CLAUDIO DALL'ANESE

ARGUMENTOS E METÁFORAS CONCEITUAIS PARA A TAXA DE VARIAÇÃO

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2006

CLAUDIO DALL'ANESE

ARGUMENTOS E METÁFORAS CONCEITUAIS PARA A TAXA DE VARIAÇÃO

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Professora Doutora Janete Bolite Frant.***

PUC/SP

São Paulo

2006

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ **Local e Data:** _______________

Para a minha esposa, Evelise.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por sempre me dar sinais de que vale seguir adiante.

À minha esposa, pelo apoio, paciência, dedicação, amor e por ela existir. Expressar minha gratidão por ela é um ato que requer a cumplicidade que nós temos. Agradecer o suficiente é uma possibilidade vaga.

À minha orientadora, Professora Doutora Janete Bolite Frant pela pessoa que ela é, pela motivação, competência, pelo prazer e tudo de bom que me proporcionou.

Ao Professor Benedito Antonio da Silva, por me apoiar, instigar e acreditar em mim.

A *CAPES* pelo apoio recebido e a todos os sujeitos desta pesquisa.

Às Professoras Lulu Healy e Mônica Rabello de Castro e aos Professores Benedito Antonio da Silva e Alexandre Luis Trovon por aceitarem participar da Banca Examinadora e contribuírem preciosamente com suas sugestões.

À coordenação, professores, colegas de turma e de grupos de estudos do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, por tudo o que me ajudaram em diferentes aspectos. Embora não mencione explicitamente o nome de cada um deles, sabem quem são e a grande valia de cada um.

A todos os meus amigos, que também não menciono explicitamente o nome de cada um. Todos eles também sabem quem são e a estima e gratidão que tenho por cada um.

Ao Francisco, secretário do programa, pela descontração e gentilezas. Fica aqui um abraço do “Dalla”.

À minha família, em especial à minha esposa, Evelise, à minha mãe, Maria Cleide, meu pai Claudio João Dall’Anese (in memoriam), Vó Adelina, Vô Biagio (in memoriam), Vó Anna, Vô Isidoro, Carlo, Carla, Luisa, Gabriel, Luca, Seu Arthur, Dona Neide, Francisco, Deise, Manoel, Nelise, Maíra e Carol. Cada um deles teve a sensibilidade de me ajudar e apoiar naquilo que estava precisando naquele momento. Obrigado!! Amo todos vocês.

Claudio Dall’Anese

RESUMO

Esta investigação teve por objetivo identificar e analisar argumentos e metáforas utilizadas por um grupo de alunos de um curso de pós-graduação em Educação Matemática para taxa de variação, para entender como é que eles aprendem esse tópico. A opção de trabalhar com esses sujeitos recaiu no fato de serem todos professores de Matemática do ensino fundamental e/ou médio e já terem visto Cálculo em sua graduação.

A esses sujeitos foram oferecidas tarefas num cenário de aprendizagem onde se privilegiou o diálogo entre professor, alunos e tecnologia. A visão adotada com relação à tecnologia foi a de prótese, no sentido de que ela possibilita ao aluno fazer coisas diferentes do modo que faria sem ela. Com o intuito de trabalhar com textos distintos, ora oferecemos tarefas em que os alunos interagiram com o computador, ora oferecemos uma tarefa em que a prótese era uma canaleta feita de cano de PVC, bola de tênis, bola de pingue-pongue, cronômetro e trena. As aulas em que os alunos trabalharam nessas tarefas foram filmadas utilizando uma filmadora VHS. Apontamentos por escrito em um diário de classe de algumas falas e intervenções dos alunos e da professora ajudaram a enriquecer a coleta de dados. A análise baseou-se na Teoria da Cognição Corporificada e no Modelo da Estratégia Argumentativa.

Concluímos que o processo de compreender taxa média e taxa instantânea de variação não é o caso apenas de uma passagem de uma fórmula analítica a outra ou de um gráfico para uma fórmula. Existe uma diferença entre os mecanismos cognitivos para compreender o gráfico e a fórmula analítica, diferença esta que contribui com a dificuldade dos alunos com esse tópico. Não é apenas a definição formal que é responsável por essa dificuldade. Observamos que com o auxílio da tecnologia informática foi possível criar um ambiente onde o movimento fictivo, intrínseco da linguagem, se transformou em um movimento factivo. Isto é, quando retas secantes coincidiam com uma reta tangente por sucessivas aproximações e quando a reta tangente à curva num ponto podia se mover, ao mesmo tempo os valores do coeficiente angular dessas retas podiam ser vistos na tela.

Palavras-Chave: taxa de variação, metáfora conceitual, derivada, movimento fictivo, cognição corporificada, estratégia argumentativa.

ABSTRACT

The aim of this investigation was to identify and to analyze arguments and metaphors used by a group of students of a master's degree course in Mathematical Education for the rate of change, to understand how they learn this topic. The option of working with those subjects relapsed in the fact that they are all teachers of Mathematics and they have already seen Calculus in their graduation.

To those subjects, tasks were offered in a learning scenery where the dialogue was privileged among teacher, students and technology. The vision adopted regarding the technology was of a prothesis, in the sense that it makes it possible for the student to do things different from the way that he would do without it. With the intention of working with different texts, sometimes we offered tasks that the students interacted with the computer, sometimes we offered a task which the prosthesis was a small canal made from a PVC tube, tennis ball, ping-pong ball, chronometer and tape measure. The classes that the students worked in those tasks were filmed using a VHS camera. Notes of some speeches and interventions of the students and the teacher written on a notebook helped to enrich the collection of data. The analysis was based on Embodied Cognition Theory and on the Model of the Argumentative Strategy.

We conclude that the process of understanding medium rate of change and instantaneous rate of change is not only the case of just a passage from one to another analytical formula or from a graph to a formula. There is a difference among the cognitive mechanisms to understand the graph and the analytic formula, which contributes to the students' difficulty with that topic. It is not just the formal definition that is responsible for that difficulty. We observed that with the aid of the computer science technology, it was possible to create an environment where the fictive motion, intrinsic of the language, became a factive movement. That is, when secants straight lines coincided with a tangent straight line for successive approaches, and when the tangent straight line to the curve in a point could move, at the same time the values of the slope of those straight lines could be seen in the screen.

Keywords: rate of change, conceptual metaphor, derivatives, fictive motion, embodied cognition, argumentative strategy.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1
INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo investigar e analisar a produção de significados para taxa de variação, estudada como a derivada de função de uma variável real. Buscamos identificar e compreender argumentos e metáforas utilizados por um grupo de 20 alunos de pós-graduação ao trabalharem em um cenário de aprendizagem onde privilegiamos o diálogo entre professor, alunos e tecnologia.

O tópico sobre taxa de variação é parte do conteúdo programático de Cálculo Diferencial e Integral, que é um curso de nível universitário oferecido a diferentes programas logo no primeiro semestre de Engenharia, Economia, Ciência da Computação, Matemática, Física, entre outros. Indicadores estatísticos sinalizam que existem problemas no ensino e na aprendizagem dessa disciplina, tanto no âmbito nacional quanto no internacional.

Nacionalmente, destacamos alguns índices referentes a esse problema como, por exemplo: o índice de reprovação em Cálculo de alunos que ingressaram na PUC-Campinas em 1996 em cursos de Engenharia Sanitária e Engenharia Civil, atingiu a marca de 61% a 63% (FILHO, 2001); até 1994, este índice esteve em torno de 80% na Universidade Federal Fluminense (FERNANDES, MELLO e MELLO, 2001); Marsetto (1992) aponta que em cursos da área de exatas, 80% a 85% de alunos foram reprovados ou abandonaram a disciplina; na Unesp de Presidente Prudente – SP, os percentuais de reprovação em Cálculo de 1993 a 1998 estiveram entre 50% a 71% (MURELLATTI, 2001), e este índice nacional em 2000 é de aproximadamente 80% de acordo com o Ministério de Educação e Cultura – MEC[1]. Para melhorar esse quadro, entre 1995 e 1999, órgãos de fomento, entre eles o CNPq, lançaram editais para reformas dos cursos de engenharia, conhecido como PRODENGE (Programa de Desenvolvimento das Engenharias), que incluía como um de seus sub-programas o projeto REENGE (Reengenharia do Ensino das Engenharias), cujo objetivo principal era de reestruturar o ensino, com a implantação de módulos de aprendizagem virtual, emprego de recursos computacionais, dentre outras ações. Observamos que das propostas enviadas aquelas que focalizavam o ensino de Cálculo eram as mais contempladas.

Internacionalmente, vimos que as pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de Cálculo também levaram a propostas de reformulação de seu ensino, por exemplo nos Estados Unidos e na Inglaterra. De acordo com uma pesquisa em 1987 da Associação de Matemáticos da América – MAA foi constatado que dos 600.000 estudantes que cursavam Cálculo na graduação apenas 46% deles obtiveram sucesso na disciplina (ANDERSON & LOFTSGAARDEN, 1987) e tal resultado conduziu a um movimento chamado "Reforma do Cálculo"[2]. Este movimento apontava mudanças no ensino de Cálculo que envolviam modificações nas atividades propostas e o uso de computadores não apenas para exercício e prática mas também para o desenvolvimento de idéias do Cálculo.

O ensino de Cálculo, entretanto, não apresenta grandes modificações, pois ainda encontramos trabalhos apontando que as dificuldades dos alunos na disciplina de Cálculo permanecem. Por exemplo, cerca de 30% do total dos trabalhos apresentados em 2002 no ICTM (International Conference on the Teaching of Mathematics at the undergraduate level) eram relativos a pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de Cálculo.

---

[1] http://www.inep.gov.br/download/censo/2000/Superior/Sinopse_Superior-2000.pdf

[2] Maiores informações a respeito desse movimento podem ser obtidas, por exemplo, nos sites http://mathforum.org/mathed/calculus.reform.html ; http://math.arizona.edu ; http://www.harvard.edu, em que se encontram links para pesquisas concluídas e em andamento que se fundam no '*Calculus Reform Movement*'.

Villarreal (1999) em sua pesquisa sugere que o professor deve ser mais ouvinte do que falante, tendo em vista que quando fala o aluno está elaborando suas idéias matemáticas, o que possibilita a caracterização de seu modo de pensar. É nessa direção que conduzimos nossa pesquisa, dando a oportunidade para o aluno falar, descentralizando do professor a fala e o desenvolvimento de modos de pensar sobre o conteúdo matemático que está sendo estudado, utilizando tecnologia e atribuindo ao aluno mais responsabilidade para o seu aprendizado, para sua produção de conhecimento.

É importante que deixemos claro como usaremos conhecimento e produção de significados, uma vez que nossa linguagem é polissêmica e conhecimento é entendido como um produto da enunciação de um sujeito, não de um enunciado. Desse modo, o conhecimento de algo tem um sujeito deste conhecimento e levamos em conta o contexto no qual o sujeito está inserido no momento dessa produção (LINS, 1999; BOLITE FRANT, 2002). Chamaremos de texto um saber que existe mas que foi enunciado por outro que não o sujeito cognoscente (BOLITE FRANT, 2003; 2002). Assumimos com Lins e Gimenez (1997, p. 145) que *"significado é o conjunto de coisas que se diz a respeito de um objeto. Não o conjunto do que se poderia dizer, e, sim, o que efetivamente se diz no interior de uma atividade. Produzir significado é, então, falar a respeito de um objeto"*. Entendemos portanto que, quando um sujeito fala a respeito de um objeto matemático, tanto sujeito enquanto ser cognitivo, quanto objeto matemático, para esse sujeito, estão sendo constituídos através de sua enunciação.

Desse modo, quando dizemos que o objetivo de nosso estudo é identificar e analisar a produção de significados para a taxa de variação, queremos dizer que o nosso olhar está para a fala do aluno, na medida em que ela informa os objetos matemáticos que estão sendo por ele constituídos enquanto trabalha em sala de aula, em tarefas que envolvem derivada num ponto de função de uma variável real, com e sem o uso de computador. Buscamos a análise e compreensão do discurso do aluno, discurso este que é um recorte das falas e interações de um grupo de alunos sobre taxa de variação, sejam essas falas orais, gestuais apontamentos escritos ou pictóricos.

Optamos por incluir, a seguir, uma revisão da literatura relevante para melhor situar nosso problema e também para subsídio de nossa investigação.

Nascimento (2001), realiza uma pesquisa com alunos e professores de cursos de ciências exatas e constata que os professores apontam que estudantes desprovidos de pré-conceitos do Cálculo enfrentam dificuldades no curso inicial de Cálculo Diferencial e Integral. Por pré-conceitos o autor coloca como sendo *"conceitos naturais e intuitivos, embutidos nas estruturas numéricas, geométricas e variacionais"*, conceitos estes que poderiam ser trabalhados no ensino médio e fundamental. Aponta, ainda, que tais dificuldades decorrem da maneira como os professores do ensino médio e fundamental cumprem o conteúdo matemático, dando maior ênfase aos aspectos operacionais e suas aplicações, deixando de lado o trabalho de analisar, questionar e refletir sobre problemas mais gerais. Por outro lado, os alunos participantes dessa pesquisa apontaram que dificuldades intrínsecas aos conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral contribuem para a existência de problemas no aprendizado dos conceitos aí tratados. Observamos que o autor propõe que sejam oferecidos exemplos "naturais e intuitivos", o que vai em direção contrária ao que já apontava Sierpinska (1985) quando constatou que apesar de os alunos terem a noção de reta tangente a uma circunferência como sendo aquela que "toca" a curva, eles não "transportam" essa noção para o estudo da taxa de variação em curvas que representam funções reais de uma variável.

Baseados na teoria da cognição corporificada, dizemos que quando usamos a expressão "toca a curva" podemos observar que estamos falando no domínio da Matemática usando termos do cotidiano físico, isto é, quando uma pessoa toca a outra com a mão não existe uma fusão entre a mão de uma e a parte do corpo tocada da outra pessoa. Por outro lado, em Matemática quando uma reta toca uma curva, existirá um ponto A de interseção, que pertence simultaneamente à reta e à curva. Quando usamos um domínio para falar de outro distinto daquele diremos que se trata de uma metáfora conceitual. No capítulo 2 aprofundaremos esta discussão.

Cornu (1991) coloca que os alunos possuem concepções espontâneas a respeito da noção de limite que podem não ser compatíveis com a noção matemática de limite, o que possivelmente contribui para esses alunos não conseguirem transportar a idéia de reta tangente a uma circunferência a outras curvas. Essas concepções decorrem das experiências pessoais do aprendiz: para ele, a palavra *limite* traz num primeiro momento a noção dinâmica de aproximação – noção esta que permaneceu válida até a época de Cauchy[3] - num sentido tal que a expressão *tender a* pode ser concebida pelos estudantes como algo que se aproxima mas não alcança ou aproxima e consegue alcançar. A noção matemática de limite carrega em seu bojo a idéia de que o limite pode ser atingido ou não, assim como ser ou não ultrapassado.

Essas "concepções espontâneas", conforme chama Cornu (*ibid*), nos parece similar ao que Amit e Vinner (1990) chamam de "concepção inadequada". Sierpinska, Cornu, Amit e Vinner chamam a atenção para problemas que adviriam do uso da linguagem cotidiana na compreensão de conceitos matemáticos e apontam que tal uso é inadequado. Núnez (2003) se contrapõe a esta inadequação colocando que as pesquisas em lingüística cognitiva, principalmente as relacionadas com a teoria da cognição corporificada, mostram que o uso de metáforas conceituais não é um fenômeno meramente lingüístico. Essas metáforas tratam da cognição e do pensamento e o que usualmente chamamos de intuição ou idéias ingênuas expressas na linguagem cotidiana são estruturas conceituais baseadas em idéias com estruturas inferenciais precisas - no capítulo 2 aprofundamos este quadro teórico. Deste modo, buscamos levantar tais metáforas para entender melhor que estruturas são usadas pelos participantes durante as atividades sobre taxa de variação.

Tall (1997) discute a existência de um espectro de abordagens que vai desde a intuitiva que inclui a representação visuo-espacial, passando pelas diferentes formas de representação numérica, simbólica e gráfica até a representação formal, isto é, aquela constituída pelo esquema definição-teorema-prova. Tall faz uso de ambientes informatizados e, para o autor, uma abordagem

[3] alguns elementos históricos sobre o desenvolvimento do conceito de limite podem ser encontrados em Dall'Anese, 2000.

formal para alunos iniciantes é inapropriada, tendo em vista que ela requer qualidades cognitivas que, num primeiro momento da aprendizagem da Matemática avançada[4], o aprendiz ainda não tem. Ao nosso ver, no entanto, o tema é mais complexo, pois essas conclusões também serviram de base para algumas reformas no ensino de Cálculo e, no entanto, as dificuldades no ensino e na aprendizagem ainda persistem. Em nossa pesquisa, buscamos entender melhor como o aluno compreende e usa as diferentes representações ao trabalhar com taxa de variação de função.

Nemirovsky coordenou um projeto chamado Math Of Change – MOC – Matemática das Variações, no TERC[5], e afirma que a noção de variação está presente no cotidiano humano. Desde cedo exploramos e aprendemos com mudanças em geral, tanto com as variações físicas (movimento de objetos, mudanças de estações do ano, etc) quanto com as variações simbólicas (curvas tornando-se íngremes, mudanças de formas, etc). Em nossa pesquisa utilizamos tarefas para entendermos melhor como os alunos falam sobre as variações.

Sintetizamos alguns resultados, levantados a partir da revisão de literatura[6] que nos ajudam a estatizar o problema:

- A apresentação formal e com aulas expositivas contribui para a existência de dificuldades no aprendizado de conteúdos do Cálculo (SILVA e IGLIORI, 1996; SILVA, 1999; MALTA, 2003; CARLSON, PERSSON & SMITH, 2003; NASCIMENTO, 2000; TALL, 1991, 1997; LEME, 2003).

- A abordagem da derivada/taxa de variação, não através de uma aula expositiva e sim pelo estabelecimento de uma prática pedagógica em que os alunos trabalham em atividades propostas pelo professor, é uma alternativa que traz ganhos para o processo de ensino e de aprendizagem desse conteúdo (DALL'ANESE, 2000; D'AVOGLIO, 2002; SILVEIRA, 2001).

[4] Estamos aqui tomando o termo "Matemática avançada" como aquela Matemática que é ensinada nos cursos de graduação.
[5] Technology Educational Research Center in Massachussets. www.terc.edu.
[6] Optamos por sintetizar o que encontramos nos encontros internacionais como PME, ICME, ICTM entre outros, além de artigos de periódicos que podem ser encontrados na bibliografia sem referência direta no texto.

- Ênfase no aspecto processual pode levar o estudante a associar a aplicação de regras e procedimentos ao conceito de derivada. Isto pode não o impedir de ter sucesso nas tarefas operatórias, mas pode contribuir para falhas em tarefas que envolvem aspectos conceituais (MANRIQUE e ALMOULOUD, 1998; TALL, 1991, 1997; EVEN & SCHWARZ, 2003; AMIT & VINNER, 1990; ARTIGUE, 1991; ORTON, 1983; CASSOL, 1997)

- Os alunos apresentam dificuldades em relacionar a idéia de reta tangente à circunferência com reta tangente a outras curvas. Parece que, para estes estudantes, reta tangente a uma curva é aquela que tem em comum a esta curva somente o ponto de tangência (SIERPINSKA, 1995, VINNER, 1991; DALL'ANESE, 2000)

- Os alunos apresentam dificuldades em estabelecer relações entre diferentes formas de representação de derivada, como por exemplo a relação entre coeficiente angular de reta tangente com derivada num ponto (MEYER, 2003).

- Concepções inadequadas parecem conduzir o raciocínio do estudante, levando-o a produzir respostas inadequadas para questões conceituais (CORNU, 1991; AMIT & VINNER, 1990).

- Em relação à tecnologia, os pontos mais levantados em pesquisas são que a mesma

  > *"1) ilustra e reforça conceitos básicos; 2) reduz a preocupação com as técnicas de cálculo e permite concentrar-se nas idéias centrais do Cálculo abordando aplicações mais realistas; 3) comunica novas idéias visual e experimentalmente antes de passar a uma explicação através de palavras; 4) oferece imagens que, de outra forma, seriam inacessíveis para os estudantes"* (VILLARREAL, 1999, p. 30).

1.1 Problema

Este trabalho tem como objetivo investigar e analisar a produção de significados para a idéia de taxa de variação estudada como derivada de função de uma variável real. Buscamos identificar e compreender argumentos e metáforas utilizados por um grupo de 20 alunos de pós-graduação ao trabalharem em atividades sobre taxa de variação num cenário de aprendizagem onde privilegiamos o diálogo entre professor, alunos e tecnologia.

Nosso foco reside na análise do discurso dos alunos ao realizar as tarefas envolvendo taxa de variação. Interessa-nos identificar e analisar momentos em que os alunos modificam seus pontos de vista durante os diálogos.

Algumas questões específicas emergem:

- A partir dos argumentos dos alunos, que metáforas podem ser levantadas e qual o papel das mesmas na compreensão da taxa de variação?

- A partir de tarefas envolvendo velocidade de um móvel, que significados são produzidos para velocidade média? E para velocidade instantânea? Que relações, caso existam, são produzidas por estes alunos entre a distância percorrida e velocidade num dado intervalo de tempo?

- Quais os argumentos dos alunos sobre os aspectos visual – algébrico; estático - dinâmico nas atividades no computador?

CAPÍTULO 2
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO – METODOLÓGICA

Neste capítulo, fazemos uma discussão a respeito dos referenciais teóricos que fundamentam a pesquisa em relação ao problema investigado que, para atender ao nosso objetivo, estão baseados na linguagem e na Teoria da Cognição Corporificada.

Começamos explicitando nosso posicionamento com relação à noção de conhecimento e de produção de significados, em seguida fazemos considerações a respeito do papel da linguagem e sobre a Teoria da Argumentação nesse estudo, o que nos remete ao Modelo da Estratégia Argumentativa e à Teoria da Cognição Corporificada (*Embodied Cognition*). Apresentamos uma articulação e o modo como essas duas teorias se complementam em nosso olhar para o problema colocado: entender como alunos compreendem a idéia de taxa de variação - mais especificamente, identificar e analisar a produção de significados por alunos de um curso de pós-graduação stricto sensu em Educação Matemática para taxa de variação, estudada como derivada num ponto de função de uma variável real.

Ao final faremos considerações a respeito dos sujeitos da pesquisa e sobre os procedimentos metodológicos empregados para a coleta e para a análise de dados.

2.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1.1 Conhecimento, Produção de Significados e Linguagem

Inicialmente vamos olhar para as noções de conhecimento e de informação: alguns autores defendem que se trata da mesma idéia e outros, os quais corroboramos, defendem se tratar de naturezas distintas.

De acordo com Bruner (1997), defender a idéia de que conhecimento e informação pertencem à mesma categoria advém de uma ciência cognitiva que se iniciou na década de 1950, fundamentada em uma teoria informacional que postulava representações mentais como símbolos e processos mentais como que pertencendo a uma classe na qual ocorrem computações e processamento de informação sobre esses símbolos.

Segundo Bruner (*ibid*), essa linha de pensamento adquiriu impulso com a formulação de Turing, na qual qualquer programa de computador poderia ser "imitado" por uma Máquina Universal Turing mais simples, de operações elementares e primitivas. Nesse modelo não é necessário lidar com processos "mentais" ou significados; basta considerar, em lugar de estímulos e respostas, *'inputs'* e *'outputs'* e, no meio destes, um programa. No lugar de significado, surge o conceito de "computabilidade", num sentido tal que os processos cognitivos foram igualados aos programas de computador e o funcionamento da mente entendido como o de uma máquina.

Seguindo esta linha da mente igualada a um programa de computador, na qual cérebro e mente são vistos como entidades separadas, Bruner (*ibid*) indaga sobre o status dos estados mentais identificáveis não por suas características pragmáticas em um sistema computacional, mas por suas qualidades subjetivas, tais como acreditar, desejar, pretender ou compreender um significado. De acordo com o autor, não há um lugar para a mente em um sistema como esse; para a constituição de uma ciência cognitiva em torno do conceito de significado e dos processos pelos quais os significados são produzidos por um indivíduo tal como ele é – ser humano e não máquina – é preciso considerar a participação deste indivíduo na cultura na qual ele está inserido.

Nosso posicionamento em relação a conhecimento e informação é a de que pertencem a classes distintas (BOLITE FRANT, 2002; BRUNER, 1997), contrastando com a inferência de que “mente é como se fosse uma máquina” advinda da ciência cognitiva clássica, conforme mencionado acima.

Para nós, informação é algo que pode ser transmitida para outra pessoa ou transportada de um local para outro, como ocorre, por exemplo, na transmissão de informação via livros, disquetes de computador, CD’s, DVD’s ou qualquer outra mídia tecnológica. Conhecimento, entretanto, é algo que é produzido pelo sujeito quando fala a respeito de algo, levando em conta o contexto no qual esse falante está inserido no momento dessa sua fala. Por isso, para analisar o conhecimento produzido pelo sujeito, vamos olhar para a linguagem escrita, oral e gestual desse sujeito, principalmente a oral e a escrita.

Fazemos a seguir um breve resgate histórico (KRISTEVA, 1988; CASTRO, 2003), refletindo sobre o momento em que a linguagem matemática se desenvolve e passa a ser veiculada na comunidade científica, assim como resgatamos algumas implicações desse momento para a Educação Matemática. Procuramos também evidenciar a importância do estudo da linguagem natural para a construção do conhecimento matemático.

A visão de ciência no final do século XIX era de uma ciência que considerava o mundo regido por leis e, portanto, o fazer científico estava direcionado para descobrir essas leis. O que garantia a cientificidade naquele momento era o método empregado para este fazer científico que, por sua vez, proporcionava uma sensação de êxito perante a comunidade científica em virtude das grandes invenções e descobertas que estavam sendo feitas. No entanto, cientistas da época começaram questionar o estabelecimento de um critério que pudesse discernir entre quais enunciados poderiam ser considerados científicos e quais não poderiam. Isto decorreu do fato de que esses pensadores perceberam que os enunciados empregados na ciência comportavam ambigüidades, tornando-se um entrave para a produção científica, pois a objetividade naquele momento era entendida como uma relação direta com a realidade - quanto mais próximo daquilo que se vê e o que se sente está um enunciado, quanto mais se puder comprovar esses enunciados, mais bem articulados eles estariam. Naquele momento, a questão do método parece estar bem resolvida, mas ainda não está completamente articulada em função das ambigüidades da linguagem empregada nos enunciados, o que deu à linguagem um estatuto de objeto de estudo fundamental por parte destes cientistas. Encontramos junto aos formalistas uma preocupação em dizer o que é sentido, o que é significado, como é que ocorre a gênese do sentido[7]. Inicia-se um projeto de compreender aspectos da linguagem para discernir sobre uma linguagem limpa, uma que pudesse falar dos enunciados que não comportasse ambigüidades; a procura é por uma linguagem objetiva. Desta maneira, a linguagem passa a ser vista como mais um critério de cientificidade e é no interior desse projeto que nascem as primeiras indagações a respeito da linguagem natural (CASTRO, 2003).

A linguagem matemática estava sendo desenvolvida neste momento e os matemáticos apresentaram um projeto de unificação das Matemáticas. A linguagem matemática se apresentava, como uma resposta aos anseios dos formalistas. Era vista como uma linguagem poderosa, uma vez que não dava margem a equívocos e nem ambigüidades, imprimindo a Matemática como paradigma e garantia de êxito de cientificidade (CASTRO e BOLITE FRANT, 2002).

A Matemática na sala de aula sofre também essa influência, aonde encontramos um desprestígio em relação à linguagem natural, levando a se acreditar que as dificuldades da aprendizagem da disciplina seriam sanadas pela aprendizagem da linguagem matemática, de uma linguagem poderosa que não desse margem a imprecisões. O que veio a ser chamado na sala de aula de "linguagem matemática" constituiu-se como um sistema de signos e regras que passou a normatizar a produção do fazer matemático, seguindo o ideal de uma

[7] Estudos da linguagem feitos por "lingüistas" antes dessa época eram feitos com uma tônica de preocupação com o "bem falar", não havia uma tematização no sentido de se investigar o papel da linguagem dentro de espectros científicos.

sintaxe rígida e do abandono de ambigüidades, sem o comprometimento da clareza dos enunciados (CASTRO, 2004).

Tal linguagem comportava objetos sem existência física, objetos lingüísticos que só existem a partir de definições, ou seja, eles passam a existir através de um conjunto de enunciados. O otimismo em relação à linguagem matemática desencadeou a apresentação e a colocação em prática de projetos de ensino da Matemática que preconizaram a linguagem matemática como um de seus pressupostos, por exemplo, o “movimento da Matemática moderna”. Embora a linguagem matemática tenha trazido resultados benéficos para o projeto de unificação das ciências, o mesmo não aconteceu com os projetos de ensino, dado que a importância para a ciência da época era o desenvolvimento de uma linguagem livre de equívocos e ambigüidades para a sua apresentação e não para a sua construção (CASTRO e BOLITE FRANT, 2002).

Para Saussure (1989), existe uma diferença entre linguagem, fala e língua. A língua é vista por ele como sendo a única que seria objetiva, em função de comportar um caráter invariante, algo que não fosse permeável a mudanças intensas a todo o momento - este é aspecto característico de seu modelo que agradou a ciência que procurava por uma estrutura que organizasse tudo. O modelo de Saussure procura dar conta de explicar a linguagem de uma maneira ampla num sentido tal que, o que dá a possibilidade de um sujeito entender o outro é o seguinte esquema: o sujeito pensa (o pensamento é algo individual e que não se tem acesso direto), codifica suas idéias com a língua num determinado enunciado e a linguagem serve para transmitir essas idéias, ou seja, o pensamento é codificado com a língua num determinado enunciado, que por sua vez é falado. A fala comporta tanto a língua, porque ela traz os enunciados, como também o meio de transmissão desses enunciados. A codificação da fala é feita pela língua, vista enquanto estrutura que todo o falante daquela língua conhece e, dessa forma, um falante que tem um conjunto de signos, pode combiná-los de maneira a gerar os significados. O outro sujeito entende o que foi falado porque ele também conhece a mesma língua empregada nessa fala, ou seja, ele tem o mesmo “dicionário de signos” daquele que está falando, ele sabe como arrumar estes signos (decodificar a fala), garantindo assim o mesmo sentido e o entendimento dessa fala. Nesse modelo, temos a língua enquanto estrutura comum a todos os indivíduos, garantindo a compreensão de um diálogo e temos a fala como um momento de realização da língua, a linguagem é aqui vista como o todo, ela serve para transmitir idéias.

Dentro dessa concepção, para aprender sobre um objeto um sujeito deve se relacionar com este objeto - que está num lugar diferente do lugar onde se encontra o sujeito, ou seja, existe uma fronteira entre os dois – formando assim conceitos sobre ele, conceitos estes que estarão disponíveis para o sujeito quando quiser comunicar suas idéias e o meio utilizado para essa comunicação é a linguagem, que é vista como um processo de "fazer sentido" decorrente de uma relação monológica e sistemática entre as maneiras de se fazer este sentido, que se dá através da língua. A dimensão cognitiva neste processo é anterior a linguagem, o conhecimento é desenvolvido de forma invariante, universal, através da ação direta do sujeito sobre o objeto e a questão cultural fica externa ao processo de produção de conhecimento (CASTRO, 2003).

Outras teorizações contemporâneas a respeito da linguagem dedicam-se a estudar as influências do contexto social em que vive um indivíduo sobre as produções lingüísticas deste indivíduo. Elas surgem a partir da segunda metade do século XX, numa tentativa de explicar o papel da linguagem no processo de produção de conhecimento a partir de uma idéia diferente do modelo estruturalista de Saussure (*ibid*), tomando a língua não como um pressuposto para o falante, mas como algo que foi criado pelo ser humano.

De acordo com Bakhtin (1997), o mundo não se oferece ao indivíduo como uma matéria bruta e para compreendê-lo, o indivíduo deve agir sobre ele. A maneira como um sujeito compreende o mundo decorre da forma como ele se relaciona com outros do mesmo grupo semiótico. Nesses termos, a ação de um sujeito sobre um objeto de conhecimento passa necessariamente pela relação entre sujeitos. Admitindo este pressuposto, não existe uma única forma de se perceber as coisas, dado que as possibilidades de relacionamento entre sujeitos são inúmeras. Ainda de acordo com o autor, a relação do sujeito com o mundo e com outros sujeitos se dão de acordo com prioridades e interesses estabelecidos *com* e *na* linguagem cotidiana. Bakhtin define a linguagem como um conjunto articulado de idéias que expressam as relações que dão unidade a um determinado grupo social, os quais estão em constante transformação, pois a linguagem vem da relação entre indivíduos e que muda constantemente na práxis desses indivíduos.

> *"Se a linguagem vem da prática de um grupo semiótico e se as possibilidades desta prática são ilimitadas, existe um número incomensurável de possibilidades de linguagens para dizer o mundo. Em certo sentido, cada grupo tem sua própria linguagem, pois somente ele vivenciou sua própria práxis"* (CASTRO, 1997, p. 90).

Segundo Castro (*ibid*), o que se observa numa sociedade complexa é que diferentes grupos se utilizam de diferentes formas de falar, embora a língua seja a mesma. O que garante a esses diferentes grupos compreenderem-se entre si são as trocas, sobretudo as trocas infra-estruturais, assegurando a inteligibilidade entre as linguagens desses grupos.

Deste modo, a produção de conhecimento só é possível a partir da linguagem, ao contrário do modelo proposto na lingüística clássica. Essa produção começa a acontecer a partir de ligações que um sujeito estabelece entre núcleos de significação que foram estabelecidos pela interação entre sujeitos, podendo então se dizer que pensamento e linguagem têm a mesma natureza (CASTRO e BOLITE FRANT, 2002).

Na lingüística clássica, o enunciado é reiterável a qualquer momento, qualquer pessoa dizendo um enunciado, ele terá sempre o mesmo significado - observemos que os enunciados matemáticos funcionam assim. Para Bakhtin (1997), o enunciado no sentido colocado pela abordagem clássica é algo que não existe, o que existe é algo que é dito e que vai ter o seu sentido dependente de quem disse, para quem disse, aonde disse e em que momento disse, ou seja, o que existe é algo situado, algo que depende do contexto da enunciação. O enunciado é único, a enunciação não. A enunciação é situada no tempo, no espaço, no autor. O enunciado, para Bakhtin, é uma citação. O sentido de alguma coisa está na enunciação e não no enunciado. É nesse sentido que levamos em conta o termo *enunciado* e o termo *enunciação*.

Diante disso, falar de produção de significado nos remete ao sujeito que o produz, não devendo ser confundido com a questão de alguma coisa ser significativa para este sujeito. Algo ser significativo para o sujeito é uma ação determinada por outro que julga o que é e o que não é significativo para esse sujeito (por exemplo, quando o professor estabelece para seus alunos que um determinado conceito tem uma revelação importante, que é expressivo), enquanto que na definição de Lins e Gimenez (1997), quem realiza a ação é o sujeito responsável pela sua produção. Quando um sujeito produz significado para um objeto matemático, não se trata de ter um objeto num lugar, o sujeito noutro e que o sujeito deve "descobrir" os significados desse objeto; a idéia é que enquanto o sujeito fala (produz significado) a respeito deste objeto, tanto sujeito (enquanto ser cognitivo) quanto objeto - para o sujeito - estão sendo constituídos através de enunciações desse sujeito (LINS, 1999; BAKHTIN, 1997). Nessa acepção, conhecimento é algo dinâmico, pode e em geral se transforma ao longo do diálogo/fala do sujeito.

Sendo a produção de conhecimento uma ação realizada por um sujeito, não cabe neste paradigma chamar de conhecimento algo que foi dito (oral, gestual ou escrito) por outros como, por exemplo, o que está escrito em livros didáticos, o que é colocado por um professor em aula expositiva ou falado por um colega. Quando um autor fala (enuncia) alguma coisa (texto), ele o faz para alguém (leitor) que ele constitui e que quer produzir algum efeito. Assim, toda enunciação é dirigida para alguém, um sujeito pensante, para um interlocutor. Por sua vez, o leitor vai constituir um autor, ou seja, alguém que lhe enunciou alguma coisa e é em relação ao que o leitor pressupõe que esse autor diria sobre o que disse (texto) é que o leitor irá falar, irá produzir significado para a enunciação do autor. Assim, uma enunciação de um autor só se torna um texto quando o interlocutor (leitor) produz significado para essa enunciação, com base naquilo que esse autor diria sobre a sua enunciação. Nestes termos, para nós, texto é tudo aquilo que é dito (enunciado) por outro (autor) e sobre o qual um sujeito (leitor) poderá produzir significado para tal (texto). O 'saber' impregnado nas mídias, dito por outro (oralmente, por escrito ou gestualmente) é considerado um texto, sobre o qual o sujeito irá produzir significado.

Dissemos que o contexto no qual o sujeito está inserido no momento de sua produção de conhecimento deve ser levado em conta (BOLITE FRANT, 2002). Castro e Bolite Frant (2002) apontam que a ferramenta mais importante do professor de sala de aula entre ele e seus alunos e mesmo entre os alunos, é o diálogo. Embora o que habitualmente encontramos numa sala de aula tradicional seja um professor falando para seus alunos e estes, quietos, prestando atenção a essa fala, estamos diante de uma situação de diálogo entre esses personagens. Se a concepção que se tem de linguagem é num sentido unicamente verbal, de fato o aluno estando quieto não se estabelece um diálogo, mas se entendermos a linguagem como algo mais amplo (oral, gestual, escrita) o aluno não está quieto. Sob este ponto de vista, o aluno está respondendo à fala do professor com olhares, gestos ou apontamentos no caderno, ou seja, está havendo um diálogo nessa acepção de linguagem.

De acordo com as autoras supra citadas, a linguagem que efetivamente participa da produção de conhecimentos matemáticos na sala de aula (contexto) é, preferencialmente, a linguagem natural ou linguagem materna, ou linguagem ordinária, aquela na qual construímos nossa visão de mundo, assim como nossos pontos de vista. Ainda segundo as autoras, os objetos matemáticos são constituídos pelo sujeito da mesma forma que constitui objetos do cotidiano, isto é, usando a mesma linguagem que emprega no dia a dia, aquela linguagem que participa dos diálogos de dentro e de fora da sala de aula. Esse é um aspecto que imprime à linguagem um importante papel na produção de significados para objetos matemáticos.

Castro e Bolite Frant (*ibid*) afirmam que práticas sociais são como um sistema de relações estabelecidas que determina papéis, tarefas e hierarquias diferenciadas, como ocorre numa de sala de aula. Estas relações são estabelecidas por processos lingüísticos, o que caracteriza a linguagem como um material privilegiado para a compreensão desses processos sociais na sala de aula.

Se adotamos o pressuposto de que conhecer é uma ação realizada por um sujeito, tal ação ocorre no interior de uma dada atividade. Estamos aqui tomando o termo *atividade* conforme colocado na Teoria da Atividade de Leontiev (1981) (*apud* DUARTE, 2003). A característica básica da atividade humana é sua orientação a um objeto, ou seja, para que uma atividade ocorra, ela deve ter um motivo e não pode ser separada do ambiente sócio-cultural em que se dá. Para entender um indivíduo, é preciso levar em conta aspectos sociais de processos cognitivos desenvolvidos por este indivíduo.

Essa teoria enxerga a práxis social como a fonte da estrutura do pensamento humano, caracterizando a estrutura da atividade coletiva humana de forma mediatizada, ou seja, composta de ações individuais dentro de uma divisão de tarefas. Quando essa atividade coletiva passa a ser composta de atividades/ações menores, cada uma dessas ações individuais que compõem a atividade coletiva deixa de ter uma relação direta com o objeto/motivo da atividade e passa a ter uma relação tal que possa aparentar não manter relação com esse objeto/motivo, caso não sejam levadas em conta as relações entre a ação individual e o conjunto das ações que constituem a atividade como um todo. Nestes termos, atividades humanas são cadeias de ações relacionadas pelo mesmo objeto e motivo e as ações feitas por um sujeito só podem ser entendidas dentro da atividade na qual esses objetos estão inseridos.

Leontiev (1981, p. 210-214, *apud* Duarte, 2003) exemplifica isso: um grupo primitivo de seres humanos vai à caça de um animal (a atividade coletiva aqui é essa caça). Para isso, um dos integrantes do grupo (aqui chamado de "batedor") tem a função de espantar o animal para um determinado local, no qual o restante do grupo prepara uma emboscada. Aparentemente a ação do batedor não tem relação com a atividade da caça em si, pois sua ação individual impede que ele consiga abater o animal. O que dá sentido à sua ação, são as relações que ele mantém com os demais integrantes do grupo, que estão esperando o animal no local para onde o batedor o espantou, para que efetivamente esse animal seja abatido.

Neste sentido, a atividade é o local onde o conhecimento acontece. As ações que constituem uma atividade são “energizadas” por seu motivo e são dirigidas para metas conscientes. A parte de seu aspecto intencional (o que deve ser feito), uma ação também tem um aspecto operacional (como pode ser feito, os meios pelos quais uma ação é levada a cabo) definido pelas condições em que uma meta concreta é atingida (EVEN & SCHWARZ, 2003).

Levando em conta esses pressupostos a respeito de conhecimento e de produção de significados, buscamos suporte no Modelo da Estratégia Argumentativa para olhar para a fala desses alunos, o que discutimos a seguir.

2.1.2 Argumentação e o Modelo da Estratégia Argumentativa

Nosso foco está na fala de alunos na medida em que ela informa os objetos matemáticos que estão sendo por eles constituídos enquanto trabalham em atividades matemáticas - aqui entendidas como sendo aquelas atividades em que os alunos descobrem padrões, regularidades, exceções, tomam decisões, seguem por caminhos diferentes daquele que estavam seguindo (BOLITE FRANT, 2002) - que envolvem a idéia de derivada num ponto de função de uma variável real.

O Modelo da Estratégia Argumentativa (MEA) é um modelo para análise de discurso em sala de aula (CASTRO e BOLITE FRANT, 2000; 2002) e, segundo essas autoras, uma opção para a compreensão dos processos de ensino e de aprendizagem é a Teoria da Argumentação de Perelman (2000).

Na produção de significados para a taxa de variação nos moldes propostos nessa pesquisa, essa produção acontece porque o aluno está sendo o tempo todo provocado para argumentar, ele está tendo, o tempo inteiro, que negociar o que ele acredita. Se um sujeito acredita numa coisa e outro acredita também, existe uma concordância e aí não precisa de argumentação. Por outro lado, se um sujeito acredita numa coisa e outro sujeito acredita noutra coisa, haverá a necessidade de argumentar. De acordo com Perelman (2000), a*rgumentação* é o processo que se desenrola a partir de uma controvérsia quando alguém quer convencer o outro de alguma idéia, explicita ou implicitamente. Quando um sujeito quer convencer um outro (que pode ser ele próprio), faz uso de *argumentos*.

Esse é um aspecto que privilegiamos: de observar momentos em que existem controvérsias. Grosso modo, queremos ver como é que os alunos fazem uma discussão sobre taxa de variação.

É no interior de um discurso que as argumentações são construídas a partir das hipóteses que um locutor tem a respeito de seu auditório. *Auditório* é entendido como o conjunto de pessoas que o locutor quer influenciar com seu discurso e *hipóteses* ou *acordos* são o que o locutor acredita que seu auditório tem como admitido (PERELMAN, 2000; CASTRO e BOLITE FRANT, 2002).

Castro e Bolite Frant (2002, p. 62) afirmam que *“não há uma linguagem construída para a argumentação, como é o caso da linguagem matemática”*. Quem argumenta, faz uso da linguagem cotidiana.

Os processos discursivos estudados com o MEA consistem em relacionar o *como* se diz com *o que* se diz e o *porquê* se diz o que foi dito. As estratégias argumentativas dos alunos serão analisadas com base numa reconstrução de argumentos, ou seja, numa descrição esquemática dos argumentos empregados pelos locutores através de enunciados simples que os sintetizem.

Para compreender uma enunciação, é preciso levar em conta a especificidade do contexto no qual o sujeito está inserido no momento em que produziu essa enunciação. Ou seja, para compreender a intenção do falante, para compreender porque ele disse o que disse naquele momento, é preciso levar em conta o contexto em que o discurso se dá e do qual faz parte. É preciso também compreender a função da enunciação no argumento que a contém (CASTRO e BOLITE FRANT, *ibid*).

Um episódio é aqui entendido como uma seqüência do diálogo entre os integrantes de um grupo, escolhido por conter dados relevantes da questão que está sendo investigada ou por apresentar novas questões para esta questão; consiste numa montagem coerente para que possamos compreender a intenção do falante, ou seja, para compreender porque ele disse o que disse naquele momento.

A análise de um episódio requer a recriação do contexto da enunciação, sendo necessário descrever este episódio através de um esquema no qual está presente o argumento que está sendo utilizado pelo orador, através de afirmações simples, o que pode permitir compreender a função da enunciação dentro do argumento. Cada elemento do esquema argumentativo está aí presente por ser essencial ao mesmo. Para montar a estratégia argumentativa é preciso explicar porque um argumento veio depois de outro, permitindo assim chegar à intenção do falante.

Castro e Bolite Frant (2002, p. 60,61) ressaltam que *"a existência de implícitos* [em uma fala] *coloca em destaque dispositivos de convenções e leis sociais que regulam a interação lingüística entre os indivíduos"*. Trabalhar com a teoria da Argumentação favorece a explicitação de algo que poderia permanecer implícito, dado que os acordos de um locutor, em geral, são implícitos por não haver necessidade de explicitação deles. A nossa fala, de maneira geral, é implícita. Sendo assim, quando estivermos montando o esquema da seqüência de raciocínio, estaremos atentos para o preenchimento de implícitos como, por exemplo, momentos de silêncio, expressões faciais e/ou gestos, entonações de voz que podem estar explicitando informações a respeito do modo de pensar do sujeito. Podemos olhar os implícitos como momentos em que se sabe o que falar mas não se pode, em geral para obedecer regras sociais ou por ser algo que está inconsciente ou automático para o falante.

Sintetizando o que foi descrito acima, os passos para a reconstrução da estratégia argumentativa são os seguintes: i) reconstruir seqüências coerentes de raciocínio (que não necessariamente se apresentaram de forma linear); ii) preencher os implícitos do que foi dito; iii) identificar os significados relevantes que foram produzidos; iv) caracterizar os argumentos através de esquemas; v) interpretar tais esquemas.

Assim, o MEA é um modelo teórico para olhar para a linguagem e serve também como uma base metodológica para analisar a produção de significados, ou seja, para interpretar os tipos de argumentos que os alunos usam quando falam sobre taxa de variação, enquanto trabalham em tarefas na sala de aula de Matemática.

2.1.3 Metáforas Conceituais e a Teoria da Cognição Corporificada (*Embodied Cognition*)

Neste tópico, procuramos fundamentar o uso da Teoria da Cognição Corporificada (*Embodied Cognition*) nessa pesquisa, quer seja na elaboração das tarefas oferecidas aos alunos, quer seja na análise das falas desses sujeitos enquanto trabalham nessas tarefas. Vamos também discutir uma articulação entre essa teoria e o MEA e fundamentar nossa consideração da linguagem como reveladora e construtora de *metáforas conceituais*.

Apontamos duas idéias sobre metáforas: uma é a visão da metáfora como um fenômeno léxico que se produz ao nível da palavra, considerada apenas como uma figura de linguagem. A outra, adotada por Lakoff e Johnson (1980), aonde a metáfora conceitual vai além da figura de linguagem.

Segundo Lakoff & Johnson (1980), o sistema conceitual humano se forma, em grande parte, inconscientemente, no sentido de que pensamos e agimos de maneira relativamente automática na maioria dos nossos atos no dia a dia. De acordo com os autores, compreendemos o mundo por meio de mapeamentos metafóricos constituídos com base em nossa experiência sensório-motora, que seguem determinadas linhas de conduta e não são arbitrários.

A busca por essas linhas de condutas, ou seja, os mapeamentos que nos permitem compreender as idéias abstratas e/ou novas em função de outras, levaram esses autores a pesquisar as metáforas que estruturam nossa maneira de perceber, pensar e agir. Quando um sujeito pensa sobre alguma coisa, estabelece um mapeamento cognitivo projetando a estrutura inferencial de um domínio fonte em um domínio alvo. Os autores apontam dois tipos de metáforas conceituais: as básicas e as de ligação. As metáforas básicas são as que estão diretamente relacionadas às experiências físicas, sensório-motoras e os domínios envolvidos são distintos. Por exemplo, conceituamos espaço de tempo em termos de objetos que se movimentam no espaço físico (NÚÑEZ, 2001) e assim podemos falar sem esforço sobre o ontem e o amanhã. As metáforas de ligação envolvem domínios que, a princípio não são distintos como, por exemplo, a Matemática, quando conceituamos números como pontos de uma reta (LAKOFF e NÚÑEZ, 2000 p.53). Os autores observam ainda que as metáforas básicas requerem nenhum ou menos esforço para sua compreensão do que as de ligação, que dependem de mecanismos mais sofisticados.

Esses mapeamentos não devem ser vistos como processos ou algoritmos que tomam entradas no domínio fonte e produzem, mecanicamente, saídas de domínio alvo. Cada mapeamento, por não ser arbitrário, deve ser visto como um padrão fixo de correspondências intradomínios. De acordo com Lakoff (1993), tais mapeamentos são governados pelo que o autor chama de “Princípio da Invariância”: a preservação da estrutura cognitiva do domínio fonte de uma forma consistente com a inerente estrutura do domínio alvo por estes mapeamentos metafóricos. Ou seja, esses mapeamentos preservam as propriedades e configurações do domínio fonte de um modo consistente com a inerente estrutura do domínio alvo. Por exemplo, Lakoff (*ibid*) salienta que categorias são entendidas metaforicamente em termos de regiões limitadas ou ‘containeres’. Desse modo, algo pode estar dentro ou fora de uma categoria; pode ser colocado dentro de ou removido de uma categoria. O que o Princípio da Invariância garante é que para mapeamentos desse tipo, interiores serão mapeados em interiores, exteriores serão mapeados em exteriores; o Princípio da Invariância não é uma limitação desses mapeamentos, ele os organiza e dá suporte de tal modo que nunca interior será mapeado em exterior e nem exterior será mapeado em interior.

Uma interpretação do Princípio da Invariância pode ser de que toda estrutura do domínio fonte é copiada no domínio alvo. Não necessariamente é assim que é feito o mapeamento, porque ainda não sabemos o que exatamente é mapeado por cada indivíduo. O que pode ocorrer é que apenas uma parte da estrutura do domínio fonte seja mapeada na estrutura do domínio alvo e o sujeito continua compreendendo metaforicamente algo em termos de outro (ver BOLITE FRANT, ACEVEDO e FONT, 2005).

Lakoff & Núñez (2000), ao investigar sobre a natureza, origem e significado das idéias matemáticas - mais precisamente na identificação das capacidades cognitivas corporificadas que permitem a uma pessoa ter um entendimento da Matemática avançada – observam que esta estrutura faz uso de aparatos que municiam o pensamento ordinário. Para os autores, a metáfora conceitual é um dos aparatos mais importantes, estando presente em todos os ramos da Matemática para a conceitualização de objetos matemáticos.

Para Lakoff & Núñez (*ibid*), numa abordagem corporificada, qualquer teoria da mente deve levar em conta as particularidades dos cérebros, corpos e o meio ambiente em que eles existem. Os autores, apoiados na crença de que a Matemática possível é aquela baseada e limitada por cérebros e mentes humanas, fazem uma consideração cientifica da sua natureza, pressupondo que a Matemática tal como conhecemos e concebemos faz uso de metáforas conceituais na caracterização de conceitos matemáticos. Sendo a metáfora conceitual limitada às nossas mentes, essa "Matemática humana" (constituída em grande parte de metáforas conceituais) não pode ser uma parte de uma Matemática que está além daquilo que é possível com a experiência.

Quando identificamos quais dos elementos o falante caracteriza como domínio fonte são importantes para fazer as inferências no domínio alvo, estamos caracterizando a inferência estrutural que esse falante está fazendo quando diz o que diz. Por exemplo, ao analisar a expressão *"esse ponto sai daqui e vai para lá"*, a idéia do falante pode ser tal que um ponto (que é uma entidade definida matematicamente como sem dimensão e sem movimento) está se movendo como se fosse um objeto físico que chega em algum lugar. As inferências que ele faz para objetos físicos (domínio fonte) são projetadas para o domínio alvo constituído de pontos (entidades matemáticas).

Sintetizando:

- A mente é corporificada*:* a maneira como nos comportamos no cotidiano e a natureza dinâmica de nossos corpos e cérebros estruturam nossos conceitos e nosso raciocínio, incluindo aí os (conceitos e raciocínios) matemáticos.

- A cognição é na maioria das vezes inconsciente: a maioria de nossos pensamentos cotidianos ocorre de uma forma rápida para acessá-los conscientemente, num sentido que não conseguimos olhar diretamente nossos sistemas conceituais no nível mais baixo de processos de pensamento. Isto inclui a maioria dos pensamentos matemáticos.

- O pensamento é metafórico: na maioria das vezes, nós, seres humanos, conceitualizamos conceitos abstratos em termos de conceitos que nos sejam mais concretos. A organização sistemática de conceitos se dá através de redes de mapeamentos conceituais - em sua maioria, usados inconscientemente e sem esforço na comunicação cotidiana - que, por sua vez, ocorrem em sistemas bem coordenados e combinados de modos complexos (LAKOFF & NÚÑEZ, 2000).

2.1.4 Um mecanismo cognitivo especial para nosso estudo: o movimento fictivo

O movimento fictivo é um mecanismo cognitivo estudado pela primeira vez por Len Talmy (2000) pela análise de expressões lingüísticas do cotidiano, nas quais cenas estáticas são descritas em termos dinâmicos.

Lakoff e Núñez (2000) e Núñez (2004) tratam do movimento fictivo especificamente na Matemática. De acordo com os autores, o que se observa ao falar de determinados objetos matemáticos é que estruturas ligadas a idéias humanas do cotidiano são usadas para falar e criar conceitos matemáticos, empregando uma linguagem dinâmica para descrever propriedades estáticas de entidades estáticas. Ao se falarem, por exemplo, de limite em séries infinitas, de continuidade de funções e de equações de curvas no plano cartesiano, o movimento *"é uma manifestação genuína e constitutiva da natureza das idéias matemáticas"* [8] . Nas definições matemáticas, no entanto, *"esse movimento não é capturado por formalismos e sistemas axiomáticos"* (NÚÑEZ, 2004, p.61 – 62).

Chamamos a atenção de que em sala de aula, não se trata de estar certo ou errado valorizar o formalismo em detrimento da intuição, mas sim que é impossível, ao considerar a seqüência infinita ($2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6,...$), pensar em seus termos sem automaticamente pensar no movimento de adicionar "mais um termo", "mais outro termo", e assim por diante à mesma. No entanto, se olharmos a mesma seqüência escrita como $S_n = 2^{n+1}, \forall n \in \mathrm{N}$, este movimento desaparece. As duas representam a mesma seqüência, mas são compreendidas por mecanismos cognitivos distintos: na primeira vamos adicionando mais um termo, mais outro termo e assim por diante; na segunda substituímos *n* por um número natural qualquer.

Lakoff e Núñez (2000, p.37, 38) apresentam o esquema "fonte-caminho-alvo" constituído por um esquema conceitual que inclui uma fonte, um caminho a percorrer e um alvo que pode ou não ser alcançado. Consideram-no o esquema relacionado com o movimento e que possui as seguintes funções:

- Um 'trajector'[9] - um objeto que se move ;
- Uma localização inicial fonte;
- Um alvo - é o destino do trajector;
- Uma rota da fonte para o alvo - caminho 1;
- A trajetória atual do movimento - caminho 2;
- A posição do trajector num dado momento;
- A direção do trajector naquele momento;

---

[8] Grifo nosso.
[9] Mantido no original em inglês usado por Lakoff & Núñez (2000); Núñez (2004).

- A localização final e atual do trajector, que pode ou não ser o destino intencionado.

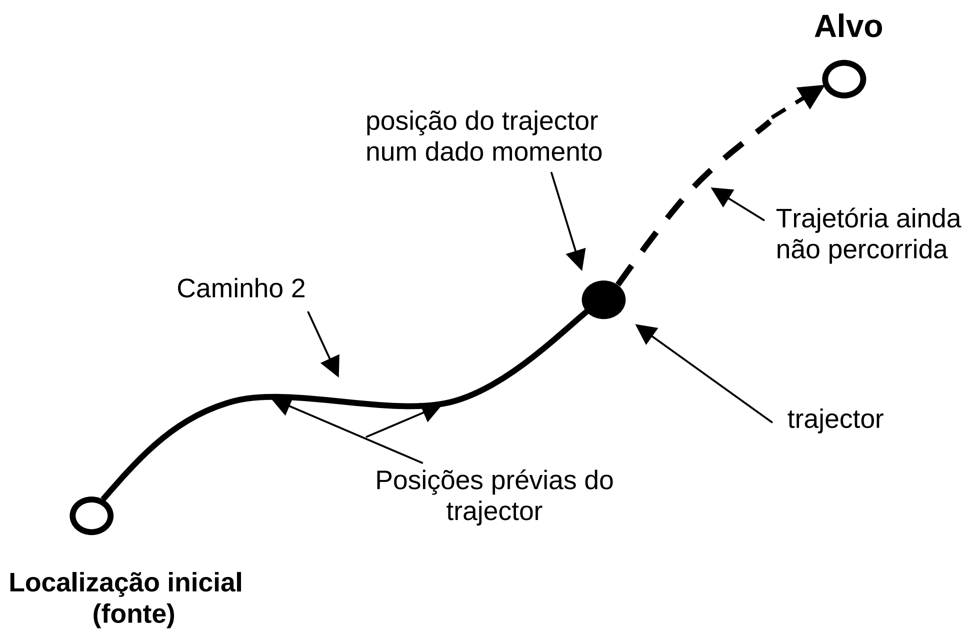


Figura 2.1 – esquema "fonte - caminho - alvo" (Lakoff & Núñez, 2000, p. 38)

Por exemplo, quando dizemos que um "ponto P do plano cartesiano se movimenta de A até B", estamos atribuindo movimento a um ente matemático - um ponto do plano cartesiano - que tem apenas localização. Observemos que pontos do plano cartesiano não existem no mundo real - são entidades metafóricas - e, portanto, não tem a capacidade de se colocar em movimento no sentido literal. Literalmente falando, ponto A e ponto B são localizações distintas e nenhum ponto pode mudar de localização sem mudar sua identidade (suas coordenadas). O ponto P (nesse exemplo, entendido como o trajector), caracterizado por suas coordenadas, não pode manter sua identidade ao se movimentar de A até B, já que mudam suas coordenadas (NÚÑEZ, 2004).

Nesse sentido, uma linguagem dinâmica é empregada para descrever propriedades estáticas de entidades estáticas, e o mecanismo cognitivo que nos permite conceber entidades estáticas em termos dinâmicos é chamado de movimento fictivo. Como outro exemplo, destacamos que uma reta pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos P(x,y) do plano cartesiano que satisfazem a uma equação do tipo $y = ax + b$, com $a \text{ e } b \in \Re$ e, ao mesmo tempo pode ser concebida como um trajector metaforicamente traçando a linha reta no plano cartesiano, o que descreve o lugar geométrico dos pontos dessa reta. Observe que este esquema é intrínseco ao pensamento matemático, ou seja, é impossível não usá-lo para pensar nestas entidades.

De acordo com Talmy (2000), o movimento fictivo é um tipo especial de movimento que é expresso lingüisticamente e percebido visualmente - como, por exemplo, em sentenças do tipo: *"a cerca vai do planalto até o vale"*; *"o precipício dá de frente a ilha"* - ou seja, o movimento fictivo trata de dois sistemas cognitivos específicos: a linguagem e a percepção visual.

Talmy (*ibid*) usa o termo *factive* para indicar uma avaliação cognitiva de maior veracidade (veridicality, no original em inglês). Não é usado para sugerir que uma representação no sistema conceitual de algum objeto é, em algum sentido, objetivamente real. Se esta fosse a intenção de uso do termo, seria preferível usar o termo factual, ou seja, alguma coisa que é objetivamente real. O termo *fictivo* é usado para fazer referência à capacidade imaginária da cognição. Não é usado para sugerir que uma representação cognitiva de um objeto é alguma coisa objetivamente irreal. Se esta fosse a intenção de referência do termo, seria preferível usar o termo ficção.

Segundo o autor, o padrão geral de fictividade na linguagem é exibido no caso onde as representações discrepantes são, por um lado, as crenças do falante ou ouvinte sobre a real natureza do referente de uma sentença e, por outro, a referência das formas lingüísticas que formam a sentença. Aqui, a representação literal é avaliada como menos verídica que a representação baseada na crença. Conseqüentemente, a representação literal é chamada fictiva, enquanto que a representação baseada na crença é factiva. Em geral o movimento fictivo atribui movimento a um referente que normalmente acreditamos ser estacionário. Por exemplo, na sentença "esta cerca vai da planície até o vale", presumimos, pelas nossas crenças gerais, que a cerca é estacionária, enquanto que o significado literal da sentença mostra a cerca em movimento.

Na visão, o padrão geral de fictividade está relacionado à sensação provocada pelas representações discrepantes que um sujeito tem de uma cena ao ver esta cena, no sentido desta cena ser mais ou menos concreta ou mais ou menos palpável. A representação visual mais palpável é a que é vista pelo sujeito, e a representação visual menos palpável é que é sentida pelo sujeito. Sendo assim, no caso do movimento fictivo, a representação visual menos palpável é a de movimento, enquanto que a representação palpável é, em geral, a estática.

Assim, numa correspondência entre o domínio lingüístico e o domínio visual, podemos estabelecer uma relação conforme o exemplo:

ESTA CERCA VAI DA PLANÍCIE ATÉ O VALE O referente aqui é a cerca	
FACTIVO	FICTIVO
A CRENÇA é de que a cerca está estacionária	O significado literal da sentença (o verbo ir) ATRIBUI MOVIMENTO à cerca.
O sujeito está VENDO que a cerca está parada, estacionária.	O sujeito SENTE que A CERCA SE ESTENDE da planície até o vale

2.1.5 Justificando o emprego e articulando as teorias mencionadas

Considerando que nossa pesquisa se insere num espectro de compreender melhor os argumentos utilizados pelos estudantes enquanto envolvidos em atividades relacionadas à idéia de taxa de variação - idéia esta que pode ser vista como uma matematização do conceito ordinário de mudanças ou de variações - levar em conta a Teoria da Cognição Corporificada quer dizer que estamos com o foco na identificação e análise das metáforas conceituais utilizadas e elaboradas por estes estudantes enquanto falam sobre taxa de variação/derivada num ponto.

Queremos que os alunos falem e, ao falarem, vão argumentar. Para argumentar, o aluno faz uso da linguagem. A linguagem, por sua vez, permite identificar quais são as metáforas conceituais (mapeamentos) que estruturam a maneira de pensar desse estudante pois, ao falar metáforas como figura de linguagem, o sujeito faz uso de mecanismos cognitivos - mapeamentos que preservam inferências de um domínio fonte em um domínio alvo. Ou seja, metáfora como figura de linguagem é também conceitual, porque quando fazemos um mapeamento para dizer uma coisa em termos de outra, o que fazemos, inconscientemente, são metáforas conceituais. Queremos olhar que tipo de inferências e de onde vêm essas inferências que o aluno faz. Como estamos olhando para o entendimento, forçando o aluno a argumentar, para entender melhor esse argumento, levantamos e analisamos as metáforas conceituais.

O que é feito inconscientemente está ligado aos implícitos, àquilo que é pensado ou falado sem haver necessidade de justificar, ou seja, o implícito inclui aquilo que não é dito, mas que se leva em conta quando se desenvolve uma linha argumentativa/de raciocínio. Iremos buscar na fala do sujeito esses implícitos, investigando os argumentos utilizados por ele, que são metafóricos, pois quando o sujeito fala, ele diz e usa metáforas.

Desse modo, quando o sujeito argumenta, ele está também raciocinando e não apenas se comunicando. É nesse sentido que a linguagem é construtora e reveladora de metáforas conceituais. Se quem argumenta, raciocina e queremos compreender os processos argumentativos do estudante sobre taxa de variação/derivada num ponto, devemos levar em conta as metáforas que são uma forma de argumentar. Assim, a linguagem é o ponto em comum entre o MEA e a Teoria da Cognição Corporificada e é também através da linguagem que se produz significado para um objeto.

As duas teorias se complementam no sentido de que usamos o MEA para levantar a argumentação desse sujeito e a análise desses argumentos nos permite levantar as metáforas conceituais que ele está fazendo.

2.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

2.2.1 Sujeitos e Local da Pesquisa

Em análise baseada na Teoria da Atividade de Leontiev (1981), Even & Schwarz (2003) apontam que professores e estudantes podem participar de uma mesma tarefa mas com intenções distintas, onde motivos, metas, convicções e normas relativas à Matemática escolar os guiam de modos diferentes. Os modos de participação dos estudantes numa tarefa proposta pelo professor podem ser diferentes daqueles que o professor deseja. Ou seja, a natureza da atividade na qual professor e estudantes participam de uma dada tarefa podem ser distintos. Os autores analisam uma situação de sala de aula na qual o professor oferece aos estudantes uma tarefa com a intenção de que eles entendam o conteúdo ali envolvido, mas os alunos agiram de uma forma tal que suas intenções eram de sobreviver ao curso.

Esse foi um ponto que nos chamou a atenção quanto à escolha dos sujeitos da pesquisa. São alunos de um curso de Pós-Graduação em Educação Matemática de uma universidade particular na região metropolitana de São Paulo, que cursam a disciplina Tópicos de Cálculo e ali estão por uma escolha pessoal de desenvolvimento profissional, o que nos leva a crer que suas intenções quanto ao estudo de conceitos dessa disciplina estão próximas às nossas. Entendemos que eles estão num curso desses pois querem aprender para ensinar melhor e nós também, ou seja, queremos entender como é que eles aprendem.

Também levamos em conta, para escolher esse grupo, que eles já estavam acostumados com uma prática pedagógica que privilegia a fala dos estudantes, ou seja, a professora da disciplina já vinha, desde o início do curso trabalhando com o oferecimento de tarefas que forçam os sujeitos a falarem sobre um determinado conceito do Cálculo. O emprego dessa prática em sala de aula é em parte facilitado pois, por serem todos professores de Matemática ou futuros professores de Matemática, já cursaram Cálculo Diferencial e Integral na graduação, já tem uma reflexão sobre o Cálculo escolar e nós vamos estar discutindo como eles falam sobre taxa de variação.

Um aspecto que deve ser ressaltado quanto a nossa atividade é que ela é composta da elaboração das tarefas e também de possíveis intervenções que fizermos durante a resolução das tarefas pelos alunos. Como queremos que eles falem, prevemos intervenções - quando se fizer necessário - que, no nosso caso, é de fazer questões abertas, no sentido de que os estudantes desenvolvam argumentações que explicitem seus modos de raciocínio. Isso é facilitado especificamente nesse grupo de alunos pois, conforme mencionado, já vinham trabalhando com a professora que adota essa prática. Essas intervenções possibilitam ampliar nosso entendimento do modo como os sujeitos compreendem um objeto matemático em sala de aula.

2.2.2 Coleta de dados

Nessa investigação, de caráter qualitativo, interessamo-nos pelas falas sobre taxa de variação do grupo de alunos acima descrito. Tais falas correspondem àquelas que pudermos ter videogravadas e anotadas num diário de apontamentos.

Privilegiamos situações em que houver controvérsias, aquelas em que um sujeito está falando de um modo e por algum motivo - que pode ser porque quer convencer alguém, que pode ser ele próprio - começa a falar de outro. É nos momentos de controvérsias que emergem mais argumentações e colocamos nosso olhar nessas falas para entender como é que eles argumentam sobre taxa de variação.

Para que os sujeitos falem sobre esse assunto, criamos situações argumentativas com o oferecimento de tarefas que forcem a fala deles sobre taxa de variação. Tendo oferecido essas tarefas, os alunos delas se apropriam e nelas começam a trabalhar. Uma ação fundamental desses estudantes é argumentar, que entendemos como a negociação de significados: um sujeito fala de um modo e outro fala de outro modo e, assim, irão negociar de maneira que possam compartilhar a forma como falam sobre aquilo que estão falando, ou seja, que os significados aí produzidos possam ser compartilhados.

As tarefas foram criadas com o motivo de forçar os alunos a falarem e argumentarem sobre vários aspectos da taxa de variação, o que é conseguido ora oferecendo uma tarefa para que eles falem sobre uma simulação, ora oferecendo uma tarefa em que eles interagem com o computador, ora com tarefas que exigem o uso do corpo para fazer medições de espaço e de tempo, por exemplo. No próximo capítulo apresentamos as tarefas que foram oferecidas e aprofundamos uma discussão sobre elas.

A técnica empregada na construção e coleta de dados dessa pesquisa consiste no que Bogdan & Bilken (1991) chamam de observação participante. Neste tipo de observação, o pesquisador participa das atividades do local onde ocorre o estudo, de maneira que ele possa desenvolver uma relação com os sujeitos pesquisados tal que o coloque numa posição que o permita futuramente recolher mais dados como, por exemplo, se entrevistas posteriores se fizerem necessárias, o que ocorreu nessa pesquisa. Segundo os autores, no início, o pesquisador costuma ficar “um pouco de fora” para que os sujeitos o observem e o aceitem e, na medida em que as relações se desenvolvem e conforme a necessidade de se obter dados, a participação do pesquisador vai se tornando mais ou menos intensa.

Nesse estudo, o pesquisador foi apresentado ao grupo pela professora da disciplina e freqüentou algumas aulas como observador. Mais tarde coletou dados através de filmagens e apontamentos por escrito das atividades dos alunos/professores. A intenção de freqüentar algumas aulas anteriores àquelas em que se desenvolve o estudo efetivamente, era de obter aceitação pelo grupo. No entanto, esse grupo já estava acostumado com a presença de um pesquisador[10] e de câmeras de vídeo em sala de aula. Em virtude disso, não tivemos problemas quanto ao processo de “convencimento” junto aos sujeitos para que pudesse coletar os dados através de filmagens e apontamentos por escrito.

[10] Como esta pesquisa faz parte de um projeto maior intitulado “Cálculo: cognição Corporificada, Linguagem, Tecnologia e Matemática”, esse grupo já havia participado de etapas anteriores do projeto maior.

Quando passamos a efetivamente desenvolver a pesquisa com esse grupo, foi dado, num primeiro momento, um panorama geral do estudo, qual o objetivo da pesquisa e a metodologia que seria empregada para a coleta de dados e aplicação das tarefas. Os alunos concordaram, assinaram um termo de compromisso (ANEXO 2) e assim se tornaram os sujeitos dessa pesquisa.

Explicamos que as tarefas foram elaboradas de maneira que os sujeitos compartilhassem e defendessem seus pontos de vista através de suas falas e, em virtude disso, pedimos que os sujeitos formem grupos de três ou quatro integrantes, já que baseamo-nos na crença de que a formação de pequenos grupos contribui para o diálogo entre os participantes. Deixamos por conta dos alunos a formação desses grupos. Ressaltemos que, por ser um grupo de estudantes já acostumados com a presença, na sala de aula, de pesquisadores, filmadoras e com uma prática pedagógica de trabalho em pequenos grupos em tarefas organizadas pelo professor e/ou pesquisador, não houve nenhum tipo de resistência por parte deles na formação desses grupos - o que, por sinal, já eram grupos anteriormente constituídos para outras aulas.

Formados os grupos pequenos, procedemos então à distribuição de uma ficha para cada grupo contendo a tarefa com as questões, fazemos algum comentário, quando necessário sobre a tarefa, e iniciamos as filmagens.

As filmagens foram feitas utilizando uma filmadora VHS e um tripé posicionado de maneira que, inicialmente, pudesse enquadrar os quatro integrantes de um grupo que foi escolhido por ter a característica de não se intimidar diante de uma câmera de vídeo. Esse grupo foi escolhido na fase em que o pesquisador estava observando as aulas. Como as filmagens ocorreram na sala de aula, no mesmo momento em que os demais alunos da turma trabalhavam em grupos de três ou quatro nas mesmas tarefas oferecidas ao grupo que estava sendo filmado, constatamos que o ruído da sala interferiu na gravação do áudio. Na medida do possível, o pesquisador fazia apontamentos por escrito em um diário de classe de algumas falas e/ou intervenções dos alunos e do professor que julgava interessante para enriquecer a coleta de dados.

Tendo os grupos terminado a resolução da tarefa proposta, convidamos algum voluntário (que pode ser um integrante do grupo que foi filmado, ou não) para ir à lousa apresentar e defender suas soluções para a classe toda. A professora procurava, nesse momento, estabelecer uma plenária em que são provocadas intervenções e discussões com toda a classe sobre as tarefas propostas e legitimar algum conceito. Nessas plenárias, que também foram filmadas com a câmera ora focando a lousa, ora focando um sujeito ou grupo falante, a professora procurou explicitar os diferentes modos de pensar que iam aparecendo ao longo do debate.

Observemos que, de modo geral, a prática pedagógica empregada nessas aulas em que coletamos os dados para essa pesquisa é bem diferente de uma aula expositiva – prática na qual a maioria dos sujeitos estava acostumada anteriormente ao curso de pós-graduação, segundo o testemunho deles. Destacamos também que esses alunos já estavam acostumados, nas aulas de Tópicos de Cálculo, com uma prática pedagógica na qual resolvem tarefas propostas e se estabelece uma plenária em que o professor aparece como um provocador de debates com o grupo. Se assim não fosse, isto implicaria numa renegociação da relação professor-aluno, ou seja, das regras e convenções que funcionam como se fossem cláusulas de um contrato. Essas cláusulas, que estabelecem as bases das relações que os professores e alunos mantém com o saber, constituem o que Brousseau (1986) chama de contrato didático.

Optamos por utilizar vídeo, pois esta técnica registra comportamentos e interações entre os sujeitos pesquisados que poderiam passar desapercebidos se fôssemos registrar e descrever de outra forma (POWELL, FRANCISCO & MAHER, 2004). O acesso aos dados é facilitado, podemos assistir várias vezes ao vídeo e favorece a análise dos gestos faciais e corporais. Quantas vezes mais assistimos ao vídeo, é possível extrair mais dados do mesmo e conforme vamos acumulando dados e relacionando-os, por vezes sentimos a necessidade de rever trechos específicos e a partir daí confirmar ou não alguma hipótese que levantamos, assim como obter alguma nova informação que tenha passado desapercebida em vistas anteriores do filme.

No próximo capítulo apresentamos e discutimos em detalhes as tarefas que elaboramos e que analisamos, o modo como cada uma delas foi oferecida aos sujeitos pesquisados, assim como tecemos comentários sobre a tarefa que utilizamos para efeitos de um estudo piloto.

2.2.3 Análises

Inicialmente assistimos ao vídeo sem fazer nenhuma anotação. Ao final desta primeira vista do vídeo, foram feitos alguns apontamentos de algumas falas e/ou sobre alguns conteúdos matemáticos que apareceram enquanto os alunos trabalhavam nas tarefas propostas e que nos chamaram a atenção, tais como reta secante, derivada, limite, reta secante se aproximando de reta tangente, de um ponto que se move em direção a outro ponto. A “estória” do vídeo, em linhas gerais, gira em torno dessas falas e desses conteúdos.

Para um primeiro refinamento de análise, partimos para assistir ao vídeo mais uma vez, agora munidos de um caderno de apontamentos, em que foram feitas algumas anotações no sentido de dar, em linhas gerais, uma descrição do que acontece em determinadas partes do filme. Essas descrições foram feitas em intervalos de tempo, já que o aparelho de vídeo cassete mostra , em seu display digital, o tempo de exibição decorrido. Esses intervalos de tempo corresponderam ao que chamamos de “blocos” da aula – cada bloco consiste de alguma atividade dos alunos que nos chamou a atenção nesse primeiro refinamento de análise – blocos esses que, individualmente podem ter alguma interferência/implicação ou não em outros blocos e serem levados em conta na análise ou não. Em cada bloco foram destacados alguns termos e frases que foram ditas e que nos chamaram a atenção.

Posteriormente, em outra vista do vídeo, a transcrição das falas foi feita em blocos. Isto quer dizer que não foram transcritas todas as falas ditas e registradas, fizemos a transcrição daquelas falas que julgamos nos interessar, julgamento esse feito quando criamos os blocos.

Como a análise foi feita com base na transcrição das falas dos participantes e como compactuamos de um termo de compromisso ético, conforme se apresenta no ANEXO 2, os alunos foram identificados com nomes fictícios para preservar a identidade de cada um. A identificação da professora e do pesquisador foi feita por PROF e PES.

Ao longo da transcrição, foram feitos alguns registros adicionais com o intuito de melhor caracterizar o ambiente em que as falas acontecem e adotamos um padrão conforme segue:

- Falas aparecem em *itálico*.
- Descrições e/ou comentários nossos aparecem entre colchetes [ ] em fonte normal.

A análise das falas apóia-se no referencial teórico que adotamos e no nosso objeto de estudo, que é a produção de significados para a taxa de variação. Embora a câmera esteja registrando a atividade de um grupo de 4 pessoas, enquanto trabalham nas tarefas oferecidas, a professora, o pesquisador e outros alunos vão aparecer na medida em que eles vão interagir com esse grupo. Desta forma, procuramos atentar a termos, frases, palavras, expressões e tudo o mais que julgamos que os participantes usaram e que está ligado ao objeto de estudo. Para sinalizar isso, fizemos uma codificação, (valorizando não só a fala, mas também o vídeo) com termos simples do que está acontecendo em cada bloco. Por exemplo, quando codificamos "relação de derivada com crescimento e decrescimento" isso quer dizer que naquele bloco está sendo tratado e/ou acontecendo algo relacionado a isso.

Essa codificação aparece, juntamente com a contagem de tempo, numa coluna à esquerda da coluna que contém a transcrição das falas e outros registros de cada bloco. Achamos conveniente colocar essa codificação juntamente com o tempo pois, caso fosse necessário rever o vídeo correspondente a algum bloco (o que aconteceu por diversas vezes, para nos certificarmos de alguma inferência nossa e/ou esclarecer alguma dúvida sobre falas, gestos, etc), tal vídeo seria mais facilmente acessado pela marcação de tempo do aparelho reprodutor de vídeo.

Elaboramos então um documento com 3 colunas: na coluna da esquerda foi feita a codificação (em manuscrito), registramos o intervalo de tempo e o número do bloco; na coluna central está a transcrição das falas e outros registros nossos, tais como descrições e comentários gerais do que acontece no bloco (digitados com o computador); na coluna da direita fazíamos apontamentos em manuscrito com uma breve descrição daquilo que interpretamos como sendo as atividades dos alunos e/ou algum registro adicional que pudesse ajudar na identificação de algum episódio. Esses apontamentos podiam ou não ser levados em conta na análise final. Um exemplo de um desses documentos aparece no ANEXO 1.

Com esse material em mãos e com o vídeo à disposição, caso fosse necessário rever alguma passagem para esclarecimentos gerais (o que se deu), passamos a fazer uma análise levantando alguns possíveis episódios e dando nomes a esses episódios. Conforme previsto, pois nossa análise está sendo feita com base no MEA - que envolve o engendrar de argumentos durante um episódio - percebemos que um determinado bloco tinha relação com outros de uma forma não linear, ou seja, um determinado episódio pode se estender por vários blocos e num determinado bloco pode estar inserido vários episódios.

No capítulo 4 apresentamos as análises e os episódios que foram considerados nessa pesquisa.

CAPÍTULO 3

TAREFAS ANALISADAS

Este capítulo trata das tarefas analisadas que elaboramos e oferecemos aos participantes da pesquisa. Um estudo preliminar (ou piloto) foi realizado junto a uma turma anterior[11] a qual efetivamos nosso estudo. Apresentamos aqui esse estudo preliminar, detalhando o cenário em que ele ocorreu e apontamos o que pudemos aprender com o estudo piloto, no sentido de fazer ajustes e elaborar as tarefas efetivas para a nossa investigação.

3.1 Um panorama geral sobre as tarefas

De modo amplo, as tarefas se constituem de questões tradicionais do ensino porque esse é o tipo de questão que os alunos, em geral, encontram nos livros didáticos e nas salas de aula de Cálculo. O diferencial das tarefas que ora apresentamos está em usá-las de modo que os alunos tenham que falar sobre os objetos matemáticos que estão constituindo enquanto nelas trabalham. Ao invés de fazer uma pergunta direta ou fechada, o que provavelmente nos daria uma resposta direta, optamos por fazer perguntas abertas. O que queremos é ouvir o discurso dos alunos, porque é assim, segundo as teorias que aqui empregamos, que conseguimos identificar os significados que estão atribuindo aos objetos matemáticos que estão constituindo e falando sobre. Conforme já mencionado,

[11] na mesma disciplina e no mesmo curso de pós-graduação.

nossa intenção é entender o que é que o aluno está querendo dizer quando diz alguma coisa sobre taxa de variação.

Ressaltemos que a atividade do pesquisador e da professora não ficou restrita à elaboração das questões que constituíram as tarefas. Havia um acordo de como seriam suas atuações em sala da aula, ou seja, o interesse comum residia em saber o que é que emerge dos encontros programados para a investigação sobre taxa de variação. Como estaríamos observando, circulando pela sala e fazendo anotações, também seria nosso papel, quando julgássemos necessário, fazer algumas intervenções. Essas intervenções ocorreriam no sentido de forçar os estudantes a detalharem o diálogo, as argumentações que explicitassem seus modos de raciocínio.

As aulas se desenvolviam em três momentos: No momento inicial era explicitada a tarefa a ser realizada; a seguir os alunos se dividiam em pequenos grupos de no máximo 4 integrantes onde se sentiam à vontade, mesmo os mais tímidos, para colocarem e discutirem suas idéias; a professora neste momento percorria os grupos. No terceiro momento, a sala toda era requisitada para uma discussão sobre o trabalho realizado, que podia ser disparada pela professora ou por um aluno que ia à lousa mostrar o que seu grupo havia discutido.

O cenário tanto no estudo piloto como na investigação efetiva se constituiu das tarefas propostas, alunos e professora discutindo essas tarefas ora num ambiente informatizado e ora num ambiente sem o auxílio da informática. Colocamos desde já que esses ambientes são complementares, não que um seja melhor que o outro. Conforme será detalhado mais adiante, a ação dos participantes para trabalhar com as tarefas no ambiente informatizado é na tela, e no ambiente não informatizado é com objetos e instrumentos de medição do mundo físico.

Nesse sentido, a ação no ambiente informatizado é de um tipo e no ambiente não informatizado é de outro tipo. São ações diferentes e vamos estar olhando as ações se complementado, vamos estar ouvindo os tipos de argumentos que são usados e que emergem nesses ambientes. Certamente quando o sujeito estiver num ambiente ele vai estar se apropriando de coisas que ele falou no outro ambiente – aqui está a complementaridade dos ambientes nesse cenário. Entendemos que não existe um ambiente que sozinho possibilita aos alunos pensarem em diferentes aspectos sobre um objeto matemático e é por isso que consideramos esse cenário constituído de ambientes diversificados.

3.2 O Estudo Piloto

No 1º semestre de 2003 (aproximadamente um ano antes do estudo efetivo), realizamos um estudo piloto junto a uma turma de dez alunos/professores do curso de pós-graduação em Educação Matemática, na disciplina Tópicos de Cálculo com a mesma professora e na mesma instituição de ensino em que foram aplicadas as tarefas efetivas.

Os alunos eram incentivados pela professora a trazer livros e qualquer outro material de consulta para usar no trabalho com as tarefas, que eram inicialmente resolvidas em duplas, cada dupla trabalhando num computador e depois iam à lousa para falar sobre suas respostas. Enquanto trabalhavam no computador duas câmeras de vídeo VHS foram colocadas de frente para duas duplas, uma câmera para cada dupla, de maneira a registrar as expressões e falas dos participantes em detrimento da expressão da tela do computador, que era anotada por nós em nossas observações.

Quando algum aluno da turma ia à lousa (que não necessariamente era um dos integrantes de alguma dupla que estava sendo filmada) para falar sobre suas respostas, uma das câmeras registrava as falas desse(s) sujeito(s) e a outra ficava desligada. A professora e o pesquisador tomavam notas num diário de anotações de classe e faziam intervenções quando julgavam necessárias.

Esse estudo piloto nos deu subsídios para fazer ajustes nas tarefas que estavam sendo elaboradas para a próxima turma, de modo a atender ao nosso objetivo. Também serviu como uma forma de aprendizado de manipulação e posicionamento de câmeras de vídeo para registrar gestos, expressões faciais e falas dos participantes.

Foram oferecidas duas tarefas-piloto como parte de duas das aulas de três horas cada, em que estava programado o estudo de derivada de funções de uma variável real, no laboratório de informática – entendido como sala de aula.

Na primeira tarefa, oferecemos uma simulação no computador onde uma reta tangente no ponto P era a posição limite de retas secantes que passavam por Q e P. Abaixo reproduzimos a ficha que foi distribuída a cada dupla da turma e em seguida, uma seqüência de slides daquilo que aparece na tela do computador.

Assista à simulação “Using the Secant to find the slope of the tangent” quantas vezes quiser (basta apertar o play).

Sua tarefa aqui é ver o que ocorre e comentar.
- O que está acontecendo?
- Que conteúdos estão sendo tratados? Justifique.
- Faça outros comentários que quiser.

Ficha da tarefa 1 do estudo piloto (ficha EP)

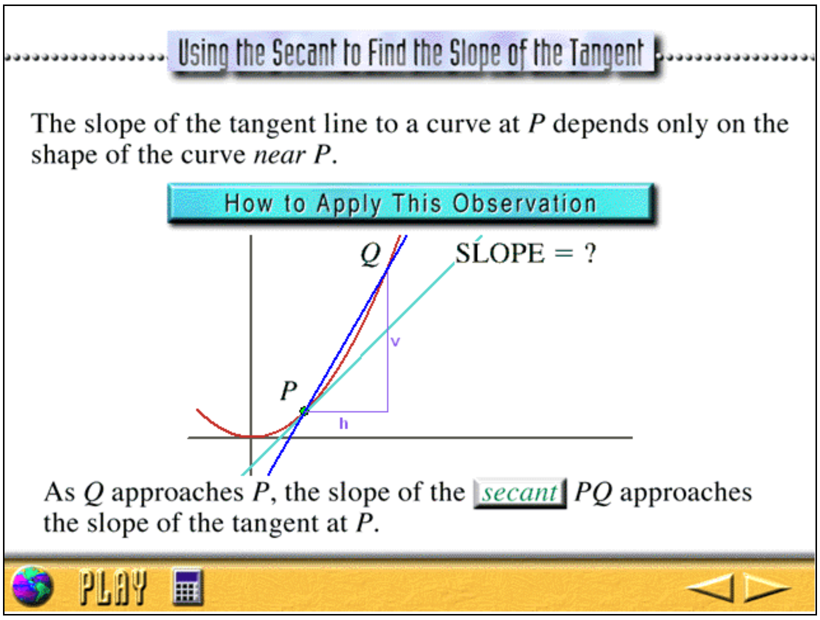


Figura 3.1 – tela inicial da simulação da ficha EP

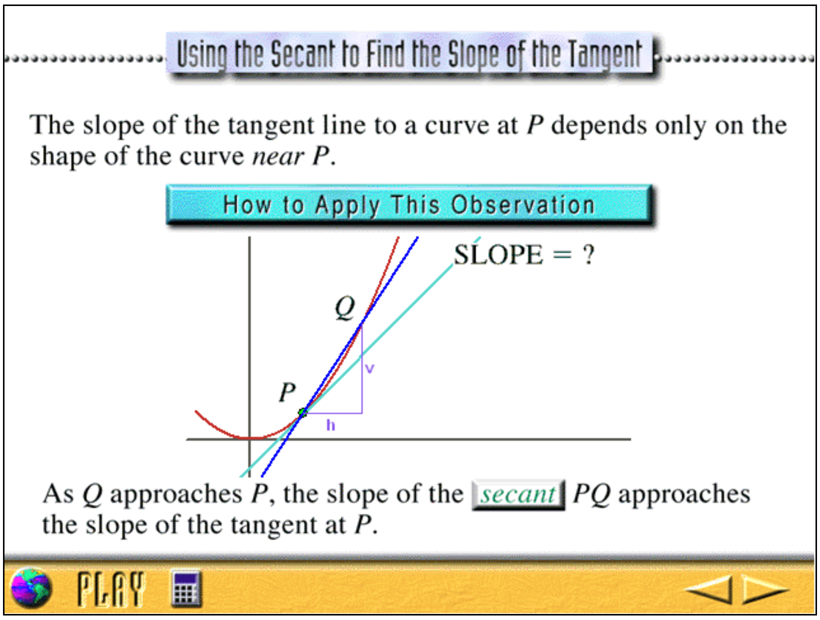


Figura 3.2 – tela intermediária da simulação da ficha EP

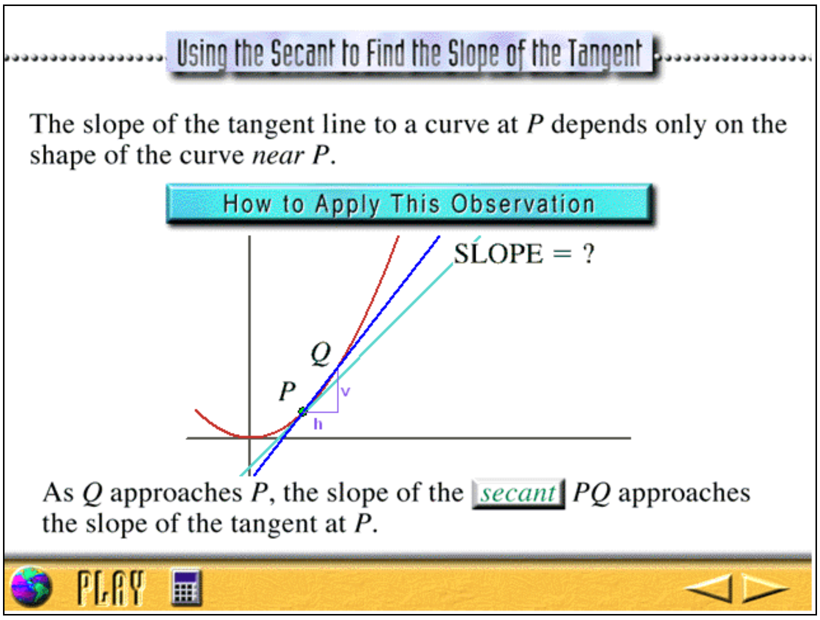


Figura 3.3 – outra tela intermediária da simulação da ficha EP

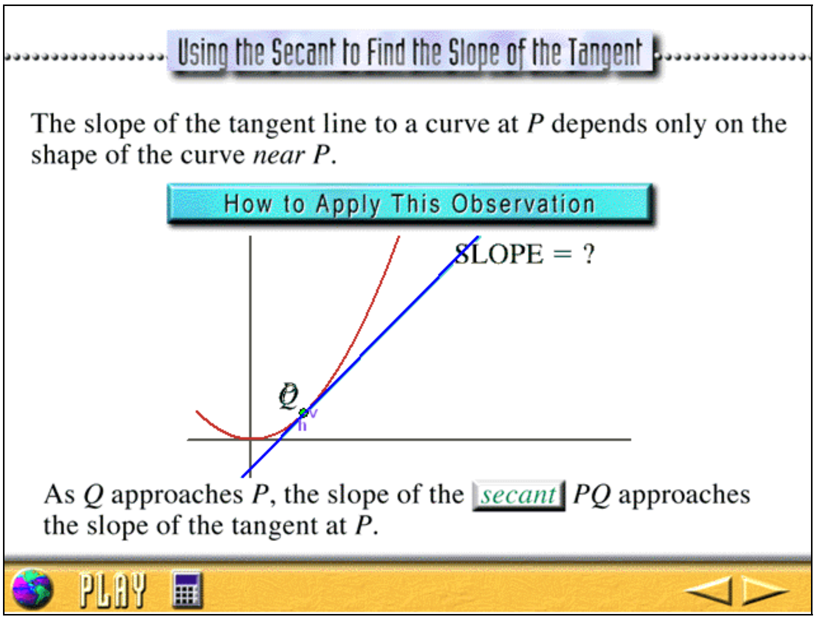


Figura 3.4 – tela final da simulação da Ficha EP

Propusemos ao grupo falar sobre essa simulação, pois é prática habitual nas aulas de Cálculo e na maioria dos livros de Cálculo Diferencial e Integral, definir a taxa de variação de uma função y=f(x) em relação a x num ponto x_0 de seu domínio (a taxa instantânea de variação de f em x_0) como sendo o limite de taxas médias de variação e pondo: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. É comum fazer uma interpretação geométrica dessa definição, apresentando uma figura conforme a apresentada a seguir (figura 3.5) e explanando que o quociente $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ é a taxa média de variação dessa função no intervalo $[x_0, x_0+\Delta x]$ e que pode ser entendido/interpretado como sendo o coeficiente angular da reta secante à curva y=f(x) pelos pontos P e Q.

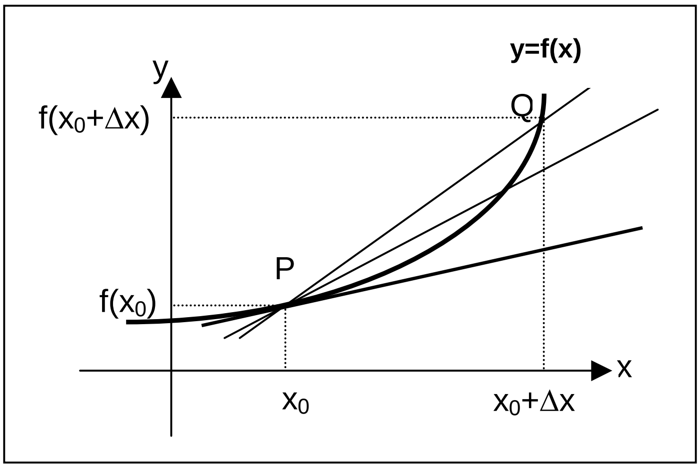


Figura 3.5 – Interpretação Geométrica de $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Em geral, a discussão apresentada nesses livros e nas aulas está na direção de tornar preciso que a reta tangente à curva y=f(x) por $P=(x_0 , f(x_0))$ é a posição limite de retas secantes por esse ponto P - que “as retas secantes se movimentam em direção à reta tangente” - e que o coeficiente angular dessa reta tangente é obtido pelo limite posto para definir a taxa instantânea de variação de f em x_0. Sendo assim, a taxa instantânea de variação de f em x_0 tem o mesmo valor e/ou pode ser interpretado como o coeficiente angular da reta tangente pelo ponto da curva que tem essa abscissa x_0. Assinalamos que esse limite traz em seu bojo uma idéia de movimento quando se põe $\Delta x \to 0$ e que a interpretação geométrica desse limite – e portanto dessa idéia de movimento – é feita usando um recurso estático como o da figura 3.5. Estes dois mecanismos cognitivos são distintos, como vimos na fundamentação teórica.

A visão aqui adotada com relação à tecnologia informática é como uma prótese (BOLITE FRANT, 2003), no sentido de que o aluno poderia fazer coisas diferentes do que fazia apenas com o livro ou a lousa.

Notamos que, enquanto trabalhavam nessa tarefa, os alunos clicavam no botão “play” e observavam o movimento sem ler o que estava escrito em inglês. Poderíamos pensar que isso ocorreu por não saber inglês, mas lembremos que, como alunos de pós-graduação, teriam alguma familiaridade e/ou poderiam tirar dúvidas da língua com a professora e o pesquisador. Entretanto, concordamos com Lins (1994) que afirma que em geral os estudantes não lêem os enunciados. Entendemos que quando um aluno / leitor / ouvinte se apropria de um texto, produz seus próprios significados para o mesmo e nem sempre é o mesmo do professor / autor.

Neste caso, o enunciado era “Usando a Secante para Encontrar a Inclinação da Tangente” e o que os participantes diziam era que “o ponto Q se move para P”, “que este é um jeito de ensinar o conceito de derivada” e outras afirmações que faziam parte de seus repertórios sobre derivada, independente do que estava acontecendo na tela - atitude também esperada pois estávamos num curso de Tópicos de Cálculo, na unidade derivada. A afirmação que nos chamou a atenção foi a de que “o ponto Q se move para o ponto P”, pois foi dita várias vezes pela maioria dos participantes.

Esta simulação permite que a idéia da secante se aproximar da tangente seja experienciada com “Q se move para P”. Segundo Talmy (2000), Lakoff e Núñez (2000) trata-se de um exemplo do movimento fictivo. Os gestos dos participantes, enquanto falavam sobre a simulação, eram bastante icônicos e sugeriam que dois pontos distintos do plano cartesiano poderiam ser o mesmo ponto.

Para entender melhor o que os estudantes entendiam sobre o “o ponto Q se move para o ponto P”, fomos na aula da semana seguinte para o laboratório com uma nova tarefa. Pedimos para os estudantes usarem recursos do Graphmatica[12] para fazer uma simulação como aquela vista na aula anterior.

Essa tarefa com o Graphmatica visava forçar os alunos a falarem de um modo diferente sobre “Q se movimenta até P”, pois estamos agora utilizando outro texto, outro programa de computador. Surgiu o argumento de que um ponto pode mudar sua posição e ainda ser o mesmo ponto; os alunos não levaram em consideração que o ponto Q assumia diferentes posições. Para fazer com que a reta secante se aproxime da reta tangente, as duplas se preocuparam, inicialmente apenas com o coeficiente angular da reta secante e nada falaram

[12] Programa “freeware” que plota gráficos cartesianos de funções, calcula valores de funções, exibe tabelas, desenha retas tangente, desenha e calcula derivadas, etc.

sobre o coeficiente linear. Diziam que *“a tangente toca num ponto só e por isso sabendo este ponto* [o ponto de tangência] *basta descobrir a inclinação”*.

Estamos entendendo que ao fazerem essa afirmação, fazem inferências sobre reta tangente a partir do domínio da geometria plana. O aluno infere que a reta tangente tem comum à curva um só ponto (que *“a reta tangente toca num ponto só...”*) no domínio da representação de gráfica de funções, a partir das relações e propriedades sobre a tangente na geometria plana. Cabe observar ainda que, de modo geral, nos livros-texto encontramos apenas a representação gráfica da função de segundo grau e a reta tangente a um ponto desta curva, ou quando por ventura a reta tangente toca em mais pontos, na representação temos um segmento de reta, pequeno o suficiente, que não toca em mais de um ponto.

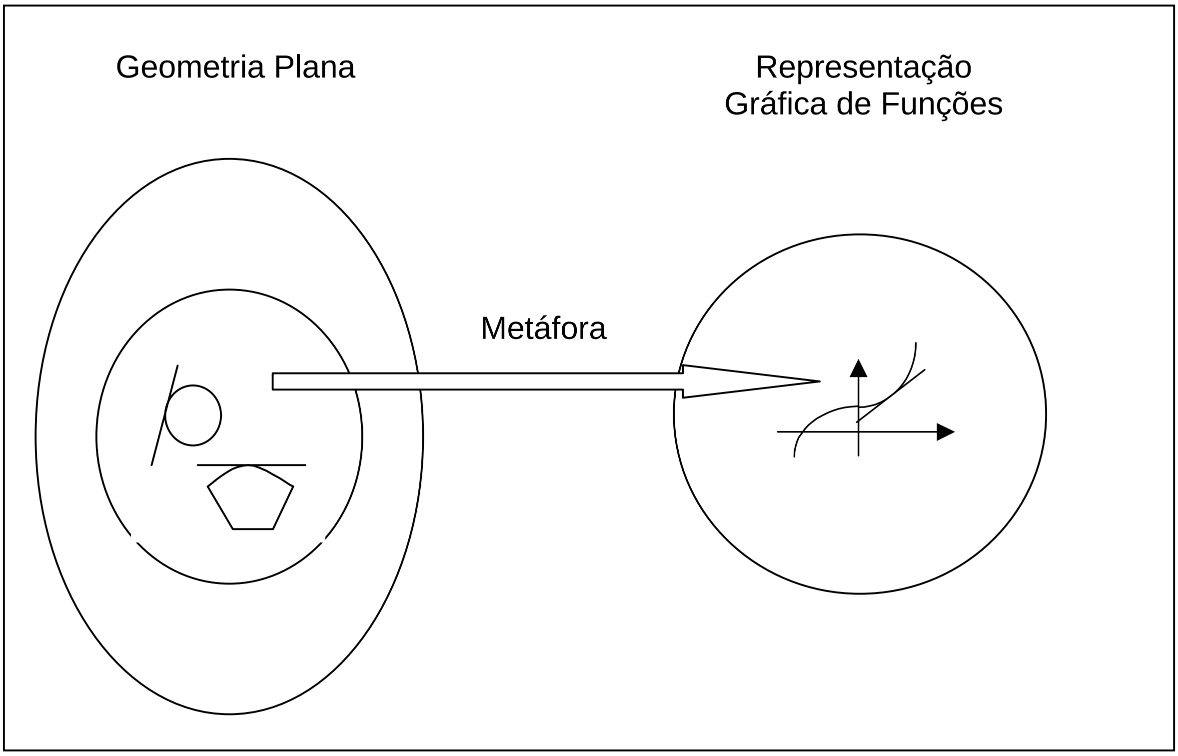


Figura 3.6 - Metáfora de Ligação

Por isso, para esses alunos era suficiente descobrir a inclinação da reta tangente, e não consideraram o coeficiente linear, assim não obtiveram uma simulação satisfatória. Começaram a discutir porque aquilo estava acontecendo, como resolver o impasse, e voltaram a observar a simulação da aula anterior.

Algumas colocações novas surgiram: disseram que para cada posição de Q teriam uma abscissa e uma coordenada diferente, por isso já não seria o mesmo Q e *"se Q estiver na secante vamos precisar saber do coeficiente linear também"*, *"na verdade temos vários Q"*.

Esta prótese, o Graphmatica, apresentou um novo texto e contexto aos alunos. E essa possibilidade de pensar sobre a simulação da tarefa anterior nesse novo contexto permitiu aos alunos agora enxergar algo novo - ou pelo menos diferente daquilo que foi visto na primeira vez - pois tinham aprendido "sobre o que e como olhar" para refazer uma simulação. Esquematicamente, a nossa análise sobre o estudo piloto é apontada conforme segue:

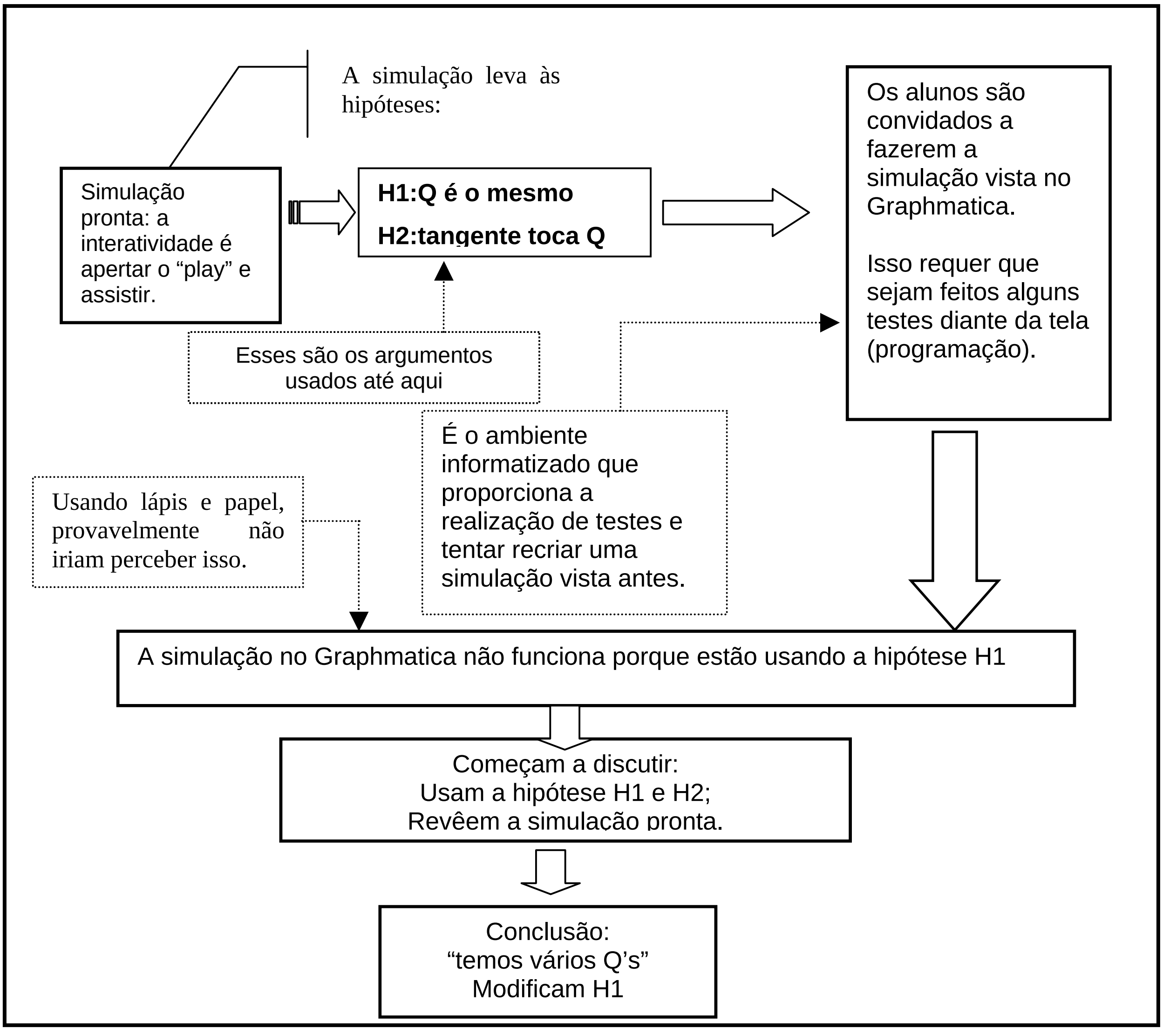


Figura 3.7 – um esquema argumentativo do estudo piloto

3.3 Um pouco mais sobre nosso aprendizado com o Estudo Piloto

Tendo realizado o estudo piloto e feito um esboço de análise, isso nos remeteu a adotar o pressuposto de que o uso de informática na aula de Cálculo como uma ferramenta que auxilia na visualização é bastante simplista para nos auxiliar na compreensão de processos cognitivos envolvidos na aprendizagem matemática. Os participantes precisaram retomar a primeira tarefa depois que ocorreram aprendizagens ou produções de conhecimento na segunda tarefa para que pudessem “aprender a enxergar”.

No estudo piloto os alunos foram agrupados em duplas e após a análise, nos pareceu que se o grupo fosse maior, teríamos maior riqueza de falas, discussões e argumentos. Por isso, no estudo efetivo, pedimos para os alunos formarem grupos de 4 integrantes. Também para o vídeo, optamos por filmar um grupo de 4 integrantes, escolhido por sua heterogeneidade e descontração com a presença de uma câmera de vídeo.

A posição da câmera foi mantida, ou seja, de frente para os integrantes do grupo, pois dessa forma os gestos e expressões faciais são captados com maior riqueza de detalhes.

Propor o uso do Graphmatica para discutir o “movimento do ponto Q em direção ao ponto P” se mostrou um tanto quanto trabalhoso, pois a professora foi solicitada para ajudar os alunos a trabalhar com a sintaxe desse programa. Como nossa intenção no estudo efetivo era de apresentar a mesma simulação da primeira tarefa piloto e estávamos supondo que a fala “Q se move para P” iria a aparecer, o que de fato se deu, optamos por oferecer um outro programa, um applet - como será visto mais adiante - que fosse mais fácil para o aluno interagir.

3.4 As tarefas do estudo efetivo

As três tarefas do estudo efetivo foram oferecidas em três aulas de três horas cada, em três semanas consecutivas. As duas primeiras aulas ocorreram no laboratório de informática e a terceira numa sala de aula tradicional.

Da mesma forma que no estudo piloto, os participantes traziam livros e qualquer material que podiam consultar para resolver as tarefas propostas, cada grupo trabalhando num computador (tarefas 1 e 2) e depois iam à lousa para falar sobre suas respostas (nas três aulas).

Enquanto trabalhavam no computador, nas duas primeiras tarefas, posicionamos uma câmera de frente ao grupo escolhido para ser filmado, de maneira a registrar as expressões e falas dos participantes em detrimento daquilo que aparece na tela do computador. Quando algum aluno da turma ia à lousa (que não necessariamente era um dos integrantes do grupo que estava sendo filmado) para falar sobre suas respostas, a câmera passava a registrar as falas, gestos e eventuais apontamentos e/ou marcações desse aluno na lousa. Como feito no estudo piloto, a professora e o pesquisador tomavam notas num diário de anotações de classe e faziam intervenções quando julgavam necessárias.

3.4.1 Tarefa 1: Reta Secante vira Reta Tangente

Nossa intenção era oferecer a mesma simulação que a da tarefa piloto, e estávamos supondo que a fala “Q se move para P” iria aparecer. Como o uso do Graphmatica foi trabalhoso, oferecemos um outro programa que também simula retas secantes se aproximando de uma reta tangente. Usamos duas possibilidades do programa, uma cuja interação era clicar o botão play e outra onde o usuário interage mais, uma vez que é possível escolher cinco curvas diferentes e marcar dois pontos P e Q sobre a curva escolhida, a partir dos quais fica definida uma reta secante por P e Q e a reta tangente à curva pelo ponto P. Com o programa na tela, explicamos as possibilidades de interação com o programa e distribuímos uma ficha para cada grupo, que já estava acomodado diante de um computador.

Na parte a) dessa ficha foi utilizado o programa “Tools For Enriching Calculus” e na parte b) o programa “Journey Through Calculus”, ambos de autoria de James Stewart e parcerias. Os CD’s destes programas foram doados para o pesquisador pela editora do livro do autor, com direito de uso em sala de aula. Embora o livro esteja em português, o programa vem em inglês. O programa da parte b) é o mesmo que aquele usado no estudo piloto e uma seqüência de alguns slides que aparece na tela do computador foi reproduzida anteriormente, conforme as figuras 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4.

TAREFA 1

a) Vocês têm, sob seus comandos, a possibilidade de marcar dois pontos quaisquer sobre o gráfico de uma função quadrática (e de outras funções também, basta selecionar o tipo de função na caixa “Function”), e também de controlar passo a passo os ‘frames’ na tela, clicando no botão “step”, se achar conveniente.

Veja o que ocorre e comente.

- O que está acontecendo?
- Que conteúdos estão sendo tratados? Justifique.
- Faça outros comentários que quiser.

b) Assista à simulação “Using the Secant to find the slope of the tangent” quantas vezes quiser (basta apertar o play).

Sua tarefa aqui é ver o que ocorre e comentar.

- O que está acontecendo?
- Que conteúdos estão sendo tratados? Justifique.
- Faça outros comentários que quiser.

c) Existe alguma relação entre o item a) e o item b)? Caso positivo, qual? Caso negativo, justifique.

Abaixo reproduzimos a tela inicial do programa.

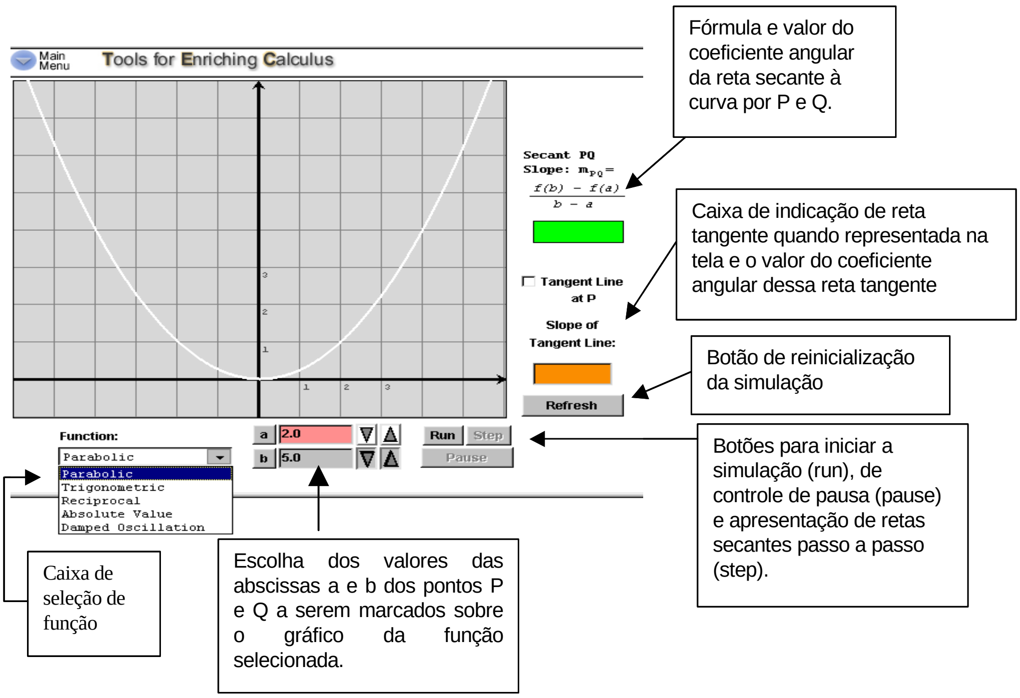


Figura 3.8 - descrição da “tela default” do programa usado na parte a) da tarefa 1

As 4 figuras a seguir mostram a tela inicial de cada uma das outras funções que podem ser escolhidas pelo usuário do software.

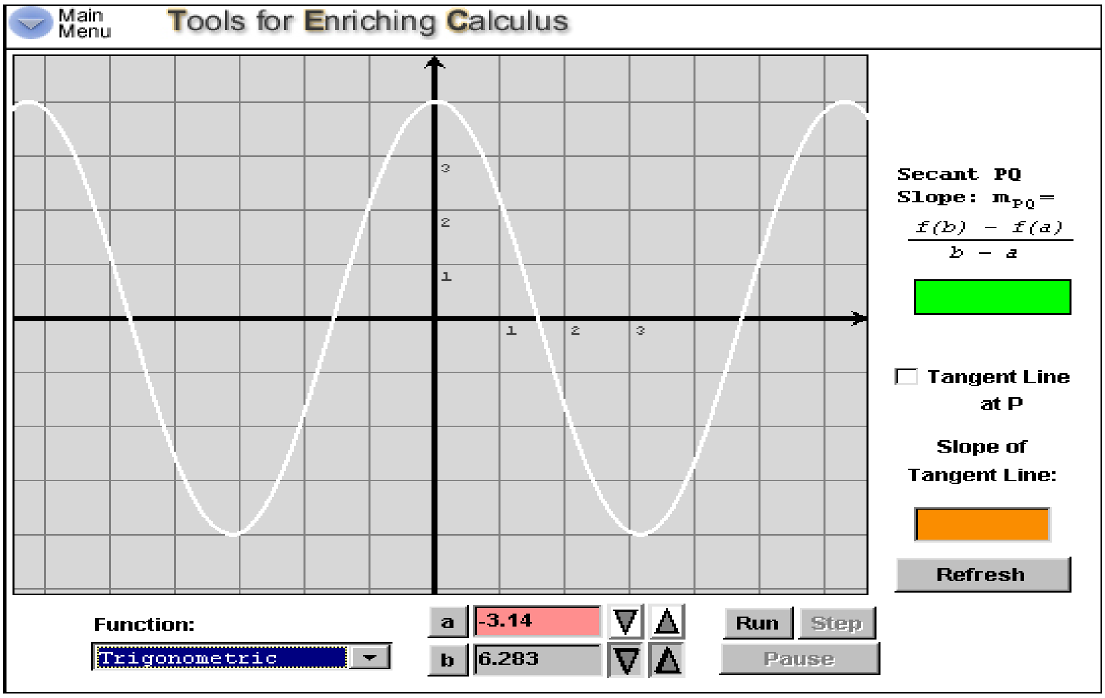


Figura 3.9 – tela inicial do software da parte a da ficha 1 com a seleção de uma função trigonométrica ("trigonometric").

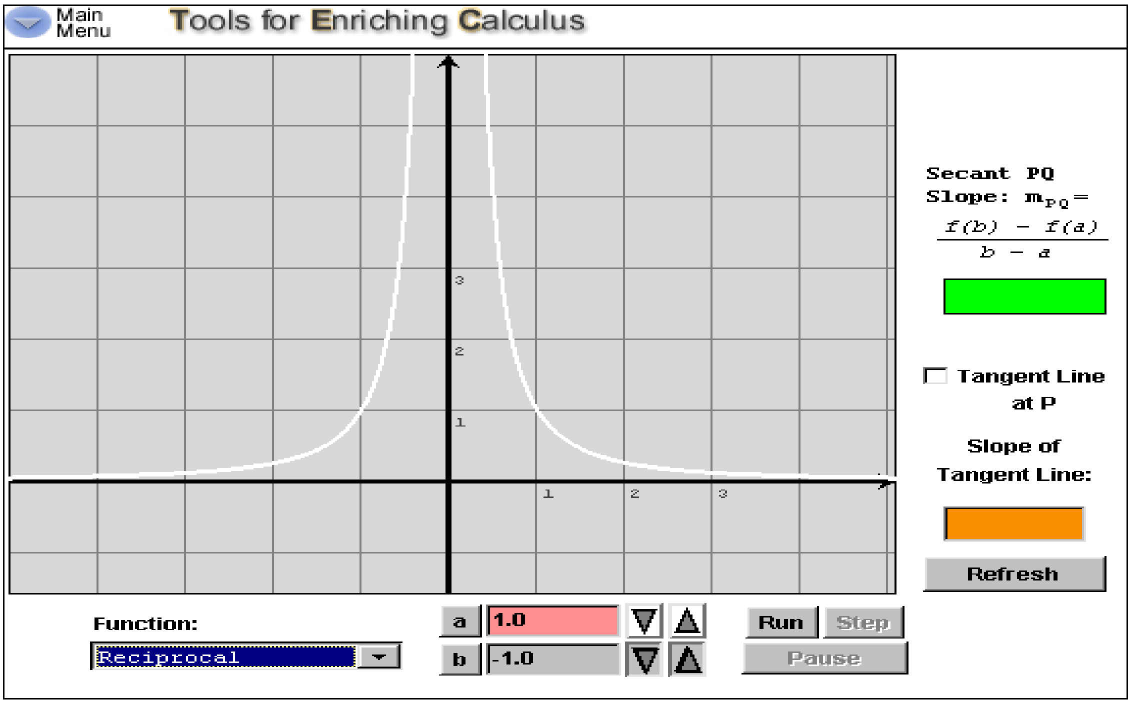


Figura 3.10 – tela inicial do software da parte a da ficha 1 com a seleção de uma função reciprocal.

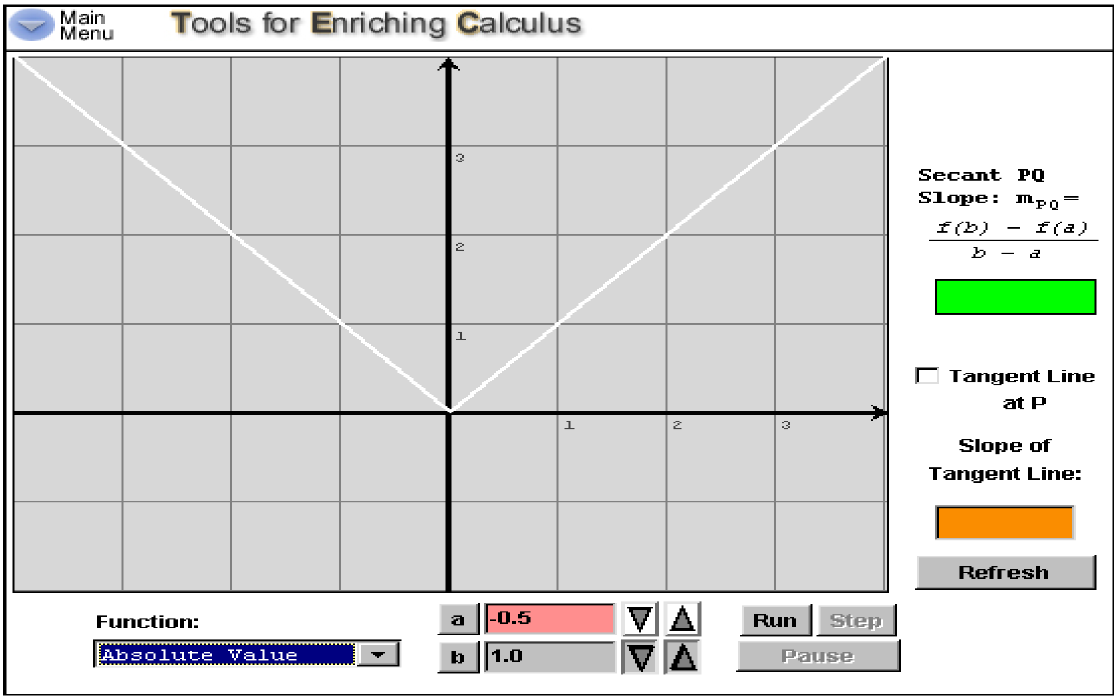


Figura 3.11 – tela inicial do software da parte a da ficha 1 com a seleção de uma função valor absoluto ("absolute value").

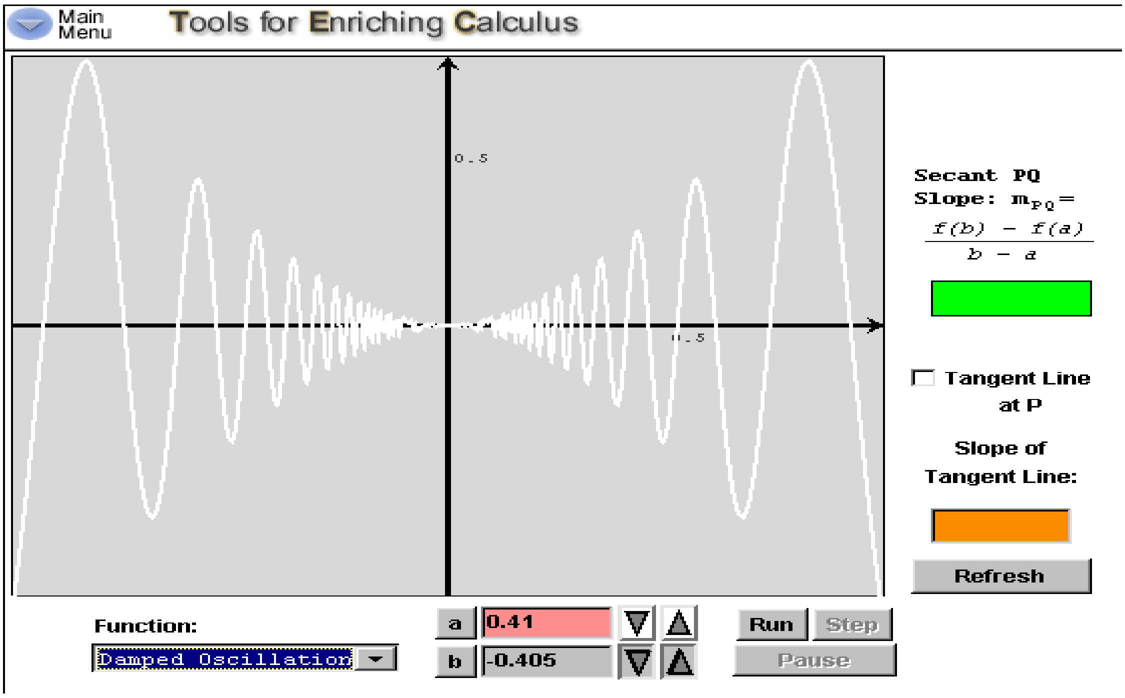


Figura 3.12 – tela inicial do software da parte a da ficha 1 com a seleção da função "damped oscillation".

A título de ilustração, apresentamos a seguir uma seqüência de slides daquilo que aparece na tela do computador, tendo escolhido a função quadrática, com abscissa do ponto P igual a 2 e abscissa do ponto Q igual a –4.

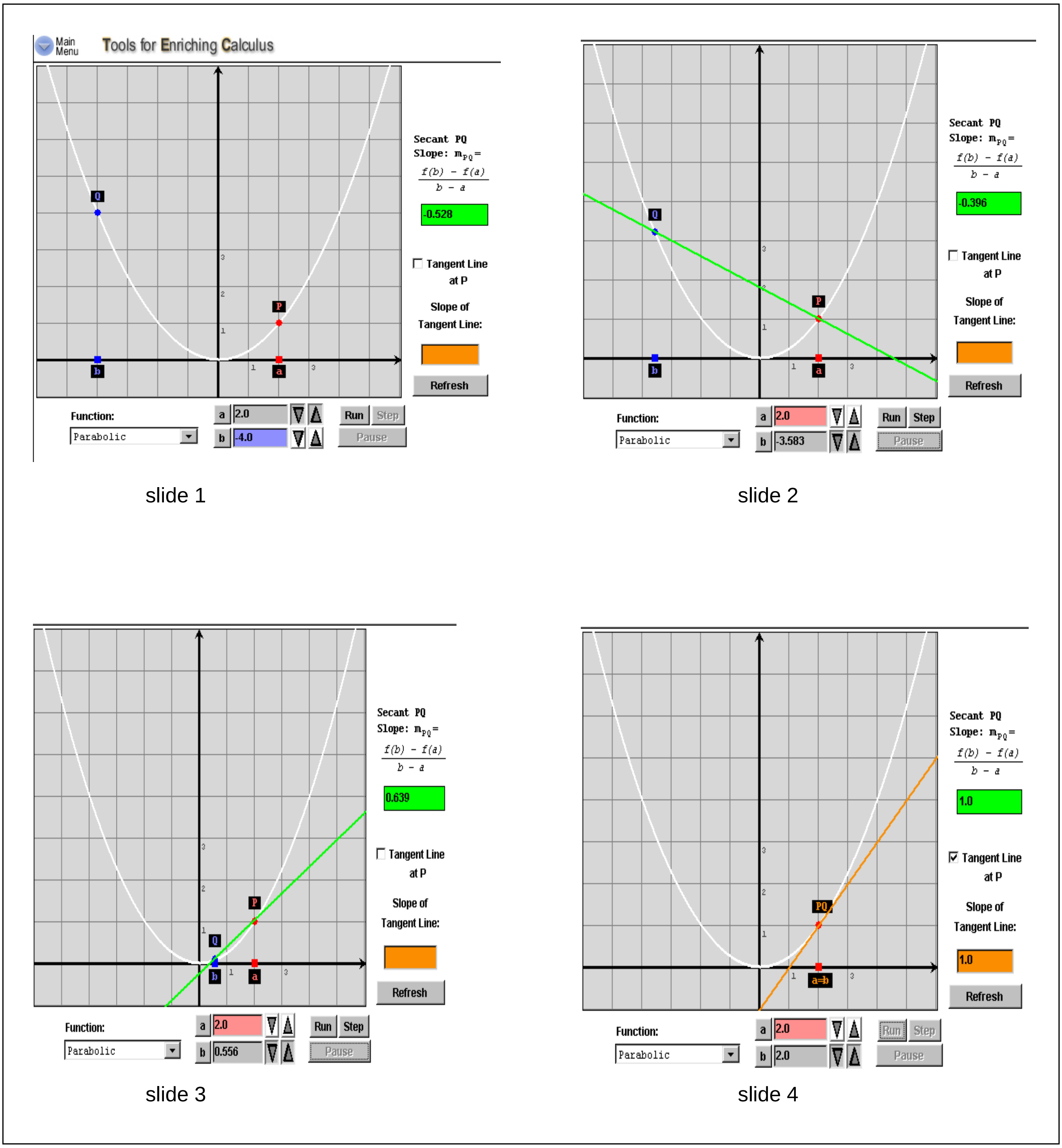


Figura 3.13 – seqüência de slides de reta secante se aproximando de reta tangente na função parabólica.

A figura seguinte é uma seqüência de slides daquilo que aparece na tela do computador tendo escolhido a função hiperbólica, com abscissa do ponto P igual a 1 e abscissa do ponto Q igual a –1.

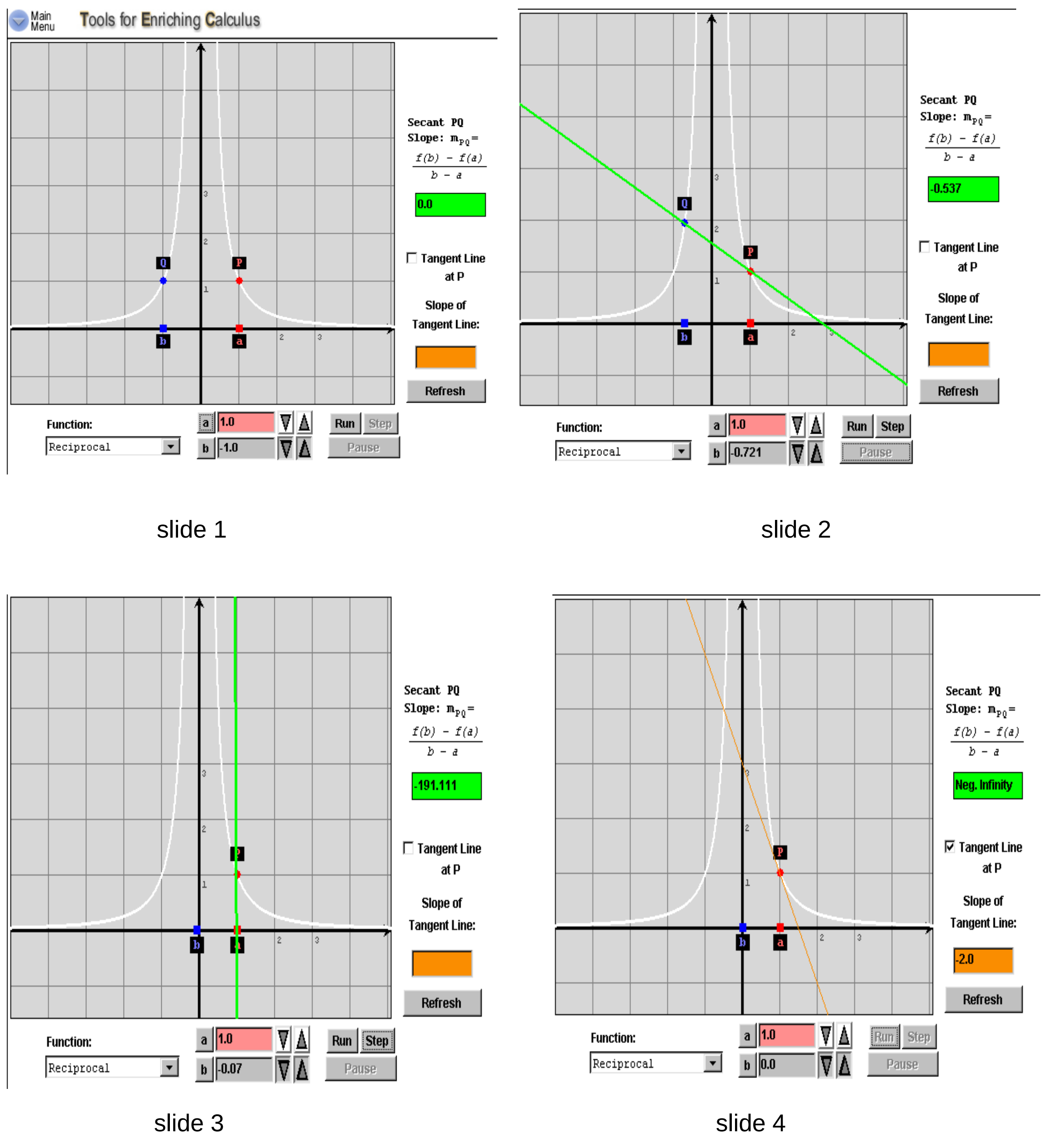


Figura 3.14 – seqüência de slides de reta secante se aproximando de reta tangente numa função hiperbólica.

Quando perguntamos que conteúdos estão sendo tratados e pedimos para que seja dada uma justificativa para a enunciação de tais conteúdos, nossa intenção é de levantar como e quais conteúdos matemáticos os estudantes evocam quando vêem essa simulação, assim como identificar possíveis relações estabelecidas pelos sujeitos entre esses conteúdos. É por isso também que deixamos os alunos à vontade para fazerem outros comentários que julgarem pertinentes, colocando a frase “faça outros comentários que quiser”.

A parte b) dessa tarefa é a mesma do estudo piloto e foi colocada com a intenção de se verificar se outras falas diferentes daquelas ditas com a simulação do item a) apareceriam. Observemos que nessa simulação não é possível a escolha da curva nem a marcação de pontos na curva; o aspecto visual do plano cartesiano em que a curva está representada é diferente, assim como a apresentação no plano de fundo é outra: não aparecem valores numéricos e nem fórmulas algébricas como no item a).

Aqui nosso foco estava em verificar até que ponto a tecnologia informática dá conta para que o aluno enxergue o conteúdo matemático que é apresentado na tela do computador e até que ponto é o repertório matemático do aluno que dá suporte para enxergar e falar sobre aquilo que está vendo.

Com essa tarefa, estamos olhando para a derivada de função de uma variável real num ponto (o ponto P, no caso das simulações) e, no estudo piloto, os participantes disseram que a simulação vista “é um modo de ensinar derivada”. Também levamos em conta que, assim como no estudo piloto, os participantes do estudo efetivo são todos professores de Matemática que já haviam estudado derivada na graduação e nossa pesquisa estava sendo feita nas aulas reservadas para o estudo do tópico derivada. Com base nessas especificidades, propusemos a tarefa 2, que descrevemos a seguir.

3.4.2 Tarefa 2: Variação de Variação

Na aula anterior, os alunos estavam interagindo com o computador, só que, embora eles pudessem escolher diferentes funções, não tinham a possibilidade de interagir com uma função “criada” por eles próprios.

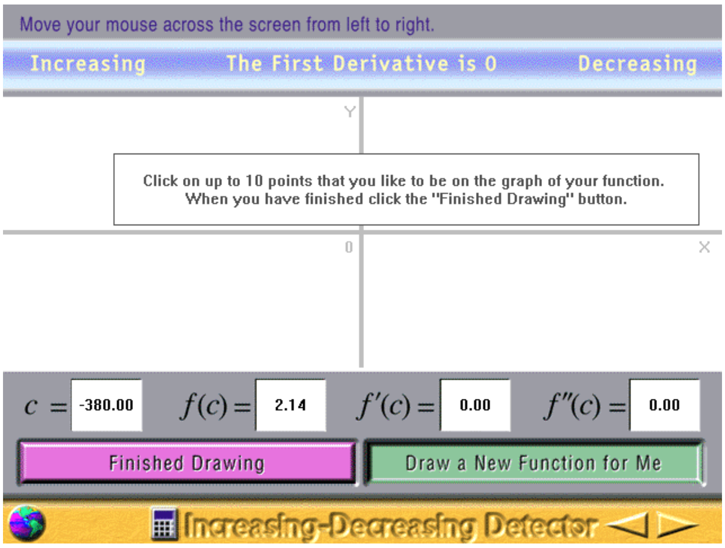
A tarefa 2 se deu no laboratório de informática durante o segundo encontro, oportunidade em que propusemos a utilização de outro módulo do software "Journey Through Calculus", no qual o estudante pode marcar até dez pontos num plano cartesiano e o programa desenha uma curva que passa por estes pontos. Também é possível que o usuário "solicite" o desenho de curvas aleatórias de funções.

Distribuímos a seguinte ficha para cada grupo e explicamos o funcionamento do programa.

<u>TAREFA 2</u>

Agora você tem à sua disposição um programa que permite a criação de funções a partir da marcação de até 10 pontos no plano cartesiano ou, se você preferir, pode "pedir" para o computador desenhar funções. Feito isto, você pode interagir de modo que o mouse percorra os pontos da função e observar a reta tangente ao gráfico desta função em cada ponto (cujas coordenadas são indicadas). Além disso, o programa mostra a derivada da função em cada ponto em que o mouse estiver posicionado.

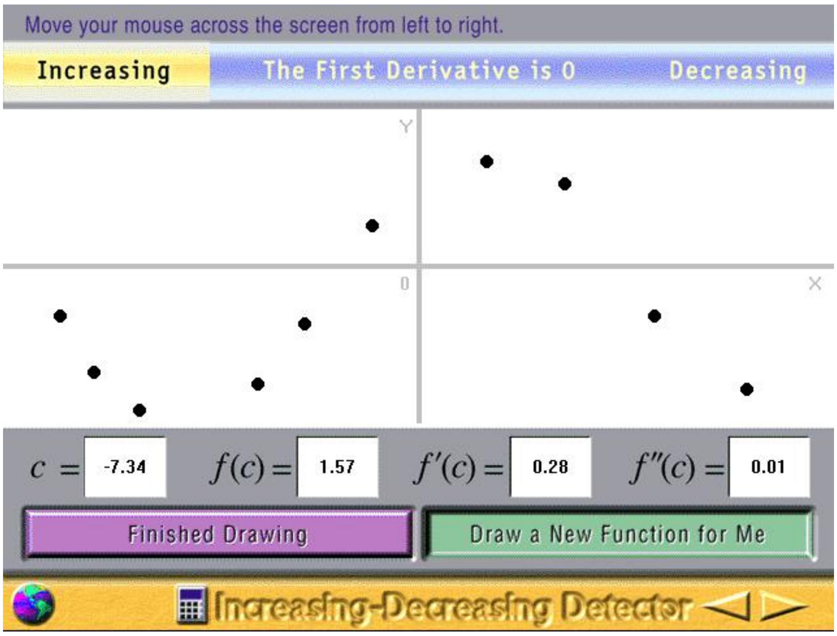
Faça testes, construa funções, interaja e diga, justificando, se existe alguma relação entre a inclinação da reta tangente e a derivada da função em cada ponto.



Nesta tela inicial, o programa aguarda que o usuário posicione o mouse num ponto do plano cartesiano e dê um clique. Assim é possível marcar até dez pontos nesse plano cartesiano. Para finalizar essa marcação, deve ser clicado o botão "Finished Drawing".

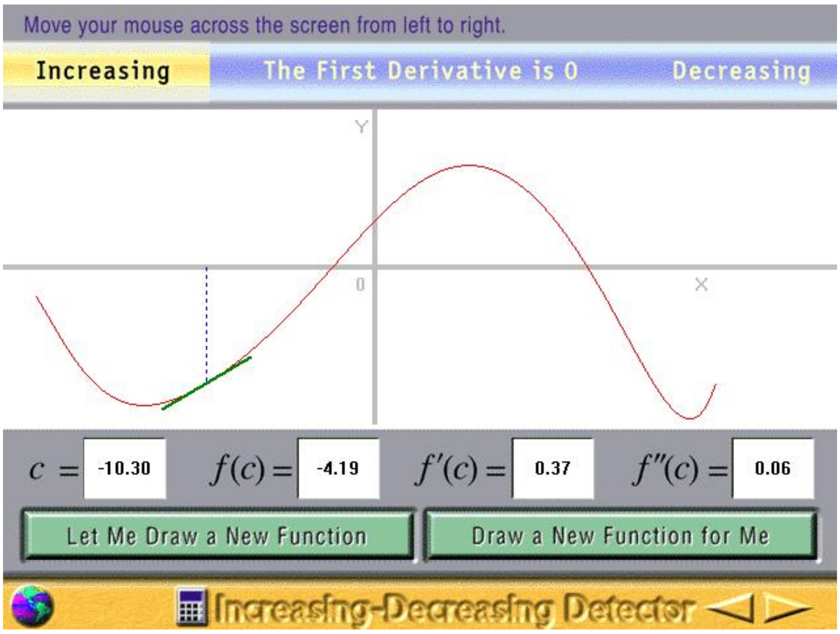
Para que o programa desenhe uma curva, o usuário deve clicar no botão "Draw a New Function for Me".

Figura 3.15 – tela inicial do programa usado na tarefa 2



Nesta tela foram marcados 10 pontos conforme procedimento mencionado acima.

Figura 3.16 – tela do programa da tarefa 2 com pontos marcados



Nesta tela, o botão “Finished Drawing” já foi clicado pelo usuário e o programa desenhou a curva sobre os pontos marcados. Aqui o mouse está posicionado no ponto (-10,3 ; -4,19) e o programa “acende” a caixa *Increasing*, sinalizando que no ponto c=-10,3 a função é crescente. Também é mostrado o valor da primeira e da segunda derivada da função nesse ponto c=-10,3.

Figura 3.17 – tela do programa da tarefa 2 com a curva desenhada pelo programa sobre os 10 pontos marcados pelo usuário

Nessa tela, deslizando o cursor do mouse sobre os pontos (c , f(c)) da curva, cujas coordenadas aparecem abaixo do plano cartesiano, o programa desenha automaticamente a reta tangente à curva pelo ponto em que está posicionado o mouse e indica o valor da primeira derivada $f'(c)$ e da segunda derivada $f''(c)$, “acendendo” botões indicativos se a função naquele ponto é crescente, decrescente ou se tem derivada igual a zero.

Uma de nossas intenções, ao oferecer esta tarefa, era proporcionar aos estudantes a possibilidade de falar sobre taxa de variação de funções menos tradicionais, criadas por eles próprios. O programa usa a representação gráfica da função e mostra dinamicamente e localmente valores numéricos da taxa de variação, sua primeira derivada e sua segunda derivada.

3.4.3 Tarefa 3: Bola na Canaleta

Gostaríamos também de ver o que aconteceria com uma prótese distinta da tecnologia informática. Decidimos então pensar numa tarefa que explorasse a idéia de velocidade média e de velocidade instantânea – representantes do mundo físico da taxa média e da taxa instantânea de variação, respectivamente.

A inspiração para pensar na tarefa 3 surgiu da leitura do artigo de Speiser, Walter e Maher (2003) - Representing motion: an experiment in learning. Os autores descrevem o raciocínio de alunos do ensino médio, para determinar a velocidade instantânea de um gato no momento em que ele começa a correr, a partir de uma seqüência de 24 fotografias, tiradas em um intervalo de 0,031segundos, com um fundo marcado por uma grade, com linhas distantes umas das outras de 5cm. Nesse artigo, os autores documentam como os estudantes trabalham com diversas representações gráficas, incluindo descrições, gráficos dados por calculadoras gráficas, desenhos e fotografias. Na análise apontaram que a solução do problema foi dada considerando, dentre outras coisas, a marcação da posição do gato em relação ao tempo com uma fita adesiva no chão e os estudantes encenaram (enacted) a movimentação do gato colocada no problema.

Assim, um ponto considerado importante foi o de que houvesse disponibilidade de material de trabalho para ser usado em sala de aula. Foi então, ao pesquisar situações apresentadas em livros didáticos de Cálculo e de Física, que resolvemos propor o estudo do movimento de uma bola numa canaleta inclinada, tarefa comumente encontrada em laboratório de Física e que pudemos trazer para dentro de uma sala de aula comum. Para essa tarefa, trouxemos uma canaleta de 5 metros, marcada de 1 em 1 metro, feita com tubo de PVC, bolas de tênis, bolas de pingue-pongue, cronômetro, réguas e folhas de papel milimetrado.

TAREFA DA CANALETA

Nesta tarefa, vocês têm a disposição uma canaleta de 5 metros de comprimento, cronômetro, réguas e bolas. Incline a canaleta apoiando uma de suas extremidades no chão e a outra extremidade a uma altura de aproximadamente 50 centímetros de altura.

Observe que a canaleta está marcada com uma escala de 1metro em 1 metro.

Marque na tabela abaixo o tempo necessário para a bola percorrer a distância de 1metro, 2 metros, 3 metros, 4 metros e 5 metros. Atenção: *solte* a bola a partir da extremidade suspensa.

Agora, responda, justificando suas respostas, as seguintes questões:

a) Calcule a velocidade média da bola quando ela percorre as seguintes distancias:
   - Do repouso até 1 metro.
   - De 1 metro até 2 metros.
   - De 2 metros até 3 metros.
   - De 3 metros até 4 metros.
   - De 4 metros até 5 metros.

b) O que vocês observam? Como explicariam tal situação?

c) Você concorda que a equação $S=0{,}25t^2$, em que S é a distância em metros e t é o tempo em segundos dá uma aproximação dessa situação?

Caso negativo, encontre uma equação que descreva a situação. Caso positivo, justifique.

d) Use a equação do item c (a dada ou a sua) para calcular a distância percorrida e a velocidade média da bola nos intervalos de tempo abaixo considerados:

- 0 e 0,5 seg
- 1 e 1,5 seg
- 2,5 e 3 seg
- 4 e 4,5 seg
- 4,5 e 5 seg

e) No papel milimetrado, esboce um gráfico que mostre a distancia percorrida pela bola e discutam sobre ele. Quais informações vocês conseguem extrair a partir desse gráfico e dos cálculos que fizeram? Registrem suas conclusões e justificativas.

f) O que vocês acham que deve ser feito para encontrar a velocidade da bola no instante em que ela atinge as marcas feitas na canaleta, mesmo que seja uma aproximação da velocidade instantânea da bola nestes momentos?

Do nosso ponto de vista, para a execução da tarefa, como os alunos estariam acompanhando o movimento da bolinha na canaleta para medir o tempo e distância não mais com instrumentos informáticos e sim com réguas e cronômetros, tempo e distância poderiam deixar de ser transparentes, já que quando obtidos por um programa de computador nem sempre são acompanhados pelo usuário.

CAPÍTULO 4
ANÁLISE

Nossa análise se constitui fundamentalmente das filmagens nas três aulas onde ocorreram as tarefas sobre taxa de variação, derivada de função, em cenários com tecnologia informática e com tubos de PVC formando uma canaleta. A câmara foi posicionada de modo a favorecer a construção de dados desse estudo. Assim, na primeira parte da aula, onde os alunos trabalharam em pequenos grupos, buscamos registrar no vídeo um grupo de 4 integrantes, escolhido por sua heterogeneidade, por trabalhar juntos em aulas anteriores e também por apresentar descontração diante da câmera de vídeo. Na segunda parte da aula, alunos de outros grupos vão à lousa, apresentar e discutir os resultados que o seu grupo chegou. Nesse momento, a câmara focaliza a lousa, alunos e professora.

4.1 Episódio 1: Reta Secante Vira Reta Tangente

Neste episódio os alunos trabalham em pequenos grupos na tarefa na qual interagem com o programa em que é possível marcar sobre uma parábola (cuja expressão algébrica não é conhecida) dois pontos que o software denomina de P e de Q. A marcação destes pontos pode ser feita pela entrada de valores de suas abscissas, conforme mostra a figura.

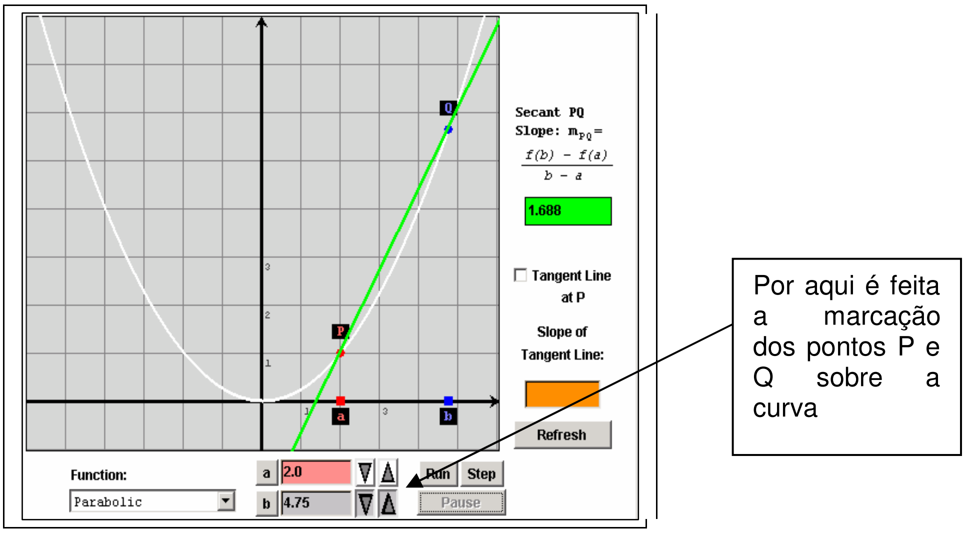


Figura 4.1 – tela de trabalho dos alunos no episódio "reta secante vira reta tangente"

Apertando o botão "run", o programa desenha sucessivas retas secantes à curva pelo ponto P (fixo) e pelo ponto Q cada vez mais próximo de P, de modo que na tela o que se vê é uma reta secante se movimentando até a posição da reta tangente por P, assim como o "movimento" do ponto Q em direção ao ponto P e da abscissa *b* em direção à abscissa *a*. São tomados distintos pontos próximos do ponto P (fixo), o programa não muda o nome destes pontos (é sempre Q, com abscissa *b*), ou seja, são desenhadas na tela diferentes retas secantes pelos pontos P e Q da curva - o ponto Q parece "deslizar" sobre a curva. O valor da abscissa *b* desses "distintos" pontos Q é mostrado na caixa de valor correspondente, assim como o valor da inclinação das "distintas" retas secantes e da reta tangente.

No grupo filmado, ED, SI, S e TO, discutem sobre esta simulação. Inicialmente SI, S e TO estão trabalhando num computador, marcando pontos sobre a curva e o ED está trabalhando sozinho na mesma tarefa em outro computador ao lado. Após ter feito testes individualmente, ED passa a trabalhar com os demais integrantes do grupo.

ED: *ele faz o ponto b se aproximar de a, onde temos a tangente.*
[é com esta fala que ED vai entrando no meio das duas meninas S e SI, que estavam observando a simulação. Observamos também que na fala, "ele faz" e "temos", o programa ganha status de um outro integrante com quem ED interage].
ED: *ele vai aproximar a reta secante, tá certo, ela vai aproximar até chegar na reta tangente, que é o que fazemos com o delta x, nós fazemos ele tender a zero. Essa distância entre esses dois pontos, tá certo?... Se você ligar estes dois pontos aqui você não vai ter tangente. Aqui não vai ser secante?* [neste momento o ED está marcando as abscissas a e b, apertando a botão "run" e as meninas estão observando].

SI: vai.

ED: *o que acontece aqui? Você tem um valor de x aqui aí você deu um incremento, um delta x. Então você vai acrescentar um incremento. Com isso, vai ter um delta y aí, não vai?* [está fazendo movimento com o braço na tela do computador]. *Como é que ele vai achar a tangente, aquela história, lá? Então ele faz o que? Ele faz essa diferença desaparecer, ele tende a zero. Ele faz o ponto Q se aproximar do ponto P.*

TO: *é o limite.*

ED: *é o limite, exatamente.*

A fala do ED: *"ele faz o ponto b se aproximar de a, onde temos a tangente"* se dá logo após ter interagido com o programa sozinho e interrompendo a atividade dos outros integrantes do grupo que, neste momento estavam observando a simulação. Tal interrupção parece estar associada à sua necessidade de compartilhar, obter aderência e confirmação de seu modo de raciocínio com os demais do grupo. Indagações do ED do tipo "tá certo?", "não vai?" parecem solicitações no sentido de obter a aderência dos demais colegas ao argumento que está usando. E SI e TO entram na conversa.

O argumento que ED usou para justificar que a reta secante se aproxima da reta tangente é que o ponto b se aproxima do ponto a. É importante observar como a tecnologia impacta a maneira de entender a definição estática via um movimento: para uma função f(x) definida num intervalo aberto I, contendo a, o limite dessa função quando x se aproxima de a é L (denotado $\lim_{x \to a} f(x) = L$), se e somente se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$. Podemos dizer que a tecnologia tornou factivo o movimento fictivo do limite. Expressões sempre utilizadas como tender a, aproximar de, ganham neste cenário movimento real.

Buscamos a partir de então compreender que entes estavam se movimentando: a reta secante como um todo, pontos sobre a curva ou somente as abscissas desses pontos, dado que em nosso estudo piloto os alunos ao considerarem um determinado movimento privilegiaram, ao programar uma animação, o coeficiente angular da reta secante e descobriram que o programa não funcionou como esperaram.

Ao enunciar que - *"ele faz o ponto b se aproximar de a"* - ED privilegia o movimento de abscissas para perfazer o movimento de reta secante em direção à reta tangente. Isto parece ser confirmado quando ele fala e questiona *"se você ligar estes dois pontos aqui você não vai ter tangente. Aqui não vai ser secante?"* - *"estes dois pontos aqui*" são os pontos Q e P; ou seja, primeiro é preciso ter representado sobre a curva os pontos P e Q e em seguida é traçada uma reta passando por estes dois pontos. Notemos que antes de dizer *"se você ligar estes dois pontos aqui você não vai ter tangente"* ED diz "*ele vai aproximar a reta secante, tá certo, ele vai aproximar até chegar na reta tangente, que é o que fazemos com o delta x, nós fazemos ele tender a zero. Essa distância entre esses dois pontos, tá certo?..".* Nesta fala, *"esses dois pontos aqui*" são os pontos b e a, abscissas de Q e de P, tendo em vista que ele diz que "fazemos o delta x tender a zero", ou seja, delta x, no caso, é uma diferença entre dois pontos do domínio da função (eixo x) infinitamente pequena que vai determinar o ponto Q infinitamente próximo do ponto P que, por sua vez, vai determinar uma reta secante infinitamente próxima da reta tangente à curva pelo ponto P.

Vemos que para que ED diga que "o ponto Q se aproxima do ponto P", para ele esta aproximação deve ser infinita, visto que afirma que "o programa faz a distância entre dois pontos desaparecer, faz a distância tender a zero". Isto é enfatizado em outro momento: "*Como é que ele vai achar a tangente, aquela estória, lá? Então ele faz o que? Ele faz essa diferença desaparecer, ele tende a zero. Ele faz o ponto Q se aproximar do ponto P"*, ou seja, para este falante, a reta tangente é encontrada a partir dos pontos P e Q, mas com o ponto Q infinitamente próximo do ponto P – "*Ele faz essa diferença desaparecer, ele tende a zero"*. A intenção do falante em dizer que a "diferença desaparece" é explicar que a quando a distância entre dois pontos (que podem ser as abscissas ou os pontos P e Q) é infinitesimal então a reta secante coincide com a reta tangente, ou seja, a reta tangente é obtida por sucessivas retas secantes à curva pelo ponto P fixo e outro ponto Q cada vez mais próximo dele pelo movimento da reta secante em direção à reta tangente.

Ao nosso ver, ED está "vendo" três movimentos distintos nesta simulação: o do ponto b em direção ao ponto a, do ponto Q em direção ao ponto P e da reta secante em direção à reta tangente. O primeiro deles é privilegiado, pois quando explica para os outros colegas do grupo esses movimentos, o ponto de partida é o de um ponto do domínio e de um incremento que se dá a partir deste ponto.

Entendemos que quando o ED diz que vê o ponto b se movimentar em direção ao ponto a (abscissas dos pontos Q e P, respectivamente), o mecanismo cognitivo que o possibilita dizer isso é o movimento fictivo, e neste caso o trajector é o ponto b e o landscape é o eixo das abscissas. Observamos também neste episódio a metáfora NÚMEROS SÃO LOCALIZAÇÕES NO ESPAÇO que, segundo Núñez (2004), possibilita conceber números em termos de posições espaciais. ED explicita essa metáfora ao dizer, por exemplo, que *"você tem um <u>valor de x</u> aqui aí você deu um incremento, um delta x"* – esse "valor de x" é um número associado ao ponto b (trajector) na reta real do eixo das abscissas (landscape).

Na simulação no computador, este aluno visualiza o movimento de reta secante se aproximando da reta tangente a uma curva por um ponto P da mesma. A expressão lingüística que, neste caso, aponta a existência de movimento é *"a reta secante tende à reta tangente*", na qual está atribuindo movimento a uma reta secante que, por definição, é um objeto matemático estático. Nesta sentença a reta secante é factivamente estacionária, decorrente de nossas crenças, enquanto que o significado literal da sentença mostra a reta secante fictivamente em movimento, até que fique factualmente estática quando "chega" na reta tangente. Nesse caso, o trajector é a reta secante e o landscape é o "rastro" deixado pelo movimento da reta secante. O landscape não fica registrado na simulação do computador, é um espaço do plano cartesiano, conforme procuramos exemplificar com a figura abaixo, considerando uma função quadrática.

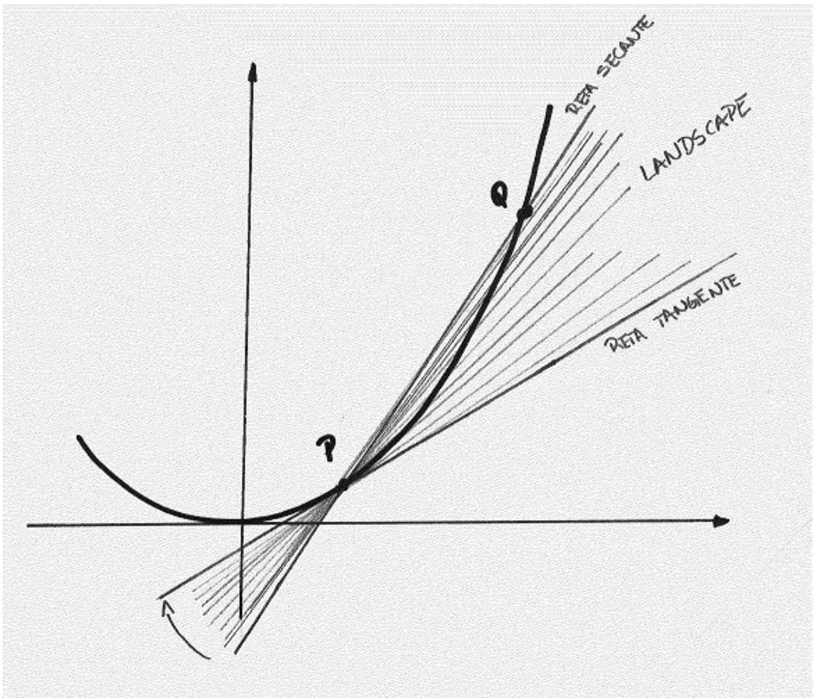


Figura 4.2 – o "landscape" de reta secante tendendo a reta tangente numa função quadrática é o rastro

Sintetizando,

A RETA SECANTE TENDE A RETA TANGENTE	
FACTIVO	FICTIVO
A CRENÇA é de que a reta secante é uma entidade estática	A expressão "tender a" atribui movimento à reta secante
O sujeito vê uma seqüência de diferentes retas secantes estáticas	O sujeito sente a reta secante se aproximar da reta tangente

Uma outra metáfora empregada pelos participantes é "PONTOS SÃO OBJETOS FÍSICOS NO ESPAÇO". Trata-se de uma metáfora básica dado que os domínios são distintos: o domínio fonte é o espaço físico no qual vivemos e o domínio alvo é o espaço do plano cartesiano definido por duas retas ortogonais.

Domínio Fonte	Domínio Alvo
Um corpo físico no espaço.	Um ponto no plano cartesiano.
Um automóvel que se movimenta ao longo de uma trajetória	Um ponto que "se move" ao longo de uma curva que representa uma função real.
Uma pessoa/carro que entra e sai de um túnel é o mesmo	Um ponto que "se move" ao longo da curva é o mesmo
A trajetória de um objeto representa o movimento desse objeto.	O gráfico na tela do computador é a trajetória de um ponto.

Tabela 4.1 - exemplos de padrões de inferência intra-domínios na metáfora "pontos são objetos físicos no espaço" (BOLITE FRANT *et al*, 2004)

O movimento aparece não somente na tela e na linguagem falada mas também nos gestos. Os gestos dos participantes do grupo, enquanto falavam sobre a simulação, sugeriam que dois pontos distintos do plano cartesiano poderiam ser o mesmo ponto, isto é, que um dado ponto do plano cartesiano poderia ter coordenadas que variavam, já que o "mesmo ponto Q" se transformava no ponto P via tal movimentação. Categorizamos esse argumento como "PONTO QUE SE TRANSFORMA EM OUTRO POR TRANSLAÇÃO", pois como uma figura é a mesma depois de uma translação e essa figura é composta de pontos, não é necessário se preocupar com a posição de cada ponto; nesse caso, a metáfora é de ligação, pois os domínios fonte e alvo são o mesmo, o matemático (BOLITE FRANT *et al*, 2004).

PONTO QUE SE TRANSFORMA EM OUTRO: O PONTO Q SE MOVE ATÉ O PONTO P	
FACTIVO	FICTIVO
A CRENÇA é de que o ponto Q é estático, isto é, $Q=(x_1, y_1)$.	O verbo "mover" atribui movimento ao ponto Q, isto é, $Q=(x_1, y_1)$, $Q=(x_2, y_2)$, ..., $Q=(x_n, y_n)$.
O sujeito VÊ uma sucessão de diferentes pontos sendo marcados no mesmo sentido sobre a curva: Q_1, Q_2, Q_3, ...	O sujeito SENTE que o mesmo PONTO Q ESTÁ SE MOVIMENTANDO em direção ao ponto P.

Tabela 4.2 – movimento fictivo de um ponto se movendo em direção a outro

Notemos que, no que se refere aos movimentos fictivos citados até aqui, esses movimentos que existiam na linguagem pelas expressões utilizadas agora podem ser experienciados em decorrência de uma simulação feita com tecnologia.

A simulação apresentada aos alunos oferecia a possibilidade de que trabalhassem com outras funções. Uma dessas funções era uma hiperbólica e observamos que os alunos não falaram sobre a aproximação da reta secante à reta tangente e outros movimentos com a mesma desenvoltura que tiveram com as outras funções. A seguir destacamos algumas falas dos alunos quando trabalham com a função "Reciprocal" oferecida pelo software sem a representação analítica e cujo gráfico aparece conforme o recorte de tela mostrado abaixo. O grupo estava trabalhando com os valores a=1 e b=-1.

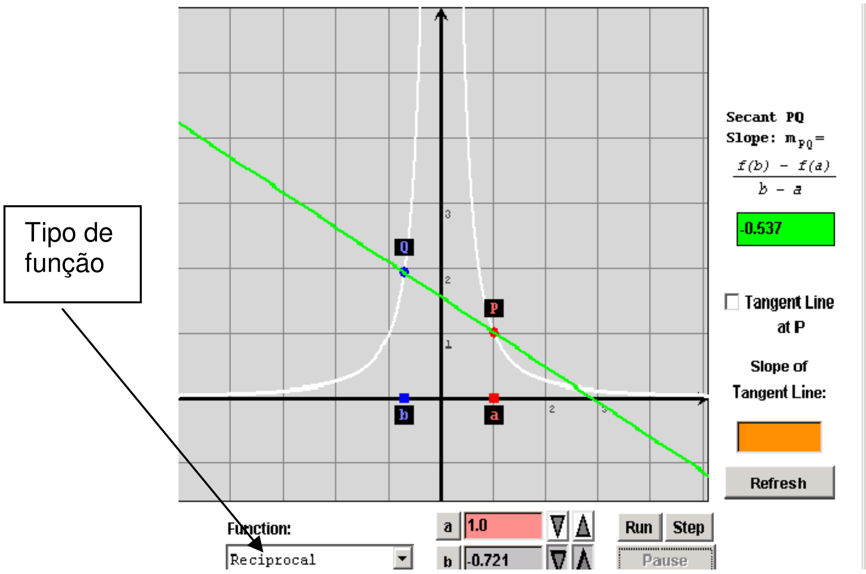


Figura 4.3 – tela em que os alunos discutem movimento de reta secante com função descontínua

1. **ED:** *ele vai até o infinito e depois vai descer. Vamos fazer de novo... Ele vai até o infinito, como ele vai até o infinito, ele vai tender a zero".* [Observe que aqui quem pára em zero é o b, já que há uma descontinuidade em x = 0].

2. **SI:** *mas por que é que ele pára no zero*?

3. **S:** *eu não consegui enxergar o que aconteceu* [Talvez a S fale pouco por não ter se apropriado do que acontece no software].

4. **ED:** *o ponto b vai se aproximar de a , tá certo. Só que ele nunca vai passar esses dois eixos* [o eixo y] *então ele vai querer se aproximar de a, então ele vai, vai...* [Aponta com a mão a reta "subindo". Isto parece não estar convencendo as meninas e nem a ele próprio, para explicar porque é que o ponto b não coincide com o ponto a, como ocorre nos outros casos].

5. **SI:** *mas naquele outro não acontece a mesma coisa.*

6. **TO** [dá uma explicação fazendo gestos usando seus braços]: *tende a menos infinito, tá vendo?"* [Não convence e continua explicando o movimento da reta na tela computador com uma caneta].... *aqui a reta secante tem coeficiente*

angular tendendo a menos infinito mas a reta tangente tem um número finito, só que ele (o ponto b) *não pára naquele ponto.*

7. **SI:** *agora eu entendi, sabe porque? A secante é a reta verdinha.*
8. **TO:** *isso, quando ela fica vermelha ela é tangente.*

Na fala de ED (linha 1) vemos que ele se refere ao infinito atual e que o fato de a movimentação do ponto b cessar no ponto zero é uma condição do programa que não suscita discussão. SI, por sua vez, não compreende os movimentos na tela e também não fica satisfeita com a explicação do ED. Ela diz explicitamente que não conseguiu enxergar o que aconteceu (linha 3), ou seja, a tecnologia não deu conta de explicar porque a reta secante fica “quase vertical”. E ED tenta argumentar novamente, mas ainda não a convence e neste ponto SI faz uma critica à tecnologia que num caso funciona e noutro não (linha 5). TO entra na conversa e faz uso de gestos para explicar o movimento da reta secante e agora com a ajuda de TO, SI percebe as cores no software e vê que a reta secante é verde. TO, satisfeito, completa “*isso, quando ela fica vermelha ela é tangente”.*

Nessa atividade, os alunos estão tentando dar conta de dois espaços diferentes: o visual e o analítico. No espaço analítico, o que se tem é uma definição estática (por exemplo, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$) daquilo que está acontecendo. No espaço visual, o software, o que se tem é uma tentativa de traduzir com movimento o que está sendo dito de modo estático. ED e TO tentam, de alguma forma, fazer essa conexão mas que é, de alguma forma, atrapalhada pela imagem do software.

Esta análise se enriquece se olharmos também para a segunda parte da aula quando AND se voluntaria para iniciar a discussão com a classe toda. AND tem forte preocupação, assim como ED, em usar uma linguagem matemática formal enquanto comenta sobre a atividade no computador. Aqui o papel do diálogo na negociação de significados pode ser visto pelas intervenções da professora que de posse das teorias da cognição corporificada e da argumentação força o diálogo na direção de discutir esses fatos que, em geral, nos cursos de Cálculo são desprezados por serem considerados óbvios ou visualmente óbvios.

1. **AND:** *O ponto a é a abscissa do ponto P* [escreve na lousa, faz um desenho de uma parábola]. *Então inicialmente nós tínhamos uma função parabólica e os pontos P e Q. O a é o valor da abscissa do ponto P e b é o valor da abscissa do ponto Q. Então aqui, o* x_p *é o a* e *o* x_q *é o b. A abscissa do ponto P é o a e a abscissa do ponto Q é o b, tá?*
2. **AND:** *Ãnh...* [curto] *o Q é o valor que vai tender aqui até o P* [deslizando o marcador de quadro branco (pincel) sobre o gráfico, sem encostar, de cima para baixo]. *Essa variação aqui por esse ponto b vai tender até o a* [aponta com o dedo]. *Enquanto esse ponto Q vai deslizar até o P* [aponta com o dedo]. *Então nós vamos ter duas variações: de b até a e vamos ter a variação das ordenadas também* [marca y_p e y_q no gráfico]. *Isso é da parte b da atividade.*
3. *Na letra b ele* [computador] *chama essa variação aqui de h e essa variação aqui de v* [faz marcação no gráfico]. *E a gente percebe que quando esse ponto Q se desloca até o ponto P,coincidindo, que o valor de v vai tender a zero e o valor de h também vai tender a zero, que essa aí eu não sei direito qual é o valor do ponto.*
4. *Q é o valor que vai tender aqui até o P*.
5. [Neste ponto a professora interfere tentando forçá-la a falar quais os movimentos que estão sendo privilegiados pelos gestos até agora]
6. **AND** [rapidamente]**:** *ele vai na curva aqui, ó.* [aponta no gráfico]: [A AND confirma que o caminho é a curva].
7. **PROF:** *os dois são pontos da curva?*
8. **AND:** *os dois são pontos da curva. E passando por estes dois pontos nós temos a reta secante.*
9. **PROF:** *mas porque é que eu quero deslizar o Q para P?* [Parece que a professora faz esta pergunta para forçar a aluna a falar de outro tipo de movimento (factivo) que aparece na tela: a reta secante se aproximando da reta tangente].

10. **AND:** *porque??* [faz uma cara de não entender bem a pergunta, a professora repete a pergunta, *"porque que eu quero que Q se deslize até o P?"*].
11. **AND:** *para eu perceber a variação aí..., o ângulo aí, a inclinação.*
12. **PROF:** *quando chega em P como é que fica aí?*
13. **AND:** *quando Q chega em P essa reta secante vai coincidir com a reta tangente* [A aluna adere ao questionamento da professora].
14. **PROF:** *então faz aí um desenho...*
15. **AND:** [faz o desenho. Marca um outro ponto, que ela chama de Q1 mais perto do P]. *Então a gente vai ver aqui que reta secante vai tender, vai coincidir com a reta tangente* [faz movimento com o braço, indicando mudança de inclinação de retas secantes]. [Marca outro ponto Q2].
16. **PROF:** *eu não estou satisfeita. A AND colocou aqui* [apontando no gráfico] *que parece que é sempre o mesmo ponto Q. É o mesmo ou é diferente?*
17. **AND:** *É, o Q vai deslizando...* [faz gesto com o braço solto no espaço]
18. **PROF** [insiste na explicação]**:** *sim, mas você colocou um índice e eu quero saber porque* [os índices aqui são Q1 e Q2]. *É o mesmo ou é outro?*
19. [A classe responde que é outro]
20. **AND:** *é mesmo... é outro, tem razão*. [faz uma cara de, ao mesmo tempo, frustração e ao mesmo tempo, de quem percebeu que é outro ponto].
21. **PROF:** *se é o mesmo porque você colocou outros nomes para eles?*
22. **AND:** *É outro porque ele vai ter outras coordenadas.*
23. **AND:** *o que a gente tá vendo aí no computador é um movimento, mas na realidade isso aí pra gente é pontual. Para o computador fazer isso ele tem que pegar vários pontos diferentes, vamos dizer assim entre aspas, para ele, esse Q deve ter tido novos nomes...*

[....]

PROF: *como colocou a AND, tanto no item a quanto no item b é a mesma situação. Quer dizer, num ele dá o valor de v e de h e no outro ele dá o valor de a e de b.Todo mundo concorda que no item 1 a e no item 1 b dá para fazer esta* *relação.... Quando eu estou olhando a variação do v e do h estou olhando o tempo inteiro na fórmula da derivada. Então o que é que eu estou querendo que vocês continuem: assim como a gente definiu o que é que era função, eu quero agora que vocês definam o que é derivada de uma função num ponto e derivada de uma função. Isso é para ficar na cabeça. O tempo inteiro aqui a gente está trabalhando com a derivada de uma função num ponto P. Então é bom lembrar que, como a AND falou, nós estamos fazendo um trabalho pontual. Nós estamos fazendo a derivada num ponto e não a derivada desta função* [aponta para o gráfico da parabólica].

Além dos argumentos que apareceram no grupo pequeno, observamos aqui que a intervenção da professora faz com que AND acrescente índices no Q, evidenciando diferentes posições no plano cartesiano e portanto diferentes pontos da função dada. Apesar de na fala 15 os índices já estarem presentes, na fala 16 a professora insiste em pedir uma justificação. E este diálogo que agora envolve também a turma, prossegue até que AND formula a fala 23. E a aula é encerrada com a fala da professora levantando ainda que embora usemos derivada para ambos os casos, uma coisa é a função derivada e outra é a derivada de uma função num ponto.

Entendemos que nesta atividade ocorre uma controvérsia entre a Matemática aprendida e a visualização apresentada na tela do computador. No entanto, os alunos não fazem criticas ao software, eles procuram dar uma explicação apoiados naquilo que estão vendo. No caso da função não parabólica, não conseguem explicar apoiados na visualização, mas também não fazem nenhuma crítica ao software. Isto provavelmente porque têm a crença de que "o computador está sempre certo" e em função disso, procuram dar um jeito de explicar apoiados naquilo que o computador está mostrando para eles. Parece que eles acreditam que não é possível dizer "não é assim que se explica a coisa matematicamente, preciso recorrer à Matemática e abandonar o computador por uns momentos".

Como a discussão com a classe toda ficou em torno de uma função parabólica que era contínua, o ponto b se aproximava e coincidia com o ponto a. Nesses casos, na caixa do coeficiente angular os coeficientes da reta secante e da reta tangente eram iguais. Entretanto, no caso da “reciprocal” o coeficiente angular da reta secante era menos infinito e diferente do coeficiente angular da reta tangente, o que causou desconforto e controvérsias entre os alunos (ver figura 4.5 mais adiante).

Do nosso ponto de vista, o fato do ponto b não “pular para o outro lado”, ou seja, parar na origem do sistema cartesiano de coordenadas, foi o que provocou uma ruptura entre a crença que o aluno tem e o que ele está vendo na tela do computador. Assim, depois de assistirmos inúmeras vezes ao vídeo, convidamos o TO para uma entrevista que ocorreu depois de terminado o curso.

Interessava-nos investigar até que ponto a tecnologia dá conta de que o aluno enxergue aquilo que é visto na tela do computador e até que ponto é preciso que o aluno tenha um repertório matemático que dê suporte para enxergar e falar sobre aquilo que está vendo e, sobretudo, as relações entre as duas. Esta questão é encontrada em algumas pesquisas recentes em Educação Matemática, pois no início do uso dos computadores em sala de aula de Matemática parecia que a visualização na tela era suficiente para o aprendizado e atualmente está se verificando que só isto não basta (por exemplo, nos trabalhos de NOBLE. J. *et al*, 2004; BOLITE FRANT, J. B. *et al*, 2004).

A entrevista foi realizada com a presença da professora, do pesquisador e do técnico de áudio/vídeo para as filmagens. As três pessoas já eram conhecidas do aluno, fato que o deixou mais à vontade e em poucos minutos a entrevista fluiu.

PROF fala para o **TO**: *vamos refazer a tarefa 1 ... a gente tem toda a clareza de que você vai estar fazendo esta tarefa novamente. Você não tem obrigação nenhuma de lembrar...* [Falou que fizemos esta tarefa no laboratório, oportunidade na qual trabalhamos com o programa que simula retas secantes se aproximando da reta tangente] *... O que a gente quer, na verdade, é que você fale tudo o que você puder falar...*

Colocamos na tela a simulação na qual é possível marcar dois pontos P e Q no gráfico de uma função quadrática, e pedimos a ele que falasse sobre o que está vendo o que acontece quando aperta o botão “run”. A figura abaixo mostra uma seqüência de slides que apareceram na tela do computador.

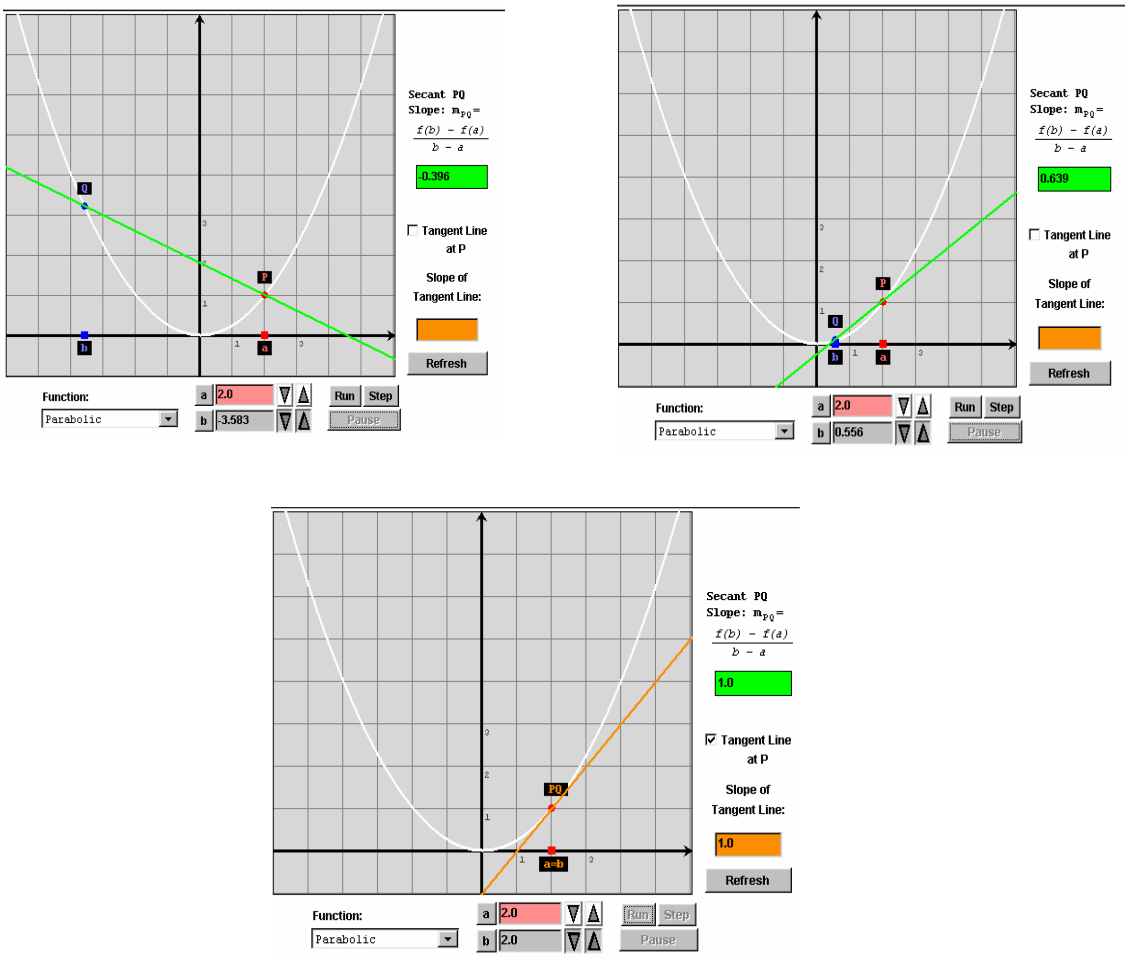


Figura 4.4 – Seqüência de slides de reta secante se aproximando de reta tangente na função quadrática

TO: *“o ponto Q vai se aproximando de P e a reta secante vai tendendo à reta tangente. Quando ela fica vermelha é porque o ponto Q coincidiu com o ponto P. O x correspondente ao ponto Q é o b e o correspondente ao ponto P é o a, aí b coincide com o a. Âhh... o programa mostra o coeficiente angular da reta secante, quando os pontos P e Q eram distintos ..., como que ele foi variando à medida que o ponto Q foi se aproximando do ponto P. E a caixa de diálogo aqui* [aponta com o dedo na tela] *mostra o coeficiente angular da reta tangente, que a secante se tornou quando os dois pontos coincidiram”*.

Perguntamos porque ele acha que isso acontece e ele responde que é porque *"o ponto b tende ao a, ao mesmo tempo que Q tende a P e ao mesmo tempo a reta secante tende à reta tangente"*. TO afirma que consegue ver três movimentos ao mesmo tempo e que um aluno que nunca viu o assunto precisaria ver essa simulação várias vezes para depois *"formar a idéia de tudo junto"* – notemos aqui que tal preocupação vem de seu papel como professor de Matemática. Cabe notar que nessa afirmação TO coloca que cada movimento de abscissas, pontos e retas requer um mecanismo cognitivo distinto mas que existe a possibilidade de fazer as conexões entre estes distintos espaços "tudo junto".

Tentando entender melhor, perguntamos se havia algum movimento que era privilegiado e ele responde: *"eu acho que talvez o Q tendendo a P sobre a curva seja um núcleo onde você vai buscar a explicação do fato pra chamar a atenção depois pro b tendendo ao a e a reta secante tender à reta tangente".* Pedimos então que comentasse agora o que vê na função reciprocal, conforme apresentamos na seqüência de slides a seguir:

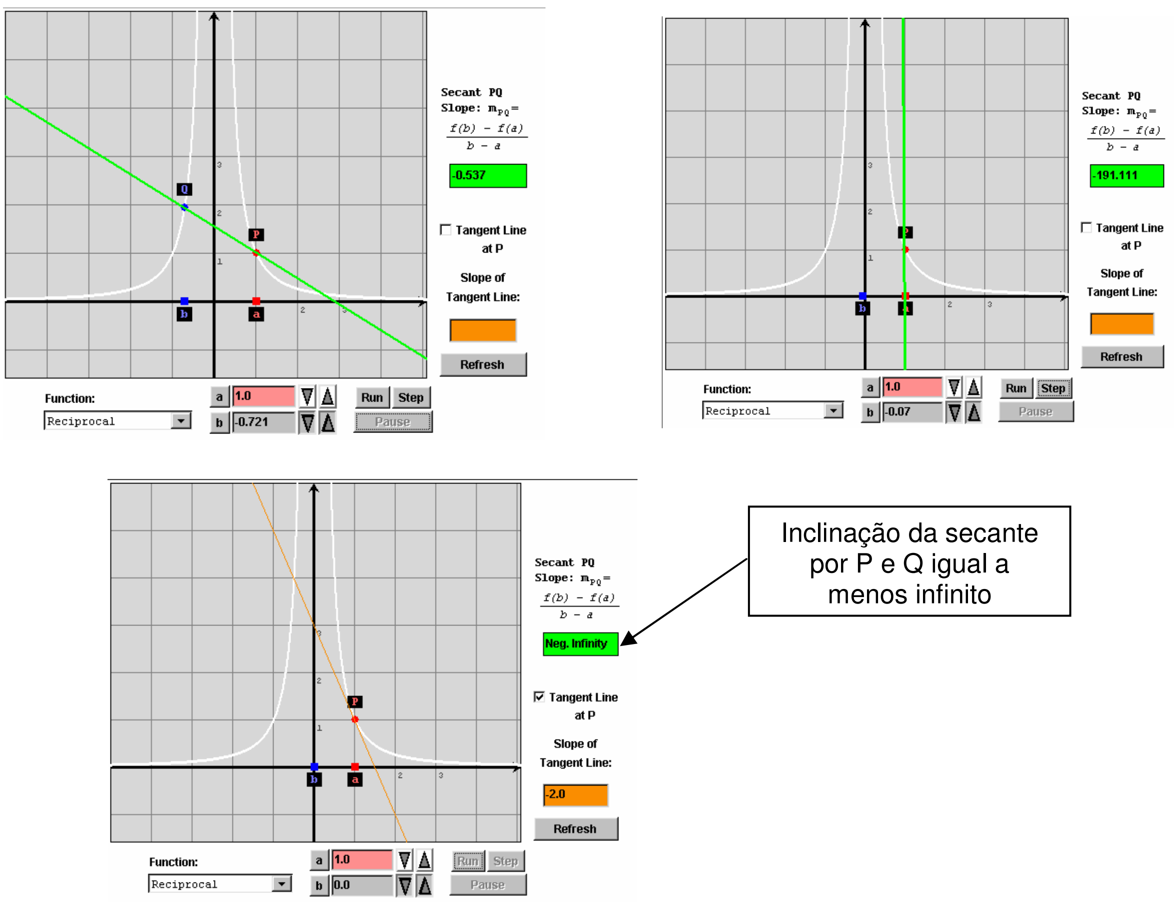


Figura 4.5 – slides de reta secante se aproximando de tangente numa função hiperbólica

TO diz que *"ele* [o software] *traça uma tangente, só que ele mostra, acha, né, o valor numérico do coeficiente angular dessa tangente, mas ele mostra que o da secante tende pro infinito negativo, né. É aí que tá a diferença, né"*. Perguntamos então sobre os três movimentos mencionados anteriormente e ele diz *"é, aí não dá pra falar que o Q vai tender pra P, né. Porque a curva tem dois ramos, a curva é formada por dois ramos"*. ... *"então, o ponto Q está tendendo a mais infinito, sumiu da tela, está lá pra ciiima, aí ainda ele está no ramo da esquerda, né. Então me parece que aí, ó, ele já mostra o ponto Q no ramo da direita, a secante P e Q, né, então ele de repente pulou de um ramo para o outro, a função não está definida no ponto zero... O b não andou, né, o b ficou lá* (do lado esquerdo)*, mas tudo bem ..."*.

E ele continua: *"é, ... então fica difícil falar as três coisas do outro caso, né!! Porque a gente tava pensando que o b devesse tender ao a, mas ele pára ali no zero, né"*. Observemos que a fala de TO está truncada, desestabilizada em comparação com a sua fala no caso com a função quadrática – fenômeno também observado quando falava sobre esse movimento na aula 1 com os demais integrantes de seu grupo.

TO afirma que essa segunda animação *"ajuda mas não ajuda muito"* a enxergar a idéia de derivada de uma função f(x) num ponto x_0 como o coeficiente angular de reta tangente ao gráfico da função no ponto (x_0, f(x_0)), como ajudou no caso da parábola e prossegue: *"nesse caso aí não dá pra ver, <u>dá pra deduzir que aconteça, mas eu não tô vendo</u>"*.

Perguntamos se com o ponto b parado no (0,0) ele deduz que o b vai tender ao a e ele diz: *"então, aí que tá né, ele não mostra que o b foi e voltou, então não dá pra dizer que a imagem é essa, entendeu? Talvez <u>a cabeça raciocine isso e chegue lá, mas a imagem</u> não é essa, pelo menos pra mim..."*.

Colocamos a indagação: "a imagem da cabeça não é a imagem da tela, é isso?". O TO responde: *"eu acho que é isso, é o que está acontecendo comigo. Acho que se eu fosse explicar isso para um aluno, ele entenderia desse jeito, ele não iria associar <u>a imagem da cabeça</u> dele com aquilo que ele tá vendo. No caso da parábola fica automático, até, você não precisa nem falar..., é automático"*.

A fala de TO corrobora o fato de que nem sempre as inferências são preservadas de um domínio em outro, no caso da parábola é automático, ou seja, as inferências que fazemos dão conta, mas no caso da hipérbole, não. Isto é, quando se tem um caso "bem comportado", como no caso da parábola, então o fato do "ponto Q tender ao P" - metáfora conceitual que intitulamos PONTOS SÃO OBJETOS FÍSICOS NO ESPAÇO - dá conta de interpretar geometricamente a definição de taxa de variação usando um recurso estático ou dinâmico. No entanto, quando se estende isso para o caso de uma função descontínua, parece haver um conflito entre o analítico e a imagem que o sujeito vê na tela do computador.

Apresentamos um esquema com os diferentes aspectos levantados nessa atividade.

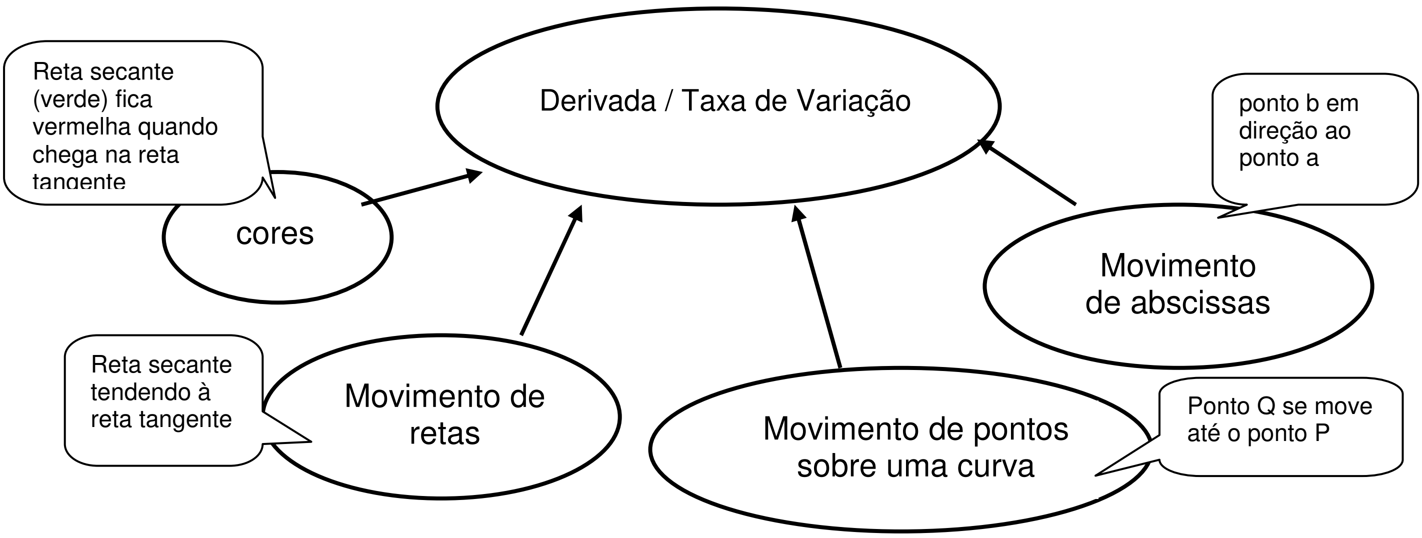
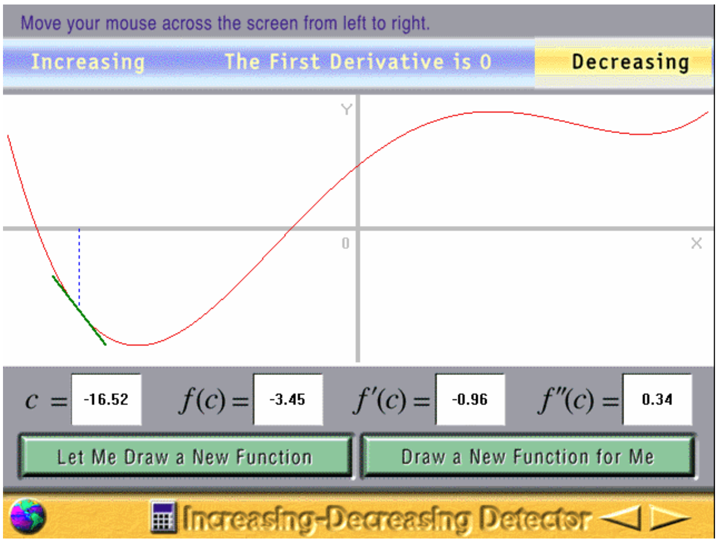


Figura 4.6 – esquema de aspectos considerados para falar sobre derivada/taxa de variação

4.2 Episódio 2: Inclinações, tangentes e derivadas num ponto

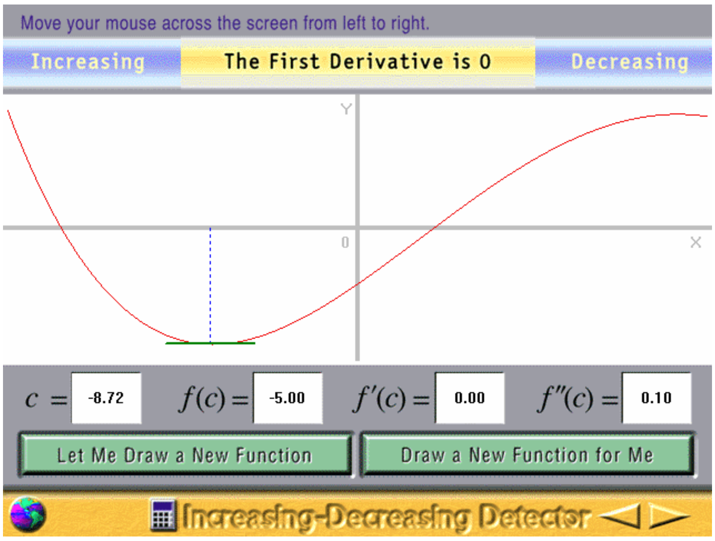
Neste episódio, que é um recorte dos diálogos sobre a tarefa da aula 2, destacamos a produção de significados de S a partir de sua interação com o programa.

Deslizando o mouse sobre a curva, o programa mostra, dinamicamente, a reta tangente à curva pelo ponto em que o mouse está posicionado e também coloca o valores de *c* (ponto do domínio da função *f* , abscissa do ponto de tangencia da reta tangente à curva), $f(c)$, $f'(c)$ e de $f''(c)$. Na parte superior da tela o programa sinaliza se no ponto *c* a função é crescente, decrescente ou se tem primeira derivada igual a zero. Abaixo reproduzimos algumas telas de trabalho dessa tarefa.



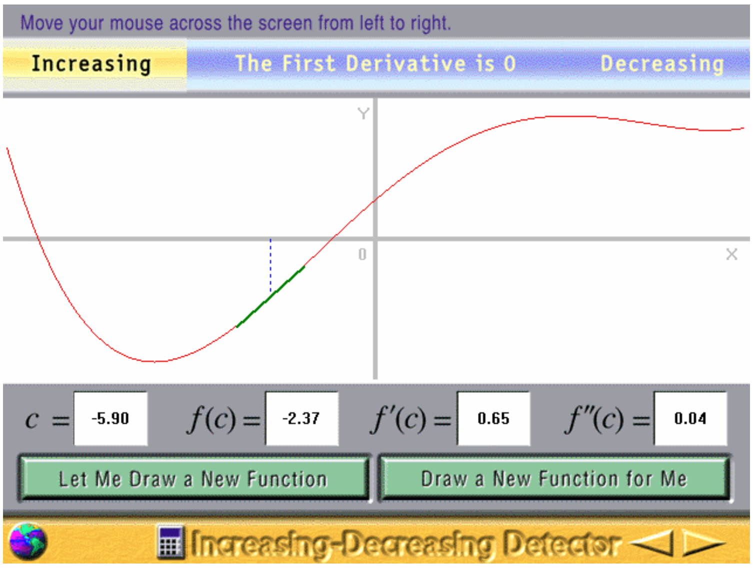
Aqui o mouse está posicionado no ponto (-16,52 ; -3,45) e o programa “acende” a caixa *Decreasing*, sinalizando que no ponto c=-16,52 a função é decrescente. Também é mostrado o valor da primeira e o valor da segunda derivada da função nesse ponto c.

Figura 4.7 – mouse posicionado num ponto $(c, f(c))$ da curva em que f é decrescente, concavidade voltada para cima.



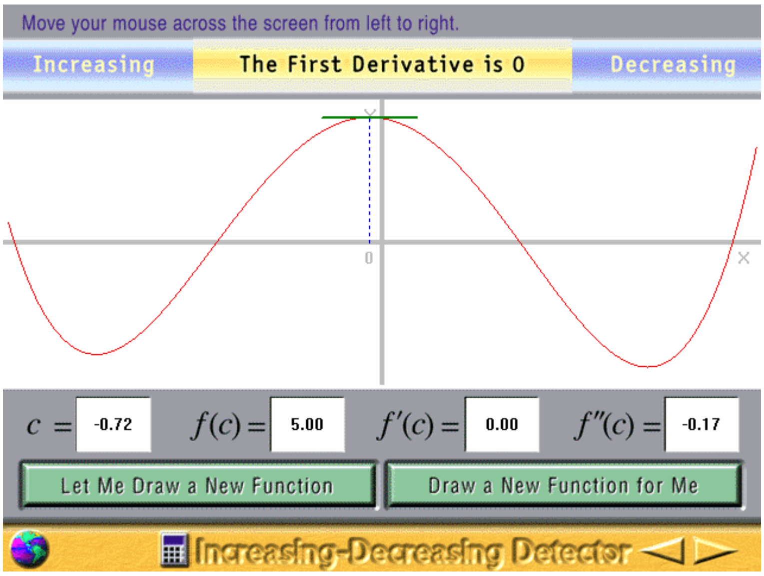
Aqui o mouse está posicionado no ponto (-8,72 ; -5,00) e o programa "acende" a caixa *The First Derivative is 0*. Também é mostrado o valor da primeira e o valor da segunda derivada da função no ponto c=-8,72.

Figura 4.8 – mouse posicionado num ponto mínimo da curva



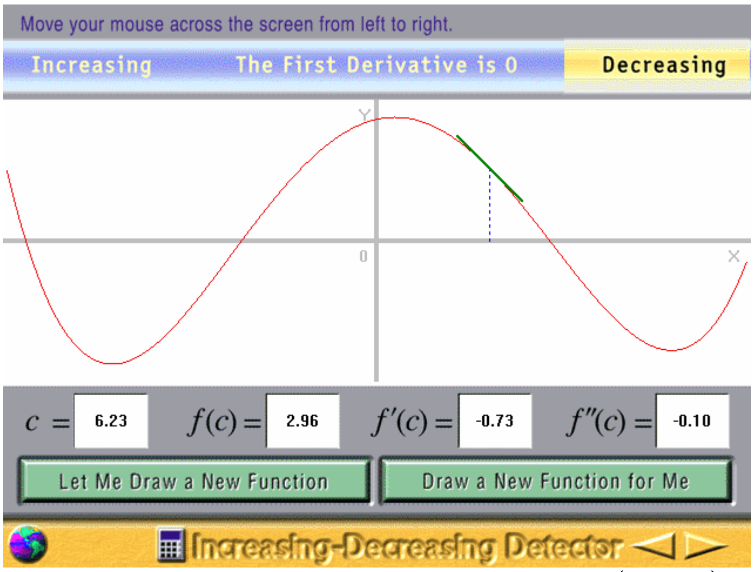
O mouse está posicionado no ponto (-5,90 ; -2,37) e o programa "acende" a caixa *Increasing*, sinalizando que no ponto c=-5,90 a função é crescente. Também é mostrado o valor da primeira e o valor da segunda derivada da função nesse ponto c.

Figura 4.9 – mouse posicionado num ponto $(c, f(c))$ da curva em que f é crescente.



Mouse posicionado no ponto (-0,72 ; 5,00) e o programa "acende" a caixa *The First Derivative is 0*. Também é mostrado o valor da primeira e o valor da segunda derivada da função no ponto c=-0,72.

Figura 4.10 – mouse posicionado num ponto máximo da curva



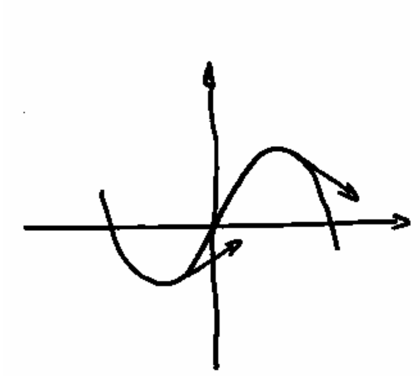
Mouse posicionado no ponto (6,23 ; 2,96) e o programa "acende" a caixa *Decreasing*, sinalizando que no ponto c=6,23 a função é decrescente. Também são mostrados o valor da primeira e o da segunda derivada da função nesse ponto c.

Figura 4.11 – mouse posicionado num ponto $(c, f(c))$ da curva em que f é decrescente, concavidade voltada para baixo.

Na plenária, S vai à lousa e coloca para a classe todas as relações que o seu grupo encontrou entre inclinações da tangente em cada ponto $(c, f(c))$, primeiras e segundas derivadas calculadas no ponto *c* e o valor da função calculado no ponto *c*. A seguir destacamos parte das transcrições referentes a exposição de S.

S: *Aqui, a derivada pelo que eu entendo é o seguinte: conforme ela vai andando, aqui é a reta tangente, conforme os pontos que ela vai andando, ela vai apresentando os valores e ela oferece o seguinte, que quando a reta tangente estiver apresentando o sinal positivo, significa que a função está crescendo, certo, OK?. Sempre ela é positiva, não é?* [pedindo confirmação para colega]. *Se a derivada der sinal negativo, significa que a função está decrescendo.*

[Enquanto falava, S fazia apontamentos como segue num gráfico que desenhou na lousa]



PES: *O que você fez para chegar na relação de f crescente e sinal da derivada?*

S: *foi através do software, observando os dados* [que vê na tela] *e comparando e vendo o que aconteceu, <u>pura e simplesmente</u>.*

S: *então, aqui, no ponto a função vai mudar a inclinação da reta, aqui, quando ela chega nesse momento em que ela está crescendo e passa a decrescer ela fica igual a zero* [aponta o ponto máximo no gráfico acima e escreve na lousa f´=0]. *E a mesma coisa acontece quando ela estava decrescendo e passa a crescer.*

S: *a segunda derivada pelo que eu entendi, vai mostrar a concavidade, para que lado está voltada a concavidade, no caso, da parábola, que estamos estudando* [aqui não tem parábola e sim uma função com duas concavidades em intervalos diferentes]. *Se acontecer, por exemplo, da concavidade ir crescendo, que ela pode às vezes estar negativa e ainda estar crescendo. Então se ela estiver decrescendo a concavidade é voltada para cima* [desenha um U]. *Agora a partir do momento que ela passa, que ela muda, a concavidade fica para baixo e ela passa a ter o sinal negativo...* [apontando o gráfico]. *É como se ela estivesse representando o ax^2 de uma função do segundo grau.*

Identificamos aqui mapeamentos que não são metáforas, já que necessitam de espaços mentais que não podem ser caracterizados como domínio fonte ou alvo como veremos abaixo. Na literatura já existem trabalhos de Núñez, Fauconnier e Turner apontando para montagens conceituais que não fizeram parte de nossa fundamentação teórica pois pensávamos encontrar somente mapeamentos que fossem metáforas básicas ou de ligação. Desse modo, usamos para interpretar este episódio a idéia de montagem de Bolite Frant et al (2003), baseadas em Eisenstein (1990 *apud* BOLITE FRANT *et al*, 2003) que coloca que uma montagem é a criação de um terceiro espaço que não é a soma dos dois que lhe dão origem, mas guarda características dos dois.

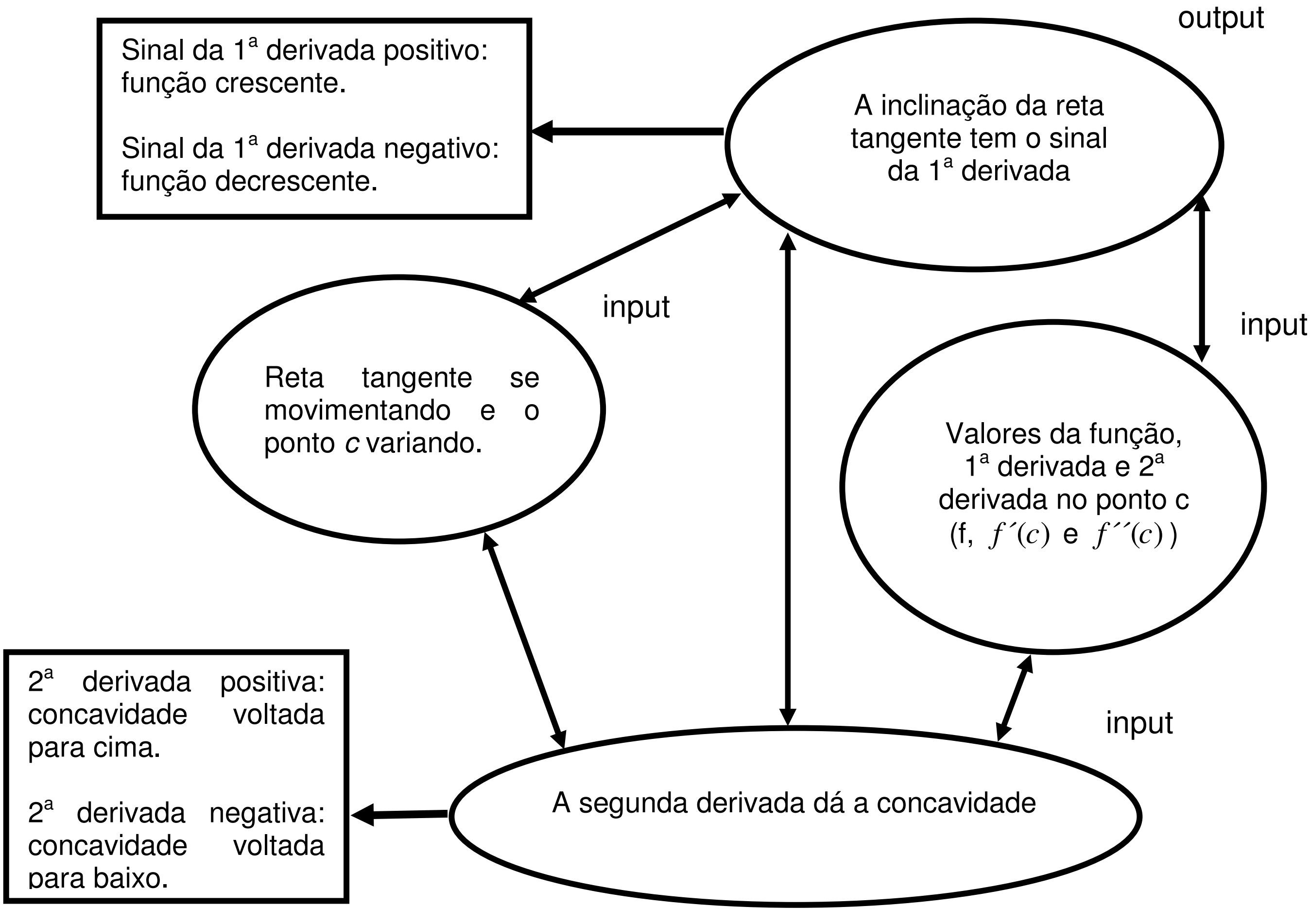


Figura 4.12 – mapeamentos que não são metáforas sobre 1ª e 2ª derivada

A cada interação um novo texto surgia apresentando os valores de *c*, de $f(c)$, $f'(c)$, $f''(c)$ e o gráfico com a tangente e era necessário produzir significado para estes objetos. S então com o movimentar do mouse encontrou respostas que permitiram sustentar suas hipóteses iniciais.

4.3 Episódio 3: Velocidade Média e Gráficos

Nas aulas 1 e 2, estivemos interessados em investigar como e o que os alunos falam sobre taxa de variação oferecendo tarefas em que eles trabalham usando programas de computador, ou seja, a prótese nessas aulas foi a tecnologia informática. Na aula 3 nosso interesse continuou o mesmo, com a diferença de que a prótese agora não é mais a tecnologia informática, e sim uma canaleta construída com um cano de PVC, bola de tênis, bola de pingue-pongue, cronômetro e trena. Nesta tarefa, a ação dos alunos envolveu medir, perceber variações, mais especificamente variação de velocidade.

A tarefa consistiu em soltar uma bola numa canaleta inclinada com 5 metros de comprimento e, com um cronômetro, medir o tempo necessário para a bola percorrer 1 metro, 2 metros, 3 metros, 4 metros e 5 metros.

Estavam à disposição dos alunos bolinhas de tênis e de pingue-pongue, trena e cronômetro. Os alunos optaram em, no primeiro momento, eleger dois alunos para fazer as medições ao invés de continuarem em pequenos grupos. Após posicionarem a canaleta, uma aluna (MEB) se encarregou de jogar a bola, outro (AL) do cronômetro enquanto os demais tomavam notas e faziam outras observações.

AL comenta com a classe que existe uma diferença nas medições devido a impossibilidade de apertar o botão do cronômetro em perfeita sincronia com ação e a fala de largar da bola de MEB. Por isso decidem fazer três medições para cada marcação da canaleta e considerar a média.

A professora vendo que os alunos não falaram sobre possíveis diferenças com as bolas provoca-os perguntando se teria diferença nas medições com a bolinha de pingue-pongue e com a de tênis. Alguns dizem que seria a mesma coisa e outros que a bolinha de pingue-pongue seria mais rápida porque é menor e mais leve. Decidem fazer medições com essa bolinha.

1. **MEB:** *mesmo sem querer, às vezes dá* *<u>um impulso</u>* *na bola... A bolinha está fazendo um percurso diferenciado. Ela tá fazendo assim, ó,* *<u>tá oscilando</u>* [faz um gesto de <u>zigue-zague</u> com a mão]. *A bolinha enfrenta essa dificuldade de ter um desnível nas emendas da canaleta*.
2. **AL**: *tem uma* *<u>resistência</u>*, *né...*
3. **PROF:** *gente olha só, no inicio a impressão que deu era que todo mundo disse que essa aqui* (pingue-pongue) *iria mais rápido, e não foi*.
4. **AL:** *ao contrário, por causa do peso e da resistência*.
5. **S:** *quando eu apostava corrida com o meu irmão, que é bem mais* *<u>magro que eu</u>*, *ele sempre saia na frente* *<u>a ganhava a corrida</u>*.
6. **PROF:** *é que a idéia que a gente tem é que quanto menor, mais veloz, mas tem outras componentes...*
7. **VI**: *é, mas também se o* *<u>peso aumenta muito</u>*...
8. **S**: *é, mas aí conforme vai* *<u>acelerando mais</u>* *o peso vai ajudando*.
9. **O**: *mas tem os obstáculos...*
10. **S**: *também..., mas os dois passaram pelo mesmo obstáculo*.
11. **L:** *é, mas essa aqui é mais leve, ela enroscou mais nos obstáculos, essa aqui é mais pesada, pelo tamanho* [faz gesto de que a bolinha mais pesada transpassa com mais facilidade os obstáculos].
12. **S**: *mas o que é mais fácil de* *<u>desatolar um carro</u>*? *Não é mais fácil desatolar quando ele tá* *<u>pesado do que quando ele tá</u>* *leve?*[parece que a aluna L aceita esse argumento].

Os valores considerados e colocados por eles na lousa foram:

Distância	t (bola tênis)	t (pingue-pongue)
1m	1,93	2,09
2m	2,6	3,07
3m	3,4	3,98
4m	4,03	4,81
5m	4,6	5,58

Tabela 4.3 – tomadas de tempo com a bola de tênis e com a de pingue-pongue.

Podemos observar que sem menção explícita ao tradicional problema do plano inclinado das aulas de física, palavras como aceleração, peso, impulso, oscilando, são utilizadas no diálogo. E chamamos a atenção para S que traz exemplos do seu cotidiano nas linhas 5, 8 e 12. Este é o caso típico de metáforas básicas onde, sem esforço, fazemos inferências a partir do domínio sensório-motor para outro domínio, físico-matemático.

Domínio Fonte	Domínio Alvo
Cotidiano, carro, atolar, irmão, corrida	Física, distância, velocidade média de um corpo
Mais leve mais rápido	Bolinha de pingue-pongue mais rápida que a bola de tênis

Com os registros na lousa, os alunos passam à discussão dos mesmos retornando aos pequenos grupos para continuarem a tarefa. O material continuou disponível caso quisessem usa-lo nas discussões dos grupos menores.

S: *velocidade média é espaço sobre tempo*.

TO sugere que façam os cálculos com a primeira bolinha (de tênis). Ninguém contestou. SI fica observando. S procura participar o quanto pode desses cálculos. Tem uma pequena discussão de arredondamentos das contas com a calculadora; decidem trabalhar com duas casas decimais. Os cálculos para a velocidade média foram feitos conforme dito pela S e foram encontrados os seguintes resultados (para a bolinha de tênis):

- Do repouso até 1 metro: V_m=0,52 m/s
- De 1 metro até 2 metros: V_m =1,49 m/s
- De 2 metros até 3 metros: V_m = 1,25 m/s
- De 3 metros até 4 metros: V_m =1,58 m/s
- De 4 metros até 5 metros.: V_m =1,75 m/s

ED: *existe algum* *erro*, *dá um* *aumento e depois uma diminuição*.

S: *em cada metro* *existe uma aceleração*. *Ó, você pode ver num aumentou, noutro diminuiu*.

SI: *tudo bem, aqui aumentou, mas no* 2^{o} *item aqui... 1,49? Vamos* *fazer de novo*...*De 1 para 2 é que está meio... parece que* *está invertida a situação...*.

SI: [está observando a canaleta]: *sabe o que acontece? olha aqui, ó.. de 2 para 3 metros a* *inclinação não é maior*? [apontando para a canaleta] *então a* *velocidade vai ser maior*.

S: [aponta para a canaleta e fala]: *está dando diferença aqui ó...*

TO: *ah, é porque ela* *está torta*? [faz um gesto sinalizando que a canaleta está um pouco deformada, formando uma "barriga"].[De fato, o vídeo mostra que a canaleta está apoiada em cadeiras e diversos materiais dos alunos, como bolsas, livros, etc., não tendo uma inclinação constante, já que é feita de material flexível (cano de PVC)]

S: *O problema está de 1 para 2, que aumentou e depois diminuiu*.

TO: *aqui ela* [a canaleta] *está assim* *torta*.

S: *é depois aqui ela* [a canaleta] *está aprumada*. *Ela* [a bola] *vai pegando velocidade com o peso junto.*

TO: *é isso que você falou* [concordando com a fala da S].

SI: *a tendência é aumentar*, *né...*

S: *é que nem numa descida*.

ED: *isso é por causa da gravidade, a cada metro por segundo ela vai aumentando, mesmo... Mas aqui* [de 1 a 2m] *está estranho* *mesmo.*

S: *vamos* *calcular para a segunda bola*?

TO: *vamos!*

Os alunos continuam relacionando experiências pessoais de movimento com o problema de modo bastante natural por isso ficam intrigados com a resposta encontrada e buscam uma explicação satisfatória para tal ocorrência.

A hipótese v=s/t originalmente aceita não é mais satisfatória, esta é uma controvérsia que pede uma ação.

O grupo decide tirar a dúvida fazendo os cálculos da velocidade média com a bolinha de pingue-pongue, e obtém os seguintes resultados:

- Do repouso até 1 metro. V_m=0,48 m/s
- De 1 metro até 2 metros. V_m=1,02 m/s
- De 2 metros até 3 metros. V_m= 1,1 m/s

1. **SI**: *aí ele <u>não decaiu, aumentou</u> um pouco.*
2. **ED**: *esse primeiro metro e o segundo metro ele quase dobra* [se referindo a primeira e segunda bolinha], *mais que dobrou, inclusive*
3. **S** : *mas <u>está muita diferença</u>*. [O ED não dá ouvidos à S e continua falando, S fica quieta].
4. **ED** [continua]: *é aí que ela <u>pega o embalo</u>, começa <u>a aceleração</u>* [faz gestos com a mão].
5. **S** [interrompe e fala]: *mas é três vezes mais*. [ED não dá ouvidos e continua a falar. Notemos que como S desde o início se coloca como quem tem mais dúvidas, que precisa estudar em casa, quando fala com o grupo dificilmente recebe adesão do mesmo, principalmente do ED que continua falando para o grupo]
6. **ED**: *depois que solta ela* [a bolinha] *é que ela vai pegando velocidade. Então quer dizer<u>, tá certo, mas parece que de 0,48 para 1,02 é muita diferença</u>.* [Continuam a fazer os cálculos.]
7. **TO**: *olha só, aqui <u>ficou bonitinho</u>*
8. **TO** [fala e escreve na ficha]: *a velocidade aumentou. Agora, <u>como explicar isso?</u>* [A questão na ficha era: O que vocês observam? Como explicariam tal situação?]
9. **ED**: *gravidade!*
10. **S**: *gravidade e peso. O peso é que faz isso.*

[Voltam a discutir sobre a diferença dada nos resultados com a bola de tênis. Refazem os cálculos, mas encontram os mesmos encontrados anteriormente.

Acabam por concordar que a causa desta diferença tenha sido porque a canaleta está deformada, mas o TO chama a atenção do grupo para o fato de que <u>a diferença deu só na primeira bola</u> e procuram por uma explicação do porque dá essa diferença.]

11. **ED**: *é por causa da canaleta* [que está torta] *ou por causa da medição, a gente tirou a média.*

12. **TO**: *eu acho que <u>não dá para saber</u>* [se referindo à diferença de variação de velocidade entre 1 e 2 metros com a bola de tênis].

13. **S**: *Mas <u>porque não aconteceu com a outra bola</u>. Devido ao <u>peso delas,</u> será que é?*

14. **TO** fala e escreve: *talvez tenha sido por causa das medições, que tenha sido <u>medido errado</u>*

15. **SI** é por causa do atrito, que na bola de pingue-pongue é menor [argumento que é aceito pelo TO mas que não inclui na sua resposta escrita].

Eles se satisfazem um pouco mais com os cálculos para a bolinha de pingue-pongue (linha 7) mas continuam intrigados com a diferença encontrada para a bola de tênis. Como ED e TO tinham papel de autoridade neste grupo eles lideram as enunciações e S quando fala não encontra adesões.

Nas linhas 8 e 13 vemos que a questão o intriga e que ED e SI não o convencem a pensar na gravidade, no atrito e ele escreve na folha para entregar apenas que as medições com a bola de tênis devem ter sido feitas erradas.

Cabe observar também que TO na primeira parte fala em torto para o que não está correto e bonitinho para o que está correto, e reforça o torto na medição errada. Usava-se antigamente a expressão “andar na linha” para dizer que o sujeito era correto e podemos inferir que andar torto seria errado. As mesmas inferências são encontradas na fala de TO, e ele se propõe a “desentortar” pensando num outro modo de resolver a questão e se expressa dizendo na linha 12 que não dá pra saber (como resolver este impasse).

Observamos que até aqui, segundo a teoria da atividade, a intenção da professora e do pesquisador na tarefa é alcançada; o fato de ter duas bolas gerou controvérsias. Caso houvesse apenas a bola de tênis o cálculo v = s /t foi imediato, o fato de a canaleta estar torta causava variação na velocidade e isto respondia satisfatoriamente ao grupo, como vimos até a linha 10, quando TO se dá conta e coloca para o grupo que as duas bolas percorrem a mesma canaleta. A atividade forçou o grupo a tomar outras ações, já que a ação de medir não era mais suficiente, era preciso descobrir o porque dessa variação, isto é, seria necessário fazer diferente, mudar de estratégia. Mas eles continuam usando a mesma e continuam se questionando como vimos até aqui e veremos adiante.

O último item da tarefa consistia em responder à questão: você concorda que a equação $S = 0{,}25\ t^2$, em que S é a distância em metros e t é o tempo em segundos dá uma aproximação dessa situação? Caso negativo, encontre uma equação que descreva a situação. Caso positivo, justifique.

Nossa intenção era a de oferecer uma tarefa que buscava a relação entre o que haviam feito até agora com material concreto - bolas, cronômetro, canaleta, réguas - e uma equação para este movimento. Queríamos provocar os alunos a falar sobre possíveis confrontos entre os resultados obtidos com a substituição de valores em uma equação e os resultados obtidos com o uso das bolas e da canaleta para descrever o movimento da bola na canaleta.

1. **TO**: *só vendo.*
2. **ED**: *vamos calcular*.
3. **TO**: *então vamos dar um valor para t e encontrar o S.*
4. Fazem os cálculos para t=1,93 (tempo médio medido para a bola de tênis percorrer o primeiro metro marcado na canaleta) e encontram S= 0,93.
5. **SI**: *está próximo de 1 metro.*
6. **TO**: *então vamos pegar o 1,58 porque o 1,49 e o 1,25 são suspeitos*
7. **ED**: *desculpa, você está pegando que medida? Você tem que pegar o tempo* [o ED chama a atenção do TO que os valores sugeridos são de velocidade média e não de tempo. Os cálculos são refeitos e concordam

que os valores *"estão dentro"*. Os valores encontrados, substituindo o valor médio do tempo medido na equação dada são os seguintes: t= 1,93s → S=0,93 m; t= 2,6s → S=1,69 m; t= 3,4s → S=2,89 m; t= 4,03s → S=4,06 m; t= 4,6s → S=5,29 m]

8. **SI**: *aqui o que ficou mais fora foi o* 2^{o}.
9. **ED**: *é. Mas é só uma aproximação. Vamos pegar a velocidade, por exemplo, vamos derivar e ver se dá para fazer pela velocidade. A derivada dela seria 0,5.t* Este argumento não foi aceito pelo grupo, ninguém deu importância para isso. A S começa a reler a questão, mostrando preocupação em justificar se dá certo a equação.
10. **ED**: *se você pensar na medição, ó, o 0,93 chegou muito perto de 1metro; o 2,89 chegou muito perto de 3; o 4,06 chegou perto de 4...*
11. **S** interrompe: *só o 2 que deu uma diferença grande*.

[TO sugere fazer os cálculos para a bolinha de pingue-pongue. No vídeo, dá a impressão de que ele não está convencido de que a equação dá uma aproximação da situação, conforme já acordado pelos outros integrantes do grupo]. Os resultados, para a bolinha de pingue-pongue, são os seguintes:

t= 2,09s → S=1,09 m

t= 3,07s → S=2,36 m

t= 3,98s → S=3,96 m

t= 4,81s → S=5,78 m

t= 5,58s → S=7,78 m

12. [O **TO** ressalta que os cálculos para a bolinha de pingue-pongue dão bem diferentes do esperado, a diferença é grande].
13. **S**: *por mais diferente que deu o tempo 2 na primeira bolinha, a primeira bolinha deu mais próximo*.
14. **TO**: *a primeira bolinha deu mais próximo*. [concordando com a fala da S].

[De fato, a equação dada foi obtida por nós com base em experiências feitas previamente com a bola de tênis e não com a de pingue-pongue.]

15. **S**: *o erro deve ser um detalhe de cálculo, de arredondamento, porque ele* [AL] *falou várias vezes 2,66; 2,67, 2,63; ficou 2,60*.
16. **TO**: *bom, eu não sei fazer!*
17. **ED**:*o movimento tem que ser parabólico mesmo, dá aproximado*.

18. **TO**: *então, mas, em vez 0,25 quem que é?* [Sinaliza que não está convencido com o argumento do ED].
19. **ED**: *a correção aqui vai ser.... 0,3? <u>Tenta fazer com 0,3.</u> Bom, vamos lá para a letra d* [da tarefa].

ED fala em usar a derivada e abandona, depois tenta explicar (linha 9) que o movimento tem que ser parabólico, explicação pautada no gráfico cartesiano de $S = 0,25\ t^2$, mas o grupo não adere. TO admite desde a resolução do item a que não estava entendendo e que não sabia como fazer, contra argumenta perguntando a ED (linha 18) qual seria então tal valor e ED oferece um valor entre os encontrados, coerente para ele mas sem fazer cálculos, e decide encerrar a discussão passando para o próximo item.

Parece que nesta parte da atividade a intenção da professora e dos alunos era distinta. Os alunos estavam preenchendo a ficha e, mesmo sem uma explicação que os satisfizessem, partem para a próxima questão. A fala de ED na L19 mostra que ele não vai nem tentar um novo coeficiente apesar de ver que aquele não era preciso.

No próximo item os alunos teriam que usar a equação do item anterior (a dada ou a que encontraram) para calcular a distância percorrida e a velocidade média da bola em intervalos de tempo de 0,5 em 0,5 segundo, de zero a cinco segundos.

1. **TO**: *agora nós temos que <u>escolher a equação</u>.*
2. **S**: *a gente <u>vai ter que achar a equação</u>.*
3. **ED**: *a fórmula do <u>sorvete</u>...*
4. **SI**: *sorvete?...*
5. **ED**: $\underline{S= S_0 +V_0t}$ [esse argumento também é descartado pelo grupo].
6. **S**: *ele quer de 0 a meio, não é isso? Então seria a metade do espaço, não seria isso?*
7. **TO**: *tem que pegar meio, zero e fazer a diferença...* [o argumento da S é descartado, TO faz os cálculos.]

8. **S**: *mas qual o espaço de 0 a 0,5?*
9. **TO**: *por exemplo para o intervalo de tempo de 1 a 1,5 segundos: 0,25(1,5)*^{2} *– 0,25(1)*^{2} [e prossegue deste modo para os outros intervalos de tempo].
10. **ED**: *variou?*
11. **TO**: *é, variar, variou...*

É interessante observar que a fórmula da velocidade, logo no início da tarefa, v=s/t foi acatada pelo grupo mas a fórmula do “sorvete” é descartada. Duas hipóteses surgem para o cálculo da velocidade: H_1) a velocidade seria metade (média) do espaço e H_2) a velocidade seria a diferença entre os espaços encontrados. As duas eram diferentes $\frac{0,25.(0)+0,25.(1)}{2}=0,125$ e $0,25.(1)-0,25.(0)=0,25$ mas, mais uma vez, a voz de S não teve eco, sequer foi contestada. E, apesar de na linha 1 o TO afirmar que deveriam escolher uma equação, na linha 9 vemos que ele utiliza a equação dada no item anterior para calcular o que desejava.

Nem TO nem ED usam o coeficiente 0,3 falado pouco antes de passarem a trabalhar neste item da tarefa. O que nos leva agora a afirmar que de fato a tarefa não os motivou a se engajarem na mesma, fizeram porque a professora pediu.

Em seguida, a tarefa pedia que, usando um papel milimetrado, esboçassem um gráfico que mostrasse a distância percorrida pela bola e discutissem sobre que informações conseguiam extrair a partir desse gráfico e dos cálculos que fizeram. E que registrassem suas conclusões e justificativas.

Inicialmente, fazem uma discussão para estabelecer a escala, que é decidida de meio em meio. TO faz o gráfico, colocando o tempo no eixo horizontal e o espaço no eixo vertical.

1. **S** então aponta para o eixo horizontal e pergunta se ali não seria a distância. Mas **TO** responde que não sem se desviar do que estava fazendo. S continua intrigada.
2. **S** parte para uma conversa paralela com **SI**:
3. **S**: *está certo o que eles estão fazendo?*
4. **SI**: *acho que é para pegar a tabela e colocar os pontos.*
5. **S** (lê em voz alta o enunciado): *acho que aqui nós temos que fazer a tabela aqui em detalhes*.
6. **TO**: *nós temos que marcar esses números, ó* [apontando para os cálculos feitos com a equação]. *Ele quer saber assim a 1 segundo, onde a bola está.*
7. **SI**: *mas ele quer em função da experiência.*
8. **S**: *é, ele quer o que nós estamos vendo aqui*.
9. **TO** [pára por uns instantes]: *é, ela tem razão... Então teria que usar isto aqui* [apontando para a tabela das medições e aderindo à indagação das meninas].
10. **SI**: *vai dar linear isso aí* [sorrindo e olhando para os pontos plotados pelo TO no caderno dele].
11. **S**: *mas é linear.*
12. **TO** [termina de fazer o gráfico e desenha a linha passando pelos pontos, assobia um som ascendente]: *é, ela é uma parábola.*
13. **S**: *mas como vai dar uma parábola se a fórmula da velocidade média é delta s por delta t?*
14. **ED**: *a cada instante ela pega uma maior velocidade. O gráfico do espaço sobre o tempo jamais pode ser isto* [uma linha reta]. *O nosso problema aqui não é a velocidade.*
15. **TO**: *a velocidade vai ser uma equação do primeiro grau*.

[Levantamos aqui duas hipóteses: o gráfico é linear e o gráfico é uma parábola. Do item anterior podemos entender que S não havia concordado com a idéia da parabólica de ED, o que foi confirmado no diálogo acima. E ela prossegue o diálogo.]

16. **S**: *mas mesmo assim, se a gente fosse pensar na velocidade...*
17. ***ED**: pensa num objeto caindo no espaço, a cada segundo a velocidade vai aumentar 9,8. Aí sim gráfico vai ser linear* [S fica quieta].

18. **TO**: *o gráfico <u>realmente aparenta uma parábola</u>, conforme proposto na equação* [do item c].
19. **S**: *mas você concorda que quando usamos os dados não fizemos cálculo nenhum?*
20. **TO**: *é verdade.... Só que talvez <u>não seja aquela</u> né?* [referindo-se à equação do item c].
21. **SI**: *me passa um pouco o seu gráfico aqui. Aqui você usou a mesma escala, né? Mas isso pode ser por exemplo a equação t^2. A gente sabe que quando a gente multiplica por um número menor do que 1, <u>a parábola vai abrir</u>* [faz gestos com as mãos de abrir ou fechar a parábola], *então se a gente comparasse com a parábola t^2, usando a escala correta não dá para verificar o quanto mais ou menos que ela está aproximando, que ela está abrindo? Será que é realmente 1/4 ? Ou será que é 1 sobre 3 ou 1 sobre cinco?*
22. **S**: *mas a gente não consegue saber se é mais ou se é menos*.
23. **TO**: *<u>Conclusão?</u>*
24. **SI**: *a melhor maneira de concluir é <u>usar um software</u> e construir*.
25. **TO**: *é, <u>e fazer um gráfico direitinho</u>.*
26. **S**: *mas aqui a gente não...*
27. **TO**: *é usar um papel milimetrado.*
28. **SI**: *mas é mais ou menos. Vamos fazer usando a fórmula.*
29. TO: *é, vamos fazer*.
30. **S**: *os cálculos efetuados estão bem próximos, a gente <u>não está trabalhando com coisas precisas</u>.*
31. **TO**: *é, tem ora que ela está por cima e tem ora que ela está por baixo*.
32. **SI**: *mas <u>é só uma aproximação,</u> não é?*
33. **S**: *bem próximo, mas não chega a ser igual*.
34. [Lêem o final do enunciado: quais informações vocês conseguem extrair a partir desse gráfico e dos cálculos que fizeram?]
35. **S**: *que as duas funções, no caso, são praticamente iguais, são coincidentes*.
36. **TO**: *a curva obtida pelos cálculos é muito próxima da obtida pela equação* [escreve isto]. *<u>Que mais que é para falar?</u>*
37. **S**: *apresentar uma justificativa. Porque você acha que deu próximo?* [falando para o TO].

38. **SI**: *eu queria colocar que graficamente os resultados estão melhores do que os resultados na tabela, você não acha?*
39. **TO**: *é, eu não sei...*
40. **TO**: *que a distância aumenta com o tempo segundo uma equação do segundo grau.*

Aparecem novas controvérsias, o gráfico é uma linear ou é uma parabólica. Se parábola qual a "abertura" da mesma.

S quer entender porque não é uma reta e justifica na linha 13, ED na linha 17, ao contra argumentar, oferece como exemplo um corpo caindo em queda livre como um movimento que poderia ser representado graficamente por uma reta, S se sente intimidada com a fala sobre o aumento de 9,8 e se cala. TO que estava pensando sozinho retorna a trabalhar com o grupo aceitando a hipótese da parábola.

O diálogo entre SI e TO nas linhas 24 e 25 revela que para eles um software resolveria o problema e só então teriam certeza se era uma reta ou uma parábola, e sendo parábola de que tipo seria.

Está implícito que não se trata apenas de obter um gráfico mais bem desenhado, aqui se trata do gráfico mais bonitinho, mais direitinho de TO. Seria o gráfico correto que eles não haviam chegado ao consenso. Os alunos continuam com a mesma estratégia que não os ajuda e se justificam, dizendo que é só uma aproximação, como que enfatizando que só o computador faria corretamente.

Como querem concluir a tarefa e continuam sem saber como justificar suas ações, se perguntam nas linhas 6, 7, 8 e 36 "o que ele quer", "que mais é para falar". Ele, aqui, além do próprio problema é também o pesquisador e/ou quem fez tal enunciado. Cabe observar que os alunos se apropriam do texto, tarefa no caso, e por isso dialogam com "ele", ainda que de um modo distinto do que o professor esperava neste momento. A oportunidade de enfrentar de outro modo esses confrontos surge na discussão com a turma toda como veremos no episódio 4.

4.4 Episódio 4: Velocidade Média e Velocidade Instantânea

A professora abre a discussão com a turma toda e MEL vai à lousa. É importante observar o ambiente de confiança e descontração, MEL inicia a comentar o trabalho de seu grupo, outros se levantam e vão à lousa, outros se levantam e interagem a partir de seu lugar, nem a câmera os intimida.

A transcrição com comentários, mais uma vez pode levar o leitor a participar deste momento da aula e por isso segue abaixo.

1. **MEL**: *nós observamos que a velocidade aumentou com o passar do tempo e a justificativa aí é por causa da aceleração, então a velocidade aumentou porque houve aceleração*.
2. **PROF:** *todo mundo concorda?* [não houve manifestação de ninguém na sala].
3. **MEL:** *no item c, nosso grupo concordou com isso, não analisando cada caso isoladamente, mas sim todo o trajeto do corpo aqui na canaleta. Então pelo todo a gente concorda que houve sim... que está certa esta equação do espaço..*
4. **PROF:** *espera aí, fala melhor que eu não entendi. Como é que é a história do olhando para o todo?...*
5. **MEL:** *nós usamos os tempos* [das medições feitas com a bola de tênis] *e usando a equação 0,25 vezes o tempo elevado ao quadrado, então analisando estes resultados, nós concluímos que sim, que é válida essa equação. Há um aumento de espaço, ele é crescente e...*
6. **ALU**: *mas é uma aproximação*.
7. **MEL**: *é, é uma aproximação*.
8. **OLG**: *mesmo com a levinha?*
9. **MEL**: *mesmo com a levinha, nós fizemos com a levinha e com a mais pesada*.
10. **AL** [o aluno que fez as medidas]: *eu acho que a medida dois aí ... eu acho que ficou um pouco fora, né. Aí teria que ser uns 2,70; 2,73 porque a diferença de tempo ... a tendência é diminuindo, cada um metro o tempo é menor. Se você analisar de 2 a 3 metros ficou 0,8 de diferença e no resto 0,67, etc. Se você analisar para os outros, a diferença* [de tempo] *vai diminuindo. Eu acho que esse 2,6 aconteceu algum erro na hora de marcar* [todos do grupo concordam

com o erro de marcação]. *Esse de 2 a 3 acho que deveria ser algo próximo de 2,7 ...2,75 para que a velocidade fosse aumentando no tempo.*

11. **MAG** [ela se levanta]: *mas o que conta é o espaço total percorrido, o que no caso é igual a 5. Porque se a gente for fazer em cada instante separadamente só existe uma aproximação, que não dá certo esta equação. Mas se considerar o delta s igual a 5 ele vai dar uma aproximação muito grande*.
12. **AA**: *com a bola 1...*
13. **MAG**: *com a bola 1, com a bola 2 nós não fizemos.*
14. **AA**: *é, porque com a bola 2 dá bem diferente...*
15. **PROF:** *então qual seria a melhor equação para a bola 2?*
16. **AI**: *a bola 2 está se aproximando de alguma coisa assim, 0,17 t ao quadrado*
17. **OA**: *a gente colocou t quadrado dividido por 5,27 deve ser o mesmo valor....*
18. **MEL:** *na situação d, que nós tínhamos os dados, de 0 a 0,5 segundo, nós viemos fazer a experiência aqui pra perceber o que nós tínhamos que construir. Nós fizemos aí o cálculo da velocidade média e percebemos que temos calcular no instante zero depois no instante zero cinco e depois fazer essa diferença. E fomos perceber isso na prática, aqui na canaleta. Porque a gente tava fazendo errado, tava calculando de maneira errada. Os cálculos estão aí?* [fala para um integrante do seu grupo] *Me empresta um minutinho?* [Ele levanta, vai na lousa e coloca os cálculos que fizeram]: $S1=0,25.(0)^2=0$; $S2=0,25.(0,5)^2=0,0625$; $\Delta S=0,0625$ [Colocam os resultados da velocidade média para cada um dos intervalos de tempo.]
19. **MEL**: *fizemos o delta s em cada intervalo e calculamos a velocidade média também naquele espaço. Tudo isso para concluir que a velocidade ia aumentando. Por que ela está aumentando? Por causa da aceleração.*
20. **PROF**: *todo mundo achou a mesma coisa?* [A classe responde que sim].

[A professora pede para alguém ir a lousa para falar do gráfico]

21. Quem vai é o TO e o ED.
22. TO [mostra para a câmera e para a sala os gráficos que ele fez]: *o azul é o da fórmula e o lápis é dos valores da tabela. Confesso que escala está mais a mão do que na régua. S está nas ordenadas e t nas abscissas.*
23. **PROF**: *você estava falando de pontinho azul, de coisas a lápis, por que é que você sentiu necessidade de falar isso?*

24. **TO**: *a gente fez inicialmente <u>o gráfico a lápis</u> com os valores encontrados na <u>experiência</u>. E aí a gente sentiu graficamente* [apontando para o gráfico dele no caderno] *que daria uma parábola, né. E aí fizemos depois com a outra função que a gente achou que não batia com a experiência, que era o <u>$0{,}25t^2$ pra ver graficamente</u> isso, né. Porque a gente tinha os valores e tinha a função e fazendo o gráfico a gente consegue ver as duas coisas, consegue ver os valores obtidos pelos cálculos e os valores obtidos pela função e aí deu pra perceber que elas são muito próximas as curvas, não é exatamente, mas é muito próximo. Pelo menos para uma das bolas, acho que foi a primeira bola.*

[Até aqui os alunos estavam falando dos itens referentes à velocidade média, agora passam a falar sobre o item da velocidade instantânea.]

25. **ED**: *a letra f que pede pra que a gente possa encontrar a velocidade da bola nos instantes feitos aí pelas marcas 1, 2, 3 ou qualquer uma outra no caso da canaleta e essa aproximação pela velocidade instantânea. Então a gente usou essa aproximação* [apontando para a fórmula $S=0{,}25t^2$] *e aí na hora em que foi pedido para achar a velocidade, né<u>, primeiro nós achamos a velocidade em cada instante</u>* [aqui ele faz uma explicação, apontando para a tabela que colocou na lousa].

S Distância	T Tempo	V=s/t	
1m	1,93	0,51	
2m	2,6	0,76	
3m	3,4	0,88	
4m	4,03	0,99	
5m	4,60	1,08	

26. **ED**: *então na hora em que fomos <u>procurar a velocidade</u> aqui, a primeira coisa que a gente pensou foi <u>a derivada,</u> né. <u>Então vamos derivar para achar a velocidade</u>.* [Como os cálculos deram muito diferentes da velocidade média ele os abandona]*. Então aí a gente pensou, vamos então achar uma <u>outra maneira</u>. A gente sabe que velocidade é espaço sobre o tempo* [escreve a

fórmula v=s/t, t=s/v e ele prossegue com manipulações algébricas: S=0,25.(s/v)^2; S=0,25.S^2/v^2; V^2=0,25.S^2/S; V^2=0,25.S; $V = \sqrt{0,25.S}$]. *E aí nós fizemos, para* *nossa surpresa*, *né, fizemos as medições*. [completa a tabela conforme segue:]

S (distância)	T (tempo)	V=s/t (média)	$V = \sqrt{0,25.S}$ (instantânea)
1m	1,93	0,51	0,5
2m	2,6	0,76	0,71
3m	3,4	0,88	0,87
4m	4,03	0,99	1
5m	4,60	1,08	1,12

27. **PROF**: *e se derivasse?*

28. **ED**: *derivada não dá* [risos do ED e da turma].

[A professora escreve na lousa *"o que significa velocidade instantânea?"*, sem falar nada]

29. **ED**: *pelas nossas marcações é isso que a gente achou. O TO já tá calculando, já...* [Neste ponto o TO está no canto da lousa calculando a velocidade pela derivada].

30. **ED**: [completa a tabela com mais uma coluna]: *aí é de cinco em cinco então fica fácil, né. E aí fica bem longe da nossa velocidade marcada. A derivada realmente, fica bem diferente.*

S (distância)	T (tempo)	V=s/t (média)	$V = \sqrt{0,25.S}$ (instantânea)	Vi=0,5.t
1m	1,93	0,51	0,5	0,965
2m	2,6	0,76	0,71	1,3
3m	3,4	0,88	0,87	1,7
4m	4,03	0,99	1	2,015
5m	4,60	1,08	1,12	2,3

31. **PROF**: *velocidade instantânea é o que? Velocidade média é o que? Imagina uma situação* [comenta uma situação de um automóvel que está andando no trânsito, as multas de excesso de velocidade] *O que é vocês diriam que é* *velocidade média aqui? Tem alguma coisa que está acontecendo com relação às contas que vocês fizeram ... O que é que as fórmulas de velocidade apontadas no quadro têm de igual ou de diferente umas com as outras?*

32. **AA**: *é que ali tá pegando o intervalo, a média, né*. [terceira coluna]

33. **PROF:** *vai que aquela velocidade instantânea não tem nada a ver com a derivada* [num tom de provocação] *e a gente está descobrindo isso aqui agora...*

34. **AA**: *é que eu pego a velocidade em dois instantes, a instantânea em dois instantes e daí eu calculo a velocidade média. Na tabela você calcula a velocidade instantânea em um tempo e não a velocidade média em um intervalo.*

35. **ED** interrompe**:** *então tá, aqui ó, o que vocês acham que deve ser feito para encontrar a velocidade da bola no instante em que ela atinge as marcas feitas na canaleta?* [lendo o enunciado do item f da atividade]. *Então nós usamos este processo aqui* [apontando para a coluna $V = \sqrt{0,25.S}$] *mesmo que seja uma aproximação da velocidade instantânea, então mesmo se for no caso da derivada, então eu acredito que no caso as duas são aproximações*. [justifica que os cálculos que fez com a fórmula $V = \sqrt{0,25.S}$ está bem próximo da fórmula V=s/t]. *Eu acredito que essa aqui está bem próxima da velocidade instantânea e essa aqui da velocidade média, mesmo* [apontando para as colunas V=0,5t e $V = \sqrt{0,25.S}$], *que é o que nós calculamos aqui nessa primeira coluna.*

36. **ED:** *Então ali não é a velocidade .... é naquele instante. Aquele valor da derivada é o coeficiente angular* [não encontra adesão].

37. **PROF**: *nós temos três velocidades nesta tabela.*

38. **ED:** *essas duas na verdade são iguais* [*(v=s/t) e* $V = \sqrt{0,25.S}$], *dá uma diferença por causa do cronômetro.*

39. **PROF:** *mas a equação é outra* [fala das fórmulas].

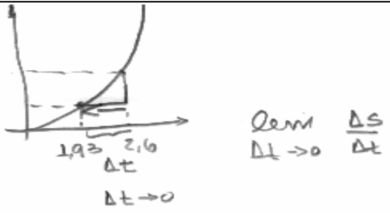
40. **ED:** *a segunda e a terceira coluna são velocidade média e a última com certeza é a velocidade instantânea* [sem comentar sobre as fórmulas].

41. **PROF:** *Agora aí eu volto com a minha questão, por que instantânea é a derivada?*

[TO desenha o gráfico na lousa]

[AI que estava ansiosa para falar vai para a lousa e lê o começo do enunciado da questão f da atividade: o que vocês acham que deve ser feito para encontrar a velocidade da bola no instante em que ela atinge as marcas feitas na canaleta.]

42. **AI:** *então vamos escolher o instante de tempo 1,93 seg. Poderia ser qualquer outro, mas vamos escolher este aqui* [aponta com o dedo o ponto da curva e não o instante 1,93 no eixo das abscissas]. *Então a idéia é a seguinte, eu vou levar em conta o conhecimento adquirido em aulas anteriores. Eu vou levar em conta que essa é a curva aqui que eu estou estudando* [fazendo gestos com o braço, acompanhando a curva] *e se eu estivesse me preocupando com esses dois pontos aqui eu traçaria aquela reta secante* [refere-se ao próximo ponto da curva marcado pelo TO]. *Se eu fosse calcular a inclinação dessa reta secante aqui, eu utilizaria esse método do triângulo retângulo pra calcular a inclinação dessa reta secante* [desenhou um triangulo retângulo na lousa usando os dois pontos] *e eu calcularia essa inclinação pelo delta s sobre delta t, a inclinação da reta secante, tudo bem? Aí por esse cálculo aqui, delta s sobre delta t eu teria uma velocidade média nesse intervalo. Só que eu quero estudar no instante 1,93 então para estudar no instante 1,93 eu imagino esse delta t aqui, essa variação do tempo, eu imagino essa variação do tempo pequena, bem pequena. Então eu faço esse delta t tender a zero, eu vou diminuindo isso daqui e conforme eu vou diminuindo isso daqui, nós vimos inclusive na aula em laboratório que esse ponto daqui vai se aproximando desse ponto, tudo bem? Então a idéia é a seguinte, na verdade, quando eu vou calcular a velocidade instantânea, o que eu estou calculando não é mais o delta s sobre o delta t, é o limite do delta s sobre delta t para o delta t tendendo a zero* [escreve este limite]. *E isso aqui também foi visto lá em laboratório, analisando aqueles gráficos, tudo, isso aqui vai me dar a inclinação da reta tangente a esse gráfico por este ponto* [apontando para o ponto da curva] *e essa inclinação da reta tangente a esse gráfico por este ponto é a derivada primeira dessa função. Então é por isso que o nosso grupo responde que pela derivada a gente encontra a velocidade em cada instante.*



[Anotações feita por AI enquanto explana sobre cálculo de velocidade instantânea]

43. A professora pergunta se todo mundo entendeu e há um silencio na sala.

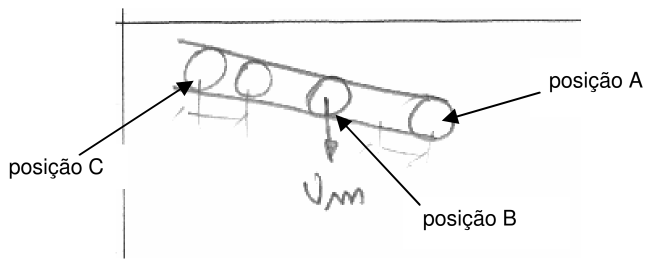
44. **ED:** *pelo ensino tradicional, velocidade é espaço pelo tempo. Fizemos os cálculos usando a fórmula com raiz quadrada porque dá bem próximo dos cálculos da segunda coluna e também fizemos as contas pela derivada, mas descartamos porque deu muito diferente da segunda coluna. Como explicar isso?*

45. **PROF:** *uma boa explicação é a que nossa amiga deu.*

46. **ED:** *mas usando estes dois grupos* [fazendo pela fórmula que envolve raiz quadrada e pela derivada]. *Como entender essa diferença?*

47. **PROF**: *a fórmula v=s/t traz embutida variação de espaço pela variação do tempo, traz embutida o cálculo da inclinação de reta secante. Esta fórmula na verdade, traz um intervalo de tempo e o limite traz o instantâneo.O instantâneo só existe no limite!*

48. **ED:** *A bolinha vem aqui pegando velocidade* [desenha uma canaleta e vai fazendo desenhos de bolinhas em diversas posições da canaleta] *e aqui* [posição A] *ela está bem mais rápida. O que se tem aqui* [posição B] [apontando] *é uma média, é uma velocidade média. Essa velocidade é o pouquinho que foi compensado aqui* [posição C] e *aqui* [posição A] [na marcação de 1 metro da canaleta] *ela está bem rápida. Aí o aluno vai entender que vai estar próximo disto daqui* [apontando para o valor da derivada em 1m].



A tarefa sobre velocidade média e velocidade instantânea com a canaleta e bolinhas, ofereceu um texto distinto de derivada da função e derivada num ponto do domínio da função. Apesar de nos livros didáticos aparecer como exercício, nós achamos que para cada prótese teríamos uma produção de significado e, como vimos, nos episódios 1 e 2 falou-se bastante sobre a função, a reta secante, a reta tangente e aqui os objetos falados foram outros.

Três hipóteses serviram de base aos alunos na plenária com a classe: H_1) v=s/t; H_2) v= Δs/Δt; H_3) $V = \sqrt{0{,}25.S}$; enquanto H_4) V=0,5t foi inicialmente descartada por apresentar valores "muito diferentes das demais". O argumento *velocidade é espaço pelo tempo* deveria dar conta de qualquer tipo de velocidade. Este argumento foi usado desde o início da aula, nos grupos pequenos, e depois com a classe toda. Depois da explicação de AI, ED quebra o silêncio na linha 44 trazendo novamente este argumento, mas acrescentando "pelo ensino tradicional". O que diz é que durante sua escolaridade, com o ensino tradicional, esta fórmula sempre deu certo, sempre deu para ele responder aos problemas propostos e agora não dá mais. Ele continua pensando e se expressa de maneira multimodal, usando a fala oral, um desenho e gestos sobre o desenho.

ED e seu grupo manipulando fórmulas encontraram praticamente os mesmos valores para velocidade média e velocidade instantânea pois não mudaram radicalmente a maneira de pensar sobre a velocidade, ou seja, as inferências eram da mesma natureza. Os argumentos eram os mesmos, até depois da fala de AI.

Observamos que AI, ao falar de como seu grupo calculou a velocidade instantânea, afirma na linha 42 que "*na verdade, quando eu vou calcular a velocidade instantânea, o que eu tô calculando <u>não é mais</u> o delta s sobre o delta t, <u>é o limite do</u> delta s sobre delta t para o delta t tendendo a zero"* evidenciando a necessidade de pensar diferente.

A fala da AI evidencia que este processo de compreender as diferentes taxas de variação não é o caso apenas de uma passagem de uma fórmula a outra ou de uma reta no gráfico a outra, é bem mais complexo. É preciso mudar a estratégia, não é mais o argumento que dava certo para calcular a velocidade média, é o limite que vai permitir o cálculo da derivada naquele ponto do gráfico.

Além disso, AI explicita que está fazendo relações entre o que aprendeu antes e a experiência com a canaleta para responder a questão pedida.

O mapeamento que usa tem dois espaços de partida, o que foi visto nas duas tarefas no computador: os gráficos das simulações e fórmula analítica. A metáfora básica não dá conta de explicar o processo. Temos agora dois espaços de partida e um domínio que não é mais apenas alvo, pois temos duas direções de ação, como vemos abaixo.

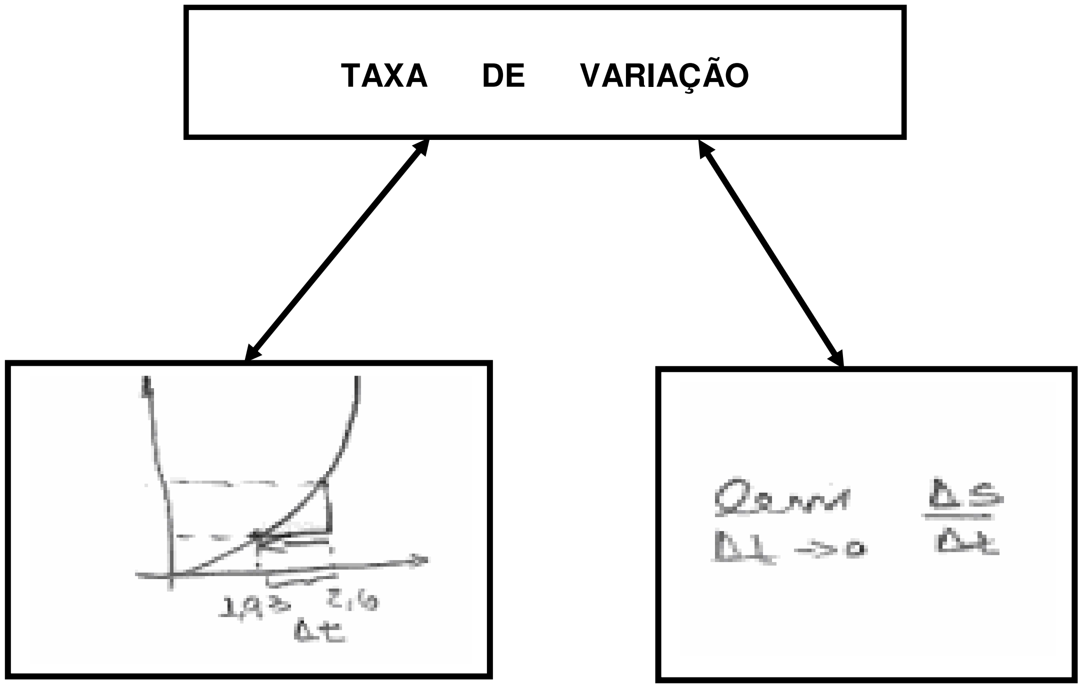


Figura 4.13 – mapeamento com dois espaços para a taxa de variação

Este é um caso de montagem conceitual, é preciso compreender a representação gráfica, a idéia de limite e a relação entre os dois é o que permite compreender a taxa de variação.

CAPÍTULO 5
CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo buscamos sintetizar alguns pontos encontrados na análise dos episódios que nos ajudaram a responder às questões propostas para a nossa investigação.

Os conceitos do Cálculo, em geral, são descritos por diversos autores (Sierpinska, Tall, entre outros) como difíceis de ensinar e anti-intuitivos. Nesta pesquisa, consideramos que intuitivos são aqueles conceitos que entendemos rapidamente e sem esforço – de acordo com nossa fundamentação teórica, estão relacionados com as metáforas básicas – e anti-intuitivos são aqueles que necessitam de maior interferência para a aprendizagem, pois encontramos metáforas de ligação, do movimento fictivo e montagens conceituais.

Núñez, Edwards e Matos (1999), quando investigaram a compreensão do conceito de continuidade de função, afirmam que existe uma incompatibilidade entre os mecanismos cognitivos usados para compreendê-lo a partir da noção natural de continuidade usada por Euler e a partir da definição moderna de Cauchy - Weierstrass. Em nossa pesquisa, observamos que existem dois mecanismos cognitivos diferentes atuando quando, na tarefa 1, os alunos produziram significados para a “reta secante que vira reta tangente”. Inicialmente pensaram num mesmo ponto Q que, ao se mover, virava P. Neste momento a metáfora empregada PONTOS SÃO OBJETOS FÍSICOS NO ESPAÇO dava conta de explicar o movimento, mas não deu conta de explicar que um ponto Q no plano cartesiano não tem dimensão, mas tem localização dada por sua abscissa e ordenada. Cabe observar que de um lado, temos a noção dinâmica que está intrinsecamente ligada à definição da derivada quando dizemos que o ponto Q se aproxima de P na definição $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, enquanto que de outro lado, temos as localizações de Q que são discretas e estáticas. Observamos que a discussão na plenária ao final da tarefa 1, proporcionou falar desses dois mecanismos, possibilitando fazer uma nova relação entre os mesmos: *"para o computador fazer isso ele tem que pegar vários pontos diferentes, vamos dizer assim entre aspas, para ele esse Q deve ter tido novos nomes..."*, conforme dito por AND.

A metáfora do movimento fictivo permitiu aos alunos conceituarem a derivada de uma função num ponto usando o esquema "fonte-caminho-alvo" que é dinâmico, enquanto que a fórmula para calcular a derivada é estática. Identificamos que a diferença entre os mecanismos cognitivos para compreender o gráfico – dinâmico / cotidiano - e a fórmula analítica – estático / formal - é responsável pela dificuldade dos alunos com esse tópico, e não apenas a definição formal.

Usando a prótese informática foi possível criar um texto onde o movimento fictivo, intrínseco da linguagem, se transformou em um movimento factivo na tela do computador. Isto é, quando reta secante virava reta tangente por sucessivas aproximações e quando a reta tangente à curva num ponto podia se mover, ao mesmo tempo os valores do coeficiente angular dessas retas podiam ser vistos na tela.

A tarefa sobre velocidade média e velocidade instantânea com a canaleta e bolinhas ofereceu um texto distinto do tradicional "calcule a função derivada da função *y=f(x)= fórmula analítica* e também a derivada dessa função num ponto x_0 de seu domínio", que foi contemplada no ambiente informático. Quando os alunos se apropriaram desse texto, observamos a necessidade de mudar de estratégia para calcularem uma e outra. A aluna AI evidencia que este processo de compreender as diferentes taxas de variação não é o caso apenas de uma passagem de uma fórmula a outra ou de uma reta no gráfico a outra, é bem mais complexo. É preciso mudar a estratégia, não é mais o argumento que dava certo para calcular a velocidade média, é o limite que vai permitir o cálculo da derivada naquele ponto do gráfico.

Para explicar esse processo foi necessário outro constructo teórico, pois a metáfora conceitual não deu conta. Assim como para explicar porque a água apaga o fogo não podemos pensar apenas no hidrogênio e nem apenas no oxigênio pois nenhum deles sozinho dá conta de apagar o fogo, é preciso usar os dois elementos para compor a água, que é a substância que apaga o fogo; nós precisamos buscar um novo mapeamento.

Vimos nessa pesquisa que para a compreensão de taxa de variação três espaços mentais foram utilizados: o de gráficos cartesianos, o de fórmulas analíticas, e um terceiro espaço que contém a relação entre os dois. Observamos, ainda, que não foi possível estabelecer mapeamentos unidirecionais, pois cada espaço mental alimentava inferências no outro e se alimentava das inferências dos demais. Isto evidenciou que de fato o processo é mais complexo que a passagem de um espaço a outro e esse tipo de mapeamento ainda requer futuras investigações.

Em relação à didática da sala de aula, a partir dos vídeos foi possível verificar a importância de proporcionar os diferentes momentos para discussão. Principalmente, o momento de discussão com a turma toda para que os diferentes TOs e EDs coloquem suas estratégias, suas dúvidas e modos de pensar em risco, num verdadeiro diálogo.

REFERÊNCIAS

AMIT, M.; VINNER, S. Some Misconceptions in Calculus – Anecdotes or the Tip of an Iceberg? In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 14., 1990, México. **Proceedings …** v.1, p. 3-10.

ANDERSON, R. D.; LOFTSGAARDEN, D. A special calculus survey: preliminary report. In: STEEN, L. A. (Ed.). **Calculus for a New Century: A Pump Not a Filter.** Washington, DC: Mathematical Association of America, 1987. p. 215–216.

ARTIGUE, M. Analysis. In: TALL, D. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 167-198.

BAKHTIN, M. (Volochinov). **Marxismo e Filosofia da Linguagem**. São Paulo: Hucitec, 1997.

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Portugal: Porto Editora ltda, 1991.

BOLITE FRANT, J. Tecnologia, corpo, linguagem: cognição. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2002, Curitiba. **Anais...** Curitiba: Universidade Federal do Paraná, Universidade Tuiuti do Paraná, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2002. p. 121 -134.

______ Corpo, tecnologia e cognição Matemática. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA (HTEM), 1., 2003, Rio de Janeiro. **Anais ...** Rio de Janeiro: IME – UERJ, 2003. p. 113 -122.

______ et al. Prótese ou Ferramenta: um olhar sobre o uso de tecnologia. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (SIPEM), 2., 2003, Santos. **Anais...** Santos: SBEM, 2003. 1 CD-ROM.

BOLITE FRANT, J; ACEVEDO, J.; FONT, V. Cognição corporificada e linguagem na sala de aula de matemática: analisando metáforas na dinâmica do processo de ensino de gráficos de funções. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n.46, p. 41-54, jan/jun. 2005.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. v. 7, n. 1, p. 33-115, 1986.

BRUNER, J. **Atos de Significação**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

CARLSON, M. P.; PERSSON, J.; SMITH, N. Developing and Connecting Calculus Student´s Notions of Rate-of-Change and Accumulation: The Fundamental Theorem of Calculus. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 27., 2003, Honolulu, Hawaii. **Proceedings ...** v. 2, p. 165-172.

CASSOL, A. **Produção de significados para a derivada: taxa de variação.** 1997. Dissertação (Mestrado) – Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista – UNESP, Rio Claro, 1997.

CASTRO, M. R. **Retóricas da rua: educador, criança e diálogos**. Rio de Janeiro: Petrobrás-BR: Ministério da Cultura: USU Ed. Universitária: Amais, 1997.

______ O papel da linguagem nas pesquisas em Educação Matemática: O modelo da Estratégia Argumentativa. **Palestra proferida no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).** [09 de out. 2003]. São Paulo, 2003.

______ Argumentação e provas em Educação Matemática. In: BAIRRAL, M.; GIMÉNEZ, J. **GEOMETRIA para 3º e 4º ciclos pela Internet**. Seropédica, RJ:EDUR, 2004. p. 134-137.

CASTRO, M. R.; BOLITE FRANT, J. Estratégia Argumentativa: um modelo. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (SIPEM), 1., 2000, Serra Negra. **Anais ...** Serra Negra: SBEM, 2000. p. 381-383.

______ Argumentação e Educação Matemática. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n.40, p. 53-80, ago. 2002.

CORNU, B. Limits. In: TALL, D. (Ed). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 153-166.

D´AVOGLIO, A. R. **Derivada de uma Função num Ponto: uma forma significativa de introduzir o conceito.** 2002. Dissertação (Mestrado) - Educação Matemática, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP, São Paulo, 2002.

DALL´ANESE, C. **Conceito de Derivada: uma proposta para seu ensino e aprendizagem**. 2000. Dissertação (Mestrado) – Educação Matemática, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP, São Paulo, 2000.

DEHAENE, S. **The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics**. New York: Oxford University Press, 1997.

DUARTE, N. A teoria da atividade como uma abordagem para a pesquisa em educação. **PERSPECTIVA**, Florianópolis, v. 21, n. 02, p. 279-3001, jul./dez. 2003.

EVEN, R.; SCHWARZ, B. Implications of competing interpretations of practice for research and theory in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics Education,** v. 4, issue 2-3, p. 283-313, 2003.

FERNANDES, A. J; MELLO, M. H.; MELLO, J.C. Ensino de Cálculo I: Evolução na UFF. In: ENCONTRO DE ENSINO EM ENGENHARIA, 7., 2001, Rio de Janeiro. **Anais eletrônicos.**... Disponível em: <http://www.dee.ufrj.br/VIIEEE/VIIEncontro/arquivos/19.pdf>. Acesso em: 12 maio 2005.

FILHO, O. P. F. O Desenvolvimento Cognitivo e a Reprovação no Curso de Engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA (COBENGE), 29., 2001. Rio Grande do Sul. **Anais eletrônicos.**... Disponível em: <http://www.pp.ufu.br/Cobenge2001/trabalhos/MTE06.pdf>. Acesso em: 12 maio 2004.

KRISTEVA, J. **História da linguagem**. Lisboa: Edições 70, 1988.

LAKOFF, G. The contemporary theory of metaphor. In: ORTONY, A. (Ed.). **Metaphor and Thought**. 2. ed. New York: Cambrigge University Press, 1993. Texto recebido por e-mail.

LAKOFF, G. ; JOHNSON, M. **Metaphors We Live By**. Chicago: University of Chicago Press, 1980.

______ The Philosophy in the flesh. New York: Basic Books, 1999.

______ Metáforas da vida cotidiana. Campinas, SP: Mercado das Letras; São Paulo: Educ, 2002.

LAKOFF, G.; NÚÑEZ, R. **Where Mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being**. New York: Basic Books, 2000.

LEME, J. C.M. **Aspectos Processuais e Estruturais da Noção de Derivada**. 2003. Dissertação (Mestrado) - Educação Matemática, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP, São Paulo, 2003.

LEONTIEV, A. N. The Problem of Activity in Psychology. In: WERTSCH, J. V. (Ed.). **The concept of activity in soviet psychology**. Armonk, NY: Sharpe, 1981. p. 37-71.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LINS, R. C. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (org). **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 75-94.

MALTA, I. Sobre um Método Não Tradicional para Aprender Cálculo. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA (HTEM), 1., 2003, Rio de Janeiro. **Anais ...** Rio de Janeiro: IME – UERJ, 2003. p. 213 - 220.

MANRIQUE, A. L.; ALMOULOUD, S. A. Uma seqüência didática para o conceito de limite de função. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM), 6., 1998, São Leopoldo, RS. **Anais...** São Leopoldo, RS: Universidade do Vale do Rio dos Sinos, 1998. v. 2. p. 516-518.

MARSETTO, M. T. **Aulas Vivas**. São Paulo: MG Editores Associados, 1992.

MEYER, C. **Derivada/Reta Tangente: Imagem Conceitual e Definição Conceitual**. 2003. Dissertação (Mestrado) - Educação Matemática, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP, São Paulo, 2003.

MURELATTI, M. R. M. **Criando um Ambiente Construcionista de Aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral I**. 2001. Tese (Doutorado) - Educação e Currículo, Supervisão e Currículo, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC- SP, São Paulo, 2001.

NASCIMENTO, J. L. Uma Proposta Metodológica para a Disciplina de Cálculo I. In: ENCONTRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 6., 2000, Rio de Janeiro. **Anais eletrônicos.**... Disponível em: <http://www.dee.ufrj.br/VIIEEE/VIEEE/artigos/4/04.doc>. Acesso em: 05 nov. 2004.

______ Uma Abordagem para o estudo de Limites com uso de Pré-Conceitos do Cálculo Diferencial e Integral. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA (COBENGE), 29., 2001. Rio Grande do Sul. **Anais eletrônicos.**... Disponível em: <http://www.pp.ufu.br/Cobenge2001/trabalhos/MTE082.pdf>. Acesso em: 05 nov. 2004.

NOBLE, J. et al. Learning to see: making sense of the Mathematics of change in middle school. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**. 9. Kluwer Academic Publisher, 2004. p. 109-167.

NÚÑEZ, R. E. Mathematical Idea Analysis: What embodied cognitive science can say abaut the human nature of mathematics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME), 24., 2000, Hiroshima, Japan. **Proceedings …** v. 1, p. 3 – 22.

______ Could the futures taste purple? Reclaiming mind, body and cognition. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.3, n. 2, p. 113-143, 2001.

______ Conceptual Metaphor and the Cognitive Foundations of Mathematics: Actual Infinity and Human Cognition. In: BAAQUIE, B.; PANG, P. (Eds.). **Metaphor and Contemporary Science.** University Scholars Occasional Papers Series. Singapore: National University of Singapore, 2003. p. 49 -72.

______ Do Real Numbers Really Move? Language, Thought, and Gestures: The Embodied Cognitive Foundations of Mathematics. In: LIDA F. et al (Eds). **Embodied Artificial Intelligenge**. Berlin: Springer-Verlag, 2004. p. 54 – 77.

______ ; EDWARDS, E; MATOS, J. Embodied Cognition as Grounding for Situatedness and Context in Mathematics Education. **Educational Studies in Mathematics**, v. 39, issue 1-3, p. 45-66, 1999.

ORTON , A. Students' Understanding of Differentiation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 14, p. 235-250, 1983.

PERELMAN, C. **Tratado da Argumentação – a nova retórica**. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M. & MAHER, C. Uma Abordagem à Análise de Dados de Vídeo para Investigar o Desenvolvimento de Idéias e Raciocínios Matemáticos de Estudantes. **Boletim de Educação Matemática** (Bolema), Rio Claro, Ano 17, n. 21, p. 81 –140, 2004.

SAUSSURE, F**. Curso de Lingüística Geral**. São Paulo: Cultrix, 1989.

SIERPINSKA, A. Obstacles Épistémologiques relatifs a la notion de limite. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** v.6 n.,1, p. 5 – 67, 1985.

SILVA, B. A. Contrato Didático. In: MACHADO, S. D. A et al. **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999. p. 43-64.

SILVA, B. A. e IGLIORI, S. B. C. Um estudo exploratório sobre o conceito de Derivada. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (EPEM), 4.,1996, São Paulo. **Anais...** São Paulo: PUC-SP, 1996, p. 323-330.

SILVEIRA, E. C. **Uma seqüência didática para aquisição/construção da noção de taxa de variação média de uma função**. 2001. Dissertação (Mestrado) - Educação Matemática, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP, São Paulo, 2001.

SPEISER, B.; WALTER, C. & MAHER, C.A. Representing motion: an experiment in learning. In: MAHER, C & SPEISER, R. (Eds.). **The Journal of Mathematical Behaviour**, New Brunswick, NJ, v. 22, n. 1, p. 1 – 35, 2003.

STEWART, J.; KEYNES, H. **Tolls For Enriching Calculus**. Release 2. Brooks/Cole – Thomson Learning, 2001. 1 CD-ROM.

STEWART, J.; RALPH, B. **Journey Through Calculus**. Version 1.1. Brooks/Cole – Thomson Learning, 1999. 1 CD-ROM.

TALL, D. O. Intuition and rigout: the role of visualization in the calculus. Visualization in Methematics, M. A. A., Notes No. 19, p. 105-119, 1991. Disponível em <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/calculus.html>. Acesso em: 10 jan. 2004.

______ Functions and Calculus. In: BISHOP, A. J. et al (Eds.). **International Handbook of Mathematics Education**. Dordrecht: Kluwer, 1997. p. 289-325. Disponível em <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/calculus.html>. Acesso: 10 jan. 2004.

TALMY, L. **Toward a Cognitive Semantics** – v. 1. Cambridge: The MIT Press, 2000.

VILLARREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas**. 1999. Tese (Doutorado) - Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista – UNESP, Rio Claro, 1999.

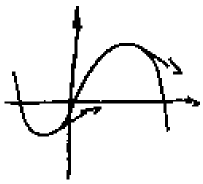
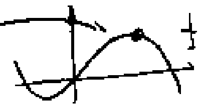
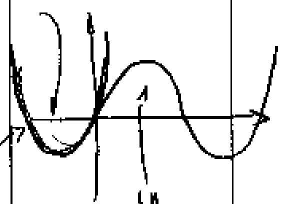
VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics. In: Tall, D. (Ed.). **Advanced Marhematical Thinking**. Dodretch: Kluwer, 1991, p. 65-81.

ANEXOS

ANEXO 1: Exemplo de documento com transcrição e apontamentos manuscritos.

ANEXO 2: Termo de Compromisso Ético.

ANEXO 1

1:09:50	**PROF:** *primeiro eu quero falar das inclinações da reta tangente em cada ponto* [apontando com a mão sobre um gráfico que desenhou na lousa]. *Depois eu quero falar das relações entre a primeira, a segunda derivada e a função. Quem vai começa?... Alguém que não foi até hoje.*	Retorno ao intervalo. Plenária
reta tg vai andando ↓ f↑, f↓	**S:** [se justifica, dizendo que andou estudando bastante e pede ajuda para os colegas ajudarem]. *Aqui, a derivada pelo que eu entendo é o seguinte: conforme ela vai andando, aqui é a reta tangente, conforme os pontos que ela vai andando, ela vai apresentando os valores e ela oferece o seguinto, que quando a reta tangente estiver apresentando o sinal positivo, significa que a função está crescendo, certo, OK?. Sempre ela é positiva, não é? [pedindo confirmação para colega]. Se a derivada der sinal negativo, significa que a função está decrescendo.*	 $f' < \rightarrow f\downarrow$
	[A professora pergunta para a classe se concordam com a afirmação e a classe responde que sim].	$\rightarrow f'(x) = +,\ f'(x) = -$
relação f' com cresc / decresc.	**S:** *então, aqui, no ponto a função vai mudar a inclinação da reta, aqui, quando ela chega nesse momento em que ela está crescendo e passa a decrescer ela ficá igual a zero... E a mesma coisa acontece quando ela estava decrescendo e passa a crescer.*	→ desenha na lousa :  $f' = 0$
	S: [lendo a questão colocada na ficha] ... *relação entre a inclinação da reta tangente e a derivada da função em cada ponto.*	
	AND: *se uma reta tangente tem o coeficiente angular positivo, a primeira derivada é positiva* [fazendo uma intervenção] **S:** *mas não significa o mesmo?*	
parábola ↓ concavidade	**S:** *a segunda derivada pelo que eu entendi, vai mostrar a concavidade, para que lado está voltada a concavidade, no caso, da parábola, que estamos estudando. Se acontecer, por exemplo, da concavidade ir crescendo, que ela pode às vezes estar negativa e ainda estar crescendo. Então se ela estiver decrescendo a concavidade é voltada para cima* [desenha um U]. *Agora a partir do momento que ela passa, que ela muda, a concavidade fica para baixo e ela passa a ter o sinal negativo...* [apontando o gráfico]. *É como se ela estivesse representando o* ax^2 *de uma função do segundo grau.*	$f''+$  $f''-$
bl. 27		

ANEXO 2

PUC-SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Campus da Marquês de Paranaguá
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

TERMO DE COMPROMISSO

Este termo tem como objetivo esclarecer os procedimentos de nossa pesquisa, principalmente no que tange a utilização dos dados nela coletados.

O material coletado -- as atividades realizadas, as gravações de vídeo, as transcrições, os registros escritos -- servirá de base para pesquisas que procuram entender melhor o processo de produção de significados em sala de aula de cursos de Cálculo. O acesso aos registros em vídeos será exclusivo do grupo de pesquisa e só poderá ser apresentado com autorização dos participantes, as transcrições e registros escritos terão seus nomes trocados por pseudônimos preservando a identidade dos sujeitos em sigilo. Nas pesquisas que utilizarem o material coletado não será feita menção à Instituição onde o curso foi realizado para a preservação da identidade do grupo.

As informações provenientes da análise desse material poderão ainda ser utilizadas pelos pesquisadores em publicações e eventos científicos.

São Paulo, _______________

____
Janete Bolite Frant - Coordenadora do Projeto

____
Claudio Dall'Anese

____
Sujeito da Pesquisa

____
M. Cecília Arena Lopes Barto

____
Antonio Luis Mometti