a logically posited and an actual solution of a problem**. Voprosy Psikhologii, 1961, n. 6.

SPEARMAN, C. “General intelligence,” objectively determined and measured. In: **American Journal of Psychology**, 1904.

STEPANOV, A. V. **Towards the question of the psychological nature of pupil’s mathematical development**. Candidate’s dissertation, Moscow: 1952.

STERN, W. **Children’s and adolescents’s intelligence and methods of investigating it**. Translated from German. Knigospilka Press, 1926.

TALYZINA, N. F. **Properties of deductions in solving geometry problems**. Izvestiya: APN, 1957. English translation in Soviet studies, V. 4, p. 51-101.

_________. Towards the question of the mastery of elementary geometric concepts. In: **Materials for the Conference on psychology**. Moscow: APN Press, 1957.

_________. An experiment in the supervised instruction of elementary geometric in school on the basis of the theory of formation of mental operations. In: **Theses of reports at the Second Congress of the Society of Psychologists**. V. 5. Moscow: APN Press, 1963.

TALYZINA, N. F. & BUTKIN, G. A. **Towards the problem of proof in the elementary geometric course**. Doklady: APN, 1960, n. 3.

_________. **An experiment in teaching geometric proof**. Izvestiya: APN, 1964.

TEPLOV, B. M. **The problem of giftedness**. Sovetskaya Pedadogika, 1940, n. 4-5.

_________. **Abilities and giftedness**. Uchenye Zapiski GNIIP, 1941.

_________. Abilities and giftedness. In: K. N. Kornilov, A. A. Smirnov & B. M. Teplov (Eds.), **Psychology** (3. ed.) Moscow: Uchpedgiz, 1948.

_________. **Problems of individual differences**. Moscow: APN Press, 1961.

THORNDIKE, E. L. & others. **The psychology of algebra**. New York: Macmillan, 1923.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em Ciências Sociais**: a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1987.

VYGOTSKII, L. S. **Selected psychological research**. Moscow: APN Press, 1956.

_________. The problem of instruction and mental development at school age. In: **Selected psychological research**. Moscow: APN Press, 1956. English translation in Psychology in the Soviet Union, p. 213-25.

WERDELIN, I. **The mathematical ability**: Experimental and factorial studies. Lund: Gleerups, 1958.

WICKELGREN, W. A. **How to solve Mathematical Problems**. New York: Dover Publications, 1995.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Documento de autorização para as entrevistas

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro das Ciências Exatas e Tecnologias
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

PREZADO(A) ENTREVISTADO(A),

Esse roteiro com problemas matemáticos faz parte de um estudo de doutorado que estamos realizando sobre estilos cognitivos, formas de representação e diferentes processos de resolução de problemas matemáticos, envolvendo estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso.

Não se tem a pretensão de estabelecer nenhuma comparação entre pessoas e sim estudar a existência de uma variedade de estilos cognitivos,bem como a relação entre eles e as formas de representação.

Os nomes dos entrevistados serão mantidos em sigilo, utilizando para isso, códigos.

Sua colaboração será de fundamental importância para esse estudo. Desde já agradecemos.

____
Gladys Denise Wielewski
Doutoranda do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP

AUTORIZAÇÃO

Eu

autorizo a gravação de minha entrevista, bem como a utilização dos resultados obtidos na redação da Tese de Doutorado, na publicação de artigos acadêmicos e na apresentação em eventos científicos, com a garantia do anonimato.

Cuiabá, de de 2004.

____
Entrevistado

APÊNDICE B

Roteiro para entrevistas do Doutorado

Informações Profissionais

1. Qual semestre está cursando?

2. Você já lecionou (leciona) aulas de matemática?
( ) SIM ( ) NÃO
Se a resposta da pergunta 2 foi SIM continue respondendo as questões **a** e **b.**
a) Para quais níveis de Ensino você lecionou?
( ) Ensino Fundamental ( ) Ensino Médio
b) Quanto tempo lecionou (leciona) aulas de matemática?

Questões Subjetivas a priori

1. O que você gosta na matemática? Por quê?

2. Você acha a atividade matemática difícil? Por quê?

3. Você acha a atividade matemática cansativa? Por quê?

4. Na sua opinião, o que você considera que seja um problema matemático?

5. Que aspectos são necessários para se resolver problemas matemáticos?

6. Do que você gosta mais:
( ) Resolver problemas matemáticos ( ) Utilizar o raciocínio abstrato
Por quê?

7. Você gosta de pensar de forma mais:
( ) Intuitiva ( ) Analítica
Por quê?

8. Sua preferência é maior:
( ) Pelas idéias matemáticas ( ) Pela Matemática Pura
Por quê?

Problemas Matemáticos

Problema 1: Há duas árvores, uma oposta à outra em cada lado de um rio. Uma tem 30 cúbitos de altura, a outra, 20 cúbitos. A distância entre os pés de cada árvore é de 50 cúbitos. No topo de cada árvore há 1 pássaro empoleirado. De repente, os pássaros vêem um peixe surgir na superfície do rio e entre as duas árvores. Eles mergulham ao mesmo tempo e alcançam o peixe ao mesmo tempo. Encontre a distância entre o pé da árvore mais alta e o peixe.

Problema 2: De todos os retângulos que têm o mesmo perímetro, qual o que tem maior área?

Problema 3: A uma equipe de homens foi atribuída a tarefa de ceifar dois pastos, um tendo o dobro do tamanho do outro. Até meio dia todos os homens ceifaram juntos no pasto maior. Depois, a equipe foi dividida em dois grupos iguais. O primeiro grupo permaneceu no pasto maior e concluiu todo o trabalho no final da tarde. O segundo grupo foi ceifar o pasto menor, mas no final da tarde ainda restou uma porção desse pasto para ceifar. Essa porção foi ceifada no outro dia por apenas um homem que trabalhou durante um dia inteiro. Quantos homens estavam ceifando?

Problema 4: Dois trabalhadores, um mais velho e outro mais jovem, moram na mesma casa e trabalham na mesma fábrica. Caminhando até a fábrica o homem mais jovem leva 20 minutos. O homem mais velho percorre a mesma distância em 30 minutos. Quando o trabalhador jovem alcançará o homem mais velho, se esse partir 5 minutos antes do jovem?

Problema 5: No quadro 4 x 4 ao lado, cada símbolo representa um número diferente. Está indicada a soma dos símbolos em três das linhas e colunas. Quais são os dois totais que faltam?

♦	✯	π	✯	32
π	■	♦	■	
■	✯	♦	✯	30
π	♦	π	■	32
32		31	31	

Problema 6: Dados dois números, se subtrairmos metade do número menor de cada um dos números, o resultado com o número maior é três vezes maior que o resultado com o número menor. Quantas vezes o número maior é maior do que o número menor?

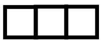
Problema 7: Patrícia acabou de conhecer três moças que estudarão na mesma universidade que ela. Na conversa, descobriram que moram no mesmo bairro. Cada uma das moças escolheu uma carreira distinta e cada qual mora em um condomínio e rua também diferentes. Com as dicas dadas, descubra as carreiras escolhidas por elas, os condomínios e as ruas onde moram.

1. A moça que mora na Rua Rios não é a que estudará Música, nem é a que mora no Condomínio dos Castelos.
2. A moça que mora na Rua Lajes (que não é Eliana) não é a que vive no Condomínio Dourado, nem no Condomínio dos Castelos.
3. Janaína não mora na Rua Vaz (que não é onde mora a futura estudante de música), nem a que vive no Condomínio das Sombras.
4. Nem Eliana nem a estudante de Matemática moram na Rua Americana.
5. O Condomínio Royal (que não é onde vive a estudante de música) não fica na Rua Rios.
6. Carolina (que não é quem mora no Condomínio Royal) não é quem estudará Música.
7. Eliana não é a estudante de Administração.
8. A moça que fará Enfermagem mora no Condomínio Dourado.
9. A estudante de Matemática (que não é Janaina) não vive no Condomínio Dourado.
10. A estudante de Administração não mora na Rua Rios.
11. A estudante de Música não mora na Rua Americana.

Problema 8: Dado um tabuleiro 8 x 8 sem cor, é possível pavimentar esse tabuleiro com dominós (retângulos de tamanho 1 x 2)?

Sugestão: analise um tabuleiro de 4x4, depois 5x5, etc.

Problema 9: Dado um tabuleiro 8 x 8, em que são cortados dois quadrados das extremidades opostas (o primeiro e o último de uma das diagonais), restam, então, 62 pequenos quadrados no tabuleiro. É possível pavimentar esse tabuleiro cortado com dominós?

Problema 10: É possível cobrir um tabuleiro de xadrez de 8x8 usando 21 triminós? Um triminó como  é considerado o tamanho certo para cobrir três casas do tabuleiro de xadrez.

Problema 11: Dado um tabuleiro de xadrez não convencional, de tamanho mxn e sem cores (o tabuleiro é um retângulo onde m e n podem ser diferentes), estude a possibilidade de um tabuleiro m x n ser pavimentado com as seguintes condições:

a) com retângulos de 1 x 3; e

b) com retângulos de 1 x 4.

Problema 12: Dados ***n*** números inteiros, prove que um ou outro deles é um múltiplo de ***n***, ou alguns deles, quando somados, resultam em um múltiplo de ***n***.

Problema 13: Consideremos um subconjunto A = {a_1, a_2, a_3..., a_{n+1}} com ***n + 1*** números que foram escolhidos do conjunto B = {1, 2, 3,..., 2n}. Prove que existe sempre em A dois números divisíveis um pelo outro.

Questões subjetivas a posteriori

1. Nos problemas propostos o que você acha que mais te ajudou a resolvê-los:

( ) Idéias Matemáticas ( ) Matemática Pura

Por quê?

2. O que considera importante para se resolver problemas matemáticos?

3. Quais foram os problemas que você mais gostou? Por quê?

4. Você achou que alguns problemas foram mais difíceis do que outros? Por quê?

5. Você acha que a busca por uma forma de representar os dados do problema são importantes para entender e resolver o problema?

6. O que você aprendeu com os problemas resolvidos?

APÊNDICE C

Quadro impresso para resolver o problema de Lógica

PROBLEMA DAS QUATRO ESTUDANTES