Renata Rossini

Saberes docentes sobre o tema Função:

uma investigação das praxeologias

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Pontifícia Universidade Católica

São Paulo

2006

Renata Rossini

Saberes docentes sobre o tema Função:

uma investigação das praxeologias

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **Doutor em Educação Matemática**, sob a orientação do Professor Doutor Saddo Ag Almouloud

Pontifícia Universidade Católica

São Paulo

2006

BANCA EXAMINADORA

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Oswaldo Rossini e Alexandra Rossini (*in memorian*)

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida e da inteligência que me incentivam a estudar cada vez mais e compartilhar as riquezas e as belezas do conhecimento com os meus semelhantes.

Ao meu orientador, professor Doutor Saddo Ag Almouloud, pela orientação segura, paciente e amiga; pelo incentivo e confiança nos momentos difíceis.

Às professoras Doutora Cláudia Regina Flores, Doutora Edna Maura Zuffi, Doutora Laurinda Ramalho de Almeida, Doutora Maria Cristina Menezes e Doutora Silvia Dias Alcântara Machado, por aceitarem participar da banca examinadora, além das criticas e contribuições inestimáveis que fizeram com que este trabalho ganhasse um nível maior de qualidade.

Às professoras doutoras: Maria José Ferreira da Silva e Maria Inez Rodrigues Miguel e mestres: Rosana Nogueira Lima, Vera Helena Giusti e Irene Pataki, pesquisadoras e dedicadas observadoras do projeto.

Aos professores José Nilton Alves da Costa e Marli Baron e à aluna Michele Médici, aluna de mestrado do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, pelo apoio e dedicação como observadores do projeto.

Aos professores Margarida, Pérola, Marcos, Juliano, César, Rosa, Flávio, Hortência, Túlio e Plínio e às estudantes Bruna e Nina, e outros que, embora de passagem, contribuíram para a concretização desta pesquisa, por dedicarem parte de seu tempo engajando-se em um projeto de aperfeiçoamento profissional.

A todos os colegas do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, parceiros de tantas horas.

Ao meu companheiro Antonio Carlos, pela compreensão, apoio e carinho.

À professora e amiga Vanda Bartalini Baruffaldi, pela revisão do texto.

Ao Conselho de Ensino e Pesquisa da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, pelas horas de pesquisa concedidas por meio da Bolsa de Capacitação Docente, sem a qual seria impossível a realização desta pesquisa.

ROSSINI, Renata. Saberes docentes sobre o tema Função: uma investigação das praxeologias. Tese (doutorado em Educação Matemática). PUC/SP. São Paulo, Brasil, 2006. 382 f.

RESUMO

Esta pesquisa trata das concepções e dificuldades de um grupo de professores sobre o conceito de função, da superação das mesmas ao longo de um processo de formação continuada. Embora existam alguns estudos a respeito das dificuldades de alunos e dos possíveis obstáculos ao ensino e aprendizagem deste tema, há necessidade de observar o que uma ação formativa significa para um grupo de professores do ensino fundamental e médio, devido não existir muitos trabalhos de pesquisa envolvendo docentes. Assim, este trabalho responde às seguintes perguntas: *Quais organizações matemáticas são mobilizadas durante a construção de uma seqüência de ensino sobre funções para uma 8ª série do Ensino Fundamental? Como os professores (re)constroem seus saberes docentes sobre o conceito de função?* A metodologia adotada utilizou uma ação-pesquisa no sentido de uma investigação colaborativa, visto que propicia a interação entre pesquisador e professores e sua prática em formação e em ação. O fundamento teórico baseou-se na *Teoria Antropológica do Didático* de Chevallard (1999) para modelar o conceito de função em termos de Organização Matemática e Organização Didática, associadas às concepções de função: interdependência de grandezas, máquina de entrada e saída, expressão analítica, padrão de regularidade de seqüências geométricas, correspondência entre conjuntos. Este fundamento deu subsídios para a análise de alguns livros de Matemática da oitava série e da produção dos professores ao longo de um processo de formação continuada. À medida que os docentes constroem as organizações didáticas, ao preparar uma seqüência didática para o ensino e aprendizagem de função para uma classe de oitava série, eles (re)constroem os seus saberes sobre função. No final, eles conseguem fazer uma relativa articulação entre as organizações mobilizadas, dando-lhes a possibilidade de criar novos conteúdos. Construir uma seqüência de ensino e acompanhar a sua aplicação em sala de aula fez com que os professores olhassem seus alunos de forma mais positiva e se sentissem mais valorizados no seu trabalho.

Palavras-chave: Formação de professores; função; organização matemática; organização didática; Teoria Antropológica do Didático; saberes docentes.

ROSSINI, Renata. Teacher knowledge on Function issues: an investigation regarding praxeologies. Thesis (Doctorate in Mathematics Education). PUC/SP. São Paulo, Brazil, 2006, 382 f.

ABSTRACT

The issues of this research are the conceptions and difficulties of a group of teachers regarding the function concept, and how they overcame them along a continuous formation process. Although there are some studies regarding the students' difficulties and possible obstacles to the teaching and learning of this theme, it is necessary to pay attention on what a formative action means to a group of primary and middle school teachers, since there are not many researches involving teachers. Therefore, this thesis answers to the following questions: *Which mathematical organizations are mobilized during the construction of a teaching sequence on functions for an 8th grade of Middle Education? How do the teachers build or rebuild their teacher knowledge on the function concept?* The adopted methodology used an action-research as a collaborative investigation, because it propitiates the interaction between the researcher and the teachers and their practice in formation and in action. The theoretical foundation was based on the *Anthropological Theory of the Didactic* of Chevallard (1999) to model the function concept as Mathematical Organization and Didactic Organization associated with function conceptions such as magnitude interdependence, in and out machine, analytical expression, pattern of regularity of geometric sequences and correspondence between sets. This foundation granted the analysis of some 8th grade mathematics books and teachers' production along a process of continuous formation. As the teachers build the didactic organizations by preparing a didactic sequence for the function teaching and learning for an 8th grade class, they analyse and rebuild their own knowledge on function. At the end, the teachers manage to get relative articulation between the mobilized organizations, and it allow them to innovate and create new exercises. Building a teaching sequence and following its applications in classrooms made the teachers look at their students more positively and also feel more valued at their work.

Key words: teachers' formation; function; mathematic organizations; didactic organization; Anthropological Theory of the Didactic; teaching knowledge.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

Sigla	Descrição
CENPEC	Centro de Estudos em Educação, Cultura e Ação Comunitária, sediado na cidade de São Paulo, tem como missão desenvolver ações que contribuam para a melhoria da qualidade da educação pública, subsidiando a implementação de políticas e privilegiando o aprimoramento dos agentes educacionais
CHIC	Classification Hierarchique Implicative et Cohésitive. Software orientado para o tratamento de dados estatísticos multidimensionais, concebido por Dr. Régis Grãs, no Institut de Recherche Mathématique de Rennes (IRMAR) na França e desenvolvido posteriormente por Dr. Saddo Ag Almouloud
ENEM	Encontro Nacional de Educação Matemática
EPEM	Encontro Paulista de Educação Matemática
HTPCs	Horas de Trabalho Pedagógico Coletivo
IMAG	*Laboratoire des Structures Discrètes et de Didactique*
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei n.9394 / 96
MEC	Ministério da Educação e Cultura
PCESP	Proposta Curricular do Estado de São Paulo
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais, entre os quais, os de Matemática, editados pelo MEC, em 1998
PEC	Projetos de Educação Continuada
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PUC-SP	Pontifícia Universidade Católica – São Paulo
SAEB	Sistema de Avaliação do Ensino Básico
TAD	Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard
Teia do Saber	principal programa de capacitação da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, criado em 2003, com o objetivo de atender educadores, supervisores, diretores, coordenadores pedagógicos desse Estado
UNICAMP	Universidade de Campinas
USP	Universidade de São Paulo

INTRODUÇÃO

O debate sobre a formação de professores tem ocupado um lugar destacado em congressos, seminários, grupos de pesquisa, incluindo as políticas públicas para a formação continuada, com o objetivo de melhorar a educação brasileira. A Pontifícia Universidade Católica – São Paulo (PUC-SP) em parceria com a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo tem realizado diversos Projetos de Educação Continuada (PEC).

Na qualidade de professora da Instituição, temos tido a oportunidade de participar, desde 1998, de alguns desses eventos e de outros projetos vinculados à formação de professores. O envolvimento com as ações formativas nos deram a vivência necessária para entender as dificuldades apresentadas pelos professores da rede pública de ensino do Estado de São Paulo.

A participação em um curso sobre formação de professores nos proporcionou a oportunidade de conhecer a contribuição de diversos pesquisadores neste assunto. O engajamento em um grupo de pesquisa contribui para a nossa formação pessoal no sentido de buscar as referencias sobre formação de professores de Matemática.

O nosso interesse no tema *função* orientou a busca de pesquisas sobre as dificuldades tanto de professores quanto de alunos em álgebra e, mais especificamente, em funções.

Estas duas vertentes - formação de professores e o conceito de função - compõem o pano de fundo para a apresentação deste trabalho de pesquisa, que está inserido em um projeto maior, que envolve professores da Rede Pública Estadual de Ensino do Estado de São Paulo. Esse projeto, denominado *O Pensamento Matemático - Formação de um núcleo de ensino e aprendizagem e pesquisa* tem quatro linhas de pesquisa*: Geometria, Pensamento Algébrico, Pensamento Numérico e Tratamento da Informação*. Seus temas transversais são: formação continuada de professores e alunos e educação à distância.

A literatura mostra que diferentes abordagens têm sido propostas para que o ensino de álgebra se torne significativo para os estudantes: generalização de padrões numéricos e geométricos e de leis que governam relações numéricas, resolução de problemas, resolução de equações com o auxílio de modelos concretos, introdução de situações funcionais, modelagem de fenômenos físicos e matemáticos. A abordagem funcional da álgebra envolve o conceito de variável e de função.

Neste trabalho, o estudo de funções está delimitado aos conteúdos sugeridos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, para o quarto ciclo do ensino fundamental (sétima e oitava séries).

O **objetivo** desta pesquisa é investigar a (re)construção de conceito de função em um grupo de professores de Matemática da Rede Pública Estadual de Ensino do Estado de São Paulo, ao desenvolverem coletivamente e aplicarem uma seqüência didática para o ensino e aprendizagem do tema em uma sala de oitava série dessa rede. Também pretende contribuir para a formulação de diretrizes destinadas à formação continuada de professores de Matemática e seu desenvolvimento profissional.

Sob o rótulo *formação continuada de professores* encontram-se muitas concepções. Garcia (1999, p.26) explicita o seu conceito sobre o assunto nos seguintes termos: constitui uma área de conhecimento e investigação centrada no estudo dos processos através dos quais os professores, em formação ou em exercício, trabalham individualmente ou em grupo, em experiências de aprendizagem através das quais adquirem ou melhoram os seus conhecimentos e competências. Tudo isso permite que eles possam intervir profissionalmente no desenvolvimento do seu ensino, com o objetivo de melhorar a qualidade da educação que seus alunos recebem.

O desenvolvimento profissional de professores ao longo de toda a carreira é, hoje em dia, segundo Ponte (1998), um aspecto marcante da profissão docente e tem a finalidade de tornar os professores mais aptos para conduzir um ensino da Matemática adaptado às necessidades e interesses de cada aluno e a contribuir para a melhoria das escolas, realizando-se pessoal e profissionalmente. Para esse autor, a capacitação do professor para o exercício da sua atividade profissional é um processo que envolve múltiplas etapas e que, em última análise, está sempre incompleto.

Razões de várias ordens **justificam** o estudo: a evolução histórica e a complexidade intrínseca do conceito de função, o seu papel central e unificador na

Matemática atual, a educação para a cidadania, a importância dada ao tema nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, o desempenho insuficiente em Matemática dos alunos de oitava série no Sistema de Avaliação do Ensino Básico – SAEB - os limites da formação inicial dos professores, as pesquisas que mostram o preparo inadequado para trabalhar com o conceito na sala de aula, a importância da formação continuada engajada no trabalho coletivo.

Um ponto fundamental é ser esse conceito não só considerado central e unificador na Matemática como também relevante em outras áreas do conhecimento, tais como, a Física, a Química, a Biologia, a Economia, a Administração, a Engenharia e também em áreas que surgiram devido às necessidades da sociedade contemporânea.

O exercício da cidadania requer, dentre outras qualificações, a compreensão de um mundo dinâmico, das dependências entre grandezas, a leitura e interpretação de tabelas e gráficos, pois os meios de comunicação de massa utilizam tais representações para noticiarem os mais variados assuntos.

Considerando que a escola deve preparar o aluno para que ele seja um cidadão crítico, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, editados em 1998, pelo MEC, orientam que o ensino da álgebra não pode se limitar a procedimentos mecânicos, mas sim, que deve garantir uma aprendizagem significativa e proporcionar condições para que o aluno analise a interdependência de duas grandezas. Para tanto, os autores desse documento consideram fundamental a compreensão de conceitos de variável e de função, bem como a representação de fenômenos tanto na forma algébrica como na gráfica.

Por outro lado, os PCNs (*ibid*, p.118) mostram que a noção de variável, de modo geral, não têm sido explorada no ensino fundamental e por isso muitos estudantes que concluem esse grau de ensino (e também o médio) pensam que a letra em uma sentença algébrica serve sempre para indicar um valor desconhecido, ou seja, para eles a letra é sempre uma incógnita.

No Brasil, é notório o baixo desempenho dos estudantes em Matemática em avaliações como aquelas realizadas pelo SAEB. Em 2003, este sistema avaliou cerca de trezentos mil alunos de quarta e oitava séries do ensino fundamental e do terceiro ano do ensino médio, em escolas públicas e particulares. Foram aplicadas provas de Português, com ênfase em leitura, e Matemática. Esse instrumento de avaliação propõe quatro estágios para a construção e desenvolvimento de habilidades na resolução de problemas, para a oitava série em Matemática: muito crítico, crítico, intermediário e adequado. Segundo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP), para todo o Brasil, ao se avaliarem, em 2003, as competências dos estudantes nos estágios de construção de competências em Matemática, para a oitava série, encontraram-se os seguintes percentuais: muito crítico 7,3 %, crítico 49,8 %, intermediário 39,7 % e adequado 3,3%.

Esses resultados mostram que, no Brasil, em 2003, menos de 4% dos estudantes de oitava série sabem interpretar e resolver problemas de forma competente; fazem uso correto da linguagem matemática específica; apresentam habilidades compatíveis com a série em questão; interpretam e constroem gráficos; resolvem problema com duas incógnitas utilizando símbolos matemáticos específicos e reconhecem as funções trigonométricas elementares; resolvem problemas simples envolvendo frações e porcentagens, equação de segundo grau, o conceito de proporcionalidade; resolvem expressão que utiliza as quatro operações, potências e raízes.

Segundo especialistas do INEP, o quadro pode ser explicado por um conjunto de fatores, formado por investimentos insuficientes, condições precárias de ensino, baixos salários, falta de bibliotecas nas escolas, má formação para o professor, dentre outros. Consideram que a escolaridade do professor é outro fator que está relacionado com o desempenho dos estudantes e propõem a valorização da formação inicial e continuada desses profissionais como ponto central de uma discussão da melhoria da qualidade do ensino.

A divulgação das avaliações como as do SAEB, dentre outras, pela mídia, faz com que a formação de professores seja um tema apontado pela sociedade como um problema nacional da maior importância. Concordamos com as palavras do jornalista Gilberto Dimenstein, ao relacionar educação, cidadania, escravidão e independência na exploração de petróleo:

> O movimento pela melhoria da educação para todos só tem comparação na história das conquistas da cidadania com a abolição da escravatura. Como a ignorância é uma forma de escravidão, a independência se conquista não só debaixo do solo mas dentro das cabeças –e aí que reside a energia de uma nação. (Jornal Folha de São Paulo, 23, abril, 2006, Caderno Cotidiano, p. C9).

A existência de fragilidades e limitações dos cursos de formação de professores são apontadas por Nunes (2000), ao estudar a produção teórica de pesquisadores nacionais e internacionais, produzidos na década de 90 sobre a formação inicial e contínua de professores.

Soares *et al.*(1997) consideram que a formação específica, nos cursos de licenciatura em Matemática ministrados no Brasil é realizada, de modo geral, com seu referencial centrado na prática do matemático profissional e não na prática do professores de ensino fundamental e médio. A conseqüência disso, segundo os autores, é uma deformação estrutural que ultrapassa os limites de uma simples falha no bloco da formação específica: a ausência de um olhar sobre o conteúdo matemático, a partir das necessidades concretas do ensino de fundamental e médio.

A pesquisa desenvolvida por Zuffi (1999, p.205), com professores, conclui que a forma como os conceitos matemáticos têm sido tratados nas licenciaturas não tem contribuído para desencadear a adequada reflexão sobre a linguagem matemática, por parte desses docentes.

Especificamente sobre álgebra, a pesquisa realizada por Pinto (1999, p.166), levou-o a afirmar que o curso de Matemática, que deveria ser o *locus* da construção das concepções mais adequadas ao ensino e aprendizagem dessa ciência, acaba se tornando *locus* do reforço de suas concepções anteriores.

Na mesma linha, Zuffi (1999, p. 205), considera que a mera apresentação do conceito de função aos professores e o seu uso formalizado em disciplinas avançadas como na Álgebra Linear, Álgebra Abstrata, Análise e Topologia que, em geral, constam dos currículos de muitas licenciaturas em Matemática, não têm sido suficientes para que os futuros professores ampliem suas imagens conceituais, para além daquela que lhes foi passada no ensino médio. São essas imagens que eles transmitem aos seus alunos.

No exterior, as pesquisas de Even (1990, 1998), Hitt (1998) mostram as dificuldades - não só dos estudantes de licenciatura americanos como também de professores, em articular as diversas representações de função.

Diversos autores têm apontado que o número de trabalhos relacionados às dificuldades de professores com o conceito de função é muito menor que aqueles que abordam os problemas de alunos. É um fato que tem sido constatado em muitos países, inclusive no Brasil.

A importância e os benefícios de um trabalho colaborativo com professores podem ser vistos nas pesquisas de Lastória e Mizukami (2002); particularmente com professores de matemática, em Ferreira (2004), Lopes (2004) e Silva (2005).

Os motivos explicitados nos incentivaram a identificar os **procedimentos metodológicos** mais adequados e coerentes para contribuir efetivamente para a melhoria do processo de formação de professores.

O método utilizado nesta pesquisa é o denominado pesquisa-ação. Nele, o pesquisador se introduz no ambiente a ser estudado não só para observá-lo e compreendê-lo, mas também para participar, com o objetivo de melhorar as práticas docentes. Nota-se, portanto, que o conhecimento não é produto de um estudo sobre a realidade: é a conseqüência de uma transformação da realidade. Mais precisamente, a nossa pesquisa pode ser tipificada como ação-pesquisa, segundo Barbier (2004), porque apresenta o tema, discutindo-o com os professores implicados no projeto.

O trabalho foi realizado com professores da rede pública estadual de ensino do Estado de São Paulo. Eles trabalharam conjuntamente na construção e aplicação de uma seqüência didática envolvendo o conceito de função e dirigida a alunos de uma oitava série do ensino fundamental de uma escola pública da região metropolitana da Grande São Paulo.

Quanto aos **aspectos teóricos**, esta pesquisa fundamenta-se na Teoria Antropológica do Didático, desenvolvida basicamente por Yves Chevallard, na França, na década de 1990. Esta teoria situa a didática no terreno da antropologia do conhecimento e, dessa forma, torna-se o estudo do homem (ou das sociedades) aprendendo e ensinando Matemática.

A noção de organização matemática permite modelizar o conhecimento matemático como atividade humana e proporciona não apenas um método de descrição e análise das práticas institucionais como também o estudo das condições de sua realização.

Essa teoria também permite abordar a complexidade que envolve a prática profissional do professor, que se encontra diante do problema de reconstruir as organizações matemáticas que aparecem nos programas oficiais e nos livros didáticos ao preparar um determinado tema para o ensino e aprendizagem em sala de aula, ou seja, focaliza as organizações didáticas para conduzir a aula.

Para analisar as aprendizagens dos professores adotamos a tipologia de conhecimento proposta por Shulman (1986), que abrange: conhecimento do conteúdo, conhecimento do currículo e conhecimento pedagógico do conteúdo. Este último se refere à maneira particular que cada professor possui para transformar conteúdo científico da matemática em conteúdo escolar, a ser ensinado ao aluno; é o único construído pelo professor. Incluímos as tipificações de saberes docentes, segundo Tardif (2002).

A presente pesquisa pretende abordar as seguintes **questões**:

O que significou, para um grupo de professores de ensino fundamental e médio da rede pública do Estado de São Paulo elaborar coletivamente uma seqüência didática sobre função e aplicá-la em classe?

Mais especificamente:

Quais organizações matemáticas são mobilizadas durante a construção de uma seqüência de ensino sobre funções para uma oitava série do Ensino Fundamental? Como os professores (re)constroem seus saberes docentes sobre o conceito de função?

A **estruturação** do trabalho compreende três partes. Nas duas primeiras são formuladas as questões teóricas e práticas, enquanto na terceira encontram-se as conclusões do estudo.

A Parte I está dividida em dois capítulos, que tratam dos conceitos matemáticos de função e dos conceitos de didática, respectivamente.

O primeiro capítulo apresenta as noções básicas de organização matemática em torno do objeto matemático *função*, sendo que uma seção é consagrada à história do conceito. Prossegue, relatando a importância e influência da chegada ao Brasil de matemáticos pertencentes ao grupo Bourbaki e faz referência ao modo como o conceito de função é enunciado atualmente em livros de álgebra, de análise e de cálculo, publicados no Brasil, particularmente, em São Paulo.

O segundo capítulo introduz a noção de organização didática, ferramenta de análise das organizações matemáticas encontradas em livros de oitava série, para o estudo do tema *função*.

Há uma revisão da literatura abordando pesquisas sobre função envolvendo somente alunos, somente professores e também alunos e professores. Esse capítulo apresenta ainda as sugestões para o ensino e aprendizagem de função, encontradas nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (terceiro e quarto ciclos) e na Proposta Curricular para o Ensino de Matemática no Ensino Fundamental, para o Estado de São Paulo; os critérios para seleção dos livros didáticos de oitava série, publicados em São Paulo, e os livros escolhidos; os critérios para a análise do(s) capítulo(s) dedicado(s) ao tema *função* e as respectivas justificativas; a análise segundo os critérios estabelecidos e as conclusões dessa análise.

A segunda parte do trabalho também está dividida em dois capítulos.

O primeiro capítulo discorre sobre desenvolvimento profissional de professores, os paradigmas utilizados em sua formação e as múltiplas visões sobre os saberes docentes necessários para a profissionalização do professor. Apresenta o problema de pesquisa, as questões norteadoras e hipóteses. A seguir, são apresentados os procedimentos metodológicos, bem como a justificativa da escolha de uma ação-pesquisa, envolvendo professores de Matemática em um trabalho cooperativo / colaborativo; as etapas da pesquisa, a coleta de dados, os questionários, os mapas conceituais. É apresentada a caracterização dos professores de Matemática envolvidos na pesquisa; as características da escola e sua diretora e dos alunos que participaram desta pesquisa.

O segundo capítulo descreve e analisa o experimento. A descrição apresenta os principais fatos ocorridos durante as dezoito reuniões realizadas nas dependências de uma instituição superior; o experimento piloto e as seis sessões realizadas com alunos de oitava série de uma escola pública estadual situada em um dos municípios da Grande São Paulo. A análise leva em conta a elaboração das organizações didáticas feitas pelos professores e as discussões sobre o objeto matemático.

A terceira e última parte é dedicada às conclusões finais do trabalho bem como são formuladas sugestões para outros estudos relacionados ao tema.

PARTE I

ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA E ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA

A *Teoria Antropológica do Didático*, desenvolvida por Yves Chevallard, desde os anos 90 do século passado, situa a atividade matemática no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais. Chevallard (1999, p.223) propõe um postulado básico para essa teoria, admitindo que toda atividade humana possa ser submetida a um modelo único, ou seja, uma praxeologia. Subir uma escada, digitar um texto, calcular o valor de uma função em um ponto, construir um gráfico, estas são atividades humanas, tarefas que devem ser realizadas.

No dicionário Aurélio, a palavra *tarefa* significa trabalho a ser executado, geralmente envolvendo dificuldades, esforço ou prazo determinado. Bosch e Chevallard (1999, p.84) consideram que o significado da palavra *tarefa* é muito aberto, pois engloba atividades muito diversas, e restringem esta noção de tarefa em matemática.

O que distingue a atividade matemática das outras atividades humanas é que, diante de uma tarefa, é preciso saber como resolvê-la. O “como resolver a tarefa” é o motor gerador de uma praxeologia: é preciso ter (ou construir) uma técnica, que deve ser justificada por uma tecnologia, a qual, por sua vez, precisa ser justificada por uma teoria.

Se a palavra técnica for entendida no seu sentido mais amplo, como uma maneira de fazer particular, uma pessoa aciona cotidianamente diversas técnicas, que podem ser mais ou menos bem sucedidas. Por exemplo, pode-se ter uma maneira de subir uma escada, um modo particular de digitar um texto e apresentar as justificativas para tais ações. Em matemática, a palavra técnica será utilizada como processo estruturado e metódico, às vezes algorítmico, que é um caso muito particular de técnica.

Chevallard (1999, p.232) considera que dado um tema de estudo, deve-se considerar, em primeiro lugar, a realidade matemática que pode ser construída, que será denominada de praxeologia matemática ou organização matemática; em segundo lugar, a maneira pela qual essa realidade pode ser estudada, que será denominada organização didática.

Acreditamos que esse referencial teórico seja adequado para fazer a investigação de uma problemática complexa: analisar a atuação do professor de Matemática no ensino e aprendizagem de função. Como o objetivo desta pesquisa é investigar a (re)construção de conceito de função em um grupo de professores de Matemática da Rede Pública Estadual de Ensino do Estado de São Paulo, ao desenvolverem coletivamente e aplicarem uma seqüência didática para o ensino e aprendizagem de função em uma sala de oitava série dessa rede, estamos interessados nas organizações matemáticas e didáticas em torno do objeto matemático “função.”

No primeiro capítulo, desenvolvemos as noções básicas de organização praxeológica ou matemática; apresentamos a história do conceito de função, desde a Antigüidade até a definição proposta no século XX, pelo grupo Bourbaki; um quadro que oferece uma síntese das concepções que surgiram ao longo dos últimos séculos. Ressaltamos a importância do estudo histórico, não apenas como testemunho da contribuição de muitos matemáticos, físicos, astrônomos, mas também como um registro do trabalho coletivo em resolver problemas. Veremos que a história do conceito de função apresenta momentos de rupturas, de conflitos, um processo de redefinições do mesmo.

Um dos mais importantes pensadores do século XX, o francês Gaston Bachelar (1884-1962) centraliza a epistemologia como o estudo do progresso do pensamento científico. Segundo esse filósofo, a epistemologia deve iluminar a verdadeira face do objeto da ciência e as maneiras de como ele foi constituído. Posicionando-se contra o culto acrítico do fato bruto e contra o mito da razão, propõe a noção de obstáculo epistemológico.

Ele pretende indicar o limite continuamente colocado e superado da pesquisa científica no seu processo de aproximações sucessivas da verdade, um limite epistemológico, ou seja, construído por um conjunto de condições que freiam a transformação de determinados quadros teóricos e a abertura de novas perspectivas. O caminho do saber coincide com esta contínua ultrapassagem dos obstáculos que o conhecimento científico reconhece. A figura teórica é aquela de ruptura epistemológica, estreitamente ligada com a noção de obstáculo epistemológico.

Com efeito, o desenvolvimento da ciência consiste na superação de determinados obstáculos conceituais e na elaboração de novos princípios e objetos de indagação. É evidente que o saber progredirá aos saltos, com mudanças de rota, revoluções teóricas. O princípio da ruptura exprime a dinâmica do saber em momentos de modificação, de fratura, o conflito entre “erro” e “verdade.” Não há ciência sem uma dialética entre “erro” e “verdade”, entre passado e presente. Uma dialética que obriga o cientista a um contínuo processo de retificação de disposições teóricas dadas historicamente.

O estudo histórico também abre a possibilidade de se fazer um levantamento nos livros didáticos, desde o ensino fundamental e médio, até o terceiro grau, das diversas maneiras de abordar esse conceito. Assim, completa o primeiro capítulo uma investigação de como função tem sido apresentada em certos livros de análise, álgebra e cálculo, editados no Estado de São Paulo. Além disso, fornece subsídios para o estudo, que será feito no segundo capítulo, das concepções presentes nos livros didáticos de oitava série.

No segundo capítulo introduzimos a noção de organização didática. Apresentamos as sugestões contidas em dois documentos oficiais: *Proposta Curricular do Estado de São Paulo e Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática* para o ensino e aprendizagem do conceito de função e analisamos as organizações didáticas encontradas em livros de oitava série, escolhidos segundo determinados critérios, para o estudo do referido conceito. Nesse capítulo também apresentamos uma revisão da literatura pertinente ao tema.

Todos esses estudos foram importantes porque embasaram a nossa ação de formação de professores, auxiliaram a compreensão das dificuldades dos professores em relação ao conceito de função. Também mostraram as diversas opções feitas por autores de livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio, editados em São Paulo, diante do tema – função, uma vez que os professores tendem a seguir as prescrições encontradas nos mesmos.

CAPÍTULO 1

ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA

1.1. Noções básicas

A noção de organização matemática, também denominada por Yves Chevallard de *organização praxeológica matemática*, permite modelar o conhecimento matemático como atividade humana. O conhecimento matemático é o produto oriundo de atividades com a intenção de resolver determinados tipos de questões ou tarefas que eram problemáticas para uma determinada comunidade, em um dado momento histórico. Para converter as tarefas problemáticas iniciais em rotineiras, isto é, para que pudessem ser realizadas de maneira relativamente eficaz, elaboraram-se determinadas maneiras de fazer, ou técnicas, as quais tinham que ser inteligíveis e justificadas para que pudessem existir.

A palavra praxeologia é formada por dois termos gregos, *práxis e logos,* que significam, respectivamente, prática e razão. Ela lembra que uma prática humana, no interior de uma instituição, está sempre acompanhada de um discurso mais ou menos desenvolvido, ou seja, de um *logos* que a justifica, que a acompanha e que lhe dá razão. Existem, portanto, dois níveis diferentes, mas inseparáveis, que vão se construindo e definindo em um processo dialético; *práxis* e *logos* estão intimamente relacionados e a articulação entre eles permite dar forma à praxeologia matemática.

As noções: (tipos de) *tarefas*, (tipos de) *técnicas*, *tecnologia* e *teoria* permitem modelar as atividades matemáticas. Em outras palavras, toda atividade humana consiste em executar uma tarefa t de determinado tipo T, por meio de uma certa técnica τ, que é justificada por uma certa tecnologia θ e a qual, por sua vez, é justificada por uma teoria Θ.

Na raiz da noção de praxeologia, encontram-se as noções de tarefas e de tipos de tarefas. Geralmente, uma tarefa (ou tipo de tarefa) se exprime por um verbo; por exemplo: calcular o valor de uma função em um ponto. Somente o verbo calcular é um gênero de tarefa.

Bosch e Chevallard (1999) enfatizam que toda prática institucional[1] pode ser analisada de diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras num sistema de tarefas relativamente bem circunscritas, que se desenvolvem no fluxo da prática; a realização de toda tarefa resulta colocar em ação uma técnica; as condições e exigências que permitem a produção e a utilização de tarefas e técnicas nas instituições implicam a existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas que se chama *tecnologia* da técnica. Toda tecnologia, por sua vez, precisa de uma justificativa, que se denomina *teoria* da técnica.

Em torno de um tipo de tarefa se encontra um trio formado por uma técnica, uma tecnologia e uma teoria, e isso constitui o que se chama *praxeolologia pontual*. Geralmente, em uma determinada instituição, uma teoria responde por diversas tecnologias, cada uma das quais, por sua vez, justifica diversas técnicas. Dessa maneira, segundo Chevallard (1999, p.229), as organizações pontuais se agregam em *organizações locais*, centralizadas em uma determinada tecnologia. Depois, as organizações locais se agregam em *organizações regionais*, formadas em torno de uma teoria. Avançando, as organizações regionais se agregam formando o que se denomina *organização global*.

O bloco [tarefa/técnica] é considerado o *saber-fazer*, ao passo que o bloco [tecnologia/teoria] é considerado o *saber.* Nesta perspectiva, no estudo do conceito de função, não se pergunta mais o que é função, mas quais são os tipos de tarefas a serem executadas e de técnicas envolvidas e quais são as respectivas justificativas tecnológicas e teóricas. Assim, o conceito matemático de função emerge dessas praxeologias, que existem em um dado momento histórico, em uma determinada instituição.

As organizações praxeológicas são dinâmicas, muitas delas envelheceram, quando seus componentes teóricos e tecnológicos perderam o brilho, a eficiência, quando deixaram de dar respostas satisfatórias para novos problemas. Assim, novas praxeologias surgem.

Faz parte da investigação preliminar deste trabalho o estudo da história do conceito de função. Tal estudo é importante porque permite: compreender as

---

[1] Para Chevallard, uma instituição pode ser um órgão governamental, uma escola, uma classe, um curso, a família, a sociedade, os programas de ensino.

necessidades e os problemas enfrentados pelos matemáticos ao longo dos séculos, até a constituição do objeto matemático; verificar que a construção do conceito foi um processo demorado, marcado por controvérsias, além de envolver outros conceitos presentes na análise matemática; entender que as tarefas, as técnicas e as justificativas das técnicas, que um dia foram construídas para dar respostas a questões colocadas em uma determinada época, foram reformuladas, ou até eventualmente abandonadas e que essa dinâmica possibilitou a conformação desse objeto matemático tal como hoje o conhecemos; conhecer as concepções e definições que foram emergindo ao longo do tempo, bem como os símbolos utilizados em cada época.

1.2. A história do conceito de função

Apresentamos o estudo da longa e tumultuada história sobre a formação da idéia de função, sua generalização e compreensão gradativa, a significação concreta que essa idéia adquiriu com o progresso do pensamento científico e filosófico. Este estudo se fundamenta nas pesquisas de Youschkevitch (1981), Monna (1972), Dieudonné (1990), Bourbaki (1976) e Stillwell (1989).

Segundo Youschkevitch (1981, p.9), as principais etapas do desenvolvimento desse conceito, até a metade do século XIX, são: a Antigüidade, a Idade Média, a Modernidade.

Na Antigüidade, o estudo dos diferentes casos de dependência entre duas quantidades não levou à criação de nenhuma noção geral de quantidades variáveis nem de funções. Na Idade Média, na ciência européia do século XIV, cada caso concreto de dependência entre duas quantidades era traduzido por uma descrição verbal ou por um gráfico, mais que por uma fórmula.

No período moderno, a partir do fim do século XVI e especialmente durante o século XVII, a classe das funções analíticas tornou-se a principal classe utilizada. Uma função analítica era geralmente expressa por meio de somas de séries infinitas. Para Youschkevitch (1981, p.9), o método analítico fez uma revolução na matemática, por causa de sua extraordinária eficácia, assegurando ao conceito de função um lugar central em todas as ciências exatas. Contudo, por volta da metade do século XVIII, essa interpretação de funções, como expressões analíticas, revelou-se inadequada. Isso levou à introdução de uma nova definição geral de função, que será mais tarde universalmente aceita na análise matemática.

Na segunda metade do século XIX, essa definição geral abriu amplas possibilidades para o desenvolvimento da teoria das funções, mas ocasionou, ao mesmo tempo, dificuldades lógicas que, no século XX, fizeram com que a própria essência do conceito de função fosse reconsiderada, como o foram todos os outros principais conceitos da Análise Matemática. Acrescentamos assim, um último período, a partir das controvérsias no início do século XX.

1.2.1. As tabelas na Antiguidade

Os matemáticos babilônios, em torno de 2000 a C, utilizaram largamente para os seus cálculos, as tabelas sexagesimais de quadrados e raízes quadradas, de cubos e raízes cúbicas, assim como outras tabelas. Tábuas de funções foram empregadas na astronomia babilônica para a compilação das efemérides do Sol, da Lua e dos planetas. Essas tabulações empíricas tornaram-se os fundamentos matemáticos de todo o desenvolvimento posterior da astronomia.

Mais tarde, ao longo da época de Alexandria, os astrônomos utilizaram teoremas de geometria e regras de interpolação para confeccionar tábuas de cordas, equivalentes efetivamente às tabelas de senos, que foram colocadas em uso pelos hindus alguns séculos mais tarde. A mais antiga tabela de cordas se encontra no *Almagest* do astrônomo Claudius Ptolomeu[2], em cujos trabalhos se encontram numerosas tábuas astronômicas. Nelas as posições do Sol, da Lua e dos planetas mudam de maneira contínua e periódica e a determinação dessas posições é feita por meio de procedimentos padronizados. Mesmo considerando que os astrônomos soubessem que as coordenadas dos corpos celestes mudavam periodicamente ou que os matemáticos soubessem que, numa circunferência, as cordas de comprimentos diferentes correspondiam a arcos de comprimentos diferentes, Youschkevitch (1981, p.14) é categórico ao afirmar que não havia nenhuma idéia geral de funcionalidade; não só faltam as palavras equivalentes ao termo função, mas também uma alusão à idéia mais abstrata e mais geral que unifica

[2] Segundo Boyer (1999, p112), Ptolomeu fez observações em Alexandria de 127 a 151 D.C.

dependências entre quantidades ou números sob alguma forma (descrição verbal, gráfico, tabela).

Segundo esse autor, na Grécia antiga e nas regiões helenísticas que se tornaram mais tarde províncias romanas, as funções, ligadas a problemas matemáticos e astronômicos, eram tabuladas com o emprego de interpolação linear. Nessa época, foram descobertos limites de quocientes de duas quantidades infinitamente pequenas como, por exemplo, o limite de $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ quando x tende a zero. Por outro lado, os processos de cálculo ou de determinação de limites concretos individuais nunca conduziram a uma formulação explicita dos conceitos gerais de seqüência, de variável, de limite, do infinitamente pequeno, de integral ou de teoremas gerais concernentes a esses objetos.

Os gregos examinaram os problemas de movimento, de continuidade e de infinito, mas as noções de velocidade e velocidade instantânea não foram introduzidas nesse período. Segundo Youschkevitch (1981, p.16), o pensamento grego ficou distante da concepção cinemática de uma quantidade fluente, característica do cálculo infinitesimal dos séculos XVII, XVIII e XIX.

Após o declínio das antigas civilizações, floresceu a cultura árabe, mas ela não levou a novos desenvolvimentos relativos à funcionalidade, apesar do aumento do número de funções utilizadas, como as trigonométricas, e do aperfeiçoamento dos métodos para tabulá-las (a interpolação quadrática é utilizada ao lado da interpolação linear).

1.2.2. A Idade Média - A Teoria da Latitude das Formas

Na Europa do século XIV, prosperaram as escolas de filosofia natural em Oxford e em Paris, as quais declararam que a matemática é o principal instrumento para o estudo dos fenômenos naturais. A doutrina da intensidade das formas, ou a teoria das *calculaciones* e sua parte mais importante, a cinemática, foi desenvolvida na Inglaterra, principalmente na direção cinemático-aritmética. Qualidades ou formas são fenômenos tais como o calor, a luz, a cor, a densidade, a distância, a velocidade etc, que podem possuir diversos graus de intensidade e que, de uma maneira geral, podem mudar continuamente entre certos limites dados.

Na França, onde o principal representante foi Nicole Oresme (1323-1382), essa doutrina se desenvolveu na linha da geometria. Para Stillwell (1989, p.65), Oresme foi a primeira pessoa que utilizou as coordenadas para representar a velocidade em função do tempo. Para traçar o gráfico da velocidade em função do tempo de um corpo que se move com aceleração constante, Oresme marcou pontos, representando instantes de tempo (ou longitudes) e, para cada instante, traçou, perpendicularmente à reta de longitudes, um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade. As extremidades desses segmentos estão alinhadas e formam a linha do ápice, como se observa na Figura 1.

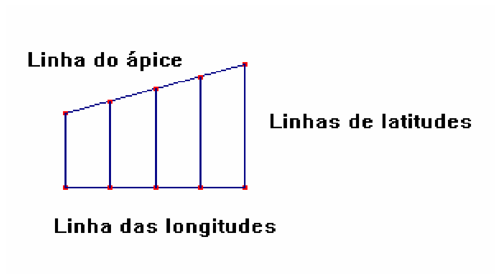


Figura 1 - Exemplo de um gráfico na Idade Média

Fonte: o autor

A latitude de uma "qualidade" é interpretada, de uma maneira geral, como sendo uma quantidade variável, dependendo de sua longitude, e a "linha do ápice" é compreendida como sendo a representação gráfica de uma certa relação funcional contínua. Assim, nessa teoria, uma função pode ser definida ou por meio de uma descrição verbal de sua propriedade específica ou por meio de um gráfico. Na linguagem matemática moderna, a latitude e a longitude poderiam ser chamadas de ordenada e de abscissa, respectivamente, com uma só reserva: as coordenadas utilizadas no século XIV seriam hoje para os pontos de uma curva dada, mais que para pontos arbitrários do plano.

Um resultado digno de nota dessa época foi a determinação da velocidade média de um movimento uniformemente acelerado (*Teorema de Merton*). Naquela época, uma aceleração constante era uma abstração teórica, pois, segundo Stillwell (1989, p.168), por volta de 1330, não havia clareza de que isto poderia ocorrer no mundo físico, como por exemplo, na queda dos corpos. Oresme fez a demonstração desse teorema utilizando um gráfico, conforme é mostrado na Figura 2.

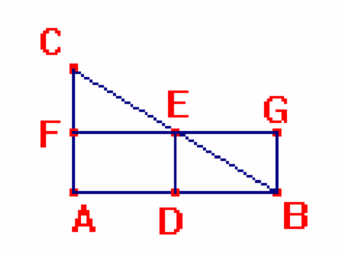


Figura 2 - Ilustração *do Teorema de Merton*

(Fonte: CLAGETT, 1968, p.409)

Youschkevitch (1981, p.20) afirma que, na Teoria da latitude das formas, o estudo das funções temporais é um elemento importante. Essa teoria alcançou um grande renome durante o século XV e na primeira metade do século XVI, particularmente na Inglaterra, na França, na Itália e na Espanha.

1.2.3. O período moderno

As idéias das escolas filosóficas de Oxford e de Paris tiveram um papel notável para a confecção da matemática da época moderna e, em particular, para o desenvolvimento da noção geral de *função*. Porém, esse papel não se mantém dominante, e uma nova interpretação da funcionalidade surge no século XVII.

Youschkevitch (1981, p.23) assegura que um papel decisivo para o desenvolvimento posterior da *teoria das funções* foi desempenhado, por um lado, pelo crescimento dos cálculos matemáticos como os progressos alcançados na trigonometria, a descoberta dos logaritmos e a extensão do conceito de número; por outro lado, pela criação da *álgebra simbólica* por François Viète (1540-1603).

Youschkevitch (*ibid*) coloca em evidência a introdução de numerosos símbolos para as operações e relações matemáticas (em primeiro lugar, aqueles de adição, de subtração, de potência e de igualdade) e, sobretudo, símbolos para as quantidades desconhecidas e para os parâmetros, que Viète, em 1591, denota respectivamente pelas vogais A, E, I,... e consoantes B, C, D,... do alfabeto latino. O simbolismo de Viète apresentava muitas insuficiências e foi bastante aperfeiçoado por outros matemáticos. O criador da álgebra simbólica não utilizou sua notável descoberta para fazer avançar o conceito de função.

Além desses fatores, as invenções de novos instrumentos científicos, ligados à metrologia física, no começo do século XVII, trouxeram precisão às experimentações e mensurações com a introdução de medidas quantitativas de calor, pressão etc. Com isso, as leis quantitativas da natureza adquiriram cada vez mais força, estabelecendo relações funcionais entre valores numéricos de quantidades físicas. Entre as ciências, a mecânica, reunindo-se com a astronomia, chega ao primeiro plano e, com ela, seu novo ramo – a dinâmica, junto com a mecânica celeste. O estudo das relações entre o movimento curvilíneo e as forças que o afetam tornou-se o principal problema da ciência.

Youschkevitch (1981, p.24) afirma que mesmo no fim do século XVI, as funções só eram abordadas através dos antigos métodos: por uma descrição verbal, por tabela ou por gráfico. A função logarítmica (a mais importante junto com as funções trigonométricas) foi introduzida com a utilização dos antigos métodos. O autor afirma que J. Burgi estabeleceu sua tabela de logaritmos (publicada em 1620) partindo da relação, conhecida por Arquimedes, entre a progressão geométrica das potências de uma quantidade e a progressão aritmética dos expoentes e utilizou o processo de interpolação, que o levou a compreender intuitivamente que essa relação devia ser contínua. Utilizando outro caminho, John Napier, cujo trabalho sobre logaritmos foram publicados entre 1614 - 1619, partiu da comparação de dois movimentos retilíneos contínuos.

Após a criação dos logaritmos, Youschkevitch (*ibid*, p.25) enfatiza que o *método analítico* para introduzir as funções por meio de fórmulas e equações começa a se destacar na pesquisa teórica, através dos trabalhos de Pierre Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650). Esses dois cientistas aplicaram a nova álgebra à geometria e apresentam, independentemente um do outro, o método analítico da introdução de funções, abrindo uma nova era em matemática.

Na sua obra *Ad locos planos et sólidos isagoge*, publicada em 1679, Fermat escreveu: “Logo que duas quantidades desconhecidas aparecem numa igualdade, existe um lugar, o ponto terminal de uma das duas quantidades descreve uma linha reta ou curva.” (FERMAT, 1891, p.91 *apud* YOUSCHKEVITCH, 1981, p.25).

Neste texto, tanto a função como o seu argumento são denominadas quantidades desconhecidas, termo que significa segmentos de reta cujos comprimentos variam de maneira contínua, segundo Youschkevitch (1981, p.25). Esse autor afirma que Fermat escreveu equações de uma reta e as equações de algumas curvas do segundo grau utilizando as notações de Viète e um sistema de coordenadas.

A idéia de introduzir analiticamente uma função é desenvolvida de maneira mais detalhada por Descartes na sua célebre obra denominada *La Géométrie*, de 1637. Ao ligar uma curva plana algébrica a uma equação por meio das coordenadas de seus pontos, considerando as coordenadas como segmentos de reta, Descartes escreveu:

> Tomando-se sucessivamente infinitas grandezas diversas para a linha y, encontram-se dessa maneira infinitas grandezas diversas para a linha x; portanto, tem-se uma infinidade de pontos tais que aquele que é marcado C, por meio do qual se descreve a linha curva requerida. (DESCARTES,1903, p. 86 *apud* YOUSCHKEVITCH,1981, p.25)

Youschkevitch (*ibid*) enfatiza que, pela primeira vez e de maneira absolutamente clara, é sustentada a idéia de que uma equação em x e y é um meio para introduzir uma dependência entre quantidades variáveis de maneira a permitir o cálculo dos valores de uma delas em correspondência aos valores dados pela outra.

O autor afirma que a introdução de funções sob a forma de equações teve o efeito de uma revolução no desenvolvimento da matemática e que a utilização de expressões analíticas dará ao estudo das funções um estatuto de verdadeiro cálculo, abrindo horizontes inteiramente novos. Tendo nascido no curso de aplicações da álgebra à geometria, esse método de representar funções foi imediatamente estendido aos outros ramos da matemática e, em primeiro lugar, ao do cálculo infinitesimal.

Sob uma forma embrionária, a idéia de que uma expressão infinita fosse uma “função” não era nova, pois a progressão geométrica infinita decrescente já era conhecida desde a Idade Média, com os resultados obtidos por Oresme, mas foi somente na segunda metade do século XVII que as séries inteiras tornaram-se o meio mais fecundo e, como se supôs mesmo muito mais tarde, o meio universal para a expressão analítica e o estudo de todas as funções.

Bourbaki (1976, p.253) considera sensacional o descobrimento, feito por Mercator, da série $\log(1+x) = -\sum_{1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$, que abriu perspectivas completamente novas sobre as aplicações das séries, principalmente das séries de potências, aos problemas denominados “impossíveis.” Isaac Newton (1642-1727), a partir de 1665, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), a partir de 1673, dentre outros, dedicam-se ao estudo do tema da moda, as séries de potências. A seguir, veremos as contribuições de Newton e Leibniz ao conceito de função.

Segundo Youschkevitch (1981, p.28), as concepções básicas da análise matemática de Newton, de cunho cinemático-geométrico, foram apresentadas em Cambridge entre 1664 e 1665. O *Método das fluxões e das séries infinitas* foi escrito em 1670 e publicado em 1736. Os dois principais problemas do cálculo infinitesimal são expressos em termos mecânicos: determinação da velocidade de um movimento, sendo dada a lei da distância (diferenciação) e a determinação da distância percorrida conhecendo-se a velocidade do movimento (integração de equações diferenciais e, em particular, de funções).

Newton denomina o fluente, que tem o papel de variável independente, de *quantidade correlata* (*quantitas correlata*); ele denomina de *ligada* (*relata*) a quantidade dependente. Dessa maneira, as noções básicas são introduzidas pela cinemática; na realidade, o *método das fluxões* é desenvolvido para os fluentes, expressos analiticamente, seja sob uma forma finita, seja por meio de somas de séries infinitas. Newton define os *fluentes* como as diversas magnitudes, funções de um “tempo”, que não é outra coisa que um parâmetro universal; e as *fluxões* como as derivadas em relação ao tempo.

Leibniz também chega às noções básicas do cálculo diferencial e integral e desenvolve-as a partir da geometria das curvas. A palavra “função” apareceu pela primeira vez nos manuscritos de Leibniz em 1673, em particular, naquele denominado *O método inverso das tangentes ou sobre as funções* (*Methodus tangentium inversa, seu de fonctionibus*). A obra trata da determinação da subtangente, da subnormal e de outros segmentos ligados aos pontos variáveis de uma curva. Uma análise, feita por Mahnke, de como Leibniz utilizava a palavra “função”:

> LEIBNIZ ainda não utiliza a palavra função para designar a relação formal que liga a ordenada de um ponto de uma curva à sua abscissa, mas, como atesta o início do manuscrito, ele já tem no espírito o conceito geral de função que denomina utilizando a palavra *relatio*. No momento em que ele trata do problema da inversão da tangente, não se pode dizer que utiliza a palavra função no sentido que é dado pelos matemáticos contemporâneos, mas, preferencialmente, no sentido corrente de função de um organismo, de uma máquina. A expressão *in figura functionem facere* significa, por exemplo: ter um ponto de contato com a curva, ser perpendicular a, considerar a sua subtangente, a sua subnormal etc, onde se deve evidentemente compreender que se trata de alguma coisa que é definida a partir de uma curva "funcionando" de tal e tal maneira, por exemplo, o segmento da tangente compreendido entre o ponto de contato e sua interseção com o eixo das abscissas. (MAHNKE, 1925, p.47 *apud* YOUSCHKEVITCH,1981, p.30)

De acordo com Youschkevitch (1981, p.31), a correspondência entre Leibniz e Jean Bernoulli (1667-1748), entre 1694 e 1698, mostra efetivamente como a falta de um termo geral para representar quantidades arbitrárias que dependem de uma variável conduzirá o uso da palavra "função" no sentido de uma expressão analítica. Em 1692, Leibniz introduz o uso das palavras "constante" e "variável", "coordenadas" e "parâmetro", para expressar uma quantidade ou um segmento constante e arbitrário.

A primeira definição explícita de uma função como expressão analítica aparece em um artigo de Jean Bernoulli, denominado *Remarques sur ce qu´on a donné jusqu´ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres* ("Considerações sobre o que se tem, até o presente momento, sobre soluções de problemas de isoperímetros"), publicado nas memórias da Academia Real de Ciências de Paris, em 1718. Segue o modo de como J. Bernoulli definiu função: "Chama-se função de uma grandeza variável uma quantidade composta de alguma maneira que seja desta grandeza variável e de constantes" (BERNOULLI, 1742, p.241 *apud* YOUSCHKEVITCH, 1981, p.35).

No mesmo trabalho, Bernoulli propõe a letra grega φ para a "característica" de uma função (o termo é de Leibniz), escrevendo ainda o argumento sem parêntesis: φx. Na sua definição, J. Bernoulli não indica a maneira de constituir funções a partir da variável independente, mas Youschkevitch (1981, p.35) acredita que ele pensa nas expressões analíticas das funções, de acordo com a tendência fundamental no desenvolvimento da análise infinitesimal que, conservando ou mesmo reforçando suas ligações com a geometria, a mecânica e a física ao longo do século XVIII, tornou-se uma disciplina científica cada vez mais contida em si mesma, nos seus princípios.

Para Youschkevitch (1981, p.36), o desenvolvimento posterior essencial do conceito de função é devido a Leonhard Euler (1707-1783), discípulo de J. Bernoulli. No capítulo 1 do volume 1 de sua obra denominada *Introductio in analysis infinitorum*, de 1748, Euler faz um estudo detalhado do conceito de função tal como ele foi efetivamente utilizado na análise matemática.

A tradução do latim para o francês da obra de Euler, denominada *Introduction à l' analyse infinitésimale d´Euler* (1748) foi publicada em 1797, em Paris. No início desse texto encontramos as definições de quantidade constante, quantidade variável, função de quantidade variável, exemplos de funções, as letras utilizadas:

> 1. Uma quantidade constante é uma quantidade determinada que tem sempre o mesmo valor. Tais são os números de toda espécie. Utilizam-se as primeiras letras do alfabeto a, b, c etc para representar essas quantidades, utilizando caracteres.
>
> 2. Uma quantidade variável é uma quantidade indeterminada, ou uma quantidade universal, que compreende todos os valores determinados. Uma quantidade variável compreende todos os números, não importa a sua natureza. Utilizam-se as últimas letras do alfabeto z, y, x etc para representar quantidades variáveis.
>
> 3. Uma quantidade variável torna-se determinada, assim que se atribui um valor determinado qualquer. Uma quantidade variável compreende todos os números, tanto positivos quanto negativos, os números inteiros e fracionários, aqueles que são racionais, transcendentes, irracionais. Não se deve excluir o zero nem os números imaginários.
>
> 4. Uma função de quantidade variável é uma expressão analítica[3] composta, de alguma maneira que seja, desta quantidade e de números ou de quantidades constantes. Assim, toda expressão analítica, que além da variável z contiver quantidades constantes, é uma função de z. Por exemplo: $a+3z;\ az-4zz;\ az+b\sqrt{aa-zz}\ etc$ são funções de z.
>
> 5. Uma função de variável é também uma quantidade variável. Com efeito, como se pode colocar no lugar da variável todos os valores determinados, a função receberá uma infinidade de valores, e, se for impossível conceber algum, do qual ela não seja suscetível, pois a

---

[3] Na sua definição de uma função, Euler segue, uma vez mais, seu mestre J. Bernolli, mas trocando a palavra “quantidade” por “expressão analítica” (YOUSCHKEVITCH, 1981, p. 36).

> variável compreende também os valores imaginários. Por exemplo, seja a função $\sqrt{9-zz}$ onde não se pode dar um número maior que 3, enquanto se colocam números reais no lugar de z; entretanto, introduzindo z como número imaginário, não é possível assinalar um valor determinado, que possa ser deduzido da fórmula $\sqrt{9-zz}$. Não é raro encontrar expressões que são funções aparentes; visto que qualquer que seja o valor dado à variável, elas conservam sempre o mesmo valor, como z^0, $\frac{aa-at}{a-t}$. Estas expressões, sob a forma aparente de funções de variáveis, são realmente constantes.
>
> 6. A principal diferença entre as funções reside na combinação da variável e das quantidades constantes. Ela depende das operações pelas quais as quantidades podem ser compostas e combinadas entre elas. As operações são: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e extração de raízes; acrescente-se a resolução de equações. Além destas operações, que se chamam algébricas, existem muitas outras, denominadas transcendentes, como as exponenciais, logarítmicas e outras conhecidas do Cálculo Integral.
>
> 7. As funções se dividem em algébricas e transcendentes [...] (EULER *apud* YOUSCHKEVITCH,1981, p. 37, tradução nossa).

Euler prossegue e, no capítulo IV, sob o título: Sobre o desenvolvimento de Funções em Séries infinitas, encontramos explicações sobre séries e funções:

> [...] É evidente que uma função não inteira de z não pode ser representada por um número finito de termos da forma $A+Bz+Cz^2+Dz^3+...$ se pudesse, ela seria uma função inteira; se existe alguma dúvida que ela possa ser expressa por um número infinito de termos, o desenvolvimento de cada função não deixará nenhuma dúvida; mas para uma maior generalização, além das potências de z, que têm expoentes positivos e inteiros, deve-se admitir quaisquer potências. Assim, não haverá nenhuma dúvida que todas as funções de z pode ser transformada em uma série infinita deste tipo: $Az^{\alpha}+Bz^{\beta}+Cz^{\gamma}+...$, os expoentes α, β, e γ etc designando quaisquer números. (EULER, 1797, tradução nossa).

Segundo Boyer (1999, p.305), Euler foi o construtor da notação mais bem sucedida em todos os tempos. Devemos a ele a notação $f(x)$ para uma função em x (usada nos *Comentários de Petersburgo*, 1734 -1735).

A forma empregada por J. Bernoulli e Euler para definir função como sendo uma expressão analítica, cuja forma mais geral é uma série inteira, foi aceita por outros matemáticos como Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Segue a definição de função dada por Lagrange, no início na sua obra denominada *Théorie des fonctions analytiques*:

> Chama-se função de uma ou mais variáveis toda expressão de cálculo na qual estas quantidades entram de uma maneira qualquer, misturadas ou não de outras quantidades que podem ser vistas como tendo valores dados e invariáveis, ao passo que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções, só se consideram as quantidades que se supõem variáveis; sem nenhuma atenção às constantes que podem ser misturadas. (LAGRANGE, 1881, p.15 *apud* YOUSCHKEVITCH,1981, p.41, tradução nossa).

Youschkevitch (1981, p.40) enfatiza que Lagrange, como Euler e outros matemáticos do século XVIII, não tinham dúvidas de que poderiam considerar toda função da análise matemática como podendo ser representada por uma série de termos proporcionais às potências reais da variável independente.

As primeiras discussões sobre o conceito de função ocorreram no século XVIII e estão relacionadas com o célebre problema: vibrações infinitamente pequenas de uma corda finita, homogênea e fixa nas duas extremidades. As controvérsias sobre o conceito de função envolveram Euler, Lagrange, Jean Le Rond D' Alembert (1717-1783), Daniel Bernoulli (1751-1834), Gaspard Monge (1746-1818), Pierre Simon Laplace (1749-1827) e Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830).

Segundo Youschkevitch (1981, p.43), o primeiro passo decisivo em direção à teoria foi executado por D'Alembert, em um comunicado à Academia Real das Ciências e Belas Artes de Berlim, em 1746. D´Alembert exprime as condições desse problema (cordas vibrantes) por equações equivalentes a uma equação a derivadas parciais:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

A solução geral pode ser representada por uma soma de duas funções arbitrárias[4]:

$$y = \Phi(x + at) + \Psi(x - at).$$

Mas quão arbitrária pode ser uma função arbitrária? O problema das cordas vibrantes pegou os matemáticos despreparados para responder essa questão.

D'Alembert restringiu as condições iniciais da corda, de tal forma que ela é "contínua" na concepção de Euler. Assim que tomou conhecimento dos resultados

---

[4] A demonstração completa encontra-se em Stillwell (1989, p.177-178)

de D'Alembert, Euler retrucou, guiado por considerações físicas e uma profunda intuição matemática, afirmando que nenhuma restrição poderia ser imposta sobre a forma da corda. Para um caso particular, da corda fixada nos pontos $x = 0$ e $x = 1$, ele propõe uma solução correspondente à forma inicial "contínua" representada por uma série trigonométrica:

$$y = \alpha \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} + \beta \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{l} + \chi \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{l} + \ldots$$

D'Alembert discordou de Euler, e assim, começou uma longa controvérsia sobre a natureza das funções permitidas pelas condições iniciais e sobre as integrais de equações a derivadas parciais, que continuaram a aparecer em número crescente na teoria da elasticidade, na hidrodinâmica e na geometria diferencial.

Entra em cena Daniel Bernoulli. Ele afirma que a forma inicial arbitrária da corda, bem como as vibrações posteriores, poderiam ser representadas por uma série infinita de termos contendo senos e co-senos:

$$y = a_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi c t}{l} + a_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{l} \cos \frac{2\pi c t}{l} + \ldots.$$

Daniel Bernoulli não apresenta um método para calcular os coeficientes a_n. D'Alembert rejeita a solução de Daniel Bernoulli; entretanto, a discussão não termina aqui.

Para Youschkevitch (1981, p. 45), esta controvérsia foi muito importante para o progresso da física matemática e para o desenvolvimento metodológico dos fundamentos da análise matemática. Monna (1972, p.57) considera que, de um lado, há a questão da representação de uma função "arbitrária" por meio de uma expansão trigonométrica, evocando a idéia de que uma função "arbitrária" seria uma noção bem definida. De outro lado, há discussões sobre a possibilidade da existência de funções "mais gerais" do que aquelas definidas pelas expansões.

A história do desenvolvimento do conceito de função está tão ligada à noção de continuidade que, de acordo com Monna (1972, p.58), não é possível escrever sobre uma sem escrever sobre a outra.

Segundo esse autor, o significado que Euler dá para continuidade é a invariabilidade, imutabilidade da lei que determina a função em todos os valores do domínio da variável; nesse caso, a descontinuidade de uma função significa uma mudança da lei analítica, a existência de leis diferentes em dois intervalos ou mais de seu domínio. As "curvas descontínuas", explica Euler, são compostas de partes "contínuas" e, por este motivo, são chamadas de "mistas" ou "irregulares."

De acordo com Monna (1972, p.59), relacionada com esta idéia de continuidade para curvas, funções determinadas por uma única expressão analítica para todos os valores da variável independente eram chamadas de contínuas (continuidade no sentido de Euler) e elas eram as *genuínas* funções.

Como as funções "descontínuas" não podiam ser representadas analiticamente, a definição de uma função, dada no volume 1, da sua *Introductio* e um pouco modificada no volume 2, tornou-se muito restritiva. Youschkevitch (1981, p.48) diz que, para formular uma outra definição que englobasse todas as classes conhecidas de relações, Euler se volta para uma noção que esteve sempre presente, mesmo que não expressa explicitamente por algum método para introduzir funções: a noção geral de correspondência entre dois pares de elementos, cada um deles pertencendo ao seu próprio conjunto de valores de quantidades variáveis. Nessa noção, não intervém expressão analítica alguma.

No prefácio de sua *Institutiones calculi differentialis*, publicada em 1755, Euler define função de uma outra maneira:

> Se certas quantidades dependem de outras quantidades de tal maneira que se as outras mudam, essas quantidades também mudam, então se tem o hábito de nomear essas quantidades funções das últimas; essa denominação tem o mais amplo entendimento e contém em si mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Se, por conseqüência, x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x, não importando qual a maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas funções de x. (EULER, 1913 *apud* YOUSCHKEVITCH,1981, p.49)

Segundo Youschkevitch (1981, p.55), a definição geral de função dada por Euler é cada vez mais reconhecida e utilizada. Para o autor, tudo indica que Condorcet (1743-1794) foi o primeiro a avaliar corretamente a importância dessa nova definição e desenvolve as idéias de Euler no seu manuscrito *Tratado de cálculo integral* que, apesar de não ter sido publicado, foi transmitido à Academia de Ciências de Paris, em 1778-1782. Nesse manuscrito, encontra-se uma explicação do que Condorcet entende por função analítica: "Suponho que tenho um certo número de quantidades x, y, z,.., F e que, para cada valor determinado de x, y, z,... etc, F tem um ou vários valores determinados: digo que F é uma função de x, y, z ...” (CONDORCET *apud* YOUSCHKEVITCH,1981, p.57)

Apresentando alguns exemplos de funções implícitas ou explicitas introduzidas por meio de equações, Condorcet prossegue: “Sei que logo que x, y, z forem determinados, F também ficará determinado, mesmo que eu não conheça nem a maneira de exprimir F em x, y, z nem a forma da equação entre F e x, y, z; saberei que F é função de x, y, z.” (CONDORCET *apud* YOUSCHKEVITCH,1981, p.57)

No final, ele distingue três tipos de funções: as explicitas; as implícitas (aquelas introduzidas por equações não resolvidas entre F e x, y, z) e as funções dadas somente por certas condições (por exemplo, por equações diferenciais).

Youschkevitch (1981, p.57) registra o fato de que Condorcet é o primeiro a utilizar a expressão “função analítica” para a descrição de funções de natureza arbitrária; o adjetivo “analítica” se aplica a todas as funções consideradas na análise matemática.

Ainda que o tratado inconcluso de Concorcet não tenha sido publicado, ele foi lido por muitos matemáticos em Paris, dentre os quais Sylvester François Lacroix (1765 -1843). Lacroix propõe, no seu *Traité du calcul différenciel et du calcul intégral*, publicado em 1797, a seguinte definição de função: “Toda quantidade cujo valor depende de uma ou várias outras quantidades, diz-se função dessas últimas, quer se conheça quer se ignore por quais operações se deve passar para voltar à primeira.” (LACROIX,1810 *apud* YOUSCHKEVITCH,1981, p.58).

O tratado de Lacroix, muito conhecido, contribuiu para divulgar o novo conceito de função. É verdade que, em muitos livros e manuais daquela época, o antigo modo de definir função, como sendo uma expressão analítica, ainda era utilizada.

De acordo com Monna (1972, p.60), no século XIX houve muito progresso no conceito de função. Esse progresso começa principalmente com os trabalhos de Augustin-Louis Cauchy (1789 -1857), que mostra como são inadequadas as definições de função “contínua” ou “descontínua”, segundo Euler e Lagrange, por meio de um simples exemplo. Em *Mémoire sur les fonctions continues*, publicado 1844, Cauchy utiliza a função:

$$y = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Esta função, que é "descontínua", pode ser representada, simultaneamente, pela única equação $y = \sqrt{x^2}$ para cada $-\infty < x < \infty$ e, dessa maneira, torna-se "contínua." Dessa forma, a discriminação entre as funções "contínuas" e as funções "mistas" torna-se insustentável. Segundo Monna (1972, p.61), Cauchy sustenta que essa situação paradoxal não ocorre na sua definição de função (de 1821), *Résumé des leçons données à l' école polytechnique sur le calcul infinitésimal*:

> Desde que quantidades variáveis estejam de tal forma ligadas entre si, o valor de uma delas sendo dado, podem ser obtidos os valores de todas as outras, concebendo-se comumente essas diversas quantidades expressas por meio de uma entre elas, que toma então o nome de variável independente e as outras quantidades expressas por meio da variável independente são aquilo que se denomina funções desta variável. (CAUCHY,1823, p.17 *apud* MONNA, 1972, p.61)

Youschkevitch (1981, p.58) supõe que Cauchy, quando escreve que as funções são expressas por meio da variável independente, na realidade, só pensava nas funções que podiam ser expressas analiticamente.

Para Monna (1972, p.61), um ponto que deve ser notado nessa obra de Cauchy é a definição de função contínua, a continuidade expressa no sentido atual e que difere essencialmente da continuidade global no sentido euleriano:

> Quando a função $f(x)$ admite um único e finito valor para todos os valores de x compreendidos entre dois limites dados, a diferença $f(x+i) - f(x)$ sempre sendo uma quantidade infinitamente pequena, diz-se que f(x) é função contínua da variável x entre os limites dados. (CAUCHY, 1823, p.20 *apud* MONNA,1972, p.61)

Segundo Youschkevitch (1981, p.58), a definição geral de Euler é aceita nessa época por três pensadores da mais alta envergadura e está relacionada, nos três casos, às pesquisas sobre a teoria das séries trigonométricas: Jean- Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), que se tornou célebre com a sua obra *Théorie analytique de la chaleur* (1821), Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) e Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859).

Boyer (1999, p.352) afirma que a principal contribuição de Fourier à matemática foi a idéia, percebida por Daniel Bernoulli, de que qualquer função f definida por $y = f(x)$ pode ser representada por uma série da forma:

$$y = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + ... + a_n \cos nx + ... + b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + ... + b_n \operatorname{sen} nx + ...$$

Esta série é atualmente conhecida como série de Fourier. Ela fornece uma generalização quanto aos tipos de funções que podem ser estudadas. Mesmo que existam pontos em que a derivada não existe ou em que a função não é contínua, a função pode ser expandida da seguinte maneira:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx dx .$$

Na *Théorie analytique de la chaleur*, encontra-se a seguinte definição de função, dada por Fourier, em 1821: “Em geral, a função f(x) representa uma seqüência de valores ou ordenadas onde cada uma é arbitrária.” (FOURIER,1888, p.500 *apud* YOUSCHKEVITCH, 1981, p.58)

Segundo Youschkevitch (1981, p.58), Fourier sustenta que essas ordenadas podem não estar sujeitas a uma lei comum; elas se sucedem uma após a outra, não importando de que maneira isso ocorre, e pode-se considerar cada ordenada como sendo dada individualmente.

Depois dessa definição lacônica, de Fourier, foram publicadas outras muito mais extensas, atribuídas a Lobachevsky e Dirichlet.

Youschkevitch (1981, p.59) apresenta a definição dada por Lobatchevsky, em 1834, no seu artigo “Sobre a convergência de séries trigonométricas”:

> A concepção geral exige que uma função de x seja denominada um número que é dado para cada x e que muda gradualmente ao mesmo tempo em que x. O valor da função pode ser dado seja por uma expressão analítica, seja por uma condição que dá um meio de testar todos os números e selecionar um deles; ou, finalmente, a dependência pode existir mas permanecer desconhecida. (LOBATCHEVSKY 1951, p. 44 *apud* YOUSCHKEVITCH,1981, p.59)

Nessa definição, Youschkevitch (1981, p.59) considera que, de maneira inequívoca, dependências hipotéticas estão incluídas no conceito de função, e que o termo “gradualmente” utilizado por Lobatchevsky significa continuamente, no sentido de Cauchy. Assim, essa definição, tomada literalmente, diz respeito, e de maneira muito surpreendente, somente a funções contínuas.

O mesmo pode ser dito sobre a definição dada, em 1837, por Dirichlet em “Sobre a representação de funções quaisquer por séries de senos e cossenos.” Segue a definição apresentada por Dirichlet:

> Designemos por a e b dois valores fixos e por x uma grandeza variável, que está situada entre a e b. Se para todo x corresponde um valor finito y = f(x), que varia de maneira contínua, sempre que x varia também de maneira contínua de a até b, então nós diremos que y é uma função contínua nesse intervalo. Não é mais necessário que y se exprima em função de x segundo uma mesma lei em todo o intervalo; também não é necessário considerar uma expressão algébrica explícita entre x e y. De um ponto de vista geométrico, isso quer dizer examinar x e y como abscissa e ordenada de um ponto e onde para cada valor de x do intervalo considerado corresponde um e um único valor de y; a continuidade de uma função é colocar em paralelo o fato que a curva seja um único pedaço. Esta definição não prescreve uma qualquer propriedade comum às diferentes partes da curva; as diferentes ligações podem ser representadas de maneira totalmente arbitrária ou se imagina uma curva simples traçada graficamente, sem nenhuma dificuldade preliminar. Isso resulta que uma tal função não será definida em todo um intervalo, mas em cada uma das suas partes, seja graficamente, seja matematicamente. Por outro lado, se ela é definida somente numa parte de um intervalo, então ela fica totalmente livre para tomar ou não, não importa quais valores arbitrários na parte restante do intervalo. (DIRICHLET,1837, p.135-136 *apud* YOUSCHKEVITCH,1981, p.60)

De acordo com Youschkevitch (1981, p.60), as definições de Lobatchevsky e Dirichlet são praticamente idênticas, a única diferença é que Dirichlet pensa ser necessário adicionar uma explicação geométrica. A natureza geral destas definições no que diz respeito às funções contínuas e suas possibilidades de serem diretamente generalizadas, incluindo as funções descontínuas, são absolutamente evidentes.

Para Boyer (1999, p.352), a definição de Dirichlet está próxima do ponto de vista moderno de uma correspondência entre dois conjuntos de números, mas os conceitos de conjunto e de número real ainda não tinham sido estabelecidos. Para indicar a natureza completamente arbitrária da regra de correspondência, Dirichlet propõe uma função “mal comportada”:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para todos os valores racionais de x} \\ 1 & \text{para todos os valores irracionais de x.} \end{cases}$$

Esta função, denominada de função de Dirichlet, é tão patológica que não há valor de x para o qual ela seja contínua.

Ao concluir o estudo do século XIX, Youschkevitch (1981, p. 61) apresenta a definição de função dada por Hankel:

> Diz-se que y é função de x se a cada valor de x, em um certo intervalo, corresponde um valor bem definido de y, sem que isso exija que y seja definido em todo o intervalo pela mesma lei em função de x, nem mesmo que y seja definido por uma expressão matemática explicita de x. (HANKEL, 1870, p.49 *apud* YOUSCHKEVITCH,1981, p.61)

Youschkevitch (*ibid,*p. 62) afirma que, dessa maneira exata ou de uma forma parecida, a definição geral de função foi incluída nos cursos de análise matemática no final do século XIX e no século XX.

Chamamos a atenção para as considerações feitas por Youschkevitch (*ibid,* p.63) sobre a natureza arbitrária das relações funcionais e sua representação analítica. O autor coloca, em primeiro lugar, que as diferentes noções utilizadas quanto ao grau de arbitrariedade e quanto ao tipo de comportamento das funções são características de diferentes épocas e de diferentes gerações de matemáticos. Ainda que Euler, Lacroix ou Fourier jamais tivessem encontrado funções como aquelas descontínuas devidas a Dirichlet, seus conceitos de função como correspondência arbitrária foram para as suas épocas tão gerais quanto o conceito de Dirichlet para o seu tempo. Por essa razão, Dirichlet não imaginou funções como aquelas que serão introduzidas na época de Georg Cantor (1845-1918), René Baire (1874-1932), Emile Borel (1871-1956) e Henri Leon Lebesgue (1875-1941).

Em segundo lugar, o problema da possibilidade de representar analiticamente funções evidenciou-se muito mais complexo que aquele imaginado pelos matemáticos no início do século XX. Foi necessário contornar o obstáculo da representabilidade analítica durante um longo período, começando com Euler e terminando com Dirichlet. Desde então, a classe das funções ampliou-se e mais funções foram descobertas. Inicialmente, aquelas que obedeciam às condições de Dirichlet na teoria das séries de FOURIER; depois as funções contínuas e mesmo aquelas de natureza mais geral, então representadas por meio de um ou outro método analítico. Com o passar do tempo, tornou-se necessário estudar as diferentes classes de funções (contínuas, diferenciáveis, descontínuas em determinados pontos etc), independentemente da hipótese de que uma função de uma determinada classe pudesse ser representada analiticamente ou não.

O último e quarto período se inicia com as discussões a respeito do conceito de função e são ligadas à teoria das funções e à lógica matemática.

1.2.4. Rumo ao século XX

A respeito do desenvolvimento do conceito de função, Monna (1972, p.65) afirma o fim do século XIX e o começo do século XX é muito interessantes. Em todos os trabalhos de Baire, Borel e Lebesgue, encontram-se discussões sobre o conceito de função e reminiscências da antiga definição como expressão analítica. O autor coloca que, para compreender adequadamente a situação geral, deve-se ter em mente que a teoria de Cantor vai gradualmente sendo aceita na matemática, embora ainda haja muitas discussões sobre o assunto. Pesquisando a literatura dessa época, principalmente os trabalhos de Borel, Baire e Lebesgue, o autor notou o fato de que funções descontínuas e funções contínuas que não tinham derivadas não eram geralmente aceitas como objetos matemáticos "idôneos"; ou seja, a velha idéia de que uma função é algo definido por uma expressão analítica e controversas opiniões de como definir função.

Avançando no estudo da idéia de função, Monna (*ibid*, p.81) afirma que o conceito de aplicação entre dois conjuntos foi sendo incorporado na matemática até tornar-se dominante. O conceito de função foi colocado na estrutura geral do conceito de aplicação de um conjunto X em outro conjunto Y, tal como é encontrado nos livros atuais.

Dieudonné (1990, p.149) enfatiza a contribuição de Richard Dedekind (1831-1916), que apresenta uma concepção geral de função, ou de aplicação, na sua obra publicada em 1888, mas redigida em 1878, *Was sind und was sollen die Zahlen*. Dedekind introduz uma linguagem muito rigorosa que, com algumas adições posteriores, tornou-se aquilo que hoje se pode chamar de *Teoria dos Conjuntos*.

Afastando-se das concepções anteriores, ligadas às funções reais (ou complexas) de uma ou muitas variáveis reais, Dieudonné afirma que Dedekind aprofunda a generalização: "Sendo dados dois conjuntos quaisquer E e F, uma aplicação f de E em F é uma lei ("Gesetz") que faz corresponder e vale a qualquer elemento x de E, um elemento bem determinado de F, o seu valor em x que é denotado de modo geral por f(x).” (DIEUDONNÉ, 1990, p.149)

Um pouco mais tarde, segundo Dieudonné (*ibid*), Cantor introduz a noção de produto cartesiano E × F de dois conjuntos quaisquer, uma generalização natural e indispensável das coordenadas cartesianas. Dessa maneira, liga-se a noção de aplicação $f : E \to F$ a um subconjunto de $E \times F$ e o grafo de f é a parte de $E \times F$ formada pelos pares $(x, f(x))$ para todos os elementos x de E. O grafo é uma generalização do “gráfico” clássico de uma função de variável real.

Um grupo de jovens matemáticos franceses fundou, em 1935, a Associação Bourbaki, a fim de organizar toda a matemática conhecida até então, segundo o pensamento formal de Hilbert. Eles publicaram, em 1939, o primeiro livro da coleção *Théorie des ensembles* (*fascicule de résultats*), que contém todas as definições e todos os principais resultados. Segue a definição de função encontrada nesse livro:

> Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F chama-se relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, qualquer que seja x ∈ E, existe um elemento y de F, e somente um, que esteja na relação considerada com x.
>
> Dá-se o nome de *função* à operação que associa a todo elemento x ∈ E o elemento y ∈ F que se encontra na relação dada com x; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está *determinada* pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais *equivalentes* determinam a mesma função. (BOURBAKI, 1939, p.6 *apud* MONNA, 1972, p.82)

Aqui, segundo Monna (1972, p.82), todas as dúvidas sobre o que é uma verdadeira função foram removidas.

Em resumo, percebemos que, desde a Antiguidade até a revolução estruturalista desencadeada pelo grupo Bourbaki, emergiram diferentes concepções de função, ou seja, maneiras diferentes de perceber o objeto matemático *função*, de utilizar ou enfatizar suas propriedades. Segundo Artigue (1989, p.14), a noção de concepção coloca em evidência a diversidade de pontos de vista possíveis sobre um mesmo objeto matemático e a sua adaptação para resolver determinados tipos de problemas. Algumas dessas concepções foram utilizadas simultaneamente em uma mesma definição; ou então, em uma mesma época, diferentes concepções foram manipuladas pelos matemáticos. Uma síntese será apresentada na próxima seção, com o objetivo de expor, em ordem cronológica, as concepções que foram apresentadas neste trabalho.

Encerramos essa seção apresentando um ponto de vista defendido pelo filósofo francês Michel Serres. Indiferente à distância temporal, Serres (1999, p.63) afirma que nenhuma criação pode ser rotulada de tal ou tal época e que todos os autores são nossos contemporâneos.

Podemos perceber isso, ao executar a tarefa de construir um gráfico que mostre a interdependência entre duas grandezas. A relação entre grandezas desde a época de Newton; a utilização das letras x e y desde Descartes; a palavra função introduzida por Leibniz; o sistema ortogonal de coordenadas com abscissas e ordenadas positivas e negativas introduzido por Cramer[5]. Atual, talvez o contexto e os valores envolvidos. Ocorre uma mestiçagem, conceito devido a Serres (ibid, p.40), seu ideal de cultura.

1.2.5. Síntese das diversas concepções sobre função

O quadro 1 apresenta as várias concepções de função que emergiram entre os séculos XVII e XX.

[5] Na obra de Cramer, *Introduction à l' analyse des lignes curves*, de 1750, encontra-se o uso formal de dois eixos e a definição simultânea e simétrica das coordenadas em relação a eles. (veja Cavalca, 1997, p. 17)

Quadro 1 - Síntese das concepções

Ano	Matemático	Concepção
1637	Descartes	Equação em x e y que mostra dependência.
1670	Newton	Quantidades relacionadas; fluentes expressos analiticamente.
1673	Leibniz	Relação, quantidades geométricas que dependem de um ponto da curva, máquina.
1718	Jean Bernoulli	Relação entre grandezas variáveis.
1748	Euler	Expressão analítica.
1755	Euler	Dependência arbitrária.
1778	Condorcet	Dependência arbitrária.
1797	Lacroix	Dependência arbitrária.
1797	Lagrange	Expressão de cálculo, expressão analítica.
1821	Cauchy	Resultado de operações feitas sobre uma ou várias quantidades constantes e variáveis.
1822	Fourier	Série trigonométrica; seqüência de valores; ordenadas não sujeitas a uma lei comum.
1834	Lobatchevsky	Expressão analítica; condição para testar os números, dependência arbitrária.
1837	Dirichelet	Correspondência: para cada valor de x (abscissa), um único valor de y (ordenada); função definida por partes.
1870	Hankel	Para cada valor de x em um certo intervalo, corresponde um valor bem definido de y; não é necessária uma mesma lei para todo o intervalo; y não precisa ser definido por uma expressão matemática explicita em x.
1888	Dedekind	Correspondência entre elementos de dois conjuntos, obedecendo a uma determinada lei.
	Cantor	Subconjunto de um produto cartesiano, obedecendo duas condições.
1939	Bourbaki	Correspondência entre elementos de dois conjuntos, obedecendo a duas condições.

As diversas concepções de função nortearão, no próximo capítulo deste trabalho, a escolha de critérios de análise, nos livros didáticos de oitava série, do tema - *função*.

A seguir, mostraremos como o moderno conceito chegou ao Brasil, século XX, em particular, na Universidade de São Paulo, localizada na cidade de São Paulo.

1.3. O moderno conceito de função e a Universidade de São Paulo

Após o fim da 2ª Guerra Mundial, a matemática brasileira se beneficiou com a vinda de dois bourbakistas: Jean Dieudonné (1906-1992) e André Weil (1906-1998), para a Universidade de São Paulo.

Apresentamos a definição de *aplicação*, dada pelo bourbakista Dieudonné, no livro publicado em 1969, dentro da *Teoria dos Conjuntos* e que elimina idéia de dependência:

> Aplicação. Sejam X e Y dois conjuntos, R(x, y) uma relação entre $x \in X$ e $y \in Y$ é considerada funcional em y, se, para todo $x \in X$, existe um e somente um $y \in Y$ tal que R(x, y) é verdadeira. O gráfico de tal relação chama-se gráfico funcional em X×Y; tal subconjunto F de X×Y é caracterizado pelo fato de que, para cada $x \in X$, existe um único $y \in Y$ tal que $(x, y) \in F$; este elemento y é chamado o valor de F em x e escreve-se F(x). Um gráfico funcional em X×Y é denominado aplicação de X em Y, ou uma função definida em X, tomando valores em Y. É usual falar de uma aplicação e de um gráfico funcional como se eles fossem dois tipos de objetos na correspondência um-a-um e dizer, por isso, "o gráfico de uma aplicação", mas essa é uma mera distinção psicológica (que corresponde a olhar F "geometricamente" ou "analiticamente"). Seja qual for o caso, é fundamental, na matemática moderna, considerar uma aplicação como um único objeto, precisamente como um ponto ou como um número, e fazer uma clara distinção entre a aplicação F e qualquer um de seus valores F(x); o primeiro é um elemento de β(X×Y), conjunto de todos os subconjuntos de X×Y; o segundo, um elemento de Y; tem-se $F = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = F(x)\}$. Os subconjuntos de X×Y que têm a propriedade de serem gráficos funcionais constituem um subconjunto de β(X×Y), denominado o conjunto de aplicações de X em Y, e escreve-se Y^X." (DIEUDONNÉ,1969, p.4, grifos do autor, tradução nossa).

Notamos que, nessa definição, surge o objeto matemático - *aplicação e suas representações*. Além disso, o autor inclui o gráfico na definição de aplicação.

Jean Dieudonné lecionou Álgebra e suas notas de aula foram redigidas em português por Luis Henrique Jacy Monteiro (1918-1975), que escreveu o livro *Elementos de Álgebra*. O objetivo do livro do professor Luiz Henrique Jacy Monteiro foi uniformizar o ensino de álgebra nas Faculdades de Filosofia através de uma unificação de linguagem e de uma sistematização dos conceitos que são desenvolvidos no estudo da álgebra moderna.

Nesse livro, que se tornou a referência básica para os cursos da USP, encontramos a definição de aplicação, considerada fundamental pelo autor:

> Sejam E e F dois conjuntos e seja *f* uma relação de E em F, isto é, *f* é um subconjunto do produto cartesiano de E em F. Diz-se que *f* é uma aplicação de E em F, se e somente se, estiverem verificadas as seguintes condições:a) para todo x em E existe um elemento y de F tal que $(x,y) \in f$; b) quaisquer que sejam os elementos x, y e y', com x em E e y e y' em F, se $(x,y) \in f$ e $(x,y') \in f$ então y = y'. É imediato

> que as condições a) e b) da definição acima são equivalentes à seguinte condição: c) para todo x em E existe um único y em F tal que (x,y) $\in$ *f*. (MONTEIRO,1969, p. 29)

O autor explica a utilização das palavras *função e aplicação*: "Uma aplicação de E em F também é denominada função definida em E e com valores em F, apesar de que a palavra função é, em geral, reservada para o caso em que F é um conjunto numérico." (MONTEIRO, 1969, p.29).

A seguir, o autor introduz as noções de *imagem, domínio, contradomínio*:

> Se f é uma aplicação de E em F e se x é um elemento qualquer de E, então o único elemento y de F tal que (x,y) $\in f$; ou seja, x f y, será indicado pela notação f(x) (leia-se "f aplicado a x" ,ou, "valor de f em x", ou, simplesmente "f de x") e será denominado *imagem de x pela aplicação f ou correspondente de x pela aplicação f* ou ainda *valor de f em x*. O conjunto E também é chamado *campo de definição de f* ou *domínio de f* e também diremos que *f está definida sobre E*. O conjunto F passa a ser denominado *contra domínio de f* .(*id*, *ibid*)

Mais adiante, o autor introduz a noção de gráfico de uma função e esclarece de que modo se identifica um gráfico como sendo o gráfico de uma função:

> Pode-se representar, graficamente, uma função $f: E \rightarrow R$, onde E é uma parte de R, do seguinte modo: considera-se num plano α um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais XOY e o conjunto G de todos os pontos de coordenadas $(x, f(x))$ com $x \in E$. O conjunto G é denominado gráfico da função f relativo ao sistema de coordenadas XOY. As condições a) e b) da definição significam que toda reta r (contida em α) tal que r // OY e r passa por um ponto de E corta o gráfico G num único ponto. (MONTEIRO,1969, p.31)

A Figura 3 mostra o exemplo de gráfico de uma função, e de uma reta r, que corta o gráfico dessa função em um único ponto, dado pelo autor.

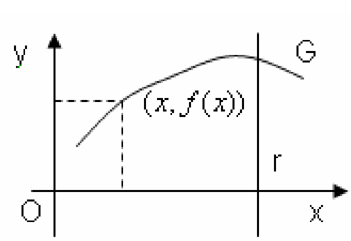


Figura 3 - Exemplo de gráfico de uma função

(Fonte: MONTEIRO, 1969, p.31)

A próxima seção apresenta as definições e os comentários sobre as palavras utilizadas nas atuais definições de função encontradas em livros de álgebra, análise e cálculo, disponíveis no mercado editorial de São Paulo.

1.4. Um panorama das atuais definições de função

Esta seção tem o objetivo de apresentar o objeto matemático função em termos de definição. Lembramos que, nas antigas definições de função, as noções centrais eram de variação e de dependência; a noção de correspondência estava presente, mas de maneira implícita. Com o passar do tempo, houve um gradual desaparecimento das noções de variação, de dependência, até a chegada da correspondência arbitrária. Nos livros de álgebra, análise e cálculo aparecem as influências das definições dadas por Cantor, Dedekind e Bourbaki, ao lado da utilização de concepções mais antigas de função.

Segundo o dicionário Aurélio (FERREIRA, 1999, p.614), um dos significados do verbo *definir* é enunciar os atributos essenciais e específicos de (uma coisa), de modo que se torne inconfundível com outra. Tal ponto de vista é compatível com aquilo que foi expresso por Lebesgue sobre definir um objeto matemático: “Um objeto está definido ou dado quando se pronuncia um número finito de palavras que se aplicam a esse objeto e somente a ele.” (MONNA, 1972, p.72)

Tomamos como referência em álgebra o livro Álgebra Moderna, escrito pelos professores Hygino H. Domingues e Gelson Iezzi, cuja primeira edição é de 1982 (DOMINGUES e IEZZI, 1999). O enfoque clássico é apontado pelos próprios autores no prefácio da obra.

Domingues e Iezzi (1999) definem *aplicação*, utilizando uma linguagem bem próxima daquela empregada por Monteiro (1969). Dessa maneira, aparecem, nesta ordem, as definições de produto cartesiano e relação binária:

> Dados dois conjuntos E e F, não vazios, chama-se *produto cartesiano* de E por F o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) com x em E e Y em F. […] Costuma-se indicar o produto cartesiano de E por F com a notação $E \times F$. […] Chama-se *relação binária* de E em F todo subconjunto R de $E \times F$. […] A definição deixa claro que toda relação R é subconjunto de pares ordenados. Para indicar que $(a,b) \in R$, usaremos a notação aRb. (DOMINGUES e IEZZI, 1999, p.11)

Os autores prosseguem e definem *domínio* e *imagem* de uma relação e de uma aplicação:

> Chama-se *domínio* de R o subconjunto de E constituído pelos elementos x para cada um dos quais existe algum y em F tal que xRy. [...] Chama-se *imagem* de R o subconjunto de F constituído pelos elementos y para cada um dos quais existe algum x em E tal que xRy. (DOMINGUES e IEZZI, 1999, p.12)

Mais adiante, os autores definem *aplicação* como subconjunto de um produto cartesiano que obedece a uma determinada condição: "Seja f uma relação de E em F. Dizemos que f é uma aplicação de E em F se: $D(f) = E$; dado $a \in D(f)$, é único o elemento b $\in$ F de modo que $(a, b) \in f$." (*id*, *ibid*, p.35).

Os autores apresentam exemplos e exercícios, onde as funções são representadas por diagramas de Venn ou por conjuntos de pares ordenados, explicitando a correspondência arbitrária em conjuntos finitos. Para aplicações entre conjuntos infinitos, os autores utilizam as concepções de função como relação binária entre dois conjuntos e como expressão algébrica. No segundo caso, empregam preferencialmente: funções polinomiais de 1º e 2º graus, racionais, irracionais e modulares. Encontramos oito funções definidas por duas sentenças, sendo que a palavra *lei* só aparece na definição de uma delas, sem comentários sobre o significado que lhe foi atribuído. Notamos que os autores não relacionam explicitamente essas situações com a definição de aplicação apresentada no início deste tópico, nem fazem comentários sobre correspondências arbitrárias.

Lembramos que funções definidas por mais de uma sentença tiveram um papel importante na história do conceito, mas Domingues e Iezzi não destacam tal papel. No cômputo geral, os autores privilegiem a manipulação algébrica, não trabalham com tabelas e apresentam apenas cinco gráficos, para exemplificar aplicação, diferenciar relação de aplicação e para a obtenção da imagem inversa de um conjunto. Encontramos a tarefa: esboçar o gráfico cartesiano para quinze relações, mas os autores não propõem a tarefa: escrever a expressão algébrica a partir de um gráfico.

Examinaremos, a seguir, os livros de análise matemática. Nossas referências são os títulos publicados pelos matemáticos: Elon Lages Lima, pesquisador do

Instituto de Matemática Pura e Aplicada; Djairo Guedes de Figueiredo e Geraldo Ávila, membros da Academia Brasileira de Ciências.

Lima (1989) define função nos seguintes termos:

> Uma *função* $f : A \to B$ consta de três partes: com conjunto A, chamado o *domínio* da função (ou conjunto onde a função é definida), um conjunto B, chamado o *contradomínio* da função, ou o conjunto onde a função toma valores e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento de $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado o valor que a função assume em x (ou no ponto x). (LIMA,1989, p.10)

A seguir, o autor apresenta a notação: "Usa-se a notação $x \mapsto f(x)$ para indicar que f faz corresponder a x o valor de $f(x)$" e explica a natureza arbitrária da regra:

> A natureza da regra que ensina como obter o valor $f(x) \in B$ quando é dado $x \in A$ é inteiramente arbitrária, sendo sujeita apenas a duas condições:
>
> 1ª Não deve haver exceções: a fim de que f tenha o conjunto A como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$ para todo $x \in A$;
>
> 2ª Não deve haver ambigüidades: a cada $x \in A$, a regra deve fazer corresponder um *único* $f(x)$ em B. (LIMA, 1989, p.10)

No artigo que escreveu para a *Revista do Professor de Matemática*, Lima (1999) afirma que a definição de função como conjunto de pares ordenados é estática, ao passo que os próprios matemáticos pensam numa função de modo dinâmico. O autor afirma que definir função como uma correspondência é muito mais simples, mais intuitivo e mais acessível ao entendimento do que concebê-la como um conjunto de pares ordenados, que usa uma série de conceitos preliminares, como produto cartesiano, relação binária etc.

Como se pôde ver no Quadro 1, a concepção de função como correspondência foi precedida por outras concepções dinâmicas, ainda hoje úteis nas ciências e na interpretação do mundo real. Se os matemáticos pensam função de maneira dinâmica, como afirma Lima, então nos perguntamos qual definição é efetivamente utilizada pelos matemáticos, uma vez que a definição por correspondência também é estática. Além disso, consideramos que não há clareza no uso que esse autor faz da expressão "mais intuitiva."

Figueiredo, em 1996, no seu livro Análise I, introduz função da seguinte maneira:

> Uma *função* f de um conjunto A em um conjunto B é uma regra que a cada elemento x $\in$ A associa um elemento $f(x)$ em B. $f(x)$é chamado o *valor* de f no elemento *x*. O conjunto A é chamado domínio (também conhecido como *campo de definição*) da função f, e o conjunto B é chamado o *contradomínio.* Usamos a seguinte notação que explicita o domínio e o contradomínio da função: $f : A \to B$. Não é demais repetir que, dada uma função $f : A \to B$, o valor da função em um elemento $x \in A$ é univocamente determinado. (FIGUEIREDO,1996, p.2).

A seguir, o autor apresenta sete exemplos de funções: cinco funções, cada uma delas definida por uma fórmula; uma função definida por três sentenças; a função de Dirichlet definida por meio de um texto: "$A = B = R^+$ e *f* é a função que a cada racional associa o número 0 e a cada irracional associa o número 1." (FIGUEIREDO, *ibid*). Assim, nessa introdução e nos exemplos de funções reais apresentados no segundo capítulo desse livro, notamos um reforço na concepção de função como expressão algébrica, ao lado da definição que utiliza a expressão "regra que associa", ou seja, de um modo de conceber função como correspondência.

Esse autor determina os procedimentos para localizar um ponto no plano cartesiano e define gráfico de uma função: "O gráfico de uma função *f* é o subconjunto da plano formado pelos pontos $(x, f(x))$ quando x percorre o campo de definição da função" (FIGUEIREDO, 1996, p.50). A seguir, apresenta gráficos de quatro funções: linear, módulo, escada e definida por duas sentenças. Utiliza tabelas auxiliares, com valores inteiros para a variável x a fim de apresentar os gráficos das funções definidas por: $f(x) = x^2, f(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = \dfrac{1}{x}$, após ter dado as seguintes sugestões:

> Para traçar os gráficos das funções, é conveniente, como na maior parte dos casos, fazer uma tabela. Na primeira coluna, colocamos alguns números do domínio da função e, na segunda coluna, escrevemos os valores correspondentes da função. O número de pontos que consideramos na tabela depende da precisão que desejamos para o gráfico. (FIGUEIREDO, 1996, p.51).

Consideramos que esse texto pode reforçar determinados procedimentos para a construção de gráficos, muito próximos daqueles que são encontrados em livros didáticos para 8ª série, como veremos mais adiante, neste trabalho.

Um outro ponto é a maneira padronizada para a construção de um gráfico: "A primeira coordenada, x, é sempre marcada sobre a reta R_1, que é chamada o eixo dos x. A segunda coordenada, y, é marcada sobre a reta R_2, que é chamada o eixo dos y" (FIGUEIREDO, 1996, p.50).

Além de fixar as letras, sempre x e y, a coordenada x é sempre marcada no eixo das abscissas e y no eixo das ordenadas, o autor não trata das noções de dependência, de variável independente e de variável dependente, não explica qual variável é representada em cada eixo. Diante dessas lacunas, consideramos que o livro não oferece para um leitor a autonomia necessária para que ele possa, por exemplo, construir um gráfico para uma função dada por $s = g(t)$.

Outro autor, Ávila (1999), define função de maneira sucinta:

> Definição. Uma função f: D $\rightarrow$ Y é uma lei que associa elementos de um conjunto D, chamado domínio da função, a elementos de um outro conjunto Y, chamado o contradomínio da função. (ÁVILA,1999, p.78)

Após essa definição, o autor inclui algumas explanações sobre a utilização do símbolo *f*, as noções de variável independente e de variável dependente:

> [...] Para indicar que uma função f associa o elemento y ao elemento x escreve-se $y = f(x)$. Esse símbolo é também usado para indicar a própria função f, embora com certa impropriedade, pois f(x) é o valor da função num valor particular de D. Portanto, quando a notação $y = f(x)$ é usada para indicar a função, deve-se entender que x denota qualquer valor no domínio D, por isso mesmo, chama-se variável de domínio D, a chamada variável independente; y é a imagem de x pela função f, a chamada variável dependente. (ÁVILA, 1999, p.79).

Apesar de ter incluído a noção de variável, notamos que ela não é utilizada na seção que introduz o conceito de função.

Um pouco mais adiante, encontramos três exemplos de funções definidas por uma expressão algébrica e as seguintes explanações:

> Para caracterizar uma função, não basta prescrever a lei de correspondência de *f;* é necessário também especificar seu domínio. Freqüentemente as funções são dadas por fórmulas algébricas ou analíticas, mas nem sempre é assim: teremos oportunidade de lidar com funções dadas por leis bem gerais, que não se enquadram nessas categorias. (ÁVILA, 1999, p.79).

Dessa forma, o autor chama a atenção do leitor sobre funções dadas por leis gerais, mas não explica o significado que deve ser atribuído à essa expressão idiomática.

Como vimos nos livros consultados de análise matemática, são utilizadas na definição de função expressões tais como: lei que associa, regra que associa, uma correspondência que associa. Podemos perceber que as definições estão, de uma maneira geral, muito próximas daquelas propostas por Dedekind e pelo grupo Bourbaki.

As palavras *regra*, *lei* e *correspondência* são polissêmicas. Citamos alguns dos significados da palavra *lei*: "[...] norma, preceito, regra, condição imposta pelas coisas, pelas circunstâncias, fórmula geral que enuncia uma relação constante entre fenômenos de uma dada ordem [...]." (FERREIRA, 1999, p.1197). *Regra*, dentre outros significados: "[...] aquilo que regula, dirige, rege ou governa; fórmula que indica ou prescreve o modo correto de falar, pensar, agir, raciocinar num caso determinado; aquilo que está determinado pela razão, pela lei ou costume; preceito, princípio, norma, lei, [...]" (FERREIRA, 1999, p. 1732). Para *correspondência*: "[...] relação de conformidade, regra por meio da qual se associam a cada elemento de um conjunto um ou mais elementos de outro (*mat*); transformação contínua (*mat*), [...]" (FERREIRA, 1999, p. 563). Dessa forma, as expressões utilizadas na definição de função: lei que associa, regra que associa, uma correspondência que associa, não têm um preciso significado matemático. Com isso, concordamos com as afirmações feitas por Lima: "Um purista pode objetar que correspondência, regra etc são termos sem significado matemático." (LIMA,1999, p.3).

A seguir, verificaremos como é introduzido o conceito de função em um livro de cálculo. Boulos, em 1999, após apresentar alguns exemplos de interdependência de grandezas, afirma que

> A noção matemática que contempla os exemplos anteriores (e milhares de outros) é a noção de função: Sendo A e B conjuntos, uma **função de A em B** é uma correspondência que a cada elemento x de A associa um único elemento y de B. A é chamado de domínio da função. Se designarmos por f a função, o elemento y é indicado por $y = f(x)$. (BOULOS,1999, p.22, destaque do autor).

O autor prossegue e inclui as noções de variável dependente e variável independente: "Como x é livre para variar no domínio da função, diz-se que x é a **variável independente**, e que y, por depender de x, é a **variável dependente**." (BOULOS, *ibid,* destaque do autor).

Nesse capítulo introdutório coexistem as concepções de função como interdependência entre duas grandezas, como fórmula algébrica e como correspondência, com ênfase nas duas primeiras. A noção de variação aparece explicitamente em dois exercícios, mas não encontramos atividades que trabalhem as noções de variável dependente e de variável independente.

Uma perspectiva dinâmica de função é encontrada em livros de cálculo diferencial e integral americanos, traduzidos para o português. Os autores desses livros consideram muito proveitoso considerar função como máquina e apresentam diagramas parecidos com Figura 4. Citamos: Stewart (2002, p.12), Edward e Penney (1997, p.5), Thomas *et al.* (2002, p. 10).

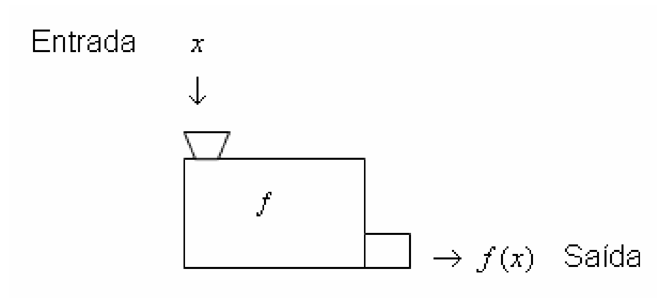


Figura 4 – Diagrama de máquina para uma função.

Fonte: Adaptado dos autores Edward e Penney (1997, p.5)

Uma das raízes históricas do conceito de função é considerá-la como uma máquina que faz algo. É olhar função como um processo de construção, que permite fabricar alguma coisa nova com elementos conhecidos, sendo dadas as condições de sua fabricação. Youschkevitch (1981, p.30), ao traduzir do latim o verbo utilizado por Leibniz ao trabalhar com função, explica que *fungor, functus sum, fungi* significa executar, fazer cumprir.

Nos livros de cálculo, quando se define função, há a expressão - regra que associa, mas, logo a seguir, são apresentados exercícios que utilizam outras concepções de função como expressão algébrica, interdependência de grandezas, função como máquina de entrada e saída nos exercícios que envolvem o uso de calculadora.

Esse panorama que apresentamos expõe as diversas opções epistemológicas de determinados autores de livros de 3º grau para o ensino e aprendizagem de função.

Ressaltamos que uma definição apresentada em uma obra, sem uma discussão prévia das diferentes concepções de função e de seu desenvolvimento histórico ao longo dos séculos, tem a aparência de não ter sido um artefato lentamente construído por uma comunidade institucionalizada, resultado do empenho humano para solucionar problemas. Dessa forma, consideramos importante que os livros utilizados nas licenciaturas de Matemática tratassem das diferentes definições de função, das concepções que emergiram ao longo da história e explicitassem quando se utiliza uma concepção ou outra. Somente Ávila (1999, p. 103) se preocupa em apresentar notas históricas sobre o início do rigor na análise matemática, no final do capítulo onde define função.

A seguir, expomos, de maneira resumida, os significados atribuídos aos termos *conceito* e *noção*, pois, neste trabalho, diferenciamos claramente estas duas palavras.

A natureza do *conceito*, segundo Abbagnano (1999, p. 151), recebeu duas soluções. Na primeira delas, conceito é a essência das coisas e, na segunda, é um signo do objeto. Esse autor afirma que a função fundamental do conceito é a mesma que possui a linguagem, isto é, a comunicação.

Dentre os significados propostos para o termo *noção*, aquele que mais permaneceu, segundo Abbagnano (*ibid*, p.682), foi o sentido genérico de operação, ato ou elemento cognoscitivo em geral. Dentre os significados atribuídos à palavra noção, esse autor cita: a primeira operação do intelecto, aquela pela qual se exprime uma coisa com o auxílio de uma imagem. Dessa maneira, consideramos, por exemplo, a noção de variável, como uma idéia mais geral de variável.

Em resumo, neste capítulo, vimos a lenta aceitação de determinadas definições de função ao longo da história; as controvérsias sobre cordas vibrantes; o desenvolvimento das séries imbricado com o desenvolvimento de funções; as questões sobre continuidade e funções definidas por mais de uma sentença; as discussões ocorridas no início do século XX sobre o objeto matemático *função*, até a emergência e domínio da concepção de aplicação entre dois conjuntos. Esse tratamento diacrônico do assunto nos parece fundamental pois consideramos importante a compreensão das origens desse conhecimento, das motivações para o seu desenvolvimento, da sua importância dentro da Matemática.

Apresentamos e comentamos as definições de função em livros de álgebra, análise e cálculo, bem como as lacunas no trato das noções de dependência, de variável dependente e de variável independente. Consideramos que a parcela de dependência, embutida na regra de correspondência, não pode ser negligenciada, principalmente em livros que são utilizados para a formação inicial dos professores.

A justificada presença do tema *função* nos currículos escolares - uma vez que o conceito de função é considerado central na Álgebra por muitos educadores matemáticos, segundo Kieran *et al.* (1996, p.257) – leva-nos a analisar o capítulo sobre funções, em alguns livros de oitava série, editados no Estado de São Paulo e selecionados dentro de certos critérios, que serão oportunamente explicitados. O próximo capítulo deste trabalho tratará dessa análise.

CAPÍTULO 2

ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA

2.1. Apresentação

A partir da palavra grega *didaktikós*, que significa próprio à instrução, relativo ao ensino, Yves Chevallard, em 1999, associa o adjetivo didático ao substantivo estudo. Assim, a idéia do didático diz respeito, fundamentalmente, à idéia de tomar atitudes para aprender alguma coisa (saber) ou de aprender a fazer alguma coisa (saber-fazer).

Para Chevallard (1999, p.241), estudar um problema conduz à criação de uma resposta. Na academia, isso significa elaborar uma organização praxeológica inédita. Na escola, estudar uma questão é recriar, sozinho ou em grupo, uma resposta que já foi produzida em alguma outra instituição. Estudar é estudar um tema que existe na sociedade, para reconstruí-lo, para fazer a transposição na instituição onde esse assunto está sendo estudado. As praxeologias didáticas ou organizações didáticas são as respostas às questões de como estudar um determinado tema. Em outras palavras, as praxeologias não são criações da natureza, mas sim "artefatos", "obras", que um dia foram construídas. Suas reconstruções aparecem nos documentos oficiais, nos livros didáticos ou em uma sala de aula e são objetos da didática.

O autor (*ibid*, p.246) afirma que a problemática ecológica, que se refere às condições e às dificuldades de conduzir o estudo de uma organização matemática, é uma das principais forças motrizes da teoria antropológica do didático.

O que nos interessa é estudar quais são as organizações matemáticas em torno do conceito de função mobilizadas durante a construção de uma seqüência didática para o ensino e aprendizagem desse conceito para uma oitava série do Ensino Fundamental, bem como a maneira pela qual elas são apresentadas aos alunos. Para tanto, é necessário investigar preliminarmente as reconstruções que aparecem na *Proposta Curricular de Matemática do Estado de São Paulo* nos *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática* (PCNs) e nos livros didáticos de oitava série, nos capítulos dedicados ao tema.

Neste capítulo, apresentamos uma revisão da literatura, como parte da investigação preliminar, que aponta as dificuldades manifestadas por professores, estudantes de licenciatura e alunos em relação ao tema; os critérios de escolha de livros pertencentes às coleções existentes no mercado editorial de São Paulo, assim como os critérios de análise dos capítulos dedicados ao estudo do tema *função*, nos referidos livros. Por último, análises e conclusões a respeito dos livros.

A análise dos livros didáticos é importante porque, para muitos professores, ele é o único material de que dispõem para preparar suas aulas. Também é importante conhecer a *Proposta Curricular para o Estado de São Paulo*, uma vez que nossa pesquisa ocorre neste Estado e os *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática*, em especial, para o 4º ciclo, uma vez que autores de livros didáticos editados desde a divulgação desse último documento procuram seguir as orientações contidas nesse documento.

As leituras de dissertações, teses, trabalhos publicados em revistas especializadas sobre o ensino e aprendizagem de função que fizemos antes de iniciarmos o nosso trabalho com os professores da Rede Pública Estadual de Ensino do Estado de São Paulo forneceram um leque das possíveis dificuldades que eles pudessem ter. O conhecimento das pesquisas que envolvem alunos, sejam eles do ensino fundamental, do médio ou superior é importante porque pesquisadores em Educação Matemática têm encontrado muitos pontos em comum nas dificuldades de alunos e professores.

Os trabalhos apresentados nas próximas seções estão agrupados em três categorias: há os que envolvem somente alunos, somente professores e outros que envolvem professores e alunos.

2.2. Revisão da literatura

Nosso trabalho se apóia nas dissertações defendidas na PUC-SP, nos trabalhos apresentados em recentes encontros de Educação Matemática (ENEM, EPEM), no banco de dados da Faculdade de Educação da USP, no banco de teses digitalizadas da UNICAMP, além de artigos publicados em diversos periódicos e revistas.

2.2.1. O aluno como objeto de pesquisa

Nesta seção destacamos a pesquisa de Dubinsky e Harel (1992), o artigo de Janvier (1998) e as dissertações de mestrado de Pelho (2003), Schwarz (1995) e Simões (1995).

Dubinsky e Harel (1992) partem dos pressupostos estabelecidos por Piaget sobre abstração reflexiva, que pode ser sintetizada como um processo de interiorização de operações físicas sobre um objeto. Recebe o nome de encapsulação o processo desenvolvido por um sujeito para se apoderar de um objeto abstrato.

Esses pesquisadores (*ibid*, p.85) adotam os termos pré-função, ação, processo e objeto para descrever as concepções de função. Utilizam o primeiro termo no estágio em que o sujeito não consegue resolver atividades relativas ao tema.

Afirmam que uma pessoa tem a concepção de ação (ou pré-processo) quando ela consegue fazer, repetidamente, uma manipulação mental ou física do objeto. Esta concepção envolve, por exemplo, a habilidade de colocar números em uma expressão algébrica para calcular o seu valor, um de cada vez. Neste caso, tem-se uma concepção estática.

Garantem que quando uma pessoa tem a concepção de processo, ela consegue pensar na transformação, de uma maneira dinâmica, que começa com objetos do mesmo tipo, realiza ações com esses objetos e obtém, como resultado, novos objetos; consegue combinar outros processos, ou reverter o processo.

Se o indivíduo tem uma concepção de objeto, ele consegue realizar ações que o transformam. De acordo com os autores, no trabalho matemático, é preciso ir e vir de uma concepção de processo para uma concepção de objeto.

Dubinsky e Harel (1992) fizeram uma pesquisa com vinte e dois estudantes de 3º grau a fim de desenvolver as concepções de função. Para tanto, partiram das noções mais primitivas, com o objetivo de responder a seguinte questão: quanto os estudantes vão além de uma concepção de ação, quanto cada um deles se move em direção a uma concepção de processo após um experimento de ensino?

Os alunos responderam um questionário com vinte e quatro situações, em oito contextos diferentes. Examinaram-se procedimentos computacionais, seqüências finitas, seqüência de caracteres, gráficos, pares ordenados, tabela, equações e enunciados, porque os pesquisadores consideram que é necessário apresentar um amplo leque de situações para investigar as concepções dos alunos a partir das respostas dadas. A seguir, entrevistaram treze dos vinte e dois estudantes sobre suas respostas e suas definições de função.

As pesquisas permitiram concluir que os alunos se moveram para uma concepção de processo, apesar das várias restrições sobre o que é função. Alguns alunos pensam que uma regra não é uma função até o momento em que podem manipulá-la; alguns pensam que entradas e saídas de função precisam ser números; outros pensam que gráficos precisam ser contínuos.

Outro estudo que nos chamou a atenção foi o realizado por Janvier (1998) e focaliza as dificuldades de alunos em tratar funções que não envolvem a variável tempo, nem mesmo implicitamente. Esse autor (*ibid*, p.82) afirma que a manipulação de determinadas variáveis é fortemente influenciada pelas experiências temporais que podem ser reproduzidas pela mente. Na Física e na Química encontram-se muitos fenômenos cuja variação depende do tempo, como posição, temperatura, pressão, vazão etc e que são estudados com o auxílio de funções. Ele considera que os alunos podem fazer uma abordagem intelectual desses fenômenos porque as mudanças em tais variáveis podem ser dinamicamente representadas na mente, como, por exemplo, a simulação do movimento em função do tempo.

Esse autor afirma que há outras variações que podem ser representadas mentalmente, mesmo que a variável independente não seja exclusivamente o tempo. Cita, como exemplo, o aquecimento de uma haste metálica que aumenta seu comprimento. Nesse caso, o pesquisador considera que somente a presença implícita da variável tempo permite uma simulação desse evento, que é dinamicamente representado na mente. Em outras palavras, para que ocorra a dilatação de uma barra metálica, ela precisa ter contato com uma fonte térmica durante um intervalo de tempo. Janvier (1998, p.83) sugere que tais funções que dependem do tempo (algumas vezes até de maneira implícita) sejam denominadas de *chronicles* (do grego *cronikós*).

Em uma de suas investigações com estudantes, Janvier (1998, p.83) apresentou um gráfico formado por cinco pontos e pediu que os alunos o completassem, localizando mais pontos. No eixo das abscissas, há indicações de temperatura e, no eixo das ordenadas, há indicações de diâmetros; cada ponto do gráfico mostra o diâmetro final de uma cultura de micróbios. Eles cresceram sob a específica temperatura que pode ser lida no eixo das abscissas. Muitos estudantes consideraram o eixo das abscissas como o eixo dos tempos. A interpretação do gráfico dada por eles foi de uma única população de micróbios crescendo durante um intervalo de tempo e morrendo a seguir. Segundo o autor, neste caso, a noção de *chronicle* que aparece nessas respostas é a interpretação de uma mudança temporal da população de micróbios, como ocorre em muitos livros didáticos.

Uma outra investigação, relatada no mesmo trabalho, feita com duzentos e vinte e seis alunos de graduação, em Montreal, em 1991, mostrou as dificuldades desses estudantes ao construir um gráfico de uma situação descrita verbalmente. Muitos interpretaram a variável independente como sendo o tempo.

Analisando os gráficos encontrados na obra de Nicole Oresme (1323-1382), Janvier (1998, p.90) verifica que todas as variações registradas no texto medieval podem ser consideradas *chronicles*, pois Oresme, mesmo implicitamente, pensava no tempo. Dessa forma, o autor acredita que, durante muito tempo, a humanidade fixou-se em um limitado significado para os gráficos.

Janvier (*ibid*, p.98) finaliza sua argumentação com a proposta de considerar uma *chronicle* como um obstáculo epistemológico, nos conformes de Gaston Bachelard e Guy Brousseau. A noção de obstáculo epistemológico foi introduzida pelo filósofo Gaston Bachelard, em 1938, no livro denominado *A formação do espírito científico*. Mais tarde, Guy Brousseau utilizou essa expressão na didática da matemática, para estudar a importância do erro no processo de ensino e aprendizagem. O erro não é somente devido à ignorância, à incerteza ou ao azar, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu sucesso; esse conhecimento, entretanto, se revela falso, ou simplesmente inadaptado. O obstáculo epistemológico é inevitável, porque faz parte da construção do conhecimento.

Retornaremos à questão das funções temporais mais adiante, na parte II, capítulo 2.

A seguir, destacamos a pesquisa de Pelho (2003), que envolveu trinta alunos de uma classe do segundo ano do ensino médio de uma escola particular da cidade de Araçatuba, interior de São Paulo. Eles tinham estudado funções no primeiro ano, mas ainda não compreendiam o assunto. A autora fundamentou-se na *Teoria de Registros de Representação Semiótica*, que foi desenvolvida por Raymond Duval.

Para Duval (2000), o conhecimento matemático tem um caráter paradoxal, pois o único caminho para alcançar o objeto matemático é fazer uso de signos, palavras, símbolos, expressões ou desenhos. Entretanto, os objetos matemáticos não podem ser confundidos com sua representação simbólica. Para esse autor, sistemas semióticos que possibilitam transformações específicas e intrínsecas de representações denominam-se *registros de representação*. Para cada representação do objeto em um sistema, pode ser produzida uma outra representação desse objeto em um outro sistema e esse tipo de transformação denomina-se *conversão*. O autor ainda afirma que a compreensão conceitual só é possível quando a coordenação entre os registros é alcançada e que esta é a condição para que um objeto não seja confundido com o conteúdo da representação. Também enfatiza: aprender matemática consiste em desenvolver uma progressiva coordenação entre vários sistemas semióticos de representação.

Retornando ao trabalho de Pelho (2003), ela elaborou uma seqüência didática, com atividades para serem desenvolvidas com o uso *software* Cabri-Géomètre II[6], que permite movimentar um ponto pertencente ao gráfico de uma função e, simultaneamente, apresentar as suas coordenadas. As funções utilizadas foram as lineares, as afins e as quadráticas. Partindo dessas condições, constatou que a dinâmica do *software* propiciou aos alunos uma melhor compreensão das variáveis da função, bem como do relacionamento entre elas.

Tivemos a oportunidade de reaplicar a seqüência construída por essa pesquisadora, em alunos do 1º ano do curso de licenciatura em Matemática e pudemos verificar sua adequação para introduzir o conceito de função, no aspecto

---

[6] Cabri-Géomètre II é um software desenvolvido pelo *Laboratoire des Structures Discrètes et de Didactique* – IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble, Grança. Ele é orientado para o estudo de Geometria, que permite criar e explorar figuras geométricas de forma interativa através da construção de pontos, retas, triângulos, polígonos, círculos, cônicas e outros objetos. Utiliza coordenadas cartesianas e identifica com precisão transformações de simetria, translação e rotação. A denominação "Cabri-Géomètre" provém do termo "*Cahier de Brouillon Interative*", que significa "Caderno Interativo de Rascunho" (SANGIACOMO *et al.*, 1999).

de dependência entre duas variáveis, além de ter proporcionado aos alunos uma melhor compreensão da articulação entre os registros.

Outro trabalho sobre funções foi desenvolvido por Schwarz, em 1995, com o objetivo de verificar a concepção de função em alunos ao final do segundo grau (atual ensino médio) (SCHWARZ, 1995). Para tanto, o autor aplicou testes em quarenta alunos da terceira série do segundo grau de uma escola pública da cidade de São Paulo.

Fundamentou-se em Sfard (1992), para quem as noções matemáticas podem ser concebidas de duas formas diferentes: estruturalmente (como objeto) e operacionalmente (como processo). Sfard (*ibid*, p.62) afirma que essa dualidade se encontra no caso de *função*, e sua longa história mostra a precedência do conceito operacional sobre o estrutural e identifica um padrão com três etapas, que pode ser identificado na sucessiva transição da concepção operacional para a estrutural: *interiorização*, *condensação* e *reificação*. Primeiro, deve existir um processo executado num objeto familiar; em seguida, os processos anteriores são comprimidos, um todo emerge e, finalmente, é adquirida a competência em ver esta nova entidade como um objeto permanente. A *reificação* do conceito de função é a passagem do processo para a concepção do que se considera objeto matemático e é um salto qualitativo. Schwarz (1995) concluiu que:

> A maior parte dos alunos por nós pesquisados está adentrando no primeiro nível, justificando as observações da análise *a posteriori*, de que, em alguns, ainda persiste uma concepção **operacional elementar** de função (nível anterior ao da interiorização); outros estão francamente na 1ª fase da concepção de função. (SCHWARZ, 1995, p.124, destaque do autor)

O pesquisador constatou que a apresentação da definição formal nos livros didáticos, sua repetição em sala de aula não garantem que alunos do terceiro ano do segundo grau dêem um significado a essa definição. Schwarz (1995) não analisou os livros didáticos utilizados no ensino médio para verificar se eles propiciam condições eficazes para que os alunos possam ter uma concepção operacional ou ir além, para uma concepção estrutural. Também não verificou se os professores, que ministraram aulas para esses alunos possuíam, de fato, uma concepção estrutural de função ou se ainda tinham uma concepção operacional.

Um outro trabalho, dedicado especialmente às funções polinomiais do 2º grau, foi desenvolvido por Simões, em 1995. A autora parte da constatação de que o desenvolvimento do estudo das funções polinomiais de 1º e 2º graus é dado no seguinte padrão: definição, exemplos algébricos, passagem ao gráfico por meio de tabela e observou que a determinação dos pontos de máximo ou de mínimo nos gráficos das funções de 2º grau é feita pela apresentação da fórmula. Para quebrar esses padrões, aplicou uma seqüência de ensino em alunos de uma 8ª série do ensino fundamental de uma escola particular com estudantes provenientes da classe média-alta de uma cidade da Grande São Paulo, durante dezessete sessões. Utilizou o *jogo de quadros*, devido a Regine Douady.

Douady (1986) introduziu as noções *quadro* e *jogo de quadros*. Um *quadro* é constituído de objetos de um ramo da Matemática, de relações entre esses objetos, suas formulações eventualmente diversas e de imagens mentais associadas a eles. Dois quadros podem comportar os mesmos objetos e diferir pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas. Essa autora concebe a noção de quadro como uma noção dinâmica. Os *jogos de quadros* são mudanças de quadros provocadas pela iniciativa do professor, em problemas escolhidos convenientemente, para fazer evoluir as concepções dos alunos.

Segundo Simões (1995, p. 250), o seu objetivo de fornecer uma seqüência didática para o ensino e aprendizagem da função do 2º grau - privilegiando situações que permitiram ao aluno utilizar o *jogo de quadros*, entre o quadro algébrico e geométrico - foi alcançado, na medida em que dezenove alunos, de um total de vinte e dois, mostraram ser capazes de esboçar o gráfico de uma função polinomial do 2º grau a partir da sua expressão algébrica e vice-versa.

Mesmo considerando que a nossa pesquisa não é voltada especificamente para funções polinomiais do 2º grau, o trabalho de Simões (1995) é interessante porque a seqüência proposta pela autora é um contraponto às tarefas rotineiras que se encontram nos livros didáticos para construção de parábolas. Também mostra que é possível levar o aluno de 8ª série a escrever a expressão algébrica de uma função polinomial do 2º grau a partir da sua representação gráfica.

2.2.2. Os professores como objeto de pesquisa

Dos trabalhos pesquisados envolvendo somente professores, destacamos: Zuffi (1999, 2004), Fonte (2002), Pinto (1999), Monteiro e Selva (2001). Além desses, nos referimos aos trabalhos realizados fora do Brasil: Hitt (1998) e Even (1990, 1998). Constatamos que não há muitas pesquisas com o objetivo de avaliar o trabalho de professores direcionadas para funções, variáveis ou, mais globalmente, pensamento algébrico.

Zuffi (2004) relata os resultados alcançados após a aplicação de uma seqüência didática sobre funções em cinco alunos do final de um curso de licenciatura em Matemática, a respeito do conceito de função. Após responderem um questionário com vinte e duas perguntas sobre funções, os licenciandos tiveram a oportunidade de terem contato com os aspectos históricos do desenvolvimento desse conceito, e utilizaram um *software* educativo para visualizar gráficos de diversas funções polinomiais e racionais. Além disso, a pesquisadora promoveu uma reflexão sobre como a linguagem matemática foi se desenvolvendo com o próprio crescimento da Matemática. Por último, solicitou aos professores que opinassem por escrito sobre algumas questões.

Ao analisar os resultados, a pesquisadora observou uma pequena melhora na escrita matemática desses licenciandos e a tentativa de incorporar, em seus discursos pedagógicos, alguns pontos discutidos durante o desenvolvimento das atividades. Constatou que, no final da formação, eles ainda continuavam apegados à tradicional maneira de apresentar o conceito no ensino médio. Em primeiro lugar, a definição, depois, a ordem usual: função afim, quadrática, exponencial, logarítmica e trigonométrica; por último, os exemplos do cotidiano. Não incluíram o uso de uma ferramenta computacional para a exploração de gráficos de funções. Zuffi (2004) afirma que, apesar dos licenciandos terem um bom nível de abstração, dentro das disciplinas formais da licenciatura, eles não conseguem fazer ligações dessas abstrações em temas unificadores, como funções.

Em outra pesquisa, da mesma autora (Zuffi, 1999), nós encontramos valiosas contribuições para a compreensão das dificuldades dos professores. Essa pesquisa teve o objetivo de detectar modos de utilização da simbologia e da lógica envolvidas na linguagem matemática do professor, a fim de levantar alguns fatores que pudessem estar influenciando as dificuldades dos alunos para a compreensão do conceito matemático de função.

Os sujeitos da pesquisa foram sete professores atuantes no ensino de segundo grau, atuando em escolas públicas e privadas, com diferentes tipos de formação e de tempo de exercício na carreira docente. Eles responderam um questionário, cujas perguntas foram elaboradas a partir de observações preliminares realizadas com uma das professoras. A seguir, a pesquisadora fez entrevistas curtas, semi-abertas, a fim de resgatar alguns dados acerca da sua formação geral e de suas ações pedagógicas na sala de aula, além de esclarecer eventuais dúvidas quanto às respostas apresentadas por escrito.

A autora criou categorias a partir das expressões escritas, da linguagem utilizada pelos professores em suas respostas ou evidenciadas em suas falas durante as entrevistas. Para isso, ela fundamentou-se nas idéias de concepção de *ação*, de *processo* e de *objeto*, dadas por Dubinski e Harel (1992), que foram tratadas na seção anterior, e de *imagens de um conceito*, proposta por Vinner[7], em 1991.

A segunda parte da pesquisa de Zuffi (1999) consiste na observação de aulas de três dos sete professores entrevistados, com o objetivo de apreender detalhes da linguagem utilizada por eles em seu trabalho docente, em suas tentativas de "ensinar" o conceito de função. A seguir, a pesquisadora constrói categorias (*ibid*, p.168 -172) sobre as concepções do conceito de função utilizadas e veiculadas pelos professores na sala de aula.

No final, aponta para o empobrecimento da linguagem do professor na sala de aula:

> Podemos vislumbrar indícios que apontam para uma linguagem matemática que reforça a simplificação, a redução do conceito, muitas vezes empobrecendo-o. Por outro lado, a formação conceitual debilitada e vaga, que é recebida na maioria dos cursos de licenciatura, sem nenhuma conexão com as suas práticas pedagógicas, acaba por influenciar negativamente a expressão através da linguagem matemática destes professores. (ZUFFI,1999, p.122).

[7] Segundo Vinner (1991) *apud* Zuffi (1999, p.26), a imagem de um conceito seria uma entidade não verbal, associada ao nome do conceito; pode ser uma representação visual, uma experiência, ou seja, são as imagens mentais mais imediatas que os indivíduos evocam ao ouvirem o nome de um conceito.

Acreditamos que o quadro seria mais desolador, se ao invés de ter investigado professores provenientes de uma licenciatura plena, a pesquisadora tivesse optado por investigar professores provenientes de licenciaturas curtas, ou de outros cursos superiores, com apenas uma complementação pedagógica para ensinar Matemática.

Essa pesquisadora considera que, de uma maneira geral, os cursos de licenciatura fracassam em mover os estudantes no caminho de uma concepção processo, e alcançar a concepção objeto:

> Quanto às variáveis, alguns poucos valores numéricos são atribuídos a elas, um a um, e isoladamente, na expressão dos professores investigados, seja no esclarecimento de seis próprios conhecimentos sobre o conceito, seja na tentativa de ensiná-lo ao aluno. Isso contribui para caracterizar uma concepção de ação para funções [...] Desse modo, parece que o primeiro tratamento dado ao conceito, já no ensino médio, é responsável por se estabelecer uma concepção de ação para ele, que dificilmente é ampliada nos cursos universitários de Matemática." (ZUFFI,1999, p.187).

Diante dessa realidade, consideramos que provavelmente esses professores, com concepção de ação, formarão alunos limitados nessa mesma concepção. Alguns desses alunos, por sua vez, poderão escolher a carreira do magistério e o ciclo recomeçaria.

Zuffi (1999) observou professores na sala de aula, ao passo que a nossa pesquisa é uma pesquisa-ação, que envolveu professores na construção de uma seqüência de ensino para alunos de 8ª série, na tentativa de deixar um legado para professores e alunos.

Outra pesquisa, direcionada para funções afins, foi realizada por Fonte, em 2002. A autora entrevistou três professores que lecionavam Matemática no segundo grau em escolas federais e particulares do Rio de Janeiro, apresentando-lhes um questionário, que atuou como guia. Nessas entrevistas, a autora explorou a conexão cartesiana relativa a funções afins: um ponto está sobre o gráfico de $y = ax + b$ se, e somente se, suas coordenadas satisfazem a equação $y = ax + b$.

O objetivo dessa autora foi investigar o conhecimento dos professores e a forma como ensinam esse conteúdo. Uma de suas conclusões é que o enfoque dado à representação algébrica por uma parcela significativa dos docentes e dos livros didáticos pode ser a causa de os alunos se sentirem mais seguros no contexto algébrico do que no gráfico.

Fonte (2002) verificou que as professoras habitualmente apresentam o seguinte roteiro aos seus alunos para a construção de um gráfico a partir da expressão algébrica: gerar uma tabela com alguns pares ordenados, marcar os pontos em um sistema de eixos cartesianos e, unindo os pontos adequadamente, construir o gráfico da função. Contudo, não propõem exercícios no sentido gráfico - equação.

Mais adiante, veremos que há livros didáticos que indicam esse mesmo roteiro para a construção de gráficos de funções a partir de uma tabela e que não apresentam exercícios no sentido gráfico - expressão algébrica.

A autora perguntou às professoras se elas explicavam ou demonstravam aos seus alunos que o gráfico de uma função afim é uma reta. Elas responderam que os alunos têm uma "intuição" para aceitar que essa é a forma do gráfico, ou que os alunos ainda não têm o conhecimento necessário e suficiente para entender a demonstração. Mas nem todos os professores entrevistadas conheciam a demonstração desse fato.

As conclusões de Fonte (2002), mesmo considerando que apenas três professores foram entrevistados, levam-nos a acreditar que essa técnica - colocar mais pontos no gráfico e concluir que o gráfico de uma função afim é uma reta, uma justificativa baseada somente no aspecto visual, sem outras considerações de cunho tecnológico/teórico - possa estar sendo utilizada por outros professores. Mais adiante, na Parte II, capítulo 2, veremos as questões que foram levantadas sobre alinhamento de pontos, os quesitos necessários para demonstrar que o gráfico de uma função afim é uma reta.

Outro estudo interessante é o trabalho de Pinto (1999), cujo objetivo foi compreender como o professor de Matemática do ensino fundamental concebe o ensino da álgebra. Foi considerada sua concepção de álgebra e de educação algébrica. Responderam questionários trinta e seis professores de quinta a oitava série que trabalham em escolas das redes pública e particular da Grande Vitória. A seguir, sete deles foram entrevistados.

O autor relacionou as concepções de álgebra e educação algébrica dos professores com aquelas que eles possuíam acerca das concepções de educação e educação matemática. Para esse estudo, Pinto (1999) utiliza as quatro concepções de álgebra identificadas por Zalman Usiskin: álgebra como uma aritmética generalizada, como um estudo de procedimentos para a resolução de problemas, como um estudo de relações entre grandezas e álgebra como um estudo das estruturas da matemática. Serve-se também das concepções de educação algébrica apresentadas por Lins e Gimenez (1997): letrista, letrista-facilitadora, álgebra como aritmética generalizada e modelagem matemática.

Dentre as diversas conclusões, citaremos aquelas que mais nos dizem respeito, isto é, aquelas relativas à concepção de álgebra como estudo da variação de grandezas. O autor constata a perda de importância do conceito de função no ensino de Matemática do primeiro grau:

> Não verificamos informações referentes à concepção de álgebra como estudo das relações entre grandezas. Esse fato é interessante, porque denota a pouca importância que é dada ao estudo de funções na matemática do primeiro grau." (PINTO,1999, p.113).

O autor reforça aquilo que encontramos nos *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática*: "A noção de variável, de modo geral, não tem sido explorada no ensino fundamental." (PCNs,1998, p.118)

Pinto (1999) verifica que os conteúdos mais identificados como algébricos são aqueles em que aparecem as letras com o sentido de incógnita ou de expressão literal a ser resolvida, mas que a representação gráfica de uma função foi considerada como conteúdo algébrico por 66% dos professores; a fórmula da área de uma figura plana foi considerada como conteúdo algébrico por 63% dos professores; a expressão algébrica que indica a soma dos números pares $S_n = 2+4+6+8+...+2n$ foi considerada conteúdo algébrico por 45% dos professores.

Esse autor constata que todos os professores investigados tiveram uma formação escolar baseada em uma concepção letrista, sem qualquer contextualização e significado. Mais tarde, como licenciandos, conceberam a Matemática dissociada de seu processo de ensino-aprendizagem.

Chama a nossa atenção o fato verificado por Pinto (1999, p.163) de que dos sete professores entrevistados, somente dois colocaram em evidência o estudo das relações entre grandezas e articularam essa concepção com as de álgebra como meio de resolver problemas e de álgebra como aritmética generalizada. O autor verifica que esses mesmos professores possuem uma visão mais ampla do papel que a álgebra representa na educação matemática, levando a um ensino mais significativo e tendendo ao enfoque dado pela modelagem matemática. Um deles recebeu uma outra formação, além da licenciatura, e passou a valorizar o aprendizado da linguagem algébrica em paralelo com o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Esses resultados nos alertaram para o fato de que há professores que têm uma visão bastante restrita da álgebra e que teriam dificuldades em preparar aulas sobre relações entre grandezas e funções.

Uma outra pesquisa que nos parece significativa refere-se à interpretação de gráficos entre professores do ensino fundamental. Monteiro e Selva (2001) consideram que existe uma lacuna no que tange à identificação de como professores compreendem e utilizam gráficos. Por isso, desenvolveram um estudo no qual discutiram os processos de interpretação de gráficos, como aspecto importante para subsidiar a elaboração de situações de formação de professores, que contemplem o Tratamento da Informação. Participaram dessa investigação dois grupos de professores, um formado por nove docentes da segunda série e o segundo por sete da quarta série, que foram entrevistados individualmente. Cada participante recebeu quatro gráficos e um roteiro de perguntas para cada um dos gráficos.

Nas conclusões, Monteiro e Selva (2001) afirmaram que a maioria dos professores sentiu dificuldade em operar, realizar cálculos proporcionais, envolvendo valores numéricos indicados nos gráficos, em interpretar escala e eixos. Os pesquisadores também relatam que os professores admitem a necessidade de desenvolver um trabalho com gráficos em suas séries. Entretanto todos foram unânimes em reconhecer seu despreparo para realizar tais ações.

Diante dos resultados obtidos, concordamos com as idéias desses dois autores, que propõem que programas de formação de professores contemplem um trabalho com gráficos, pois consideram essa questão relevante.

Relatamos, a seguir, duas pesquisas envolvendo professores que não foram realizadas no Brasil. A pesquisa de Even (1990, 1998) foi escolhida pela abrangência do universo pesquisado e a de Hitt (1998) pela quantidade de questões aplicadas (catorze), pelas tarefas requeridas para a execução de cada uma delas e pelo fato de que os professores pesquisados estarem iniciando uma pós-graduação.

Hitt (1998) estudou o desempenho de um grupo de trinta professores de Matemática do nível secundário que estavam começando um curso de Pós Graduação em Educação Matemática. O autor se preocupou com as dificuldades de articulação de registros de representação ligadas ao conceito de função. Por esse motivo, ele propôs cinco níveis na construção do conceito: idéias imprecisas sobre o conceito (mistura incoerente de diferentes representações); identificação de diferentes representações de um conceito e identificação de sistemas de representação; traduções com preservação do significado de um sistema para outro; articulação coerente entre dois sistemas de representação; articulação coerente de diferentes sistemas de representação na solução de um problema.

Hitt (1998, p.133) concluiu que os professores: abandonam suas definições de função quando se vêem diante de uma expressão algébrica; não identificam facilmente os conceitos de *domínio* e *imagem* na representação gráfica; empregam a regra de correspondência ou conjunto de pares ordenados para definir função; somente três professores preferem uma definição em termos de interdependência entre variáveis; não utilizam as definições, que são relegadas a um nível subsidiário. Além disso, esse pesquisador observou que os professores utilizam funções contínuas, definidas exclusivamente por uma fórmula, o que é, para ele, um obstáculo cognitivo, pois não os capacita a construir diferentes funções. Os resultados mostraram que, em situações não habituais, os professores não conseguiram fazer uma articulação coerente entre os vários sistemas de representação envolvidos no conceito de função.

Ao analisar as questões sobre interpretação de gráficos em um contexto físico, Hitt (1998, p.133) obteve os seguintes resultados: forma do gráfico (área da superfície em função da altura do líquido) evocava a forma do recipiente (34% das respostas); no caso contrário, o mesmo fenômeno foi percebido; o movimento de um objeto em um plano inclinado levou 16% dos professores a indicar um gráfico de velocidade em função do tempo: uma reta com a mesma inclinação do plano inclinado. Para esse pesquisador, os resultados mostram que os professores não conseguiram identificar a variável independente no contexto e analisá-la na representação gráfica e analítica.

As dificuldades de professores, estudantes de pós-graduação, sujeitos da pesquisa de Hitt, em 1998, em articular diferentes representações de função e em identificar a variável independente em um determinado contexto físico, nos alertam para as possíveis dificuldades de professores brasileiros, não inseridos em programas de pós-graduação, em relação ao conceito de função.

A pesquisadora Ruhama Even realizou uma pesquisa com cento e sessenta e dois estudantes de licenciatura de oito universidades americanas, que estavam no último estágio de preparação e que já tinham cursado a disciplina Cálculo. Essa pesquisa deu origem a dois trabalhos, o primeiro publicado em 1990, o segundo, em 1998.

Even (1998) relata que, na primeira fase da pesquisa, cento e cinqüenta e dois estudantes responderam um questionário, que continha problemas não padronizados; na segunda fase, outros dez estudantes responderam ao mesmo questionário e foram entrevistados, a seguir, a respeito das respostas dadas. A pesquisa, que ocorreu entre 1987 e 1988, mostrou que os futuros professores apresentavam diversas dificuldades. Por exemplo, diante de uma função polinomial do 2º grau, com coeficientes literais, não tiveram a iniciativa de esboçar um gráfico, que obedecesse às condições dadas no problema para obter a solução. A pesquisadora acredita que a representação simbólica domina o pensamento dos estudantes e que eles não são capazes de mudar a maneira de pensar sobre o problema. Essa situação a levou a investigar os fatores envolvidos na mudança de uma representação para outra.

Concluiu ainda que uma abordagem global de gráficos é mais eficaz em determinadas situações, ao passo que, em outras, um tratamento pontual de gráficos é mais eficaz. Considera como pontos críticos o contexto do problema, bem como a qualidade dos conhecimentos subjacentes, que intervêm na habilidade de ir de uma representação para outra.

Em outro trabalho da mesma pesquisadora, sobre a mesma pesquisa realizada com professores americanos, Even (1990) relata as expectativas que estudantes de licenciatura têm sobre gráficos de função, que devem ser “agradáveis” e “razoáveis.” Ela acredita que essas respostas são compreensíveis, pois quase todas as funções que aparecem no ensino secundário têm um gráfico “agradável” e podem ser descritas por uma fórmula. Assim, um professor tem a imagem do conceito de uma função determinado por aquelas que ele já conhece e não pela moderna definição, que enfatiza a arbitrariedade da natureza das funções. A autora enfatiza que futuros professores não podem conceber função de modo limitado e acrescenta que este fato contribui para o ciclo de discrepâncias entre a definição do conceito e sua imagem entre os estudantes.

A pesquisadora observa que, apesar de terem estudado cálculo, os futuros professores, diante de uma função racional, constroem um gráfico a partir de uma tabela com poucos valores inteiros para a variável independente; 50% deles ligam os pontos com uma linha contínua, ao passo que a outra metade se preocupou com o comportamento da função.

Even (1990) considera que entender o conceito de função requer que se compreenda a composição de funções e a função inversa. Acredita que os erros cometidos pelos futuros professores ao determinar a inversa da função exponencial estão relacionadas com a limitada idéia de “desfazer”, para obter a função inversa.

Diante dos gráficos desenhados pelos futuros docentes e que representam a função de Dirichlet, a pesquisadora observou que eles estavam considerando o conjunto dos números reais como enumerável. Afirma que é necessário que os professores conheçam a estrutura do domínio de uma função, no caso, a estrutura dos números reais.

A autora finaliza seu estudo afirmando que professores têm um conhecimento frágil e fraco sobre funções e sugere uma reformulação nas licenciaturas (americanas).

Chama a nossa atenção a proposta de Even (1990, p.541) para melhorar a atuação desses profissionais. A autora acredita que o encontro de um conceito “familiar” em uma situação não usual força os professores a reexaminar seus conhecimentos, superar dificuldades e esses esforços os levará a construir uma noção mais bem articulada e aprofundada. Mas, em nenhum momento, essa pesquisadora propõe uma formação que solicite dos professores a elaboração de materiais instrucionais.

2.2.3. Pesquisas envolvendo professores e alunos

A pesquisa desenvolvida por Oliveira, em 1997, consistiu na aplicação de uma seqüência didática sobre funções em alunos do primeiro ano de um curso de

Engenharia, para a compreensão das noções de correspondência, dependência e variação e na aplicação de um questionário que foi respondido por professores.

Os alunos tiveram que utilizar o jogo de quadros e mudanças de registro de representação para resolver as atividades propostas na seqüência de ensino. Oliveira (1997, p.131) conclui que a sua seqüência didática provocou um avanço nas concepções sobre o conceito de função, na medida em que começaram a relacionar função com seus aspectos de variação, dependência, correspondência. Os alunos compreenderam que um gráfico ou uma tabela pode representar uma função, independentemente da existência e/ou conhecimento de sua representação algébrica. Também fizeram passagens da linguagem escrita para tabela e gráfico, deste para tabela, de fórmula para gráfico, deste para tabela e desta para fórmula. Perceberam que algumas funções podem corresponder a situações da realidade.

Oliveira (1997) e Pelho (2003) utilizaram o mesmo referencial teórico e aplicaram uma seqüência de ensino em estudantes. A diferença é que a segunda utilizou um *software* educativo, o que possibilitou uma compreensão da dependência bem como das mudanças de registro de representação de função.

No trabalho de Oliveira (1997) também existe uma pesquisa envolvendo dezessete professores que responderam um questionário. As respostas mostram que o livro didático impera como o recurso mais utilizado; 50% dos professores não conhecem a *Proposta Curricular de Matemática* do Estado de São Paulo; as concepções de função dos professores são aquelas que aparecem nos livros didáticos; as suas aulas sobre função são expositivas; eles têm a preocupação de partir de alguma situação que possa ocorrer no dia-a-dia dos alunos; apresentam uma definição intuitiva e, depois de algum tempo, apresentam a definição (formal) de função; a maioria dos professores não utiliza as mudanças de registro de representação de maneira completa, preferindo tabela para gráfico, mesmo reconhecendo as vantagens do uso das mudanças de registro de representação; não dão importância às representações gráficas em papel quadriculado ou milimetrado.

Os professores investigados por Oliveira (1997) consideram que os seus alunos têm dificuldades na passagem da linguagem escrita para a expressão algébrica; no conceito de domínio da função; na representação gráfica; na análise de gráficos; na noção de grandeza variável; na abstração do conceito; com a simbologia; com a lei de correspondência; com a definição abstrata; com as diversas representações de função.

As respostas ao questionário dadas pelos professores não foram confrontadas com entrevistas e nem com a observação das suas aulas. Entretanto, essas respostas nos informam como podem estar sendo ministradas as aulas sobre funções.

Destacamos ainda a pesquisa, realizada por Eugene Comin, na França, em 2000, que fez um profundo estudo dos conceitos de proporcionalidade e de função linear (COMIN, 2000).

Ao fazer uma análise dos programas franceses, esse pesquisador verificou o vazio deixado pela retirada do ensino de grandezas, na França, de relações e de proporções e a substituição desses conceitos pelo ensino das representações "algébricas" de função linear que, nessas condições, não pode aparecer como uma abstração dos conhecimentos de proporcionalidade.

Comin (2000, parte 1, p.76), ao analisar as respostas de trinta e oito professores franceses do ensino primário sobre razões, frações, proporcionalidade e função linear, com a utilização do software CHIC[8], confirmou dentre outros resultados que, para esses professores, o modelo função linear é independente dos conceitos de proporcionalidade em aritmética. O resultado chamou a nossa atenção e mais adiante, ao longo da pesquisa, veremos como os professores lidam com proporcionalidade e função linear e se relacionam (ou não) esses dois conceitos, mesmo considerando que, no Brasil, proporções e grandezas não foram retiradas do ensino fundamental.

Esse pesquisador, após analisar livros didáticos franceses sobre proporção e função linear, na perspectiva da *Teoria Antropológica do Didático*, procurou uma organização matemática que proporcionasse um nicho didático à proporcionalidade e que conduzisse ao tratamento de grandezas e funções. Para isso, criou uma

---

[8] A sigla CHIC sintetiza *Classification Hierarchique Implicative et Cohésitive*. CHIC é um *software* utilizado para análise de dados, concebido por Dr. Régis Gras e desenvolvido posteriormente pelo Dr. Saddo Ag Almouloud.

seqüência didática, que foi aplicada a alunos do ensino primário: classe de CM1[9] em 1997 e 1998; classe de CM2 em 1998 e 1999.

O trabalho de engenharia didática procurou um equilíbrio entre a existência provisória e limitada das noções de razão e de proporcionalidade e a utilização algébrica que abordasse progressivamente os novos conhecimentos matemáticos. A álgebra seria uma abstração que resumisse e refletisse os conhecimentos da aritmética das grandezas. Para tanto, as situações foram construídas de forma que pudessem gerar, de uma maneira dialética, as noções de variável, de função e de números. Trabalhando com grandezas, os alunos foram conduzidos a manipular medidas e relações, dando sentido às construções matemáticas elementares, o que permitiu uma primeira abordagem da idéia de função linear. Para acionar as técnicas da proporcionalidade, o autor apelou para a idéia espontânea que os alunos fazem da eqüidade, para lhes mostrar o papel da Matemática na sociedade.

Este é o único trabalho encontrado que utiliza o nosso referencial teórico. Todavia, Comin (2000) aplicou uma seqüência de ensino a alunos do curso primário e não fez uma pesquisa-ação envolvendo professores.

As pesquisas mencionadas evidenciam que, mesmo utilizando diversos marcos teóricos, as dificuldades concernentes ao ensino e à aprendizagem do conceito de função tem sido motivo de preocupação de estudiosos em Educação Matemática.

2.3. Análise de documentos e de livros didáticos

A importância da análise de livros didáticos em um trabalho dedicado à formação de professores deve-se ao fato de que os professores, em geral, apóiam-se nesse tipo de material didático para preparar suas aulas. No Brasil, esse fato é apontado nos *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática*:

> Não tendo oportunidade e condições para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas da sala de aula, os professores apóiam-se quase exclusivamente nos livros didáticos, que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatória. (PCN, 1998, p.22)

[9] Na França, essas designações referem-se às duas últimas séries do curso primário de cinco anos. CM1 é para alunos com 9 -10 anos; CM2 é para alunos com 10 -11 anos.

Utilizaremos a *Teoria Antropológica do Didático* (TAD) para fazer um estudo prévio das organizações praxeológicas que se encontram nos documentos oficiais e nos livros didáticos de oitava série, nos capítulos dedicados ao tema – *função* a fim de verificar quais são as praxeologias difundidas e como elas são apresentadas.

Tabelas, gráficos, expressões algébricas, diagramas de flechas, símbolos, palavras e desenhos fazem parte dos capítulos dedicados ao tema. À luz da TAD, essas representações são *objetos ostensivos*. O conceito em si é um *objeto não-ostensivo*. A seguir, apresentamos essas noções.

2.3.1 Objetos ostensivos e não-ostensivos

Os *objetos ostensivos* – do latim *ostender*e, que significa mostrar, apresentar com insistência – são todos os objetos que têm uma certa materialidade e que, por isso, adquirem para uma pessoa uma realidade perceptível: as palavras, os grafismos e os gestos.

Os *objetos não-ostensivos* são todos os "objetos" como as idéias, as intuições e os conceitos, que existem institucionalmente, mas que não podem ser vistos, percebidos ou mostrados por si mesmos. Eles só podem ser invocados ou evocados por uma manipulação adequada de determinados objetos ostensivos associados (uma palavra, uma frase, um grafismo, um gesto ou todo um discurso).

Por exemplo, o conceito de "função" é um objeto não-ostensivo que é identificado e ativado, por meio da escrita "f(x)", ou da palavra (escrita ou falada) *função*, ou por um gráfico, que são objetos ostensivos. Efetivamente, ninguém, em tempo algum, colocou a mão no objeto *função*.

Bosch e Chevallard (1999) salientam que os dois tipos de objetos (ostensivos e não-ostensivos) são sempre institucionais; a existência deles não depende da atividade de uma única pessoa; tanto um como outro são unidos por uma dialética que considera os *não-ostensivos* como emergentes da manipulação dos *ostensivos* e, ao mesmo tempo, como meios de controle dessa manipulação; os *objetos ostensivos* são manipuláveis pelo ser humano, ao passo que os *não-ostensivos* não o são; a presença simultânea de diferentes registros ostensivos é a invariante da prática matemática; a função semiótica dos ostensivos, isto é, sua capacidade de produzir um sentido, não pode ser separada de sua função instrumental, ou seja, sua capacidade de se integrar nas manipulações técnicas, tecnológicas e teóricas.

Esses dois pesquisadores ressaltam o fato de que acionar uma técnica significa manipular ostensivos, dirigidos pelos não-ostensivos. Além disso, todo discurso tecnológico ou teórico se efetua concretamente pela manipulação de ostensivos, em particular, utilizando os discursivos e escritos, que permitem materializar as explicações e justificativas necessárias ao desenvolvimento das tarefas. O trabalho com os ostensivos deve ser, por sua vez, eficaz, legível e inteligível, o que contribui para lhes dar a sua força instrumental e semiótica.

A abordagem antropológica propõe um modelo de atividade matemática que integra os objetos ostensivos como constituintes básicos do saber matemático, descrito em termos de organizações praxeológicas. Na evolução dessas praxeologias, nos seus desenvolvimentos históricos e nas suas transposições na sala de aula, os avanços e os recuos são sempre ostensivos e não ostensivos.

Dessa forma, os objetos ostensivos: fórmulas, gráficos, tabelas, expressões verbais e outros grafismos são os ingredientes básicos e sua manipulação faz emergir o saber / fazer e o saber sobre função.

Na análise dos livros e dos documentos oficiais, veremos quais são os ostensivos utilizados, se há opções preferenciais por determinados tipos de tarefas, se há apresentação de alguma técnica para elas, bem como do bloco tecnologia / teoria.

2.3.2. Análise dos documentos oficiais

Antes de iniciarmos a análise dos livros didáticos da oitava série, apresentaremos as propostas sobre o ensino / aprendizagem de funções, de variável, em dois documentos oficiais: *Proposta Curricular para o Ensino de Matemática no Ensino Fundamental*, elaborada pela Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas, vinculada à Secretaria de Educação do Estado de São Paulo e cuja primeira edição é de 1988; *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática* (terceiro e quarto ciclos) elaborados pela Secretaria de Educação Fundamental, vinculada ao Ministério de Educação e editados em 1998.

A *Proposta Curricular* (1997) tem como critério de seleção de conteúdos sua relevância social e sua contribuição para o desenvolvimento do raciocínio lógico, que são organizados em três blocos geradores: números, geometria e medidas e destaca que os conhecimentos matemáticos devem ser construídos especialmente a partir dos problemas encontrados no cotidiano e em outras disciplinas e não apenas na própria Matemática.

Enfatiza a importância de o ensino da proporcionalidade ser estreitamente ligado ao ensino de variação de grandezas. Sugere que devem ser propiciadas condições para que o estudante possa verificar o aspecto qualitativo da variação das grandezas em jogo, a fim de que ele consiga estabelecer relações entre os valores por meio de uma expressão algébrica. Propõe ainda que sejam utilizadas a representação gráfica, para visualizar o comportamento das variações, e as tabelas, por serem ferramentas úteis para “arrumar” os dados obtidos e visualizar o comportamento desses dados.

Encontramos exemplos para trabalhar grandezas direta e inversamente proporcionais. O exemplo dado para o primeiro caso apresenta o seguinte roteiro de tarefas, a partir de uma tabela preenchida: construir o gráfico e verificar que: a) os pontos obtidos são colineares, b) a inclinação da reta está relacionada com a taxa de crescimento, c) as frações são equivalentes. No segundo caso, o roteiro estabelecido, a partir de uma tabela, é o seguinte: construir o gráfico, observar que os pontos não são colineares e que o produto de dois valores correspondentes é constante.

Para fazer um contraponto com grandezas que variam direta ou inversamente, são propostas duas situações: grandezas que variam proporcionalmente ao quadrado de outra e grandezas que variam segundo leis do tipo $y = ax + b$. Para a segunda situação, o documento apresenta um texto, acompanhado de uma ilustração e propõe o seguinte roteiro: completar tabela, construir um gráfico, verificar que essas duas seqüências não são diretamente nem inversamente proporcionais, escrever uma expressão algébrica. A palavra *função* é mencionada somente na última página do documento:

> Função não constitui tema à parte. As funções são indicadas em situações em que podem ser exploradas desde o início do estudo de números, em situações-problema, em interpretações de gráficos, no

> estudo da variação de grandezas associadas a diferentes fenômenos, nas situações de interdependência [...]. (PROPOSTA CURRICULAR, 1997, p.181).

Apesar do texto acima indicar leitura e interpretação de gráficos, o documento termina e não oferece nenhum subsídio para isso.

Em síntese, a única concepção de função encontrada nesse documento é a interdependência de grandezas, a organização matemática apresentada privilegia determinados roteiros para as tarefas e o uso de das letras x e y para variável dependente e y para variável dependente.

Os PCNs surgiram da imposição legal de se oferecer uma referência curricular nacional para o ensino fundamental e médio e se apresentam inseridos em um movimento amplo de reformas do ensino de Matemática, iniciadas a partir de meados dos anos 80. Esse documento tem como objetivo propiciar aos sistemas de ensino e, particularmente, aos professores, subsídios à elaboração e / ou re-elaboração do currículo, visando à construção do projeto pedagógico, em função da cidadania do aluno.

Segundo seus idealizadores, os PCNs de Matemática, de 1998, refletem os avanços em Educação Matemática e têm como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina a resolução de problemas. Os conteúdos aparecem organizados em blocos, diferentemente do modo tradicional, a saber: números e operações; espaço e formas; grandezas e medidas e tratamento da informação.

Esse documento orienta que se organizem situações de ensino-aprendizagem, privilegiando as chamadas intraconexões das diferentes áreas da Matemática, porque elas favorecem uma visão mais integrada dessa disciplina, e as interconexões com as demais áreas do conhecimento.

Dentre os conteúdos propostos para o quarto ciclo, destacamos:

> Assim, no trabalho com a Álgebra, é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o reconhecimento da sintaxe (regras de resolução) de uma equação. (PCNs, 1998, p.84).

Citamos as orientações didáticas para terceiro e quarto ciclos (PCNs, 1998, p.117,118) relativas ao ensino e aprendizagem de função: não fazer uma abordagem excessivamente formal desse conceito neste nível de ensino; propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos; a investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-las simbolicamente; utilizar letras como variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas; propor situações-problema sobre variação de grandezas para que o aluno possa desenvolver a noção de função; utilizar *software* educativo, que apresentam planilhas ou gráficos.

Encontramos o exemplo de uma situação que tem a finalidade de mostrar como um aluno, a partir de um texto, poderia perceber as vantagens do uso de letras (como variável) para generalizar procedimentos. O documento sugere ao professor a organização de dados em uma tabela, que leve o aluno a fazer uma descrição oral dos procedimentos e empregue a noção de variável para indicar genericamente a interdependência das grandezas envolvidas. Todavia, o documento não discute as dificuldades que os alunos poderiam encontrar para fazer essa generalização, como se esse raciocínio decorresse naturalmente. Além disso, não sugere a construção de um gráfico para a situação descrita, apesar de destacar a importância desse recurso para o desenvolvimento de conceitos e de procedimentos algébricos. Notamos igualmente a ausência de, pelo menos, uma situação que ilustrasse a leitura e a interpretação de um gráfico.

Para o ensino e aprendizagem de álgebra também há uma sugestão para um trabalho com padrões de regularidade em situações geométricas: uma seqüência de figuras, formadas por quadrados brancos e pretos, mas o texto não mostra que esse exemplo trata de uma concepção de função como padrão de regularidade. Outra ausência é a concepção de função como máquina.

O documento apresenta a proporcionalidade como uma fonte de conexões de diversos conteúdos e sustenta que a compreensão desse conceito passa pela exploração de problemas em que as relações não sejam proporcionais. Cita a necessidade de que o aluno analise a natureza da interdependência de duas grandezas em situações-problema em que elas sejam diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais (função afim ou quadrática). Ressalta que essas situações são oportunas para que se expresse a variação por meio de uma sentença algébrica, representando-a no plano cartesiano. Não há nenhuma menção ao fato da proporcionalidade ser um obstáculo epistemológico relativo ao conceito de função, fato discutido por Sierpinska (1992, p.43).

Esse documento apresenta uma rede de conexões para a variação de grandezas e medidas (PCN, 1998, p.140), a partir de razão e proporção. Notamos que, de grandezas diretamente proporcionais, não há uma conexão para função linear, o que pode dificultar o estabelecimento de função linear como modelo da proporcionalidade. Também não encontramos uma rede para o conceito de função, apesar da importância dada a esse conceito.

Em síntese, as sugestões encontradas nos PCN de Matemática sobre variáveis e função são muito mais abrangentes do que aquelas encontradas na *Proposta Curricular,* mas seria necessário um material de apoio, a fim de suprir as lacunas encontradas.

Sugerimos apresentar redes para função, para mostrar as interconexões e as intraconexões; utilizar das diversidades regionais para a apresentação de exemplos com tarefas e técnicas, além de um discurso tecnológico; mostrar com maior clareza a importância desse conceito para a formação do Homem; esclarecer onde e como estão sendo utilizados os avanços da Educação Matemática sobre esse tema; discutir as concepções que foram emergindo ao longo da história. Em síntese, há a necessidade de uma ação efetiva, a fim de nortear o professor.

2.3.3. Escolha dos livros

Para a escolha dos livros didáticos, julgamos necessário observar os seguintes critérios: 1) O livro pertence (ou não) a uma coleção aprovada pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) (2005), cujos critérios eliminatórios são: correção dos conceitos e informações básicas, correção e adequação metodológica e contribuição para a construção da cidadania. 2) O livro foi manipulado (ou não) pelos professores durante a construção da seqüência didática para o ensino e aprendizagem de funções em uma classe de oitava série, pois a utilização de determinados livros por um grupo de professores é um indicativo indireto das concepções que fundamentam suas práticas para o ensino e aprendizagem de um conteúdo matemático. 3) O livro pertence (ou não) à coleção recebida pela escola pública pertencente à Rede Estadual de Ensino onde ocorreu o experimento. Sabemos que a seleção e a organização de uma lista hierárquica de coleções de livros de Matemática é um trabalho coletivo dos professores de uma escola pública. A coleção enviada pelo governo à instituição deve ser distribuída aos alunos e utilizada, no mínimo, por três anos, mesmo que ela não seja do agrado de todos os docentes de Matemática. Alguns professores, contrariados, tomam a iniciativa de utilizar outros livros de apoio, mas não podem obrigar os alunos a comprar outro material. 4) O livro é utilizado (ou não) pelo professor ao ministrar as suas aulas.

A partir dessas considerações, selecionamos o livro de oitava série de cinco coleções: Coleção A - aprovada pelo PNLD (2005), adotada oficialmente na escola pública, não manipulada pelos professores durante a construção da seqüência de ensino; Coleção B - aprovada pelo PNLD (2005) e utilizada pelos professores durante a construção da seqüência de ensino; Coleção C - aprovada pelo PNLD (2005), não utilizada pelos professores durante a construção da seqüência de ensino. Coleção D - aprovada pelo PNLD (2005) e utilizada pelos professores durante a construção da seqüência de ensino; Coleção E – utilizada pelos professores que atuam nas classes de Educação de Jovens e Adultos. Essa última coleção não passa pelo crivo do PNLD (2005), pois foi elaborada pelo CENPEC[10] e cedida pela Secretaria da Educação do Estado do Paraná à Secretaria da Educação do Estado de São Paulo para impressão e distribuição. Tem o objetivo de subsidiar os professores que atuam em classes heterogêneas, formadas por alunos multirrepetentes. Segundo seus idealizadores, o material rompe com a lógica da seriação, apresentando os conteúdos básicos das disciplinas. Essa coleção não foi utilizada pelos professores na elaboração da seqüência de ensino.

2.3.4. Critérios para análise dos capítulos sobre função

A *Teoria Antropológica do Didático* fornece recursos para que se possa analisar um livro didático. Por essa razão, nós nos baseamos na noção de organização matemática para analisar, nos livros didáticos de oitava série, os

[10] CENPEC-Centro de Estudos em Educação, Cultura e Ação Comunitária, sediado na cidade de São Paulo, tem como missão desenvolver ações que contribuam para a melhoria da qualidade da educação pública, subsidiando a implementação de políticas e privilegiando o aprimoramento dos agentes educacionais.

capítulos referentes ao tema *função*. Além disso, tomamos como referência as propostas de Chevallard (1999) para avaliar tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Dessa forma, na avaliação do tipo de tarefa, pretendemos verificar se ela está bem identificada, se sua razão de ser está explicitada, se ela é adequada para alunos da série a que se destina; se o conjunto de tarefas fornece uma visão das situações matemáticas mais utilizadas. Na avaliação da técnica, se ela é disponibilizada nos livros e, em caso afirmativo, se de maneira completa, ou seja, passo a passo, ou somente esboçada; na avaliação do bloco tecnologia / teoria, se está disponível pelo menos no manual do professor e, em caso afirmativo, como são dadas as justificativas tecnológicas.

Um outro assunto que discutiremos é a completude das organizações matemáticas em torno do conceito de função ou, ao contrário, a rigidez em torno de um tipo de tarefa. Bosch *et al.* (2004) propõem as seguintes condições para que uma organização matemática local seja relativamente completa: integração dos tipos de tarefas; diferentes técnicas, ou variações de uma mesma técnica para realizar alguns tipos de tarefas; independência dos ostensivos que integram as técnicas; existência de tarefas e de técnicas “inversas” como, por exemplo, para a tarefa direta: representar graficamente uma função a partir de sua expressão algébrica, a tarefa “inversa” é achar a expressão algébrica a partir do gráfico; um discurso tecnológico para a interpretação do funcionamento das técnicas e de seu resultado; existência de tarefas abertas - questões abertas, isto é, tipos de tarefas para uma situação onde os dados e as incógnitas não estão totalmente pré-fixados.

Segundo esses autores, os aspectos de rigidez das organizações matemáticas pontuais são: dependência da nomenclatura associada a uma técnica; a dissociação entre aplicar uma técnica e interpretar o resultado, devido à escassa incidência do bloco tecnológico / teórico; a ausência de duas técnicas para realizar uma mesma tarefa; de técnicas para realizar uma tarefa inversa; de situações abertas.

Ao longo da análise dos livros, incluímos a verificação do quanto eles seguem (ou não) as sugestões contidas nos PCNs de Matemática (1998) ou na *Proposta Curricular do Estado de São Paulo* (1997). No final, incluímos considerações sobre a rigidez (ou não) das organizações matemáticas pontuais apresentadas no material examinado.

A seguir, apresentamos os critérios de análise e suas justificativas.

Critério 1. Conceituar função em termos conjuntistas.

O movimento renovador da Matemática Moderna teve considerável importância no Brasil nas décadas de 60 / 70 do século passado. Os livros didáticos, a partir dos anos 60, refletem a preocupação com os conjuntos e o cuidado em ressaltar a estrutura matemática. Como salienta D' Ambrósio (2003, p. 54), essa inovação radical sofreu as conseqüências do exagero, da precipitação e da improvisação e a Matemática Moderna não produziu os resultados pretendidos.

Introduzir função a partir de relações entre dois conjuntos mostra o desconhecimento de diversas pesquisas em Educação Matemática. Segundo Kieran *et al.* (1996, p. 258), muitos livros refletem os avanços estruturais dos últimos 150 anos ao introduzir função e variáveis e isso tem sido lamentado por muitos educadores matemáticos. Os autores citam pesquisas que mostram as resistências dos estudantes a uma abordagem estrutural; eles formam concepções mais operacionais, que envolvem olhar uma função como um processo para calcular um valor a partir de outro. No Brasil, Schwarz (1995) mostra um resultado análogo.

Também preocupada com a maneira de introduzir o conceito de função, Sfard (1992, p.69) formula dois princípios didáticos: novos conceitos não devem ser introduzidos de maneira estrutural e uma concepção estrutural não deve ser utilizada, enquanto o aluno puder trabalhar sem ela. Também nos PCNs de Matemática (1998, p.116) encontramos recomendações para que não se introduza o conceito de função de maneira excessivamente formal no ensino básico.

<u>Tarefas encontradas</u>: representar a relação, utilizando o diagrama de flechas; determinar a lei a partir do diagrama de flechas; assinalar os diagramas que representam função; verificar se as relações dadas são funções; determinar o domínio da função; determinar conjunto imagem da função; determinar a imagem de um número, conhecendo-se a lei; justificar por que o gráfico representa (ou não) uma função.

Critério 2. Conceituar função como relação entre duas grandezas

Conceituar função como uma relação de dependência entre duas grandezas é uma recomendação encontrada nos PCNs de Matemática e na *Proposta Curricular* *de Matemática* para o Estado de São Paulo. Também significa um retorno às concepções existentes no século XVII. Como vimos no panorama histórico desenvolvido no capítulo 1, devemos a Descartes a idéia de que uma equação em x e y é um meio para introduzir uma dependência entre quantidades variáveis de maneira a permitir o cálculo dos valores de uma delas em correspondência aos valores dados pela outra.

Sierpinska (1992, p.31) afirma que a primeira condição para entender função é conscientizar-se de um mundo em permanente mutação. Esse conceito provém dos esforços em identificar as mudanças observadas como um problema prático a ser resolvido e identificar as regularidades das relações estabelecidas para poder trabalhar com elas.

<u>Tarefas encontradas</u>: completar tabela; escrever a lei de formação a partir de um texto; descobrir a fórmula a partir de uma tabela; descobrir a regularidade a partir dos dados da tabela; identificar qual grandeza foi calculada em função de outra; verificar se y aumenta quando x aumenta; construir um gráfico a partir da lei; representar a curva; verificar se é possível ligar os pontos de um gráfico por uma linha cheia; elaborar uma situação-problema que possa ser representada por uma determinada função; fazer estimativas a partir do gráfico; explicar variação a partir do gráfico, determinar valor máximo a partir do gráfico; determinar valor mínimo a partir do gráfico.

Critério 3. Identificar variável dependente e variável independente

Há livros que não identificam as variáveis, apesar de exibirem exemplos e exercícios sobre relações entre grandezas. Discorrendo sobre o assunto, Sierpinska (1992, p.38) afirma que os papéis das variáveis independente e dependente não são simétricos na definição de função. Para a autora, foi necessário um longo período da história para que os matemáticos percebessem que era importante distinguir as variáveis e que isto é compreensível, pois a noção de função nasceu no contexto da geometria analítica onde eram consideradas relações entre diferentes segmentos (diâmetros, eixos), e a ordem das variáveis não importava.

Diante dessas considerações, acreditamos que a discriminação das variáveis é importante, uma vez que, muitas vezes, o livro didático é a única fonte de referência e estudo para o professor. Além disso, é preciso nomear um objeto, para que se possa fazer uma evocação mínima.

A não identificação das variáveis pode levar o aluno a uma atitude mecânica no momento de construir um gráfico e ficar restrito à técnica “x na horizontal, y na vertical”, pois os livros apresentam essa disposição. Se houver uma mudança de letras, o aluno poderá não saber o que fazer, pois ele está atrelado aos grafemas e não às variáveis em si.

A nosso ver, a dependência em relação às letras e mera aplicação uma técnica para construir um gráfico, sem interpretação dos resultados, devido à escassa incidência do bloco tecnológico / teórico, indicativos de uma rigidez da organização em torno do tipo de tarefa: conceituar função como interdependência de grandezas. Estamos utilizando a nomenclatura proposta por Bosch *et al*. (2004) para analisar a (in)completude das organizações matemáticas.

Critério 4. Conceituar função como máquina.

É olhar para o processo algorítmico de entrada e saída de variáveis. Segundo Kieran e*t al*. (1996, p.259), um estudante, ao procurar uma relação funcional na forma de um algoritmo, tentará alguns números para dar sentido ao problema e depois, quando tiver conseguido captar a maneira de calcular os valores, ele poderá passar dos cálculos numéricos para uma formulação geral. Dessa maneira, terá feito uma generalização de seu trabalho local para um algoritmo global. Nesse sentido, segundo os autores, uma abordagem funcional se intercepta com uma abordagem por meio da generalização.

Olhar função como máquina tem suas raízes em Leibniz, que utilizava a palavra *função* no sentido corrente de função de uma máquina, como se observa nas considerações feitas por Mahnke, já citadas neste trabalho (MAHNKE, 1925 *apud* YOUSCHKEVITCH 1981, p.30).

<u>Tarefas encontradas</u>: completar a tabela a partir das operações que a máquina faz; determinar a lei da função a partir das operações que a máquina executa; indicar a variável dependente; construir um gráfico a partir do que a máquina faz; desenhar a máquina que representa a situação a partir da lei; desenhar a máquina que representa a situação a partir do gráfico; verificar se o número de saída varia de forma diretamente proporcional ao número de entrada; encontrar o número de

entrada, dado o número de saída; verificar se, para cada número de entrada, corresponde um único número de saída; verificar se o número de saída corresponde a um único número de entrada.

Critério 5. Conceituar função como padrão de regularidade de seqüências numéricas ou geométricas

Procurar fórmulas para padrões geométricos é um processo de generalização que, segundo Mason (1996, p.75), deve levar em conta: a visualização; a manipulação da figura para facilitar a construção da fórmula; a formulação de uma regra recursiva que mostre como construir o termo seguinte a partir do termo anterior; a descoberta de um padrão que leve diretamente à fórmula. Os PCNs de Matemática (1998, p. 117) propõem a apresentação de situações em que os alunos possam investigar padrões geométricos ou numéricos.

Tarefas encontradas: observar a seqüência; continuar a seqüência; determinar a expressão que fornece o número de quadrados (ou triângulos) em função do número de palitos; encontrar a fórmula que dá a quantidade de bolinhas de cada figura a partir dos quatro primeiros termos da seqüência.

Critério 6. Apresentar a organização praxeológica em torno da função linear definida por $y = kx$, modelo matemático da proporcionalidade direta.

Essa organização é regional, porque a *teoria das proporções* é o suporte teórico. Se partirmos de uma organização praxeológica pontual em torno da resolução de um determinado tipo de problema sobre proporcionalidade, temos uma organização local em torno da resolução de diferentes tipos de problemas de proporcionalidade (isto é, o tema proporcionalidade) e de uma organização regional em torno da noção de função.

Dessa maneira, o caminho da proporção para a função linear não só acrescentaria novos conhecimentos, mas também reforçaria, dentre outros, esses dois conceitos: razão e proporção e ampliaria aquilo que encontramos nos documentos oficiais citados na seção § 2.3.2.

Comin (2000, parte 2, p.134) esclarece que existem diversos níveis de dificuldades para chegar à função linear, que resultam da utilização da álgebra para traduzir uma relação de proporcionalidade entre grandezas físicas, passando do concreto ao abstrato. Para ligar os dois conceitos, é necessário compreender que x e y designam duas grandezas distintas, mas também conhecer a correspondência dos diferentes valores (sem unidades) que elas podem assumir.

Ávila, em seu artigo sobre razões, proporções e regra de três, de 1986, considera mais apropriado falar de variáveis proporcionais, ao invés de grandezas proporcionais e estabelece a seguinte definição para grandezas ou variáveis diretamente proporcionais:

> Diz-se que duas variáveis (ou grandezas) x e y são proporcionais – mais especificamente, diretamente proporcionais - se estiverem assim relacionadas: $y = kx$, onde k é uma constante positiva, chamada de constante de proporcionalidade. (ÁVILA ,1986, p.3).

O discurso tecnológico que relaciona proporcionalidade direta e função linear pode ser encontrado no livro didático para o ensino médio editado pela Sociedade Brasileira de Matemática.

Lima *et al.* (2001) traduzem a noção de proporcionalidade entre grandezas, da fala coloquial para uma descrição em termos funcionais, da seguinte maneira: "Uma proporcionalidade é uma função $f : R \to R$, tal que, para quaisquer números reais c, x, tem-se $f(cx) = c.f(x)$ (proporcionalidade direta) [...]." (LIMA *et al.*, 2001, p.93). Em seguida, de maneira detalhada, os autores fazem a passagem da expressão geral de proporcionalidade direta descrita acima para a fórmula geral de função linear $f(x) = ax$ da seguinte maneira: "[...] se $f(cx) = c.f(x)$ para todo c e para todo x; então, escrevendo $a = f(1)$, tem-se $f(c) = f(c.1) = c.f(1) = ca$, ou seja, $f(c) = ac$ para todo $c \in R$. Numa notação mais adequada, temos $f(x) = ax$ para todo $x \in R$; logo f é uma função linear." *(id,ibid*, p.93)

Os autores propõem que, nesse contexto, o número a, em $f(x) = ax$, seja chamado de constante de proporcionalidade.

Devido à sua extensão, a organização praxeológica ativada na construção do gráfico de uma função linear se encontra no APÊNDICE A.

<u>Tarefas encontradas</u>: construir uma tabela para a situação; construir um gráfico; escrever a fórmula; determinar a taxa de variação a partir do gráfico; verificar se a proporcionalidade é direta ou não; explicar por que y é diretamente proporcional

a x na fórmula $y = kx$; verificar se duas grandezas são diretamente proporcionais a partir do gráfico; indicar qual função tem a característica de função linear.

Critério 7. Apresentar a organização matemática em torno do modelo matemático da proporcionalidade inversa ($y = \frac{k}{x}$ ou $yx = k$).

Essa organização é regional, porque seu suporte teórico é a *teoria das proporções*. A proporcionalidade inversa também apresenta conexões com diversos conceitos em outras áreas do conhecimento e seu ensino é recomendado nos dois documentos consultados.

Buscamos em Ávila, no seu artigo de 1986, a definição para grandezas ou variáveis inversamente proporcionais: "Diz-se que duas variáveis (ou grandezas) x e y são inversamente proporcionais se estiverem assim relacionadas: $y = \frac{k}{x}$ ou $yx = k$, onde k é uma constante positiva, chamada de constante de proporcionalidade." (ÁVILA, 1986, p.3).

A definição da proporcionalidade inversa entre grandezas em termos funcionais pode ser encontrada no livro didático para o ensino médio editado pela Sociedade Brasileira de Matemática: "Uma proporcionalidade é uma função $f : R \to R$, tal que, para quaisquer números reais c, x, [...] ou $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$, se $c \neq 0$ (proporcionalidade inversa)." (LIMA *et al.*, 2001, p.93)

Os autores partem de um texto sobre duas grandezas interdependentes: se uma delas é multiplicada por um número (que não pode ser zero), a outra é dividida por esse número e chegam à expressão geral de proporcionalidade inversa: $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$, com $c \neq 0$; e daqui para a fórmula geral de função $f(x) = \frac{a}{x}$.

A demonstração da segunda passagem: "Se $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$ para todo c e para todo x real, então escrevendo $a = f(1)$, tem-se: $f(c) = f(c.1) = \frac{f(1)}{c} = \frac{a}{c}$ para todo $c \in R$. Numa notação mais adequada, temos $f(x) = \frac{a}{x}$ para todo $x \in R$." (LIMA *et al.*, 2001, p.93).

<u>Tarefas encontradas</u>: fazer uma tabela com os valores para as grandezas; escrever o produto dos valores correspondentes das duas variáveis; escrever uma das variáveis em função da outra; construir o gráfico; caracterizar a proporcionalidade; explicar por que y é inversamente a x na fórmula $y = \frac{1}{x}$; verificar se duas grandezas são inversamente proporcionais a partir do gráfico.

Critério 8. Apresentar organização matemática em torno do objeto função polinomial do 1º grau. Essa organização está ligada à concepção de função como expressão analítica.

<u>Tarefas encontradas:</u> identificar funções polinomiais do 1º grau; construir, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos de duas funções polinomiais do 1º grau; determinar o valor de x, dada a sua imagem; determinar o zero da função polinomial do 1º grau algebricamente; determinar o zero da função polinomial do 1º grau graficamente; determinar as coordenadas do ponto de encontro das retas que representam os gráficos das funções; verificar se as retas são concorrentes ou paralelas; reconhecer graficamente função polinomial do 1º grau crescente; identificar algebricamente função polinomial do 1º grau crescente; reconhecer graficamente função polinomial do 1º grau decrescente; identificar algebricamente função polinomial do 1º grau decrescente; resolver inequação do 1º grau algebricamente; determinar o intervalo onde a função é positiva; determinar o intervalo onde a função é negativa.

Critério 9. Apresentar organização matemática em torno do objeto função polinomial do 2º grau. Essa organização está ligada à concepção de função como expressão analítica.

<u>Tarefas encontradas:</u> identificar função polinomial do 2º grau; determinar algebricamente as coordenadas do vértice da parábola; organizar uma tabela conveniente, centralizada na abscissa do vértice; construir o gráfico de uma função polinomial do 2º grau; desenhar o eixo de simetria; determinar coordenadas de pontos simétricos da parábola; relacionar concavidade com o sinal do coeficiente de x^2; determinar algebricamente os zeros da função; determinar graficamente os zeros da função; determinar o sinal do discriminante; determinar as coordenadas do ponto de máximo (ou de mínimo); resolver uma inequação do 2º grau graficamente.

Critério 10. Manipular materiais concretos.

Neste trabalho, consideramos materiais concretos os objetos de uso comum como, por exemplo, palitinhos, canudinhos, folhas de papel etc, que podem ser utilizados como recursos didáticos auxiliares da aula de Matemática. Consideramos que, apesar de os livros didáticos apresentarem atividades que envolvem a manipulação de materiais de fácil apelo visual e tátil, ações sobre tais materiais podem não levar o aluno à abstração de um conceito.

Tarefas encontradas: dobrar a folha de papel para obter o número de partes em função do número de dobras; construir seqüências de triângulos com palitos; deslocar e empilhar discos para determinar o número mínimo de deslocamentos.

Critério 11. Apresentar textos científicos ou gráficos extraídos de jornais ou revistas.

A leitura e a interpretação de textos de jornais e revistas é sugerida pelos PCNs de Matemática como um meio para a construção da cidadania.

Critério 12. Apresentar o jogo Batalha Naval.

O jogo denominado Batalha Naval aparece em diversos livros como um meio de introduzir o sistema de coordenadas cartesianas. Entretanto, a nosso ver, esse jogo não contribui para o ensino e aprendizagem de função. Restrito a um sistema de coordenadas, não envolve as noções de dependência, variação ou correspondência.

Os jogos, como recurso didático estão presentes nos PCNs de Matemática (1998, p.46), mas não há nesse documento, uma avaliação crítica de quais jogos seriam interessantes e em que momentos eles poderiam ser utilizados.

Observamos que os autores de livros didáticos se dividem entre aqueles que apresentam esse jogo e aqueles que optam por rever, por exemplo, as coordenadas geográficas (latitude e longitude), a localização de uma casa no tabuleiro de xadrez ou no tabuleiro de damas, a localização de um ponto em uma planta de um bairro de uma cidade fictícia.

Diante da diversidade de aderência aos critérios estabelecidos, apresentamos um quadro que sintetiza essa situação.

2.3.5. Quadro sinótico da aderência aos critérios

O Quadro 2 apresenta uma síntese da avaliação realizada nos capítulos dedicados ao tema *função*, baseada nos critérios estabelecidos e apresentados. Os itens assinalados com um X indicam que o capítulo do livro é aderente ao critério.

Quadro 2 - Síntese dos resultados

Critério	Livro da Coleção				
	A	B	C	D	E
1	X		X		
2	X	X	X	X	
3		X			
4		X			
5		X		X	
6		X		X	
7		X		X	
8	X	X	X	X	
9	X	X	X	X	
10	X	X		X	
11		X		X	
12	X			X	

2.3.6. Análise dos livros

Iniciamos com a constatação de que a última coluna do Quadro 2 não está preenchida, pois os autores da Coleção E (2002) afirmam que se deve introduzir *função* de maneira informal e dedicam três páginas ao assunto. Essa coleção não é um projeto completo; é apenas um esboço, uma vez que traz recomendações para que o professor o complete, utilizando qualquer outro material didático. Ela tem sido distribuída, pelo poder público, aos professores que têm sob sua responsabilidade as classes de alunos repetentes, as chamadas classes de Correção de Fluxo, da Rede Estadual de Ensino do Estado de São Paulo.

A primeira atividade relativa ao assunto, constante na Coleção E (2002, v.2, p.43), sob o título Tiras de expressão, parte de uma brincadeira, com apelo à oralidade do aluno e ao trabalho em duplas. No texto, o professor entrega secretamente a um dos alunos da dupla uma tira de papel, contendo uma das dez frases: indique o dobro do número; indique o sucessor do número; indique o quadrado do número menos um; indique o triplo do número mais um; indique o número mais cinco; indique o quadrado do número; indique o dobro do número menos um; indique quatro vezes o número menos um.

O aluno da dupla que ficou sem a tira propõe um número qualquer e o outro executa com esse número a operação indicada, dizendo apenas o resultado obtido. Isso deve ser repetido até que seja descoberta a instrução contida no papel. No passo seguinte, o aluno deve escrever a regra, utilizando símbolos. A seguir, a dupla começa a construir um gráfico, colocando, no eixo das abscissas, o número falado e, no eixo das ordenadas, o resultado. Trocam-se os papéis entre as duplas, até esgotar todas as possibilidades entre os alunos.

A segunda atividade correlata, inserida também na Coleção E (2002, v.2, ficha individual 4), sob o título Descubra a regra, apresenta as tarefas: descubra a regra para chegar ao número respondido, a partir de um determinado número dado; escreva uma frase e uma expressão que representa a regra. Seguem quatro situações; em cada uma, há uma seqüência de cinco números propostos e os correspondentes números respondidos.

Os autores desse material acreditam que a ação de adivinhar números possibilita uma primeira visão da perspectiva da álgebra como o estudo da *relação entre duas grandezas*, mas o material não trabalha com grandezas, não menciona as palavras função e variável. A dependência fica implícita na frase: “Cabe ao professor ampliar a percepção dos alunos, mostrando que a escolha dos números dados vai influenciar nos resultados das operações.” (2002, v.2, p.45).

Por outro lado, pede ao professor que introduza, caso as características da classe permitam, as noções de domínio e imagem que correspondem a números falados e aos respectivos resultados. Podemos nos perguntar qual a necessidade de introduzir essas noções, uma vez que nem a palavra função é mencionada.

A seguir, descrevemos as diferenças (ou similitudes) encontradas nos livros em relação à aderência aos critérios.

Critério1. Conceituar função em termos conjuntistas.

No livro da Coleção C (1998, p.112), sob o título “A função como relação entre dois conjuntos”, parte-se de uma situação de interdependência de duas grandezas para introduzir função como relação entre dois conjuntos, obedecendo a determinadas condições. Uma tabela com valores de medida de lado e respectivo perímetro foi formulada com base em seis desenhos de quadrados com diferentes medidas de lado. A seguir, encontra-se a afirmativa de que a tabela pode ser representada na forma de um diagrama, utilizando dois conjuntos: A, o conjunto formado pela medida dos lados e B, o conjunto formado pelos perímetros. No diagrama, só há números e flechas ligam os elementos dos dois conjuntos, que parecem ter somente seis elementos cada um, pois são utilizados os mesmos números da tabela. Ao lado do diagrama de flechas, há um lembrete: as flechas indicam a relação e duas correspondências para lado e respectivo perímetro, com as unidades de medida (em cm). Aqui se percebe uma tentativa do autor de articular duas concepções, mas não encontramos, no Manual do Professor, uma discussão sobre isso.

Não há informação alguma sobre as limitações da representação por meio de diagramas de flechas para conjuntos infinitos nem sobre a ausência de unidades (cm) nessa representação. Os conceitos de grandeza, variação e dependência encontram-se um segundo plano e prioriza-se a *correspondência*:

> Nessa relação, você pode notar que todos os elementos do conjunto A estão associados a um único valor do conjunto B; cada elemento do conjunto A está associado a um único valor do conjunto B. Nessas condições, dizemos que a relação entre os conjuntos A e B é uma função de A em B. Indicamos $f : A \to B$ (Livro da Coleção C, 1998, p.112)

Em seguida, é apresentada a fórmula matemática ou lei de formação da função $y = 4x$. Em resumo, em uma única página, encontramos, nesta ordem, os ostensivos: desenhos de quadrados, uma tabela, o diagrama de flechas, textos e por último, a fórmula. Observamos que a notação de função $f : A \to B$ aparece somente em dois exemplos, da seguinte maneira:

$$f : A \to B \qquad\qquad f : A \to B$$
$$y = x^2 \qquad\qquad y = 2x - 1$$

Em primeiro lugar, notamos que a função instrumental do ostensivo f, isto é, sua capacidade de se integrar nas manipulações técnicas, tecnológicas e teóricas não está sendo utilizada. É o caso de utilizar f para calcular o valor da função em cada ponto do domínio. Em segundo lugar, a função semiótica do ostensivo f, isto é, sua capacidade de produzir um sentido, não está sendo empregada. Por exemplo, na expressão algébrica $f(x) = x^2$, é necessário perceber que x é a variável independente e que a cada valor de x se pode calcular o valor de f(x), que depende de x; em suma, é preciso perceber a funcionalidade.

A colocação de y debaixo de A e x debaixo de B pode causar confusão, uma vez que x é elemento do domínio A e y é elemento do contradomínio B. Além disso, o ostensivo f não aparece na definição de função, que é apresentada de maneira destacada: "Sendo A e B dois conjuntos não-vazios, uma relação entre A e B é chamada função quando a cada elemento x do conjunto A está associado um único elemento y do conjunto B." (LIVRO DA COLEÇÃO C, 1998, p.113)

Não é apresentada a necessidade de tarefas envolvendo diagramas de flechas ou o motivo para tal definição de função, uma vez que a noção de função já tinha sido introduzida com o estudo da interdependência de grandezas, na subseção precedente, do referido livro. O discurso para representar uma relação por meio de um diagrama de flechas, a partir de dois conjuntos numéricos A e B, discretos, e de uma lei que expressa uma relação entre A e B, é elaborado por meio de dois exemplos. Não há explicações do porquê de os conjuntos A e B terem tais elementos e não outros, ou do porquê de os conjuntos terem sido determinados arbitrariamente.

Acreditamos que a tarefa de identificar os diagramas que representam função a partir de correspondências arbitrárias não é simples. Em primeiro lugar, não há uma palavra de como surgiram tais correspondências arbitrárias, pois elas não aparecem no estudo das relações entre grandezas. Em segundo lugar, é preciso interpretar o texto da definição formal e, ao mesmo tempo, analisar o diagrama que pode apresentar uma diversidade de situações: todos os elementos de A estão ligados a algum elemento de B; há elemento de A que não está ligado a algum elemento de B; todo elemento de A está ligado a apenas um elemento de B e há elemento de A que está ligado a mais de um elemento de B.

As correspondências arbitrárias bem como os diagramas desaparecem. Retorna o conceito de variável; nesse momento, os autores enfatizam que se deve prestar atenção aos possíveis valores que as variáveis podem assumir na função. Surgem as definições de *domínio* e de *conjunto imagem*:

> O conjunto de valores que a variável x pode assumir chama-se domínio da função. Vamos indicá-lo por D. O valor da variável y corresponde a um determinado valor de x chamado imagem do

> número x pela função. O conjunto formado por todos os valores de y é chamado conjunto imagem da função. Vamos indicá-lo por Im. (LIVRO DA COLEÇÃO C, 1998, p.115)

Dentre as fórmulas apresentadas, algumas provêm de situações da geometria, tais como: $y = 3x$ (y indica a variável: perímetro de triângulo eqüilátero de lado de medida x), $y = x^2$ (y indica a variável: área de um quadrado de lado de medida x), ou da cinemática como a fórmula $y = 51x + 17$, em que y indica quilômetros rodados e x indica o tempo (em horas). Nesta última situação, não há indicação do significado dos números 51 (velocidade) e 17 (espaço inicial). Apesar de um discurso sobre variáveis, nos exercícios apresentados ao aluno, percebe-se o predomínio da correspondência em detrimento da variação.

Não há um só gráfico de função em toda a subseção do livro da Coleção C (1998) intitulada: A função como relação entre dois conjuntos, bem como na seguinte, denominada: Domínio e Imagem de uma função.

O livro da coleção A, de 1999, inicia o capítulo com a representação gráfica da relação entre dois conjuntos. Nesse livro, apesar da existência de informações sobre o estabelecimento de relações entre algumas ocorrências e de exemplos, como o fazer corresponder preço de uma corrida de táxi com a distância percorrida, não há uma ligação desse texto com a tarefa que segue: “Dados os conjuntos A e B e a lei de formação que descreve como um elemento x de A se relaciona com um elemento y de B, represente a relação, usando o diagrama de flechas” (LIVRO DA COLEÇÃO A, 1999, p.88). Além disso, não é explicitada uma técnica para a realização dessa tarefa.

Mais adiante, os autores apresentam, a definição de *função*, de *domínio*, de *contradomínio* e de *conjunto imagem*, nos seguintes termos:

> Assim, dada uma relação de A em B, conjuntos não-vazios, diz-se que essa relação é uma função de A em B se, e somente se, cada elemento de A estiver associado a um único elemento de B [...] A função é uma relação especial e nela os conjuntos A e B recebem nomes especiais. O conjunto A recebe o nome de domínio da função e o conjunto B recebe o nome de contradomínio da função. O conjunto dos elementos de B que estão associados com elementos recebe o nome de conjunto imagem. (LIVRO DA COLEÇÃO A, 1999, p.89)

Encontramos nesse livro a tarefa de identificar os diagramas que representam função a partir de correspondências arbitrárias (de A em B), onde o conjunto A é constituído de elementos genéricos identificados por x_1, x_2, x_3, x_4 e o conjunto B é constituído de elementos genéricos identificados por y_1, y_2, y_3, y_4. Acreditamos que essa tarefa não é adequada para alunos de oitava série, por causa dessa precoce generalização, além de ser isolada das demais, sem uma explicação sobre índices. Dessa forma, temos a impressão de que os autores desse livro não conhecem, ao menos, as recomendações encontradas nos PCNs (1998), de que não se deve apresentar função dessa maneira abstrata nesse nível de ensino.

Outra tarefa encontrada nesse livro pede que o aluno determine a lei de formação das funções, representadas cada uma delas por um diagrama de flechas, envolvendo conjuntos finitos A e B. Sem a apresentação de uma técnica, podemos nos perguntar como um aluno de oitava série pode concluir que $y = 3x - 8$ a partir do diagrama de flechas que associa os números: -1 com -11, 4 com 4, -2 com -14, 0 com -8 e 1 com -5.

Um outro ponto que observamos é que esse livro padroniza as letras A e B para conjuntos e as letras x e y para variáveis e isso é um indicativo da rigidez da organização matemática, seguindo a nomenclatura proposta por Bosch *et al.* (2004).

O livro da Coleção B (2002), apesar de não apresentar formalmente o conceito de *função* em termos conjuntistas, inclui a tarefa de identificar um gráfico como sendo (ou não) um gráfico de função. Há explicações sobre a técnica e a sua justificativa:

> Já sabemos que, para existir uma função, é necessário que para qualquer x de um conjunto e valores corresponde um único y, de outro conjunto de valores. Geometricamente, se esses dois conjuntos de valores são números reais, significa que qualquer reta perpendicular ao eixo x que intersecta o gráfico deve fazê-lo em um único ponto. Assim, se a reta intersectar o gráfico em mais de um ponto, esse gráfico não é gráfico de uma função. (COLEÇÃO B, 2002, p.164).

Para o esclarecimento da primeira sentença, observamos, antes do texto, a existência de uma tarefa que pede para dizer se a cada x corresponde um único y, a partir de uma expressão algébrica.

Um dos gráficos que devem ser analisados é uma cônica: parábola de equação $y^2 = 2px + c$. Diante da mesma tarefa e do gráfico de uma cônica (parábola), Schwarz (1995, p.116) mostra que somente 50% dos alunos de uma terceira série do segundo grau de uma escola estadual localizada na cidade de São Paulo conseguiram responder corretamente que o referido gráfico não representava uma função. Isso nos leva a considerar que essa tarefa é difícil para estudantes de oitava série.

Critério 2. Conceituar função como relação entre grandezas.

Nos livros das coleções A (1999), B (2002), C (1998) e D (1997), as situações para o estudo da interdependência de grandezas provém da geometria, da cinemática e do cotidiano.

O livro da Coleção A, de 1999, não apresenta uma justificativa para os exercícios envolvendo grandezas, depois de apresentar função como correspondência entre dois conjuntos. Nesse livro, há o predomínio de tarefas que pedem a fórmula ou construção de uma tabela a partir do enunciado. Encontramos a instrução de determinar o domínio e conjunto imagem a partir de um enunciado. Por outro lado, não há sugestões para a construção de uma tabela, nem de como obter a fórmula a partir do enunciado; não há igualmente explicações para a necessidade de determinar o domínio e imagem a partir de um enunciado.

A palavra variação aparece somente uma vez, o que revela a concepção predominantemente estática sobre função apresentada pelos autores do livro. Além disso, não há uma situação em que se exiba um gráfico mostrando a relação entre grandezas nem explicações técnicas de como construir um gráfico.

Diferentemente dessa obra, nos livros das outras coleções, encontramos esclarecimentos e exemplos sobre duas grandezas que variam, uma dependendo da outra, logo no início do capítulo sobre funções.

O livro da Coleção C (1998), inicia o capítulo trabalhando com duas concepções simultaneamente: relação entre grandezas e correspondência, com o objetivo de introduzir função como relação entre dois conjuntos.

Apresenta o seguinte enunciado de uma situação-problema:

> Márcia ligou seu computador à rede internacional de computadores Internet. Para fazer uso dessa rede, ela paga uma mensalidade fixa de R$ 30,00 mais 15 centavos de real a cada minuto de uso. O valor a ser pago por Márcia ao final do mês depende, então, do tempo que ela gasta acessando a Internet. (LIVRO DA COLEÇÃO C, 1998, p.108).

A partir desse enunciado, o livro oferece uma técnica para obter uma fórmula a partir de uma tabela. Pede para o aluno observar a tabela, já preenchida, que relaciona o valor a ser pago (em R$) com o tempo de acesso à rede. O tempo é dado em minutos e o correspondente valor a ser pago é calculado, com a exibição de todas as operações envolvidas. Na última linha dessa tabela, aparece a letra t, para tempo, e a correspondente expressão: $30{,}00 + 0{,}15 \times t$, para o valor a ser pago. A seguir, apresenta a fórmula $V = 30 + 0{,}15t$, sendo V o valor a ser pago. Destacam-se os seguintes dados: "Nessa fórmula t é uma grandeza variável, V é uma grandeza variável, a variável V depende da variável t e que a variável V é dada em função da variável t." (Livro da Coleção C, 1998, p. 109). Dessa maneira, há um discurso tecnológico embutido na técnica. Por outro lado, não são utilizados gráficos nas poucas situações envolvendo interdependência de grandezas.

O estudo da interdependência de grandezas é mais enfatizado nos livros das Coleções B (2002) e D (1997), que trazem as palavras: *aumento*, *diminuição*, *variação*, *como varia*.

O livro da Coleção D (1997) apresenta relações entre grandezas que não são triviais para o aluno, como o tempo da órbita de um satélite (em horas) em função da distância média do satélite ao chão (em Km). Uma outra situação envolve movimento e o teorema de Pitágoras. Ao lado do desenho de um macaco de automóvel, como se pode ver na Figura 5, segue o texto: "Neste macaco de automóveis, a altura y é função da distância x. Virando a manivela num sentido ou noutro, fazemos x aumentar ou diminuir. a) Se x aumenta, y aumenta ou diminui? b) Deduza a fórmula de y em função de x." (LIVRO DA COLEÇÃO D, 1997, p.224)

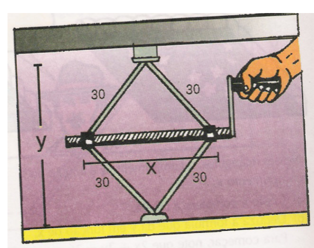


Figura 5 - Macaco de automóveis

Fonte: Livro Coleção D, 1997, p.224

O autor sugere que o aluno pense no teorema de Pitágoras e apresenta um esquema do macaco de automóvel, representando as duas diagonais do losango.

No livro da Coleção B (2002), encontramos uma atividade que propõe uma análise de duas situações mas não há indicações de como obter o resultado desejado. Sob o título tomando decisões, segue o enunciado:

> Leonor vai escolher um plano de saúde entre duas opções: A e B. O plano A cobra R$ 100,00 de inscrição e R$ 50,00 por consulta em certo período. O plano B cobra R$ 180,00 de inscrição e R$ 40,00 por consulta em certo período. O gasto total de cada plano é dado em função do número x de consultas. (LIVRO DA COLEÇÃO B, 2002, p.166)

Seguem as tarefas: ”a) Escreva a fórmula da função correspondente a cada plano. b) Determine em que condições o plano A é mais econômico; o plano B é mais econômico; os dois planos são equivalentes” (LIVRO DA COLEÇÃO B, 2002, p.166).

Podemos utilizar diversas técnicas para determinar o plano mais econômico: construção de duas tabelas e comparação de dados numéricos; construção e análise dos gráficos das duas funções, utilizando um mesmo sistema de eixos; resolução de equação e de inequações. A escolha da(s) técnica(s) mais adequada(s) para uma determinada classe e do(s) respectivo(s) discurso(s) tecnológico(s) fica a cargo do professor, que não encontra subsídios no Manual Pedagógico.

Sobre a adequação dessa tarefa para alunos de oitava série, lembramos as considerações feitas por Sierpinska (1992, p.36), que expõe as dificuldades que os alunos de dezesseis anos enfrentam para interpretar, em termos funcionais, uma situação como a descrita acima - a determinação das condições para fazer uma escolha mais adequada. Acreditamos que alunos de oitava série podem resolver essa questão problemática, contanto que lhes sejam dadas as condições necessárias.

No quesito interdependência e variação de grandezas, consideramos que o livro da Coleção B (2002) é aquele que mais fornece tarefas pertinentes às necessidades dos alunos, explorando variadas situações; segue o livro da Coleção D (1997). Dessa forma, essas duas obras são as mais aderentes aos PCNs de Matemática (1998) e à *Proposta Curricular do Estado de São Paulo* (1997) sobre o ensino e aprendizagem de grandezas que se relacionam.

Critério 3. Identificar variável dependente e variável independente.

Os livros das Coleções A (1999), C (1998), D (1997) e E (2002) não nomeiam as variáveis dependentes e independentes. Assim, cabe ao professor apresentar as explicações necessárias para a construção de gráficos, de tabelas e para a confecção de fórmulas.

No livro da Coleção C, há um texto que indica qual é a variável dependente: "Os valores que y irá assumir dependem dos valores assumidos por x. Para cada valor de x teremos um valor correspondente de y." (LIVRO DA COLEÇÃO C, 1998, p.115).

Critério 4. Conceituar função como máquina.

Dentre os livros consultados, esse tipo de tarefa foi encontrado somente no livro da Coleção B (2002), onde está bem identificado, incluindo desenhos de máquinas, todas coloridas, com indicações de entrada e saída dos números, como a que se observa na Figura 6. Além disso, esse tipo de tarefa é adequado para alunos de oitava série; no livro do professor, é apresentada a razão da escolha da proposta, afirmando-se que ver função como máquina é uma estratégia, pois dá uma visão dinâmica de função.

Figura 6 – Máquina de entrada e saída

Fonte: Livro da Coleção B, 2002, p.158

Os exercícios apresentados exploram os diversos ostensivos e pedem as mudanças de registro: de expressão verbal para tabela; de expressão verbal para fórmula algébrica; de fórmula algébrica para expressão verbal; de tabela para gráfico; do gráfico para pares ordenados e do gráfico para fórmula algébrica.

Apesar de ser pedida a identificação das variáveis dependente e independente, não há explicação de como construir o gráfico, utilizando essas informações, nem sobre alinhamento de pontos nas situações envolvendo expressões do tipo $y = ax + b$. O fato de que o gráfico de uma função afim é uma reta será enunciado mais adiante, no mesmo capítulo.

Trabalhar função como máquina se sobrepõe à apresentação “intuitiva” de função como correspondência, tendo em vista que algumas das tarefas apresentadas utilizam a palavra *correspondência*. O capítulo sobre funções se inicia com a explicação de que o conceito de função está presente em situações em que são relacionadas duas grandezas, mas as máquinas apresentadas não estão trabalhando com grandezas. Assim, parece que o autor não se dá conta das diversas concepções de função que ele apresenta em um mesmo capítulo. Perde-se uma oportunidade para trabalhar com máquinas “virtuais”, ou seja, conceber função como algo que faz, independentemente das máquinas físicas desenhadas.

A apresentação de função como máquina vai além das sugestões encontradas nos PCNs (1998) e na *Proposta Curricular de Matemática* para o Estado de São Paulo (1997), pois esses documentos não incluem a concepção de função como máquina em suas sugestões.

Critério 5. Conceituar função como padrão de regularidade de seqüências numéricas e geométricas.

Esse tipo de tarefa aparece nos livros das Coleções B (2002) e D (1997) e está bem identificado, incluindo desenhos de frisas de palitinhos ou configurações com seqüências de bolinhas. O primeiro livro apresenta inclusive um subtítulo: Palitos, regularidades e funções, ou seja, apresenta a razão de ser desse tipo de tarefa. A configuração de palitinhos é mostrada na Figura 7.

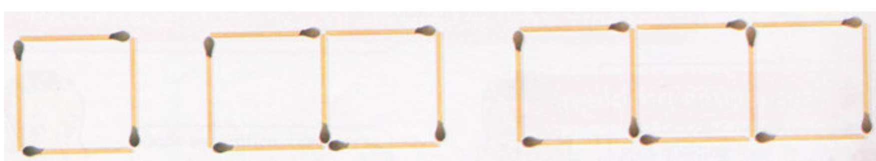


Figura 7 - Frisa de palitos

Fonte: Livro da Coleção B, 2002, p.166

Pede-se a tarefa: determinar a expressão que indica o número P de palitos em função do número n de quadrados. A ausência de um discurso técnico / tecnológico no livro do professor mostra que não há uma preocupação com as diferentes visualizações possíveis para essa frisa de palitinhos e as correspondentes generalizações e fórmulas que podem ser produzidas.

Critério 6. Apresentar a organização matemática em torno da função linear definida por $y = kx$.

Um trabalho com proporcionalidade aparece em dois livros, porém há uma grande diferença na ênfase dada, por eles, ao assunto. No livro da coleção B, de 2002, há uma subseção inteira apresentando a função linear como modelo matemático da proporcionalidade direta. O autor pressupõe que o aluno tenha estudado pelo livro de sexta série, de sua autoria, onde a organização matemática em torno da proporcionalidade é trabalhada: razão, proporção, grandezas diretamente proporcionais, escalas em mapas, porcentagem, movimento retilíneo uniforme. Assim, na oitava série, após um exemplo, um breve discurso é apresentado: “As funções do tipo $y = ax$, com $a \neq 0$, x e y reais, apresentam proporcionalidade direta entre os valores de x e y, como no exemplo dado, em que temos $y = 80x$.” (LIVRO DA COLEÇÃO B, 2002, p.169).

O autor prossegue, introduzindo a função linear e seu gráfico: “Essas funções recebem o nome de funções lineares, pois, considerando qualquer valor real para x, seus gráficos são retas que passam pela origem.” (*id*, *ibid*, p.169). Diante do exposto, conclui-se ser responsabilidade do professor retomar a organização praxeológica local em torno do conceito de proporção.

Nesse livro, são apresentadas diversas situações envolvendo grandezas diretamente proporcionais: comprimento de lado e perímetro de figuras planas, volume e tempo, distância percorrida e tempo. Dessa maneira, o tipo de tarefa está bem identificado, as razões são explicitadas, os exercícios são adequados para alunos de oitava série e envolvem conceitos da geometria e da cinemática. A compreensão da proporcionalidade a partir de um gráfico aparece como um desafio.

No manual pedagógico do professor dessa coleção, o autor esclarece ser necessário levar o aluno a descobrir, com exemplos, que o modelo matemático para as situações de proporcionalidade é a função linear $y = ax$, com $a \neq 0$, cujo gráfico é uma reta que passa pela origem. Dessa maneira, o livro avança em relação às sugestões contidas nos documentos analisados.

No livro da coleção D, há poucas situações envolvendo grandezas diretamente proporcionais, que estão espalhadas ao longo do capítulo dedicado ao tema *função*. A primeira situação é sobre uma barra giratória, cujo desenho é apresentado na

Figura 8. Essa situação envolve grandezas, proporcionalidade, movimento de rotação e semelhança de triângulos:

> Vamos considerar uma barra giratória [...] Os desenhos estão na escala 1:100. a) Meça os comprimentos x e y em cada situação. Depois copie e complete a tabela. b) A variável y é diretamente proporcional a x? Ou a variação é de algum outro tipo? c) A fórmula dessa função é y = x + 0,5? É $y = \frac{x}{2}$ Qual é a fórmula? (LIVRO DA COLEÇÃO D, 1997, p.222).

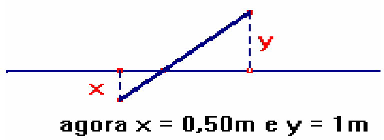


Figura 8 - Barra giratória

Fonte: Livro da Coleção D, 1997, p.222

O professor será responsável por todo o discurso técnico / tecnológico sobre rotação, semelhança de triângulos, razão, proporção e função linear. Além disso, a única sugestão encontrada no manual pedagógico é concretizar o exercício, fazendo uma barra com canudinho de refresco, pregada em uma cartolina com uma tacha.

Outra tarefa encontrada nesse livro: explicar por que y é diretamente proporcional a x na fórmula $y = kx$, sendo k um número real. Não há, nem no manual pedagógico, explicação alguma de como resolver essa tarefa. Acreditamos que não basta pedir ao aluno que construa uma tabela com valores $1, 2, 3, 4$ e 5 para x, utilizando k = 3,5. A passagem de um determinado valor de k, para um genérico valor de k pertencente ao conjunto de números reais, implica um novo problema, um outro patamar de generalização. Considerando $y = 3{,}5x$ como uma redução ostensiva de uma tabela de proporcionalidade, $y = kx$ é a redução ostensiva de todas as tabelas de proporcionalidade.

Verificamos que nenhum livro faz qualquer alusão ao "desaparecimento" das grandezas quando se faz a passagem de uma tabela de proporcionalidade, ou de um texto, para uma fórmula do tipo $y = kx$. Este fato, aparentemente tão inconseqüente, esconde a necessidade de se retomar o significado original das grandezas envolvidas após os cálculos.

Critério 7. Apresentar a organização matemática em torno do modelo matemático da proporcionalidade inversa.

Dois livros tratam do assunto. No da Coleção B, de 2002, sob o título Funções e proporcionalidade, o autor recorda uma situação de grandezas inversamente proporcionais:

> Você já conhece situações em que as grandezas envolvidas são inversamente proporcionais. Um exemplo da proporcionalidade inversa é dado pela variação entre os comprimentos x e y dos lados de uma região retangular com área A constante. Mas como será o gráfico da proporcionalidade inversa? Vamos descobrir. (LIVRO DA COLEÇÃO B, *ibid*, p.170)

O autor não faz uma retomada do conceito de proporcionalidade inversa, pressupondo que os alunos já tenham uma familiaridade com esse conceito e propõe as seguintes tarefas:

> Copie e complete esta tabela com os valores que faltam para a medida de comprimento, em centímetros, dos lados x e y de uma região retangular cuja área é de $36\ \text{cm}^2$. Como os valores x e y podem assumir qualquer valor real positivo, disponha os pares ordenados (x, y) em um gráfico e trace a curva unindo esses pontos. (LIVRO DA COLEÇÃO B, 2002, p.171)

A seguir, encontramos uma breve explicação: "A curva que você acabou de traçar é denominada hipérbole e é característica da proporcionalidade inversa. Como $xy = k,\ y = \frac{k}{x}$." (*id, ibid*, p.171).

O tipo de tarefa está bem identificado, a razão é explicitada, mas são apresentadas aos alunos somente três situações-problema explorando esse conceito. Falta o discurso que justifica a passagem de uma tabela de grandezas inversamente proporcionais para a expressão algébrica $xy = k$. Acreditamos que nomear de hipérbole o gráfico de $y = \frac{k}{x}$ não esclarece o que é uma hipérbole como lugar geométrico. Além disso, a demonstração deste fato não é trivial.

Em outro livro, encontramos uma única atividade, que é apresentada sem justificativas e isolada das demais:

> Considere a função de fórmula $y = \frac{1}{x}$, sendo x e y números reais e $x \neq 0$. Copie e complete a tabela. Nessa função, y é diretamente

> proporcional ou inversamente proporcional a x? Agora o desafio: a partir da tabela, construa o gráfico da função. (LIVRO DA COLEÇÃO D, 1997, p.234).

O autor desse livro não retorna às grandezas inversamente proporcionais, não apresenta uma técnica para verificar se os números são diretamente ou inversamente proporcionais. No manual pedagógico, afirma que a construção do gráfico da função $y = \frac{1}{x}$ é um exercício difícil para a série e apresenta algumas sugestões. Dessa forma, esse livro, neste quesito, não atende às sugestões contidas na *Proposta Curricular de Matemática do Estado de São Paulo* que sugere um roteiro de tarefas para trabalhar com grandezas inversamente proporcionais.

As análises a respeito dos critérios 8 e 9 serão apresentados simultaneamente, uma vez que há livros que introduzem as funções polinomiais de 1º e 2º graus.

Critério 8. Apresentar organização matemática em torno do objeto *função polinomial do 1º grau*.

Critério 9. Apresentar organização matemática em torno do objeto *função polinomial do 2º grau*.

No livro da Coleção A, de 1999, são apresentadas simultaneamente as duas definições:

> As funções que são definidas por fórmulas do tipo $y = ax + b$ onde a e $b \in R$ e $a \neq 0$ são chamadas de funções polinomiais de 1º grau [...] Já as funções definidas por fórmulas do tipo $y = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c $\in$ R e a $\neq$ 0 são chamadas funções polinomiais do 2º grau ou funções quadráticas. (LIVRO DA COLEÇÃO A, 1999, p.97).

Esse livro, como já foi mencionado, começa o capítulo com a definição de função em termos de correspondência entre dois conjuntos e, em seguida, define função em termos de expressão analítica. Provoca, dessa forma, uma ruptura na linguagem, pois a correspondência é afastada e, a partir desse ponto, desaparecem os diagramas de flechas, sendo apresentadas situações envolvendo grandezas interdependentes, onde se pede a lei de formação da função, mas não se faz referência ao que foi exposto anteriormente. Além disso, não oferece explicações sobre os papéis desempenhados pelas variáveis x e y, e pelos coeficientes a, b e c nas definições dadas.

Com o objetivo de estudar o alinhamento de pontos, apresenta a função definida por y = x + 3 cujo domínio é $A = \{-5, -2, 0, 1, 2, 4\}$ e cujo contradomínio é o conjunto dos números reais. A partir desse enunciado, solicita a construção de uma tabela, a determinação da imagem, a construção do gráfico, a observação dos pontos obtidos. Com a mesma expressão algébrica e com as mesmas tarefas, há uma ampliação do número de elementos do conjunto A, até a pergunta: “Se o domínio dessa função fosse o próprio conjunto dos números reais, como você acha que ficaria o gráfico dessa função?” (LIVRO DA COLEÇÃO A, 1999, p.109)

A seguir, propõe a elaboração do gráfico de diversas funções polinomiais do 1º grau, a partir da expressão algébrica, a investigação das coordenadas onde a reta intercepta o eixo x e a investigação da inclinação da reta concomitantemente á investigação do sinal do termo em x da lei de formação.

Não há nenhuma referência sobre a necessidade de utilizar uma escala para a construção do gráfico nem sobre localização de um número racional na reta.

Nesse livro, encontramos o texto: “O gráfico de uma função polinomial do 1º grau, de lei de formação $y = ax + b$ de R em R, onde $b \in$ R e $a \in R^*$, resulta em reta não-paralela ao eixo y e concorrente ao eixo x no ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.” (LIVRO DA COLEÇÃO A, 1999*,* p.110).

Segue o esboço de três gráficos, sem eixos numerados, para os casos de $a < 0$ e $b \neq 0, a > 0$ e $b \neq 0$ e $a > 0$ e $b = 0$. Eles são os únicos gráficos apresentados nesse livro a respeito de funções polinomiais do 1º grau. Em cada um deles, somente o ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ é destacado. Não há explicações sobre a inclinação da reta, sobre o papel desempenhado pelo coeficiente “a” na expressão $y = ax + b$ nem sobre o alinhamento de pontos. Seguem algumas considerações sobre os zeros desse tipo de função.

Observamos ainda que, nesse livro, não há um quadro que apresente simultaneamente: expressão algébrica, tabela e gráfico. Além disso, não encontramos atividades envolvendo leitura e interpretação de gráficos.

Para a construção do gráfico de uma função polinomial do 2º grau, esse livro utiliza a mesma estratégia adotada para a construção do gráfico de uma função polinomial do 1º grau. Parte da função definida por $y = x^2 - 8x + 12$ com domínio $A = \{-1, 0, 2, 4, 6, 8, 9\}$ e faz ampliações sucessivas do conjunto A, até alcançar o conjunto dos reais. Não há uma justificativa para a escolha do conjunto A com esses elementos e não outros. A cada passo, há a tarefa de observar o gráfico obtido, mas o livro não propõe a utilização de papel milimetrado nem faz considerações sobre a utilização de escala. Dessa forma, as respostas dadas pelos alunos podem ser inadequadas.

O auxílio oferecido ao aluno para a construção de gráficos de funções polinomiais do 2º grau limita-se a pedir que ele comece pelos pontos em que y = 0, mas não há justificativas para tal encaminhamento, uma vez que a técnica dada anteriormente para a construção de gráficos resume-se a "colocar mais pontos no gráfico." Não há explicações de como montar uma tabela e do que fazer se a função não tiver raízes reais. Tudo é deixado a cargo do professor.

A seguir, aparece a palavra *parábola*, nome dado ao gráfico de uma função polinomial do 2º grau: "Os gráficos das funções quadráticas com lei de formação $y = ax^2 + bx + c$ onde $a \in R^*$, $b \in R$ e $c \in R$ resultam em curvas simples, recebendo o nome de parábolas." (LIVRO da COLEÇÃO A, 1999, p.113). O texto pode dar a idéia de que outras "curvas simples" também possam receber o nome de parábolas.

Depois da afirmação de que a concavidade depende do sinal do coeficiente *a* em $y = ax^2 + bx + c$, são apresentados seis esboços, que "parecem parábolas", sem a utilização de eixos numerados, para as situações gerais de: $\Delta > 0, \Delta < 0$ e $\Delta = 0$. Não se encontra nenhum outro vestígio técnico / tecnológico para a construção de um gráfico nem para a existência do eixo de simetria da parábola nem para as coordenadas do vértice. No cômputo geral, há um descaso a respeito das representações gráficas de funções polinomiais do 2º grau. Além disso, o aluno não tem uma técnica eficaz para que ele possa resolver as tarefas propostas sobre trajetórias parabólicas que encerram o capítulo.

Os livros das Coleções B (2002) e D (1997) não enfatizam as funções polinomiais de 1º e 2º graus, ao passo que o livro da Coleção C (1998) dedica subseções para o estudo desses dois objetos matemáticos.

Para exemplificar a construção do gráfico de uma função polinomial do 1º grau, ou de 2º grau, o livro da Coleção B apresenta a lei, uma tabela com valores inteiros para x e o gráfico pronto. Entre os gráficos e as tabelas, encontramos dois textos, que apresentam uma técnica para construir gráficos de funções polinomiais de 1º e uma técnica para construir gráficos de funções polinomiais do 2º grau:

> Os matemáticos já provaram que, quando temos y igual a um polinômio do 1º grau da forma ax + b, o gráfico é sempre uma reta. Como por dois pontos determinam uma reta, basta marcar apenas dois pontos [...] Vamos agora construir o gráfico da função dada pela fórmula $y = x^2 - 4$, com x real. Quanto mais valores escolhermos para x, mais clara a idéia que teremos de como ficará o gráfico [...] Quando temos y igual a um polinômio do 2º grau da forma $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, o gráfico é uma parábola. (LIVRO DA COLEÇÃO B, 2002, p.162)

Para a visualização de parábolas há a fotografia de um monumento com uma forma parabólica, a de uma antena parabólica e o desenho da trajetória de um propulsor hipersônico, mas a técnica oferecida para a construção do gráfico de uma função polinomial do 2º grau não é eficiente, uma vez que não há explicações sobre como localizar o eixo de simetria, como determinar das coordenadas do vértice da parábola, como conhecer a concavidade.

Nesse livro, notamos a existência de poucas tarefas ligadas à construção de parábolas, sendo que duas estão no contexto da Física: trajetória de uma bola, energia potencial elástica armazenada por uma mola por causa da distensão. Observamos que não há uma tarefa pedindo a identificação dos coeficientes a, b e c nas expressões analíticas utilizadas.

No livro da coleção D (1997), os autores expõem os passos para a construção do gráfico de uma função, sendo x e y números reais: da fórmula para tabela, da tabela para a marcação de pontos e, depois, no próximo passo, unir os pontos. A seguir, poucas recomendações:

> No momento de unir os pontos, é importante saber que o gráfico é uma parábola, quando um lado da fórmula é um polinômio de 2º grau (dizemos que é uma função de 2º grau); é uma reta quando um lado

> da fórmula é um polinômio de 1º grau (dizemos que é uma função de 1º grau); costuma ser uma curva, nos outros casos que veremos. (LIVRO DA COLEÇÃO D, *ibid*, p. 230)

Sobre a construção da parábola, os autores desse livro destacam, no manual pedagógico que acompanha o livro do professor, que eles não apresentam fórmulas para determinar o vértice da parábola, pois consideram que o aluno deve encontrar suas coordenadas calculando o valor de y correspondente à média das raízes, devido à simetria axial da parábola. Mas essas recomendações não aparecem no livro do aluno que, diante do exemplo, não saberá qual foi o critério utilizado para determinar os valores de x na tabela, onde está o eixo de simetria, nem como reconhecer a abscissa do vértice. Aliás, os autores não nomeiam os elementos do par ordenado: abscissa e ordenada. Poucas situações-problema envolvem funções polinomiais do 2º grau, sendo que duas estão no âmbito da geometria e uma outra no da Economia.

Cabe notar que tanto o livro da Coleção B (2002) quanto o da coleção D (1997) utilizam uma linguagem muito semelhante: "[...] quando temos y igual a um polinômio [...]" e "[...] quando um lado da fórmula é um polinômio [...]." Consideramos que, desta forma, os textos escondem a dependência funcional, e função se torna uma fórmula estática.

O manual do professor do livro da Coleção C (1998, p.18) apresenta, de maneira detalhada, os objetivos específicos para as funções polinomiais de 1º e 2º graus. De fato, as tarefas oferecidas têm o intuito de alcançar os objetivos propostos. Nele se encontra a apresentação formal das funções polinomiais de 1º e 2º graus a partir de situações da geometria. Nos exemplos formulados, sempre apresenta texto, fórmula, tabela e gráfico.

Sobre a construção do gráfico de uma função polinomial de 1º grau, há a seguinte sugestão: "O gráfico de uma função polinomial de 1º grau, no plano cartesiano, é sempre uma reta. [...] como a reta fica determinada por dois pontos, basta determinar, na tabela, dois pares (x, y)." (LIVRO DA COLEÇÃO C, 1998, p.122).

Para verificar se uma função é crescente ou decrescente, o livro propõe que se observem dois gráficos e o sinal do coeficiente a em $y = ax + b$. Não há explicações sobre a necessidade ou importância do estudo do sinal da função polinomial do 1º grau.

Parece que o autor tem a crença, explicitada no livro, de que basta olhar o gráfico para saber se a função é crescente ou decrescente, ou seja, considera natural uma interpretação global do gráfico: “Na verdade, a representação gráfica de uma função deve nos dar todas as informações de como se comporta essa função e, por ser de fácil visualização, é muito utilizada.” (LIVRO DA COLEÇÃO C, 1998*,* p.121).

Tais pressupostos não são verdadeiros, pois várias pesquisas em Educação Matemática, a partir da tese de Janvier (1978), têm mostrado as dificuldades encontradas por alunos na leitura pontual e global de gráficos.

O livro não apresenta atividades envolvendo leitura pontual de dados em um gráfico e tarefas envolvendo a passagem de gráfico para tabela.

Se, de um lado, há um cuidado com a apresentação dos gráficos, construídos no papel milimetrado, de outro lado, o aluno fica refém das orientações técnicas para a construção do gráfico, uma vez que o livro uniformiza as notações para função, ao utilizar somente as letras x e y para representar as variáveis, que não são nomeadas.

Para que se construam parábolas, há um roteiro detalhado, a partir da apresentação da fórmula do vértice:

> 1º) Determinar algebricamente as coordenadas do vértice da parábola;
>
> 2º) Organizar uma tabela atribuindo à variável x alguns valores menores que x_v e alguns valores maiores que x_v;
>
> 3º) Marcar os pontos (x,y) no plano;
>
> 4º) Unir esses pontos para construir a parábola. (LIVRO DA COLEÇÃO C, 1998, p. 134)

Acreditamos que esse roteiro não garante o êxito na construção da parábola, pois não se discute o eixo de simetria da mesma; o discurso tecnológico passa pela existência desse eixo e pela informação que o vértice da parábola pertence a ele.

Esse livro apresenta técnica para: determinar os zeros da função; para determinar a concavidade do gráfico; para resolver inequação, apoiada no estudo do sinal da função polinomial de 2º grau. No final do capítulo, encontram-se duas situações-problema: uma sobre a área de retângulo, outra sobre volume de paralelepípedo. Para cada situação-problema, a resposta requer que se resolva uma inequação.

Critério 10. Manipular materiais concretos.

O livro que inclui a tarefa de dobrar papel para encontrar o número de partes em função do número de dobras, apresenta, na introdução do capítulo sobre funções, um pequeno texto e uma situação-problema sobre variação de duas grandezas interdependentes. O tipo de tarefa está bem identificado, incluindo desenhos explicativos e coloridos, como se pode observar na Figura 9.

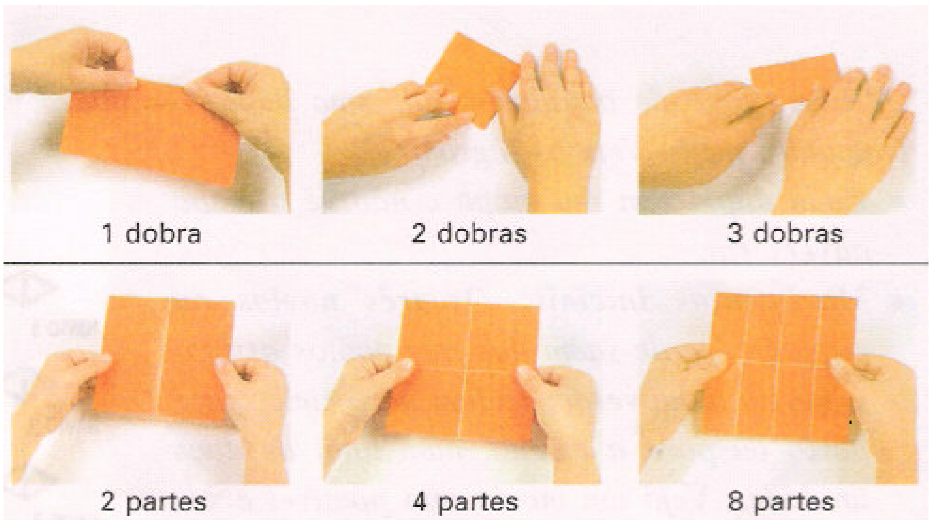


Figura 9 - Dobrando papel

Fonte: Livro da Coleção D, 1997, p.225

Não se explica a razão de ser do exercício, colocado entre outros sobre grandezas. Não se indica também qual é a variável dependente e qual é a variável independente; não se pede a construção de uma tabela, de um gráfico nem o registro escrito de uma expressão verbal. Todas as passagens - do ato de dobrar o papel até a fórmula, que deve valer para qualquer número de dobras - são omitidas, bem como a limitação física de que somente é possível dobrar cinco vezes uma folha de papel, independente de seu tamanho.

No livro da Coleção A (1999), encontramos o jogo denominado Torre de Hanói. O tipo de tarefa está bem identificado, incluindo desenhos explicativos e coloridos e uma orientação que se construa a torre: suporte, discos (ou argolas).

Consideramos que o caminho para se obter a fórmula que possibilita identificar o número mínimo de deslocamentos em função do número de discos não é trivial. Como os autores apresentam uma tabela já preenchida, informando, para cada número de discos, o correspondente número mínimo de deslocamentos, acreditamos que a manipulação de discos perde o sentido. Além disso, como não há uma explicação técnica de como otimizar os movimentos, o aluno provavelmente fará tentativas de acerto e erro.

Critério 11. Apresentar textos científicos ou gráficos extraídos de jornais ou revistas.

O livro da Coleção B (2002) focaliza um artigo sobre trajetória parabólica de um propulsor e pede uma interpretação de texto.

O da Coleção D (1997, p.236) mostra um gráfico da população em função do tempo e explica uma técnica para estimar a população futura, considerada simples pelos autores: prolongar o gráfico apresentado em linha reta. A justificativa é que o crescimento populacional continuará no mesmo ritmo. Entretanto, essa técnica, utilizada em outra situação, poderia ser equivocada.

O livro da coleção C (1998, p.147) apresenta, no final do capítulo sobre funções, dois gráficos estatísticos: de linha e de barras, que ficam à parte.

No exemplar da Coleção A (1999, p.82) não se encontra nenhuma atividade que peça a leitura de um texto extraído de jornal ou revista relacionado ao tema *função*.

Critério 12. Apresentar o jogo - Batalha Naval.

O livro da Coleção A (1999, p.100), sob o título Coordenando Pontos, explora variantes do jogo supracitado, mas não esclarece como se dá a passagem de uma célula (n-ésima coluna, m-ésima linha), localizada em uma malha quadriculada, para o ponto de coordenadas (n, m), além de não oferecer um estudo da reta real, comprometendo as tarefas de construção de gráficos. Nesse livro, a inserção da atividade lúdica fragmenta o capítulo sobre funções em duas partes.

Outro livro que sugere a utilização desse jogo é o da Coleção D (1997, p.226), que pretende motivar o aluno com o título Comece pela ação.

2.3.7. Considerações gerais

Os critérios de 1 até 9 foram concebidos para que fosse possível analisar como as organizações matemáticas em torno do objeto matemático *função* apresentam-se nos livros didáticos de oitava série consultados. É importante ressaltar que os mesmos critérios vinculam-se às concepções de função.

O Quadro 2, que mostra a aderência aos critérios estabelecidos, permite constatar que, mesmo coleções aprovadas pelo PNLD, introduzem o conceito de função de maneira bastante diferenciada. Essa visão só foi possível graças ao refinamento oferecido por um instrumento que nos parece bastante eficaz, o propiciado pela *Teoria Antropológica do Didático*. Com essa teoria, pudemos analisar as organizações praxeológicas em torno das concepções de função.

É importante lembrar que, como se registrou no capítulo 1, desde Sir Isaac Newton, o conceito de função tem mostrado diversos matizes. Esse objeto matemático é tratado como interdependência de grandezas, máquina, expressão analítica, correspondência entre dois conjuntos, relação binária. Nos livros didáticos analisados encontramos função como: relação entre grandezas, expressão analítica, máquina, padrão de regularidade e correspondência entre dois conjuntos.

A seguir, veremos como os livros analisados trabalham a articulação de diferentes tipos de tarefas, se há uma predominância em determinadas letras para conjuntos e variáveis, se há tarefas “inversas”, se há uma um discurso tecnológico / teórico para as tarefas solicitadas.

A passagem de uma concepção para outra, sem uma articulação adequada entre elas, é encontrada com mais freqüência no livro da Coleção A (1999), que oscila entre diagramas de flechas, interdependência de grandezas e funções polinomiais, embora se enfatizem os diagramas de flechas. Além disso, verificamos nesse livro a escassez de técnicas em diversas situações, a escolha reiterada de determinadas letras para nome de conjunto e para as variáveis. Cita-se ainda o fato de que não há tarefas de leitura e interpretação de gráficos, de as seções dedicadas ao conceito de função apresentarem somente duas tabelas. Dessa forma, seguindo as diretrizes propostas por Bosch *et al.* (2004), temos uma organização matemática local incompleta em torno do conceito de função.

O livro da Coleção B (2002) é aquele que apresenta maior diversidade de tipos de tarefas, ao conceber função como interdependência de grandezas, como expressão analítica, como máquina, como padrão de regularidade; mas não há articulação entre todas essas concepções de função. Apesar da predominância das letras x e y, são utilizadas outras para indicar as variáveis dependente e independente, que são nomeadas. Encontramos tarefas relativas à leitura e interpretação de gráficos e cuja confecção é tratada com cuidado, pois há a utilização de uma malha quadriculada. Esse livro apresenta algumas indicações de técnicas para as tarefas propostas. De uma maneira geral, a relativa completude da organização matemática local em torno do conceito de função fica prejudicada pela ausência de uma articulação entre os tipos de tarefas e pela ausência de uma técnica mais apurada para a construção do gráfico de uma função polinomial do 2º grau.

A convivência simultânea de duas concepções em uma mesma situação-problema como interdependência de grandezas e correspondência entre dois conjuntos obedecendo a determinadas condições sem que seja oferecido esclarecimento adequado, ocorre no livro da Coleção C (1998). Todavia, em trechos posteriores do mesmo capítulo, os diagramas de flechas e a interdependência de grandezas variáveis desaparecem. Entram em cena as funções polinomiais de 1º e 2º graus, com a apresentação de tarefas e técnicas para a construção de tabelas e gráficos de funções polinomiais de 1º e 2º graus, a partir da expressão algébrica. Esse conteúdo é abordado de modo mais detalhado que nas outras obras analisadas, mas sempre utilizando as letras x e y. Nesse livro, não encontramos tarefas que contemplem leitura e interpretação de gráficos.

A organização matemática local em torno do conceito de função não favorece uma articulação entre as concepções, além de se verificar a ausência de tarefas do tipo: conceituar função como padrão de regularidade e como máquina. Além disso, essa obra não retoma a proporcionalidade, direta e inversa. No cômputo geral, a completude fica bastante prejudicada.

O livro da Coleção D (1997) não apresenta articulação dos tipos de tarefas em torno das concepções de função como interdependência de duas grandezas e padrão de regularidade.

Esse importante problema da articulação de diferentes concepções será retomada na Parte II, capítulo 2, quando se analisará o resultado da formação oferecida aos docentes.

Outro ponto que merece atenção é o fato de os livros estarem disseminando a seguinte técnica para a construção de gráficos: localizar mais pontos no gráfico, observar a sua forma, mesmo para a construção de gráficos de funções polinomiais de 2º grau. Além disso, encontramos um livro (Coleção A, 1999) que não alerta para a utilização de papel milimetrado ou de uma malha quadriculada nem de uma escala para a confecção de gráficos. A apresentação visual das parábolas não é feita com cuidado.

Um outro ponto a ser considerado é que, tanto a *Proposta Curricular de Matemática do Estado de São Paulo*, de 1997, quanto os livros didáticos estão reforçando determinados roteiros como: determinar uma expressão algébrica, completar uma tabela e, por último, construir um gráfico. Há uma escassez de tarefas sobre leitura e interpretação de gráficos: somente os livros das Coleções B (2002) e D (1997) trazem algumas atividades desse tipo, incluindo a apresentação de alguns gráficos veiculados pela mídia impressa, principalmente os de linha.

Sugestões de uso de *software* educativo são encontradas nos PCNs de Matemática (1998, p.43) e nas recomendações ao professor no manual pedagógico da Coleção B (2002, p.73). Nesse manual, encontramos o exemplo de uma atividade de geometria para ser desenvolvida com o Cabri-Géomètre II, mas não há um exemplo que envolva o conceito de função.

Finalizamos essa avaliação dos livros a respeito do tema *função* com o nosso ponto de vista, seguindo as recomendações encontradas nos dois documentos analisados e nas leituras sobre o ensino e aprendizagem de função.

Consideramos que um livro didático de oitava série, ao introduzir o conceito de função, deveria apresentar os seguintes tipos de tarefa: conceituar função como interdependência de grandezas, como padrão de regularidade e como máquina. Retomar os conceitos de razão, proporção, medidas, grandeza e incluir a função linear. Propor tarefas com o objetivo que trabalhar as mudanças de registro de representação: tabelas, gráficos e expressões algébricas e texto (enunciado). Incluir *software* educativo, como o Cabri-Géomètre II, capaz de propiciar um trabalho com as variáveis dependente e independente e uma leitura pontual e global de gráficos. Incluir a leitura e interpretação de gráficos veiculados pela mídia impressa, não só em termos matemáticos, mas também abrir possibilidades para um trabalho interdisciplinar.

Além disso, esse material, no que tange ao conceito de função, também deveria apresentar uma articulação das organizações pontuais em torno dos tipos de tarefas relativas às concepções de função; não se fixar em determinadas letras para as variáveis, ou seja, garantir uma independência em relação aos grafemas utilizados; apresentar tarefas “inversas” de uma dada instrução, por exemplo, dada a tarefa de construir um gráfico a partir da tabela, também apresentar a outra que leve o aluno a completar uma tabela a partir do gráfico. Em resumo, caminhar em direção a uma relativa completude da organização matemática em questão. No manual do professor, é necessária a inclusão de um repertório tecnológico / teórico.

Com essas sugestões, encerramos a análise dos livros didáticos. A seguir, discorreremos sobre a formação de professores.

PARTE II

FORMAÇÃO DE PROFESSORES

A segunda parte deste trabalho está dividida em dois capítulos. No primeiro, discorremos sobre a necessidade de formação continuada, o desenvolvimento profissional de professores, os aspectos que envolvem a profissionalização docente e as diversas concepções de educação continuada. A seguir, apresentamos os ingredientes que compõem os saberes docentes e depois os particularizamos para o caso de professores de Matemática.

Somando-se esse embasamento com as fragilidades encontradas na formação inicial de professores de Matemática, com as particularidades no que concerne ao ensino e aprendizagem de álgebra e, em especial, funções, apresentamos o ponto central da nossa investigação: ela trata da formação continuada de professores de Matemática, devidamente formulada por meio de questões norteadoras e as hipóteses que procuraremos defender.

Outrossim, discorremos e justificamos a metodologia utilizada, que é a pesquisa-ação e descrevemos os procedimentos metodológicos utilizados. Encerramos o capítulo, contextualizando o cenário no qual a pesquisa foi realizada. Para tanto, caracterizamos a escola que viabilizou a pesquisa, os docentes que participaram dos trabalhos, os alunos de duas classes de oitava série: aqueles do piloto e aqueles que trabalharam com a seqüência proposta.

No segundo capítulo, descrevemos e analisamos os fatos observados durante o período em que desenvolvemos o trabalho de pesquisa.

CAPÍTULO 1

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES

1.1. As razões para a formação continuada de professores

Um dos fenômenos mais marcantes da globalização econômica é a transformação da maneira de fazer negócio, trabalhar, aprender e até mesmo pensar. Os processos de trabalho e as relações capital-trabalho imputam ao trabalhador a necessidade de uma constante reciclagem de conhecimentos. De acordo com Tapscott (1999), a velocidade em que as coisas acontecem, fortemente impulsionada pelo uso maciço dos recursos computacionais, faz com que as oportunidades se democratizem, as tecnologias se choquem e se concretizem em menos de uma geração, possibilitando que indivíduos e sociedade criem riqueza, aplicando conhecimento e inteligência humana.

O novo perfil profissional exige que os trabalhadores sejam dinâmicos e flexíveis, desenvolvam habilidades multifuncionais e polivalentes e exerçam diversas atividades e profissões ao mesmo tempo. A preparação do trabalhador exige a definição de políticas públicas reformadoras na área da educação, visando a edificar uma nova escola e, em decorrência, um novo sistema de formação de professores.

Por esse motivo, a formação de professores tem recebido atenção na maior parte dos países e a educação passa a ser tratada como a base e a mola propulsora do desenvolvimento sócio–econômico, além de ser a garantia da sobrevivência do núcleo social, onde ela está inserida.

A análise elaborada por Nunes, em 2000, a respeito dos diferentes discursos e das razões apontadas por pesquisadores de diversos países para a continuidade na formação de professores, mostra que os mais priorizados e destacados são: limites e fragilidades na formação inicial; o homem como um eterno aprendiz; conhecimento em permanente construção; mudança da prática pedagógica do professor e mudança da realidade escolar.

A realidade referente à frágil formação inicial é um problema que afeta muitos países, inclusive o Brasil, comprometendo o futuro da sociedade.

Sobre isso, Nunes (2000, p.34) afirma que os cursos de formação de professores têm recebido expressivas críticas por apresentarem modelos ineficientes e ineficazes, não contribuindo, desse modo, para a formação de um profissional da educação com qualidade. A autora afirma também que as licenciaturas dicotomizam o par teoria e prática, no processo de construção do conhecimento; trabalham sob o enfoque idealizado de aluno / escola / professor / ensino; preparam para um ensino desvinculado da realidade concreta das escolas; produzem profissionais desprovidos de fundamentação teórico-metodológica e de competência formal e política para o magistério.

O discurso sobre a necessidade de olhar o professor como eterno aprendiz provém da constatação de que ele é um ser histórico, mutável, incompleto e que sua interação com o mundo social leva à construção de valores, crenças, idéias, saberes acerca de seu contexto e que tudo isso embasa sua profissão docente. Dessa maneira, a formação de professores não pode se restringir às situações formais nem se esgota no tempo e no espaço.

Na mesma direção, o conhecimento, assim como o homem, não está pronto, acabado. Não é a-histórico e está em permanente construção, reconstrução, desconstrução, expandindo-se e desenvolvendo-se quando partilhado socialmente. A autora enfatiza que a evolução e a rápida divulgação do conhecimento científico, as transformações sociais e culturais têm trazido profundas reflexões sobre o papel da escola e do professor nesse cenário de transformação.

Nunes (2000), na sua pesquisa, encontrou ainda um discurso sobre a formação continuada, que deve propiciar a criação de um novo perfil profissional do professor: crítico, criativo, pesquisador de sua própria prática, um agente de mudanças e inovações pedagógicas, a fim de promover uma escola de qualidade.

No Brasil, a formação continuada de professores consta na Lei n.9394 / 96 de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB). Esse documento traz artigos cujo objetivo é tratar especificamente da formação dos profissionais da educação e concebe a formação inicial e permanente como um processo contínuo. O artigo 67 estipula: ingresso exclusivamente por concurso público e provas e títulos; aperfeiçoamento profissional continuado, inclusive com licenciamento periódico remunerado para esse fim; piso salarial profissional; progressão funcional baseada na titulação ou habilitação e na avaliação de desempenho; período reservado a estudos, planejamento e avaliação, incluído na carga de trabalho; condições adequadas de trabalho.

A LBD estabelece que a formação continuada dos professores é um dever do Estado e um direito dos professores. Nesse sentido, a *Teia do Saber* é o principal programa de capacitação da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, criado em 2003, com o objetivo de atender educadores, supervisores, diretores, coordenadores pedagógicos desse Estado. Dentro da *Teia do Saber* são desenvolvidos projetos como o Bolsa Mestrado, que propicia aos professores a oportunidade de continuar os estudos em cursos de pós-graduação.

Mesmo com esse esforço do governo estadual, ainda persistem graves problemas nas condições materiais e estruturais das escolas; os professores têm exaustivas jornadas de trabalho e ministram aulas em classes com mais de quarenta alunos; de uma maneira geral, falta um maior comprometimento da direção e da coordenação pedagógica com o papel da escola. Nessas condições, sem uma política global, extensiva e permanente, dificilmente se logrará êxito no aprimoramento das escolas públicas.

Se por um lado, a literatura aponta muitas razões para a formação continuada de professores, por outro lado, quais os modelos que têm sido propostos para viabilizar essa formação?

A próxima seção trata dos paradigmas da formação continuada de professores, analisando os modelos praticados no Brasil, as limitações das ações formativas e a emergência de um novo modelo de formação, denominado *desenvolvimento profissional de professores.*

1.2. Paradigmas de formação continuada

As ações de formação continuada de professores estiveram, ao longo da literatura educacional e nos discursos dos órgãos que gerenciam a educação, associadas aos modelos, representados pelas palavras: reciclagem, treinamento, aperfeiçoamento e capacitação. Sobre esses modelos de formação continuada, Marin (1995) afirma não serem sinônimas as palavras que os representam, pois revelam uma multiplicidade de significados e diferentes formas de realizar uma dada ação formativa.

O termo *reciclagem*, segundo a autora, sempre esteve presente ao longo da década de 1980, no Brasil, mas a adoção desse modo de ver equivocado levou à implantação de cursos rápidos e descontextualizados ou a palestras e encontros esporádicos que, no cômputo geral, não trouxeram benefícios duradouros ao ensino.

Marin (1995) considera que o *treinamento* é inadequado, se ele for pensado somente em termos mecânicos e padronizados e afirma ser preciso ter cuidado com a concepção de *aperfeiçoamento*, pois não é suficiente adquirir periódicos estoques de novas noções.

Ao analisar a palavra *capacitação*, a autora considera que, se por um lado, essa palavra significa tornar capaz, por outro lado, significa convencer, persuadir. Dessa maneira, o primeiro significado de capacitação é coerente com educação continuada, pois é preciso que os professores se tornem capazes. Capacitação entendida como convencimento ou persuasão, por meio de pacotes educacionais, que deveriam ser aceitos acriticamente, em nome de uma inovação ou suposta melhoria, teve conseqüências desastrosas.

Azanha (1998, p.53), analisando os dados oriundos da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo nos cursos de aperfeiçoamento docente, implantados em 1993, considera uma incógnita o êxito desses cursos, em termos de efeitos duradouros, porque nem mesmo se conhece o nível das deficiências de formação dos docentes envolvidos.

A nossa opinião é que esses modelos, que eximem os professores da responsabilidade de pensar o seu ensino, não foram eficazes para promover uma melhoria da qualidade de ensino nas escolas públicas (estaduais). Nesse aspecto, concordamos com a exposição de Marin (1995) e de Azanha (1998).

Diante do êxito duvidoso desses modelos e das críticas que receberam, Nunes (2000, p.63) identifica a emergência de um novo paradigma para a formação continuada, denominado *desenvolvimento profissional de professores*. Ele está sendo construído desde a década de 1970 e tem como norte a produção da figura do professor e do ensino reflexivo, de modo a operar significativas mudanças no sistema de ensino. As suas características são apresentadas por diversos autores, dentre os quais destacamos os trabalhos de Nóvoa (1992), Ponte (1998), Garcia (1999) e Lastória e Mizukami (2002).

Nóvoa (1992) salienta que a formação continuada deve estar inserida em práticas coletivas, que promovam a preparação de professores reflexivos, além de ser articulada com a escola e seus projetos. O autor propõe o desenvolvimento de uma nova cultura profissional dos professores, que considera a produção de saberes e de valores que dêem corpo a um exercício autônomo da profissão docente.

Ponte (1998) destaca que o desenvolvimento profissional permanente, ao longo de toda a carreira, é um aspecto marcante da profissão docente. O pesquisador mostra os contrastes existentes entre formação inicial e continuada. A formação inicial está ligada à idéia de freqüentar cursos, cabendo ao professor assimilar conhecimentos compartimentados, isto é, de fora para dentro. O desenvolvimento profissional na formação continuada pressupõe o envolvimento do professor em cursos e projetos, mas, agora, sendo ele o tomador de decisões, ou seja, um movimento de dentro para fora. Para o autor, na formação continuada, deve-se dar atenção não só aos conhecimentos e aos aspectos cognitivos: devem também ser valorizados os aspectos afetivos e relacionais do professor. A formação inicial parte invariavelmente da teoria e, muitas vezes, não chega a sair dela, ao passo que o desenvolvimento profissional tende a considerar a teoria e a prática de uma forma interligada.

Garcia (1999, p.26) considera que a formação de professores é uma área de conhecimento e investigação, centralizada no estudo dos processos por meio dos quais os professores desenvolvem a sua competência profissional. O autor salienta o caráter evolutivo embutido no processo, que deve ser sistemático e organizado e que, por esses motivos, não pode ser pontual ou improvisado. Para além de aperfeiçoamento, reciclagem, formação em serviço, formação permanente, Garcia (1999, p.137) afirma que a noção de *desenvolvimento profissional* tem uma conotação de evolução e continuidade que procura superar a tradicional justaposição entre formação inicial e aperfeiçoamento de professores.

De uma maneira mais completa, aglutinando diversas vertentes, esse autor (1999, p. 26-30) apresenta oito princípios que ele considera fundamentais na formação do professor, descritos a seguir: 1) Processo contínuo, que se refere à continuidade da aprendizagem durante toda a carreira docente, sendo que a formação inicial é a primeira fase de um longo e diferenciado processo de desenvolvimento. 2) Integração em processos de mudança, inovação e desenvolvimento curricular, objetivando a qualidade de ensino. 3) Ligação dos processos de formação de professores com o desenvolvimento organizacional da escola, ou seja, não podemos formar futuros professores sem contextualizar a escola em que irão trabalhar, como ela funciona, como é organizada. 4) Integração entre a formação de professores relacionada aos conteúdos acadêmicos e disciplinares, e a formação pedagógica dos docentes. O conhecimento didático do conteúdo é estruturador do pensamento pedagógico do professor. 5) Harmonização entre a teoria e prática. Os professores desenvolvem um conhecimento próprio, produto de suas experiências e vivências pessoais, que se tornam rotineiras, mas eles não conseguem explicitar tal conhecimento. 6) Isomorfismo entre a formação docente recebida e o tipo de educação que posteriormente lhe será pedida que desenvolva; aqui é importante ressaltar o método de ensino como principal conteúdo a ser trabalhado. Isso significa que o professor-formador, ao ensinar função, por exemplo, deveria se preocupar também com a aula que o futuro professor terá que ministrar. 7) Individuação como elemento integrante de qualquer programa de formação de professores, a consciência de que cada formando é um único indivíduo, de que cada grupo é único e de que esse processo de formação deve ser baseado nas necessidades e interesses dos participantes como pessoas e como profissionais, com o objetivo de desenvolver suas potencialidades. 8) Questionamento das próprias crenças e práticas dos professores. Uma formação deve propiciar oportunidades para que os professores possam fazer indagações e desenvolver suas capacidades críticas sobre as próprias crenças e práticas. É olhar o professor como sujeito capaz de gerar conhecimento e de valorizar o saber desenvolvido por um outro professor.

Em resumo, a importância de encarar a formação na perspectiva do desenvolvimento profissional resulta da constatação de que uma sociedade em constante mudança impõe à escola responsabilidades cada vez maiores.

Constatamos que esse paradigma representa olhar os professores de uma nova perspectiva, não mais como consumidores de pacotes educacionais prontos ou técnicos que aplicam conhecimentos gerados por outros, mas como profissionais que se engajam espontânea e sistematicamente, em cursos, em pesquisas e que são capazes de gerar conhecimentos.

Lastória e Mizukami (2002, p.187) consideram a aprendizagem da docência como um processo complexo de geração de conhecimentos, que ocorre ao longo da vida do professor, envolvendo diferentes tempos, comunidades de aprendizagens e experiências. As autoras acreditam que a formação e a aprendizagem de adultos demandam a experiência direta do trabalho pedagógico porque a aprendizagem que produz significados para a docência é um processo contínuo, fundamentado na ação, que requer resolução de conflitos e implica interação entre pessoas e seus ambientes.

As contribuições desses pesquisadores nos levam a perceber que, para que ocorra o desenvolvimento profissional de um grupo de professores, uma das maneiras seria envolvê-los em uma investigação que priorize o trabalho coletivo, sistemático, a experiência direta com o trabalho pedagógico, com o propósito comum de melhorar a qualidade do ensino. Nesse processo formativo, o professor é o agente principal de sua própria formação.

Tudo isto exige a construção de um espaço democrático que possibilite a troca de idéias, uma reflexão da prática que respeite os limites e potencialidades de cada participante, que leve em conta os aspectos afetivos e valorize as relações entre os indivíduos. Esses pressupostos são coerentes com os procedimentos metodológicos que descreveremos mais adiante, na seção denominada Procedimentos Metodológicos.

A seguir, discorremos sobre os saberes docentes, inicialmente, de uma forma geral; depois, sobre os exigidos dos professores de Matemática.

1.3. Saberes docentes

Nesta seção, apresentamos as tipificações propostas por Maurice Tardif, pesquisador canadense e professor da Universidade Laval, e Lee Shulman, pesquisador americano e professor da Universidade de Stanford, cujas publicações focam o conhecimento sobre aquilo que um professor precisa aprender para ensinar. Ambos os pesquisadores são conhecidos internacionalmente. Na seqüência, especificamente sobre saberes docentes de professores de Matemática, apresentamos as idéias de Yves Chevallad e Marianna Bosch, dois pesquisadores franceses da Didática da Matemática e encerramos com considerações feitas por

Regina Maria Pavanello, Dario Fiorentini, pesquisadores na área de Educação Matemática no Brasil e João Pedro da Ponte, renomado pesquisador em Portugal.

Shulman (1986, p.9), propõe três categorias para distinguir os conhecimentos dos professores: *conhecimento do conteúdo*, *conhecimento pedagógico do conteúdo* e *conhecimento curricular*.

O *conhecimento do conteúdo* refere-se à quantidade e organização do conhecimento na mente do professor. Para pensar corretamente sobre o conhecimento do conteúdo, o autor considera que é preciso ir além dos fatos ou conceitos e compreender a estrutura do conteúdo, que pode ser substantiva e sintática.

A estrutura substantiva corresponde às várias maneiras nas quais os conceitos básicos e princípios de uma disciplina são organizados para serem reunidos em fatos. A estrutura sintática de uma disciplina é formada pelo conjunto de regras que determinam aquilo que é verdadeiro (ou falso) em determinada disciplina. O autor afirma que o professor deve ser capaz de explicar o motivo por que uma determinada proposição é valida, como ela se relaciona com outras proposições, dentro e fora da disciplina. Além disso, o professor precisa não só conhecer o porquê de determinado conteúdo, mas também as concepções e crenças em que esse conteúdo se sustenta e legitima e saber quais são os tópicos importantes dentro de uma disciplina.

O *conhecimento pedagógico do conteúdo* vai além do conhecimento do conteúdo *per si*, é um conhecimento para o ensino. Dentro dessa categoria, o autor inclui as explanações, analogias, ilustrações, exemplos, ou seja, os caminhos para formular e representar um tema para que ele seja compreensível para outras pessoas. Assim, o professor deve ter à mão um estoque de alternativas para apresentar um tema, que podem ser provenientes de pesquisas ou da prática.

O conhecimento pedagógico do conteúdo inclui também uma compreensão daquilo que torna o ensino de um tópico específico fácil ou difícil, das concepções e pré-concepções que os estudantes, de qualquer idade, trazem para a sala de aula. O autor considera que os professores precisam conhecer estratégias para lidar com concepções errôneas dos estudantes, a fim de reorganizar a compreensão dos conteúdos.

Para Shulman (1986, p.10), o *conhecimento curricular* é representado pelos programas, pelos materiais instrucionais disponibilizados tais como livros, textos, filmes, *software*, experimentos em laboratório. A partir de um programa e dos materiais instrucionais disponibilizados, o professor projeta o ensino de determinado conteúdo, avalia a sua adequação para uma determinada classe. Segundo esse autor, o docente também deve estar familiarizado com os programas de outras disciplinas que seus alunos estudam, com os programas das outras séries da sua disciplina, para nortear-se em relação aos tópicos que já foram vistos pelos alunos e aqueles que serão vistos na série subseqüente.

A partir de estudos posteriores, Shulman acrescenta a necessidade de se considerarem os contextos: aula, escola, família, comunidade em que ocorre a experiência pedagógica, como se pode ver em Shulman (1987) *apud* Lastória e Mizukami (2002, p. 188).

Outro pesquisador que traz importantes contribuições para o estudo dos conhecimentos dos professores é Tardif (2002). Ele propõe uma tipologia dos saberes, baseada na proveniência social dos saberes profissionais para explicar o pluralismo do saber docente, bem como as fontes de aquisição desses saberes e seus modos de integração no trabalho docente. De acordo com esse autor, um professor tem à mão sua cultura pessoal, oriunda de sua história de vida e da cultura escolar onde ele esteve imerso durante os anos de sua escolarização; os saberes provenientes da formação escolar anterior; saberes provenientes da formação profissional para o magistério; saberes provenientes dos programas e livros didáticos usados no trabalho, saberes provenientes de sua própria experiência na profissão, na sala de aula e na escola.

Tardif (2002, p.38) sustenta que os saberes da formação profissional ou saberes pedagógicos são transmitidos nas disciplinas relacionadas ao ensino, presentes no currículo das licenciaturas. Os saberes disciplinares, que são transmitidos nos cursos universitários, provêm dos diversos campos do conhecimento e se integram à prática pedagógica. No nosso caso, estamos tratando das disciplinas “duras” da licenciatura em Matemática.

Os saberes curriculares provêm dos programas escolares (discursos, objetivos, conteúdos e métodos) a partir dos quais a instituição escolar categoriza e apresenta os valores sociais por ela definidos e selecionados como modelos da cultura erudita e de formação para a cultura erudita. O professor deve apropriar-se desse repertório e também ser capaz de interpretar, adaptar e aplicá-lo em função das condições concretas da sala de aula. No caso do professor de Matemática do ensino fundamental e do ensino médio, ele deveria conhecer os *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática*, as *Propostas Curriculares de Matemática* do seu estado, além da proposta pedagógica da escola onde trabalha.

Tardif (2002, p.67) afirma que não se pode negligenciar a dimensão temporal do saber profissional, ou seja, sua inserção na história de vida do professor e sua construção ao longo da carreira. Afirma também que os saberes profissionais são personalizados, porque a individualidade do professor constitui um elemento fundamental no processo de trabalho. Estão ligados não somente à experiência do trabalho, mas também incorporados à própria vivência do professor. Além disso, o saber profissional é construído pelas interações com diversas fontes sociais de conhecimento e provenientes da cultura que rodeia o professor.

Um outro ponto analisado na obra desse autor é a posição de um saber em relação ao professor. Tardif (2002, p.40) salienta que os saberes disciplinares e curriculares que os docentes transmitem estão situados em uma posição exterior, pois esses saberes aparecem como produtos praticamente prontos, oriundos da tradição cultural e incorporados à pratica docente por meio das disciplinas, programas escolares, matérias e conteúdos a serem transmitidos. Em contrapartida, o autor afirma que os saberes experienciais surgem como núcleo vital do saber docente, a partir do qual os professores tentam transformar suas relações de exterioridade com os saberes em relações de interioridade com a sua própria prática. Os experienciais não são saberes como os demais; eles são formados pelas outras áreas do conhecimento, mas reformulados e submetidos às certezas oriundas da prática. Em outras palavras, os saberes determinados pelas instâncias superiores não pertencem ao professor. Somente quando ocorre uma relação em forma de diálogo com a prática, esses mesmos saberes são incorporados pelo profissional docente.

Até este ponto, os dois pesquisadores citados tratam dos saberes da docência de uma maneira geral. Mas a Matemática têm as suas especificidades.

Sob a luz da *Teoria Antropológica do Didático*, já citada, Chevallard (2001) afirma que o problema do professor é ensinar, ou seja, fazer funcionar, em uma classe, uma determinada organização matemática. Em outras palavras, precisa (re)construir uma organização didática, que solucione a tarefa que ele vai propor aos alunos. Por exemplo, diante da tarefa: construir o gráfico de uma função, o professor se depara com a questão de como propor o exercício para o aluno.

Essa teoria fornece instrumentos para analisar o saber ou saber / fazer do professor, que são as respostas para questões como as que seguem: Quais são os tipos de tarefas que o professor propõe? Quais são as técnicas que ele conhece para resolver as tarefas? Qual é o alcance dessas técnicas? Qual é o domínio que ele tem dessas técnicas? Quais são as suas justificativas tecnológicas?

Ao modelar o trabalho de professor ao preparar a sua aula, Chevallard (2001, p.11) introduz a noção de momentos de estudo ou momentos didáticos. Para colocar em funcionamento uma determinada organização matemática em uma sala de aula, o autor propõe seis momentos de estudo a partir da constatação de que determinados tipos de situações estão presentes, mesmo que seja de uma maneira muito variada, tanto no plano qualitativo, como no quantitativo. Esses tipos de situação serão nomeados de *momentos de estudo* ou de *momentos didáticos*, porque, qualquer que seja o caminho trilhado, chega-se forçosamente a um momento onde determinados procedimentos de estudo devem ser executados.

Segundo Chevallard (1999, p.250), um mesmo momento didático pode ocorrer diversas vezes sob a forma de múltiplos episódios. O autor considera que a ordem dos momentos didáticos é arbitrária porque eles são, antes de tudo, uma realidade funcional, mais que uma realidade cronológica. Em outras palavras, ao longo do tempo, os momentos podem não ocorrer na ordem apresentada a seguir.

O primeiro momento de estudo é aquele do primeiro encontro (ou reencontro) com a organização matemática que está sendo coloca em jogo e pode ocorrer de diversas maneiras e diversas vezes. Para o professor, por exemplo, esse primeiro momento seria destinado a uma reorganização curricular com o objetivo realçar didaticamente um objeto matemático.

Chevallard (1999, p. 251) afirma que esse primeiro (re)encontro se inscreve em uma problemática que ele denomina de “mimético-cultural.” Nesse caso, o professor faz um relatório como se fosse uma investigação das coisas do mundo; assim, o objeto encontrado parece, em princípio, existir em outro lugar, em determinadas práticas sociais. O sub-momento cultural, onde o objeto não existe senão em efígie, de modo que o professor tem somente relações fictícias, é seguido de um sub-momento mimético, onde ocorre uma imitação no ato de manipular o objeto.

Esse encontro cultural-mimético, em uma versão mais exigente, pode conduzir a uma investigação e a uma explicitação da razão de ser do objeto matemático, os motivos que levaram à sua construção, ou por que ele persiste na cultura; ou pode se degradar em uma imitação da prática, que oculta as razões dessa prática.

Em oposição, pode ocorrer um afastamento de toda referência a uma realidade já existente e a criação de uma nova realidade. Essa criação pode conduzir a uma "nova definição" do objeto em questão, que não é uma simples cópia das definições determinadas pela cultura. Será necessário mostrar a compatibilidade dessa "nova definição" com aquelas que já existem no meio social.

Esse primeiro encontro não determina todas as relações possíveis com o objeto em questão, mas tem um papel importante na aprendizagem, porque orientará o desenvolvimento posterior das relações institucionais e pessoais com o objeto em questão.

O segundo momento é aquele da exploração de um tipo de tarefa e a elaboração de uma técnica para ele. Essa elaboração é considerada por Chevallard (1999, p. 252) como o centro da atividade matemática, pois o estudo da resolução de um problema sobre um determinado tipo de tarefa sempre é acompanhado pela constituição, mesmo de maneira embrionária, de uma técnica. Pode ocorrer, eventualmente, a emergência de uma técnica mais elaborada. O autor considera que o estudo de um problema particular não é um fim em si mesmo, mas um meio para o desenvolvimento da técnica. Assim, trava-se uma dialética fundamental: estudar problemas permite a criação de uma técnica relativa aos problemas de mesmo tipo; a técnica, por sua vez, será o meio de resolução de maneira quase rotineira de problemas do mesmo tipo.

O terceiro momento de estudo é aquele da elaboração do entorno tecnológico e teórico relativo à técnica. De uma maneira geral, esse se relaciona estreitamente com cada um dos outros momentos. Assim, desde o primeiro encontro com um tipo de tarefa, ou existe uma relação com um entorno tecnológico-teórico anteriormente elaborado, ou com um embrião que deve ser desenvolvido.

No quarto momento, verifica-se o trabalho da técnica, quando deve ocorrer um aprimoramento, para torná-la mais eficaz e mais confiável.

O quinto momento é aquele da institucionalização, que tem o objetivo de determinar, de maneira precisa, o que é a organização matemática elaborada. Nesse momento, é necessário que se distingam os elementos que serão integrados de maneira definitiva nessa organização. Segundo Chevallard (1999, p.254), é dessa forma que a organização matemática em questão faz sua entrada na cultura de uma instituição escolar.

O sexto e último momento é o de avaliação, que se articula com o da institucionalização. Na sala de aula, é quando se verifica aquilo que foi compreendido. Para Chevallard (1999, p.255) trata-se de avaliar, não uma pessoa, mas, sim, de interrogar a própria técnica e verificar, por exemplo, se ela é robusta, segura e maneável.

Ao longo da análise dos dados, acompanharemos o trabalho dos professores, examinando as organizações matemáticas acionadas, o andamento das (re)construções das organizações didáticas e os momentos de estudo.

Sobre o professor de Matemática, Pavanello (2002, p.79) afirma que ele precisa conhecer profundamente os conceitos matemáticos com os quais vai trabalhar, bem como a sua história, além dos obstáculos envolvidos no processo de construção desses conceitos. Por concordarmos com a autora, inserimos, durante a formação, uma breve história do conceito de função, enfocando momentos importantes da sua evolução e uma discussão sobre os processos produtores de obstáculos epistemológicos e didáticos.

Se considerarmos as contribuições dos diversos autores, um professor de Matemática ideal, ao se deparar com a tarefa de introduzir o conceito de função, <u>deveria</u> conhecer as organizações matemáticas em torno do objeto função e desenvolver as organizações didáticas correspondentes. Em outras palavras, isso significa desenvolver e organizar um conjunto de tarefas, técnicas e tecnologias didáticas em torno do objeto *função* para atingir seus propósitos de ensino e aprendizagem desse conceito. No contexto de um professor de Matemática da oitava série do ensino fundamental do Estado de São Paulo, ele deveria conhecer o perfil dos alunos; o currículo de Matemática da oitava série; as sugestões contidas nos PCNs de Matemática, editados em 1998, na *Proposta Curricular de Matemática do Estado de São Paulo* sobre funções, variáveis, proporção, utilização de tabelas, fórmulas e gráficos; as etapas principais da história do conceito de função; os obstáculos envolvidos na construção do conceito; saber, não só saber/fazer, as organizações matemáticas em torno do objeto função, a fim de poder desenvolver a organização didática em torno desse objeto matemático. Podemos acrescentar que ele deveria conhecer as tendências em Educação Matemática.

Um outro aspecto que temos de considerar diz respeito às concepções dos docentes sobre o ensino de Matemática no Brasil. Fiorentini (1995, p.3) afirma que cada professor constrói idiossincraticamente seu ideário pedagógico a partir de pressupostos teóricos e de sua reflexão sobre a prática, onde podem aparecer elementos de uma ou mais tendências.

Ponte (1992, p.186) considera que as concepções têm uma natureza essencialmente cognitiva e que atuam como uma espécie de filtro. Esse autor acredita que as concepções são indispensáveis, pois estruturam o sentido que uma pessoa dá às coisas. Todavia, podem atuar como um elemento bloqueador a novas realidades ou a certos problemas, limitando as possibilidades desse indivíduo.

Este trabalho assenta-se sobre os seguintes fundamentos teóricos:

- o conceito de *saber função* e de *momentos didáticos* propostos por Yves Chevallard;
- a concepção de saberes curriculares defendidos por Maurice Tardif e por Lee Shulman;
- o princípio do conhecimento pedagógico do conteúdo, sustentado por Lee Shulman;
- o conhecimento sobre as interações entre os alunos e o contexto no qual eles estão inseridos, propagado por Lee Shulman;
- o conceito de saberes experienciais, segundo Maurice Tardif;
- a noção de concepção apresentada por João Pedro da Ponte e de concepção de ensino de Matemática, defendida por Dario Fiorentini.

O exame das questões relacionadas aos aspectos sócio-culturais e às condições de trabalho docente não pertence ao escopo desta pesquisa.

1.4. O problema da pesquisa

Citamos as fragilidades das licenciaturas, em geral. Mais especificamente, no processo de formação do professor de Matemática, Soares *et al*. (1997, p. 27) apontam para o fato de que esses cursos podem ser divididos em dois momentos: no primeiro, a Matemática que o licenciando vai ensinar na escola é trabalhada como instrumento; no segundo, ela é trabalhada a partir de seus fundamentos lógicos. Os autores enfatizam que há um vazio entre esses dois momentos, sendo essa uma falha estratégica fundamental. Além disso, afirmam: “Não há espaço, dentro da formação específica da licenciatura, para que ele (o licenciando) seja exposto, de maneira sistemática e coerente, à Matemática que vai ensinar, com olhar voltado especificamente para sua futura prática profissional.” (SOARES *et al.,* 1997, p. 28).

Além desse problema, os trabalhos de Zuffi (2004), Fonte (2002) e Pinto (1999), dentre outros, mostram a fragilidade do saber docente sobre álgebra e funções, como foi mostrado na revisão da literatura, na Parte I, capítulo 2.

Consideramos que é preciso ir além, em busca de uma maneira de superar tais dificuldades em relação ao conceito de função, a fim de que os professores ganhem desenvoltura não só na preparação de suas aulas, mas também no gerenciamento do processo de ensino e aprendizagem desse conceito na sala de aula.

A nossa pesquisa particulariza-se das outras pesquisas pelo seu referencial teórico (*Teoria Antropológica do Didático*) e pelos aspectos metodológicos, pois é uma pesquisa-ação, que favorece a reflexão sobre a prática docente.

A análise dos livros didáticos, apresentada na PARTE I, capítulo 2, apontou as tarefas e as praxeologias envolvidas, presentes, ou não, no livro didático ou no livro do professor. Também mostrou a falta de uma articulação que, de maneira geral, verifica-se entre os tipos de tarefas que são apresentadas ao aluno.

Não se pode esquecer, entretanto, que o livro didático é hoje o principal, se não o único instrumento do professor de Matemática; ele determina os conteúdos e a forma de abordá-los.

Para ultrapassar essa restrição, a nossa pesquisa preocupa-se com um trabalho coletivo de construção de uma seqüência de ensino para introduzir o conceito de função em uma classe de oitava série do ensino fundamental. Consideramos que essa construção será uma ferramenta para promover processos de aprendizagens docentes, a fim de atingir uma evolução progressiva da profissionalidade.

Esperamos que esse trabalho de formação continuada propicie condições para que os professores possam ampliar, em termos chevallardianos, seus saberes, além do saber / fazer sobre o conceito de função; possam discutir o quê ensinar e como ensinar; identificar quais enunciados e tarefas são pertinentes, adequadas para o ensino e aprendizagem do tema na série indicada. Além disso, pretende-se propiciar um espaço para que os docentes possam observar as potencialidades, bem como as dificuldades de um aluno desse grau de escolarização ao trabalhar as atividades propostas.

Almejamos que, no final desse processo, o professor se perceba um pouco mais seguro para tomar suas próprias decisões e comece a refletir sobre a sua prática.

Apresentamos, a seguir, **as questões norteadoras** da nossa pesquisa:

O que significou, para um grupo de professores de ensino fundamental e médio da rede pública do Estado de São Paulo elaborar coletivamente uma seqüência didática sobre função e aplicá-la em classe?

Mais especificamente:

- Quais organizações matemáticas são mobilizadas por professores durante a construção de uma seqüência de ensino sobre funções para uma oitava série do ensino fundamental?
- Como os professores (re)constroem seus saberes docentes sobre o conceito de função?

HIPÓTESES

Acreditamos que a elaboração coletiva e a análise de uma seqüência didática sobre funções e sua posterior aplicação em sala possam deflagrar um processo de construção de um saber docente, que englobe: saber sobre o objeto matemático, que envolve também um saber sobre a noção de variável; saber pedagógico desse conteúdo; reflexão sobre a gênese do objeto matemático; reflexão sobre a importância desse conhecimento dentro do currículo; conhecimentos sobre as potencialidades dos alunos.

1.5. Procedimentos metodológicos

Na pesquisa qualitativa em Educação Matemática, são utilizados termos como grupo cooperativo, grupo colaborativo, pesquisa-ação. O objetivo dos próximos parágrafos é esclarecer o significado desses termos e associá-los a nossa pesquisa.

A palavra *pesquisa-ação* foi cunhada por Kurt Lewin, em 1946, no trabalho denominado *Action Research and Minority Problems*. Lewin, psicólogo alemão, um dos fundadores da Gestalt, é considerado o pai da pesquisa-ação. Há uma diversidade de tipos de pesquisa-ação, dentre elas a denominada *ação-pesquisa*. Segundo Barbier (2004, p.42), esse tipo representa pesquisas utilizadas e concebidas como meio de favorecer mudanças intencionais, decididas pelo pesquisador, que intervém de modo quase militante no processo, em função de uma mudança cujos fins ele define como a estratégia. O autor afirma que a mudança visada não é imposta de fora pelos pesquisadores, mas resulta de uma atividade de pesquisa na qual os atores se debruçam sobre eles mesmos.

O uso da *ação-pesquisa* traz benefícios à formação dos professores e se ajusta aos nossos propósitos. De fato, na nossa pesquisa, escolhemos o tema e propusemos a construção de uma seqüência didática para o ensino e aprendizagem de função destinada a uma classe de oitava série do ensino fundamental. Após esse primeiro impulso, os professores se envolvem com a proposta.

Para analisar o trabalho dos participantes de uma pesquisa-ação, Fiorentini (2004, p.50) propõe utilizar a expressão grupo cooperativo quando eles se ajudam mutuamente, executando tarefas que nem sempre resultam de uma negociação conjunta. As relações entre os participantes do grupo podem ser desiguais ou hierárquicas. O autor entende que a expressão grupo colaborativo se refere às situações em que os participantes: aderem ao grupo de maneira espontânea, trabalham e se apóiam mutuamente para alcançar objetivos comuns, negociados coletivamente.

Um grupo de pessoas, provenientes de diferentes ambientes culturais, com visões distintas sobre conceitos matemáticos e sobre o que é ensinar matemática ou como ela deve ser ensinada, pode querer compartilhar problemas, experiências e objetivos comuns. Para o autor, o que de fato importa é que, em um grupo verdadeiramente colaborativo, todos assumem a responsabilidade de cumprir e fazer cumprir os acordos do grupo, tendo em vista os objetivos comuns. Dessa forma, não podem existir relações hierárquicas entre as pessoas do grupo.

Além disso, o autor enfatiza que muitos estudos brasileiros têm mostrado ser o apoio mútuo - que pode ser um intelectual, técnico ou afetivo - fundamental para o sucesso e a sobrevivência de um ambiente colaborativo. Também o respeito entre os participantes é um ingrediente indispensável para tornar o ambiente aberto à crítica construtiva e à reflexão.

Sobre o apoio que a universidade e os acadêmicos oferecem aos professores, destacamos as palavras de Fiorentini (2004, p.58), pois, como veremos mais à frente, elas dizem respeito ao nosso próprio trabalho:

> Além de conhecimentos teórico-científicos, os acadêmicos têm colaborado com os professores escolares no fornecimento de material didático, na sugestão de textos e estudos e, principalmente, na assessoria a projetos de elaboração de propostas e materiais de ensino. (FIORENTINI, 2004, p.58).

O autor ainda nos chama a atenção para o fato de que, à medida que o grupo colaborativo vai se consolidando, os professores tornam-se mais autônomos e essa ajuda teórico-metodológica dos acadêmicos fica sensivelmente reduzida.

Destacamos dois trabalhos recentes que mostram a importância do trabalho cooperativo / colaborativo, que foram apresentados na 27ª Reunião Anual da ANPED, em 2004 (FERREIRA, 2004) (LOPES, 2004).

Lopes (2004) observou, durante três anos letivos, os professores de educação infantil de uma escola particular. Adotando a perspectiva freireana de professor reflexivo, a pesquisadora se propôs investigar as contribuições que o estudo, a vivência e a reflexão sobre conceitos de estatística e probabilidade podem trazer para a vida profissional e a prática pedagógica desses docentes.

A autora conclui afirmando que a pesquisa de formação continuada de professores mostrou que o trabalho colaborativo permitiu-lhes construir conhecimentos profissionais conjuntamente, aprimorando sua prática pedagógica, ampliando sua autonomia e processo reflexivo. As educadoras produziram conhecimentos profissionais de maneira consistente e criativa, contribuindo com a área de pesquisa dessa temática.

Ferreira (2004), por sua vez, focaliza o professor de Matemática e seu desenvolvimento profissional. Fundamenta-se na *metacognição* – processo que envolve tomada de consciência e compreensão dos próprios saberes e práticas, a reflexão e a auto-regulação da própria aprendizagem e prática. Segundo a pesquisadora, esse processo é permeado pelo contexto sócio-cultural no qual o professor está inserido.

A proposta constituiu um grupo colaborativo formado por quatro professores de Matemática do ensino fundamental e médio que lecionam em escolas públicas. A dinâmica envolveu: o estudo de conteúdo matemático; a vivência e a elaboração de diferentes alternativas metodológicas para o desenvolvimento do conteúdo em sala de aula, considerando não só as experiências trazidas pelos professores, bem como da pesquisadora.

Analisando o caminho percorrido pelos professores ao longo de um ano, Ferreira (2004) verificou que o grupo percorreu o caminho da cooperação à colaboração. Uma atividade em especial, uma investigação dos conhecimentos dos alunos sobre frações, desenvolvida durante quatro meses, exerceu grande influência sobre o processo de constituição do grupo de trabalho colaborativo.

A pesquisadora coloca em evidência que o desenvolvimento dos processos metacognitivos do professor é determinante no seu processo de desenvolvimento profissional e que o aspecto social e afetivo da metacognição se revelou de modo surpreendente.

Na PUC-SP, houve o projeto do Centro das Ciências Exatas e Tecnologia, denominado *Estudo de Fenômenos de Ensino e Aprendizagem da Geometria*, inserido na linha de pesquisa A Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores. O seu objetivo foi investigar os problemas relativos ao ensino e aprendizagem de geometria pelos alunos de quinta série até oitava série.

O projeto envolveu professores-pesquisadores de graduação e pós-graduação, alunos do programa de pós-graduação em Educação Matemática e professores da rede estadual de ensino fundamental. Estes últimos atuam essencialmente em escolas de Caieiras, Guarulhos e da região central do município de São Paulo.

A integração, no mesmo projeto, de pesquisadores e professores de ensino fundamental teve como objetivo despertar a atenções desses professores da rede pública para a necessidade de um trabalho reflexivo nas suas ações pedagógicas, levando em consideração algumas pesquisas inerentes ao ensino e a aprendizagem de Matemática. Além disso, visava a contribuir com a formação de um profissional crítico, participativo e competente para atuar na sala de aula, proporcionando-lhe condições de não ser mais um professor executor de tarefas, procedimentos e técnicas.

O projeto seguinte, no qual nossa pesquisa está inserida, denomina-se O Pensamento Matemático - Formação de um núcleo de ensino e aprendizagem e de pesquisa, que tem quatro linhas de pesquisa: Geometria, Pensamento Algébrico, Pensamento Numérico e Tratamento da Informação. Seus temas transversais são: formação continuada de professores, alunos e educação a distância.

Após essa breve exposição de termos, dos aspectos positivos e dos benefícios trazidos pelo trabalho cooperativo / colaborativo no desenvolvimento profissional de professores de Matemática, apresentamos as especificidades e o detalhamento dos passos na nossa pesquisa.

1.5.1. A ação-pesquisa

A nossa pesquisa é uma ação-pesquisa, que pode ser caracterizada da seguinte maneira: a participação dos professores no grupo foi voluntária; houve consenso e disposição do grupo em preparar uma seqüência de atividades para introduzir o conceito de função em uma oitava série do ensino fundamental; o pesquisador desempenhou um papel ativo no equacionamento dos problemas encontrados, discutindo nos grupos ou, mais coletivamente, as questões que foram surgindo sobre conteúdos matemáticos, sobre as atividades propostas da seqüência, sobre sua organização e aplicação na sala de aula; o pesquisador socializou as produções escritas dos professores e os acompanhou na sala de aula, observando a aplicação da seqüência de ensino; procurou-se estabelecer um clima de confiança e de respeito, valorizando os saberes docentes à medida que emergiam. Necessárias reformulações, ampliações e questionamentos sobre esses saberes, tanto matemáticos quanto pedagógicos, foram encaminhados e discutidos.

1.5.2. Procedimentos iniciais

Resumidamente, os procedimentos iniciais para o desenvolvimento da pesquisa foram: apresentação da proposta de trabalho; apresentação de dois questionários, que foram respondidos pelos participantes; confecção de mapas conceituais; organização dos grupos de professores envolvidos com a pesquisa a fim de desenvolverem uma seqüência para o ensino e aprendizagem de função, para uma oitava série de uma escola pública; aplicação de uma seqüência - piloto; discussão sobre os fatos ocorridos durante o piloto; retomada do desenvolvimento da seqüência, intercalada com discussões sobre diversos conceitos matemáticos; aplicação da seqüência de ensino em uma escola da rede pública do Estado de São Paulo; discussão dos fatos ocorridos na sala de aula.

A seguir, apresentamos cada um desses procedimentos iniciais.

No dia 7 de maio de 2004, após a apresentação do projeto, os professores responderam o Questionário I (veja APÊNDICE B), com o objetivo de obter uma caracterização dos participantes na formação continuada O Pensamento Matemático - Formação de um núcleo de ensino e aprendizagem e de pesquisa, mais especificamente - o pensamento algébrico.

Na semana seguinte, no dia 14 de maio, a partir da palavra-chave *função* escrita no centro da lousa, os professores falaram outras palavras, até a exaustão, e depois disso, organizaram-se em grupos, espontaneamente. Cada grupo construiu um mapa conceitual e o apresentou aos demais participantes.

No dia 21 de maio, os professores responderam o Questionário II (veja APÊNDICE B), trabalhando em pequenos grupos.

Do dia 28 de maio até o dia 2 de julho, os professores reuniram-se em pequenos grupos e discutiram a confecção da seqüência de ensino. Um dos grupos, formado por três professores de uma mesma escola pública, manifestou o desejo de aplicar um experimento - piloto em uma das oitavas séries, na primeira semana do mês de julho. Tomaram a iniciativa de conversar com a diretora da escola e com alunos de uma das oitavas séries, obtendo a aquiescência de todos.

Para não tolher a autonomia desse grupo, concordamos com a proposta. Além disso, de maneira espontânea, alguns professores também se interessaram em participar como observadores, uma vez que, durante a primeira semana de julho, teriam um tempo disponível para esse trabalho. As atividades do experimento - piloto se encontram no ANEXO A.

No dia 6 de julho, compareceram à escola dez alunos, que foram organizados em duplas. Para cada dupla, foram alocados dois observadores, um deles professor participante do projeto e o outro observador do projeto. Um dos professores colocou-se no papel de formador. Observamos o formador e o andamento dos trabalhos.

Reorganizamos o trabalho coletivo, no início do mês de agosto, por causa da diminuição do número de professores participantes, que se estabilizou com cinco professores e duas estudantes.

Reiniciamos com uma discussão sobre os fatos ocorridos durante o experimento - piloto, a experiência de atuar como observador, as reflexões que ocorreram durante as férias, ao transcrever as observações feitas, as dificuldades dos alunos, as dificuldades do formador.

A partir da segunda quinzena de agosto, foram discutidas coletivamente questões levantadas pelos próprios professores: leitura e interpretação de gráficos; tabelas e fórmulas; domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função; a identificação, em um problema, da variável independente e da variável dependente; a construção do significado para o ostensivo f em funções cuja variável independente não é o tempo *t*, mas uma outra variável *x*. Completaram a lista, discussões sobre proporcionalidade, taxa de variação, equação da reta, alinhamento (ou não) de pontos em um gráfico, função linear, função afim, construção de um gráfico a partir de outro por translação.

Apresentamos um breve histórico do conceito de função e estimulamos os participantes a ler, depois de uma apresentação, as sugestões contidas nos PCNs de Matemática sobre ensino e aprendizagem de variáveis e de funções.

Socializamos as contribuições feitas pelos grupos durante o mês de junho, acrescentamos outras sugestões, enviando-as por *e-mail* na primeira semana de agosto. Também distribuímos cópias xerográficas, pois testemunhamos as dificuldades econômicas dos professores da rede pública estadual de São Paulo: nem todos possuem computador em casa; dentre aqueles que o possuem, há aqueles que estão com a máquina quebrada e não têm recursos para a sua manutenção; outros não possuem conta de *e-mail*. Além disso, muitas vezes o uso do computador na escola é restrito e só é possível acessar a Internet na sala da secretaria ou da diretoria da escola.

Ao longo do mês de setembro, emergiu uma nova seqüência, agora uma criação coletiva, composta por atividades: escolhidas e modificadas dentre aquelas testadas no experimento-piloto; propostas pelos outros grupos, discutidas e eventualmente modificadas; propostas pelo pesquisador, discutidas e aceitas coletivamente.

Para a aplicação na sala de aula, outras decisões tiveram que ser tomadas: ordem das atividades, quantidade de atividades a serem propostas para cada aula dupla, seleção dos materiais de apoio que deveriam ser levados para a sala de aula, número de aulas necessárias. A seqüência didática encontra-se no ANEXO B.

1.5.3. Coleta de dados

Os encontros com os professores ocorreram nos meses de maio, junho, agosto, setembro e outubro de 2004, em uma universidade filantrópica, sediada na cidade de São Paulo, na sala denominada Laboratório sete (Lab 7), no período da manhã, das oito às onze horas. Um experimento - piloto foi aplicado no dia 6 de julho de 2004, das 10:00 h às 12:00 h, em uma escola estadual localizada na Região Metropolitana de São Paulo, onde retornamos para a aplicação da seqüência de ensino no mês de outubro, nos dias: 5, 6, 8, 13, 19 e 20. No mínimo, três observadores do projeto sempre estiveram presentes e fizeram suas anotações. Os diálogos foram gravados e alguns momentos foram filmados, outros fotografados.

Além disso, foram arrolados: questionários respondidos pelos professores, mapas conceituais criados pelos grupos, cópias das atividades propostas pelos professores, cópias dos protocolos dos alunos durante o experimento - piloto, observações feitas pelos professores-observadores durante a aplicação do piloto, cópias dos protocolos elaborados pelos alunos durante a aplicação da seqüência, mensagens enviadas pelos professores por *e-mail* e folhas de *flip-chart* elaborados pelo professores formadores. Acrescentamos o nosso diário pessoal de observação.

1.5.3.1. Questionários

No dia 7 de maio, os professores responderam o Questionário I, a fim de podermos obter uma caracterização dos participantes. Para tal fim, pedimos: nome da instituição de ensino superior onde obteve a graduação; início e término do curso; nome das escolas onde leciona; tempo de exercício no magistério no ensino fundamental e no ensino médio; utilização ou não de livro didático; nome da(s) coleção (ões) utilizadas.

A seguir, propusemos algumas questões para obter um panorama mínimo da vivência e da importância que o professor dá ao tema:

a) Ministrou aulas sobre funções ?

b) Escreva, com suas palavras, o que entende por função.

c) No seu entender, qual é a importância do estudo desse tema?

d) Teve a oportunidade de ler algum texto sobre a história do conceito de função?

e) Conhece, nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, os textos relativos ao tema?

Por último, deixamos um espaço para que o professor pudesse escrever livremente suas observações, seus comentários. As respostas se encontram na seção denominada Caracterização dos docentes.

O Questionário II, que se encontra no APÊNDICE B, foi aplicado aos professores no dia 21 de maio, e foi respondido em pequenos grupos. O tempo não foi suficiente e, por isso, ele foi concluído no dia 28 de maio. O objetivo geral desse questionário era diagnosticar o saber / fazer dos professores sobre tabelas, gráficos, fórmulas, expressões verbais.

1.5.3.2. Mapas conceituais

Um mapa conceitual é um instrumento para se obter a visualização da estrutura conceitual de uma fonte de conhecimentos. Mais precisamente:

> Mapas conceituais devem ser entendidos como diagramas bidimensionais que procuram mostrar conceitos hierarquicamente organizados e as relações entre esses conceitos de uma fonte de conhecimentos e derivam sua existência da própria estrutura da fonte. (MOREIRA e BUCHWEITZ, 1987, p.11).

Nós utilizamos mapas conceituais para que os professores pudessem estruturar palavras que viessem à mente relacionadas com a palavra-chave *função* dada *a priori*. Como os mapas conceituais são esquemas que as pessoas estruturam a partir de um conjunto de conceitos, duas pessoas (ou dois grupos) não podem elaborar um mesmo mapa quando se deparam com o mesmo conjunto de palavras. Tendo em vista que o mapeamento conceitual é uma técnica muito flexível, que pode ser usada em diversas situações, para diferentes finalidades (instrumento de ensino, instrumento de avaliação da aprendizagem, instrumento para a análise e planejamento do currículo), nós o utilizamos como uma atividade criativa.

Novak e Gowin (1984, p.20) sustentam que aprendizagem é pessoal e não pode ser compartilhada; todavia é importante lembrar que significados podem ser compartilhados, discutidos, negociados e resolvidos de comum acordo, de modo que a construção colaborativa de mapas conceituais representa uma estratégia disponível, capaz de promover a integração de idéias por meio de ações colaborativas e cooperativas, respeitando as individualidades, com vistas ao fortalecimento do coletivo. Isso significa a valorização da inteligência coletiva.

A teoria que está por trás do mapeamento conceitual é a teoria cognitiva de aprendizagem de David Ausubel, mas a técnica foi desenvolvida em meados da década de setenta por Joseph Novak e seus colaboradores na Universidade de Cornell, nos Estados Unidos.

1.5.3.3. Descrição e análise dos mapas conceituais

No dia 14 de maio de 2004, os professores presentes dedicaram-se à confecção de mapas conceituais relativos ao conceito de função. Após breves explicações sobre o assunto, escrevemos a palavra Função no centro da lousa e, à medida que surgiam as palavras proferidas pelos professores, elas foram sendo registradas, de maneira dispersa até o momento em que um dos presentes, propôs que se encerrassem as atividades. A maioria dos presentes já tinha participado da confecção de mapas conceituais, em projetos anteriores.

Os professores se organizaram em quatro grupos de três pessoas cada um; cada grupo confeccionou seu mapa, que foi apresentado aos demais, no final dos trabalhos, ocasionando um momento de descontração e de integração entre os participantes. A seguir, relatamos como cada um dos quatro grupos construiu o seu mapa.

Grupo I

Esse grupo separou inicialmente, as palavras em três categorias: sentimento, conteúdo e disciplina. Após discutirem sobre a necessidade de criar mais categorias, um dos componentes do grupo apresentou o esquema descrito abaixo, que foi aceito pelos dois outros professores:

Indivíduo $\Rightarrow$ Espaço $\Rightarrow$ Disciplinas $\Rightarrow$ Conteúdo $\Rightarrow$ Recursos $\Rightarrow$ Sentimentos.

A seguir, mostramos o resultado final do agrupamento de palavras, expressões e símbolos em cada uma das categorias: indivíduo, espaço, disciplinas, conteúdo, recursos e sentimentos. As explicações dadas pelos professores: as disciplinas têm conteúdos e precisam de recursos, tais como dados, informações, pesquisa e leitura.

A frase formulada pelo grupo foi: “A função do ser humano é individualizar-se dentro de um espaço com as disciplinas e conteúdos, usando recursos e expressando sentimentos.” (GRUPO I, 14/05/2004). Observa-se que a palavra função foi utilizada no sentido de papel, um dos seus significados usuais. Já a acepção matemática do termo está implícita em Conteúdo. Se nos pautarmos pela interpretação de Moreira e Buchweitz (1987, p.27), concluiremos que, nesse mapa, há uma hierarquia, onde indivíduo é o mais geral, seguido da categoria espaço e sentimento é a categoria mais específica. Podemos observar que este mapa não apresenta integração entre as categorias.

A Figura 10 - Mapa conceitual do grupo I mostra o mapa confeccionado por esse grupo de professores, onde não aparece a palavra função.

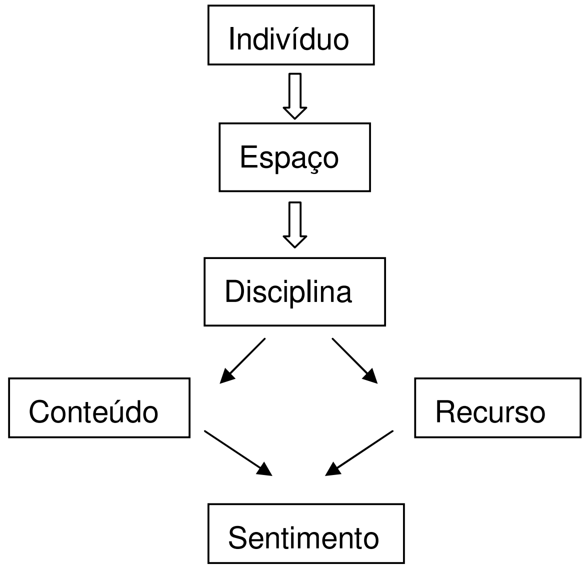


Figura 10 - Mapa conceitual do grupo I

Grupo II

A primeira categoria é Emoções. A seguir, o grupo pensa em uma categoria para coisas que atrapalham, interrompem ou bloqueiam o processo de aprendizagem; em seguida, nomeiam-na, primeiro, de atrapalha, depois de Obstáculos. Discutem um nome adequado para designar o que denominam de "coisas de Matemática": termos matemáticos, membros que estruturam a Matemática, estrutura, sala de aula, vida acadêmica ou baú de conhecimentos e propõe finalmente, Escola. A quarta categoria Aplicação (o que entra na vida), depois renomeada de Vivência. No final, fixam-se as seguintes categorias: Vivência, Escola, Emoções, Função e Obstáculos. A Figura 11 mostra o mapa conceitual desse grupo.

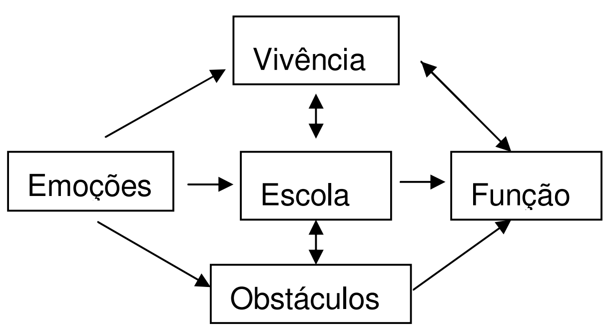


Figura 11- Mapa conceitual elaborado pelo grupo II

Nesse mapa, o conceito central é a escola. A simetria pode ser observada e a categoria Emoções se opõe à categoria Função. A integração aparece também na fala do professor, ao explicar que todo caminho tem dois sentidos:

> Separamos em quatro categorias: Vivência, Escola, Obstáculo e Emoções. Pensamos no esquema que o aluno traz, a vivência dele. Vem para a escola, onde surgem alguns obstáculos e tudo é um caminho de ida e volta. Isso gera emoções e função. A escola está no centro porque a função depende da escola. (GRUPO II, 14/05/2004).

Esse grupo elaborou duas sentenças e escolhe a segunda para a apresentação oral:

> 1ª) O aluno por meio de sua vivência já conhece a função, porém é necessário que a Escola institucionalize este conceito enfrentando vários obstáculos e gerando diversas emoções. 2ª) No exercício de nossa vivência, buscamos crescer sempre. Além da nossa família, a Escola também nos edifica e nos torna capazes de controlar as emoções e superar os obstáculos sempre um em função do outro. (GRUPO II, 14/05/2004, grifo dos autores)

O conceito matemático *função* aparece na primeira sentença, como algo já vivenciado pelo aluno fora da escola, ao se deparar com preço, velocidade, pressão, vazão, temperatura, interpretação de gráficos. Cabe à escola organizar esses conhecimentos e superar as dificuldades. “Função é o resultado, é o produto final”, diz um professor. Na segunda sentença, a palavra *função* é utilizada com o significado de a serviço do outro, perdendo a conotação matemática.

Grupo III

A visão prática para o conceito de função aparece na frase elaborada por esse grupo: “Explicar o uso de funções através das ferramentas e elementos envolvidos, sendo que nas ferramentas teríamos tipos de funções, mostrando suas aplicações, nas quais emitiremos emoções com o fim de demonstrar as funções aos alunos.” (GRUPO III, 14/05/2004).

A Figura 12 mostra o mapa conceitual elaborado por esse grupo.

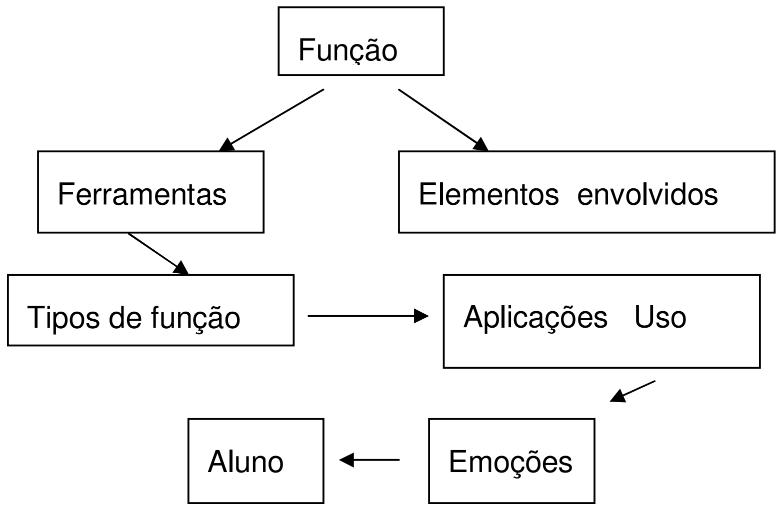


Figura 12- Mapa conceitual elaborado pelo grupo III

Grupo IV

Esse grupo começou com duas grandes categorias: Razão e Sentimentos. A seguir, propôs as categorias Sentimentos, Vida e Técnica, esta última renomeada de Linguagem.

Para esses professores, no processo de aprendizagem, o centro é o aluno, de quem o professor deve levar em conta a vida e os sentimentos; a linguagem entra como fio condutor, os sentimentos permeiam o ensinamento; a linguagem inclui todos os conceitos sobre função; os sentimentos estão embutidos na vida; é preciso se apoderar da linguagem do cotidano do aluno e traduzir para uma linguagem específica.

A Figura 13 mostra o mapa elaborado por esse grupo, onde se observa que a categoria Linguagem não está presente, mas é criada outra denominada Escola.

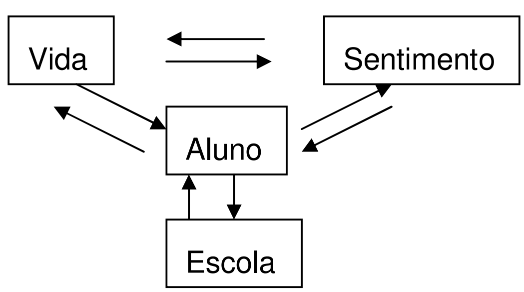


Figura 13- Mapa conceitual elaborado pelo grupo IV

Assim, desaparece *função* como conceito matemático do mapa, uma vez que todos os elementos matemáticos foram colocados na categoria Linguagem. O aluno é o centro de um tripé constituído pelas categorias Vida, Sentimento e Escola.

Os professores elaboraram a seguinte frase: "A escola deve levar em conta a vida do aluno, seus sentimentos e inserir a linguagem e os conceitos matemáticos, ou seja, trabalhar em FUNÇÃO do aluno" (GRUPO IV, 14/05/2004).

Há uma ruptura entre o mapa e a frase, a categoria Linguagem é retomada na frase, mas a palavra função é utilizada para dizer que a escola está a serviço do aluno, um discurso que tem se tornado um lugar comum, dentro da escola. Para esse grupo, parece que o aluno não traz conhecimentos matemáticos para a aula.

Finalizando, podemos perceber que, dos quatro mapas, somente dois deles apresentam explicitamente *função* como conceito matemático. No próximo capítulo, faremos uma outra análise das palavras mencionadas pelos professores.

1.5.4. Caracterizações do contexto da pesquisa

A seguir, caracterizaremos a escola onde foi aplicada a seqüência de ensino, os professores e as duas estudantes que participaram da formação, os alunos que participaram do piloto.

1.5.4.1. Caracterização da escola

A escola pública onde realizamos a aplicação da seqüência de ensino pertence à Rede Estadual de Ensino do Estado de São Paulo e está localizada na região central de um dos municípios da Grande São Paulo, distante 40 km do centro de São Paulo. O conjunto dos indicadores de escolaridade, em 2002, posicionou o município num patamar inferior àquele observado para o Estado; apesar da expansão na cobertura oferecida para o ensino fundamental, ele ainda não é acessível para 1/3 dos menores de 17 anos[11]. Além disso, o município ocupava, em 2002, a 498ª posição no *ranking* de escolaridade no Estado de São Paulo.

Por estar localizada no bairro central, a escola recebe alunos de outros bairros, inclusive da zona rural, devido às facilidades de acesso. Ela funciona desde 1976 e

---

[11] Dados obtidos no SEADE, Sistema Estadual de Análise de Dados www.seade.gov.br Acesso 25/06/2006

seu nome é uma homenagem a um professor da cidade. Começou pequena e, após ampliações, atualmente possui dezoito salas de aula, que são utilizadas nos três períodos: manhã, tarde e noite. Aproximadamente 2400 alunos, estudaram nessa escola em 2004, segundo informações prestadas pela sua diretora.

A atual diretora, que ocupa o cargo desde 2000, tem propiciado condições para a implantação de projetos de educação continuada de professores de Matemática com uma equipe de pesquisadores da PUC-SP desde o ano de 2003. Lembramos que um dos jornais locais noticiou o início das atividades de pesquisa nessa escola.

A diretora colaborou com as seguintes iniciativas: cedeu a sala de informática para as reuniões semanais, que ocorriam no período da manhã, às sextas-feiras; organizou o horário de modo que alguns professores de Matemática pudessem participar das reuniões, utilizando as horas de trabalho pedagógico e permitiu a presença de professores de outras escolas nas reuniões. Outros professores também colaboraram, cedendo suas aulas, possibilitando a aplicação de seqüências de ensino em classes do ensino fundamental. Apesar de todo o empenho da diretora, somente três professores dessa escola participaram de maneira contínua das reuniões.

Ao longo da nossa pesquisa, as reuniões aconteceram nas dependências da universidade. Somente no dia da aplicação do experimento piloto e nas semanas durante as quais houve a aplicação da seqüência de ensino, estivemos na referida escola.

1.5.4.2. Caracterização dos professores

Julgamos necessário esclarecer a expressão “Licenciatura Especial em Matemática”, graduação obtida por alguns professores do projeto. Muitos professores da rede pública de Ensino Estadual, portadores de diploma de licenciatura curta, puderam terminar seus estudos, obtendo um diploma de Licenciatura Plena em Matemática, no período 1997-1999, devido a uma parceria da PUC-SP com a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Esse curso denominou-se Licenciatura Especial em Matemática. Alguns dos professores participantes da nossa pesquisa foram alunos dessa licenciatura. Todos os nomes são fictícios, para respeitar a privacidade dos participantes.

Enfatizamos que eles não receberam nenhuma ajuda de custo. Somente os professores provenientes da escola caracterizada acima utilizaram as suas Horas de Trabalho Pedagógico Coletivo (HTPCs) para participarem das reuniões; os outros tiveram que deixar de trabalhar no período das reuniões.

César leciona em duas escolas, sendo uma particular, tem experiência de dois anos no ensino fundamental e de cinco anos no médio. Esse professor nos relatou, de maneira espontânea e expôs suas memórias desde a infância e suas reflexões em uma mensagem enviada por *e-mail*, recebida no dia 12 de dezembro de 2004.

Ele ainda hoje se lembra dos nomes das professoras das quatro primeiras séries do ensino fundamental. Afirma, espantado, que não tem nenhuma lembrança das aulas de Matemática. Começou a trabalhar aos treze anos, como *office-boy*, em uma loja de automóveis. Fez um curso técnico em eletrônica, estudando à noite, em uma escola bem conceituada entre as grandes empresas. São desse período suas lembranças sobre gráficos, funções, escalas, geometria, leituras em equipamentos. Considera como lembrança marcante em Matemática a equação da reta.

No seu relato, o professor destaca que só percebeu o que realmente tinha acontecido em termos de aprendizagem matemática após o seu ingresso no curso de Engenharia Elétrica, em uma universidade particular. Dificuldades financeiras e dependências em algumas disciplinas o fizeram desistir do curso.

Na época em que prestava serviços ao Metrô, César percebeu o seu potencial como professor e a posterior melhora nas suas condições financeiras o motivou a prestar novamente o vestibular em uma universidade particular para o curso de Ciências e Matemática. Começou a conscientizar-se da sua própria fragmentação de conteúdos durante esse curso.

Sua insatisfação o levou a buscar novos caminhos e, como nessa época já lecionava na rede pública estadual, pôde cursar a Licenciatura Especial em Matemática, na PUC-SP, entre 1997 e 1999. Terminada essa etapa, César sentiu a necessidade de participar de sucessivos projetos de formação continuada, pois tinha consciência das próprias deficiências.

César motivou Rosa, sua colega de trabalho na escola particular, a se engajar nos projetos de formação continuada, o que ocorreu em fevereiro de 2004.

Rosa estudou em uma universidade particular entre 1995 e 1997. Tem seis anos de experiência no ensino fundamental e sete anos no ensino médio, no qual ministra aulas de Física. Trabalha em três escolas, de redes diferentes: municipal, estadual e particular. Ministra um total de sessenta aulas por semana e sua única manhã livre é utilizada para participar das reuniões. Essa professora tem interesse e consciência de que precisa continuar sua formação, mas vive o conflito entre deixar uma escola e pagar as contas, pois ajuda no sustento dos pais.

Marcos fez curso superior em Guarulhos, entre 1992 e 1994. No início de 2004, ministrava aulas somente em uma escola estadual, mas, com a aprovação no último Concurso de Ingresso ao Magistério, escolheu e efetivou-se na escola estadual onde foi aplicada a seqüência de ensino, acumulando aulas em duas escolas. Tem três anos de experiência no ensino fundamental e oito anos no ensino médio.

Margarida começou seus estudos em uma universidade particular e completou seus estudos de graduação na PUC-SP, cursando a Licenciatura Especial em Matemática, no período de 1997 a 1999 e, desde então, tem participado dos projetos de formação continuada de professores na PUC-SP. Ela tem oito anos de experiência, tanto no ensino fundamental como no ensino médio.

Margarida trabalha na escola onde foi aplicada a seqüência de ensino e tem o mérito de ter conseguido a adesão e o envolvimento da diretora. Além disso, procurou motivar outros colegas da mesma escola para participarem de projetos de educação continuada. Ministra aulas nas classes de Ensino de Jovens e Adultos (EJA), formada por alunos com histórico de repetências, outros com problemas sérios de saúde, como hidrocefalia ou discalculia.

Sempre que convocada, participa de reuniões marcadas pelos órgãos oficiais para receber material pronto e também treinamento para trabalhar com eles nas classes de EJA. Esse é o único motivo das suas ausências.

A situação de Margarida é peculiar porque, de um lado, ela recebe estímulos para desenvolver a autonomia e reflexão participando de projetos na universidade; de outro lado, é obrigada, pelo poder público a passar por treinamentos, para garantir o seu lugar na escola.

Essa professora, que não tem condução própria, percorre três cidades: reside em uma, trabalha em outra, participa de formação continuada em uma terceira.

Acrescentamos uma quarta cidade, onde acompanha, por curtos períodos, a Teia do Saber. Sua efetivação na Rede Pública Estadual de Ensino ocorreu em março de 2005, após o termino do nosso projeto, na mesma cidade onde reside.

Pérola, colega de Margarida, prestou duas vezes concurso público estadual para ingresso na carreira do magistério e foi aprovada nas duas vezes, o que a levou a assumir dois cargos na mesma escola pública, o segundo a partir de agosto de 2004. Essa professora, muito atuante desde 2002, quando começou a participar dos projetos de formação continuada, precisou deixar o grupo ao tomar posse do seu segundo cargo, pois a sobrecarga de trabalho, tanto na escola, quanto em casa, cuidando do filho pequeno, inviabilizou qualquer outra atividade.

Enfatizamos que essa professora conseguiu habilmente convencer os seus alunos da oitava série da manhã a comparecer na escola, no dia 6 de julho, início das férias, para trabalhar em grupo na resolução de atividades sobre funções. Tais atividades foram planejadas pelos professores da própria escola e que participam do projeto. Além dessas conquistas, apresentou o perfil psicológico dos alunos presentes no experimento piloto, demonstrando ter conhecimento sobre eles.

Túlio possui duas graduações: Ciências (com complementação em Matemática) e Economia. Estudou em faculdades particulares e leciona em duas escolas públicas. Tem dois anos de experiência no ensino fundamental e cinco anos no ensino médio, tendo ministrado aulas de Física e Química. Começou a participar das reuniões em maio, mas precisou deixar o projeto em agosto, pois perdeu suas aulas com a efetivação dos professores aprovados em um Concurso Público Estadual, sendo obrigado a fazer nova escolha de aulas. Com isso, deixou de ter a manhã livre para participar da formação.

Flávio fez sua graduação em Guarulhos no período de 1972-1974. Trabalhou quase trinta anos no setor bancário e exerceu atividades gerenciais. Desempregado, sem conseguir uma nova colocação no mercado de trabalho, começou a lecionar em 2002, trabalhando em duas escolas públicas. Não consegue se relacionar com os alunos, considera-se desvalorizado como professor. Muitos fatores devem ter contribuído para o seu afastamento, que ocorreu em agosto, apesar de ter afirmado, uma vez, que se sentia feliz por estar participando do projeto.

Juliano fez sua graduação em Guarulhos entre 1973 e 1976. Trabalhou em vendas até se aposentar. Retornou ao trabalho há cinco anos, quando começou a lecionar em uma escola pública e parece gostar da nova profissão. Participa, desde 2001, dos projetos de formação continuada de professores oferecidos pela PUC-SP.

Bruna é estudante e começou seu curso superior, licenciatura em Matemática, em Guarulhos, em 2003. Por falta de recursos, ficou sem estudar durante vários anos, após ter cursado as quatro primeiras séries do ensino fundamental no interior do Estado de São Paulo. Retomou os estudos em São Paulo, já adulta mas, por causa da idade, foi envolvida em programas de aceleração da quinta até a oitava série, depois cursou o supletivo de segundo grau. Comenta que não está conseguindo acompanhar, de forma satisfatória, o curso de licenciatura em Matemática, além de apresentar dificuldades em português.

Ela foi aluna da professora Margarida, que a motivou a participar do projeto. Assume publicamente suas fraquezas, não tem medo de fazer perguntas, mesmo que sejam elementares.

Nina é estudante do primeiro ano da licenciatura em Matemática da USP e foi motivada, pelo seu antigo professor César a se engajar no projeto. Deixou de freqüentar as reuniões durante algumas semanas, pois não sabia se estava no caminho certo, talvez porque estivesse enfrentando as primeiras dificuldades na universidade.

A inclusão de duas estudantes, Nina e Bruna, deve-se ao fato de acreditarmos que o envolvimento em projetos poderá enriquecer sua formação inicial. Além disso, não houve nenhuma objeção por parte dos professores, uma vez que foram apresentadas como ex-alunas dos professores César e Margarida, respectivamente.

Plínio fez sua graduação em uma faculdade particular, entre 1999 e 2001 e tem quatro anos de experiência em escola pública. Ingressou no projeto dia 28 de maio, trazido por Rosa, mas a perda das aulas em agosto, devido ao ingresso de professores aprovados em concurso, e as alterações em sua vida profissional inviabilizaram a continuidade de sua participação nas reuniões.

Hortência tem participado dos projetos de formação de professores desde 2000, mas falta muito, demonstrando não estar envolvida no projeto. As condições de trabalho adversas, relatadas diversas vezes durante as reuniões, podem estar influenciado a sua disposição de ser uma pessoa atuante.

Citamos cinco professores que passaram rapidamente pelo projeto: Toninho, Artur, Fábio, Cy e Eni. Os três primeiros têm um histórico de idas e vindas nos diversos projetos de formação; os afastamentos são justificados ou por causa do horário de trabalho, ou por causa do rodízio de carros.

Podemos perceber a heterogeneidade do grupo, quanto à idade, ao envolvimento, ao tempo de participação em projetos de formação continuada de professores, às experiências profissionais fora do magistério.

Salientamos que, excluindo a aluna que está fazendo o curso de Matemática na USP, os outros participantes estudaram em faculdades particulares, cujas licenciaturas têm a duração de três anos.

A seguir, caracterizaremos os professores, levando em consideração as respostas do Questionário I (veja APÊNDICE B), que foi aplicado aos participantes do projeto que, como acabamos de registrar, dividem-se entre professores formados e duas estudantes do primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática. Encontramos oito professores que ministram ou já ministraram aulas sobre função. Dentre eles, somente um sabe que os *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática* insistem na importância da leitura e interpretação de gráficos; outro professor afirmou ter lido alguma coisa sobre história da Matemática na Internet, em livros e em alguns cursos.

Nesse questionário, pede-se que o professor explique, com suas próprias palavras, o que entende por função, cujo objetivo é fazer uma primeira investigação sobre as concepções que emergem espontaneamente a respeito desse conceito. Pretendíamos também verificar o aparecimento de determinadas palavras ou expressões, tais como diagrama de flechas, fórmula, tabela e gráfico, ligadas às representações de função.

Seguem os textos escritos pelos professores que ministram ou ministraram aulas sobre funções, fielmente reproduzidos: 1) Expressão matemática que relaciona uma grandeza com outra, uma lei. Mostra que operações queremos fazer com os números para obter determinado resultado... Não consigo dar uma definição clara! 2) A relação entre duas grandezas onde para que se perceba uma delas deve existir ação de outra. 3) Duas grandezas que estão relacionadas. 4) Função é uma relação de x em y. 5) Quando obtemos um resultado não apenas de cálculos, mas até mesmo fenômenos, dizemos que foi uma conseqüência ou em função de alguma “coisa”, ou seja, depende de algo para obter um determinado resultado. É importante porque podemos fazer uma conexão com o cotidiano. Em Matemática relacionamos a função com uma máquina, o valor de x é a matéria prima e y é o produto final. 6) Função é um processo de transformação que uma determinada equação irá sofrer, devendo obedecer a uma regra ou lei. 7) É algo que faz com que sua ação resulta em outra (Ex: velocidade depende de espaço e tempo). Relação entre duas grandezas. 8) Quando procuramos encontrar um valor determinado em relação a outro valor.

Textos escritos pelos integrantes do grupo que ainda não ministraram aulas sobre função: 1) Maneira de resolver problemas algébricos (estudante). 2) Um elemento de um conjunto A está associado a um, somente um único elemento de B. 3) Demonstrações através de gráficos as relações entre grandezas.

A análise dos textos permitiu-nos verificar quais as concepções de função trazidas pelos professores. Observamos que conceituar função como relação entre grandezas aparece em cinco das respostas. Esse resultado é coerente com a profusão de exercícios que envolvem relação entre grandezas e apresentados nos livros didáticos. Já a concepção de função como máquina dada explicitamente é encontrada somente uma vez: ”[...] relacionamos a função com uma máquina, o valor de x é a matéria prima e y é o produto final.” A concepção de função como máquina dada de forma implícita é encontrada em duas respostas: “É algo que faz com que sua ação resulta em outra [...]” e “Função é um processo de transformação [...].” A concepção de função como fórmula algébrica aparece de maneira implícita em três respostas: “Quando procuramos encontrar um valor determinado em relação a outro valor”, “Quando obtemos um resultado não apenas de cálculos [...]” e “Mostra que operações queremos fazer com os números para obter determinado resultado.” A concepção de função como interdependência aparece explicitamente duas vezes: “[...] dizemos que foi uma conseqüência ou em função de alguma “coisa”, ou seja depende de algo para obter um determinado resultado” e “A relação entre duas grandezas onde para que se perceba uma delas deve existir ação de outra.” E implicitamente, uma vez: “Quando procuramos encontrar um valor determinado em relação a outro valor.” A concepção de função como uma correspondência entre conjuntos aparece explicitamente uma única vez, dada por um professor que ainda não teve a oportunidade de lecionar o tema: “Um elemento de um conjunto A está associado a um, somente um único elemento de B.”

As respostas dos professores mostram a mesma diversidade de concepções encontrada nos livros didáticos de oitava série, excluindo padrões de regularidade, que não foram mencionados nesse momento. Somente duas respostas indicam que a pessoa tem mais de uma concepção.

Note-se que uma sentença incompleta, como a enunciada na resposta 4: função é uma relação de x em y, poderia sugerir uma correspondência entre dois conjuntos, mas não necessariamente uma função.

Observamos que em uma das respostas surge uma confusão entre equação e função: “Função é um processo de transformação que uma determinada equação irá sofrer, devendo obedecer a uma regra ou lei.” Essa situação também foi observada por Zuffi, que comenta: “É comum nos professores investigados que eles pensem nas funções em termos de equações e desconhecidos a serem extraídos delas.” (ZUFFI, 1999, p.190).

A expressão “Maneira de resolver problemas algébricos” permite concluir a estudante que emitiu essa opinião tem uma concepção algébrica ligada à resolução de problemas, mas ela é muito vaga para conceituar função.

Notamos que a palavra *lei* aparece em dois textos, a palavra *gráfico* foi utilizada uma única vez e a palavra *tabela* não foi mencionada. A expressão - *diagrama de flechas*, ainda hoje utilizada em alguns livros didáticos, também não foi mencionada.

Para analisar as respostas, buscamos subsídios em Sfard (1992, p.64). O pensamento dessa autora permite-nos considerar que as respostas encontradas indicam que os professores têm uma concepção de função muito mais operacional que estrutural. A partir do questionário, os objetos familiares são as relações entre grandezas, as máquinas, o processo de transformação, a procura de um valor a partir de outro. Mas, somente uma investigação mais cuidadosa poderia indicar se o professor que apresentou a definição formal limitou-se a transcrever uma frase pronta, que se encontra nos livros, ou tem uma concepção estrutural.

Em seguida, apresentamos as respostas à questão: “No seu entender, qual é a importância do estudo desse tema?”

As respostas registradas a seguir mostram-nos que os oito professores que já ministram (ou ministraram) aulas sobre funções, consideram importante o estudo do tema. Vejamos: 1) Podemos explorar as diversas relações entre os conteúdos. Exemplo: analisar um gráfico e relacioná-lo com o cálculo algébrico. 2) Para compreensão de gráficos que mostram o movimento acontecer e o próprio estudo de variantes. Por exemplo, para entender a tarifa cobrada numa conta telefônica. 3) Poder conhecer e saber como funcionam certas coisas e entender que as pessoas não chegam a certos resultados por “mágicas’ e sim por conhecimento e desenvolvimento. 4) No meu entender, o estudo de funções é importante quando conseguimos relacioná-lo com as aplicações existentes em outras áreas. 5) O trabalho (importância) da relação geométrica com a algébrica explica situações que foram trabalhadas anteriormente as quais não “foi dado um significado.” 6) Importante por ser possível a sua relação com fatos corriqueiros do dia a dia e assim, criar interesse junto aos alunos. 7) Como função está relacionada em nossa vida no cotidiano, acredito que o estudo desse tema é fundamental. 8) Aprender mais.

Os outros professores que não têm experiência na sala de aula com o tema, consideram importante estudar função: “É importante principalmente para os alunos que desejam aprofundar seus conhecimentos em relação à Álgebra”; “Ao estudar este tema podemos fazer relações com o cotidiano.”

As respostas podem ser agrupadas em três blocos, que mostram a importância do assunto para os participantes do projeto: dentro da própria Matemática - seis respostas; para explicar fatos do cotidiano - quatro respostas; como aplicação em outras áreas do saber - uma resposta.

Apesar de alguns livros didáticos apresentarem um pequeno texto ressaltando a importância e utilização de funções em outras áreas do saber, tais como Física, Química, Biologia, Economia etc, parece que os professores não incorporam esse discurso.

As dificuldades dos professores na articulação dos registros de representação, relatadas por Even (1990, 1998) e Hitt (1998), os questionamentos sobre proporção e linearidade relatados em Comin (2000), as dificuldades dos professores com proporção e escalas mostrados em Monteiro e Selva (2001) e o desconhecimento da demonstração de que o gráfico de uma função afim é uma reta, fato relatado por Fonte (2002), serviram para a formulação das atividades que se encontram no Questionário II (veja APÊNDICE B). Mais tarde, elas serão discutidas como parte da formação.

As duas primeiras questões têm o objetivo de trabalhar tabelas e estimular um debate sobre funções definidas por mais e uma sentença.

Os problemas enfrentados pelos professores em manipular o ostensivo f, em aceitar uma função definida por mais de uma sentença podem ser vistos no debate relatado no próximo capítulo, que ocorreu após a aplicação desse questionário.

Na terceira questão pedimos, a partir de um texto, que se elaborasse uma expressão algébrica e se construísse um gráfico. As grandezas em questão são diretamente proporcionais. Na análise *a priori* consideramos que os professores não deveriam encontrar dificuldades para resolver essa questão, uma vez que a situação proposta é simples, se considerarmos água do mar uma solução homogênea: “Um litro de água do mar contém 25 g de sal.”

Excluindo uma resposta em branco e um gráfico formado somente por dez pontos alinhados, todos os outros participantes conseguiram construir o gráfico corretamente. Ao lado de algumas em branco, encontramos as seguintes expressões algébricas:

$$S = 25L,\ S(L) = 25L,\ f(\ell) = 25\ell,\ \frac{S}{L} = \frac{0{,}25}{1}\ \text{e}\ F(S) = 25L.$$

Excluindo a última expressão algébrica, onde ocorre uma troca entre as variáveis independente e dependente, as outras estão corretas.

A quarta questão foi extraída de um livro de Matemática para o primeiro colegial, editado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Trata de grandezas direta e inversamente proporcionais e pede uma fórmula a partir de um texto. Apesar de termos considerado inicialmente que a linguagem das grandezas diretamente proporcionais é mais utilizada no dia-a-dia do que aquela referente às grandezas inversamente proporcionais, as respostas indicam uma grande dificuldade dos professores em determinar as expressões algébricas pedidas nos dois casos.

Para o item “a) Para cada substância, a massa é diretamente proporcional ao volume”, encontramos cinco respostas distintas, além daquelas deixadas em branco:

1) $\frac{25}{1} = \frac{50}{2} \quad \frac{m}{v} = \frac{3m}{3v}$ 2) $\frac{25}{1} = \frac{50}{2} = \frac{75}{3} = \frac{100}{4}$,

3) $\text{Massa} = n \times \text{volume} \quad \text{Massa} = \mu v$ 4) $S = ml$

5) $V = m\,|\,n\,|$ 6) $f(v) = mv$

As duas primeiras respostas mostram que há professores que não conseguem obter uma relação funcional a partir de uma proporcionalidade. Essa constatação nos remete a Sierpinska (1992, p.43), que propõe como obstáculo epistemológico, relacionado com conceito de função: *proporção é uma relação privilegiada*.

A terceira está correta, na quarta não há clareza das variáveis envolvidas. A quinta resposta indica volume diretamente proporcional à massa, mas não há clareza sobre a constante (inverso da densidade). Na última resposta, ocorre a criação de uma função cuja variável independente é o volume, mas o produto massa pelo volume é uma nova grandeza que não retrata a situação proposta.

Para o item “b) A resistência elétrica R de um fio elétrico é diretamente proporcional ao seu comprimento L e inversamente proporcional à área de sua seção reta A e depende do material do qual é feito o fio”, encontramos as seguintes respostas distintas, além daquelas deixadas em branco:

$$R = AL \tag{1}$$

$$\text{resistência elétrica} \quad R = \underset{\text{constante}}{K}\frac{L}{A} \quad \begin{matrix} \to \text{comprimento do fio} \\ \to \text{área} \end{matrix} \tag{2}$$

$$f(r) = L,\ f(r) = \frac{1}{L} \tag{3}$$

A primeira fórmula indica que a resistência elétrica é diretamente proporcional ao comprimento e à área da seção transversal do fio elétrico. A segunda resposta está correta, com todas as indicações das grandezas em jogo, ao passo que, na terceira, além da duplicidade de respostas, o professor não percebeu que, para utilizar o ostensivo f, a situação descrita é representada por uma função de duas variáveis ($R = f(L, A) = K\frac{L}{A}$). Acrescente-se que ocorre uma utilização incorreta de f, pois em $f(r) = L$, do lado direito do sinal de igual, não há uma expressão que envolva a variável r. Há uma confusão entre as variáveis independentes e dependentes, pois, a partir do texto, a resistência depende do comprimento do fio e da área da seção transversal.

A falta de clareza na identificação das variáveis independente e dependente, a partir de uma dada situação, acompanhará os professores ao longo da formação e será uma questão muito debatida.

A quinta questão apresenta o gráfico do espaço em função do tempo de um movimento com velocidade constante. É um exercício típico para a disciplina de Física, primeiro colegial, sobre movimento com velocidade constante, que também pode ser encontrado em livros de oitava série.

Consideramos inicialmente que esta questão seria respondida pela maioria dos participantes, o que de fato ocorreu. Excluída uma resposta em branco, os outros conseguiram preencher a tabela e determinar a expressão algébrica que relaciona tempo e espaço. Todavia, somente um grupo explicou o preenchimento da tabela, nos seguintes termos: "Como o gráfico é representado por uma reta de origem zero nas coordenadas cartesianas e o tempo está em ordem crescente foram feitos os cálculos começando pelo ponto $(10, 200)$ e proporcionalmente encontrando os outros pontos."

Aparecem as seguintes expressões algébricas, sendo que a mais utilizada é a primeira: $f(t) = 20t,\ s(t) = 20t,\ s = f(t) = 20t,\ x = at,\ \text{espaço} = t.20$.

A sexta questão foi extraída de um livro de oitava série e trata da relação entre função linear e proporção: "Se a fórmula de uma função é do tipo $y = kx$, na qual k é um número diferente de zero, explique por que y é diretamente proporcional a x."

Na análise *a priori* levamos em consideração um tipo de discurso muito comum sobre grandezas direta e inversamente proporcionais, para alunos: quando um aumenta, o outro também aumenta e quando um aumenta, o outro diminui.

A maioria das respostas dadas pelos professores não foge ao esperado (para alunos): "à medida que x aumenta, y também aumenta, à medida que x diminui y também diminui, $k=\frac{y}{x}$”; “porque ambos possuem o mesmo coeficiente”; “$y=kx \Rightarrow k=\frac{y}{x}$ à medida que x aumenta, y também aumenta”; “$\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$ se k for < 0 ou se $k>0$ continuam sendo diretamente proporcionais”; “Caso o valor de x seja positivo, observamos que, à medida que alteramos o valor de x, alteramos y na mesma proporção e diretamente proporcionais. Se considerarmos o valor de k negativo, vamos observar o valor de x, diminuímos o valor de x; à medida que diminuímos o valor de x, aumentamos o valor de y; x e y tornam-se inversamente proporcionais”; “se $x=1 \Rightarrow y=k(1)=k$, se $x=4 \Rightarrow y=k(4)=4k$, se $x=20 \Rightarrow y=k(20)=20k$.” Verificou-se uma resposta em branco. Não há nenhuma resposta relacionada (explicitamente) ao conceito de função linear.

A sétima questão, que trata de uma função linear e utiliza o ostensivo f, foi deixada em branco por um dos grupos; outro não conseguiu interpretar o enunciado, pois a resposta dada indicava a existência de duas funções, e o terceiro grupo não deixou indicações de como obteve a resposta.

Chama a atenção o fato de que os professores, mesmo trabalhando em grupo, sem serem pressionados em relação ao tempo, não responderam duas questões: a oitava e a nona.

O enunciado da oitava questão diz respeito à mudança de escala: “Dado um gráfico de uma função f, construa dois outros gráficos da mesma função, obedecendo às escalas dadas.” O gráfico dado representa uma função linear. Na análise *a priori*, mesmo levando em consideração as dificuldades de professores com a proporção, não esperávamos tal resultado.

O enunciado da nona questão foi extraído do Exame Nacional de Cursos de Matemática, de 1999, na parte denominada - Questões abertas, específicas para os formandos de Licenciatura. A princípio, consideramos que os professores teriam muitas dificuldades em resolvê-la, pois ela envolve: a articulação entre proporcionalidade direta e função linear, o ir e vir entre registro algébrico e gráfico, o significado de um ponto pertencer a uma curva, que representa o gráfico de uma função. Mais tarde, essa questão será intensamente discutida com todos os participantes, uma vez que, mesmo em grupo, não conseguiram resolvê-la.

Em síntese, somente a terceira e a quinta questões foram resolvidas com mais facilidade e acerto. Elas são questões adequadas a uma oitava série. Durante a formação, retomamos todas as questões, que foram debatidas coletivamente.

1.5.4.3. Caracterização da classe de oitava série e de sua professora de Matemática

A escolha da oitava série para a aplicação da seqüência de ensino foi determinada pelos horários e disponibilidades de professores, observadores e formadores. Essa classe é formada por trinta e sete alunos do período matutino e estão na faixa etária adequada para a série. A professora de Matemática da classe informou-nos que essa turma é considerada a melhor para essa série pelo corpo docente. Acrescentou que quase a metade da classe está disposta a cursar simultaneamente o ensino médio e um curso técnico. É importante registrar que esses alunos prestaram um prova para o ingresso em uma escola técnica em outra cidade vizinha, no mesmo mês em que foi aplicada a seqüência de ensino.

Eles compareceram maciçamente, dedicaram-se às atividades e não apresentaram problemas disciplinares. Não tinham, até então, estudado o conceito de *função*, pois esse tema não fez parte do planejamento da escola para as oitavas séries, para o ano letivo de 2004.

A professora de Matemática é efetiva, por concurso público, tem vinte e dois anos de experiência nessa escola e não está vinculada ao projeto. Ajudou-nos, colocando-se como uma das observadoras de um dos grupos de alunos, não interferindo no trabalho dos dois formadores, que também são professores da mesma escola.

1.5.4.4. Caracterização dos alunos do experimento piloto

A caracterização dos alunos do experimento piloto nos foi fornecida pela professora Pérola, em 06/07/2004, data da aplicação do referido piloto, cuja transcrição segue abaixo, resguardando a privacidade dos alunos.

Os alunos se organizaram em duplas: Grupo 1 - Marta e Tereza; Grupo 2 - Afonso e Claudionor; Grupo 3 - Ligia e Ricardo; Grupo 4 – Ernesto e Walter; Grupo 5 - Alberto e Luis.

Marta – Apesar de estar passando por uma modificação emocional muito forte, que podemos traduzir como a “Adolescência”, ela é muito interessada, extremamente ágil, capta facilmente as propostas e empenha-se em participar de qualquer atividade a ser desenvolvida seja de natureza mecânica ou criativa. Os colegas em sala comentam que “gostariam de ter o cérebro da Maria.”

Tereza – Não lida muito bem com a adolescência, necessita estar em evidência e participando de todos os acontecimentos o que a torna desatenta, o seu conhecimento matemático tem muitas lacunas e não demonstra muita agilidade na resolução de situações-problema ou exercícios mecânicos.

Afonso – Rápido e empenhado, porém afoito e de difícil “troca”, gosta de impor sua opinião. Não se convence facilmente de algo se isto não for bem esclarecido e sedimentado em seus conhecimentos anteriores, presta atenção em todas as informações fornecidas verbalmente e não tem paciência para a leitura de textos em geral. Tem suas habilidades voltadas para a área de exatas.

Claudionor – Está desenvolvendo suas habilidades para a área de exatas, não confiava muito em si. Era um aluno apático que pouco se manifestava e que agora esta colocando em prática suas idéias. Talvez fazer dupla com o Afonso o tenha inibido.

Ligia – Participa das atividades com um pouco de receio, não confia em suas idéias, porém sempre tenta dar solução ao que lhe é proposto apesar de demonstrar muita insegurança e de ter muitas lacunas em seu conhecimento matemático.

Ricardo – Tem uma boa memória, porém confusa. Seus conhecimentos aparecem em forma de relâmpagos muitas vezes desmembrados do todo e incorretos, ou seja, efeitos de memorização. Em sala de aula normalmente se mostra sonolento e desatento e quando decide participar, suas interferências nem sempre são sensatas, porém tem potencial só precisa ser “trabalhado” da maneira certa.

Ernesto – Rápido e empenhado, consegui discutir suas idéias e escutar os colegas, é coerente, normalmente resolve as situações baseando-se em seus conhecimentos não precisa de modelos, apenas de informações que muitas vezes ele traz consigo.

Walter – É ágil, porém imaturo se tornando muito preguiçoso, só reage a estímulos, provavelmente este pré-teste funcionou como um, pois pretende ser piloto de avião e para isso ele tem consciência que estará sujeito a um teste de seleção. Contenta-se com “pouco” o suficiente para atingir o seu objetivo.

Alberto – Em sala de aula, pouco presta atenção no que esta sendo desenvolvido, pois acha que já sabe “tudo”, não tem um bom desempenho e nem compromisso com o aprender. Várias vezes se manifesta dizendo ser “o bom.”

Luis – Tem dificuldade para leitura e interpretação de textos e até mesmo de equações matemáticas, não consegue multiplicar ou dividir com facilidade. Mostra-se muito carente exigindo atenção individual o tempo todo, joga xadrez.

Esta descrição dos alunos mostra que a professora Pérola conhece seus alunos nos quesitos: participação, desempenho, personalidade, carências afetivas, gostos e mudanças causadas pela entrada na adolescência.

Em síntese, situamos o município, que o conjunto dos indicadores de escolaridade posicionou, em 2002, em um patamar inferior àquele observado no Estado de São Paulo; caracterizamos a escola desse município, um ponto de referência na cidade, segundo a percepção da diretora e dos professores que participaram da formação e que também lecionam nessa escola; a classe de oitava série diurna, onde ocorreu a aplicação da seqüência, uma classe diferenciada em relação às outras da mesma série - segundo percepção dos professores Margarida e Marcos e da professora de Matemática dessa classe - pelo seu empenho em continuar os estudos em dois cursos simultaneamente: colegial e técnico; os professores e as duas estudantes que participaram da formação.

O próximo capítulo é dedicado à descrição e análise do processo de formação continuada de professores.

CAPÍTULO 2

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO EXPERIMENTO

A nossa pesquisa começou em maio de 2004 e terminou em outubro do mesmo ano. Foram realizadas dezoito reuniões semanais nas dependências da universidade; uma experiência-piloto e seis sessões nas dependências de uma escola estadual, localizada na região metropolitana da Grande São Paulo.

As diferentes dinâmicas e os diferentes momentos de trabalho nos levaram a considerar quatro fases. Na primeira fase estabeleceu-se o primeiro contato com a tarefa de criar uma seqüência didática. Na segunda fase houve a aplicação e discussões sobre o experimento-piloto. Na terceira fase os professores trabalham na reformulação da seqüência didática. Na quarta fase ocorre a aplicação da seqüência na sala de aula e discussões. A primeira fase foi desenvolvida ao longo de oito reuniões; a segunda, mais curta, em duas reuniões; a terceira fase, em seis reuniões e a última em duas reuniões.

O Quadro 3 contém a lista de presença dos professores nas dezoito reuniões realizadas nas dependências da universidade. A letra x indica presença.

Quadro 3 - Participação dos professores

	1ª fase								**2ª fase**		**3ª fase**						**4ª fase**	
Reunião Pessoas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Pérola		x				x	x	x	x	x								
Margarida	x					x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	X	x
Marcos	x	x	x	X		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	X	
César	X	x	x	X	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	X	x
Rosa	X	x	x	X	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	X	
Hortência		x		X	x			x										
Flávio	X	x	x	X	x	x	x	x		x	x							
Juliano	X	x	x	X	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	X	x
Túlio	X	x	x	X	x	x	x	x										
Plínio				X	x	x	x	x										
Nina		x	x						x	x	x	x	x	x	x	x	X	
Bruna			x	X		x		x	x			x	x	x	x		X	x
Artur		x		X	x													
Toninho		x	x															
Cy	X	x																
Eni									x									
Fábio									x	x								

Este quadro mostra os professores mais assíduos: Juliano, César, Rosa, Marcos e Margarida; aqueles que não assumiram nenhum compromisso durante a formação: Artur, Toninho, Cy, Eni e Fábio, ao passo que as estudantes Nina e Bruna, ambas com onze presenças, permaneceram até a última fase. A professora Pérola precisou deixar o projeto, segundo ela, com muito pesar, a partir da terceira fase.

A seguir, descrevemos e analisamos os principais fatos ocorridos em cada uma das fases.

2.1. Primeira fase

Esta primeira fase está subdividida em dois tempos: de integração e de produção. Durante a integração, ocorreu a apresentação da proposta de trabalho, a confecção de mapas conceituais, um trabalho em grupos a partir de atividades envolvendo o conceito de função e as primeiras discussões coletivas. Em seguida, apareceram as primeiras produções escritas dos professores, que são descritas e analisadas na seção 2.1.2.

2.1.1. Momentos de integração

No dia 7 de maio de 2004, apresentamos a nossa proposta de trabalho ao grupo de professores reunidos nas dependências da universidade. Essa reunião contou com a presença de oito professores: Margarida, Marcos, César, Rosa, Flávio, Juliano, Túlio e Cy.

Discutimos a viabilidade de introduzir *função* em uma oitava série, o comprometimento do grupo em apresentar sugestões e a possibilidade de ser feita uma aplicação em uma das escolas públicas estaduais, dentre aquelas que são locais de trabalho desses professores.

Sugerimos que eles começassem a analisar, durante a semana, como os livros didáticos de oitava série introduzem o conceito de função. Além disso, se possível, que trouxessem algumas atividades para a segunda reunião. Após a apresentação e aceitação da proposta de trabalho, os professores responderam o Questionário I (veja APÊNDICE B).

As discussões sobre a possibilidade de introduzir função em uma oitava série foram retomadas na segunda reunião, que ocorreu no dia 14 de maio, e contou com a presença de onze professores: Pérola, Marcos, César, Rosa, Hortência, Flávio, Juliano, Túlio, Artur, Toninho e Cy e da estudante Nina.

A professora Pérola afirmou que, durante o planejamento ocorrido no início do ano letivo (2004), na escola onde trabalha, os professores de Matemática que ministram aulas nas oitavas séries haviam optado pelo estudo da geometria, diante das dificuldades dos alunos com esse assunto e incluir os gráficos utilizados em estatística. Dessa forma, nessa escola, o tema *função* seria tratado somente na primeira série do ensino médio.

Outro professor afirmou que é muito difícil uma escola estadual introduzir função nesse nível de escolarização. Mesmo entre os professores, um deles se lembrou de que não estudou função na oitava série.

Essas declarações são mais um indício do abandono do ensino de funções na oitava série. *Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática* para o quarto ciclo mostram que não se ensina a noção de variável: ”A noção de variável, de modo geral, não tem sido explorada no ensino fundamental [...]” (PCNs, 1998, p.118). Entretanto, os professores afirmaram que é possível introduzir esse conceito e se dispõem a encontrar uma classe para a aplicação de uma seqüência de ensino.

A seguir, os presentes construíram mapas conceituais, a partir da palavra *função* escrita na lousa. A maioria dos participantes conhecia o processo, uma vez que já haviam construído mapas a partir da palavra *fração*, na pesquisa feita por Silva (2005, p.163). Eles se organizaram em quatro grupos de três pessoas cada um; cada grupo confeccionou o seu mapa, que foi apresentado aos demais, no final dos trabalhos, em um clima de descontração e integração.

O Quadro 4 apresenta uma categorização das palavras mobilizadas: *Contextos, Ensino-aprendizagem, Concepções, Representações, Emoções* e *Recursos didáticos*. Na categoria denominada *Concepções*, colocamos as subcategorias, que são as concepções de *função* encontradas nos livros didáticos: conceituar função como relação entre grandezas, conceituar função em termos conjuntistas, conceituar função como máquina, conceituar função como padrão de regularidade de seqüências numéricas ou geométricas, conceituar função como expressão algébrica. Na categoria *Representações*, colocamos as subcategorias: *gráfica*, *algébrica*, *tabular* e *verbal*, uma vez que funções podem ser representadas por expressões algébricas, por tabelas, por diagramas, por gráficos ou por uma sentença que pode envolver uma expressão verbal do tipo “em função de.”

Quadro 4 - Classificação das palavras mencionadas no mapa conceitual

Contextos		Matemática, Física, Química, Estatística, Geometria, dia-a-dia, mercado, inequações
Ensino-aprendizagem		aluno, escola, orientador, motivação, conceito, compreensão, leitura, pesquisa, interpretação, conclusão, solução, falta de solução, não explicou, não entendi, falta de interesse, dificuldade, avaliação, restrição
Concepções	Expressão algébrica	equação, lei
	Interdependência de grandezas	dependência, independência, grandeza, velocidade, preço, pressão, vazão, temperatura, tempo
	Relação entre conjuntos	relação, correspondência, par
	Máquina	
	Padrão de regularidade	seqüência, ordem
Representações	Gráfica	diagrama de Venn, Descartes, par ordenado, ponto, localização, origem, quadrantes, plano, intervalo, bolinha aberta, bolinha fechada, infinito, ordenada, abscissa, gráfico, escala, simetria, parábolas, retas, círculos, hipérbole, perpendicularismo, concorrência, ângulos, para cima, para baixo
	Algébrica	letras, números, x, y, grau, coeficiente, valor, positivo, negativo
	Tabular	
	Verbal	
Tipos		função inversa, função composta, função constante, função linear, função afim, função crescente, função decrescente, função par, função impar, bijetora, injetora, sobrejetora, seno, cosseno, tangente
Emoções		emoção, alívio, gostoso, amor, confusão, frustração, raiva, dor, graças a Deus, lá vem aquela chata, caracas, sinal
Recursos didáticos		batalha naval, figuras, informação, legenda, cores, chute na bola, perspectiva, dinâmica, aplicações

Na categoria *Ensino-aprendizagem*, diversas expressões denotam negatividade: “não explicou”, “não entendi”, “falta de interesse”, “dificuldade”, “restrição”, “falta de solução.” Na categoria *Emoções* há “raiva”, “dor”, “frustração”, “confusão.” A expressão - lá vem aquela chata - refere-se à chegada da professora na sala de aula e sinal é o aviso de final de aula. Todavia, na categoria *Ensino-aprendizagem* localizamos as palavras “motivação” e “compreensão” e na categoria *Emoções* encontramos “alívio”, “gostoso” e “amor.” Assim, podemos perceber que há uma ambivalência dos professores nas suas relações com os alunos.

Na categoria *Concepções*, podemos observar que não aparece nenhuma referência relativa à concepção de função como máquina. Apesar da interdependência de grandezas ser a sub-categoria mais lembrada, não foram mencionadas as palavras: *variação*, *variável*, *taxa de variação* ou *taxa*. A taxa de variação é citada de maneira implícita quando proferem as palavras velocidade, pressão e vazão. As grandezas mencionadas são aquelas usualmente utilizadas nos livros didáticos de oitava série.

Somente duas palavras: seqüência e ordem, evocam conceituar função como padrão de regularidade de seqüências numéricas ou geométricas, mas não aparece a palavra generalização. Há muito mais palavras relacionadas à representação gráfica de funções, à forma das curvas do que palavras relacionadas à representação sob a forma de expressões algébricas.

As expressões para cima e para baixo podem estar relacionadas à concavidade da parábola ou aos movimentos feitos para a construção de um gráfico. Expressões verbais e tabelas estão ausentes.

Foram mencionadas as tipificações encontradas nos livros de ensino médio, mas as funções logarítmica, exponencial, racional, bem como outras funções trigonométricas estão ausentes. Notamos também a ausência das palavras domínio, contradomínio e conjunto imagem.

Os professores mencionam o jogo denominado Batalha Naval. Na parte I, § 2.3.6., vimos que alguns autores de livros didáticos utilizam esse jogo para introduzir localização de pontos no plano cartesiano.

A expressão “chute na bola”, colocada na categoria *Recursos didáticos*, pode estar associada à figura de um jogador de futebol chutando uma bola (livro da Coleção B, 2002, p.164) ou de um jogador de vôlei arremessando uma bola (livro da Coleção A, 1999, p.116). Essas figuras são utilizadas para o estudo de uma das aplicações da função polinomial do 2º grau.

Mais à frente, veremos as dificuldades dos professores em manipular uma escrita algébrica que utilize o ostensivo $f(x)$ e com os conceitos de domínio, contradomínio e imagem; a emergência das tarefas envolvendo potência de base dois; função como máquina de entrada e saída; função como padrão de regularidade de seqüências geométricas. Materiais concretos, não citados, como palitinhos e folhas de papel, serão utilizados como recurso didático.

Retornando às reuniões, a terceira ocorreu no dia 21 de maio e contou com a presença de sete professores: Marcos, César, Rosa, Flávio, Juliano, Túlio e Toninho e das estudantes Bruna e Nina. Eles trouxeram alguns livros didáticos, que tinham sido manuseados durante a semana, mas não apresentaram nenhuma atividade escrita sobre funções.

Dialogando entre eles, manifestaram opiniões sobre alguns assuntos: livros consultados, diagrama de Venn, gráficos, papel quadriculado, localização, visualização, Batalha Naval, linguagem do professor, origem do conceito de função.

Sobre livros didáticos, notou-se que os presentes ainda não encontraram aquilo que seria o livro "ideal", ou uma seqüência conveniente, pois sempre há algo que lhes desagrada: tabelas, gráficos, diagramas de Venn, porcentagem. Suas considerações são subjetivas como: "não gosto do livro porque, começa com gráficos"; "o livro não seria bom, porque começa com diagramas, que embaralham o aluno e traz tabelas"; "o livro não apresenta localização de pontos no plano cartesiano"; "o livro que eu consultei começa com exemplos de porcentagem e com aplicações, sem trabalhar com gráficos"; "porcentagem assusta"; "os livros deveriam ter mais explicações relacionadas com o dia-a-dia"; "consultei três livros e achei tudo muito tradicional"; "achei um livro interessante, pois não começa direto com o conceito de função, começa com exemplos."

Podemos perceber que muitos procuram se afastar daquilo que os assusta ou os incomoda. Há uma preocupação com a busca de situações ligadas ao dia-a-dia, que também aparece nas respostas dadas no Questionário I, mas não há um consenso sobre qual seria a melhor maneira de iniciar uma seqüência de ensino.

Os professores têm opiniões divergentes sobre a utilização de diagramas de Venn e de gráficos, como se pode observar no diálogo abaixo:

Toninho: "O diagrama dá uma embaralhada no aluno."

Nina: "É melhor introduzir função com diagrama de Venn do que com gráficos, pois gráfico assusta, assim como porcentagem."

César: "Gráfico assusta mesmo."

Nina é ex-aluna de César e tem a mesma idéia sobre gráficos do seu antigo professor, que chega até a utilizar a palavra medo. As dificuldades desse professor com a construção de gráficos virão à tona nos próximos encontros. A professora Rosa, que leciona Matemática e Física, afirma que gráficos são importantes e será a única professora que apresentará atividades que pedem análise e interpretação de gráficos.

Os professores discorrem sobre as dificuldades de um aluno diante do papel quadriculado, diante da localização de um ponto em um sistema de coordenadas; a utilização do jogo Batalha Naval e os problemas de visualização.

Sobre as dificuldades dos alunos com a interpretação de gráficos, César diz que é preciso algo para "cutucar", para "fazer ver", ao passo que, para o professor Flávio, basta olhar cuidadosamente um gráfico: "O aluno não presta atenção quando vê [...]. Um padeiro não vê gráficos no seu dia-a-dia. O aluno que trabalha atrás de um balcão pode até ver um gráfico em um jornal, mas não vai prestar atenção."

É importante ressaltar que o professor Flávio não esconde suas dificuldades com a visualização: "Eu levei 50 anos para enxergar que, numa folha de uma planta tem figuras geométricas. Até que um dia, eu consegui."

O professor Juliano pensa que o professor tem que despertar o interesse pela localização de um ponto. Mais tarde, na terceira fase, ele manifestará o interesse em investigar que tipos de folhas de papel facilitam (ou não) o trabalho dos alunos na construção de um gráfico: quadriculado, em branco só com eixos, em branco com eixos e escala etc.

Podemos perceber que os professores estão preocupados com os problemas ligados à localização de um ponto no plano cartesiano, à construção, leitura e interpretação de gráficos. Expõem não só as dificuldades dos alunos com visualização, mas também as próprias.

O desconhecimento dos problemas ligados à visualização faz com que um deles acredite que basta fazer o aluno prestar atenção. Há autores de livros didáticos que também consideram a visualização muito simples. Esta "simplicidade" é reforçada com a opinião expressa por alguns autores de livros didáticos quando apresentam gráficos de funções. Como exemplo, encontramos, no livro de oitava série, o seguinte texto, a respeito de visualização de gráficos: "Na verdade, a representação gráfica de uma função deve nos dar todas as informações sobre como se comporta essa função e, por ser de fácil visualização, é muito utilizada." (GIOVANNI *et al.*, 1998, p.121).

Para os professores, o diagrama embaralha, o gráfico assusta, a tabela não é bem-vinda. Tudo isso nos remete às considerações feitas por Duval (2000) sobre representações. Para esse autor, a representação denota o objeto representado e pode ser um registro discursivo (expressão) ou um registro não discursivo (visualização). O registro discursivo pode ser feito por meio da linguagem natural ou simbólica (fórmulas) e o registro não discursivo pode ser representado por gráfico, figura, desenho etc. A falta de coordenação entre os registros que devem ser trabalhados simultaneamente pode levar a fracassos ou bloqueios mentais. O autor enfatiza que a coordenação é a condição para que um objeto não seja confundido com o conteúdo da representação.

Outra questão discutida pelos participantes é a utilização do jogo denominado Batalha Naval. O professor César é o mais veemente defensor desse jogo para introduzir a localização de um ponto em um sistema de coordenadas. Seu relato:

> Uma coisa que ficou para mim é que quando eu estudava, nos cadernos vinham folhas quadriculadas para brincar de batalha naval [...] Na batalha naval o aluno tem um alvo, uma base, tendo que encontrar os pontos [...] Na guerra, um míssil tem que acertar o alvo. (Professor César, 21/05/2004)

Reminiscências do passado, o resgate do lúdico e a preocupação com a guerra fazem com que esse professor não perceba que esse caminho não é eficaz, pois as dificuldades dos seus alunos para localizar um ponto em um sistema de coordenadas cartesianas, cujas coordenadas são números racionais, persistem, como ele mesmo afirmou. A real necessidade de utilizar esse jogo na sala de aula para que ocorra uma aprendizagem do conceito de função não resistiu aos questionamentos dos próprios colegas e esse caminho foi abandonado.

Os professores também conversaram sobre a origem do conceito de *função*: “surgiu da idéia de relação entre duas variáveis, uma independente, outra dependente”; “iniciou como forma de localizar um objeto em determinado lugar”; “veio de uma necessidade do dia-a-dia.”

As sugestões dos professores mostram as suas vagas idéias sobre a origem do conceito. É provável que as pequenas notas encontradas nos livros didáticos sobre a obra *La Geometrie*, de René Descartes, no capítulo sobre funções, em detrimento das obras de outros matemáticos, reforce a idéia de que função tenha nascido junto com a geometria analítica. Não há clareza na fala do professor sobre quem tinha essa necessidade do dia-dia: o físico, o astrônomo, o matemático ou o homem comum. Mais adiante, na terceira fase, discutiremos a evolução do conceito com os professores participantes do projeto e também disponibilizaremos um texto sobre o assunto a fim de ampliar os horizontes o assunto.

Nessa reunião, três professores foram muito atuantes: César, Juliano e Flávio, sendo que os dois primeiros os únicos preocupados em despertar o interesse dos alunos. Outros falaram pouco, como Rosa e Toninho e a estudante Nina.

As discussões cobriram uma variedade de temas acerca do conceito de função, mas ainda não se observa nenhuma iniciativa para uma produção escrita por parte dos professores.

Após o término das discussões, os docentes se organizaram espontaneamente em grupos para discutir as atividades propostas no Questionário II (veja APÊNDICE B), que foram concluídas na quarta reunião, realizada no dia 28 de maio, com a presença de nove professores: Marcos, César, Rosa, Hortência, Flávio, Juliano, Túlio, Plínio, Artur e da estudante Bruna.

A seguir, iniciamos um debate sobre leitura de tabelas, proporcionalidade e função, tendo em vista as dificuldades dos professores em responder as atividades desse questionário, exceto a terceira e a quinta. A primeira atividade do Questionário II é a primeira a ser discutida. Ela envolve leitura e interpretação de tabela, proporcionalidade direta e linearidade.

Os professores afirmaram que se sentiram um pouco incomodados com a Tabela 1 por causa da presença de números racionais.

Tabela 1 - Uma proporção

r	3,5	5,0	2,0	7,0
s	4,9	7,0	2,8	9,8

César afirmou que precisou reorganizar a tabela, ao passo que Flávio foi categórico: ”Cada um tem a sua maneira de ver. Eu vejo a seqüência. Ela é para mim mais importante que a divisão. Por exemplo, eu não coloquei em ordem a tabela, eu olhei os números.” (Professor Flávio, 28/05/2004).

Flávio enfatizou que, de hábito, visualiza uma tabela qualquer como um todo, depois procura uma “seqüência”, isto é, uma organização intrínseca dos números.

Após essa primeira análise, passa para diferenças e quocientes. Para ele, mais importante que a técnica, é a compreensão global da tabela.

Enquanto a maioria fez uma abordagem pontual da tabela, o professor Flávio dá preferência à global. Acreditamos que podemos fazer uma analogia com o “tratamento gráfico pontual” e “tratamento gráfico global“, noções introduzidas por Janvier (1978) para leitura e interpretação de gráficos.

Voltando à discussão, para justificar a resposta à pergunta: “Os números *r* e *s* são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não se enquadram dentro dessas duas classificações”, alguns professores determinaram o quociente $\frac{r}{s}$; outros, o quociente $\frac{\Delta r}{\Delta s}$, mas há aqueles que testaram os dois caminhos, ou seja, há professores que empregaram uma técnica, outros empregaram as duas técnicas.

Todos os presentes concordaram que os números *r* e *s* são proporcionais e que é possível escrever uma relação entre ambos e Rosa respondeu: ”$s = r \cdot \frac{7}{5}$.”

A seguir, o professor César comentou a técnica utilizada pelo seu grupo para resolver essa questão:

> O grupo pensou em $f(x) = ax + b$, mas, para apresentar pela primeira vez para o aluno, você não tem isso. Quando fizemos a conta, erramos e colocamos $b = 1$. Se não tivéssemos pensado nessa lei, talvez não tivéssemos perdido tanto tempo. (Professor César, 28/05/2004).

Esse discurso mostra que há professores que não identificam função linear como modelo algébrico da proporcionalidade. Comin (2000, parte 1, p.76), ao analisar as respostas de trinta e oito professores franceses do ensino primário sobre razões, frações, proporcionalidade e função linear, confirmou que, para eles, o modelo função linear é independente dos conceitos de proporcionalidade em aritmética.

Observamos que os participantes tiveram muitas dificuldades em utilizar o símbolo f para escrever a lei da função $s = f(r)$, como se pode verificar pelas expressões algébricas fabricadas por eles e reproduzidas abaixo:

$$f(r) = \frac{5}{7}s,\ \ f(r) = 0{,}7141s,\ \ f(r) = 0{,}7143s,\ \ r(s) = 0{,}71s\,.$$

A função definida por $g(s) = \frac{5}{7}s$ é a inversa da função pedida. Dessa forma, na escrita da função definida por $f(r) = \frac{5}{7}s$ (no lugar de $f(r) = \frac{7}{5}r$): há a troca da fração pela sua inversa; na expressão que se encontra do lado direito do sinal de igual não comparece a variável *r*, mas a variável *s*.

A fração $\frac{5}{7}$ tem uma representação decimal infinita, pois é uma dízima periódica. Assim, nas funções definidas por $f(r) = 0{,}7141s$, $f(r) = 0{,}7143s$ e $r(s) = 0{,}71s$ os números $0{,}7141$; $0{,}7143$ e $0{,}71$ são valores aproximados de $\frac{5}{7}$. Nota-se o sinal de igual está sendo utilizado de forma indevida nesses três casos.

Depois de algumas discussões, dois professores propõem $f(r) = r \cdot \frac{7}{5}$.

Segundo Comin (2000, parte 2, p.134), o discurso tecnológico para a construção do ostensivo $y = ax$ se apóia sobre os conhecimentos de uma tabela de proporcionalidade; é uma explicação da dependência entre x e y. Para esse autor, (*id, ibid,* p.139), o ostensivo $y = f(x)$ exprime uma relação de dependência que se interpreta em termos de correspondência.

Não é uma simples troca de ostensivos, de $s = r \cdot \frac{7}{5}$ para $f(r) = r \cdot \frac{7}{5}$. O primeiro ressalta a dependência entre *r* e *s*; o segundo evidencia correspondência e dependência. Assim, $s = r \cdot \frac{7}{5}$ é o resultado da passagem de um discurso aritmético para um discurso algébrico, e a tecnologia se baseia nos conhecimentos sobre proporcionalidade. De $s = r \cdot \frac{7}{5}$ para $f(r) = r \cdot \frac{7}{5}$ há um discurso tecnológico que se baseia nos conhecimentos dos ingredientes básicos que compõem função: correspondência e dependência.

Acreditamos que esse duplo significado do ostensivo $y = f(x)$, envolvendo correspondência e dependência seja a fonte das dificuldades dos professores. O pouco domínio que eles têm da correspondência aflorou ao longo dessa reunião. Além disso, o professor Flávio afirmou ter dúvidas sobre dependência, pois para ele, função é uma dependência, mas não sabe de quê e diz que não entende o conceito. O professor César acrescentou que foi difícil achar a expressão algébrica.

Diante do exposto, podemos perceber que dificuldades conceituais a respeito do conceito de função caminham juntas com as dificuldades na manipulação dos ostensivos. Isso está de acordo com as afirmações feitas por Bosch e Chevallard (1999, p. 91), segundo os quais os objetos ostensivos e não ostensivos são unidos por uma dialética que considera os segundos como emergentes da manipulação dos primeiros e, ao mesmo tempo, como meios de controle dessa manipulação.

Na reunião, iniciamos um debate sobre a segunda questão do Questionário II (veja APÊNDICE B). Segue seu enunciado: “Os números p e q são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não se enquadram dentro dessas duas classificações, a partir de uma tabela? Justifique sua resposta.”

A Tabela 2 exibe a correspondência entre os números *p* e *q*.

Tabela 2 - Uma correspondência

p	120	90	180	360
q	15	20	9	5

Flávio perguntou se o número 9 estava correto, porque, se fosse 10, a solução seria mais fácil pois os números *p* e *q* seriam inversamente proporcionais. Foi até a lousa, escreveu 10 no lugar de 9 e colocou $p \cdot q = 1800$. Após o esclarecimento de que não houve erro na digitação do exercício, o professor César falou que não tem função nessa tabela. Flávio afirmou que “Tem função, pois a tabela está feita e todos têm correspondente” e completou sua fala com a seguinte definição de função: ”Para todo elemento de A tem correspondente em B e tem que ter um só.”

As afirmações de Flávio surpreenderam César: “Mas eu sempre penso na lei como uma só. Tem uma função para tudo isso?”

Marcos expôs seu ponto de vista: “Quando a gente pensa em função, pensa no todo.”

Esse diálogo deixou o professor César incomodado. Após ter sido desenhado na lousa o diagrama de flechas referente à tabela, esse professor, relembrou o projeto anterior ao nosso sobre frações e concluiu: ”Eu ia dizer que é função. A Zezé[12] tinha bagunçado a minha vida na quinta série, mas estou tranqüilo porque

[12] O professor está se referindo à pesquisadora Maria José Ferreira da Silva (SILVA, 2005).

não dou aula na quinta série. Agora "bagunçou" a minha vida no ensino médio." (Professor César, 28/05/2004).

Flávio perguntou sobre a interpretação da palavra *lei* e ocorreu então uma discussão sobre os termos utilizados. César expôs sua dificuldade em fazer os alunos entenderem correspondência, tarefa que considera difícil. Nos dias seguintes, ele afirmará que se convenceu de que uma função não precisa ser descrita por uma única sentença matemática ou seguir uma regularidade, a partir de uma leitura mais cuidadosa de definições de função que ele encontrou em alguns livros.

Durante a discussão, o professor Juliano, referindo-se à tabela que existe nas padarias que trazem número de pães e o preço a pagar, comentou: "Pega o exemplo do pãozinho porque para mim não tem diferença entre a lei e a correspondência."

Nesse momento, todos os professores concordaram que existe correspondência, que existe uma expressão algébrica, que existe função. O professor Flávio questionou: "Não bate com o exemplo anterior! Existe uma lei até 5 e quando chega o 9, parte para outra lei."

Com o intuito de explorar o significado atribuído à palavra *lei*, apresentamos o exemplo de uma função definida por duas sentenças. Diante dele, o professor César observou que aquela era uma maneira resumida de apresentar duas funções. Enfim, escreveu-se a função definida por duas sentenças, o que acarretou uma discussão entre três professores sobre a questão da "quebra da lei":

$$f(p) = \begin{cases} \dfrac{1800}{p} & \text{se } p \neq 180 \\ 9 & \text{se } p = 180 \end{cases}$$

A seguir, o professor César foi para a lousa e começou a construir um gráfico correspondente à situação de números inversamente proporcionais $p \cdot q = 1800$, sem se preocupar com a utilização de uma escala e alguém disse: "Vai acabar ficando linear." O professor refez o gráfico e surgiram questões sobre ligar (ou não) os pontos e a forma do gráfico. Mostramos a diferença entre o gráfico construído e aquele referente à situação proposta.

Ao avaliarmos a reunião, um fato chamou a atenção: poucos professores participaram ativamente das discussões, onde importantes questões sobre o conceito de função foram levantadas: a arbitrariedade e a univalência, dois aspectos essenciais do conceito de função; funções definidas por várias sentenças; gráfico não usual; a utilização do ostensivo *f.* A dificuldade em utilizar e interpretar esse ostensivo permeará todo o processo de formação. A conquista do sentido dessa simbologia aparecerá no final da quarta fase.

Ao analisar o moderno conceito de função, Freudenthal (1983) (*apud* Even, 1990) considera que arbitrariedade e univalência são dois aspectos essenciais desse conceito. A natureza arbitrária da função refere-se à relação entre os dois conjuntos, bem como aos próprios conjuntos. O primeiro significa que uma função não precisa ser definida por uma específica expressão algébrica, seguir qualquer regularidade ou ser descrita por um gráfico que tenha uma determinada forma. A natureza arbitrária dos dois conjuntos (domínio e contradomínio) significa que funções podem ser definidas em qualquer conjunto; em particular, os conjuntos em questão não precisam ser numéricos. Enquanto a natureza arbitrária de função está implícita na definição, a univalência - para cada elemento do domínio existe um único elemento (imagem) no contradomínio - está explícita na definição de função.

Podemos perceber que as questões e dúvidas levantadas pelos professores sobre correspondência, lei, “quebra de lei”, função definida por mais de uma sentença e gráfico não usual estão imbricadas e vão ao encontro dos resultados obtidos por Even (1990) Hitt (1998) e Zuffi (1999).

Uma das conclusões da pesquisa de Even (1990, p.528), feita com futuros professores de Matemática americanos sobre o conceito de função, é que a maioria rejeita a natureza arbitrária desse conceito.

A tendência de considerar como uma situação funcional aquela que pode ser expressa por uma única expressão analítica também foi detectada por Hitt (1998, p. 133) e Zuffi (1999, p.115).

Diante das afirmações dos professores de que as definições de função encontradas nos livros didáticos podem dar margem a confusão, diante das suas incertezas quanto ao significado atribuído à palavra *lei*, da ocorrência de expressões como “quebra da lei” e “o que lei não diz”; de considerar as palavras *lei* e *correspondência* como se fossem sinônimas, tudo isso nos leva a fazer um levantamento das palavras-chave utilizadas pelos autores de livros didáticos de ensino fundamental ao enunciar como se define o termo *função*. Acreditamos que o panorama encontrado em quatro livros esclareça as possíveis razões que podem ter levado os professores a terem dúvidas sobre os termos utilizados.

Dante (2002, p.156), no capítulo sobre funções, apresenta um texto, sob o título Lei da função, utilizando as seguintes palavras-chave em um único parágrafo: *em função de*, *depende*, *corresponde um único*, *fórmula e lei da função*:

> Podemos notar pelos valores da tabela acima que, quando variamos a medida do lado de um quadrado, seu perímetro também varia. Dizemos que o perímetro de um quadrado é dado em função da medida de seu lado, isto é, o perímetro depende da medida do lado. A cada valor dado para o lado corresponde um único valor para o perímetro. A fórmula que fornece o perímetro P em função da medida do lado L de um quadrado é dada por P = 4L. A fórmula também é conhecida como lei da função. (DANTE, 2002, p.156)

Este texto dá a impressão de que as expressões: *corresponde um único*, *lei da função* e uma *única fórmula* sempre ocorrem juntas. Isto é reforçado ao longo do capítulo, que só apresenta exemplos e exercícios que envolvem funções reprresentadas por uma única fórmula.

Dante (2002, p.161) apresenta somente um exemplo onde poderia ter sido explorada a natureza arbitrária do conceito de função: trata-se de um gráfico de barras (sobreposto a um gráfico de linhas), que mostra a população brasileira variando com o tempo, em anos. Podemos nos perguntar como um aluno poderia relacionar esse exemplo à definição dada pelo autor.

Giovanni *et al.* (1998, p.107) apresentam no capítulo sobre funções, sob o título A noção de função, um exemplo que envolve relação entre grandezas variáveis: ”Uma caneta custa 30 reais. Se representarmos por x o número dessas canetas que queremos comprar e por y o preço correspondente a pagar, em reais, podemos organizar a seguinte tabela.” Após a apresentação da tabela correspondente ao enunciado e de considerações sobre ela, os autores escrevem: “Nestas condições podemos dizer que o preço a pagar é dado em função do número de canetas e a sentença $y = 30x$ é chamada lei de formação da função.” (GIOVANNI *et al*,1998, p.108)

Mais adiante, no mesmo livro, sob o título: A função como relação entre dois conjuntos, os autores apresentam exemplos que recaem na utilização de uma única fórmula: $y = 4x$, $y = x^2$ e $y = 2x - 1$ e finalizam com a seguinte definição de função: "Sendo A e B dois conjuntos não-vazios, uma relação entre A e B é chamada função quando a cada elemento x do conjunto A está associado um único elemento y do conjunto B." (GIOVANNI *et al.*, 1998, p.113).

Dessa forma, os autores apresentam duas concepções de função e o uso das palavras-chave: *em função de*, *lei de formação*, *relação* e *está associado um único*. De um lado, há a definição em termos conjuntistas; de outro lado, a mensagem mais presente em todo o capítulo é o de uma função definida por uma única fórmula.

A seguir, examinamos o livro de Pierro Neto, de 1998. Esse autor começa o capítulo sobre funções apresentando um exemplo de duas grandezas interdependentes: comprimento (em metros) e massa (em quilogramas) de uma barra de ferro. Enfatiza, em negrito, as palavras *associada*, *depende* e *função* na sentença:

> A cada comprimento está associada uma única massa, vemos também que a massa em quilogramas de uma barra de ferro depende do seu comprimento, dizemos que a massa é uma função do comprimento da barra de ferro. (PIERRO NETO, 1998, p.199)

O autor prossegue, dizendo que "[...] essa correspondência pode ser descrita por pares ordenados, em que o primeiro elemento do par pertence a A e o segundo pertence a B." (*id*, *ibid*, p.199). A seguir, são apresentados seis pares ordenados e um diagrama de flechas. Assim, de repente, somem as grandezas, aparecem dois conjuntos A e B e o autor apresenta a definição de função:

> Dados dois conjuntos A e B, chamamos função de A em B o conjunto dos pares ordenados (x,y) em que $x \in A$ e $y \in B$, obtidos segundo uma lei que, a cada elemento de A, faz corresponder um e um só elemento de B. (PIERRO NETO,1998, p.199).

Nessa definição, são utilizadas as palavras-chave: *pares ordenados*, *lei*, *corresponder um e um só*. A lei é dada pela sentença: *a cada elemento de A faz corresponder um e um só elemento de B*. Assim, em uma página, o autor passa de uma concepção de função para outra sem maiores explicações e o objeto matemático *função* é apresentado na sua forma estrutural.

Já Imenes e Lellis (1997) optaram por não formalizar o conceito de *função* na oitava série. No capítulo "Funções, suas tabelas e suas fórmulas", apresentam exemplos de grandezas interdependentes e escrevem: "Até aqui, você viu três idéias básicas relacionadas com função: variação, tabela e fórmula. Para começar, está bom." (IMENES e LELLIS, 1997, p.221).

Nesse livro, não se encontra, de maneira explícita, em todo a capítulo, a palavra *correspondência*. Os exemplos e exercícios que envolvem expressões algébricas recaem na situação de uma única fórmula. Contrariando o próprio título do capítulo: "Funções, suas tabelas e suas fórmulas", os autores apresentam uma aplicação para funções - o crescimento populacional de uma cidade - e acrescentam o seguinte texto:

> Como a população P de uma cidade varia com o tempo t, podemos considerar que P é função de t. Em geral, não se consegue obter a fórmula dessa função. No entanto, normalmente, pode-se estabelecer uma tabela e um gráfico.(IMENES e LELLIS,1997, p.235)

Em síntese, nos livros citados, a palavra *lei* ora está ligada a uma única expressão algébrica, ora está ligada a uma sentença explicativa; as definições de função são apresentadas de maneira anistórica, salvo algum comentário no livro do professor; apresentam diferentes concepções de função; enfatizam (ou não) determinadas palavras-chave. Diante disso, é compreensível que um professor, com limitados conhecimentos sobre a evolução do conceito, ao se debruçar sobre a diversidade de opções oferecidas pelo mercado, seja levado a afirmar que as definições causam confusão.

Outro tema que merece destaque é a representação de função sob a forma tabular. Como parte de sua pesquisa, Comin (2000) aplicou um questionário a trinta e oito professores franceses de Matemática que ministram aulas no ensino primário. Seu objetivo foi estudar o repertório em torno da proporcionalidade desses professores e que são acionados durante a escolaridade obrigatória.

Partindo do pressuposto de que a tabela de proporcionalidade não aparece como um objeto a ser ensinado na escola, e que são as práticas que a tornam um objeto reconhecido pelos professores, o autor propõe três questões sobre tabelas. Há uma específica sobre a utilização de tabelas por parte dos docentes:

> Quais vantagens você encontra na utilização de tabelas? Classifique as respostas por ordem de prioridade: a) Ela permite explicar a proporcionalidade. b) Ela facilita o cálculo. c) Ela permite fazer um retorno às unidades no topo da lista. d) Ela evoca a proporcionalidade. (COMIN, 2000, parte 1, p.72).

Ao analisar as respostas dadas a essa questão, o autor conclui que, em primeiro lugar, os profissionais vêem uma tabela como um instrumento de cálculo; em segundo lugar, que ela é um ostensivo específico da proporcionalidade (respostas a e d). A resposta c) é a última prioridade e o autor considera que é esta propriedade que permite à tabela ser uma "ferramenta de conversão" dos saberes próprios da aritmética aos saberes numéricos específicos da função linear.

Em outra questão que envolve tabela, Comin (2000, parte 1, p. 72) investigou o que uma tabela de proporcionalidade representa para os professores; na terceira, se eles a utilizam para justificar uma situação de proporcionalidade. O autor conclui que esse tipo de tabela se impõe como ferramenta, mas é pouco conhecida como um objeto do saber.

Ainda sobre tabelas, Sierpinska (1992, p.31) considera que, na Grécia Antiga, a arte de construí-las para mostrar relações que tinham certas regularidades, como as astronômicas, não pertencia à ciência, mas sim ao conhecimento prático que era transmitido do mestre ao discípulo, de uma geração para outra. A autora afirma haver um obstáculo epistemológico, ligado a uma filosofia de Matemática: técnicas computacionais utilizadas na produção de tabelas que mostram relações numéricas não são dignas de serem objeto de estudo em Matemática.

Até o presente momento, na nossa pesquisa, ocorreram os seguintes fatos relativos à *representação tabular*: a palavra tabela não foi pronunciada no dia em que foram confeccionados os mapas conceituais; tabelas não foram bem recebidas durante a discussão anterior sobre os livros didáticos; os professores encontraram algumas dificuldades na manipulação de tabelas. Além disso, um dos professores acredita que "tabelas na Estatística e na Matemática Financeira ficam separadas da matemática na cabeça da maioria dos professores."

Para o estudo da Tabela 2-Uma correspondência, os professores construíram, em grupo e espontaneamente, diagrama de flechas e gráfico, para verificar se ela poderia representar uma função. A Figura 14 mostra um exemplo típico. Dessa maneira, foi necessário ativar três ostensivos e fazer as conversões: de tabela para diagrama de flechas e a conversão diagrama de flechas para gráfico (ou tabela para gráfico).

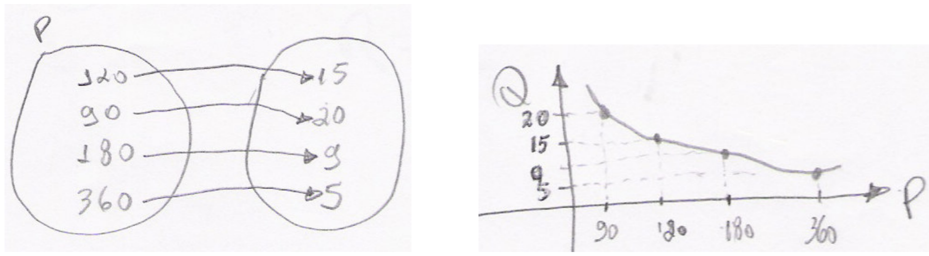


Figura 14 - Diagrama de flechas e respectivo gráfico

Fonte: Protocolo de professor

Diante desses resultados, temos a impressão de que as tabelas estão submetidas a um papel secundário na formação inicial dos professores no que concerne ao conceito de função. A tudo isso, acrescentamos as considerações e resultados obtidos por Sierpinska (1992) e Comin (2000), a ausência de um trabalho voltado para as dificuldades de professores do ensino fundamental e médio, no Brasil, sobre leitura e interpretação de tabelas. Dessa forma, acreditamos que esse assunto mereça uma investigação mais acurada.

Um outro ponto que merece destaque é a construção mal feita de gráficos e o descaso com a escala. A Figura 14 mostra o diagrama de flechas e o correspondente gráfico construídos por um dos professores para a resolução da segunda questão do Questionário II (veja APÊNDICE B). O gráfico é um exemplar típico, pois todos os outros que foram fabricados para essa situação têm as mesmas características: curva contínua e sem a utilização de uma escala. Nesse diagrama de flechas, a letra *p* é tomada como nome de conjunto, deixando de ser variável. Também Zuffi (1999, p.107) aponta para uma ambigüidade no significado das notações que se referem às variáveis e aos conjuntos de domínio e imagem, ao analisar respostas dos professores que participaram de sua pesquisa.

O diagrama de flechas mostra dois conjuntos finitos - domínio e contradomínio - e, na confecção do gráfico correspondente, o professor não levou em consideração tais informações, pois o traçado é contínuo, como se os dois conjuntos fossem infinitos. Também Zuffi (1999, p.113), em sua pesquisa com professores do ensino fundamental e médio, observou que alguns construíram gráficos contínuos para representar uma função discreta.

A curva contínua utilizada para uma situação discreta revela aquilo que Dubinsky e Harel (1992, p.87), ao investigarem alunos do terceiro grau, denominaram de “restrição de continuidade”, isto é, um gráfico, para ser gráfico de função, deve ser contínuo. A partir dos gráficos traçados durante a resolução do Questionário II e dos comentários sobre construção de gráficos feitos pelos professores durante a reunião, pudemos constatar haver professores que insistem que gráfico de função tem que ser uma linha contínua.

Para Even (1990, p.529), a imagem do conceito que os futuros professores têm sobre o conceito de função é determinado pelos exemplos com os quais eles se defrontaram ao longo da vida escolar e não pela moderna definição de função que enfatiza a arbitrariedade. Para a autora, o fato de que quase todas as funções encontradas no colegial e também na faculdade são do tipo que têm gráficos “agradáveis”, talvez leve os futuros professores a ter esse conceito imagem sobre gráficos de funções.

No nosso caso, nos livros didáticos de oitava série, no(s) capítulo(s) dedicado(s) ao estudo das funções, a maioria das representações gráficas é reta, ou semi-reta ou uma parábola; algumas representações recaem em uma linha poligonal ou algum tipo de linha suave como hipérbole. Excluindo essas situações, há raros exemplos de gráficos formados por um conjunto discreto de pontos. Por exemplo, encontramos dois gráficos formados por linhas pontilhadas, em Imenes e Lellis (1997, p.235) que mostram o crescimento populacional de uma cidade; em Bigode (2000, p.247), há a tarefa de observar os gráficos das funções descritas pelas leis $y = 2x$ e $y = 2x^2$, nos conjuntos dos números N, Z e R. No cômputo geral, nesses livros há um reforço do conceito imagem sobre gráficos de funções - linhas contínuas.

Outro ponto que merece atenção é o descaso dos professores com a escala, como pode ser observado no gráfico da Figura 14, além da falta de atenção de um dos professores ao construir gráficos na lousa no final da reunião. Eles também não responderam a oitava questão do Questionário II, que se refere à mudança de escala, relatado no capítulo anterior. Tudo isso nos leva a concluir que há professores, licenciados em Matemática, que apresentam as mesmas dificuldades em trabalhar com escala e proporção que professoras das primeiras séries do ensino fundamental, que não são licenciadas em Matemática, conforme relato de Monteiro e Selva, em 2001.

Por outro lado, o desapreço com a qualidade dos gráficos, ou seja, a apresentação de um esboço, sem a utilização de eixos numerados ou malha quadriculada, pode ser encontrada em certos livros didáticos para a oitava série, principalmente na construção de parábolas, como vimos no capítulo dedicado a análise de livros didáticos.

Como o livro didático é a diretriz básica do professor no seu trabalho, sem uma orientação técnica sobre proporção e confecção de uma escala, os gráficos produzidos por eles podem perder sua força instrumental, uma vez que sua utilização para o estudo do comportamento de uma função fica prejudicada.

Outro problema que detectamos foi o truncamento da dízima periódica, no tratamento da fração $\frac{5}{7}$, apesar de a maioria dos presentes ter participado de uma formação em frações durante o segundo semestre de 2003 e no início de 2004, descrita em Silva (2005) e que terminou duas semanas antes do início da nossa pesquisa. Esse truncamento levou às representações $\frac{r}{s} \cong 0{,}71428$ (no lugar de $\frac{r}{s} = \frac{5}{7}$), seguida de $r \cong 0{,}71s$.

Em sua análise sobre as dificuldades dos professores a respeito do conceito de fração, Silva observou que:

> As dificuldades apresentadas pelos professores talvez se justifiquem por uma formação inicial pouco consistente em Matemática elementar, que é agravada por uma formação profissional que, de modo aparente, não desenvolve a autonomia necessária para que se aperfeiçoem. [...] Por outro lado, a nosso ver, a ausência de autonomia faz com que a percepção pelos professores de incoerências que expõem seus próprios *não–saberes* do conteúdo, os conduz a se sentirem bloqueados a ponto de não conseguirem se apropriar da formação recebida, transformando-a em possíveis ações para a formação de seus alunos. (SILVA, 2005, p.206)

Por não terem conseguido se apropriar da formação recebida, ainda persistem dificuldades em torno do tema *fração*, que agravam as dificuldades conceituais existentes sobre função.

Para o professor Flávio, que foi gerente de banco durante muitos anos e que não participou da formação descrita em Silva (2005), a representação decimal da fração $\frac{5}{7}$ é "0,7143, com quatro casas, acabou." Problemas semelhantes foram encontrados por Dias, em 2002, que pesquisou os conceito imagem e conceito definição de reta real ao aplicar questionários em quarenta e cinco professores de ensino fundamental e médio em exercício e em formação continuada. A autora relata que "A representação decimal infinita parece não ter significado para alguns professores que admitem $0{,}666... = 0{,}666$ [...]" (DIAS, 2002, p.67).

No livro de oitava série da Coleção A (1999, p. 98), há uma igualdade entre um número irracional e outro número racional no enunciado de um exercício: "Considerando $\pi = 3{,}14$,[...]." Dessa forma, percebemos uma falta de cuidado com a escrita em livros didáticos, o que pode colaborar com a ampliação do problema detectado.

A utilização do sinal de aproximação "$\cong$" na expressão algébrica que representa uma função pode estar revelando um traço cultural, por conta da afirmação feita por um dos presentes sobre aproximação: "No Brasil, é tudo mais ou menos", diante das representações: $\frac{r}{s} \cong 0{,}71428$ e de $r \cong 0{,}71s$, mas também um desconhecimento da função semiótica do sinal de igual "=" neste contexto.

Durante a reunião, foram levantadas algumas questões sobre o papel do professor, que não deve "complicar" as coisas para o aluno e, assim, garantir o acerto. Há um contrato didático[13] tacitamente estabelecido. Mais tarde, atividades que serão desenvolvidas pelos professores para a confecção da seqüência de ensino carregarão essa marca.

Finalizando, nessas reuniões iniciais, ocorreu um primeiro reencontro com o objeto matemático *função*. Houve investimentos pessoais e coletivos na confecção de mapas conceituais, na resolução de atividades presentes no Questionário II, nos debates e confrontações, nas observações e análises, mesmo que superficiais, do

---

[13] Esta expressão é devida a Guy Brosseau, que define *contrato didático* como o conjunto de comportamentos específicos do professor, esperado pelo aluno, e o conjunto de comportamentos dos alunos, esperados pelo professor. Veja ALMOULOUD (2000, p. 81).

conteúdo de alguns livros didáticos ou apostilas. Os professores colocaram suas dúvidas em um ambiente livre de pressões e assim nos deparamos com dificuldades que já tinham sido apontadas por diversos pesquisadores sobre funções e sobre outras noções como frações, proporcionalidade. A partir desse momento, surgem suas primeiras produções escritas, que serão analisadas na seção 2.1.3.

Ao modelar a atividade do professor, Chevallard (1999, p.251) propõe seis momentos de estudo ou momentos didáticos, não necessariamente nesta ordem, ao longo do tempo: 1) primeiro (re)encontro com a tarefa; 2) exploração da tarefa e emergência da técnica; 3) construção do bloco tecnológico / teórico; 4) trabalho sobre a técnica, para melhorá-la e torná-la mais eficiente; 5) institucionalização, que tem o objetivo de tornar precisa a organização matemática elaborada; 6) avaliação, que se articula com o momento precedente.

Podemos dizer que os professores estavam vivenciando uma etapa do primeiro momento didático que, seguindo a nomenclatura proposta por Chevallard (1999, p.251), seria mimético-cultural, pois os debates mostraram que eles têm uma relação superficial com o objeto matemático *função*.

Essa etapa foi importante, pois propiciou condições para que eles pudessem iniciar um trabalho de próprio punho, pelo menos uma cópia ou recriação ou resumo de algum material disponibilizado em algum livro didático e que ainda se situa no primeiro momento didático.

2.1.2. Os professores começam a produzir

A partir da quinta reunião, realizada no dia 4 de junho de 2004, começaram a aparecer as primeiras produções dos professores. Eles se organizaram espontaneamente em três grupos (**A**, **B** e **C**), que se mantiveram estáveis até o final dessa fase.

A seguir, descrevemos as características de cada grupo, detalhamos e analisamos sua produção escrita, as discussões e identificamos os possíveis avanços.

Grupo A

Este grupo é formado pelos professores: Flávio, Juliano, Hortência e Túlio. Os dois primeiros têm quase a mesma idade e trajetórias de vida parecidas. Ambos fizeram a licenciatura na mesma universidade, nos anos 70 do século passado, trabalharam em outras atividades e começaram a ministrar aulas em escola pública há poucos anos. A professora Hortência e o professor Juliano se conhecem desde que começaram a freqüentar as formações continuadas oferecidas pela PUC-SP.

O professor Túlio, recém-chegado ao grupo, tem somente dois anos de experiência no ensino fundamental e ainda não teve oportunidade de ministrar aulas sobre funções. Sempre lecionou Física e Química no Ensino Médio. Ao preencher o Questionário I, respondeu que entende função como relação entre grandezas, coerente com a sua experiência com funções na Física. Por outro lado, na proposta que apresenta aos colegas, encontramos função como uma relação binária que obedece a determinadas condições.

Excluindo a professora Hortência, esse grupo é formado por professores que têm poucos anos de experiência no magistério, nenhum deles é professor efetivo da rede pública de ensino, seja municipal, seja estadual.

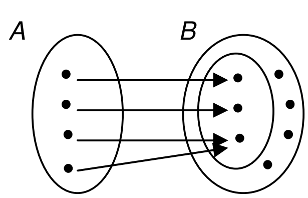
O professor Túlio considera o estudo do tema função importante "principalmente para os alunos que desejam aprofundar seus conhecimentos em álgebra*."* A seguir, transcrevemos, fielmente, o texto, o diagrama de flechas, a tabela e os gráficos produzidos por esse professor, sob o título: *Pré-requisitos para o estudo de função.*

Produto cartesiano: entendemos por par ordenado um conjunto de dois elementos, sendo: $(a,b)=(c,d)$ *se e somente se* $a=c$ *e* $b=d$*. Exemplos:* $(a,-5)=(3,b)$ *para a = 3 e b = - 5;* $(5,y+1)=(x-1,4)$ *para x = 6 e para y = 3.*

Dados os conjuntos $A=\{5, 6\}$ *e* $B=\{2, 3, 4\}$ *vamos determinar o produto cartesiano A×B: a) na forma tabular b) na forma de conjunto c) na forma gráfica.*

Definição de função: dados os conjuntos A e B não vazios, chama-se função ou aplicação de A e B $(F: R \to R,\ y=f(x))$*, a qualquer relação binária que associa a todo elemento de A, um único elemento de B.*

Em diagramas:



A: Domínio (conjunto de partida) *B: Contra Domínio (conjunto de chegada)*

C: Conjunto Imagem (elementos de B que estão relacionados com A) $C \subset B$

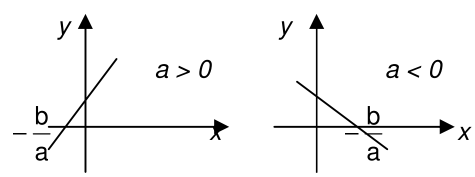
Função do 1º grau ou afim

Definição (F: R→ R) $y = f(x) = ax + b \quad (a \in \Re^* \quad b \in \Re)$

x	0	$-\frac{b}{a}$
y	b	0

Gráfico: reta $y = f(x) = ax + b$

Observação : $a \neq 0 \quad e \quad b = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = ax \quad (linear)$



Exercícios: 1) Considerando f(x) = 4x – 2, determinar: f(0), f(3) e f(7).

2)Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ *e* $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *e a relação* $R = \{(x, y) \in AXB \mid y = x + 1\}$ *determine: a) os pares ordenados, b) domínio e o conjunto imagem. c) diagrama de flechas, d) o gráfico cartesiano. (Professor Túlio, 4/06/2004).*

A organização matemática desse material gira em torno dos tipos de tarefa: conceituar função como relação binária e como expressão analítica. Consideramos que as tarefas propostas são insuficientes para distinguir função de relação em gráficos, tabelas, expressões algébricas, conjuntos formados por pares ordenados, diagramas de flechas. Não há explicações sobre a razão de ser dessas tarefas nem de técnicas para as mesmas.

Podemos verificar que, nesse material, não há uma explicação sobre o que é e sobre quais são os elementos de um produto cartesiano; não se define relação; não se identificam os elementos dos conjuntos A (domínio), B (contradomínio) e C (conjunto-imagem), que são "bolinhas"; não há explicações sobre a passagem do diagrama de flechas genérico para a representação gráfica, algébrica e tabular de uma função polinomial de 1º grau; sobre a passagem do discreto para o contínuo, ao apresentar formalmente a função polinomial do 1º grau; apresenta a tabela sem justificativas para os valores escolhidos para a variável x e nem uma palavra sobre a importância de determinar o zero de uma função polinomial do 1º grau; não há explicações sobre o fato de o gráfico de uma função polinomial ser uma reta; nem da relação entre a inclinação da reta e o sinal do coeficiente “a” em $y = f(x) = ax + b$. Além disso, considera o domínio da notação como pré-requisito.

Diante do exposto, consideramos que a frágil organização didática apresentada pelo professor Túlio não é adequada para ser uma proposta para o ensino e a aprendizagem de função para uma oitava série. Além disso, não há atividades[14] sobre interdependência de grandezas, padrões de regularidade para a introdução do conceito de função nessa série, conforme as sugestões contidas nos PCNs de Matemática, de 1998, cujo eixo organizador é a resolução de problemas:

> A situação-problema é o ponto de partida da atividade Matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. (PCNs , MEC, 1998, p.40).

O material trazido pelo professor Túlio pode ser considerado um resumo, pois ele considera que “[...] é o professor que tem que pesquisar, fazer um resumo e depois passar para o aluno [...]” (professor Túlio, 4/06/2004).

Na nossa análise de livros didáticos, vimos a apresentação de diagramas de flechas para conjuntos finitos que, de repente, desaparecem, para dar lugar às definições e gráficos de funções polinomiais de 1º e 2º graus. Dessa forma, o professor Túlio reproduz, de maneira sucinta, a falta de articulação entre os tipos de tarefas encontradas muitas vezes nesses livros, como vimos na Parte I, no capítulo 2.

Além disso, no resumo do professor Túlio, parece que os ostensivos falam por si mesmos. Nessa situação, estaria ocorrendo aquilo que Guy Brousseau *apud* Bosch e Chevallard (1999, p. 92) denomina de “estratégias didáticas de ostensão”, ou seja, a prática onde o professor se limita a mostrar aos alunos um ostensivo, acreditando que, dessa forma, se cria espontaneamente uma relação adequada com esses ostensivos e principalmente com os não-ostensivos evocados por eles.

Ao conversarmos com esse professor, procuramos motivá-lo a procurar situações de mudança, de variação, de dependência funcional encontradas no mundo real, tais como a variação do volume de água em um reservatório em função

---

[14] Neste trabalho, denominaremos atividade todo e qualquer exercício copiado ou construído pelo professores. Evitamos a denominação situação-problema, pois nem toda atividade pode ser caracterizada como tal.

do tempo, a conta de luz e o consumo de energia elétrica, pois consideramos válidas as afirmações de Sierpinska (1992, p.31). Para essa pesquisadora, a noção de função é o resultado do esforço humano para compreender as mudanças que ocorrem no mundo e propõe os primeiros atos para a compreensão de função: 1) a identificação das mudanças observadas no mundo real como um problema prático para ser resolvido; 2) identificação de regularidades nas relações entre mudanças como um caminho para lidar com elas.

Entretanto, Túlio não fez nenhuma observação sobre a nossa proposta de trabalhar com interdependência de grandezas nem apresentou qualquer outro material nas reuniões subseqüentes.

Em sua pesquisa, Pinto (1999) relata que há professores de Matemática que têm uma restrita visão de álgebra, pois não incluem em seu repertório noções como interdependência de grandezas, variáveis e variação. Apesar de lecionar Física, temos a impressão de que o professor Túlio não está conseguindo lidar com as relações entre grandezas na Matemática.

As palavras desse professor mostram que ele espera receber tudo pronto: "[...] os conhecimentos que me serão passados na PUC [...]." Sobre isto, Ponte (1992, p.225) afirma que um dos grandes problemas que afeta o alcance dos programas de formação é a expectativa dos professores participantes de receber idéias imediatamente aplicáveis e não para se envolverem em um processo de formulação de problemas.

A concepção de ensino desse professor vem à tona quanto diz que "[...] é o professor que tem que pesquisar, fazer um resumo e depois passar para o aluno [...]." Esta última afirmação, junto com a anterior "[...] os conhecimentos que me serão passados na PUC [...]", estão de acordo com uma visão de ensino como transmissão cultural de conhecimentos. Segundo Pavanello (2002, p.76), esse modelo tem sido privilegiado na universidade, em especial, nos cursos de formação de professores.

O professor Túlio, atuando sempre como coadjuvante, deixou a formação quatro semanas após ter entregue a sua proposta, que não foi levada em consideração pelos colegas do grupo A. Dessa forma, não conseguimos observar uma evolução de suas concepções sobre ensino e aprendizagem, sobre as diversas concepções de função, sobre o papel do professor.

O professor Juliano, que já ministrou aulas sobre funções, tem um ponto de vista diferente daquele apresentado pelo professor Túlio, pois pretende estabelecer o conceito de função a partir de situações do dia-a-dia. Transcrevemos o primeiro roteiro que esse professor apresenta aos colegas, sob o título - *Estabelecer conceitos de função*:

> Relacionar as várias definições de função pesquisadas em dicionários. Tornar clara a compreensão das definições. Estabelecer conceito de função no cotidiano através de exemplos. Usar variáveis em tabelas. Dar exemplo de domínio e imagem. Dar exercícios com tabelas, figuras geométricas onde se possa aplicar a função e sua lei. Dar exemplo de entrada e saída de "máquinas." Função constante: localizar pontos no plano, exemplos, definição. Função do 1º grau: definição, exemplos. Análise de gráficos. Função quadrática. (Prof. Juliano, 04/05/2004).

Esse roteiro é a sua primeira iniciativa e é parcialmente coerente com as informações encontradas no Questionário I, pois pretende estabelecer o conceito de função no cotidiano. Inclui a apresentação de função como "máquina", o uso de tabelas, domínio e imagem, ausentes no mapa conceitual. Quanto à organização matemática delineada nesse texto, encontram-se as seguintes tarefas: relacionar definições, compreender definição, estabelecer o conceito, usar variáveis, dar exemplos de domínio e imagem, dar exemplo de entrada e saída de "máquinas", localizar pontos, analisar gráficos, dar exercícios com tabelas.

As primeiras tarefas estabelecidas nesse roteiro foram: relacionar as várias definições de função pesquisadas em dicionários; tornar clara a compreensão das definições; e estabelecer conceito de função no cotidiano por meio de exemplos mostram uma combinação de concepções de ensino de Matemática. Iniciar um tema pela definição, sem dar atenção aos processos que a produziram, é ter uma concepção formalista moderna do ensino de Matemática, segundo Fiorentini (1995, p.16). Todavia, esse mesmo autor (1995, p.12) acredita que trabalhar com situações-problema do dia-a-dia para estabelecer um conceito revela uma concepção empírico-ativista de ensino de Matemática.

A professora Hortência também considera válido começar o estudo de um tema com a manipulação de um dicionário, além de acreditar que o aluno tem que entender sentenças do tipo “Maria vive em função de João”, ou seja, o uso corrente da palavra função, fora do âmbito da Matemática.

Há o fato de os PCNs (1998), de uma maneira geral, valorizarem a pesquisa escolar e considerem o dicionário um dos recursos didáticos. Além disso, existem autores de livros didáticos que solicitam pesquisas em um dicionário. Por exemplo, no capítulo dedicado a funções, Imenes e Lellis (1997, p.222) pede ao aluno que procure no Dicionário Ilustrado, localizado no final do livro: o que é proporcionalidade, o que é Galileu Galilei (e não quem é). Mais à frente, no mesmo capítulo, o autores (Imenes e Lellis, 1997, p.233) orientam o aluno a procurar o sentido de simetria. Verificamos que esses autores, nas suas recomendações, encontradas no Manual Pedagógico do livro do professor (1997, p.12), orientam o professor a incentivar seus alunos a buscar os significados quando surgem palavras novas. Desta forma, a sugestão desses autores pode reforçar a idéia de que a simples leitura de uma definição em um dicionário seja o suficiente, mesmo que esse não tenha sido o seu objetivo.

Os integrantes do grupo A não mudaram seu ponto de vista, mesmo depois de ouvir o professor Flávio ler a definição de função em um mini-dicionário de termos matemáticos e fazer alguns comentários do tipo: ”Eu não entendo o conceito. Como vou entender o que o aluno entende?”.

A questão da pesquisa de definições matemáticas em um dicionário foi detectada por Silva (2005, p.176), que, ao pedir a professores que construíssem uma seqüência de ensino sobre frações para quinta série, também se defrontou com a solução proposta por alguns docentes: iniciar a seqüência, solicitando aos alunos que pesquisassem no dicionário o que era fração. A discussão que essa pesquisadora teve com os professores sobre essa questão não teve efeitos duradouros sobre Juliano e Hortência, que também participaram da formação sobre frações e são mencionados em Silva (2005), com outros pseudônimos. A repetição das mesmas ações mostra o quanto é difícil uma mudança na concepção do que seja uma pesquisa escolar, em Matemática, que fica restrita à procura de uma definição em dicionário.

Após conversarmos com os professores desse grupo sobre a prática de introduzir o conceito de função pela pesquisa da definição do termo em dicionários, eles começaram a consultar livremente os livros de Matemática (oitava série, primeiro ano do ensino médio) disponíveis no ambiente.

A seguir, descreveremos e analisaremos as três atividades trabalhadas por esse grupo. Elas consumiram o tempo de três reuniões e mostram o caminho da cópia à criação.

A primeira atividade que chamou a atenção da professora Hortência envolve duas grandezas interdependentes. Segue o enunciado, tal como se encontra no livro:

> Seu Artur, o marceneiro, cobra pelos seus serviços R$12,00 por hora trabalhada. Assim, o serviço do seu Artur (y) pela confecção de certo objeto é função da quantidade de horas trabalhadas (x). a) Qual é a lei de formação dessa função? b) Qual o preço cobrado por seu Arthur na confecção de um objeto que levou 8,5 horas parar ser feito?

Flávio, Juliano e Hortência começaram a reformular o problema e Túlio só observou. Eles discutiram a ordem das tarefas que pretendiam incluir: construção de tabela e de gráfico. O professor Juliano acredita que deva ser feito um diagnóstico entre os alunos para averiguar se eles sabem o que é uma tabela e que a convenção para o uso das letras x e y deva ser estabelecida depois da construção da tabela.

O professor Flávio perguntou o que era tabela, pois ele queria saber dos colegas o que deveria responder ao aluno, caso ele apresentasse essa dúvida.

O professor Juliano escreveu uma tabela com horas trabalhadas e o respectivo valor cobrado, de hora em hora, até dez horas; a expressão algébrica $y = 12x$, desenhou os eixos e determinou uma escala, sem utilizar uma régua; localizou os pontos, a partir das informações da sua tabela e traçou uma semi-reta. O resultado está na Figura 15, que mostra o gráfico do valor cobrado pelo marceneiro em função das horas trabalhadas.

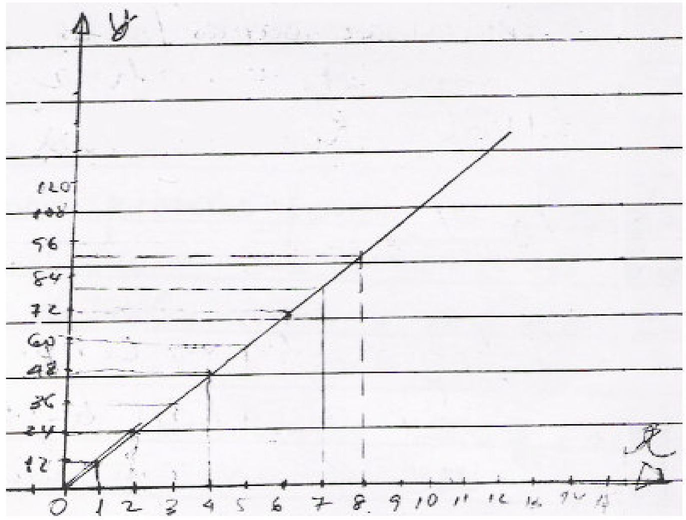


Figura 15 - Gráfico construído pelo professor Juliano.

Sobre a construção do gráfico, a professora Hortência disse acreditar que, se não forem ligados os pontos em um gráfico, ele não será o gráfico de uma função. Apesar das discussões anteriores, a fala da professora Hortência revelou o quanto é persistente a questão de unir os pontos. O professor Flávio disse ser da opinião de que o marceneiro não cobrava somente a hora inteira, mas também "parte da hora" e, por isso, pode-se unir os pontos.

Discutimos com esses professores se, de fato, os marceneiros cobram seus honorários dessa forma e apresentamos alternativas para a cobrança de serviços, que poderiam estar acontecendo na vida real, mas a solução aceita pelo grupo foi aquela apresentada pelo professor Juliano. Tudo leva a crer que a marcenaria não faz parte do dia-a-dia desses professores; assim, eles fabricaram a solução que lhes parecia ser a mais conveniente para seus propósitos de trabalhar o conceito de função. Em nenhum momento surgiu uma solução que originaria um gráfico do tipo escada.

A seguir, o grupo apresentou diversas propostas de como redigir os itens referentes à construção de tabela, à determinação da lei e à construção do gráfico:

> Nesse problema tem informações. a) Quais são esses dados? Com esses dados, construa uma tabela. b) Construa uma tabela. A partir da tabela, demonstre uma expressão. c) Construa uma tabela. Construa uma expressão. d) Verifique se esses dados são válidos para outros valores da tabela. e) Construa um gráfico com os dados da tabela. f) Represente graficamente. g) Qual a lei de formação? h) Os dados da tabela são proporcionais ou não? I) Por que o gráfico representa uma reta? (GRUPO A, 04/06/2004*)*

Podemos constatar que estamos diante da criação de uma organização matemática em torno do tipo de tarefa: conceituar função como relação entre duas grandezas; estas tarefas não se encontram no texto original. Também há uma preocupação em construir uma organização didática, pois experimentam diversos textos, questionam-se sobre a ordem dos itens – se devem pedir primeiro uma tabela ou uma expressão algébrica, pensando na compreensão do aluno.

É interessante notar, de um lado, a inclusão de um item sobre proporcionalidade e o pedido de uma justificativa tecnológica - por que o gráfico é uma reta? De outro lado, a verificação da proporcionalidade aparece como uma tarefa isolada das demais.

Esse grupo não tomou uma decisão sobre a redação final da atividade. Além disso, não explorou a noção de variável, de dependência e não apresentou orientações para o aluno sobre a construção do gráfico do valor cobrado em função das horas trabalhadas. Terminou a reunião e essa atividade não foi mais retomada, pois uma das características desse grupo era não retomar àquilo que fora feito na semana anterior.

Na reunião seguinte (18 de maio), o professor Flávio sugeriu uma atividade que envolvesse um restaurante que trabalha no sistema por quilo, mas se recusou a colaborar na elaboração da tarefa. Ele estava nervoso, e com a voz alterada, falou sobre escola pública, a falta de interesse dos alunos, a indisciplina e o desrespeito. Foi preciso que todos que estavam à sua volta ouvissem atentamente o seu desabafo sobre as tensões e dilemas vividos nas relações com alunos e com a diretora.

Acreditamos que múltiplos fatores tenham desencadeado esse desequilíbrio pessoal do professor Flávio: ingresso tardio no magistério, por necessidade e não por opção; a precariedade do vínculo empregatício, aliado a um baixo salário; a perda de status social (de gerente de banco a professor). Além disso, parece que ele não está conseguindo se adequar à escola pública atual, com a sua carga de desafios. Depois de quase uma hora de conversa, o professor Flávio, mais tranqüilo, começou a ajudar o professor Juliano na elaboração do enunciado e das tarefas dessa nova atividade denominada “Restaurante Fome Zero”.

Eles escreveram no cabeçalho a informação: “O restaurante cobra R$ 1,30 pelo consumo de 100g de comida” e construíram a Tabela 3, que mostra o valor cobrado em função da quantidade de comida consumida pelo cliente.

Tabela 3 - Preços no “Restaurante Fome Zero”

Peso (g)	Valor (R$)
100	1,30
200	2,60
300	3,90
400	5,20
500	6,50
600	7,50
700	9,10
800	10,40
900	11,30
1000	13,00

A seguir, propuseram um texto que informava o consumo de quatro pessoas e criaram tarefas:

> Algumas pessoas foram ao restaurante e consumiram as seguintes quantidades de alimentos, mais uma lata de refrigerante de R$ 1,20 cada. A pessoa A consumiu 250g, B consumiu 320g, C consumiu 410g e D consumiu 520g.
>
> 1) Qual o valor pago por cada pessoa? 2)Olhando a tabela, qual a lei de formação da função? O que é lei? 3)Qual é a função que relaciona o peso (p) ao valor a ser pago (V)? 4) Notamos que precisamos atualizar a tabela ou apenas faríamos o uso da lei se o consumo fosse de 250g, 210g e 180g? 5)Se uma pessoa consome, em média, 400g por dia, de segunda a sexta-feira, em 4 semanas, quantos por cento, em relação a um salário mínimo (R$ 260,00) ela gastaria? (Grupo A, 18/06/2004).

Consideramos um avanço a construção de uma organização matemática em torno deste tipo de tarefa: conceituar função como relação entre grandezas com a criação de enunciado e de tarefas, a partir de uma realidade social da sociedade brasileira em que restaurantes por quilo estão disseminados em muitas cidades.

A atividade utiliza valores efetivamente praticados pelo mercado, pois R$13,00 por quilo de comida é um dos preços encontrados na cidade de São Paulo, no ano de 2004; também mostra a prática comum de informar o preço de cem gramas de comida. Outro ponto interessante é a preocupação com o social que se evidencia pela associação entre nome do restaurante (Fome Zero) e valor do salário mínimo então vigente. Dessa forma, o enunciado se coaduna com as sugestões encontradas nos PCNs de Matemática, de 1998. Acreditamos que haja um conhecimento tácito de algumas sugestões encontradas nesse documento e que não provém de leituras, como atestam as respostas obtidas no Questionário I.

Entretanto, não há referência a tarefas sobre tabela e construção de gráficos; não se evoca a proporcionalidade exibida na tabela; a noção de variável não é trabalhada. Além disso, o enunciado do item 2) revela o ponto de vista de que basta olhar a tabela para fazer a passagem de uma tabela numérica para a fórmula. Não está claro se a expressão algébrica pedida é $V = 13p$ (p em kg) ou $V = 0{,}013p$ (p em gramas), pois há diversas informações no enunciado: o restaurante é por quilo, cobra R$1,30 pelo consumo de 100 g de comida e, na tabela, a informação sobre quantidade de comida é dada em gramas. O conceito de função não foi explicitado na atividade anterior e os professores não se questionaram sobre pertinência do enunciado do segundo e terceiro itens, neste momento. Não está claro o significado de atualizar tabela, no quarto item. Para completar, os professores não fazem um levantamento das possíveis dificuldades dos alunos para resolver as tarefas pedidas.

Essa atividade não será retomada pelo grupo A nas semanas seguintes. Mais adiante, na terceira fase, ela será reformulada pelo professor Juliano, único remanescente desse grupo, e discutida coletivamente. A versão final desta atividade se encontra no ANEXO B - *Seqüência de ensino*.

Na próxima reunião (dia 25 de junho), estavam presentes os professores Juliano, Flávio e Túlio. Nessa manhã, o professor Juliano abriu um livro de Matemática no capítulo sobre semelhança de figuras. Ele estava interessado em mapas e escalas. Olhava as figuras e lia os textos.

Juliano e Flávio falaram sobre proporcionalidade e escala ao observar dois mapas semelhantes, mas não conseguiram perceber a existência de uma transformação do plano (homotetia). A seguir, o professor Juliano abriu um livro de sétima série, onde se encontra um mapa do Brasil, que mostra parte dos Estados de Minas Gerais, Espírito Santo e Rio de Janeiro, um triângulo com vértices nas cidades de Guarapari, Contagem e Barra Mansa. No livro, ao lado do mapa, há uma indicação da escala utilizada, como mostra a Figura 16.

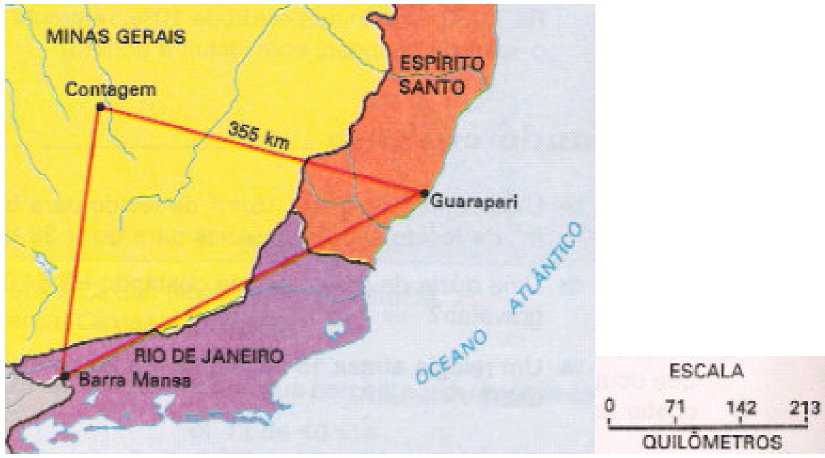


Figura 16 - Mapa e escala

Fonte: Bongiovanni *et al.*, 7ª série, 1996, p.54

Diante dessa situação, o professor Flávio afirmou prontamente que há uma função do tipo $y = ax$ sendo que o coeficiente "a" é a escala. Está claro que a afirmação feita anteriormente pelo professor Flávio, a de que não entendia de funções, não é tão verdadeira assim. Juliano o estimulou a criar uma atividade, envolvendo funções, delegando-lhe a incumbência de criar novas tarefas.

Flávio começou a ditar o enunciado: "A distância entre Guarapari (ES) e Contagem (MG) é de 355 km. Calcule a distância aproximada entre Contagem e Barra Mansa (RJ) e entre Barra Mansa e Guarapari." (BONGIOVANNI *et al.*, 7ª série, 1996, p.54).

Juliano acreditou que, a partir desse enunciado, os alunos pudessem ter dúvidas para resolver a tarefa de calcular a distância entre as cidades e Flávio propôs uma nova redação para a atividade:

> Usando a régua, determine a distância, em centímetros, de Contagem a Guarapari, para obtermos a escala, ou seja, a conversão da medida ilustrada no mapa. Com essas medidas, podemos determinar as medidas reais entre as cidades? Podemos afirmar que a distância entre as cidades a qual chamaremos de y, será igual ao valor encontrado com o uso da régua, multiplicado pelo valor da escala? (Professor Flávio, 25/06/2004).

Verificamos que as explicações encontradas nesse texto não se relacionam com as informações contidas na representação da escala, ao lado do mapa, na Figura 16.

Juliano resolveu a questão e escreveu $y = ax$ e depois $y = 71x$ (de acordo com o mapa que eles estavam olhando). Ele sugeriu a construção de um gráfico, utilizando as informações que poderiam ser obtidas no mapa que tinha em mãos.

Dessa maneira, os dois professores conseguiriam delinear uma organização matemática em torno do tipo de tarefa: conceituar função como interdependência de grandezas.

Consideramos positivo o fato de os professores Juliano e Flávio terem extraído dados de um livro de sétima série, de um capítulo sobre razões e proporções onde não se faz nenhuma menção a funções e terem criado um enunciado. Apesar da articulação entre conteúdos de diversas disciplinas ser uma das sugestões encontradas nos PCNs de Matemática (1998, p.139), essa conexão entre mapas, escala e função linear não é usualmente encontrada nos livros didáticos de Matemática de oitava série.

Entretanto, esse grupo não conseguiu terminar essa atividade, detalhando o enunciado de cada tarefa e não a retomou, para finalizá-la, na semana seguinte; a proporcionalidade não foi explicitada; não apareceu a sugestão de completar uma tabela nem de como construir um gráfico; a noção de variável não foi trabalhada. Também não aprofundaram o discurso tecnológico sobre escala.

Em resumo, Hortência, Flávio e Juliano trabalharam com grandezas diretamente proporcionais, nas três atividades: do marceneiro, do restaurante, do mapa, mas a proporcionalidade foi lembrada somente na primeira atividade. Além disso, não houve referência explícita à função linear nem atenção para o coeficiente de proporcionalidade: 12 reais por hora, 13 reais por quilo, 71 quilômetros para cada centímetro no mapa, respectivamente. As noções de variável, variação ou taxa de variação não foram mobilizados nessas três atividades.

Podemos considerar que, semana a semana, paulatinamente, esse grupo avançou, a partir da sugestão de mandar o aluno pesquisar a palavra *função* em um dicionário: a reformulação de uma atividade encontrada em um livro de oitava série, a criação de uma nova atividade, a partir de uma situação do dia-a-dia e, por último, a percepção de uma situação funcional em um livro de outra série.

Na última reunião dessa fase, ocorrida no dia 2 de julho, os professores Juliano, Flávio, Hortência e Túlio discutem os objetivos e os pré-requisitos necessários para o ensino de função, a partir da leitura de um novo roteiro trazido pelo professor Juliano, que seguiu um ideário tecnicista e não fez nenhuma referência às atividades construídas nas últimas semanas:

> Roteiro para o ensino de funções. Objetivos: Fazer com que o aluno assimile conhecimentos sobre função no dia-a-dia e coloque em prática. Procedimentos: a) Escolher um problema qualquer do cotidiano e resolver mostrando ao aluno passo-a-passo sua solução. b) Fazer um novo problema e pedir que o aluno encontre a solução seguindo as orientações dadas no problema no item anterior. (professor Juliano, 02/07/2004)

Esse professor, que em uma reunião anterior tinha afirmado que “é preciso ver o lado crítico da metodologia”, não conseguiu perceber que os procedimentos que constavam desse roteiro não se coadunavam com as atividades que o grupo estava tentando propor nas últimas semanas: do marceneiro, do restaurante e do mapa, tanto que Hortência discordou dos procedimentos citados.

Eles começaram a ter a percepção de que era preciso voltar aos objetivos. O professor Flávio, trabalhando isoladamente, copiou os objetivos para um estudo significativo de função, que se encontra no Manual do Professor (BIGODE, 2000, p.43). O fato despertou o interesse dos demais, que pediram que ele lesse aquilo que acabara de copiar, mas não conseguiram avançar e escrever os objetivos das atividades que haviam sido esboçadas.

Essa foi a última reunião do grupo A, que deixou como legado obras inacabadas, isoladas, sem um texto que explicitasse os objetivos de cada atividade: do marceneiro, do restaurante e do mapa. Acreditamos que as dificuldades encontradas em elaborar atividades: enunciado e tarefas, também se estendam para a escrita de objetivos, pois eles se traduzem em (tipos) tarefas.

Além disso, esse foi um grupo sem memória, pois ninguém se responsabilizou pela digitação das anotações e não houve preocupação em retomar as atividades inacabadas nem em organizá-las em uma seqüência. O professor Juliano, o único que trouxe algum material escrito, não retomou o seu primeiro roteiro ao apresentar o segundo, nem o confrontou com o que fora produzido durante as reuniões.

Esse grupo se sustentou, precariamente, como cooperativo, na classificação proposta por Fiorentini (2004, p.50), pois Tulio foi passivo, Hortência nem sempre esteve presente, Juliano sempre tinha que estimular Flávio para que ele o ajudasse durante as reuniões.

Diante do exposto, podemos dizer que o grupo A teve um fraco compromisso com o seu desenvolvimento profissional. Individualmente, o professor Juliano foi o mais interessado. Apesar de sua pouca experiência como professor, foi o único a permanecer até o final do projeto. Ele teve o papel de observador no experimento-piloto planejado pelo grupo B.

Socializamos as informações, enviando por *e-mail*, aos outros participantes da formação, as seguintes atividades: marcenaria, restaurante por quilo, mapa, além daquela que se encontrava no novo roteiro do professor Juliano, também sobre grandezas diretamente proporcionais. Somente a atividade do restaurante sobreviveu e foi re-elaborada coletivamente na terceira fase.

Grupo B

Esse grupo é formado pelos professores Pérola, Margarida, Marcos, que trabalham na mesma escola pública, e pela estudante Bruna.

A escola é aquela descrita na Parte II, Capítulo 1, e cuja diretora esteve disposta a facilitar o desenvolvimento profissional dos professores, incentivando a participação deles em grupos de pesquisa e experimentação em sala de aula. Esse é um ambiente propício para a formação continuada de professores:

> O tipo de cultura que existe num centro facilita ou dificulta o desenvolvimento dos processos de formação autônomos, de colaboração e de formação centrada na escola. A própria história passada e presente de um centro educativo influencia claramente a possibilidade de implementar modalidades de formação mais próximas da prática."(GARCIA, 1999, p.195).

Além dessas condições, esses professores apresentavam uma história de engajamento em outros projetos de formação continuada e de experimentação. Foi esse mesmo grupo que aplicou uma seqüência de ensino sobre frações em uma sala de quinta série, em 2003. Em Silva (2005) encontramos a descrição e análise dessa aplicação; os professores estão com outros pseudônimos.

Pérola e Marcos são professores efetivos, aprovados em concurso público, têm oito anos de experiência no magistério e já ministraram aulas sobre funções, conhecem livros que seguem as orientações dos PCNs (1998) de Matemática.

Marcos, Pérola e Margarida prepararam a seqüência de ensino na escola, nas horas de trabalho pedagógico coletivo - HTPCs - e trouxeram sete atividades, extraídas de diversos livros e apostilas, para serem discutidas na sexta reunião.

Cinco atividades, dentre as sete, foram ligeiramente modificadas e aplicadas em uma escola pública no dia 6 de julho de 2004, por iniciativa do próprio grupo; elas se encontram no ANEXO A - *Experimento piloto*.

Com a experiência adquirida em formações anteriores, Margarida, Pérola e Marcos foram os únicos professores que procuraram fazer uma análise *a priori* de algumas das atividades que escolheram para compor uma seqüência de ensino.

Nessa seqüência, encontramos os seguintes tipos de tarefas: manipular materiais concretos, conceituar função como relação entre grandezas, conceituar função como máquina de entrada e saída, conceituar função como padrão de regularidade, conceituar função como padrão de seqüências numéricas ou geométricas. Também incluíram a tarefa: identificar variável dependente.

Segue uma análise das organizações matemáticas bem como das organizações didáticas, dos objetivos e das análises *a priori*, para cada uma das sete atividades.

A primeira atividade escolhida, extraída de um livro didático analisado na parte I, capítulo 2, seção 2.3.6, tem o título *Dobrando papel* e o seu enunciado: “Vamos dobrar a folha de papel e contar em quantas partes ela fica dividida.” Os objetivos estabelecidos pelos professores para essa atividade foram: relacionar as variáveis, perceber a dependência e expressar na língua materna a “lei da função.”

Do enunciado original para o texto apresentado pelos professores, ocorre:

i) a criação de uma tabela:

Número de dobras	1dobra	2 dobras	3 dobras
Número de partes	2 partes	4 partes	8 partes

ii) a criação das tarefas:

> a) Se pudermos continuar, com 5 dobras, quantas seriam as partes? E com 8 dobras? b) E quando o número de partes for 1024, quantas dobras foram feitas? c) Para confeccionar 1024 etiquetas, quantas dobras serão necessárias? d) Qual é a sua conclusão? (Grupo B, 18/06/2004).

As tarefas pedidas podem levar o aluno a perceber, implicitamente, uma dependência entre número de dobras e número de partes. Mas, não há uma tarefa para atingir o objetivo proposto por esse grupo: expressar na língua materna a “lei da função.”

Na análise *a priori* feita pelos professores, para cada item, há uma preocupação com as maneiras de resolver as tarefas, isto é, com a técnica:

> A princípio, o aluno completaria a tabela com a quarta e a quinta dobra e encontraria o resultado. Com oito dobras, daria muito trabalho e tentaria fazer sem a tabela. Alguns alunos irão fazer mentalmente. Provavelmente, na conclusão, o aluno dirá que o número de partes depende do número de dobras. A cada dobra, a parte duplica. Dobrar uma vez tem duas partes, dobrar duas vezes tem quatro partes, pensa na potência. (Grupo B, 18/06/2004)

Os professores comentaram as possíveis atitudes dos alunos frente à atividade e um deles apostou na possibilidade de que alguns alunos não utilizariam a folha de papel fornecida pelo professor para fazer as dobras e contar as partes.

Trataram das possíveis respostas que poderiam surgir em relação à pergunta: “Qual é a sua conclusão?”, cuja pertinência em uma primeira atividade será reavaliada pelos professores somente após a aplicação do piloto. Alteram o terceiro item, que tem a seguinte redação: “c) A professora Vera disse que, dobrando quatro vezes o papel conseguem-se oito partes. Ela está correta?”.

Essas considerações mostram a preocupação dos professores com uma organização didática. Eles optam por uma tabela, por perguntas e por uma expressão verbal, exigindo dos alunos a redação de um pequeno texto. Pressupõem que a dependência seja uma conclusão que irá surgir naturalmente entre os alunos, mas não dizem o que fazer caso isso não ocorra.

No Manual Pedagógico do Professor que acompanha o livro onde os professores extraíram essa atividade, há explicações sobre o papel desempenhado pelos materiais concretos:

> Eles fornecem experiências físicas, sensoriais e motoras, que auxiliam a reflexão e a percepção de fatos matemáticos. Evidentemente a Matemática não está nos objetos em si, mas é, em muitos casos, construída na mente do aluno com base na experiência proporcionada pelos objetos. (IMENES e LELLIS, 1997, p.81).

Nessa experiência, a ação de dobrar uma folha de papel ao meio e contar o número de partes obtidas esbarra em uma limitação física: só é possível fazer no máximo cinco dobras em uma única folha. Assim, não é mais possível utilizar o material concreto para determinar o número de dobras necessárias para obter 1024 partes. Mais à frente, faremos outras considerações sobre a utilização de materiais concretos em sala de aula, na sétima atividade proposta por esse mesmo grupo.

A segunda atividade, cópia de um material didático produzido para uma sexta série, denomina-se *Brincando no parque*, seguida pelo exercício sobre uma corrida de táxi (veja ANEXO A). Para os professores, os objetivos dessa atividade são relacionar variáveis, determinar a lei na linguagem matemática, usar tabela e comparar tabelas.

A professora Margarida comentou que tinha aplicado essa atividade nas suas aulas. Ela acreditava que se fosse dado um modelo resolvido, o aluno faria o próximo exercício - *corrida de táxi*, baseando-se no modelo anterior. Sua convicção de que este é o melhor caminho para introduzir o conceito de função, revela um indicativo de uma concepção tecnicista de ensino de matemática. Com efeito, segundo Fiorentini:

> [...] o caráter tecnicista desses manuais se manifesta quando estes passam a priorizar objetivos que se restringem ao treino / desenvolvimento de habilidades estritamente técnicas. Os conteúdos, sob esse enfoque, aparecem dispostos em passos seqüenciais em forma de instrução programada onde o aluno deve realizar uma série de exercícios do tipo - resolva os exercícios abaixo, seguindo o seguinte modelo [...] (FIORENTINI, 1995, p. 16).

Como a professora Margarida, de alguma forma, testou e validou esse caminho em uma situação vivida na sala de aula, a experiência a impediu para outras opções, como apregoa Ponte:

> As concepções têm uma natureza essencialmente cognitiva. Actuam como uma espécie de filtro. Por um lado, são indispensáveis, pois estruturam o sentido que damos às coisas. Por outro lado, actuam como elemento bloqueador em relação a novas realidades ou a certos problemas, limitando as nossas possibilidades de actuação. (PONTE,1992, p. 185).

A problemática de apresentar um exercício resolvido e depois pedir outros parecidos será objeto de discussão na segunda fase, após a aplicação do experimento piloto.

As tarefas encontradas na atividade *Brincando no parque* giram em torno do tipo de tarefa: conceituar função como relação entre grandezas.

Nessa atividade, há um texto que tenta explicar, de maneira vaga, que o valor gasto por uma criança no parque depende do número de brinquedos, mas não é mencionada a palavra variável:

> Chiquinho brincou tanto que esqueceu em quantos brinquedos brincou. Você seria capaz de descobrir quanto Chiquinho gastou? É claro que não dá para descobrir quanto Chiquinho gastou, você pode

> estar pensando, se a gente não sabe em quantos brinquedos ele brincou. Mas, você saberia calcular quanto Chiquinho gastaria se soubesse em quantos brinquedos ele foi, não é mesmo? (Grupo B)

A seguir, o texto apresenta a maneira de calcular o gasto do menino e utiliza símbolos e expressões verbais:

Veja se você concorda com o seguinte modo de calcular o gasto de Chiquinho

Entrada

Preço de cada brinquedo

Se você conhecer este número você poderá conhecer o seu gasto

A próxima sentença apresentada na atividade copiada pelos professores não esclarece a distinção entre incógnita e variável: "As pessoas que trabalham com Matemática, em situações como esta, elas usam símbolos para representar valores numéricos desconhecidos". (Grupo B).

O parágrafo seguinte procura explicar a passagem da expressão a respeito do gasto de Chiquinho para uma expressão algébrica:

> Os símbolos que podem ser usados são as letras (de qualquer alfabeto), expressões formadas por letras ou mesmo alguns desenhos. Considerando a letra G como Gasto de Chiquinho e n o número de brinquedos, a frase do Gasto de Chiquinho passaria a ser escrita assim: $G = 2{,}00 + 0{,}50n$. Se você fizer isto que sugerimos, você estará escrevendo na linguagem algébrica. (Grupo B).

O texto acima não explica que o gasto é função do número de brinquedos e que, se o número de brinquedos varia, o gasto também varia; ou que o gasto depende do número de brinquedos. Dessa forma, a fórmula tem um caráter estático e não de uma dependência funcional.

De acordo com a professora Margarida, após a leitura do exemplo resolvido, com todas as considerações descritas acima, o aluno poderia resolver, sem dificuldades, as próximas atividades, uma vez que bastaria seguir o modelo pronto. A concepção de ensino dessa professora determinou a organização didática escolhida: um texto que se propõe a explicar o que é e para que serve a linguagem algébrica e uma série de instruções, pois "As concepções condicionam a forma de abordagem das tarefas, muitas vezes orientando-nos para abordagens que estão longe de ser as mais adequadas." (PONTE,1992, p.196).

O enunciado da terceira atividade, copiada de um livro didático de oitava série, denominada *Alugando carro* (veja ANEXO A - *Experimento Piloto*), mostra uma pessoa que tem que tomar a decisão de escolher a locadora de carros mais vantajosa dentre três, pois cada uma oferece condições diferentes: a primeira cobra uma taxa de R$ 100,00 e um aluguel diário de R$ 50,00 ; a segunda não cobra taxa, mas o aluguel diário é de R$ 60,00 e a terceira cobra uma taxa de R$ 150,00 e o aluguel diário é de R$ 20,00 .

Os participantes do grupo B propuseram os seguintes objetivos para essa atividade: relacionar variáveis, determinar a lei na linguagem materna, usar tabela e comparar tabela. Consideramos essa lista incompleta, pois a finalidade principal dessa atividade é analisar simultaneamente as condições oferecidas por cada uma das três locadoras e determinar qual é a opção mais vantajosa para uma pessoa ao alugar um carro.

A atividade *Alugando carro* gira em torno do tipo de tarefa: conceituar função como relação entre grandezas e pede: completar tabela; determinar o valor do aluguel, conhecendo o número de dias de locação de um carro; construir uma tabela a partir da expressão algébrica e determinar o plano mais vantajoso.

Percebemos que, no enunciado da atividade, não há nenhuma tarefa que dê conta de um dos objetivos propostos pelos professores - determinar a lei na linguagem materna -, que deve significar escrever por extenso, para cada locadora, a expressão algébrica que fornece o valor cobrado pelo estabelecimento em função do número de dias de locação. Também não há tarefas que proponham, de maneira explícita, a relação entre variáveis, um dos objetivos propostos pelos participantes para esta atividade.

Quanto à organização didática, o ponto crucial é que não foram dadas as condições para que um aluno pudesse responder e justificar a questão proposta: ”V*ocê poderia dizer qual desses três planos é mais vantajoso para alugar carros. Justifique e aponte duas razões*.” Aliás, essa questão está mal redigida porque a determinação da locadora mais vantajosa depende do número de dias de locação.

Consideramos que a análise de três tabelas, com valores cobrados por cada uma das três locadoras, dia a dia, seria um caminho viável para que o aluno pudesse determinar o plano mais vantajoso. Nessa atividade, há duas tabelas referentes às duas primeiras locadoras e o aluno teria que tomar a iniciativa de organizar uma terceira tabela, com valores diários de locação para a terceira locadora, a partir da fórmula $A = 20T + 150$, onde A é o aluguel, T é o número de dias de locação além de acrescentar mais linhas (ou colunas) nas duas tabelas precedentes e completá-las. A seguir, o aluno teria que comparar, dia a dia, os valores cobrados por cada locadora para poder escrever a sua resposta para a questão formulada.

Essa atividade será lida novamente pelos professores do grupo B nas reuniões seguintes, mas não será resolvida. Somente na segunda fase, depois de um debate, da leitura das iniciativas tomadas pelos alunos presentes no experimento-piloto para resolver as tarefas pedidas, em especial, aquelas tomadas para responder a última questão, é que os professores se conscientizarão de que deveriam ter resolvido a atividade e feito uma análise *a priori* da atividade *Alugando carro*.

A quarta atividade, denominada *Produção de peças de informática* (veja ANEXO A), é cópia fiel daquela encontrada em um livro didático. Os professores apontaram os seguintes objetivos, que não se encontram no livro: relacionar variáveis, determinar a lei, trabalhar a idéia de função, plotar pares ordenados e explorar a idéia de função afim.

A organização matemática gira em torno do tipo de tarefa: conceituar função como padrão de regularidade e propõe as seguintes tarefas: completar tabela; verificar se a cada quantidade de peças corresponde um único custo em reais; identificar as variáveis; calcular o custo para um número determinado de peças; calcular quantas peças podem ser produzidas com um custo de R\$ 120,00; descobrir a regularidade; escrever a fórmula que associa o custo (C) com o número de peças (x) produzidas; construir um gráfico utilizando os dados da tabela; verificar se é possível ligar os pontos por uma linha cheia.

Além dessas, pede-se uma justificativa para a pergunta: “O custo da produção varia de forma diretamente proporcional ao número de peças?”.

Na seqüência, esta é a primeira atividade que utiliza as palavras *corresponde*, *associa*, *regularidade* e *função*; pede as conversões: tabela $\rightarrow$ expressão algébrica e tabela $\rightarrow$ gráfico; a explicitação das variáveis; retoma a proporcionalidade; introduz variação proporcional; pede um discurso tecnológico para mostrar que o custo da produção varia de forma diretamente proporcional ao número de peças produzidas.

O objetivo determinado pelos professores desse grupo, – trabalhar a idéia de função - é muito geral, o que dá a impressão de que eles não conseguiram identificar objetivos específicos dessa atividade. Além disso, falta nomear função linear, além de não relacioná-la com grandezas diretamente proporcionais e não há na lista dos objetivos, uma palavra que se refira à proporcionalidade.

Na análise *a priori* elaborada pelo grupo, os professores deixaram de investigar diversas questões: só se preocuparam com um dos aspectos da construção do gráfico (ligar ou não ligar os pontos), deixando de lado a escala, o alinhamento de pontos, o eixo onde será representada cada variável. Não questionam os conhecimentos prévios dos alunos sobre localização de um ponto em um sistema de coordenadas cartesianas, razão e proporção.

Ao reler a atividade *Produção de peças de informática*, a professora Pérola se mostrará preocupada com a percepção do aluno a respeito do conceito de função no que diz respeito à univalência: ”Ficamos no impasse da idéia de função, se vai sair ou não. Podemos questioná-los: o mesmo número de peças vai ter valor diferente? Eu quero que eles analisem que um valor do domínio só tem uma imagem.” (Professora Pérola,18/06/2004)

Esse mesmo tipo de preocupação surge na quinta atividade - *Medindo lados e perímetros* (veja ANEXO A), para a qual foram assinalados os seguintes objetivos: relacionar variáveis, determinar a lei, construir o gráfico, aplicar a função na geometria, dar a idéia de dependência e preencher tabela.

A organização matemática dessa atividade gira em torno do tipo de tarefa: conceituar função como interdependência de grandezas e apresenta as seguintes tarefas, a partir da apresentação de uma tabela que relaciona medida do lado de um quadrado e seu perímetro: observar tabela; determinar o perímetro de um quadrado dado o lado; determinar o lado dado o perímetro; escrever a lei; dizer se o perímetro depende da medida do lado; marcar em um sistema de eixos os pontos correspondentes aos pares (L, P).

Os professores pressupuseram que os alunos tivessem algumas noções sobre números reais, pois um breve texto acompanha esta última tarefa: “Como estamos trabalhando com medidas, ou seja, números reais, podemos ligar esses pontos por uma linha cheia. Faça essa ligação no gráfico que você construiu".

Acreditamos que esse apoio tire do aluno a possibilidade da descoberta; a questão poderia ter sido formulada de outra maneira.

A seguir, os professores fizeram uma pequena alteração e incluíram um item: "e) É possível ter perímetros diferentes para o mesmo quadrado? Justifique."

A questão subjacente a esse item é a preocupação da professora Pérola com o conceito de função pois, para ela, os dois itens anteriores da atividade *Medindo lados e perímetros* não estariam caracterizando totalmente o conceito de função: "c) É verdade que o perímetro depende da medida do lado?"; "d) Qual é a lei que associa a medida do lado de um quadrado com o perímetro".

Mesmo considerando que um aluno entenda o enunciado da questão, que responda que cada quadrado tem um único perímetro, baseando-se na tabela, ele não tem condições de entender a razão da pergunta.

Esse mesmo tipo de preocupação com o conceito de função pode ser visto em livros didáticos de oitava série. Giovanni *et al.* (1998, p.108), no intuito de preparar o caminho da concepção de função como interdependência de grandezas para a concepção de função como correspondência, enfatizam que, para cada valor da variável independente, está associado um único valor da variável dependente, em uma situação que envolve duas grandezas diretamente proporcionais.

Os professores do Grupo B não escreveram uma análise *a priori* desta atividade. Parece que não se questionaram, por exemplo, sobre a compreensão do enunciado e sobre as possíveis dificuldades que um aluno teria ao resolver a tarefa que pede a construção de um gráfico, diante do seguinte texto: "Com os dados da tabela, marque em um sistema de eixos os pontos correspondentes aos pares (L, P)." Além disso, na atividade *Produção de peças de informática*, para a mesma tarefa, há o texto: "Use os dados da tabela e construa um gráfico para essa situação."

A sexta atividade, denominada *Função como máquina*, é uma cópia fiel de uma atividade encontrada em um livro didático, exceto pelo desenho da máquina, mostrado na Figura 17. Os professores consideram que ela tem os seguintes objetivos: usar a “máquina” da função; trabalhar a idéia de domínio e imagem com o uso da máquina; trabalhar proporcionalidade (idéia de função afim); relacionar variáveis diretamente proporcionais; trabalhar com números reais; introduzir x e y; idéia de dependência. A organização matemática dessa atividade gira em torno do tipo de tarefa: conceituar função como máquina. O enunciado descreve o que faz uma máquina criada por uma menina chamada Rosângela:

> Rosângela bolou uma máquina interessante. Ela está programada para “multiplicar o número de entrada por dois e a seguir, subtrair o resultado de uma unidade.” Por exemplo, se entrar o número 8, sairá o número 15; se entrar o 20, sairá o 39. Note que os números de saída são obtidos em função dos números de entrada, isto é, os números que saem dependem dos números que entram.

A Figura 17 mostra o esquema de uma máquina que processa números.

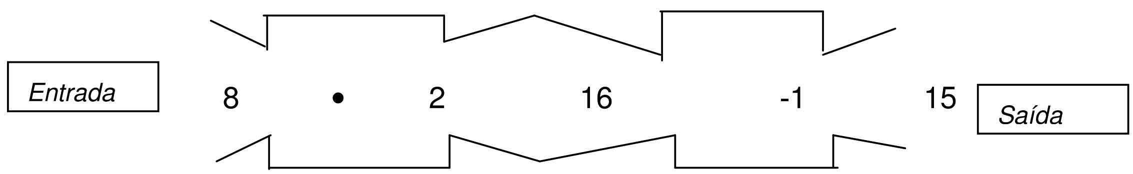


Figura 17 - O desenho da máquina de Rosângela

Fonte: Integrantes do Grupo B

A seguir, há uma tabela (Tabela 4) com números de entrada e saída da máquina e tarefas:

Tabela 4 - Números de entrada e saída

N. de entrada	- 4/3	-1	-0,5	0	1/2	1,0	1,8	2	3	3,3	6
N. de saída	-11/3	-3	-2	-1							

> a) Complete a tabela com os números que faltam. b) Se x representa a variável número de entrada e y a variável número de saída, qual a fórmula ou lei da função que fornece y em função de x? c) Neste caso, qual é a variável dependente? d) Se o número de entrada for 10, qual será o número de saída? e) Se o número de saída for 29, qual será o número de entrada? f) O número de saída varia de forma diretamente proporcional ao número de entrada?g) Em uma folha de papel quadriculado, construa um gráfico com os dados da tabela.

Um dos objetivos propostos pelos professores do Grupo B é trabalhar a idéia de domínio e imagem com o uso da máquina; o outro é trabalhar com números reais, mas não há tarefas relativas aos conceitos de domínio e imagem e somente números racionais estão presentes na tabela e no enunciado das tarefas.

A função em jogo é a função afim $y = 2x - 1$; portanto, há um equívoco na redação de um dos objetivos propostos pelo Grupo B: relacionar variáveis diretamente proporcionais.

Notamos que os professores desse grupo não se questionaram sobre as dificuldades que os alunos poderiam ter para localizar pontos com coordenadas racionais nem com as possíveis resoluções gráficas que poderiam ser obtidas.

A atividade *Função como máquina*, será discutida na terceira Fase, ligeiramente modificada e incluída na seqüência de ensino (veja ANEXO B - *Seqüência de ensino*). Ela será muito importante para que os professores possam conceituar função como máquina a partir do desenho de uma máquina.

A sétima e última atividade, também copiada de um livro, denomina-se *Desenho de quadrados formados por palitos*. Ela foi escolhida pelos professores com critérios subjetivos “por ser bonitinha”, “porque está em todos os livros”, e não porque trabalha com padrões de regularidade.

Os professores escrevem, de próprio punho, os objetivos: idéia de dependência, relacionar variáveis, aplicar funções em geometria, determinar a lei. A configuração de palitinhos utilizada se encontra no capítulo dedicado à análise de livros (Parte I, capítulo 2, seção 2.3.6).

Essa atividade gira em torno do tipo de tarefa: conceituar função como padrão de regularidade de seqüências numéricas ou geométricas. É composta das seguintes tarefas: continuar a seqüência; determinar a expressão que indica o número P de palitos em função do número x de quadrados; determinar quantos palitos são necessários para formar nove quadrados; determinar quantos quadrados são formados com 16 palitos, determinar a expressão de x em função de P.

Trabalhar com materiais concretos é uma orientação para o ensino, denominada de empírico-ativista, segundo Fiorentini (1995, p.11). Os empírico-ativistas consideram que a aprendizagem da Matemática pode ser obtida mediante generalizações ou abstrações de forma indutiva e intuitiva a partir da manipulação de objetos ou de atividades práticas.

Esta é a segunda atividade que inclui materiais concretos, mas, nesse primeiro momento de cópia de atividades, percebemos que os professores se deixam levar mais pelo próprio material, como se a simples manipulação pudesse informar os alunos sobre a potência de base dois (em *Dobrando papel*), a determinação da expressão que indica o número P de palitos em função do número x de quadrados (em *Desenho de quadrados formados por palitos*) e sobre a dependência, nas duas atividades.

Os professores não discutiram as diversas visualizações possíveis. Isso sugere que eles não perceberam as dificuldades que os alunos podem encontrar ao tentar uma generalização para o padrão da frisa de palitinhos, pois consideraram essa atividade fácil.

Em síntese, os participantes do grupo B apresentaram uma seqüência de ensino, com material basicamente copiado de quatro fontes, mas observa-se que não percebem as diferenças pertinentes às origens das atividades. Um ponto positivo é que a seleção das atividades levou a uma seqüência de ensino que contempla diversos tipos de tarefas. Excluindo a primeira, não se reconstrói a organização didática proposta pelos autores de livros didáticos, de onde os professores extraíram suas idéias, exceto pela inclusão de uma ou outra tarefa. A análise *a priori* mais detalhada é aquela da primeira atividade, a mais trabalhada pelos professores.

Notamos que os professores tiveram dificuldades em estabelecer os objetivos para cada atividade: ora a lista está incompleta, ora há objetivos que a atividade não contempla. Eis os objetivos propostos para as sete atividades: relacionar variáveis, perceber dependência, usar tabela, preencher tabela, determinar a lei, plotar pares ordenados, construir gráfico, expressar a lei na língua materna, aplicar função na geometria, explorar a idéia de função afim e trabalhar a idéia de função, sendo que esta apresenta uma ocorrência apenas.

Constatamos que as representações tabulares e algébricas de função precedem os gráficos, considerados um produto final, pois as atividades sempre partem de um texto, de uma tabela ou de um desenho e não há uma única proposta que se inicie com um gráfico.

Esse fato vai ao encontro das diversas pesquisas que mostram uma preferência pelas representações algébricas. Zuffi (1999), ao analisar as aulas ministradas por três professores, afirma que há uma forte associação entre função e as ferramentas analíticas que as descrevem, particularmente as expressões algébricas: “As funções são apresentadas primeiro na sua notação algébrica, mesmo que o domínio trate de um conjunto discreto e pequeno de pontos.” (ZUFFI, 1999, p.145). Também Fonte (2002, p. 68) conclui que há professores que dão mais atenção às representações algébricas. Investigando a percepção daquilo que o professor entende como conteúdo algébrico, Pinto (1999, p.110) constata que a representação gráfica de uma função é considerada conteúdo algébrico por 66% dos professores que responderam ao seu questionário.

Chamam a atenção as contradições da professora Margarida sobre gráficos. Em um primeiro momento, ela afirmou:

> Ao estudar função em um curso de especialização, perdi uma noite de sono pensando como resolver um problema em que teria que montar uma lei. Considero mais fácil tirar a lei a partir do gráfico. (Professora Margarida, 18/06/2004).

O problema que a fez perder o sono era a determinação dos coeficientes “a” e “b” em $y = ax + b$. É possível que o alinhamento (visual) dos pontos a assegure de que se trata da equação da reta. Em outra ocasião, ela exclamou: “A gente foge de gráficos como o diabo foge da cruz.”

Tabelas, gráficos, expressões algébricas são registros semióticos, segundo Duval (2000). Ao estudar as condições cognitivas internas que são necessárias para que uma pessoa aprenda Matemática, esse autor afirma que aprender essa ciência é aprender a discriminar e coordenar sistemas semióticos de representação e tornar-se apto para converter qualquer representação. A compreensão conceitual só é possível quando tal coordenação é alcançada sendo a condição para que um objeto não seja confundido com o conteúdo da representação. Podemos perceber através da fala da professora Margarida, que ela tem dificuldades para fazer as conversões de tabela para fórmula, de gráfico para fórmula (ou tabela), ou seja, ela não consegue coordenar os diversos registros de representação de função.

Um outro ponto que deve ser considerado é a identificação do objeto matemático função com a sua representação, que transparece na afirmação dessa professora sobre função: “Função é um processo de transformação que uma determinada equação irá sofrer, devendo obedecer a uma regra ou lei” (Professora Margarida, resposta no Questionário I).

De acordo com Duval (2000), a falta de coordenação pode gerar fracassos ou bloqueios mentais. O fato de Margarida querer “fugir dos gráficos” evidencia o temor de não querer incorrer em fracasso.

Retornando às atividades do grupo: os professores se organizaram para digitar as atividades propostas e seus respectivos objetivos e também ensaiaram uma análise *a priori* de algumas delas. Na reunião seguinte, ao reler o material produzido, eles questionaram a necessidade de introduzir os conceitos de relação entre conjuntos, de domínio e imagem de uma função e de coeficiente angular em uma oitava série. Discutiram também a respeito da possibilidade de aprendizagem do conceito de função. Entretanto, não trataram do fechamento de cada atividade, como se o aluno pudesse passar de uma para outra sem interrupções.

A inquietação entre o que foi elaborado e a própria experiência apareceu nos diálogos entre as professoras Pérola e Margarida. A primeira mostrou-se preocupada com o fato de que a seqüência de atividades não trazia o conceito de relação. Afirmou estar acostumada com situação-problema, a partir da qual trabalhava com relação e depois, função. Margarida disse que, nas suas aulas, abordava relação antes de função e acreditava ser necessário focalizar os dois conceitos simultaneamente para que o aluno perceba a diferença. Lembrou que, no ensino médio, o aluno vai trabalhar com relação e função. Nesse momento, as duas professoras acreditaram que o conceito de relação deveria anteceder a primeira atividade - *Dobrando papel*.

A seguir, a professora Pérola lembrou ter utilizado as flechas até três anos atrás. Marcos disse que desistiu desse recurso no segundo ano de atuação no magistério e expôs as próprias dificuldades quando ainda era estudante. A professora Margarida lembrou autores de livros que utilizam diagrama de flechas. No final, a professora Pérola pareceu estar convencida de que o conceito de relação não é imprescindível no caso e que a seqüência elaborada atinge o objetivo proposto para a série.

Esse diálogo revela o quanto é forte a idéia de que se deve começar com a noção de relação entre dois conjuntos,para, em seguida, apresentar o diagrama de flechas. Acreditamos que a presença do tipo de tarefa – conceituar função em termos conjuntistas, presente em alguns livros didáticos de oitava série, aliada à formação inicial do professor dentro dos moldes do Movimento da Matemática Moderna, torna difícil o rompimento com essa tradição. Graças à troca de experiências e relatos de dificuldades pessoais, os professores se convenceram de não ser necessário introduzir relações e diagramas de flechas em uma oitava série, independente das sugestões encontradas nos PCNs (1998) de Matemática a respeito do assunto.

Na reunião do Grupo B, a professora Margarida falou que seus alunos eram carentes, epilépticos, além de apresentar outros problemas físicos e sociais. Assim, não conseguia atingir os objetivos e lembrou a necessidade de atribuir uma nota a tudo que o aluno faz. Afirmou que eles não têm interesse, nem auto-estima e nem querem aprender e que muitas vezes se sente deprimida ao sair de uma dessas classes. Tardif e Lessard (2005, p.155), ao entrevistar professores, também detectaram esse sentimento de impotência para conciliar as necessidades dos alunos, diante dos problemas encontrados em sala de aula.

Se, por um lado, há uma depreciação do aluno, por outro lado, a expressão sensibilização motivadora, utilizada por essa professora ao longo de sua fala, mostra que ela gostaria de encontrar um caminho para superar as dificuldades enfrentadas no seu dia-a-dia.

Na última reunião antes das férias escolares, a professora Pérola comunica aos presentes a intenção do seu grupo de fazer um experimento-piloto, acrescentando que conseguira um grupo de onze alunos que seriam somados aos três que a professora Margarida encontrara em uma classe de recuperação de ciclo.

Estabelecemos que cada grupo de dois alunos seria observado por duas pessoas: um observador dentre aqueles que trabalhavam para o projeto e um professor que assumiria o papel de observador, tendo em vista o interesse despertado pelo experimento-piloto. As professoras Pérola e Margarida responsabilizaram-se pela convocação dos alunos e pelas cópias das atividades. Conversaram sobre o papel e a atitudes de um observador e escolheram quem assumiria o papel de professor na data.

Sugerimos que eles fizessem uma estimativa do tempo que os alunos levariam para desenvolver cada uma das sete atividades para um experimento-piloto de duas horas de duração. A solicitação levou o grupo B a escolher as cinco primeiras atividades: *Dobrando papel*, *Brincando no parque*, *Alugando carro*, *Produção de peças para informática* e *Medindo lados e perímetros*. No final, a professora Pérola considerou que, talvez, os alunos não conseguiriam resolver cinco atividades em duas horas.

Percebemos que, ao longo das últimas reuniões, os professores desse grupo avançaram em suas reflexões, mas a inclusão, alteração ou a exclusão de uma tarefa em uma atividade demanda tempo. Por outro lado, eles tinham pressa em aplicar o experimento-piloto, por causa do início das férias e também porque queriam saber o resultado dessa aplicação. Diante das iniciativas tomadas pelos professores Margarida, Pérola e Marcos, que se responsabilizaram pelo preparo das atividades, pelo convencimento de alunos em participar de uma atividade escolar no início das férias e pelas cópias xerográficas das atividades, não colocamos obstáculos para a realização do experimento-piloto.

Podemos considerar que esses três professores trabalharam como um grupo colaborativo desde o início, pois eles se mobilizaram para levar adiante o seu projeto com determinação. A estudante Bruna, ao longo das reuniões, atuou como uma espectadora.

Ao construir a seqüência de ensino para o experimento-piloto, os professores executaram as seguintes tarefas: pesquisar livros didáticos; selecionar atividades; digitar atividades; discriminar objetivos para elas; reler atividades; escrever análise *a priori;* questionar sobre a inclusão (ou não) de uma concepção de função; reformular uma atividade; selecionar atividades para o experimento-piloto; estimar o tempo de execução das atividades pelos alunos. Além disso, para viabilizar a proposta, executaram as tarefas: convencer alunos, falar com a diretora, determinar o papel de cada um durante os trabalhos, providenciar cópias do material para os alunos.

Todas essas tarefas foram realizadas ao longo do mês de junho e início do mês de julho, a fim de que, no dia 6 de julho, tudo estivesse pronto para o experimento-piloto. Acreditamos que o empenho e disposição desses professores para atingir seus objetivos provenham da “trajetória grupal de formação”, conforme expusemos na apresentação dessa equipe. Concordamos com Garcia (1999, p.209), que considera válido falar de “trajetórias grupais de formação”, na medida em que correspondem ao trabalho realizado por um grupo de professores ao longo de um determinado tempo. Lembramos que Pérola e Marcos estavam juntos quando elaboraram o mapa conceitual e deixaram suas marcas pessoais na folha que apresentaram aos demais grupos - carinhas sorridentes, ao lado do texto: “No exercício de nossa vivência, buscamos crescer sempre.”

Nesta perspectiva de crescimento, uma afirmação importante desses professores merece destaque - consideraram mais fácil montar essa seqüência, que a seqüência sobre frações, elaborada na pesquisa anterior (SILVA, 2005). Dessa maneira, os avanços foram percebidos pelo próprio grupo, alguns meses após o término da aplicação da referida seqüência.

Como vimos, os conhecimentos matemáticos sobre função, a preferência por livros cujos autores estão sintonizados com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (conhecimentos curriculares), o fato de terem ministrado aulas sobre o assunto (conhecimentos experienciais) e as concepções de ensino influenciaram a arquitetura da seqüência e as organizações matemáticas escolhidas pelos professores. Além disso, os professores capitalizaram os conhecimentos sobre planejamento e execução de um projeto adquiridos anteriormente.

A seguir, descreveremos e analisaremos as propostas do terceiro e último grupo.

Grupo C

Esse grupo é formado pelos professores César, Rosa e Plínio. César e Rosa trabalham na mesma escola particular, que adota material desenvolvido por um determinado sistema de ensino, ao passo que Rosa e Plínio trabalham na mesma escola estadual.

A professora Rosa tem seis anos de experiência no ensino fundamental e sete anos e no ensino médio, onde ministra aulas de Física. Considera que a apostila de Física, adotada na escola, não trabalha funções como ela gostaria. Mas, afirma que ainda não consegue fazer adequadamente a aplicação das funções na Física, mesmo tendo ministrado aulas sobre esse tema em Matemática. O professor Plínio tem poucos anos de experiência no ensino médio e nenhuma experiência no ensino fundamental. Não produziu nenhum material, mas procurou ajudar os colegas César e Rosa durante as discussões. O professor César já ministrou aulas sobre funções, participou do projeto anterior, descrito em Silva (2005), contribuindo para a confecção de uma seqüência de ensino sobre frações para quinta série.

O primeiro material trazido pelo professor César é uma lista de objetivos, junto com algumas orientações didáticas:

> Incentivar o aluno a buscar estratégias para a resolução de problemas - o problema aqui em um primeiro momento será vencer o jogo- Batalha Naval. Mostrar ao aluno a importância do registro de dados, neste caso, para que não cometa repetidos erros e, se cometer, que possa reavaliar a estratégia e modificá-la assim que achar necessário. Trabalhar o conceito de escala, onde é possível reduzir e reproduzir objetos e áreas para análise. Criar situações que mostrem como as coisas estão sujeitas a mudanças causadas por influência dos mais diversos fatores. Neste caso, considerar apenas duas grandezas e estudar a relação entre elas (numéricas e alfabéticas). Familiarizar o aluno com gráficos cartesianos, facilitando a visualização da relação entre as grandezas variáveis. Desenvolver a noção de coordenadas (par ordenado). A necessidade de se ter referências para nos localizarmos no espaço e localizar objetos. Mostrar que se pode relacionar um número com uma letra criando uma linguagem que seja capaz de traduzir algebricamente uma determinada situação. (Professor César, 4/06/2004)

Esse material apresenta as tarefas: vencer o jogo, localizar objetos, localizar pontos, desenvolver a noção de coordenadas, trabalhar o conceito de escala, familiarizar o aluno com gráficos, registrar dados, facilitar a visualização, estudar relações entre duas grandezas, criar uma linguagem que traduza uma situação.

Podemos perceber nesse material uma ênfase na localização de pontos e na utilização de gráficos cartesianos, mas não há referência ao conceito de função. Excluindo um debate sobre Batalha Naval, esse material não é levado em consideração pelos outros integrantes do grupo.

Organizado o grupo, surge, mais uma vez, a pergunta: “Começar, por onde?”

A primeira discussão é sobre a possibilidade de mostrar uma situação concreta de variação para introduzir o conceito de função. A professora Rosa, que tem experiência em laboratório de Física, afirmou: “Se a intenção é função, trabalhar com o concreto.”

A partir dessa afirmação, eles discorreram sobre dois experimentos que se ajustavam em modelos lineares, versões ideais desses fenômenos físicos: o volume de água deslocada por esferas sólidas, de mesmo material e raios distintos, flutuando na água e deformação de uma mola elástica quando distendida.

Para a primeira experiência, Rosa sugeriu as seguintes tarefas, para cada esfera jogada dentro da jarra: observar a variação na altura da água; anotar, para cada massa, o volume de água deslocado; passar os dados para uma tabela; calcular a razão entre a massa da esfera e o volume de água deslocado. Na realidade, estavam utilizando o Princípio de Arquimedes, que não é citado.

Para a execução da segunda experiência, seria necessário construir um dinamômetro, que é um instrumento destinado a medir forças; o tipo mais comum é constituído por uma mola helicoidal, tendo, na sua extremidade superior, um cursor, que desliza sobre uma escala previamente graduada quando o dinamômetro é calibrado. Para fazer a calibração, utiliza-se o seguinte processo: corpos pesando 1 kgf[15], 2 kgf, 3 kgf etc são suspensos, um de cada vez, pela mola que se alonga até que a sua ação seja de módulo igual ao seu peso, mas em sentido contrário; dessa forma, marcas correspondentes podem ser feitas na escala próxima do ponteiro e assinaladas. A partir da calibração, o dinamômetro pode ser utilizado para medir qualquer força desconhecida.

As molas obedecem à lei de Hooke quando são distendidas (ou comprimidas) dentro de certos limites e, dessa forma, um dinamômetro funciona baseado nessa lei, que relaciona a força elástica F_{el} com a deformação x produzida na mola segundo a lei: $F_{el} = kx$, ou seja, a intensidade da força elástica é proporcional à deformação e k é a constante elástica da mola. Quando a deformação da mola é elástica, cessando a ação da força $\vec{P}$ que produziu a deformação, a mola volta à posição inicial devido à ação da força elástica $\vec{F_{el}}$ intrínseca à mola, como mostra a Figura 18. Assim, o deslocamento x é proporcional à massa m.

[15] Um corpo de massa m tem o peso $P = mg$, onde g é a aceleração da gravidade. O peso de 1kgf é uma massa de 1 kg submetida à aceleração da gravidade de 9,8 m/s^2.

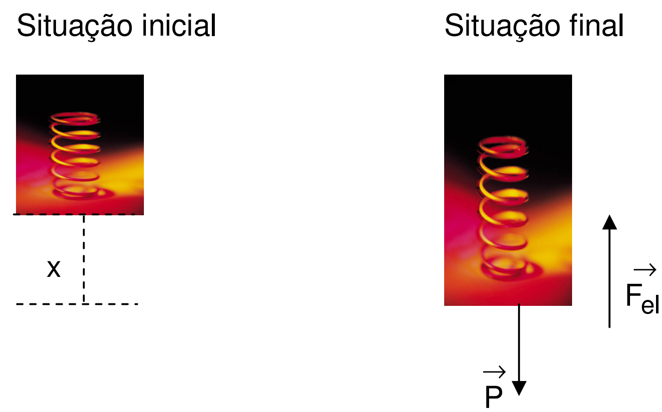


Figura 18 - Molas

Fonte: O autor

Mesmo sem falar na lei de Hooke, os professores sugeriram que os alunos efetuassem as seguintes tarefas, utilizando um dinamômetro já calibrado: para cada massa m colocada na extremidade da mola, ler o deslocamento x no dinamômetro, anotar o valor da massa m e do deslocamento x e calcular a razão $\frac{m}{x}$.

A seguir, discutiram a questão da construção do instrumento e da escala. Sobre a precisão das leituras no dinamômetro, Rosa sentencia: “Se falhar um dado na tabela, já não há proporção.”

O grupo C desistiu dessas duas experiências pelas seguintes razões: imprecisão do registro de dados, indisciplina dos alunos, dificuldades para compra e / ou construção dos dinamômetros.

Para esses professores, a imprecisão não pode fazer parte da aula de Matemática. Esta cultura das certezas na aula de Matemática, citada por Pavanello (2002, p. 74), faz com que o “erro” seja visto como uma anomalia, algo a ser evitado ou corrigido a todo o custo. Esse modo de pensar pode ser observado na fala do professor César, dirigindo-se a Rosa: “Você faz a experiência e apresenta a tabela pronta.” Também na fala do professor Plínio: “A auxiliar de laboratório tinha uma tabela pronta e mandava repetir até chegar lá.”

Há o fato de que os alunos são vistos de forma depreciativa pelos professores: ”O vocabulário deles é chulo, o aluno da oitava série não sabe nada, se colocar número decimal já vira a cara.” (Professor César). Acrescentaram os possíveis problemas disciplinares que poderiam surgir durante os experimentos, como um aluno jogar água no outro ou até a destruição do material experimental, situação já vivida pela professora Rosa, que ministra aulas de laboratório. Ela contou aos colegas que tirou dinheiro do próprio bolso para comprar o material para fazer experiências.

Surge então a idéia de trabalhar a relação *massa* e *volume* de um objeto (massa = densidade x volume), que consideraram mais fácil, pois acreditavam que essa seria "[...] uma situação-problema que não daria problemas de precisão." Mesmo assim, não dão continuidade a essa idéia, de trabalhar com grandezas diretamente proporcionais.

Acreditamos que essas desistências são devidas às dificuldades dos professores em manipular grandezas diretamente proporcionais, fato verificado a partir das respostas encontradas no Questionário II (APÊNDICE B - *Questionários*), em especial, a quarta questão: "As leis da Física, muitas vezes, descrevem relações de proporcionalidade direta ou inversa entre grandezas. Escreva a expressão matemática correspondente: a) Para cada substância, a massa é diretamente proporcional ao volume." As respostas dos professores podem ser vistas neste trabalho, na seção dedicada à *Caracterização dos professores*.

Ao invés de se debruçarem sobre o tema *grandezas diretamente proporcionais*, os professores do grupo C preferiram abandonar as atividades que envolveram experiências e conceitos da Física.

Na reunião seguinte, o professor César apresentou aos integrantes do seu grupo seis atividades, sendo que quatro envolveram conceitos de geometria.

Tivemos que insistir para que a professora Rosa apresentasse suas sugestões aos colegas, pois o professor César queria ser o centro das atenções do grupo. Ela afirmou que as atividades, que se iniciam com tabelas e gráficos, eram cópias de uma apostila, mas não revelou a origem do material.

As atividades propostas por esse dois professores podem ser agrupadas em dois tipos de tarefas: conceituar função como relação entre grandezas e conceituar função como padrão de regularidade de seqüências geométricas.

Para o primeiro tipo de tarefa - conceituar função como relação entre duas grandezas - o material trazido pelos dois professores contempla as seguintes tarefas:

1) Partindo de figuras geométricas

> Registre em um quadro as medidas do lado, da área e do perímetro de cada figura (quadrado); a área depende do quê? Qual é a relação entre a área e a medida do lado desses polígonos? Qual é o nome do polígono? Escreva a sentença que relaciona a área com o lado desses polígonos.
>
> Considerando retângulos de perímetro constante de 18 cm, monte uma tabela com 10 valores para *c* (comprimento) e correspondentes valores para *b* (largura). Qual é a relação entre a medida *p* do perímetro da figura e a medida *x* do lado? Obtenha a área do retângulo em função da medida *c* da sua largura.
>
> Obtenha a relação de dependência da diagonal d com o lado *z* do quadrado. O que acontece quando aumentamos ou diminuímos o valor de *z*? Qual é a variável dependente? Qual é a variável independente?

2) Partindo de uma tabela

> Quantas questões tem a prova? Que grandezas estão variando nessa situação? A nota da prova depende do número de questões certas? Você pode escrever uma expressão que relaciona a nota *N* com o número *q* de questões certas?

3) Partindo de um gráfico

> Determine a expressão que relaciona o tempo e o volume de água.
>
> Com as informações dadas no gráfico, você pode prever o peso da gestante no sexto mês de gravidez? E no nono mês? Existe uma correspondência entre cada mês que passa e o peso da gestante? É possível escrever uma expressão que relacione o número de meses transcorridos e o peso da gestante?
>
> Quando o lado do pentágono varia, seu perímetro também varia? O perímetro do pentágono depende do comprimento do seu lado? Escreva uma expressão algébrica que represente o perímetro P de um pentágono regular cujo lado tenha um comprimento qualquer L.
>
> Que grandezas estão variando na situação representada no gráfico? Quando a distância percorrida varia, o consumo de gasolina também varia? Organize os dados do gráfico em uma tabela.

4) Partindo de um texto

> Estabeleça a relação matemática. Qual é a variável dependente? Qual é a variável independente?

Para o segundo tipo de tarefa - conceituar função como padrão de regularidade de seqüências geométricas - as tarefas encontradas no material trazido pelos professores:

> Nessa seqüência, o número de triângulos e o número de quadrados estão variando? Sabendo o número de triângulos, você pode descobrir o número de quadrados desenhados? Esse número é único? Escreva uma frase que relacione um número qualquer q de quadrados com o número correspondente *t* de triângulos. Preencha a tabela. Observe a tabela e responda. Escreva uma frase que relaciona um número qualquer de quadradinhos com o número correspondente de palitos.

Retornado à reunião: veremos quais atividades serão discutidas, re-elaboradas ou simplesmente descartadas.

O professor César leu a sua primeira atividade, criação própria, que tratava de áreas de quadrados.

A Figura 19 mostra os três quadrados desenhados pelo professor, sendo que as malhas quadriculadas têm unidades de medida diferentes.

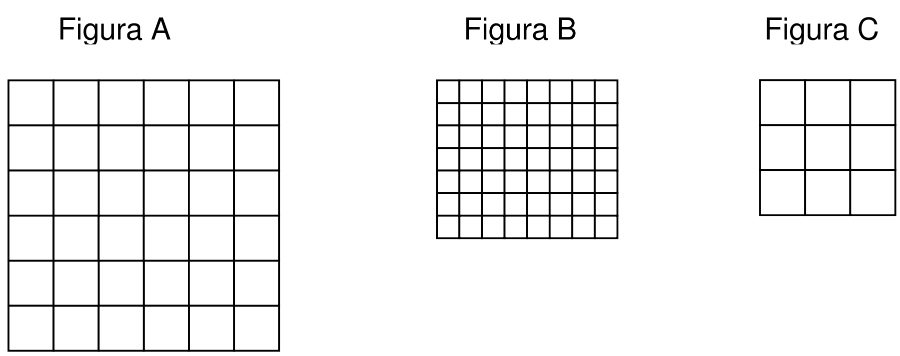


Figura 19 – Quadrados e malha quadriculada

Fonte: Professor César

Após a leitura, a professora Rosa insistiu que ele deveria utilizar a mesma unidade de medida de área (quadradinho), mas o professor não entendeu o problema causado pelas unidades diferentes que ele utilizou para comparar as áreas das regiões delimitadas pelos quadrados A, B e C.

César supôs que o aluno tanto pudesse contar quadradinhos, como pegar uma régua, medir o lado de cada quadrado e utilizar a fórmula para obter o valor da área.

Dessa forma, ocorre a mobilização de dois teoremas-em-ação[16] para dar sentido ao conceito de área de superfícies planas: a área é o número de lajotas necessárias para recobrir uma superfície e a área é o número obtido pela aplicação de uma fórmula.

Sobre essa atividade, o professor Plínio comentou que “com geometria, tem que ter discernimento, entender o que se passa dentro do quadrado.” Observando a atividade dos palitinhos, trazida pela professora Rosa, ele afirmou : “[...] quando se trabalha com material concreto, o aluno consegue enxergar melhor uma tabela, consegue formar a lei.”

Com essas palavras, o professor Plínio indicou o tipo de tarefa que utilizaria para introduzir função: manipular materiais concretos, já que trabalhar com áreas de quadrados seria abstrato para o aluno. Mais uma vez, aparece a questão dos materiais concretos, como se eles fossem solução para todos os problemas. A questão da área de quadrados será um tema bastante discutido por esse grupo nas duas reuniões seguintes.

A seguir, trataram do modo de introduzir a tarefa: montar tabela. O professor César, coerente com o roteiro apresentado anteriormente, sustentou uma opinião firme a esse respeito:

> Para valorizar o trabalho do aluno, ele tem que registrar, a seu modo, os dados, e só depois, o professor deve intervir, apresentando a tabela com suas linhas e colunas [...]. Insisto que eles organizem os dados; se não sair nada, aí você interfere. (professor César 06/2004).

Os outros optariam pela apresentação uma estrutura de tabela para o aluno.

Sobre a segunda atividade, cujo enunciado pedia que se relacionasse a medida do lado com o perímetro de um triângulo eqüilátero, de lado com medida *x*, César afirmou que “$p = 3x$ é uma relação fácil” e que não seria necessário montar uma tabela com valores numéricos. Esse posicionamento constitui uma contradição com suas próprias afirmações anteriores, uma vez que esse professor enfatizará a organização de dados na sua primeira atividade.

---

16 Teorema-em-ação, segundo ALMOULOUD (2000, p. 151), designa as propriedades tomadas e utilizadas pelo aprendiz, em situação de solução de um problema, sem que ele seja capaz de explicá-las ou justificá-las. BALTAR (1996) *apud* ALMOULOUD (2000, p.157) apresenta uma lista de teoremas-em-ação, ligados a situações que dão sentido ao conceito de área de superfície plana.

Parece haver um consenso sobre o imediatismo da passagem da figura para a fórmula, uma vez que há três letras *x*, uma de cada lado do triângulo, como se pode observar na Figura 20; basta observar o desenho para identificar um triângulo eqüilátero. Outro ponto a ser lembrado é que os professores não comentam sobre variáveis, variação ou dependência.

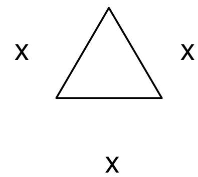


Figura 20 - Triângulo eqüilátero

Fonte: Material disponibilizado pelo professor César

Alguém sugeriu que se poderia reformular a atividade, utilizando o *software* Cabri-Géomètre II, mas os professores desistiram da idéia porque, em muitas escolas, os computadores não funcionam. Mesmo conhecendo como opera esse *software* educativo, ninguém propôs uma alteração para essa atividade, incluindo a utilização desse material.

O professor César considerou sua terceira atividade como dinâmica, pois partindo de retângulos com mesmo perímetro (18 cm), ela pede que o aluno obtenha a área em função da medida *c* (comprimento), cujos valores estão no intervalo aberto $(0, 9)$. Mas ao resolvê-la, considerou que obter a função $f(c) = c(9 - c)$ não seria uma atividade fácil para o aluno e a descartou. A seguir, esse professor afirmou que propusera uma atividade que envolvia a diagonal do quadrado e o respectivo lado, para que o aluno tivesse oportunidade de estudar o *Teorema de Pitágoras*, caso não o tivesse visto. Nota-se que, para esse professor, basta que se enuncie o teorema e se apresente a fórmula que relaciona a medida da diagonal do quadrado com o lado $d = z\sqrt{2}$, para que o aluno perceba a dependência funcional entre lado e diagonal.

César leu a quinta atividade e comentou que gostaria de mudar o desenho. Apresentamos o enunciado e o gráfico original (Figura 21) que a acompanha, uma vez que essa atividade será reformulada na terceira fase e integrará a seqüência que será aplicada em uma oitava série.

> De acordo com as representações apresentadas a seguir, determine a expressão que relaciona o tempo e o volume.

> Uma caixa d'água, com capacidade para 1000 litros, contém 150 litros de água. A cada minuto, o dispositivo automático (bóia) que auxilia no enchimento da mesma despeja 10 litros de água. (Professor César 18/06/2004)

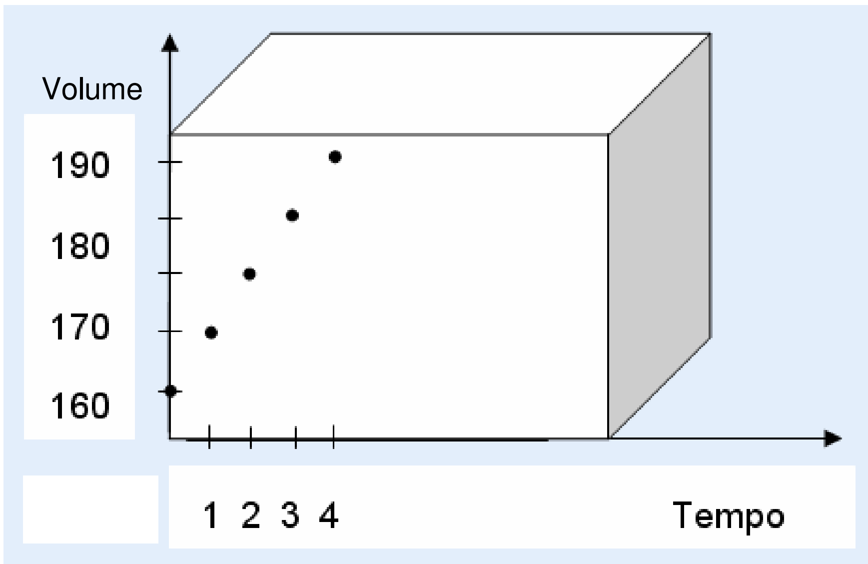


Figura 21 - Gráfico do volume de água em um reservatório em função do tempo

Fonte: Material disponibilizado pelo professor César

Dentre os objetivos determinados pelo professor César, no roteiro anteriormente apresentado, alinham-se: trabalhar o conceito de escala e familiarizar o aluno com gráficos cartesianos, facilitando a visualização da relação entre as grandezas variáveis. Mas o conteúdo da representação gráfica (Figura 21) não oferece condições para alcançar tais objetivos. No gráfico do volume de água em função do tempo: faltam unidades de tempo e volume, não há uma escala no eixo das ordenadas, o gráfico é constituído de apenas cinco pontos, sem indicação de suas coordenadas: $(0,150)$, $(1,160)$, $(2,170)$, $(3,180)$ e $(4,190)$. Além disso, duas arestas do paralelepípedo estão na mesma direção dos eixos coordenados.

Diante de tal formulação, o aluno poderia pensar que a representação do paralelepípedo faz parte do gráfico, sem considerá-lo como uma representação de uma caixa d' água, ou não perceber a sobreposição de duas representações: uma caixa d' água e um gráfico do volume em função do tempo. Não se encontra nenhuma explicação sobre o porquê de a variável *tempo* ser representada no eixo das abscissas e de a variável *volume* ser representada no eixo das ordenadas.

Nessa atividade, não há nenhuma tarefa que explore a variação do volume d'água na caixa e nenhuma indicação de que tempo e volume são variáveis, independente e dependente, respectivamente.

César concluiu que sua sexta atividade não era adequada para uma oitava série e comunicou aos colegas que iria descartá-la. Seu enunciado fazia referências a abatimento por dependente, em uma declaração de Imposto de Renda, um conceito distante da realidade de alunos de uma oitava série, além de introduzir a notação $V = f(n)$, sem maiores esclarecimentos.

A seqüência apresentada por esse professor não dava conta daquilo que ele havia estabelecido em seu roteiro: criar situações que mostrassem como as coisas estão sujeitas a mudanças causadas por influência dos mais diversos fatores, pois, nessa seqüência, não revelava preocupação com variação e dependência, somente com fórmulas. Excluindo a primeira atividade, não se encontraram tarefas relacionadas à construção de tabelas e de gráficos. A palavra função apareceu somente uma vez.

Encerrada a leitura das atividades trazidas pelo professor César, Rosa apresentou suas quatro atividades: uma a partir de tabela, duas envolvendo leitura e análise de gráficos, outra que abordava padrões geométricos com palitinhos. Comentou que pensava diferente do professor César e explicou:

> O primeiro exercício - da tabela para lei; o segundo exercício - vou excluir, pois o gráfico "quebrado" não é conveniente para a introdução do conceito; o terceiro exercício - do gráfico (do perímetro de um pentágono em função do lado) para a lei; o quarto exercício - da figura (palitinhos) para a lei. (Professora Rosa, 18/06 /2004)

É interessante notar que essa professora indicou as conversões de registro (ostensivos) pretendidas. Ela mostrou estar se apropriando de uma nova linguagem em termos de registros[17].

A professora Rosa afirmou ter colocado a atividade com material concreto no lugar do experimento físico, descartado na reunião anterior e considerou ser necessário "olhar e fazer na prática", ou seja, ela gostaria que os alunos manipulassem ou construíssem as frisas com palitinhos.

---

[17] A professora Rosa nos procurou algumas vezes fora do horário das reuniões. Ela se interessou em anotar o nome das dissertações sobre funções encontradas na biblioteca e tentou ler o trabalho de Oliveira (1997).

Notamos que, de maneira independente, os grupos B e C apresentam atividades semelhantes sobre *padrões de regularidade*: frisas de palitinhos, mas nenhum se preocupou com as possíveis dificuldades que os alunos enfrentariam para obter a fórmula que fornece o número de palitinhos em função do número de quadrados. Lembramos que frisas de palitinhos tem um padrão de regularidade porque de uma configuração para a seguinte sempre se acrescenta o mesmo número de palitinhos, como se pode observar na Figura 7, que se encontra na Parte I, capítulo 2, seção 2.3.6 Análise de livros.

Nas atividades apresentadas pelo grupo C, não houve a tarefa construir um gráfico. A professora Rosa expôs suas dificuldades: "Eu não consegui pensar em alguma coisa que fizesse construir o gráfico."

Na realidade, durante as leituras, ocorreu mais monólogo que debate de idéias; a discussão sobre a organização didática é praticamente nula.

Os três professores perceberam as diferenças entre as duas propostas. César reagiu: "Eu fico de bico calado." E repetiu quatro vezes: "A minha está melhor." Declarou abertamente sua resistência ao material trazido pela colega Rosa: "Não vejo onde encaixa na minha." Rosa ponderou: "São linhas diferentes. Fizemos separados." E César rebateu: "Se tivéssemos sentado juntos, não teria saído nada."

Acreditamos que o individualismo do professor César, que transpareceu nas suas reações, seja uma defesa contra o ambiente hostil que encontrava na escola pública, ao qual se referiu mais de uma vez. Tardif e Lessard (2005, p.188) afirmam que o individualismo não é uma característica pessoal dos professores, mas antes uma conseqüência da organização do trabalho que não permite a colaboração.

Essa resistência à colaboração será amenizada paulatinamente, ao longo das reuniões seguintes, devido à flexibilidade da professora Rosa em lidar com essa situação. Ela centralizou sua atenção nas atividades propostas pelo colega, deixando um pouco à margem sua proposta. Tal postura feminina é analisada por Tardif e Lessard (2005, p.176). Eles afirmam que as tarefas invisíveis, o investimento afetivo, a centralização no outro constituem traços típicos do trabalho feminino.

Procuramos conversar com esse grupo sobre a necessidade de trabalhar com tabelas e gráficos, além das expressões algébricas, sobre a importância de fazer um levantamento das possíveis respostas e das dificuldades dos alunos.

Na reunião seguinte, o grupo C retomou as atividades e conseguiu discutir e escrever de maneira mais cooperativa, diferentemente da semana anterior.

Analisando as atividades propostas pelo professor César, a professora Rosa notou a ausência da construção de gráficos e insistiu em colocar essa tarefa desde a primeira atividade, aquela que se refere à área de quadrados, cujos desenhos podem ser vistos na Figura 20. César perguntou como se poderia pedir isso e desabafou:

> Como é difícil falar de gráfico, eu tenho dificuldade porque não consigo falar para o aluno. É tão óbvio para mim, por que eu não consigo falar para o outro? Isso me dá uma angustia! Antigamente não, mas depois que eu vim para o projeto [...]. (Professor César, 25/06/2004).

O como pedir a construção de um gráfico deflagrou uma longa discussão entre eles. Indagavam sobre como apresentar um texto que desse conta dessa tarefa, sobre as iniciativas que um professor poderia tomar diante da classe, além de levantar hipóteses sobre as reações dos alunos. Foi a primeira vez que se estabeleceu um diálogo sobre uma organização didática.

No rastro dessa discussão, surgiu a questão do porquê de a variável independente ser representada no eixo horizontal. A professora Rosa informou que encontrara um livro onde estava escrito ser importante lembrar que *x* é na horizontal, mas que nele não havia uma explicação para tal afirmação. A declaração de "que está cansada de olhar os livros e não encontrar aquilo que precisa" é um indício de que essa professora começa a ter uma postura investigativa. Ao mesmo tempo, tais afirmações dão pistas sobre a insuficiência de informações contidas nos livros didáticos, mesmo aqueles destinados ao professor.

Retomando a sua primeira atividade sobre a construção do gráfico da área de um quadrado em função da medida do lado, o professor César acredita que os alunos não saberão discriminar variável independente da variável dependente:

> Quando for dizer quem é horizontal e quem é vertical. E tem que falar quem é dependente ou independente. Dá problema porque eles acham que aumentar o lado aumenta a área, mas para aumentar a área precisa aumentar o lado. (Professor César, 25/06/2004)

Aqui está um dos nós sobre as variáveis: quem depende de quem? Os papéis da variável dependente e da variável independente não são simétricos na definição geral de função e, historicamente, foi necessário um longo tempo para se distinguir a necessidade de ordem nas variáveis. Esse fato levou Sierpinska (1992, p.38) a propor como obstáculo epistemológico - considerar a ordem das variáveis como irrelevante.

A seguir, apresentamos as questões que foram levantadas pelos três professores sobre gráficos, variáveis e números reais:

> Qual a origem das palavras abscissa e ordenada? Será que os alunos vão construir um gráfico de barras a partir de uma malha quadriculada? O professor deve mostrar gráficos que aparecem em jornais? Distribuir folha de papel quadriculado? Distribuir folhas de papel com pontos? Deixar o aluno traçar os eixos? Quais letras utilizar para nomear os eixos? Como explicar par ordenado (lado, área)? Como dizer qual é a variável dependente e qual a variável independente? O que fazer para que o aluno elabore uma escala correta? O que fazer se o aluno não conseguir construir o gráfico? Escrever no texto (ou não) qual variável é representada no eixo horizontal? Falar (ou não) sobre números reais? Perguntar ao aluno (ou não) se é possível marcar um ponto entre aqueles que ele marcou? Pedir ao aluno (ou não) explicações sobre a “forma” do gráfico? O que fazer se o aluno disser que o gráfico é uma reta? Introduzir (ou não) domínio e imagem? Perguntar (ou não) os valores possíveis de *r* (área do quadrado) e *s* (lado do quadrado)? (Grupo C, 25/06/2004)

Ao longo da discussão, o grupo apresentou várias sugestões para levar o aluno a localizar um ponto no plano cartesiano:

> Trace uma reta vertical e outra reta horizontal que se interceptam; dê nomes aos eixos: r e s; registre as informações da tabela em um único ponto; coloque os pares; coloque as duas informações em um ponto, cada lado com sua área; associe o lado com a área; a cada figura, nós temos um par de informações (lado, área); a cada par de informações correspondentes determina-se um ponto. (Grupo C, 25/06/2004).

Combinaram que iriam colocar o texto: “O valor da medida do lado refere-se ao eixo horizontal”. Mas não se encontram indicações de como construir uma escala.

Surgiram outras dúvidas:

Rosa: ”A gente podia pedir para analisar figuras que não tinha antes para saber se ele vai olhar no gráfico ou na lei para resolver”.

César: ”Precisamos pedir para ele dizer o que formam (sic) esses pontos”.

Rosa: “É possível marcar um ponto entre os já marcados?”

César: “Eu quero que ele caia nos decimais” e sugeriu a pergunta “Quais são os possíveis valores de *r* e *s*?”

Rosa: “Eu acho que está ficando bom.” Então se voltou para o professor César e perguntou: “Você não vê uma luz no fim do túnel?”

Ele, que no início da reunião tinha exposto aos presentes a sua dificuldade em falar de gráficos para os seus alunos, respondeu afirmativamente: “Sim, também acho. Agora a gente está escrevendo.”

Transcrevemos esse diálogo para mostrar o ambiente de colaboração que se estabeleceu entre eles. Enfim, os professores falavam abertamente sobre suas dificuldades em como pedir a construção de um gráfico, em como pedir uma tabela, em como pedir uma expressão algébrica. Um marco importante, percebido pelos próprios professores, foi que eles estavam escrevendo juntos.

Dessa forma, as sub-tarefas vieram à tona, bem como os conceitos envolvidos na construção de um gráfico. À medida que emergiam tais questões, na tentativa de construir uma organização didática, os professores reconstruíam a organização matemática envolvida, o que se fazia por meio da explicitação de todos os passos necessários: construir as retas, nomear os eixos, determinar a escala, identificar a variável independente, localizar os pontos, dizer a forma do gráfico, interpolar pontos.

Sobre tabelas, surgiram diversas propostas de frases: organize os dados de lado e área; organize os registros de lado e área encontrados em relação à medida da área e do lado no espaço abaixo; registre os resultados encontrados; organize os resultados encontrados; construa uma tabela com esses dados; registre na tabela abaixo; registre os resultados que você encontrou; registre os resultados que você obteve; registre os resultados que você observou. Mas, diante de tal profusão, não souberam escolher a melhor opção.

Os professores reconheciam a importância de gráficos e de tabelas mas, diante de tantas dúvidas sobre como construir uma organização didática, aliadas às referentes aos conceitos envolvidos, ficaram confusos sobre qual seria a melhor redação para uma tarefa.

Finalmente, após duas horas, o professor César, referindo-se à atividade proposta pela professora Rosa, propôs: “Agora a gente pode olhar o dos palitinhos.” Dessa maneira, constata-se o domínio que esse professor quer manter sobre os colegas.

O grupo C percebeu que a atividade que envolvia palitinhos era discreta e se diferenciava da anterior, sobre áreas de quadrados; acreditavam que seria necessário levar material concreto para a sala de aula; apresentaram algumas alterações para o enunciado, reorganizaram a ordem das questões e pararam no item referente à lei, porque não conseguiram formular a pergunta. Rosa sugeriu o seguinte texto: ”O número de quadrados depende do número de palitos? Como você poderia relacionar o número de palitos e de quadrados?”

No final da reunião, dividiram as tarefas e ficaram de remeter uns para os outros as atividades, o que mostrou uma preocupação em documentar o trabalho.

Em síntese, seguem os marcos importantes dessa reunião: houve um avanço nos conhecimentos pedagógicos do conteúdo, pois os professores não copiaram nem fizeram uma leitura acrítica de atividades, sem preocupação com o aluno, como na semana anterior. Gráficos e tabelas se tornaram o centro das atenções e entrou em cena a variável, ao lado da necessidade de explicar como construir um gráfico. O ato de criação é a grande novidade para esses professores, pois “nunca fizemos isso” confessa o professor César (Professor Cesar 04/06/2004).

Desde o início da formação, registramos expressões empregadas por César, Rosa e Plínio sobre gráficos e tabelas: “gráfico assusta, os alunos travam na hora de construir o gráfico de uma função polinomial do 2º grau; como é difícil falar de gráficos, isso me dá uma angustia; não consegui fazer alguma coisa que fizesse construir o gráfico”. Sobre os alunos: “eles não registram direito na tabela; eles podem até perguntar o que é tabela; se ele conseguir entender o exercício, a tabela sai; quando trabalha com material concreto, ele consegue enxergar melhor uma tabela; como ele vai construir a tabela sem conhecer a lei?”

Agora eles têm outras preocupações: *Como redigir uma tarefa?*

A resposta a essa pergunta trouxe diversos questionamentos de caráter tecnológico, pois eles perceberam que, para melhorar a redação da tarefa, é preciso saber o que é um gráfico (ou tabela), não só saber fazer um gráfico (ou tabela). Contudo, ainda não encontramos tarefas pedindo leitura e interpretação de gráficos.

Muitos dos textos produzidos pelos professores do grupo C são diferentes daqueles usualmente encontrados nos livros didáticos. Por exemplo: “a cada figura, nós temos um par de informações (lado, área)”; “a cada par de informações correspondentes, determina-se um ponto", para o padronizado – construa um gráfico. A usual - complete a tabela - se transforma em "registre os resultados encontrados" ou "organize os resultados encontrados".

Na reunião seguinte desse grupo, César monopolizou as atenções sobre o seu problema, referente à área de superfícies delimitadas por quadrados. O resultado final foi uma atividade com quinze itens.

Esse professor acredita que os alunos não trazem nenhum conhecimento sobre o conceito de área e, dessa forma, a primeira parte dessa atividade foi dedicada ao conceito de área de superfícies delimitadas por quadrados. Para ele, os quadrados são "muito abstratos" e, por isso, pretende "humanizar" esse objeto matemático.

Para tanto, ele mostra aos colegas a planta de quatro salas de aula: S_1, S_2, S_3 e S_4, com as seguintes dimensões: 6mx6m, 5mx5m, 7mx7m e 8mx8m; a malha quadriculada, a unidade de medida e a escala utilizada.

Com o intuito de "amenizar" o trabalho dos alunos, a opção didática do grupo foi utilizar medidas inteiras e uma malha que não desse problemas de conversão de unidades. Aqui está explicitado um contrato didático, onde o papel do professor é aplainar ao máximo o caminho do aluno, evitando, por exemplo, trabalhar com números decimais, extrair raiz quadrada de números que não sejam quadrados perfeitos.

Chamou a atenção o fato de que o professor César, ao lembrar a reforma ocorrida em uma das escolas onde trabalha, tenha decidido utilizar a troca do piso para introduzir o conceito de área de uma região delimitada por quadrado, seguida pelo conceito de função. Ele acreditava ser preciso fazer uso de uma linguagem cotidiana e referir-se a ações do homem comum para humanizar o conceito de área de quadrado, pois essa figura desvinculada de uma situação concreta torna-se um objeto matemático muito abstrato.

Ao longo dessa atividade, área foi definida como: quantidade de material utilizado (granilite), quantidade de quadrados na malha quadriculada e produto de duas medidas. Novamente, foram explicitados os teoremas-em-ação sobre áreas.

Ao acompanhar o debate entre os integrantes do grupo C, pudemos fazer uma observação: o professor César que, no início da formação, tinha comentado que estava percebendo as suas próprias deficiências sobre funções, estava agora reconstruindo o conceito de área de uma figura plana, junto com a reconstrução do conceito de função. Lembramos uma de suas primeiras declarações, sobre a importância do estudo de função: “O trabalho, a importância da relação geométrica com a algébrica explica situações que foram trabalhadas anteriormente às quais não foi dado um significado.” (resposta no Questionário I).

Podemos perceber, no texto produzido pelo professor César, aquilo que lhe faltou durante a sua formação inicial: integração entre a álgebra e a geometria. Ele revelou ter consciência da fragmentação.

Lacunas na formação de professores de Matemática, tanto do ponto de vista conceitual quanto do didático, no domínio das grandezas geométricas e suas medidas, foram verificadas na pesquisa de Bellemain (2000, p.308), que elaborou uma formação continuada para professores de Matemática, relativas ao ensino e aprendizagem do conceito de área de superfícies planas.

Não é escopo do nosso trabalho a pesquisa sobre o conceito de área com professores. Mas as observações evidenciam que César estava enfrentando suas próprias dúvidas acerca de como preparar uma atividade que envolvesse o conceito de função e de área.

Nos livros didáticos de oitava série, como por exemplo, Dante (2002, p.160) e Giovanni *et al.* (1998, p.117), encontramos atividades que relacionam a medida do lado e a área de uma região quadrada. Mas a atividade proposta inicialmente pelo professor César difere daquelas encontradas nos livros didáticos, pois começa com o trabalho de um pedreiro pavimentando salas de aula quadradas e utiliza uma linguagem do homem comum nas perguntas: “Caso existisse uma sala com medida de parede com 10 metros, quantos quadrados serão necessários para fazer o piso desse ambiente? Explique; E uma sala com 2 metros de parede? E uma sala com 3 metros de parede?” A seguir, passa para uma linguagem mais elaborada, a partir da pergunta: “Para obter um ambiente de área 81 m^2, qual seria a medida do lado?”

Na segunda parte dessa atividade, os professores introduziram tabela, expressão e gráfico. Não utilizaram a palavra função, mas as palavras *relação*, *alteração*, *variação*, *correspondência* e *lei* aparecem ao longo do texto.

Ali se encontram as seguintes tarefas: “explique a diferença na quantidade gasta de material (granilite) em cada uma das salas; explique o que podemos fazer para determinar a quantidade de quadrados que serão colocados em cada sala (área); o que você percebe quando alteramos as medidas de cada uma das paredes[18]; determine a relação existente entre a quantidade de quadrados do piso e a medida das paredes; organize os dados; se a área da sala for representada pela letra r e seus lados pela letra *s,* utilize esses símbolos para escrever a sentença que relaciona os dois de maneira algébrica; mostre os cálculos; utilizando a lei, determine a medida do lado conhecendo a área; a cada par de informações (lado, área), determine um ponto; trace duas retas que se interceptam formando um ângulo de 90º graus; uma vez localizados os pontos, o que você observa?”.

Logo após a tarefa de organizar os dados, ou seja, preencher a tabela, que utiliza números inteiros para medida do lado (em metros) do quadrado: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10, seguia-se um texto. É interessante notar que nele aparecem as expressões *variação de lado* e *relação*, e uma justificativa para a utilização de expressão algébrica, que seria resumo de uma tabela, com caráter generalizador:

> Você observou que os itens anteriores mostram que há variações de valores de lado em relação à área, ou seja, alterar a medida dos lados significa alterar a medida das áreas. Percebe-se que nem sempre é possível registrar todas as medidas imagináveis na tabela, seria humanamente impossível faze-lo. Pensando na relação que existe entre a medida do lado e da área, podemos utilizar uma maneira capaz de “reunir” todas as informações que imaginamos, com o auxílio de uma linguagem algébrica. (Professor César, 25/06/2004)

Há um avanço, pois o professor César conseguiu, de próprio punho, escrever um texto sobre variação e generalização. O texto sugere olhar expressão algébrica como a redução ostensiva de uma tabela. Não é uma mera leitura de cópias de atividades, sem nenhuma preocupação em saber como o aluno poderia generalizar e obter uma fórmula, como ocorreu no início dos trabalhos do grupo C.

É importante observar que essa atividade começou trabalhando com números inteiros e agora, aparece um discurso sobre a necessidade de números decimais.

---

[18] O professor César, para espanto de seus colegas, insistia em colocar medida de parede que, para ele, é o comprimento da sala. A justificativa era que uma pessoa não se agacha para medir o comprimento de um rodapé, prefere posicionar a trena ou o metro ao longo da parede, paralelamente ao rodapé.

Mas não há, a partir desse ponto, nenhuma tarefa que peça a manipulação de números decimais ou de raízes de números que não sejam quadrados perfeitos. A atitude poderia ser entendida como uma tentativa de não entrar em conflito com o aluno, porque “[...] se colocar número decimal, o aluno vira a cara.” (Professor César 18/06/2004).

Evitar trabalhar números racionais ou irracionais em uma oitava série é a continuidade de uma situação constatada nas séries iniciais do ensino fundamental:

> Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e aos procedimentos de cálculo, em especial os que envolvem os racionais na forma decimal. (PNCs de Matemática, 1998, p. 100).

No seu texto, o professor César incluiu as seguintes informações para que o aluno pudesse construir um gráfico da área em função da medida do lado do quadrado: “Vamos combinar (padronizar) que os registros das medidas dos lados referem-se ao eixo horizontal e os das medidas das áreas referem-se ao eixo vertical”.

Nestas condições, o aluno ficará refém das ajudas, pois tal padronização é arbitrária. Não há nenhuma referência no texto de que, na situação dada, lado do quadrado seja a variável independente. Houve um retrocesso diante da profusão de textos que foram experimentados anteriormente sobre construção de gráficos.

A centralização das atenções na atividade proposta pelo professor César, as considerações de que o aluno chega à oitava série sem ter conhecimentos a respeito do conceito de área e as negociações entre os integrantes do grupo para a inclusão ou exclusão de tarefas, de palavras ou expressões idiomáticas moldaram essa atividade que gira em torno do tipo de tarefa *interdependência de grandezas*. É a primeira criação coletiva de uma organização didática de autoria do grupo C, apesar da força persuasiva do professor César.

As duas atividades, uma sobre a função polinomial do 2º grau, que permite calcular a área de regiões delimitadas por quadrados a partir da medida do lado, a outra que trabalha com padrões de regularidade (configuração de palitinhos) foram consideradas a contribuição de Rosa, César e Plínio nessa primeira fase. Parece que os professores não conseguiam determinar os objetivos dessas duas atividades e, dessa forma, a proposta só contém enunciados e tarefas, sem objetivos e título.

Se escrever objetivos constituía uma ação que “incomodava” o professor César, outros integrantes do grupo também não deram atenção a esse ponto, talvez porque não percebessem a importância de definir as metas de uma atividade ou porque não conseguissem determiná-las. Em todo caso, ninguém tomou a iniciativa de abrir um manual do professor, como ocorreu no grupo A.

No final da reunião surgiu uma preocupação com uma análise das atividades *a priori*, a gestão do tempo e a interferência do professor no momento certo:

> O problema não é a aplicação da seqüência, é a interferência no momento certo. Tem que pensar bem em todas as possibilidades antes. Estamos pensando como se esse exercício fosse aplicado. O tempo é curto. (Professora Rosa, 02/07/2004)

A professora Rosa, ao se conscientizar da responsabilidade de uma aplicação efetiva das atividades propostas, qualifica as ações do professor, agora um formador e não um mero transmissor do conhecimento. Consideramos essa atitude um avanço em relação ao início da formação, pois ela percebeu que não basta selecionar algumas atividades e aplicá-las em sala de aula, sem outras considerações.

Esta foi a última reunião do grupo C. O professor Plínio deixou a formação, mas os professores César e Rosa estarão presentes na aplicação do experimento piloto planejado pelo grupo B e continuarão até o final da formação, integrados aos remanescentes dos outros dois grupos.

O trabalho coletivo desse grupo foi marcado por momentos de tensão e de cooperação. Muitas propostas foram descartadas: experiência de laboratório com a utilização de jarra graduada, para trabalhar com o Princípio de Arquimedes; construção do dinamômetro; construção de triângulos eqüiláteros utilizando o *software* Cabri-Géomètre II; tabelas na planilha Excel; atividades envolvendo grandezas diretamente proporcionais da Física; atividades que utilizam o Teorema de Pitágoras; atividades que demandam leitura e interpretação de gráficos. Em suma, os integrantes desse grupo afastaram-se de tudo que pudesse dar trabalho no preparo de uma experiência em um laboratório ou de um arquivo no computador, que demandasse uma saída da sala de aula ou um estudo sobre grandezas diretamente proporcionais, sobre leitura e interpretação de gráficos.

As discussões e o trabalho dos professores nos grupos A, B e C nos levaram a sinalizar alguns pontos que consideramos importantes.

- A lenta aproximação com o objeto matemático *função*

Segundo Bosch e Chevallard (1999, p.83), um objeto matemático existe se existe uma relação com esse objeto, ou seja, quando uma pessoa ou instituição o reconheça como tal. A noção de relação remete às práticas sociais que se realizam na instituição. Para Chevallard, uma instituição pode ser um órgão governamental, a escola, a família, a sociedade, os programas de ensino etc.

Durante o seu período de estudos regulares, os professores criaram vínculos pessoais com o conceito de função. Como professores de uma instituição escolar, eles estabelecem relações institucionais com o conceito por meio dos programas, dos livros didáticos, onde encontraram um leque de tarefas realizáveis segundo determinadas maneiras de fazer.

- Momentos de estudo

Seguindo Chevallard (1999, p. 251), o primeiro reencontro de um professor com uma organização matemática se insere em uma problemática *cultural* e *mimética*; é cultural porque a existência dessa organização em um livro didático depende daquilo que uma sociedade considera relevante em um determinado momento histórico, como um saber que deve ser escolarizado.

Com efeito, os livros utilizados inicialmente pelos professores são distribuídos em São Paulo, sendo que muitos passaram pelo filtro do Programa Nacional do Livro Didático e estavam em circulação em 2004. A partir dessas relações superficiais, ele começa a manipular a organização matemática por imitação.

Nas primeiras reuniões, os professores fizeram comentários gerais, depois de terem folheados alguns exemplares. O passo seguinte foi apresentar cópias de materiais ou roteiros, que funcionaram como simples relatos. Somente a partir de práticas coletivas de leitura, os professores começaram a estreitar relações com as organizações matemáticas em torno do conceito de função.

Acreditamos que as práticas sociais de leitura são ações da maior importância, que não se traduzem como uma simples acumulação de informações. Assim, elas puseram em marcha o segundo momento: *exploração das tarefas* (Chevallard, 1999, p.252). O resultado dessas leituras foi diferente para cada grupo.

O grupo B retomou a seqüência, escreveu objetivos para cada uma das atividades e esboçou uma análise *a priori* de algumas das atividades selecionadas. O grupo C descartou atividades e começou a verbalizar suas dificuldades sobre o objeto matemático *função* e estudar como começar, o que pedir e como pedir.

Os integrantes do grupo A tiveram, nesse período, um comportamento diverso, pois buscavam individualmente uma atividade e só depois conversavam com os colegas. Evoluíram, da cópia e reformulação de uma atividade para a criação de duas novas.

Um outro ponto que chamou a nossa atenção é que a escrita coletiva e as discussões se tornaram "uma luz no fim do túnel" para os integrantes do grupo C. Esse grupo se conscientizou da importância desse trabalho coletivo e avançou em direção ao terceiro momento: constituição do *bloco tecnológico / teórico*, ainda na sua forma embrionária. No entanto, essa explícita conscientização da importância da escrita coletiva não ocorreu com o grupo A, que deixou obras inacabadas.

Nesse ínterim, os integrantes do grupo B, habituados a trabalhar em grupo, preparam-se para a aplicação da seqüência.

Estamos determinando sub-momentos dos momentos didáticos, propostos por Chevallard (1999) e adaptados à formação de professores. Acreditamos que se devem valorizar as práticas sociais de leitura em uma formação continuada de professores porque ela, apesar de não ser uma criação original do professor, é algo que se articula com o conjunto de valores e conhecimentos compartilhados por esse grupo social.

- Os produtos finais da primeira fase

Os produtos finais dos três grupos, ora mais, ora menos acabados, foram frutos do trabalho coletivo; das vivências anteriores, como estudante e como professor ministrando aulas sobre função; das concepções de ensino de Matemática; de um conhecimento, mesmo que indireto, das sugestões contidas nos *Parâmetros Curriculares de Matemática* sobre o tema *função*; de uma visão depreciativa do aluno da escola pública, muito presente no grupo C, além da idéia de que o professor deve amenizar o trabalho do aluno.

A heterogeneidade desses três grupos oriunda das experiências, conhecimentos, valores e comprometimento de seus integrantes com a formação continuada levou à confecção de distintos materiais: o grupo B preparou uma seqüência para ser aplicada em uma escola pública, baseada na cópia; o grupo C apresentou duas atividades: uma é uma criação inédita; o grupo A modificou uma atividade encontrada em um livro didático e procurou criar duas novas atividades sobre interdependência de grandezas, depois de descartar pesquisa em dicionário e as atividades propostas pelo professor Túlio.

A organização matemática em torno do tipo de tarefa *conceituar função como interdependência de grandezas* apareceu nos três grupos. Não poderia ser de outra forma, pois é a organização matemática mais comum nos livros didáticos.

A maior diversidade de materiais foi apresentada pelo grupo B, que selecionou organizações matemáticas pontuais em torno dos seguintes tipos de tarefas: conceituar função como interdependência de grandezas, como máquina de entrada e saída e como padrão de regularidade. Contudo, essas organizações foram trabalhadas como compartimentos estanques, ao longo da seqüência proposta, seguindo aquilo que geralmente se encontra nos livros didáticos, aspecto discutido no capítulo 2, Parte I. O mesmo ocorreu com as atividades apresentadas pelo grupo C. Em outras palavras, utilizando a nomenclatura proposta por Bosch *et al.* (2004), podemos olhar o conjunto da obra dos grupos A e C como organizações matemáticas locais em torno do conceito de função onde falta a integração dos diversos tipos de tarefas, e isso é um indicativo de sua rigidez.

- Tabelas

Durante o trabalho coletivo, os professores se propuseram diversas perguntas sobre tabelas, não só como pedi-las em uma atividade, mas também como explicá-las para o aluno.Por exemplo: “O aluno sabe o que é uma tabela? O que vou dizer para um aluno se ele perguntar o que é uma tabela? Será que não fica melhor quadricular?” Consideramos esses questionamentos um avanço, diante daquilo que observamos nas primeiras reuniões.

- Gráficos

Somente a professora Rosa, que ministra aulas de Física, considerou a construção, leitura e interpretação de gráficos muito importantes e manifestou-se a favor da sua inclusão em todas as atividades preparadas para os alunos. Mas ela não conseguiu a adesão dos colegas de seu grupo para o intento de introduzir o conceito de função nas tarefas relacionadas à leitura e interpretação de gráficos.

Nas atividades escolhidas, comentadas ou eventualmente (re)formuladas pelos professores, gráficos sempre foram o produto final, quando incluídos na atividade. Essa situação pode ser o reflexo daquilo que constatamos na análise dos livros didáticos, onde a tarefa *construir um gráfico* vem por último, ou seja, depois dessa etapa, não se faz mais nada com essa representação.

Consideramos um ponto positivo o fato de que alguns professores começaram a enfrentar suas próprias dificuldades, principalmente os integrantes do grupo C, que propuseram diversas frases para a tarefa *construir um gráfico*; preocuparam-se em como explicar para o aluno a construção de um gráfico, em como passar as informações de uma tabela para o gráfico, dentre outras.

César, Rosa e Plínio detalharam diversas sub-tarefas, ampliando o discurso encontrado nos livros didáticos sobre construção de gráficos.

- Variáveis

A noção de variável veio à tona no momento em que o grupo C estava discutindo como ensinar ao aluno a construção de um gráfico; somente o professor César, do grupo C, conseguiu escrever um texto, utilizando as palavras variação, alterar medidas, tabelas, reunir informações, relaciona e maneira algébrica. Os outros dois grupos não mobilizaram espontaneamente as noções de variação, variável ou taxa de variação, o que mostra não terem sido essas noções incorporadas ao discurso dos professores. Acreditamos que as sutilezas e dificuldades da idéia de variável, que pode ser definida de diferentes maneiras, como se pode verificar no artigo de Schoenfeld e Arcavi (1988), não têm sido devidamente debatidas na formação inicial dos professores, apesar da importância desse conceito.

- Números

Os professores utilizaram os racionais na representação decimal principalmente nas atividades que trataram de valores monetários. A representação de um número na forma de fração apareceu em uma tabela e os números reais foram citados, mas nunca acionados para a execução de uma tarefa. Em suma, a preferência é pelos inteiros, não negativos.

- Proporcionalidade e função linear

O modelo geral da proporcionalidade põe em funcionamento ao menos duas grandezas variáveis num sistema (físico, matemático ou social) que as torna dependentes e determina uma correspondência (relação funcional) entre seus elementos.

Todavia, diversas razões podem estar contribuindo para que os professores não consigam conceber função linear como modelo da proporcionalidade, mas somente como uma função polinomial do 1º grau definida por $f(x) = ax + b$ onde $b = 0$. Vimos na Parte I, capítulo 2, nos PCNs (1998) de Matemática, formulados a partir de uma concepção não-linear de currículo, a rede formada para a proporção não inclui função linear; nos livros didáticos analisados, somente um deles relaciona explicitamente proporcionalidade e função linear; geralmente o estudo da proporcionalidade é feito desvinculado de função, em capítulos separados ou até em livros de séries diferentes. Outro ponto é que a expressão *função linear* não faz parte do vocabulário corrente dos professores.

- Recursos didáticos

Constatamos uma resistência em relação à utilização de recursos didáticos oferecidos pelos avanços tecnológicos: calculadora, planilha Excel, *software* Cabri-Géomètre II. Restaram os materiais concretos: palitinhos para a construção de seqüências de figuras obedecendo a um determinado padrão e folhas de papel que devem ser dobradas.

- Escrever objetivos

O único grupo que conseguiu escrever os objetivos de cada atividade, mesmo com algumas imprecisões, foi aquele formado por professores mais experientes, que trabalhavam na mesma escola, dois deles efetivos por concurso público e com experiência anterior em participação e aplicação de seqüências de ensino em projetos de pesquisa.

Considerando que uma das causas possíveis seja a dificuldade em escrever tarefas para compor uma atividade, acreditamos que também outros fatores possam ser levados em consideração. Professores que não são efetivos, muitas vezes permanecem pouco tempo em uma mesma escola. É no planejamento anual que eles têm contato, muitas vezes superficial, com programas, objetivos, cronograma, pois são os professores mais antigos que se encarregam de possíveis reformulações, uma vez que um recém-chegado não conhece a escola e torna-se mero usuário desse planejamento. Concordamos com Tardif (2002, p.90), que mostra a influência da precariedade das relações trabalhistas sobre a aprendizagem da profissão e a aquisição de saberes profissionais.

Uma vez que escrever objetivos parece não ser uma tarefa rotineira para um professor, sugerimos que faça parte de sua formação inicial: a formulação de objetivos para aula; a verificação (ou determinação) daqueles propostos e muitas vezes não explicitados no capítulo de um livro didático; a observação dos verbos utilizados nas atividades propostas; a organização e encadeamento das tarefas. Os formadores de professores, por sua vez, deveriam no seu dia-dia fazer o mesmo e explicitar suas ações.

- Planejamento

Somente o grupo B se planejou para um experimento-piloto, que foi benéfico para todos os professores que participaram desse evento. É o que veremos a seguir, na segunda fase.

2.2. Segunda Fase

Essa fase se diferencia da anterior pelos seguintes motivos: constitui uma saída da universidade, verifica-se a mobilização espontânea dos professores que se engajaram como observadores e ocorrem os posteriores debates coletivos.

Nos próximos parágrafos, descreveremos e analisaremos a aplicação do experimento-piloto e os avanços capitalizados com essa aplicação.

A iniciativa de aplicar um piloto partiu dos professores Margarida, Pérola e Marcos, que trabalham na mesma escola. Eles expuseram a idéia à diretora, convenceram os alunos e responsabilizaram-se pela reprodução do material fornecido aos alunos.

A experiência de participação nesse tipo de trabalho foi inédita para todos os professores que atuaram como observadores. No dia da aplicação, observar e anotar; durante as férias, digitar as observações e produzir um texto sobre a experiência de ter sido observador (ou formador).

Aproveitamos a disponibilidade e motivação dos professores para que esse experimento piloto pudesse ser benéfico para todos os envolvidos. Uma oportunidade que poderia gerar uma reflexão *na* ação de observar, seguida de uma reflexão *da* ação de observar, ao digitar o texto, completada por uma nova reflexão sobre as reflexões anteriores. Aqui, está claro, seguimos os ditames de Donald Schön, que centra sua concepção de desenvolvimento de uma prática reflexiva em três idéias centrais: *conhecimento na ação*, *a reflexão na ação* e a *reflexão sobre a reflexão na ação*. As contribuições de Schön para a formação de professores são discutidas por Campos e Pessoa (2003), que discorrem sobre essas idéias:

> Este distanciamento da ação presente para refletirmos é um movimento que pode ser desencadeado sem gerar necessariamente uma explicação verbal, uma sistematização teórica. Todavia, ao produzirmos uma descrição verbal, isto é, uma reflexão sobre a nossa reflexão da ação passada, podemos influir diretamente em ações futuras, colocando em prova uma nova compreensão do problema. Este momento é designado por Schön como o da *reflexão sobre a reflexão na ação*. (CAMPOS e PESSOA, 2003, p.197).

As discussões coletivas relativas ao experimento-piloto ocorreram nos dias 6 e 13 de agosto de 2004.

2.2.1. Aplicação do experimento-piloto

O piloto foi aplicado no dia 6 de julho de 2004, das 10h:00 até 12h:00, em uma sala das dependências de uma escola da rede estadual de ensino do Estado de São Paulo, em um município próximo da capital. Os dez estudantes alunos presentes são alunos da professora Pérola, no período da manhã. Após a organização das duplas de alunos, ela se colocou como observadora de uma delas, deixando sua colega Margarida no papel de professora-formadora da classe. Além da professora Pérola, atuaram como observadores os professores Marcos, Rosa, César e a estudante Bruna.

De acordo com aquilo que tinha sido combinado no dia 2 de julho, cada dupla de alunos foi observada por duas pessoas. Quatro duplas foram observadas por um professor e um observador do projeto e uma dupla foi observada por Juliano e Bruna. Uma das professoras da escola, que não tem vínculo com o projeto, ofereceu-se para filmar o evento.

Lembramos que o tema *funções* foi excluído da oitava série no início do ano letivo, durante a semana de planejamento, pelos professores de Matemática da referida escola. Dessa forma, as atividades do experimento-piloto foram uma novidade para os alunos, que requisitaram a professora Margarida diversas vezes. No final, ela fez a correção das duas primeiras atividades. Mais tarde, sua atuação foi analisada pelos colegas durante as discussões sobre o experimento.

Quanto ao desempenho das duplas de alunos, constatamos que uma delas conseguiu trabalhar as cinco atividades propostas e foi a única que construiu um gráfico a partir da tabela que associava o número de peças e respectivo custo, mas trocou os eixos; uma dupla trabalhou as quatro primeiras atividades; uma dupla trabalha a primeira, a segunda, a terceira e a quinta e duas duplas, as três primeiras atividades.

Após a saída dos alunos, a professora Perola nos entregou um texto que continha informações sobre o perfil dos alunos que participaram do piloto, o que chamou a atenção do professor César. Ele fez uma crítica aos horários de trabalho pedagógico coletivos - HTPCs – na escola onde trabalha, dizendo que se poderia aproveitar melhor o tempo, analisando os alunos.

Pedimos aos professores que escrevessem um relatório sobre o ato de observar e anotar aquilo que estavam observando, além de digitarem suas anotações, pois não poderíamos perder a oportunidade de que eles fizessem uma reflexão sobre a vivência como observadores. Partimos do pressuposto de que o distanciamento, a retomada do texto produzido no ato da observação e a produção de um relatório pudessem levar a uma nova compreensão das próprias ações, bem como das ações dos alunos observados e da experiência como um todo.

Os professores César, Rosa, Juliano, Pérola e Margarida digitaram suas observações durante as férias. Os dois primeiros acrescentaram comentários.

César, Juliano e Pérola conseguiram acompanhar, passo a passo, os cálculos e as falas das duplas observadas.

A professora Rosa destacou, no seu relatório, a sua ansiedade em observar o experimento-piloto e a oportunidade de poder observar apenas dois alunos, fez uma auto-avaliação como observadora, examinou a atuação da formadora; sugeriu uma outra dinâmica para a aula observada:

> Após semanas elaborando a seqüência de atividades sobre funções, estávamos ansiosos para presenciar a aplicação de atividades semelhantes para os alunos da 8ª série. [...] Tive a oportunidade rara de observar apenas dois alunos, ouvir suas discussões, argumentos e idéias na resolução de uma atividade e isso foi ótimo, bem diferente do que tentar observar 40 alunos em uma mesma sala. [...] As dificuldades surgiram quando precisei distinguir o que seria ou não importante estar anotando. E, no final das observações feitas, cheguei à conclusão de que pouco havia registrado. Acabei dando ênfase para as respostas dadas nos exercícios, esquecendo-me de registrar os caminhos percorridos para chegar a elas. [...] As interferências deveriam acontecer com mais freqüência durante a resolução das atividades, para que os alunos não avançassem na resolução dos exercícios, carregando dificuldades. (Professora Rosa, Julho/2004)

Ela concluiu que observar os pontos positivos e negativos, tempo de aplicação e reação dos alunos e professores, tudo foi muito positivo. Mais tarde, essa professora, que ministra sessenta aulas por semana, entraria em conflito, porque percebera que, neste ritmo, não conseguiria acompanhar a atuação dos alunos.

O professor César, no seu relatório, deu mais atenção à atuação da formadora, à atitude dispersiva da dupla observada, fez uma reflexão sobre o seu trabalho docente e afirmou ter visto seu reflexo na dupla observada:

> Não deveria ter sido feito um fechamento geral. A interferência no quadro por exercício teria privilegiado e socializado a forma que cada um resolveu cada exercício. Assim o desgaste da Margarida teria sido menor. [...] A disposição dos exercícios parece ter contribuído com a dispersão dos alunos. [...] Pensei no trabalho que tenho feito em sala e como fico ansioso para colocar todos os alunos no mesmo nível. Será possível? [...] Observei os alunos fazendo coisas que já fiz quando estava sendo observado. (Professor César, julho/2004).

Ele percebeu a importância de uma aprendizagem significativa para equações, depois de ter observado as confusões que os alunos fizeram entre equação e função:

> O aluno está procurando uma relação da função com a equação que já conhece. Parece não saber a razão de existir a igualdade zero. Estou imaginando como foi o primeiro contato desses alunos com

> uma equação, não teve significado. Talvez por isso a dificuldade quando procuram alguma relação com a lei do exercício e assim igualar a zero. (Professor César, julho/2004).

A professora Margarida apresentou um texto descritivo dos fatos ocorridos durante o experimento-piloto, enquanto circulava pela classe; conseguiu lembrar de algumas das dificuldades que os alunos tiveram ao resolver as atividades e avaliou sua atuação como formadora, que considerou desastrosa, durante o fechamento das atividades: “Que horror! Até agora me sinto mal em lembrar desse momento. Fiquei desequilibrada.” (Professora Margarida, julho/2004).

No seu relato, essa professora não colocou em dúvida a apresentação, a organização e o número de atividades do experimento-piloto. Sua concepção de ensino de álgebra continuava a mesma: ”Após a resolução da atividade *Brincando no parque*, minha intenção era mostrar para os alunos que podemos utilizar a linguagem algébrica para nos auxiliar nos cálculos. E, a partir dessa atividade, o aluno poderia criar leis.” (Professora Margarida, julho/2004).

Ela não conseguiu captar aquilo que o seu colega César tinha observado na dupla, que havia confundido equação e função. Minimiza as dificuldades dos alunos: “Quando se depararam com o número T de dias, titubearam, mas logo compreenderam como usá-lo.”

Essas reflexões não terminaram com a elaboração e entrega dos relatórios. Durante as discussões coletivas sobre o experimento-piloto elas foram socializadas.

2.2.2. Discussões sobre o experimento-piloto

Após as férias, somos informados da desistência dos professores Túlio e Plínio. Logo no início da reunião, alguns professores fizeram afirmações que reforçaram o nosso ponto de vista de que é preciso desenvolver uma formação continuada na universidade, fisicamente distante da escola:

> A nossa profissão fica mais valorizada quando a gente vem para cá.
>
> Uma das coisas que me faz continuar é o projeto, que a gente vem aqui, respirando e renovando oxigênio porque está bravo lá fora.
>
> É um estímulo para a gente, pois não é tão fácil ser professor, da escola pública, é bem pesado.
>
> Esse é um momento importante, um dos motivos para não desistir da profissão.

Essas declarações mostram que a formação continuada em um ambiente universitário estimula e motiva os professores. Elas opõem-se à opinião de diversos pesquisadores, como se lê em Lastória e Mizukami (2002), que privilegiam a escola como *lócus* para a formação continuada de professores.

O trabalho em grupo e a elaboração de materiais instrucionais também foram ressaltados pelos professores: “O grupo faz com que a gente pense na prática.” “A gente vê que o ensino precisa mudar e aqui a gente aprende até a elaborar o nosso próprio material.”

Elaborar materiais não é uma prática comum, pois os professores das escolas públicas trabalham com os livros enviados pelo Programa Nacional do Livro Didático ou com material distribuído pela Secretaria da Educação, ao passo que os professores que lecionam nas escolas privadas são obrigados, muitas vezes, a utilizar apostilas de renomados sistemas de ensino, compradas pela instituição onde ministram suas aulas.

A seguir, descreveremos os pontos principais das discussões sobre o experimento-piloto, que duraram duas reuniões. Inicialmente propusemos que os professores envolvidos manifestassem suas opiniões sobre o papel de observador e de formador.

Margarida, sobre o seu desempenho como professora-formadora, afirmou que se sente melhor circulando pela sala, atendendo pequenos grupos, porque é o que faz no seu dia-a-dia, mas que se sentia desequilibrada e nervosa ao explicar um exercício na lousa.

O seu desempenho durante a aplicação do piloto, sua auto-avaliação, tão depreciativa, merecem atenção. O seu problema de comunicação em sala de aula é que ela não destaca a importância do aluno como receptor ativo, parte do diálogo necessário entre emissor/professor e receptor/aluno, uma vez que acredita que o aluno não presta atenção no professor diante da lousa.

César e Rosa expuseram seus pontos de vista, sobre a necessidade de fazer um fechamento para cada atividade.

A professora Pérola afirmou ter anotado tudo o que podia, mas que fora um desafio escrever as observações, por causa de suas próprias deficiências em

Português. Esclareceu que já trabalha em grupo com seus alunos, fazendo-os registrar aquilo que ocorre durante as aulas no caderno e que está trabalhando a concentração, pois os considera muito dispersivos. No reencontro com seus alunos (do experimento-piloto) percebeu que eles estavam se sentindo muito valorizados e queriam fazer uma excursão até a universidade.

É interessante notar como os alunos prezam um professor que participa de projetos. Ao mesmo tempo, cresce a auto-estima por terem participado de um experimento, que envolveu seu professor com professores universitários. Talvez esta seja uma chave para inverter o atual quadro de desvalorização tanto dos docentes, quanto dos alunos de escola pública.

Pérola informou aos presentes que estava aplicando a seqüência do experimento-piloto em uma classe de EJA (Ensino de Jovens e Adultos), uma atividade de cada vez e fazendo as interferências, pois percebera que essas ações fizeram falta durante a aplicação do piloto: “Eu dizia: vamos formalizar o que vocês fizeram.” Ela considerou a linguagem utilizada nessa seqüência mais adequada para essa clientela do que aquela encontrada em um livro didático. Podemos perceber a auto-suficiência dessa professora, bem como a sua flexibilidade para fazer os acertos que considera necessários para cada situação.

Rosa comparou sua postura com a de Pérola e afirmou que, após o piloto, percebera o quanto é importante “ver o que eles (alunos) pensam, quais são as suas dificuldades e que poderia aprimorar o seu trabalho se tivesse essa característica”.

Para o professor Juliano, observar é uma questão de habilidade. Ele acredita que ver a reação dos alunos e anotar ao mesmo tempo foi um grande aprendizado e afirmou que ”Escrevendo é que a gente aprende.” Sobre a proximidade com os alunos, ele considera que “[...] é bom esse contato de ter idéias do que eles estão pensando para ter idéia de como ajudar.”

César comentou que o ato de observar o fez pensar em como interferir nos erros dos alunos e também em uma seqüência de ensino. Ele enfatizou que “como observador, posso dizer que está refletido; mais ainda, posso enxergar outro plano.” Fez considerações sobre a quantidade de exercícios, o pouco espaço deixado para a resolução, as dificuldades dos alunos na multiplicação e a ausência de calculadoras.

O professor Marcos confessou que não anotou praticamente nada, mas percebeu que a dupla de alunos estava harmonizada e que tiveram algumas dificuldades de interpretação. Marcos desempenhará o papel de professor-observador durante a aplicação da seqüência, na quarta fase e assim conseguirá melhorar seu desempenho como observador.

Bruna, que ainda é estudante, revelou que não tem experiência em saber como o aluno reage. O ato de observar uma dupla de alunos a fez ver que há várias maneiras de resolver um problema.

Os relatórios e as falas desses professores apresentam um traço comum: a percepção do quanto é importante observar o aluno. Para eles, foi uma experiência inédita poder seguir uma dupla de alunos durante duas horas e acompanhar suas falas, suas dificuldades e os caminhos que tomaram para resolver as atividades. Podemos notar uma nova postura dos professores-observadores em relação ao aluno e ao próprio trabalho como docente.

Após essas considerações, iniciamos um debate sobre o desempenho dos alunos que participaram do experimento-piloto e a adequação das atividades propostas. Além disso, pedimos aos professores responsáveis pela seqüência que revelassem as suas expectativas, documentadas nas análises *a priori*, se haviam se confirmado ou não.

1ª Atividade - *Dobrando papel*

As professoras Pérola e Margarida comentaram que os alunos não perceberam a potenciação e concluíram que “o professor trabalha com potência sem situação-problema e então fica separado de tudo.” Na análise *a priori* elas tinham pressuposto que eles iriam pensar na potência, o que não se confirmou. Comentaram que algumas duplas não precisaram dobrar a folha de papel fornecida para preencher a tabela, como tinham previsto.

Citamos, em especial, o relato feito pelo professor Juliano sobre como a dupla observada trabalhou os dois primeiros itens dessa atividade, porque os caminhos escolhidos foram bastante comentados. Esses alunos não utilizaram a noção de potência, mas efetuaram diversas operações até se certificarem de que são necessárias dez dobras para se obter 1024 partes de uma folha de papel. Segue a transcrição dos apontamentos do professor Juliano, que conseguiu anotar todos os passos executados pela dupla:

> A dupla de alunos leu o enunciado e começou fazer as dobras conforme solicitado. Eles perceberam que se somarem o resultado das partes daria o número de partes da dobra seguinte. Para confirmar o que fizeram somaram 16 + 16 e chegaram ao valor 32 e, então, um dos meninos concluiu que para 6 dobras seria 64, 7 dobras seria 128 e 8 dobras seria 256 e assim por diante. Continuaram somando o valor das partes conforme o número de dobras até chegarem a 10ª dobra e encontraram 1024 partes. Pegaram o número 1024 dividiram por 2 e ao resultado dividiram novamente por 2 e assim sucessivamente até encontrarem um valor conhecido. A partir daí contaram o número de dobras até chegarem novamente ao número 1024. (Professor Juliano, 13/08/2004)

Durante a confecção dessa atividade, a professora Margarida considerou que não seria necessário colocar uma questão específica sobre dependência, pois isso seria “bobinho.” Ela partiu do pressuposto de que o aluno percebe que o número de partes depende do número de dobras.

Entretanto, não há nada explicitamente declarado, nos protocolos dos alunos, que possa levar a tal conclusão. No item *Qual a sua conclusão?* cada uma das quatro duplas escreveu o seu próprio texto: “a conclusão é que a cada dobra o número de partes dobra o número inicial”; “vai multiplicando por dois”; “cada dobra é o dobro da anterior”; “se somarmos um número por si mesmo dará o próximo número de partes dobradas”. Há uma dupla que não respondeu a questão.

Merece atenção o fato de que a professora Margarida continuasse a acreditar que dependência é uma noção espontânea, mesmo após ter acompanhado a aplicação do experimento-piloto e de ter lido os protocolos dos alunos.

Perguntamos aos presentes se os alunos poderiam ter percebido o objeto matemático *função* que está por trás dessa primeira atividade, a partir das tarefas propostas. Após um debate, os professores responsáveis pela atividade perceberam que deveriam ter colocado uma questão que envolvesse explicitamente a dependência, não só para introduzir o conceito de função, mas também para atingir um dos objetivos previstos: perceber dependência. Além disso, eles concluíram que uma pergunta do tipo: *Qual a sua conclusão?* não era adequada para uma primeira atividade.

Os professores concordaram que *Dobrando papel* é uma atividade adequada para ser a primeira da seqüência que será elaborada coletivamente, em outro momento, com algumas alterações.

2ª Atividade – Brincando no parque

A professora Margarida mostrou sua surpresa: “eu nunca imaginei que o aluno pudesse fazer isso!” diante do erro cometido por algumas duplas ao calcular o valor gasto por uma criança em um parque de diversões, cuja entrada custa R\$ 2,00 e cada brinquedo utilizado, R\$ 0,50.

Margarida citou o fato de que alguns alunos calcularam $(2{,}00 + 0{,}50) \times \text{número de brinquedos}$ e não $2{,}00 + 0{,}50 \times \text{número de brinquedos}$. Esse fato não surpreendeu outros professores e levantou-se a hipótese de os alunos nunca terem visitado um parque de diversões ou desconhecerem seu funcionamento. Insistiu-se na necessidade de interpretar o problema.

Perguntamos aos presentes se fora atingido um dos objetivos propostos para essa atividade: relacionar variáveis. A professora Margarida afirmou que os alunos perceberam que o custo dependia do número de brinquedos, ao passo que Pérola notou a necessidade de outras questões complementares sobre dependência para atingir este objetivo. Mais uma vez, Margarida considerou que a idéia de dependência não precisava ser explicitada.

A maneira como a professora Margarida se referiu à dependência, poderia ser explicada, em parte, pelo fato de ter ministrado aulas sobre funções, introduzindo esse conceito por meio de relações entre conjuntos. Essa abordagem, que não mobiliza os componentes de variação e dependência, foi praticada na sala de aula, em anos anteriores, por essa professora.

Sobre a apresentação de uma fórmula pronta para o aluno, após um longo texto onde se lê a expressão ”linguagem algébrica”, os professores responsáveis pelo piloto esclareceram que a questão tinha sido discutida, mas que preferiram deixar “do jeito que estava no material”, referindo-se à apostila de onde extraíram a atividade, porque o aluno não conhece a expressão idiomática “linguagem algébrica”.

A professora Margarida lembrou, mais uma vez, que no passado, sentira muita angustia por não conseguir encontrar lei e, por esse motivo, considerava necessário colocar um problema resolvido. Para o exercício seguinte, sobre uma corrida de táxi, ela afirmou: “A instrução foi dada, era igualzinho e, sem a instrução, não sairia”.

Apontamos para a possibilidade de o aluno escrever, por extenso, a expressão procurada. Aproveitamos a ocasião para fazer uma breve retomada da evolução da linguagem algébrica: retórica, sincopada e simbólica e da necessidade de o aluno passar por estas fases, descobrindo a necessidade do símbolo. Nesse momento, a professora Margarida percebeu aquilo que tinha feito ao dizer “eu já adiantei e fiz isso para ele.”

Lemos as anotações registradas por um dos observadores do projeto sobre a negociação que dois alunos (do experimento-piloto) fizeram para construir uma fórmula, utilizando duas letras diferentes a fim de nomear as variáveis, na resolução do problema da corrida de táxi, onde se encontra a tarefa: ”Represente o valor da corrida por uma letra a seu critério, a distância da corrida por uma letra diferente da primeira e escreva essa situação utilizando a linguagem algébrica”. A dupla escreveu: “$0{,}80x + 2{,}00 = y$”, onde x representa os quilômetros rodados e y o preço da corrida. Comentamos os resultados obtidos pelas outras quatro duplas. Uma escreveu: ”$T = 2{,}00 + 0{,}80K$”; outra “$2{,}00 + x.L$, L= o número de quilômetros e x é o tanto de centavos pelo tanto de quilômetros” e duas deixaram em branco.

Mesmo diante desses fatos, a professora Margarida, mais uma vez, reafirmou suas concepções de ensino: “O meu objetivo era que os alunos aprendessem a linguagem algébrica e que eles já usassem nas outras atividades”. Seu discurso mostra que suas concepção tecnicista de ensino de Matemática são muito arraigadas: do modelo resolvido para exercícios parecidos.

Sobre esse exercício, o professor Juliano revelou que precisara explicar o que era bandeirada para que os alunos que estava observando pudessem prosseguir. Os professores que tinham proposto a atividade esqueceram o fato de que, na cidade onde moram e trabalham, os táxis não possuem taxímetro e cobram uma corrida de outra maneira.

Sobre a ausência de alguma questão que pedisse a construção de um gráfico (na primeira e na segunda atividade), ouvimos “Aqui se foge de gráficos como o diabo foge da cruz.” (Professora Margarida, 13/08/2004).

Os observadores comentaram que os alunos erraram nas multiplicações, envolvendo números decimais e acrescentaram que, se eles pudessem ter manipulado uma calculadora, teriam perdido menos tempo com as operações.

3ª Atividade - *Alugando carro*

Essa atividade se refere a três locadoras de automóveis, que oferecem planos diferentes. A respeito da tarefa: *determinar o plano mais vantajoso para alugar um carro*, a professora Margarida informou que ela fora utilizada para ver se os alunos tinham senso crítico. Como a professora Pérola já havia reaplicado a atividade em uma sala de EJA, ela percebeu que as três tabelas deveriam estar juntas. O professor Flávio, que não tinha presenciado a aplicação do experimento-piloto, sugeriu que as tabelas fizessem uma projeção mais ampla do que aquelas que foram propostas (para quatro dias, cinco dias) e enfatizou: “Elas não deixam escolha para poder comparar as três locadoras.” O professor Marcos comentou que a dupla observada teve a iniciativa de fazer o teste para quatro dias e depois para 30 dias. A professora Margarida confessou que “foi falta de análise” durante a elaboração do experimento-piloto.

A professora Pérola teceu comentários acerca do desempenho dos alunos da classe de EJA nessa atividade e explanou o modo como ela fora encaminhando os itens, interferindo passo a passo, verbalmente, e percebendo aquilo que ficou faltando para os alunos do experimento-piloto. Suas palavras: “Eles estão adorando porque dizem que estão pensando e que fica fácil. Agora que aplicou, a gente entendeu que faltou alguma coisa. Eu fiz verbal e talvez, se estivesse escrito, o resultado poderia ter sido melhor.” (Professora Pérola 13/06/2004).

4ª Atividade – Produção de peças de informática

Essa atividade, que trabalha com a proporcionalidade direta, foi resolvida por dois grupos. Depois de verificar as respostas dadas por eles, a professora Pérola supôs que eles tivessem estudado a regra de três na sexta série e de forma mecânica. Comentou que talvez a expressão *diretamente proporciona*l não fosse conhecida pelos alunos.

Já o professor Marcos observou que a sua dupla teve dificuldades em resolver a questão: “O custo é dado em função de quê? e a questão: “Neste caso, quais são as variáveis.” Chamamos a atenção para o fato de que esses termos eram novos para os alunos e só foram introduzidos nessa atividade. As declarações desse professor, um dos responsáveis pelo experimento-piloto, mostra que ele não tinha percebido que as atividades anteriores não tinham introduzido esses termos e que um aluno, sem nenhuma ajuda, não conseguiria entender as tarefas pedidas.

5ª Atividade - Medindo lados e perímetro

Somente uma dupla trabalhou essa atividade, mas não compreendeu o item “É possível ter perímetros diferentes para o mesmo quadrado” e o gráfico se resumiu a duas retas denominadas de L e P, concorrentes, uma evidência de que os alunos não compreenderam o enunciado: “Com os dados da tabela marque em um sistema de eixos os pontos correspondentes aos pares (L,P)”, pois essa mesma dupla construiu o gráfico pedido na atividade anterior, no papel quadriculado, a partir do enunciado: “Use os dados da tabela e construa um gráfico.” Os professores não fizeram muitos comentários sobre essa atividade e encerraram a avaliação do experimento-piloto.

De maneira resumida, nessa segunda fase, os docentes observaram duplas de alunos; fizeram anotações e depois digitaram cálculos e falas de alunos; socializaram suas observações e registros; debateram sobre as dificuldades, os erros e acertos dos alunos do experimento-piloto, discutiram as falhas; ouviram os comentários da professora Pérola sobre a reaplicação das mesmas atividades em uma sala de EJA.

Percebemos que a aplicação do experimento-piloto e as discussões posteriores mobilizaram os professores, que se mostraram interessados com esse processo de formação continuada. Além disso, constatamos que houve uma interação entre o grupo que idealizou a realização do projeto: Pérola, Marcos e Margarida de um lado e os professores: Rosa, César, Juliano e a estudante Bruna do outro. Vimos que houve uma troca de papéis: Pérola e Marcos, de idealizadores passaram a ser observadores; Margarida, de idealizadora, a formadora; os outros atuaram como observadores.

As duas horas consumidas na aplicação do experimento-piloto geraram textos escritos e também quase seis horas de debates. Os idealizadores puderam confrontar as suas expectativas iniciais, quanto ao desempenho dos alunos, com a realidade observada na sala de aula. Com isso, constatamos que houve um tempo significativo dedicado às discussões. Os movimentos de *conhecimento na ação*, *a reflexão na ação* e a *reflexão sobre a reflexão na ação* ocorreram durante e após a aplicação do experimento-piloto.

Julgamos importante mencionar o fato de que os professores assumiram diferentes papéis: idealizadores, observadores, formadores e investigadores de maneira espontânea, colaborativa, tornando-se como essa iniciativa, sujeitos da história dessa experiência.

Ao analisarmos os momentos de estudo ou momentos didáticos, propostos por Chevallard (1999, p.252), os professores, durante os debates em torno do modo de introduzir a noção de dependência, estariam no terceiro momento de estudo. Ao avaliar as técnicas utilizadas pelos alunos para resolver as tarefas, tanto na observação de uma dupla como durantes as discussões coletivas, estariam no quarto momento de estudo. Ressalta-se que os momentos não precisam seguir uma ordem temporal.

Os ganhos coletivos em termos de um melhor conhecimento pedagógico do conteúdo, de uma nova postura em relação ao aluno permitem-nos sugerir que uma ação-pesquisa, voltada para formação continuada de professores, incorpore a metodologia de trabalho, que propomos a seguir.

Os professores, em formação continuada, criariam uma pequena seqüência de ensino na universidade, para ser aplicada em uma sala de aula. A confecção de materiais instrucionais, a aplicação de atividades em sala de aula, o registro do acompanhamento das resoluções e discussões de um grupo de alunos, as reflexões, individuais e coletivas das observações, a possibilidade de poder assumir diversos papéis, ora um idealizador da seqüência, ora um observador de um grupo de alunos, ora um formador estimula a criação de um ambiente favorável ao trabalho colaborativo, melhoraria a auto-estima do professor e propiciaria condições para que ele se tornasse um investigador na sala de aula. Em uma espiral de crescente autonomia, poder-se-ia retomar a seqüência de ensino, para uma nova rodada.

2.3. Terceira fase

Esta fase equivale ao período de construção da seqüência de ensino que será aplicada em uma oitava série. A seguir, descreveremos e analisaremos os principais fatos ocorridos nesse período.

O esfacelamento dos grupos A, B e C devido à diminuição do número de participantes acarretou uma mudança na dinâmica de trabalho a partir do dia 20 de agosto. A efetivação de professores aprovados em concurso público na rede de ensino do Estado de São Paulo, no início do mês de agosto de 2004, alterou a vida dos professores Túlio, Plínio e Hortência que, por não serem efetivos, tiveram que mudar de escola ou de horário de trabalho. A professora Pérola enviou uma mensagem, por meio da professora Margarida, lastimando não poder continuar a participar das reuniões, pois assumira o seu segundo cargo como professora efetiva.

O professor Flávio deixou de participar do projeto após um debate em que se propunha, para as aulas de Matemática, o uso da linguagem científica no lugar de uma linguagem cotidiana. Ele se opôs à utilização da palavra *massa,* quantidade de matéria, grandeza escalar no lugar de *peso*, grandeza vetorial, mas empregada no dia-a-dia como sinônimo de massa. Isolado em sua crença de que não vale a pena investir no aluno, preferiu abandonar a formação continuada.

O grupo que permaneceria até o fim era composto pelas estudantes Nina e Bruna pelos professores Marcos, Margarida, Juliano, Rosa e César, que reformularam as atividades do experimento-piloto que foram escolhidas para serem reaplicadas, além de incluírem novas atividades. A proposta final se encontra no ANEXO B – *Seqüência de Ensino*.

Um indicativo da melhor interação entre Rosa e César é que eles conseguem formular atividades nas HTPCs que tinham em comum na escola onde trabalham e apresentaram sua contribuição para os colegas. A estudante Bruna deixou de ser mera espectadora e começou a pedir explicações, a expor suas opiniões e manifestar emoções. Acreditamos que o fato de ter sido aceita no grupo de professores e de ter adquirido experiência na observação do experimento-piloto tenham contribuído para essa mudança de comportamento.

Nessa fase, criamos espaços para ampliar o conhecimento dos professores sobre a história do conceito de função, sobre as sugestões encontradas nos

Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, terceiro e quarto ciclos, relativas ao ensino e aprendizagem do conceito de *função*. Apresentamos e comentamos os termos utilizados na definição de função dada por Elon Lages Lima em seu livro denominado *Curso de Análise*, volume 1, conforme se encontra nesta obra, parte I, Capítulo 1, seção 1.4. Essa escolha foi motivada pela possibilidade de chamar a atenção dos professores para os vários termos que aparecem nessa definição e também, pelo fato de que tínhamos recomendado a leitura de um texto produzido por esse mesmo autor e publicado na *Revista do Professor de Matemática*. Nesse texto o autor faz comentários sobre definições de função.

Sintetizamos a história do conceito de função, destacando as contribuições dadas por Newton, Descartes, Leibniz, Euler, Dirichlet e do grupo Bourbaki. Chamamos a atenção dos professores para o fato de que, nas primeiras definições do conceito de função, as noções centrais eram *variação* e *dependência*; a correspondência não era explicitada, mas se faz presente de maneira cada vez mais explicita, ao mesmo tempo em que desaparecem, nas definições, as noções de variação e dependência.

Devido ao interesse demonstrado pelo professor César pela história dos gráficos, aproveitamos a oportunidade para mostrar outros encontrados no livro denominado *Nicole Oresme e a Geometria Medieval das Qualidades e Movimentos*, cujo autor é M. Clagett.[19] Após algumas explicações sobre a Idade Média, sobre o interesse da época pelo estudo do movimento e a posterior evolução do sistema de coordenadas, um dos professores exclamou: “Pois é, quanta besteira a gente fala na sala de aula!” e outro professor acrescentou “É importante a gente saber a história do conceito para poder ensinar aquele conceito.”

Esperamos ter motivado os professores a prosseguirem com suas leituras, uma vez que eles começaram a perceber a importância do conhecimento histórico. As reações dos docentes nos remetem às palavras de Pavanello: “Um primeiro ponto a ser discutido é a repercussão, na prática pedagógica, do pouco (ou nenhum conhecimento) dos professores sobre como o conhecimento matemático foi elaborado no decorrer da história da humanidade.” (PAVANELLO, 2002, p.73).

[19] Estamos nos referindo à obra de CLAGETT, M. Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions. Madison: The University of Wisconsin Press, 1968.

Simultaneamente à (re)construção da seqüência de ensino, ocorreram debates sobre as noções de dependência e a distinção entre variável independente e dependente; a troca dos papéis das variáveis e a função inversa; sobre correspondência, leitura pontual e global de gráficos; sobre qual variável é representada em cada eixo, escala e construção de gráficos; funções definidas por mais de uma sentença; a identificação do coeficiente “a” em $y = ax + b$ como taxa de variação; o cálculo deste coeficiente a partir do gráfico da função polinomial de 1º grau; a concepção de função como máquina; a compreensão e utilização dos ostensivos f e $f(x)$; as funções cuja variável independente é o tempo; as noções de domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função; a função linear como modelo matemático da proporcionalidade; a visualização de configurações geométricas e o processo de generalização. Na quarta fase, alguns temas serão retomados.

A seguir, destacaremos pontos importantes dos debates.

- Dependência e correspondência

A retomada da atividade *Dobrando papel* gerou uma discussão sobre variável, dependência e construção de gráficos. Apareceram diversas sugestões para serem incluídas na atividade, mas os participantes decidiram pela pergunta: ”O número de partes depende do número de dobras?” E descartaram as perguntas que envolviam variação: “O número de dobras varia com o número de partes? O número de partes varia com o número de dobras?”

Margarida considerou que “variável é algo que está mudando” e que “dependência tem duplo sentido.” Para César, “dependência é o que varia de acordo.” A partir da afirmação de que as duas variam e uma depende da outra, Juliano concluiu que “uma toma a iniciativa” e referiu-se às relações que se estabelecem entre causa e efeito. Essas falas mostram que alguns professores estavam conseguindo explicar a noção de variável, de dependência e de variável independente, utilizando suas próprias palavras.

Por outro lado, as dúvidas da professora Rosa transpareceram na pergunta que fez aos presentes: “O número de partes depende do número de dobras ou o número de dobras depende do número de partes?”

A estudante Bruna lembrou que só estudara função na faculdade e confessou ter olhado na tabela para saber qual era a variável dependente ao resolver a questão. Ela sugeriu mais uma pergunta para “ficar claro que tem duas variáveis”. Marcos propôs acrescentar uma explicação: ”variável número de dobras e variável número de partes”.

Nem todos os professores estiveram de acordo no que diz respeito à identificação da variável dependente e da variável independente nessa primeira atividade.

Juliano manifestou-se a favor: “A gente quer que o aluno saiba as diferenças. Nós estamos falando de duas variáveis distintas. A gente precisa diferenciar as duas.” Mas Marcos se opôs, pois acreditava que se corria o risco de “fazer confusão difícil de tirar.” E Rosa concordou com opinião de Marcos: ”Acho que não é o momento de falar de independência”.

No final do debate, a identificação das variáveis: dependente e independente é excluída da atividade *Dobrando papel*. Mas essa exclusão gerou um outro problema: os professores se perguntaram como iriam explicar para o aluno que a variável independente é representada no eixo horizontal e a dependente, no eixo vertical.

A estudante Bruna deu pistas do problema que deveria ser enfrentado: “Eu fiz o gráfico, mas fiquei na dúvida. Pode colocar a dobra no eixo deitado ou de pé? Tanto faz? Eu sei que eles estão ligados”. Depois dos devidos esclarecimentos, Bruna desabafou: “Eu fiz muito gráfico na faculdade, mas não sabia que a dependente era no lugar do y e a independente no lugar do x.”

Marcos deu o seu depoimento sobre a construção do gráfico da função que relaciona o espaço percorrido por um móvel em função do tempo: “Nunca soube por que em $s = 80t$, o t vai para x e s para y.” Ele revelou que sua angustia nos momentos em que precisava construir um gráfico, por desconhecer o fato de que a variável independente é representada no eixo das abscissas e a dependente, no eixo das ordenadas: “Eu nunca sabia o que ia no x e no y. Me dava uma angustia!*”*

Rosa lembrou dos gráficos produzidos pelos seus alunos: “Eu acho que fiz muita besteira. Variável dependente, variável independente está me dando um nó. Já aceitei muitas vezes a troca dos eixos.” Margarida completou: “Na verdade eles (os alunos) acabam aprendendo por intuição.”

Essas falas desnudam o fato de que, independentemente da faculdade cursada, da maior ou menor experiência na sala de aula com o tema *função*, os professores se sentem inseguros para tratar das noções de variável independente e de variável dependente. Lembramos que Margarida e Marcos ministraram aulas sobre o tema começando pela relação entre dois conjuntos e utilizaram diagramas de flechas. A falta de clareza a respeito dessas noções afeta o seu saber, em termos chevallardianos, sobre funções e gráficos. Na primeira fase, vimos como alguns professores tiveram dificuldades para escrever uma tarefa que envolvesse a construção de um gráfico.

Esses fatos nos levam a concordar com Malik (1980) *apud* Janvier (1998) e Janvier (1998) conforme detalhado abaixo.

Malik (1980) *apud* Janvier (1998, p.79) questiona a aparente unicidade do “conceito de função”. Considera que funções olhadas como relações entre variáveis devem ser diferenciadas daquelas definidas como regras de correspondência e insiste no fato de que relacionar dois conjuntos é lógica e intelectualmente diferente da observação de mudanças envolvendo grandezas. Janvier (1998, p.80), citando trabalhos feitos conjuntamente com outros pesquisadores, afirma que existem pelo menos três noções centrais: variação, dependência e correspondência. E essa diferenciação não está somente fundamentada em argumentações matemáticas, mas também no fato de que o domínio de cada uma dessas noções centrais requer competências particulares e intransferíveis.

De acordo com Freudenthal (1983), *apud* Even (1990, p.535), compreender o conceito de função também requer a compreensão do conceito de função inversa. De fato, foi necessário retomar, durante a discussão da atividade *Dobrando papel*, o conceito de função exponencial e apresentamos a função definida por $y = 2^x$ e sua inversa, a função logaritmo, definida por $y = \log_2 x$, para esclarecer qual é a variável independente, em cada caso.

O professor César comentou sobre a lacuna que encontra nos livros didáticos, da função exponencial para função logaritmo e completou “[...] talvez esteja aí a minha dificuldade”. Os argumentos desse professor têm sua razão de ser.

Os livros de álgebra, utilizados na formação inicial do professor, enfatizam relações binárias de um conjunto em outro e, dessa forma, as noções de variável dependente e independente desaparecem. Como exemplo, Domingues e Iezzi (1999, p.41) apresentam a técnica usual para determinação da inversa:

> Já vimos que a aplicação $f : R \to R$ tal que $f(x) = 3x + 1$ é bijetora. Determinaremos a aplicação f^{-1}, inversa de f.
>
> $f^{-1} = \{(y,x) \in R^2 \mid (x,y) \in f\} = \{(y,x) \in R^2 \mid y = 3x + 1\} =$
>
> $= \{(x,y) \in R^2 \mid x = 3y + 1\} = \left\{(y,x) \in R^2 \mid y = \frac{x-1}{3}\right\}$
>
> Portanto, f^{-1} é a aplicação de R em R dada pela lei $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$.
>
> (DOMINGUES e IEZZI, 1999, p.41).

Nos livros didáticos da primeira série do ensino médio, quando se introduz o conceito de função inversa de uma dada função bijetora *f*, dada por sua expressão algébrica $y = f(x)$, enfatiza-se a técnica utilizada para determinar a expressão algébrica da inversa: isolar a variável x, depois permutar as letras e, na técnica para fazer a apresentação dos gráficos de f e de sua inversa f^{-1}, utilizando um mesmo sistema de coordenadas cartesianas: a construção da bissetriz do 1º e 3º quadrantes. De uma maneira geral, não há um discurso que justifique as técnicas, exceto em Iezzi *et al.* (1997, p.115), que apresentam uma explicação dirigida aos estudantes do ensino médio sobre a necessidade da permuta das variáveis para a determinação da função inversa de $f : R \to R$, dada pela fórmula $y = 3x + 4$:

> A partir da fórmula $y = 3x + 4$, que define f, vamos expressar x em função de y: $y = 3x + 4 \Rightarrow 3x = y - 4 \Rightarrow x = \frac{y-4}{3}$. [...] Em geral, quando se vai representar no plano cartesiano o gráfico de uma função, a variável independente é indicada no eixo das abscissas e a dependente, no eixo das ordenadas. Assim, vamos permutar as variáveis x e y na fórmula obtida. Temos $y = \frac{x-4}{3}$ que é a fórmula que define f^{-1}. (IEZZI *et al.*, 1997, p.115)

Ao lado do texto, estão os gráficos de f e de f^{-1} e da bissetriz do 1º e 3º quadrantes, no mesmo sistema de coordenadas cartesianas. Mais adiante, Iezzi *et al.* (1997*,* p.118) apresentam duas tabelas: uma para a função exponencial de base 2, outra para a função logarítmica de base 2, os gráficos das funções definidas por $y = 2^x$, $y = \log_2 x$ e da bissetriz do 1º e 3º quadrantes, utilizando um mesmo sistema de coordenadas cartesianas. Um texto justifica a construção dos gráficos, mas não há referência a variáveis:

> Outro modo de construir esse gráfico é considerar que, se $y = log_2 x$, então $x = 2^y$. Isso significa que o ponto (x, y) está no gráfico da função logarítmica se o seu inverso (y, x) está na função exponencial de mesma base. Mas os pontos (x, y) e (y, x) são simétricos em relação à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes do plano cartesiano. Portanto, conhecendo o gráfico da função exponencial de base 2, por simetria obtemos o gráfico da função logarítmica de base 2. (IEZZI *et al.*, 1997, p.118).

Esses textos mostram que nem sempre se encontra um suporte tecnológico adequado para esclarecer as dúvidas dos professores sobre variáveis. Um ponto positivo foi a inclusão de tarefas que pediam a identificação das variáveis, durante a (re)formulação das atividades em *Brincando no parque* e *Função como máquina*. Na primeira optam por:

> O gasto total depende da quantidade de brinquedos utilizados?
>
> Complete, utilizando uma das duas palavras indicadas abaixo do traço.
>
> O número de brinquedos chama-se variável______________________
> dependente/independente
> O gasto total chama-se variável______________________
> dependente/independente

Na atividade *Função como máquina* (máquina da Rosângela), houve a inclusão da tarefa: "Neste caso, qual é a variável dependente?"

- Os ostensivos f e $f(x)$

As questões relativas à dependência e à correspondência, incluíram debates sobre a utilização dos ostensivos f e $f(x)$, que foram da rejeição à inclusão desse ostensivo em uma atividade. Estimulamos os professores a falar sobre as fórmulas utilizadas nas atividades *Dobrando papel*, *Brincando no parque* e *Função como máquina*.

Margarida afirmou que não conseguia perceber dependência, mas correspondência em $p = 2^n$ (n é o número de dobras e p é o número de partes). Mas, utilizando $f(n) = 2^n$, ela disse perceber dependência e correspondência simultaneamente. César supôs que as suas dúvidas decorressem da sua formação "[...] porque a gente tira p e põe $f(n) = 2^n$, parece mágica" e desabafou, declarando que "$f(x)$ mata a gente." Marcos não se conformava com a falta de orientação em sua época de estudante sobre a utilização do símbolo *f*.

Os professores lembraram a atividade *Brincando no parque* e a fórmula que conduz ao gasto *G* em função do número de brinquedos *n*. Juliano afirmou "ver dependência e correspondência em $G(n) = 2{,}00 + 0{,}50n$", ao passo que a estudante Bruna confessou não conseguir perceber dependência em $G = 2{,}00 + 0{,}50n$, ao manipular essa fórmula: "Eu mesma não percebi nada disso. Substitui, mas não percebi esta relação de dependência. Eu usei a fórmula, automaticamente."

Margarida contou uma experiência, verificada em uma classe de suplência sobre a utilização dos símbolos G e $G(n)$: "No supletivo, eu já dava a lei, eu dava a notação G e $G(n)$. Eles preferiam a primeira porque eles substituíam logo o valor. Quando colocava a segunda, eles não entendiam aquele *n*." Ela acreditava que os alunos percebiam a dependência, mas César discordou.

A professora Rosa admitiu que sentia "antipatia pelo $f(x)$" e até aquele momento, considerava $G(n)$ "uma frescurinha". Como professora de Física, ela tinha mais contato com funções cuja variável independente é o tempo. Assim, sustentou que $s(t)$ (espaço percorrido em função do tempo) ou $f(t)$ (*t* é a variável tempo) tinha mais significado que $f(x)$ (mesmo que se considerasse $t = x$).

A questão das funções temporais é abordada por Janvier (1998, p.82). O pesquisador sustenta que uma função, cuja variável independente é o tempo, pode ser dinamicamente representada na mente dos estudantes, da mesma forma que o fenômeno é simulado mentalmente como um evento temporal. O autor considera, por exemplo, que a simulação mental de um movimento dá o suporte ao raciocínio necessário para que o problema seja resolvido, muitas vezes, de uma maneira simples. Seguindo esse autor, a professora Rosa poderia achar mais fácil manipular funções temporais, porque ela conseguiria simular mentalmente um movimento diante de uma função que fornece o espaço percorrido em função do tempo.

Outro pesquisador, Swan (1980) *apud* Janvier (1998, p.80), garante que funções temporais são mais simples de visualizar e manipular do que aquelas que não são temporais. Esse ponto de vista poderia explicar a antipatia da professora Rosa em relação ao ostensivo $f(x)$, ou considerar $G(n)$ uma "frescurinha", mas conseguir trabalhar com funções temporais, muito comuns na Física.

Além disso, as afirmações dessa professora colocam em evidência que uma simples substituição de ostensivos ($s(t)$ por $f(x)$) pode alterar a visão que se tem de uma situação: t é variável, o tempo flui, mas x parece não ter os mesmos atributos.

As dificuldades encontradas para dar significado ao ostensivo $f(x)$, a “mágica” na troca dos ostensivos, a antipatia em relação a ele, tudo isso vai ao encontro das considerações feitas por Bosch e Chevallard:

> Uma praxeologia não é uma entidade estática, mas uma realidade dinâmica que cria e sustenta a ação e nós mostramos que a simples troca de um ostensivo pelo outro, sem uma modificação aparente da praxeologia inicial ao qual estava inicialmente integrado, pode perturbar completamente a evolução da atividade, em todos os níveis (técnico, tecnologia, teoria e tarefas) até mesmo nos tipos de tarefas. (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p. 114)

De fato, a expressão algébrica $G = 2{,}00 + 0{,}50n$, como vimos, pode ser manipulada de uma maneira mecânica, sem uma referência explicita da dependência ou da correspondência. Contudo, compreender a expressão algébrica $G(n) = 2{,}00 + 0{,}50n$ requer o domínio dos ingredientes de correspondência e dependência. É necessário identificar a variável “número de brinquedos” como variável independente para escrever $G(n) = 2{,}00 + 0{,}50n$, mas a discriminação das variáveis ainda é problemática para alguns professores. Também é preciso oralizar aquilo que foi escrito, justificar novas técnicas para calcular o gasto de uma criança em função do número de brinquedos utilizados.

Em outro momento, os professores retomaram a atividade denominada *Função como máquina* (máquina da Rosângela). Ali se encontra o desenho de uma máquina que multiplica cada número que entra por dois e depois subtrai uma unidade. O resultado é o número de saída. O professor Juliano percebeu que aquilo que acontece dentro da máquina da Rosângela constitui uma função e considerou que o aluno poderia ter o primeiro contato com a notação f nessa atividade. Margarida concordou com o professor Juliano: “Tem que mostrar para o aluno que essa máquina é a nossa função. E a gente tem que mostrar para o aluno que a máquina é função”.

A seguir, explicou o seu roteiro: “Eu daria só a tabela com o valor de x para eles (os alunos) completarem. Depois daria $f(x) = 2x - 1$ e diria que poderia chamar

$f(x) = y$.” Podemos perceber que a professora ainda não se deu conta de todo o discurso necessário para dar significado à expressão $f(x) = 2x - 1$.

O professor César apresentou suas dúvidas a respeito de como os alunos poderiam perceber a função como máquina e travou um debate com o professor Juliano.

César: “Função é a máquina, mas não dá a impressão de que efe é o número de entrada? Como eles vão acreditar que a máquina é a função?”

Juliano: “Qual é a função da máquina?”

César: “É mudar o número”.

César sugeriu que se escrevesse “máquina, máquina,... uma hora o aluno cansa e põe m.” Assim, ele passou do retórico ao sincopado, conseguindo perceber função como máquina. Consideramos a escrita retórica aquela que não utiliza símbolos; a escrita sincopada já utiliza algum tipo de abreviação.

Os professores terminaram a discussão concordando que a atividade *Função como máquina* era uma oportunidade para introduzir a notação *f*, mas não sabiam como redigir um texto explicativo para conciliar a concepção de função como máquina com a utilização desse símbolo.

Em resumo, essa atividade ofereceu um ambiente propício para a aceitação e uso do ostensivo $f(x)$. Lembrando que um signo precisa de um significado e de um significante, $f(x)$ é um significante do objeto matemático função. Para designar este funcionamento do objeto ostensivo como signo, Bosch e Chevallard (1999, p. 109) revelam a força semiótica dos objetos ostensivos. Podemos perceber que a semioticidade desse ostensivo emerge pouco a pouco, a partir das discussões sobre dependência, correspondência e máquina que modifica o número de entrada. Os mesmos autores propõem a noção de instrumentalidade de um ostensivo da seguinte forma:

> O ostensivo tem um potencial instrumental, mas é somente no seu engajamento em um conjunto de técnicas institucionalmente determinadas, para executar determinadas tarefas, que faz dele um instrumento concretamente definido. Essa instrumentalidade será tanto maior na medida em que essas técnicas se mostrem robustas e confiáveis para a realização das tarefas concernentes. (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p.107)

Os autores prosseguem dizendo que essa afirmação não tem um valor intrínseco. Ela só pode ser apreciada no quadro de uma organização matemática institucionalizada que inclui, além do objeto ostensivo considerado, todo um conjunto de objetos e inter-relações colocadas em jogo em determinadas praxeologias.

A fraca instrumentalidade do ostensivo $f(x)$ encontrada nos livros didáticos de oitava série faz com que ele perca sua força semiótica nesses livros, pois instrumentalidade e semioticidade caminham juntas, conforme propõem Bosch e Chevallard (1999, p. 111).

As discussões propiciaram uma retomada da instrumentalidade desse ostensivo. A atividade *Função como máquina* foi reformulada (veja ANEXO B) com o acréscimo de novas tarefas e de explicações e do desenho de uma máquina, como se pode ver na Figura 22.

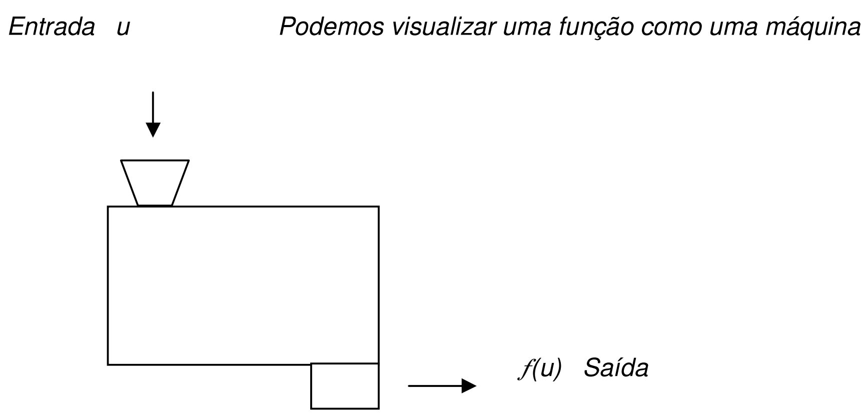


Figura 22 - Função como máquina

Na máquina da Rosângela, para cada número real u que entra, sai o número real $f(u)$. [...]
h) Encarando a situação dessa maneira, e pensando na máquina da Rosângela, que está programada para multiplicar o número de entrada por dois e, a seguir, subtrair o resultado de uma unidade, complete: $f(2) =$ $f(8) =$ $f(20) =$ $f(-1) =$ $f(1{,}8) =$ $f(\sqrt{3}) =$

Mais tarde, no final da quarta fase, os professores Marcos e Margarida, na revisão e fechamento das atividades desenvolvidas pelos alunos, retomaram a idéia de função como máquina, utilizando como recurso didático as folhas de *flip-chart,* cuja reprodução se encontra no ANEXO C. Os professores incluíram, para a apresentação da resolução das atividades, desenhos de máquinas e as expressões algébricas: $P = 2^n, P(n) = 2^n$; $G = 0{,}50n + 2{,}00$; $G(n) = 0{,}50n + 2{,}00$; $V = 13x$, $V = 12x$, $V = 14x$, $V = 13x + 1{,}50$; $V(x)$ e $s = 2u - 1, f(u) = 2u - 1$.

- Domínio, contradomínio e conjunto imagem

A partir da fórmula $G = 0{,}50n + 2{,}00$, gerada no contexto da atividade Brincando no parque, estimulamos uma discussão sobre os conceitos de *domínio*, *contradomínio* e *imagem* de uma função. As tarefas de analisar o enunciado da atividade, estimar o número máximo de brinquedos para determinar o número de elementos de um conjunto discreto, averiguar as possibilidades para o contradomínio (por exemplo: conjunto dos números reais ou dos racionais), junto com simultânea retomada do conceito de função sobrejetora e injetora, todos esses fatores ajudaram a dissipar idéias errôneas, tais como considerar que sempre o contradomínio deveria ser sempre igual ao conjunto denominado domínio ou então, o contradomínio deveria ser sempre igual ao conjunto imagem. Outra atividade, denominada *Esvaziando reservatório* também propiciou momentos para um estudo do domínio de uma função.

Além disso, o debate mostrou que extrair *domínio*, *contradomínio* e conjunto *imagem*, a partir de uma situação que envolve relação entre grandezas não é uma tarefa usual, porque, de uma maneira geral, os conjuntos domínio e contradomínio são previamente fornecidos nas atividades encontradas nos livros, que apresentam enunciados do tipo: "Seja $f : A \rightarrow B$, definida por...., onde A é o conjunto ..... e B é o conjunto....."

- Taxa de variação

Diversas atividades propiciaram uma retomada do conceito de taxa de variação. Na atividade *Brincando no parque*, o número $0{,}50$ em $G = 0{,}50n + 2{,}00$ foi visto como coeficiente, coeficiente linear, coeficiente angular. Somente após ouvir "cinqüenta centavos por brinquedo", a professora Margarida exclamou: "Ah! É o $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, a taxa de variação. É o ioiomixoxo, em que $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$."

Em outro momento, durante a discussão da atividade Esvaziando reservatório, diante do gráfico construído na lousa, que representa o volume d'água de um reservatório em função do tempo, um dos professores visualizou a vazão apontando para o ângulo agudo α, como se pode ver na Figura 23.

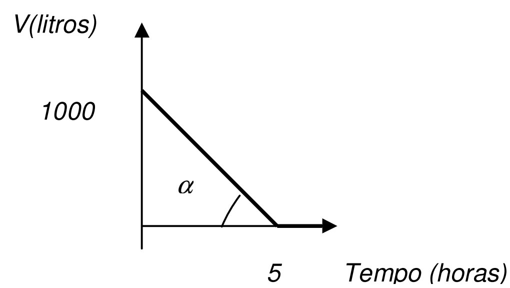


Figura 23 - Gráfico do volume em função do tempo elaborado por um professor

Fonte: Reprodução da lousa

Mais uma vez, foi necessário retomar conceitos de taxa de variação, de coeficiente angular, diante da confusão entre taxa de variação e ângulo. Além disso, chamamos a atenção sobre a utilização dos termos: taxa de variação de uma função e coeficiente angular de uma reta, tal como preconizam Lima *et al.* (2001, p.92). De fato, César Alexandre afirmou que nunca olhara para o coeficiente como taxa de variação: “Eu nunca tinha visto o coeficiente desse jeito”. Margarida sentenciou: ”Essa taxa de variação. Já vimos, mas não ficou. Nós não usamos no dia-a-dia e não aplicamos na nossa aula”.

Os conceitos de taxa de variação e de derivada, conceituada como taxa instantânea de variação, são conteúdos do curso de Cálculo de toda licenciatura em Matemática. Mas taxa de variação não se articula com aquilo que é feito na sala de aula. As falas dos professores corroboram a seguinte afirmação:

> Não há espaço, dentro da formação específica do licenciando para que ele seja exposto, de maneira sistemática e coerente, à Matemática que vai ensinar, com um olhar voltado especificamente para a sua formação profissional. (SOARES *et al.*, 1997, p.28)

- Proporção e função linear

Julgamos pertinente retomar a última atividade do Questionário II (veja APÊNDICE B), que foi deixada em branco por todos, no dia de sua aplicação. Seu enunciado se inicia com a apresentação de um gráfico como se vê na Figura 24.

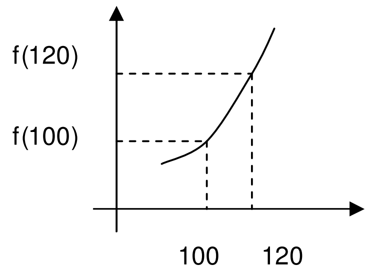


Figura 24 - Gráfico de uma função que passa por dois pontos dados

Fonte: Prova de Matemática do Exame Nacional de Cursos, 1999.

E prossegue com as seguintes informações: “O gráfico da função f é dado acima. Sabe-se que *f* é contínua, mas só se conhecem, exatamente, os seus valores nos pontos indicados. Assim sendo, perguntou-se a dois alunos o valor de $f(110)$”.

A respondeu:

$$\begin{array}{ll} 100 & f(100) \\ 110 & y \end{array} \quad \rightarrow \quad y = \frac{110 \times f(100)}{100}$$

B respondeu:

$$\begin{array}{ll} 120 & f(120) \\ 110 & y \end{array} \quad \rightarrow \quad y = \frac{110 \times f(120)}{120}$$

Os alunos se surpreenderam ao encontrar resultados diferentes. Com base no exposto, atenda às solicitações abaixo. a) Algum dos alunos determinou o valor correto de f(110)? Por quê? b) Dê o gráfico de uma função f para a qual o método usado pelo aluno A estaria correto.

A dificuldade crucial de todos os professores foi localizar, no plano cartesiano, o ponto de coordenadas (110, y) a partir da proporção $\frac{100}{110} = \frac{f(100)}{y}$, seguindo a solução dada pelo aluno A. O primeiro gesto dos professores foi indicar um ponto pertencente ao gráfico da função, 110. Após o resgate de diversos conceitos, um dos professores percebeu que o alinhamento dos pontos $(0,0), (100, f(100))$ e $(110, f(110))$ traduzia a solução dada pelo aluno A e que o alinhamento dos pontos $(0,0), (100, f(100))$ e $(120, f(120))$ traduzia a solução dada pelo aluno B. Mas foi necessário enfatizar aquilo que o esboço mostra: uma curva que não passa pela origem.

Após delinearmos os passos necessários para demonstrar que o gráfico de uma função linear é uma reta, o professor César desabafou:

> A gente usa (os triângulos), mas não reflete sobre ele. [...] Trabalhei a proporcionalidade, mas quando entrou na função não falou mais nada e nem eu fiz a ligação. [...] Fica uma lacuna lá no meio e você não liga nem a pau.

Essas palavras revelam a consciência da fragmentação de conteúdos, mas também a dificuldade de relacionar proporção e função linear. O fato corrobora uma das conclusões de Comin (2000, parte 1, p.76), segundo a qual, para professores franceses, proporcionalidade e função linear são independentes.

- Construção de gráficos por translação

Durante a retomada do problema do restaurante “por quilo”, que cobra R\$ 13,00 pelo consumo de um quilo de comida e R\$ 1,5 pelo consumo de um refrigerante, provocamos uma discussão sobre construção dos gráficos de duas funções: $y = 13x$ e $y = 13x + 1{,}5$, onde x é a quantidade de comida consumida e y é o valor a ser pago. Os professores concluíram que o gráfico da segunda função poderia ser obtido a partir do gráfico da primeira função “É só subir o gráfico para cima, mas como a gente chama isso?”

Para alguns dos presentes, a novidade não foi somente a palavra *translação*, mas também o movimento. Após deliberações, os professores consideraram que a translação podia ser incluída na atividade *Almoçando no restaurante*.

A partir da proposta feita pelo professor Juliano, onde já existia a tarefa “e) Construa o gráfico do preço a pagar em função da quantidade de comida”, acrescentaram “Agora construa o gráfico do valor a ser pago em função da quantidade de comida, na situação em que todas as pessoas tomam um copo de suco, utilizando o mesmo sistema de coordenadas do item e). Utilize um lápis de outra cor.” Finalizaram essa etapa com a pergunta: “Você poderia ter construído o segundo gráfico de uma maneira mais rápida, traçando uma semi-reta paralela à primeira, 1,5 unidades acima?”

É interessante notar que, à medida que os professores se sentem mais seguros para tratar de uma noção, eles propõem novas tarefas para conceituar função como relação entre grandezas. Por outro lado, rejeitam uma proposta para incluir exercícios envolvendo mudança de escala.

- Padrões de regularidade e generalização

Agrupamos todas as propostas recebidas em torno do tipo de *tarefa conceituar função como padrão de regularidade* e colocamos em discussão a atividade, descrita abaixo:

> Observe a seqüência de retângulos formados com palitos de sorvete:
>
> a) Com os palitos de sorvete que você recebeu, continue a seqüência e, em seguida, preencha a tabela (Tabela 5):

Tabela 5 - Frisa de palitinhos

Número de quadrados	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Número de palitos										

> b) Como você poderia calcular o número de palitos necessários para formar uma "frisa" formada por 12 quadrados? Mostre os seus cálculos. c) Como você poderia calcular o número de palitos necessários para formar uma "frisa" formada por 100 quadrados? Mostre os seus cálculos. d)Se você tivesse 241 palitos, quantos quadrados conseguiria formar? Sobraria algum palito? Mostre os seus cálculos. e) Chamando de p quantidade de palitos e de q a quantidade de quadrados, escreva a expressão algébrica que relaciona o número de quadrados q com a quantidade de palitos p. f) Com os registros da tabela, construa o gráfico que mostra o número de palitos em função do número de quadrados.g) Os pontos estão alinhados?h) É possível unir os pontos do gráfico? Justifique sua resposta.

Para determinar a expressão algébrica que relaciona o número de quadrados q com a quantidade p de palitos, surgiram duas técnicas. A professora Margarida apresentou aos colegas a sua solução, baseada na equação da reta, sem pensar no conhecimento prévio do aluno e, inquirida sobre sua resolução, respondeu que "está contaminada pela equação da reta".

O professor Juliano explicou o seu caminho: "Cada quadrado tem 4 palitos; 2 quadrados tem 8 palitos e tira 1, que é o lado comum; 3 quadrados tem 12 palitos e tira 2 ...; e assim por diante...acaba-se chegando a $p = 3 \times q + 1$."

A solução apresentada pelo professor Marcos também partiu da mesma visualização feita pelo professor Juliano, mas ele expressou a generalização com outras palavras: “dois quadrados dá (sic) $2\times 4-1$; três quadrados dá (sic) $3\times 4-2$, até chegar a $q\times 4-(q-1)=3\times q+1$, ou seja, $p=3\times q+1$.”

Os professores consideraram importante trabalhar padrões com os alunos, mas confessaram que, no momento em que escolheram a atividade *Brincando com palitos*, não se preocuparam com as possíveis dificuldades dos alunos diante das diversas possibilidades de visualizar, de manipular o material, de contar, de verificar que diferentes expressões aparentemente distintas recaem na mesma fórmula. Concordaram que essa atividade não poderia ser proposta aos alunos na primeira aula e o professor Marcos concluiu: “Esse exercício é muito perigoso, os colegas tomaram um susto.”

Na análise que fizemos de alguns livros didáticos, sobre conceituar função como padrão de regularidade de seqüências numéricas ou geométricas (veja Parte I, capítulo 2, seção 2.3.6), observamos a ausência de um discurso técnico / tecnológico, inclusive no livro do professor, sobre generalização e fórmulas equivalentes.

A exaustiva veiculação de mensagens do tipo *o material concreto é um bom aliado nas aulas de matemática*, fez com que os professores se deixassem levar por essa idéia na escolha da atividade para o estudo de seqüências geométricas, sem refletir sobre o processo de generalização. Assim, a atividade com palitinhos passou de “bonitinho”, na primeira fase, para “perigoso”, nessa terceira fase, depois de uma discussão sobre as diversas possibilidades de visualização, de falas e escritas, até a obtenção da fórmula que relaciona o número de palitos ao número de quadrados.

A redação final desta atividade se encontra no ANEXO B - *Seqüência de ensino*. Os professores acreditaram ser necessário entregar palitinhos de sorvete aos alunos para que eles pudessem manipular esse material concreto.

A seguir, detalharemos o processo de criação de cada uma das atividades que compõem a seqüência de ensino.

Primeira atividade - *Dobrando papel*

Essa atividade, *Dobrando papel*, é considerada adequada para ser a primeira da seqüência. Após os debates ocorridos na segunda fase, os professores incluíram uma segunda tabela e as tarefas: “É possível escrever o número de partes como potências de base 2? Em caso afirmativo, preencha novamente a tabela (Tabela 6)”.

Tabela 6 - Dobrando papel

Número de dobras	1	2	3	4	5
Número de partes					

Os professores acrescentaram mais dois itens: “c) Existe uma limitação física para continuar dobrando o papel, mas você pode fazer isto mentalmente. Se você pensar em 8 dobras, quantas partes são obtidas? d) Se o número de partes for 512, quantas dobras devem ser feitas?”

Após a redação desse último item, surgiu uma dúvida em relação ao verbo que deveria ser utilizado: *justificar*, *explicar*, *comentar*, mas a opção preferencial é pelo verbo *explicar* e assim, terminaram a redação: “Explique sua maneira de obter o resultado”. Fizeram uma análise *a priori* das possíveis respostas que os alunos poderiam dar, lembrando das observações feitas durante a aplicação do piloto.

A discussão sobre variáveis e construção de gráficos, relatada neste capítulo, levou à redação das tarefas: “e) O número de partes depende do número de dobras; f) utilizando a primeira tabela, construa o gráfico que mostra o número de partes em função do número de dobras”.

Indagados sobre a escolha do tipo de papel que seria fornecido ao aluno para a construção do gráfico, os professores sugeriram: usar papel quadriculado e com eixos informando número de dobras e número de partes; colocar um papel que não possibilitasse escrever um número no “quadradinho”; deixar só os eixos e as marcações “risquinhos”; empregar papel branco feito pelo *software* Cabri-Géomètre II com eixos e traços, sem números. Diante de tantas possibilidades, primeiro eles ficam indecisos; depois acharam que poderiam aproveitar a oportunidade para testar duas opções de papel e ver o que aconteceria na sala de aula.

Os professores acreditavam que os alunos já tivessem localizado um ponto no plano cartesiano, conhecendo suas coordenadas e fizeram um elenco dos possíveis erros que poderiam ser cometidos ao construir o gráfico. Rosa suspeitou que fosse possível que o aluno colocasse 2, 4, 8, 16 e “não respeitasse os espaços” e Juliano previu erros na ordem (2 antes do 1). Alguns levantam a hipótese de que os alunos pudessem ligar os pontos e se perguntaram o que fazer se isso ocorresse.

Os professores discorrem sobre os objetivos da atividade *Dobrando papel*: introduzir a dependência de duas ações possíveis de serem medidas; ver a relação que existe entre o número de partes e o número de dobras; levar o aluno a perceber o número de partes como potência de base dois; fazer uma ligação com o conhecimento anterior; colocar dados em uma tabela; construir gráfico e escolher escala.

Se compararmos as discussões ocorridas no grupo B, na primeira fase, com essa última, envolvendo todos os participantes, podemos perceber avanços na formulação e escrita dos objetivos dessa atividade, agora mais coerentes com as tarefas propostas. Constata-se um aprofundamento das análises *a priori*, devido à experiência adquirida na observação do experimento-piloto, uma ampliação da organização matemática, com a inclusão de tarefas e uma organização didática mais detalhada.

Segunda atividade - *Brincando no Parque*

A partir da versão original da segunda atividade aplicada no piloto, denominada *Brincando no Parque*, houve uma reformulação, que levou à exclusão de todo o texto explicativo, cuja eficácia foi discutida durante a segunda fase, bem como do exercício de reforço – corrida de táxi, e à inclusão de novas tarefas, envolvendo dependência e construção de gráfico.

Terceira atividade - *Almoçando no restaurante.*

O primeiro esboço desta atividade surgiu durante a primeira fase e foi elaborado pelo grupo A. O professor Juliano, único remanescente desse grupo, fez uma primeira reformulação durante as férias e a apresentou aos participantes desta terceira fase, que se interessaram pela atividade e iniciaram a leitura. Ocorreu então um debate sobre as noções de massa e peso, uma vez que as balanças etiquetam como *peso* aquilo que a Física considera *massa*.

Na semana seguinte, Juliano expôs uma nova redação da atividade, que foi reformulada coletivamente. Nessa última versão, há esclarecimentos sobre a utilização das palavras *massa* e *peso*, um esquema que apresenta os três visores de uma balança, com os respectivos rótulos: *peso*, *preço por quilograma*, *valor a ser pago*. A versão final se encontra no ANEXO B.

A organização matemática gira em torno do tipo de tarefa: *conceituar função como interdependência de duas grandezas* e arrola as seguintes tarefas: completar os espaços em branco (visores); explicar que o valor a ser pago depende da quantidade de comida; escrever uma fórmula que relaciona o preço a pagar com a quantidade de comida (sem e com o preço de um refrigerante); construir o gráfico de duas funções definidas por $V = 13x$ e $V = 13x + 1{,}5$ e utilizando o mesmo sistema de eixos; verificar se o segundo gráfico poderia ter sido construído de uma maneira mais rápida, traçando uma semi-reta paralela à primeira e $1{,}5$ unidades acima; verificar se é possível unir os pontos; construir o gráfico de três funções definidas por $V = 13x$, $V = 12x$ e $V = 14x$, utilizando o mesmo sistema de eixos; analisar a inclinação da semi-reta em relação ao eixo horizontal; verificar a quantidade de comida que pode ser consumida com uma determinada quantia de dinheiro.

A organização didática foi bastante discutida pelos professores. Abordou-se: a redação de um texto, esclarecendo a diferença entre massa e peso; a redação das tarefas; a apresentação dos eixos coordenados; o desenho dos retângulos (visores da balança); o pedido para o aluno usar lápis de cor; a inclusão de explicações com o objetivo de fazer o aluno escrever com suas próprias palavras uma introdução ao discurso tecnológico sobre dependência e translação; comparação de inclinação de gráficos construídos em um mesmo sistema de eixos. Todavia, não houve uma preocupação com o tempo que os estudantes precisariam para resolver essa atividade, com tantas tarefas.

O tempo de maturação desse exercício foi longo, de maio a setembro. Estendeu-se desde a reunião do grupo A, ocorrida na primeira fase, seguida dos debates sobre linguagem científica e cotidiana e sobre a translação de gráficos até a configuração da versão final. Acrescente-se o tempo despendido pelo professor Juliano, fora das reuniões, para formular e digitar as versões intermediárias, finalizando com a digitação da versão final.

O envolvimento do professor Juliano com essa atividade mostrou uma evolução em seu comportamento, se comparada com aquela apresentada no projeto anterior e descrita em Silva (2005).

Quarta atividade - *Esvaziando reservatório*

Essa atividade, que trata do esvaziamento de um reservatório, tem uma cronologia iniciada na primeira fase: a primeira versão foi trazida pelo professor César, nela, o volume de água de uma caixa d'água aumentava em função do tempo em que um dispositivo permitia a entrada de água; a segunda versão, enviada eletronicamente, como produção dos professores César e Rosa, logo após o término da segunda fase; houve a terceira versão, colocada em discussão, a pedido da dupla; sua reformulação originou a quarta e última versão, incluída na seqüência de ensino (veja ANEXO B).

A primeira versão continha um enunciado, um gráfico incompleto, sobreposto ao desenho de um paralelepípedo e apresentava uma única tarefa: determinar a expressão que relaciona o tempo e o volume. A terceira versão, denominada *Esvaziando reservatório*, propiciou momentos para debates sobre o conceito de taxa de variação, domínio de uma função e função definida por duas sentenças, a partir do texto produzido pelos professores Rosa e César. O enunciado:

> Um reservatório de água com capacidade de 1000 litros está cheio. O registro é aberto para esvaziá-lo e um cronômetro é acionado no instante em que se inicia o escoamento, como ilustram as figuras abaixo.

Os desenhos que mostram o esvaziamento de um reservatório, visores de um cronômetro, como se pode verificar na Figura 25.

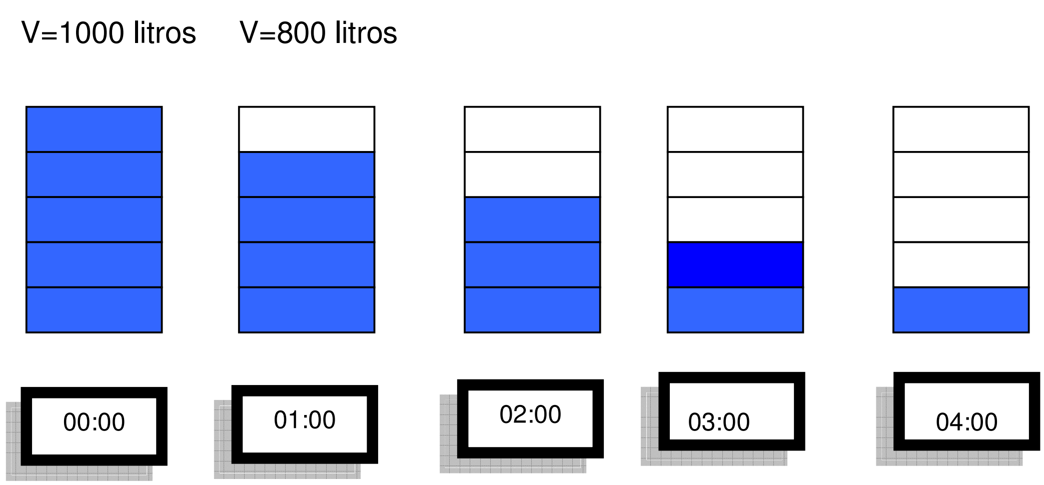


Figura 25 - Reservatório e cronômetro

Fonte: Material disponibilizado pelos professores César e Rosa

As tarefas propostas seguem abaixo.

a)Observando as ilustrações acima, preencha a tabela (Tabela 7):

Tabela 7 - Esvaziando o reservatório

Tempo (horas)	*0*	*0,5*	*1*	*1,5*	*2*	*2,5*	*3*	*4*	*5*
Volume (litros)	*1000*		*800*						

b) Represente no gráfico o que você observou na tabela (No texto original, o espaço reservado para o gráfico apresenta uma malha quadriculada com os eixos, indicando as variáveis volume e tempo). c) Para valores acima de 5 horas, quais seriam seus pares correspondentes em litros? d) Os pontos estão alinhados? e) É possível unir os pontos do gráfico? Justifique.

Os professores alteraram o enunciado, incluindo a palavra constante, após escoamento, pois o professor Juliano acreditava que os alunos teriam que aprender o que é *vazão.* Acrescentam a pergunta: "Qual é a vazão?"

A partir da explicação dada pelo professor César sobre o terceiro item: "O aluno precisa entender o momento em que o gráfico acaba", pois "para valores acima de 5h, a caixa fica vazia", se estabeleceu uma discussão sobre o domínio da função. Os professores ficaram intrigados quando questionados sobre as duas possibilidades que poderiam ocorrer: desligar o cronômetro no instante que a caixa d'água não contiver mais o líquido ou deixá-lo ligado após o completo esvaziamento do reservatório. Decidiram incluir a pergunta: "Se o cronômetro continuar funcionando, qual a quantidade de água no reservatório no instante $t = 7$? Represente no gráfico essa situação." Em seguida, apareceu a sugestão, que foi aceita, de mais uma pergunta: "Verifique se seu gráfico está representando a situação de o cronômetro continuar funcionando após o esvaziamento do reservatório."

Um dos professores sugeriu que o aluno deveria fazer outro gráfico para valores de $t > 5$, pois parecia-lhe haver ali uma outra função. Foi necessário retomar a questão de uma função definida por várias sentenças, assunto já debatido da primeira fase. Analisamos o volume em função do tempo:

$$v(t) = \begin{cases} 1000 - 200t & \text{para } 0 \le t \le 5 \\ 0 & \text{para } t > 5 \end{cases}$$

O professor César concluiu que a redefinição do domínio tornou a atividade mais interessante.

A seguir, os professores excluíram a questão sobre alinhamento de pontos e propuseram: “É necessário unir os pontos? Explique.” Eles se preocuparam com algumas possíveis respostas dos alunos, sobre o que fazer durante o fechamento desse item, caso as respostas dadas não fossem satisfatórias.

Apesar das divergências sobre colocar ou não uma questão sobre dependência, após algumas deliberações, os professores incluíram a seguinte pergunta: “O volume de água observado no reservatório depende do tempo transcorrido? Explique.”

Da frágil e incompleta organização didática inicialmente apresentada pelo professor César, na primeira fase dessa formação até a quarta e última versão da atividade sobre reservatório de água, surgiu uma reformulação do enunciado com uma melhor apresentação visual, com o acréscimo de cinco desenhos que representam a face frontal do reservatório, graduada, indicando o nível de água em cada instante; acrescente-se que abaixo de cada desenho, está representado o visor de um cronômetro. Além disso, há uma ampliação do número de tarefas pedidas: observar ilustrações; preencher tabela; determinar a vazão; construir um gráfico; determinar o volume em determinado instante, após o esvaziamento do reservatório; localizar o ponto de coordenadas (7,0) e verificar se o gráfico está representando a situação de o cronômetro continuar funcionando após o esvaziamento do reservatório. Há a inclusão de duas explicações, uma sobre a necessidade de unir os pontos e outra sobre o porquê de o volume de água depender do tempo transcorrido. O texto final se encontra no ANEXO B.

A proposta de deixar o cronômetro ligado após o esvaziamento do reservatório provocará após a aplicação dessa atividade, um acirrado debate entre alunos e professores na sala de aula, sobre o zero e o nada. O assunto será retomado quando for feita a avaliação dos fatos ocorridos na sala de aula, durante a aplicação desta atividade.

Quinta atividade - *Função como máquina*

Essa atividade, proposta originalmente pelo grupo B, na primeira fase, sofreu algumas alterações a partir do texto original: troca das letras, manipulação de número irracional, introdução do ostensivo $f(u)$.

Sobre a precoce introdução desse ostensivo, Janvier (1996, p.235) considera que os alunos devem ter um primeiro contato com essa notação de função na Física e, só depois de um ano, o professor deveria apresentar f para indicar uma regra de correspondência. Se for considerado esse ponto de vista, a organização didática foi muito exigente para uma oitava série. Na quarta fase, veremos a produção dos alunos diante das tarefas que envolvem o ostensivo $f(u)$.

Sexta atividade - *Brincando com palitos*

Atividades com palitinhos foram propostas pelos antigos grupos B e C, na primeira fase. A organização didática da versão final não se distanciou muito das primeiras versões, mas o debate sobre generalização em “Padrões de regularidade e generalização”, como vimos, lançou um novo olhar sobre a atividade.

- Considerações sobre a seqüência construída

Nessas seis atividades, os tipos de tarefas giraram em torno de conceituar função como interdependência de grandezas, como máquina de entrada e saída, como padrão de regularidade. Consideramos a organização didática dessas seis atividades adequadas para uma oitava série e compatíveis com as sugestões contidas nos PCNs de Matemática. A única ressalva refere-se à precoce introdução do ostensivo $f(x)$. Todas as atividades incluíram a construção de pelo menos um gráfico, o que não ocorreu na seqüência construída para o experimento-piloto.

A evolução histórica de cada uma das atividades mostra que elas não são mais cópias de materiais encontrados em livros didáticos ou apostilas. Agora os participantes são os autores de seu próprio “livro” sobre funções. Para tanto, não puderam fugir de temas polêmicos.

Consideramos que a seqüência de ensino é um patrimônio desse grupo, formado por cinco professores e duas estudantes, construído ao longo desses meses de trabalho, quando foram descartadas diversas atividades: algumas ficaram inacabadas, outras porque não conseguiram despertar o interesse coletivo, outras porque seu idealizador deixou o projeto. As atividades “vencedoras”, que compõem a seqüência de ensino, floresceram porque encontraram um ambiente favorável, devido ao empenho e vontade dos participantes, à experiência adquirida com as atividades do experimento piloto, ao apelo visual e táctil dos materiais concretos, assunto já discutido.

Nesta fase, os professores trabalharam de maneira colaborativa, com o objetivo comum de construir e organizar uma seqüência de ensino que pudesse ser aplicada em uma classe de oitava série. As discussões ampliaram os horizontes dos professores não só sobre o conhecimento do conteúdo, mas também sobre o conhecimento pedagógico do conteúdo. Os debates sobre as tarefas que poderiam ser incluídas, ou sobre aquelas que deveriam ser reformuladas; a preocupação a respeito da redação final de cada tarefa, o desenho das ilustrações, as escolhas sobre o tipo de folha de papel que deveria ser distribuído para a construção de gráficos, os materiais concretos, fortaleceram o estudo da organização matemática.

Podemos verificar que as análises *a priori* das possíveis respostas dos alunos foram mais detalhadas para as atividades já testadas no experimento-piloto.

Finalizamos essa fase com a reunião realizada no dia 24 de setembro, com a presença dos professores Marcos, Margarida, Juliano, Rosa, César e a estudante Nina, quando foram discutidos os preparativos para o início da aplicação da seqüência de ensino.

A escola onde será aplicada a seqüência de ensino é aquela onde trabalham os professores Marcos e Margarida, que tinham em mãos os horários das aulas de Matemática de todas as turmas de oitava série. Escolheu-se a classe cujo horário melhor atendia à disponibilidade dos observadores, dos professores envolvidos e da pesquisadora: terça-feira, das 7 h às 9 h; quarta-feira, das 10h às 12 h e sexta-feira, das 9h às 11h. Para iniciar a aplicação, os professores decidiram que o professor Marcos desempenhará o papel de observador e que a professora Margarida seria professora / formadora. Juliano, Rosa e César informaram que somente poderiam presenciar as sessões que não coincidissem com seus horários de trabalho.

Houve um consenso sobre a ordem de aplicação das atividades, que é aquela que consta no ANEXO B. Eles decidiram que a sétima e última atividade será escolhida durante a quarta fase.

2.4. Quarta fase

Esta última fase contemplou o período de aplicação da seqüência de ensino, quando foram realizadas seis sessões, cada uma abrangendo o tempo de uma aula dupla e as duas últimas reuniões do projeto.

A classe de oitava série onde foi aplicada a seqüência de ensino tem trinta e sete alunos e o comparecimento foi sempre em torno de 95%. Ela era considerada a melhor oitava série pelos professores da escola. Esses alunos estavam se preparando para ingressar em uma conceituada escola técnica, localizada em outro município, e o vestibular foi realizado após o término da aplicação.

Os alunos foram avisados do experimento pela sua professora de Matemática, com alguns dias de antecedência. No início da primeira sessão, já encontramos a classe dividida em doze grupos, sendo onze formados por três alunos cada um e mais um grupo formado por quatro alunos.

A professora de Matemática dessa classe é efetiva, com muitos anos de experiência nessa escola. Ela se colocou à disposição da equipe, assumindo o papel de observadora, sem interferir no andamento dos trabalhos.

Preparamos e distribuímos fichas de observação para todas as pessoas que atuaram como observadores. Uma ficha de observação é uma cópia de uma atividade, acrescida de perguntas sobre cada um dos itens e também sobre as atitudes dos alunos do grupo a ser observado para saber se discutem em grupo, se chegam a um consenso e se pedem ajuda ao formador. Sem entrar em detalhes para cada atividade, apresentamos um resumo das perguntas feitas sobre tarefas que envolviam preenchimento de tabela, construção de gráfico, determinação de uma expressão algébrica, verificação da dependência entre duas grandezas, manipulação de materiais concretos, operações com valores numéricos, dentre outras.

Na ficha de observação, as perguntas sobre tabelas se referem às técnicas empregadas para completar a tabela, à verificação do preenchimento correto (ou não) da tabela, aos cálculos efetuados para a obtenção dos valores, às iniciativas dos alunos para acrescentar colunas a uma tabela para responder questões posteriores, ou para verificar se os alunos haviam tomado a iniciativa de construir uma tabela, a partir dos dados fornecidos, que auxiliassem na construção de um gráfico. Também colocamos perguntas para verificar se os alunos haviam conseguido completar uma tabela: a partir da leitura do gráfico da temperatura de um forno em função do tempo, a partir de uma ilustração que mostra o esvaziamento de um reservatório.

As perguntas sobre a construção de gráficos pedem que se verifique a utilização (ou não) de uma escala para cada um dos eixos; do uso (ou não) de uma régua; da localização correta (ou não) dos pontos no plano cartesiano; da variável representada no eixo das abscissas e da variável representada no eixo das ordenadas, quando não há indicação delas no material distribuído aos alunos. Também há questões para verificar se os alunos unem (ou não) os pontos localizados no plano cartesiano e as justificativas que eles apresentam para unir (ou não) tais pontos.

Pedimos a relação das expressões algébricas produzidas pelos alunos e a verificação da existência (ou não) de uma expressão correta; a relação das explicações dadas pelos alunos sobre tarefas envolvendo dependência; a compreensão (ou não) da tarefa pedida.

A respeito dos materiais concretos (folhas de papel, palitinhos), colocamos perguntas a respeito da sua utilização (ou não).

Nas tarefas cuja resolução demanda efetuar operações com números, pedimos a verificação das iniciativas dos alunos para chegar aos resultados pedidos, a especificação da técnica utilizada para obter a resposta, a utilização da regra de três no caso de grandezas diretamente proporcionais. Também há perguntas sobre a compreensão de um determinado texto ou palavra, como vazão.

2.4.1. Aplicação da seqüência de ensino: as primeiras sessões

Iniciamos a primeira sessão (05/10/2004) com a distribuição da atividade *Dobrando papel*. A primeira impressão que tivemos foi a de que os alunos não estavam acostumados a trabalhar em grupo, pois, nessa primeira sessão, eles resolveram as atividades em silêncio e individualmente.

A professora Margarida circulava pela sala, atendendo às solicitações dos alunos. Observou, espantada, que os alunos estavam construindo um gráfico de colunas, no lugar de um gráfico formado por pontos. Após explicar a localização de um ponto em um plano cartesiano, os alunos retomaram a atividade e construíram o gráfico do número de partes em função do número de dobras.

Somente no final da sessão, a professora da classe nos relatou que sua substituta, durante a sua licença-prêmio, trabalhara a construção de gráficos utilizados em estatística. Esse fato mostra que a professora Margarida não teve a iniciativa de se informar daquilo que tinha ocorrido nessa classe durante as semanas que antecederam o início da aplicação da seqüência.

A seguir, descrevemos as iniciativas tomadas pelos alunos para resolver a atividade Dobrando papel.

Para determinar quantas partes são obtidas com oito dobras na folha de papel, os alunos utilizaram duas técnicas: ampliação da tabela dada ou sucessivas multiplicações: 32x2=64, 64x2=128, 28x2=256.

Para responder a pergunta: Se o número de partes for 512, quantas dobras são necessárias? Justifique a sua maneira de obter o resultado, encontramos diversas técnicas para obter a resposta correta, ou seja, nove dobras: a) utilizaram o resultado anterior e fizeram uma multiplicação; b) explicitaram o processo de multiplicação: "9 dobras: obtemos esse resultado continuando o processo de multiplicação"; c) fatoraram corretamente o número 512 e acrescentaram um texto: " 9 dobras. Eu obtive esse resultado fatorando o número que resulta em 2^9."; d) ampliaram a tabela e acrescentaram 7, 8 e 9 dobras e o correspondente número de partes; e) utilizaram a potência e surgiram frases tais como: "256 = 2^8. Eu resolvi aumentar mais uma dobra fazendo a conta 256x2 = 512." e "Por tentativa, acrescentamos para a base 2 o expoente 9 então 2^9= 512".

Para responder a pergunta: O número de partes depende do número de dobras? os alunos produziram dezessete frases com a palavra sim, que agrupamos em cinco categorias.

a) Descrição verbal da relação entre número de dobras e número de partes: “Porque 2 sempre será elevado ao número de dobras para obter o número de partes”; “Conforme dobramos o papel, o número de dobras também dobra”.

b) Dependência relacionada com o aumento: “Pois quanto mais dobramos o papel, mais partes nós teremos”.

c) Correspondência implícita: “Pois quando dobramos, a folha fica marcada e através dessas marcas temos o número de dobras”.

d) Negação: “Porque se não dobrar não haverá partes”.

e) Relacionada com as operações. Exemplos: “Pois a medida que dobramos, o número de partes é potencializado; observando a questão a) (completar a tabela), se você repara nela você ira ver que os números de partes são multiplicado por 2, ou somar ele por ele mesmo e assim você obterá o resultado que você procurar”.

Podemos perceber que as alterações sugeridas nessa atividade, após o experimento-piloto, surtiram efeito positivo, pois os alunos conseguiram escrever, de próprio punho, diversas sentenças a respeito de dependência, mesmo sem conhecer a expressão algébrica que fornece o número de partes em função do número de dobras. Alguns relatos dos alunos sugerem que a resolução das tarefas anteriores lhes forneceu subsídios para explicar por que o número de partes depende do número de dobras. Este rico repertório de justificativas nos mostra que é possível investir na questão da dependência antes da apresentação de expressões algébricas.

Após o término da primeira atividade, a professora-formadora distribuiu a atividade Brincando no parque, sem fazer o fechamento da primeira.

A partir dos protocolos dos alunos, pudemos agrupar suas respostas sobre a questão da dependência entre o gasto total de uma criança em um parque de diversões e o número de brinquedos utilizados em duas categorias: sim e não. Dentre as respostas afirmativas, encontramos três sub-categorias: sem explicações, a dependência relacionada ao número de brinquedos, a dependência relacionada ao número de brinquedos e também ao valor da entrada.

Algumas respostas típicas para a segunda sub-categoria: “depende da quantidade de brinquedos em que você for”; “porque cada brinquedo utilizado gasta

0,50"; "porque quanto mais brincar, mais dinheiro vai gastar"; "por que para utilizar brinquedos, eles têm que ser pagos"; "porque só sabemos o total de gastos conforme a quantidade de brinquedos"; "sim, se eu entrar, gasto 2 reais, se eu brincar, eu gasto mais que 2 reais".

Para a terceira sub-categoria, os alunos consideraram a taxa de entrada como uma segunda variável independente e escreveram: "sim, mas também depende da taxa de entrada".

Para a categoria não, encontramos explicações que envolvem o número de brinquedos e a taxa de entrada, ou seja, os alunos consideraram a taxa de entrada como uma segunda variável independente. Exemplos de sentenças: "não, porque o gasto total será da entrada com os brinquedos utilizados e não só dos brinquedos"; "não, porque temos que pagar a entrada; não só da quantidade de brinquedos utilizados, porque tem também que pagar a entrada".

Essas explicações dadas pelos alunos mostram o quanto a taxa de entrada no parque dificultou o entendimento da questão da dependência, uma vez que número de brinquedos é variável e valor da entrada é parâmetro em $G = 2{,}00 + 0{,}50n$, uma função polinomial do 1º grau. Entretanto, o número de brinquedos e o valor da entrada foram interpretados pelos alunos como duas variáveis. Esse resultado corrobora aqueles obtidos por Goldenberg *et al.* (1992, p.240). Esses pesquisadores concluem que há alunos que não têm clareza sobre os papéis das variáveis e dos parâmetros em funções polinomiais dadas por expressões como $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Os alunos que não conseguiram identificar variável independente e dependente solicitaram ajuda da formadora. Somente após as orientações, eles completaram as sentenças com as palavras independente e dependente na questão que pedia a identificação das variáveis na atividade Brincando no parque.

Apresentamos um trecho de um debate entre um grupo de alunas, relatado por um dos observadores: "Elas começaram a discutir a explicação que deveriam colocar e disseram estar confusas, pois as duas variáveis pareciam ser dependentes, tanto o número de brinquedos quanto o valor gasto. Discutiram bastante, sem concluir." (Observadora do projeto, 05/10/2004).

Consideramos esta confusão dos alunos, em uma primeira aula sobre funções, bastante natural, uma vez que os professores também tiveram o mesmo tipo de dúvida no início da formação.

O fato positivo é que a professora Margarida pareceu ter superado suas dificuldades, como vimos nas fases anteriores. Segundo relatos de observadores: “O grupo só entendeu a questão após explicações mais detalhadas da professora Margarida”; “Após orientação, os alunos chegaram a um consenso”.

Nem todos os alunos conseguiram escrever corretamente a expressão algébrica que relaciona o gasto total G com o número de brinquedos n utilizados no parque de diversões, pois surgiram expressões como: $n + 2 = G$, $G = 2{,}5n$ e $2n + 2 = G$. Na primeira expressão, falta o coeficiente de n (valor desembolsado ao brincar em um brinquedo); na segunda, o aluno somou o valor da entrada como o valor pago em cada brinquedo; na terceira, o aluno repete o valor da taxa de entrada no lugar do valor desembolsado para brincar em um brinquedo. A professora-formadora precisou retomar os cálculos efetuados para a resolução da primeira questão: “Qual será o gasto de uma criança que, depois de entrar no parque, quer brincar em um brinquedo, dois brinquedos, três brinquedos e doze brinquedos” e explicitar o processo de generalização para que os alunos conseguissem entender a expressão $n.0{,}5 + 2 = G$.

Observamos que quase todos os alunos constroem o gráfico do gasto em função do número de brinquedos utilizados, sem muitas dificuldades, uma vez que a folha quadriculada ajudou a confeccioná-lo, além das indicações em cada eixo. A seguir, eles procuraram responder a questão: É possível unir os pontos?

A resposta sim foi geralmente acompanhada de diversas justificativas: “Porque é uma diagonal que vai subindo sucessivamente”; “Com o risco fica mais chamativo”; “Porque a maioria dos gráficos é unida”; “Pois colocarmos o valor da entrada junto com o valor dos brinquedos em que andamos e conseguiremos unir os pontos”; “Porque eles seguem uma proporcionalidade” (o aluno uniu os pontos alinhados e obteve um segmento de reta); “Porque há uma proporcionalidade, quanto mais utilizamos os brinquedos, maior é o gasto”.

Na primeira sentença, o aluno pensa em um movimento, na segunda, mostra que o grupo não levou em consideração o domínio da função. Nesses dois casos, o gráfico é mais um desenho do que a representação de uma relação funcional. As respostas dos alunos confirmam os resultados obtidos por Sierpinska (1992, p.52). Essa pesquisadora afirma que há estudantes que vêm gráficos de uma relação funcional de uma maneira concreta, como um objeto geométrico, idealizações de linhas no papel ou de trajetórias de pontos. Propõe então o seguinte obstáculo epistemológico a respeito da concepção de gráfico de uma função: "O gráfico é um modelo geométrico da relação funcional. Não precisa ser verdadeiro, pode conter pontos (x, y)onde a função não foi definida". (SIERSPINSKA, *ibid*). Ao longo das sessões, veremos alguns alunos insistindo no desenho de uma linha como reforço.

A terceira afirmação é devida à experiência anterior dos alunos com os gráficos de linha utilizados em estatística, vistos há poucas semanas, onde os pontos são unidos por segmentos de reta. É provável que a professora tenha apresentado um roteiro para a construção desse tipo de gráfico, sem justificativas tecnológicas para ele. Diante da nova situação, alunos retomaram os mesmos procedimentos.

Na quarta sentença, parece que o número de brinquedos "próximo" do valor da entrada na fórmula levou o aluno a considerar a possibilidade de unir os pontos no gráfico. Nas duas últimas justificativas, os alunos perceberam, de uma maneira implícita, uma taxa de variação ou um acréscimo constante de valor, de cinqüenta em cinqüenta centavos.

A resposta <u>não</u> foi geralmente acompanhada de justificativas tais como: "Não há meio brinquedo"; "Porque não existem brinquedos quebrados"; "Não é um gráfico de estatística"; "Porque já está mostrando o valor gasto" e "Porque eu não posso fundir um brinquedo com outro". Esta última sentença mostra que, para esse aluno, o fato de os brinquedos estarem espalhados no parque, acarreta pontos isolados no gráfico. Subjacente à explicação do aluno, há uma questão relativa à métrica, pois distância entre os brinquedos no mundo físico se traduz com distância entre os pontos na representação gráfica.

As sentenças produzidas pelos alunos sobre a questão de poder unir ou não os pontos do gráfico no seu primeiro encontro com esta representação permitem levantar algumas hipóteses: a) eles procuraram um apoio ou nos conhecimentos anteriores, ou interpretaram o gráfico como uma linha, um objeto geométrico; b) acreditaram que aquilo que está próximo ou distante no mundo real fique "próximo" ou “distante” no gráfico; c) procuraram, na escrita algébrica, justificativas também relacionadas a um certo tipo de proximidade.

A maioria dos alunos utilizou corretamente a malha quadriculada que lhes foi entregue para localizar os pontos de coordenadas (n, G), para valores da variável número de brinquedos $n = 0, 1, 2, 3, ..., 12$.

Em resumo, as inúmeras iniciativas dos alunos nos seus primeiros encontros com tarefas problemáticas, onde tinham que procurar respostas sem ter um respaldo tecnológico, mostra-nos o quanto eles poderiam produzir com uma orientação adequada, durante o tempo escolar.

No final da aula, a professora Margarida fez um fechamento das duas atividades. Ao explicar a construção do gráfico do valor gasto em função do número de brinquedos, apontou qual é a variável representada no eixo horizontal. Retomou o exercício anterior, acrescentando que o número de partes depende do número de dobras e completou: “Sempre no eixo das abscissas, vai variável independente; no eixo das ordenadas, vai variável dependente”. Essa fala mostra que a professora se sente mais confiante ao falar sobre variáveis, sobre qual é a variável representada no eixo das abscissas, qual é a representada no eixo das ordenadas. Além disso, ela explica por que não se podem unir os pontos nos gráficos pedidos nas duas primeiras atividades.

Se, por um lado, a fala da professora mostra uma evolução, por outro lado, ela perdeu uma oportunidade de ter feito uma melhor interação entre os alunos, pedindo que eles verbalizassem suas próprias idéias sobre dependência, ao invés de fazer a sua récita diante da lousa.

A segunda sessão, que ocorreu no dia seguinte, 6 de outubro, foi dedicada à resolução da atividade *Almoçando no restaurante*. Nessa sessão, os alunos começaram a trabalhar em grupo, diferentemente da aula anterior, quando cada aluno trabalhou individualmente.

Na atividade, os alunos não tiveram dificuldades para perceber a dependência, mas a determinação da expressão algébrica do valor a ser pago em função do consumo (em kg) gerou dúvidas, pois eles não sabiam qual valor deveriam utilizar:

$R\$ 13,00$ (preço de 1kg de comida, em reais) ou $R\$ 1,30$ (preço de $100\ g$ de comida, em reais), duas informações que constam do enunciado da atividade.

Ao fazer a conversão de tabela para fórmula, ou de texto para fórmula, os alunos escreveram: $V + x.13$ (reformulada pelo grupo de alunos para $V = x.13$), $V = 13x$ $V = x.1,3$ e $V = \frac{x.1,3}{100}$. Aqueles que optaram pela expressão $V = x.1,3$ provavelmente não utilizaram as informações contidas nos desenhos dos visores da balança, que acusa sempre o valor de $R\$ 13,00$ por quilo. Esse é um indicativo de que, apesar de ter sido pedida a tarefa para preencher os espaços em branco, isto é, dado o valor da quantidade de comida e o preço de um quilo, calcular o valor da refeição, os alunos que obtiveram a expressão não conseguiram fazer a generalização e chegar à expressão algébrica $V = 13x$. É o mesmo tipo de dificuldade que alguns alunos tiveram na atividade anterior, ao escrever a expressão algébrica que fornece o valor gasto no parque em função do número de brinquedos que a criança utilizou.

Sobre a situação em que todas as pessoas tomam um copo de suco, que custa $R\$ 1,50$, alguns alunos tiveram dificuldades em lidar com essa informação ao serem instados a escrever uma fórmula que fornecesse o valor total a ser pago (T) em função da quantidade de comida (x). Segundo relato de uma observadora: "A dúvida maior foi colocar ou não o valor do suco na expressão. [...] O grupo discutiu a respeito de aumentar o valor de $R\$1,50$ no eixo das abscissas ou no eixo das ordenadas. Depois da discussão, chegaram à conclusão de que deveriam aumentar no eixo das ordenadas". (Observadora/professora da classe 6/10/2004).

Desta forma, mesmo em uma situação extraída do cotidiano, a passagem de uma função linear representada por $V = 13x$ para a função afim representada por $T = 13x + 1,50$ não foi imediata. De fato, sem tabelas auxiliares, essa passagem é a operação $T = V + 1,5$, que constitui uma operação entre dois objetos matemáticos, a transformação "somar 1,5" como um operador que converte um objeto em outro. Isso só é possível quando o aluno tem uma compreensão de função como objeto, segundo Dubinsky e Harel (1992, p.85).

Retornando à sessão, vimos que a professora Margarida precisou explicar, em alguns grupos, como utilizar a régua, a localização de pontos cujas ordenadas são os números $3{,}25$; $6{,}5$ e $9{,}75$, bem como a confecção de uma escala. Alguns alunos, talvez por falta de tempo, não uniram os pontos no gráfico do valor a ser pago em função da quantidade de comida, apesar de terem justificado afirmativamente: “Porque agora é dinheiro, pode ter número quebrado” ou “A unidade (kg) permite a união dos pontos.” A continuidade, na primeira sentença, relaciona-se à imagem e, na segunda, ao domínio da função. De alguma forma, os alunos passaram a se deter mais sobre o campo de variação das variáveis, utilizando sua própria linguagem.

Nem todos terminaram essa atividade, mas a professora iniciou seu fechamento meia hora antes do término da aula. Ela registrou na lousa os valores que apareceram nos visores da balança, completando os espaços em branco, mas não deu muitas explicações, mesmo tendo observado as dificuldades dos alunos com operações que envolvem números decimais e a transformação de unidades: de quilo para gramas e vice-versa. A seguir, colocou as fórmulas ditadas pelos alunos, mas não houve tempo e ficaram dúvidas para a próxima sessão.

Na terceira sessão, dia 8 de outubro, os professores Juliano, César, Rosa e Marcos e a estudante Bruna se propuseram a atuar como observadores.

A professora Margarida, no início da sessão, retomou o fechamento da terceira atividade - *Almoçando no restaurante* e escreveu duas tabelas na lousa. Para a variável quantidade de comida (em kg), na primeira tabela, utilizou as frações $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$; na segunda, serviu-se de números: $0{,}100$; $0{,}200$; $0{,}300$; $0{,}400$. Diante dessas tabelas, referiu-se à proporcionalidade “Se dobrar o peso, dobra o valor. É proporcional” (professora Margarida, 08/10/2004), mas não se aprofundou no tema, além de ter utilizado indevidamente a palavra *peso*. Lembramos que o conceito de peso foi discutido durante a formação, gerou uma longa discussão, mas o que se manteve foi o uso comum da palavra.

Retornando ao fechamento da atividade, a professora Margarida pediu que os alunos lhe ditassem a fórmula que encontraram para relacionar o valor pago (em R$) com a quantidade de comida consumida (em kg). Ela conseguiu explicar por que $V = 13x$ é a representação correta, o que ocorre com $V = 1{,}3x$, mas lhe faltou presteza para interpretar $V = \frac{x.1,3}{100}$, que relaciona o valor a ser pago (V) com a quantidade de comida *x* (em gramas), ou seja, identificar outra representação dessa função $V = 0,013x$ e explicar aos alunos que o número $0,013$ representa o valor cobrado, sem unidade monetária, pelo consumo de um grama de comida.

A ausência de um discurso sobre proporcionalidade em uma situação do cotidiano, modelada por uma função linear ($V = 13x$), mostra que a professora Margarida, apesar de termos trabalhado esse assunto durante a formação, não dá atenção à proporcionalidade e à relação entre esse tema e função linear, provavelmente pela falta de domínio de noções subjacentes, como razão, bem como o tratamento de registros de representação.

Margarida e Marcos construíram juntos, na lousa, o gráfico da função definida por $V = 13x$. A seguir, Margarida repetiu os procedimentos para a situação que envolvia o consumo de um refrigerante: discussão das fórmulas ditadas pelos alunos e construção do gráfico da função definida por $T = 13x + 1,50$. Em seguida, ela e Marcos construíram os gráficos das funções definidas por: $V = 12x$, $V = 13x$ e $V = 14x$, utilizando um mesmo sistema de eixos. Essas funções respeito a três restaurantes, onde os valores cobrados por quilo são: R\$ 12,00, R\$ 13,00 e R\$ 14,00 respectivamente.

Encerrada a resolução da atividade *Almoçando no restaurante*, foi distribuída a atividade *Esvaziando reservatório*. Durante a sua resolução, os alunos começaram efetivamente a trabalhar em grupo. Muitos não conheciam o significado da palavra *vazão* mas, apesar disso, escreveram: "[...] se a cada hora esvazia 200 litros, então a cada meia são 100 litros" e preencheram corretamente a tabela.

Durante a execução da tarefa de construir o gráfico do volume de água no reservatório em função do tempo, os observadores notaram que alguns alunos trocaram os eixos e colocaram volume no eixo das abscissas e tempo no eixo das ordenadas, mesmo com as indicações dadas na folha distribuída aos alunos, onde consta o volume (em litros) no eixo das ordenadas e o tempo (em horas) no eixo das abscissas. Encontramos o relato a respeito de troca de eixos em Hadjidemetriou e Williams (2001, v.3, p. 92), em uma ampla investigação sobre concepções de alunos de 14 -15 anos a respeito de construção de gráficos. Esses autores consideram a troca de eixos como típica.

A atividade *Esvaziando reservatório* é a primeira que trabalha com uma função decrescente. Durante a construção do gráfico do volume de água no reservatório em função do tempo alguns alunos não conseguiram ordenar corretamente os valores no eixo das ordenadas; eles seguiram, provavelmente, a ordem de leitura dos valores de volume de água: 1000, 800, 600 etc. Dessa forma, percebemos que há alunos que não têm o domínio da relação de ordem na reta real, um fato que não transpareceu nas atividades anteriores, onde se tratou de funções crescentes.

Essas dificuldades iniciais, apontadas pelos observadores, foram sanadas pela intervenção da formadora e os alunos prosseguiram suas atividades. Ao analisarmos os protocolos dos alunos, verificamos que os gráficos confeccionados pela classe podem ser divididos em duas categorias: *pontos isolados* e *segmento(s) de reta*. Dentre os alunos que só localizaram pontos, extraindo informações da tabela, há aqueles que utilizaram uma escala correta, mas não localizaram os pontos $(0, 1000)$ e $(5, 0)$. Mas há um aspecto que alguns alunos desconsideraram: que não há mais água no reservatório para valores de tempo $t \geq 5$ (tempo em horas) e localizaram os pontos de coordenadas $(5, 1100)$ e $(5{,}5\,; 1200)$. Dentre os alunos que uniram os pontos, encontramos diversas situações: segmento de extremidades nos pontos de coordenadas $(0{,}5; 900)$ e $(4, 900)$; por causa de um erro na escala, o aluno construiu dois segmentos consecutivos, mas localizou os pontos de coordenadas $(0, 1000)$ e $(5, 0)$. Dentre aqueles que desenharam um segmento de extremidades $(0, 1000)$ e $(5, 0)$ que passa pelos outros pontos cujas coordenadas foram extraídas da tabela, houve aqueles que marcaram todas as coordenadas dos pontos localizados; aqueles que indicaram o ponto $(7, 0)$; outros conseguiram desenhar um segmento horizontal, com uma extremidade no ponto $(5, 0)$, passando pelo ponto $(7, 0)$. Um grupo de alunos desenhou um segmento de extremidades $(7, 0)$ e $(0, 1400)$, além do segmento de extremidades $(0, 1000)$ e $(5, 0)$, ou seja, para cada valor de tempo, haveria dois valores para o volume. De uma maneira geral, os alunos estabeleceram a seguinte escala para o eixo das ordenadas: 1cm para representar 100 litros.

Os estudantes que consideram ser necessário unir os pontos no gráfico justificaram suas respostas da seguinte maneira: “estamos trabalhando com horas e, se unirmos os pontos, temos uma melhor visualização e representação de que há um esvaziamento”; “para demonstrar a diminuição do volume de água além de ser representado por horas e litros”; “porque as horas possuem números decimais e os litros também”; “o tempo está em horas, minutos e segundos”; “porque estamos trabalhando com litros e horas que têm números quebrados”; “porque o tempo é infinitivo” (sic); “porque estamos trabalhando com horas e cada segundo que passa a água vai diminuindo”; “porque são números que podem ser unidos, pois são números quebrados”; “porque o gráfico trata de tempo”.

Encontraram-se alunos que consideraram a construção de uma linha contínua um mero reforço: “Não é necessário, pois o gráfico já está mostrando claramente que quanto maior o tempo, mais esvazia o reservatório. Mas podem-se unir os pontos para reforçar a idéia de que o gráfico passa a decadência (sic) da água”. Outro texto: “Não é necessário, pois só de olhar o gráfico já observamos que a água esvaziará, mas tudo bem. Se unirmos para reforçar a idéia de que a água está diminuindo é porque estamos trabalhando com números decimais”.

Se, por um lado, nos escritos de muitos alunos transparece uma idéia (intuitiva) de que estão trabalhando com variáveis contínuas, uma vez que surgem as palavras: *infinito* (para tempo), *números decimais, números quebrados* (que podemos entender como números decimais), a divisão do tempo em horas, minutos e segundos; por outro lado, aparece a possibilidade de uma linha contínua servir apenas para reforçar a idéia de uma variação de volume, não relacionada explicitamente à variável independente *tempo*.

A maioria dos alunos considera que o volume d’água no reservatório depende do tempo em que a ralo está aberto. As respostas podem ser agrupadas da seguinte forma: explicitação da taxa de variação, redução de volume em função do tempo, redução proporcional do volume em função do tempo. Seguem alguns textos produzidos pelos alunos: “Sim, porque a cada hora vazam 200 litros de água”; “Sim, pois quanto mais horas passam, o volume é reduzido”; “Sim, pois de acordo com as horas transcorridas, o volume de água diminui proporcionalmente”. Observamos novamente, a justificativa de dependência ligada à variação. O conceito de taxa de variação constante, até aqui deixada de lado até pela própria formadora, transparece em explicações sobre dependência.

Mas houve alunos que discordaram da dependência: “Não, porque a água pode acabar, mas o tempo não; ele continua”. Esse texto indica que o tempo flui sem relação com o volume de água no reservatório.

A noção de tempo tem sido discutida por filósofos e cientistas. Sir Isaac Newton, segundo Youschkevitch (1981, p.29), tinha uma visão filosófica do tempo, considerado objeto universal. Acreditamos que sem uma concepção de tempo determinado por instrumentos, que permitem a contagem a partir de um determinado instante, isso poderá levar estudantes a descartar a dependência em toda função temporal. Assim, a afirmativa feita pelos alunos que discordam da dependência, em funções temporais, alertam-nos para as possíveis dificuldades que podem aparecer no estudo dessa variável no ensino fundamental e médio.

Retornando à sessão com os alunos, no fechamento dessa atividade, a professora voltou a falar sobre os eixos, variável independente, variável dependente e construiu o gráfico do volume de água no reservatório em função do tempo. A Figura 26 reproduz o gráfico construído pela formadora na lousa.

Diante do gráfico recém-construído, um dos alunos se levantou, dirigiu-se à lousa e questionou sua construção, para os valores da variável *tempo* maiores que 5 horas, quando o reservatório já estava vazio. Para ele, zero é nada, então não podia admitir aquela linha horizontal, mesmo com o cronômetro ligado. O ponto nevrálgico é a questão do zero, um obstáculo epistemológico: “A associação de zero com “nada” desloca esse obstáculo epistemológico para um aspecto psicológico e é causa de numerosos erros”. (ALMOULOUD, 2000, p.125).

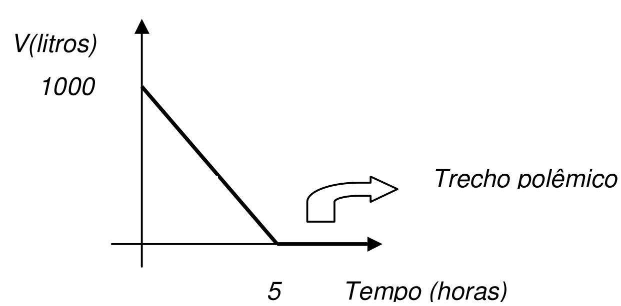


Figura 26 - O gráfico que gerou a polêmica

Fonte: Reprodução da lousa

Todos se envolveram na polêmica, até o encerramento da sessão, o que mostrou que os alunos estavam mais à vontade.

A quarta sessão ocorreu no dia 13 de outubro de 2004, quando os professores Marcos e Margarida alternaram seus papéis de observador e formador, pois Margarida não estava se sentindo à vontade como formadora. Segundo suas palavras: “[...] vai dando uma angustia [...]”. Entretanto, Marcos não está muito disposto a trocar de papel com Margarida, gerando um certo desconforto entre eles. Novamente, a professora Margarida alternou a vontade de ser formadora com o medo de sê-lo, fato que também ocorreu durante o experimento-piloto.

Nesse dia, a atividade distribuída aos alunos denominava-se *Função como Máquina.*

Os relatos dos observadores indicam que os alunos completaram a tabela, escreveram $s = 2u - 1$, discutiram a fórmula entre eles, identificaram qual era a variável independente. As dificuldades encontradas foram: trabalhar com frações; escrever $s = 2\sqrt{3} - 1$, para $u = \sqrt{3}$, aceitar uma resposta que envolvesse a escrita de radicais, utilizar o ostensivo f, construir um gráfico.

Constatamos, ao analisar os protocolos dos alunos, que para determinar o número de entrada dado o número de saída, eles utilizaram duas técnicas: operações inversas e tentativa de acerto e erro.

Alguns deles conseguiram manipular com maior desenvoltura o ostensivo $f(u) = 2u - 1$, compreendendo que *u* é entrada e $f(u)$ é a saída, mas a maioria confundiu entrada com saída e escreveu:

$f(2) = 1{,}5 \times 2 = 3 - 1 = 2$, $f(8) = 4{,}5$, $f(20) = 10{,}5$, $f(-1) = 0$ e $f(1{,}8) = 1{,}4$.

Um dos observadores detalhou o debate entre três alunos sobre 2 e $f(2)$:

> Aluno 1: Calcular 2 entrando.
> Aluno 2: Aqui é o número de saída. Coloca o 2 no de saída.
> Aluno 1: Mas eles pedem o número de entrada?
> Aluno 3: É só fazer o inverso.
> Aluno 2: Acho que dá 1,5 porque $1{,}5 \times 2 = 3$ e $3 - 1 = 2$.
> Aluno 1: Por que eles estão pedindo o número de entrada?
> Aluno 3: O número de entrada é 1,5.
> Aluno1: Mas eles pedem o número de entrada? (professor-observador, 13/10/2004).

Notamos que há um aluno que percebeu inicialmente que o número de entrada é o dois, mas não conseguiu convencer os outros dois colegas.

Outro observador relatou os passos dados junto com os alunos do grupo, a passagem da linguagem retórica para a simbólica:

> Pergunto aos alunos qual é o valor de saída. Duas meninas respondem que é transformado pela máquina, o menino concorda. Insisto na notação e acabam concordando que é muito difícil escrever toda vez "o valor de saída da máquina quando entra o valor de *u* é...". E aí as duas meninas percebem que *f* representa a máquina e os números dentro dos parênteses são os números de entrada, não tenho certeza do menino. (Observadora do projeto, 13/10/2004).

Lembramos que, durante a formação, o professor César retomou a linguagem retórica para compreender função como máquina e aceitar o ostensivo *f.*

Um terceiro observador relatou que o grupo de alunos não só calculou o valor da função, como fez os cálculos oralmente, uma situação que não foi observada em outros grupos. Mesmo após o fechamento dessa atividade, percebemos que havia alunos confusos com a compreensão de que, diante de $f(2)$, por exemplo, 2 é o número de entrada e que o valor de $f(2)$ deve ser calculado da seguinte forma: $f(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$.

Encontramos uma grande variedade de gráficos produzidos pelos alunos para representar uma função $f : R \to R$, definida por $f(u) = 2u - 1$, uma vez que, nessa atividade, os alunos receberam uma folha de papel milimetrado e um pequeno texto como um auxílio: "Colocando a variável independente no eixo horizontal, construa um gráfico dessa função".

Os gráficos produzidos podem ser enquadrados em três categorias: retas, segmentos, pontos isolados.

a) Reta que passa pelos pontos $(24, 47)$ e $(-10, -21)$, as ordenadas satisfazem as condições dadas pois $47 = 2 \times 24 - 1$ e $-21 = 2 \times (-10) - 1$; reta que passa pela origem e pelos pontos de coordenadas $(20, 39)$ e $(-1, -3)$ com as indicações feitas pelo aluno sobre o gráfico: $f(20) = 39$ e $f(-1) = -3$, corretamente calculados, conforme mostra a Figura 27.

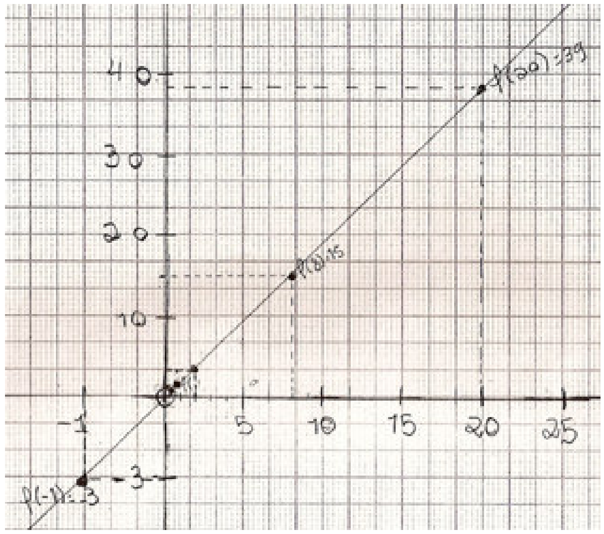


Figura 27 - Gráfico da função - reta

Fonte: Protocolo de aluno

b) Segmento de reta. A Figura 28 mostra um exemplo, onde os valores das ordenadas obedecem à condição dada pela máquina.

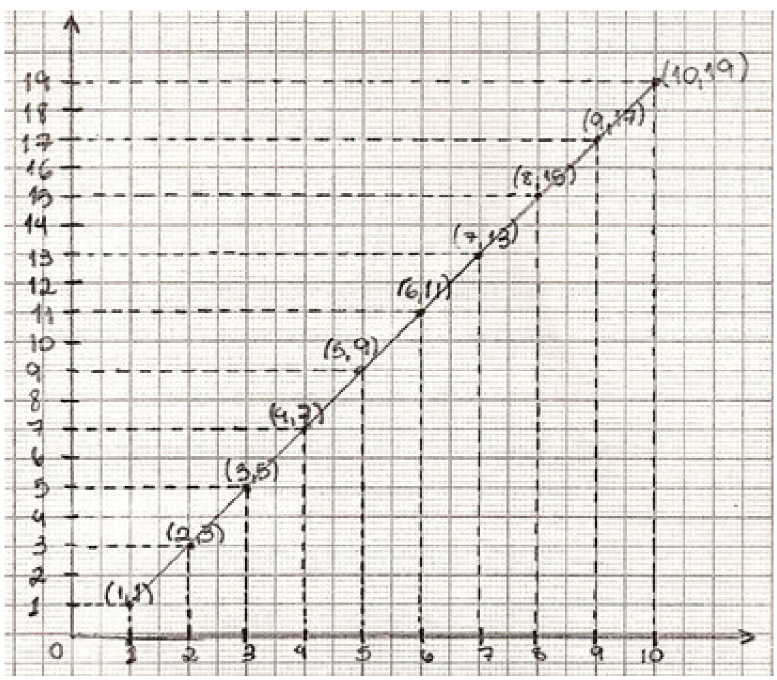


Figura 28 - Gráfico da função - segmento de reta

Fonte: Protocolo de aluno

Um outro gráfico é um segmento de reta de extremidades no primeiro e terceiro quadrantes, sem utilização de uma escala e construído a partir de tabela auxiliar com números inteiros.

c) Pontos isolados. Há gráficos com coordenadas inteiras e positivas, outros com coordenadas inteiras positivas e negativas (com e sem utilização de escala), alguns gráficos com coordenadas racionais.

Em particular, destacamos um gráfico, conforme mostra a Figura 29, onde um grupo de alunos indica u e $f(u)$ para os eixos horizontal e vertical, localiza os pontos de coordenadas $(2, 3)$, $(8, 15)$, $(29, 39)$ (29,39), $(1{,}8; 2{,}6)$, $(-1, -3)$ e $(\sqrt{3}; 2{,}4)$, sendo que as ordenadas obedecem às condições dadas pela máquina. O grupo não utiliza uma escala, mas ordena corretamente os números, o número irracional $\sqrt{3} < 1{,}8$; para o cálculo do valor da função em $u = \sqrt{3}$, este número é aproximado para $1{,}7$.

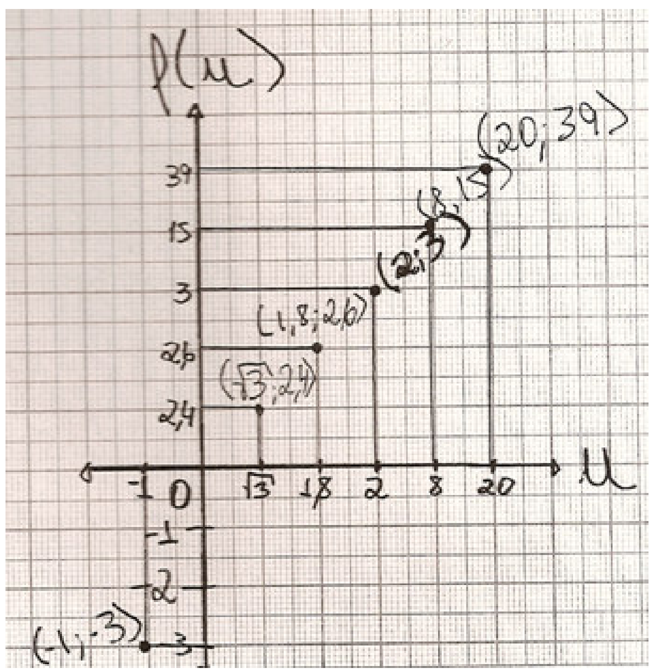


Figura 29 - Gráfico formado por pontos isolados

Fonte: Protocolo de aluno

Apenas dois grupos de alunos apresentam gráficos formados por pontos isolados e arbitrários.

Salientamos o esforço dos alunos diante da tarefa de construir um gráfico de uma função de variável real, a utilização de coordenadas racionais, a inclusão de pontos com coordenadas irracionais (aproximadas para valores racionais); as iniciativas de utilizar outros valores para a variável u, diferentes daqueles apresentados na tabela, de maneira espontânea; a utilização de calculadoras, e coroando tudo isto, enfrentar uma novidade: $f(u)$.

Acreditamos que houve um progresso dos alunos, mesmo considerando o fato de que foi utilizada somente uma sessão para tratar função como máquina de entrada e saída. Se lembrarmos a rejeição, a antipatia, as dificuldades dos professores na manipulação de *f*, observamos que os alunos dessa classe, livres de quaisquer sentimento negativo, escreveram, debateram, completaram tabela(s), efetuaram operações, determinaram a expressão algébrica, construíram gráficos, solicitaram a presença do professor-formador.

Isso mostra a viabilidade de introduzir esse ostensivo desde o início do estudo da organização matemática em torno do conceito de função como máquina de entrada e saída. Bem diferente daquilo que usualmente se encontra nos livros didáticos, onde $f(x)$ aparece na organização matemática em torno da concepção de função nos termos da Teoria dos Conjuntos.

Esses resultados nos levam a discordar de Janvier (1996, p. 235), que afirma que é preciso esperar pelo menos um ano de trabalho com funções na sala de aula, antes de poder introduzir os símbolos f e $f(x)$.

2.4.2. A penúltima reunião

A reunião realizada no dia 15 de outubro de 2004 contou com a presença dos professores: Rosa, César, Marcos, Margarida, Juliano e das estudantes Bruna e Nina.

Solicitamos a todas as pessoas que participaram da sessão do dia 8 de outubro, seja como observador, seja como professor / formador, da atividade *Esvaziando reservatório*, que dessem seu depoimento.

Eles falaram sobre o entrosamento (ou não) dos grupos, o desconhecimento dos termos *vazão* e *escoamento,* a compreensão (ou não) da noção de vazão. Acrescentaram as dificuldades dos alunos em fazer as transformações necessárias da notação de tempo no visor digital do cronômetro para a tabela, onde o tempo é dado em horas. Apresentaram um inventário dos erros e acertos cometidos pelos alunos observados ao construir o gráfico e procuraram achar explicações para algumas construções.

A professora Rosa mostrou as construções feitas pelo grupo de alunos que ela observou: ”Meu grupo pensou que teria sete horas para esvaziar; então teria 1400 litros de água da caixa. Por isso eles colocaram os pontos $(0,1400)$ e $(7,0)$. Fizeram dois gráficos, o real e a reta que liga esses dois pontos”.

Para César, tal construção denota o fato de que a taxa de variação não está clara para os alunos e completou: ”Talvez poderia falar de taxa porque eles (os alunos) podem estar vendo em Física”.

O comentário gerou um questionamento sobre a clareza do enunciado dessa atividade e os professores se perguntaram se ele não poderia ter levado os alunos a outras interpretações.

Os idealizadores dessa atividade previram a possibilidade de que alguns alunos poderiam, ao construir o gráfico, prolongar o segmento de reta e localizar pontos com ordenadas negativas, mas tal fato não ocorreu. Todavia, eles foram surpreendidos com o problema do zero. “No início, eu tinha pensado em discutir a parte negativa; eu não pensei que o zero fosse dar problema”, observou o professor César, referindo-se às questões que causaram a polêmica que encerrara aquela sessão: “Se o cronômetro continuar funcionando, qual a quantidade de água no reservatório no instante $t=7$?” e “Como fica o gráfico para $t>5$? Verifique se seu gráfico está representando esta situação”.

Procuraram lembrar as palavras utilizadas pelo aluno: ”[...] ele dizia que zero litro não existe”, “[...] ele achava que tinha que parar o tempo” e “[...] ele achou que não tinha que contar mais tempo nenhum”.

As discussões sobre o número zero, o nada, o conjunto vazio reavivaram as lembranças de um dos professores quando estudante: “Quando comecei a estudar conjunto, eu não entendia por que o vazio não era zero” e também mostraram as dúvidas atuais: ”Qual é a diferença entre o zero e o nada aí?” A polêmica gerada pelo número zero nos levou a falar sobre a noção de obstáculo epistemológico e sobre a origem desse número.

Os professores afirmaram que, sem sombra de dúvidas, valeu a pena ter incluído as questões que causaram o debate na sala de aula, caso do cronômetro continuar ligado após o esvaziamento do reservatório de água. O professor Marcos sentenciou: “Esses meninos vão ser privilegiados, vão se dar muito bem na Física”. César afirmou que ficara feliz que a atividade proposta por ele e por Rosa tenha gerado tanta discussão e comparou sua atuação no atual projeto com a atuação que tivera no projeto anterior, sobre frações.

A história da atividade *Esvaziando reservatório* se completou, junto com a formação de professores, em particular, de César. Formular a atividade e disponibilizá-la para uma rodada de alterações que foram discutidas coletivamente; vivenciar a sua aplicação e o debate coletivo no final da sessão; atuar como observador e preencher a ficha de observação; posteriormente, relembrar e discutir os fatos ocorridos durante a aplicação, junto com as considerações feitas pelos outros professores e, finalmente, perceber a própria evolução de um projeto para outro.

Marcos, Margarida e Bruna estavam presentes no dias de aplicação da atividade *Função como máquina* e comentaram que muitos alunos haviam considerado os números $f(2), f(8), f(20), f(-1), f(1{,}8)$ e $f(\sqrt{3})$ como números de entrada. Lembraram também das dificuldades dos alunos em trabalhar com números decimais e frações em uma oitava série.

No final da reunião, o grupo decidiu as duas últimas atividades: *Brincando com palitos* e *A padaria* (veja ANEXO B). Esta última atividade, que não foi elaborada pelos professores, foi escolhida pela professora Margarida porque há tarefas sobre leitura e interpretação de gráficos. Um ponto a ser destacado como positivo é que, em experiências anteriores, Margarida fugia dos gráficos e agora queria ver a aplicação dessa atividade na sala de aula.

Ela afirmou ser necessário fazer uma revisão final com os alunos na última sessão, pois acreditava que os fechamentos anteriores não haviam sido satisfatórios e que se responsabilizaria pela confecção do material.

A nosso ver, ela queria superar suas próprias limitações e sempre se dispunha a ser a formadora. Mas, diante de alunos que não são seus e de observadores, ficava angustiada. Talvez a presença de observadores na sala de aula interferisse no seu desempenho diante da classe; acrescente-se a essa circunstância, o fato de usualmente atender pequenos grupos na sua classe. O nosso trabalho não se propõe a fazer uma análise das interações entre professor e aluno, mas não podemos deixar de relatar as flutuações, ora a professora se dirige aos alunos, ora se limita a resolver uma questão sem interagir com eles.

2.4.3. As duas últimas sessões

No início da quinta sessão, realizada no dia 19 de outubro de 2004, os alunos receberam a atividade *Brincando com palitos*, juntamente com um feixe de palitos. Ela foi resolvida com bastante facilidade por quase todos os grupos: somente um deles utilizou os objetos que foram disponibilizados para formar a seqüência de quadrados. Mais tarde, a professora dessa classe nos informou que esses alunos tinham trabalhado com padrões de regularidade na sétima série.

Em seguida, entregamos aos alunos a última atividade dessa seqüência, denominada *A padaria* (veja ANEXO B).

Os alunos determinaram a escala com a ajuda da formadora e escreveram os valores das temperaturas no eixo das ordenadas. Conseguiram completar a tabela a partir do gráfico, pois desenharam linhas auxiliares para localizar um ponto no gráfico.

Todos os alunos responderam *sim* para a pergunta: “A temperatura depende do tempo em que o forno está aceso?” As explicações dadas são muito parecidas: “Sim, porque mais tempo o forno está aceso, maior a temperatura”.

Encontramos diversas respostas e justificativas para a pergunta: “Para cada instante *t,* há somente uma temperatura dentro do forno?”

Excluindo as respostas em branco, os alunos que responderam *sim* não justificaram a sua resposta, ao passo que aqueles que responderam *não*, utilizaram as seguintes justificativas: “a cada instante, a temperatura aumenta”; “porque a temperatura é variada”; “porque a cada instante o forno se aquece mais”; “porque a cada minuto que se passa, o forno aumenta sua temperatura”. Dessa maneira, pudemos perceber que os alunos consideraram o instante *t* como sendo um intervalo de tempo, ou seja, lhes escapou a noção de instante.

Também foram diversificadas as soluções e justificativas para pergunta: “Existe uma função que associa para cada valor de *t*, o correspondente valor de T?”

Muitos alunos deixaram a resposta em branco; outros responderam *não* (com e sem justificativas). Entre aqueles que justificaram seu raciocínio temos: “não, porque a cada minuto que passa, o forno aumenta sua temperatura”, “não, porque não existe uma graduação exata de temperatura”. A primeira indica que o aluno entendeu “cada valor de *t*”, no enunciado da questão como um intervalo de tempo, ao dar a resposta “[..] a cada minuto que passa [...]”.

Os alunos que responderam afirmativamente, completaram a resposta com uma das seguintes sentenças: “Sim, pois se aumenta o tempo, também aumenta a temperatura; a função é o gráfico”; “Sim, se o forno não estiver ligado, a temperatura não sobe”; ou com a expressão algébrica $T = 18t + 20$ (ou $T = 20t + 20$).

Diante das respostas dos alunos, acreditamos que a falta da noção de instante faz com que as funções temporais não sejam tão simples de serem analisadas, como pressupõe Janvier (1998, p. 82) e merecem um estudo à parte.

Dentre os alunos que se propuseram a calcular a taxa de variação da temperatura do forno de padaria (em graus Celsius por minuto), encontramos três caminhos, sendo que dois utilizam diferença e divisão e o terceiro somente uma divisão.

O relato para o primeiro caminho: “De $18^{o}C$ em $18^{o}C$, porque $200 - 20 = 180$ e $180 \div 10 = 18$”. Esses cálculos mostram que o grupo calculou a diferença entre a temperatura final e inicial e depois dividiu o resultado pelo intervalo de tempo em que o forno permaneceu aceso. Um outro caminho, utilizando as duas operações, encontra-se a seguir: “A cada minuto a temperatura aumenta 18,3 [...] $75 - 20 = 55$”. A seguir, o grupo dividiu 55 por 3. Os valores utilizados para o tempo e respectivas temperaturas, indicam que eles foram extraídos da tabela. A seguir, calcularam Δt, ΔT e a razão $\frac{\Delta T}{\Delta t}$. Essa resolução demanda leitura de gráfico, preenchimento e posterior leitura de tabela e operações aritméticas.

Os alunos que optaram pela operação de divisão: “$20^{o}C$. O forno demora 10 minutos para atingir a temperatura de $200^{o}C$, dividimos 200 por 10 e achamos o resultado de $20^{o}C$". Aqui o grupo não levou em consideração a temperatura inicial do forno $20^{o}C$, mas a técnica veio acompanhada de um breve discurso tecnológico.

Diante do exposto, podemos perceber que há alunos que têm uma noção de taxa de variação, mesmo sem nomeá-la. Consideramos essa tarefa mais complexa do que a determinação da vazão, que tinha figuras de apoio.

A noção de taxa de variação, considerada como o coeficiente angular da reta, em uma situação que envolve o estudo de uma função polinomial do 1º grau, é problemática até para alunos matriculados no primeiro ano de um curso superior de Química, fato constatado por Silveira (2001, p.33). Diante dessa realidade, podemos considerar como digno de nota as técnicas e as justificativas dadas por dois grupos de estudantes de oitava série.

Uma outra solução envolve a divisão de 50 por 4, a mesma operação efetuada para determinar a escala no eixo das ordenadas: uma unidade de medida corresponde a $12{,}5^{o}C$. Também encontramos um texto: "Em cada minuto, a temperatura aumenta de 12,5 em $12{,}5^{o}C$. Basta olhar no gráfico". Essas duas soluções mostram uma confusão entre taxa de variação e escala no eixo vertical, ou seja, a taxa de variação não é entendida como uma razão, somente como uma variação no eixo vertical.

A respeito da fórmula que relaciona T e *t*, encontramos as seguintes soluções:

a) alternativa I: sem justificativa;

b) alternativa II: (correta) com as seguintes justificativas:

> Um grupo substituiu apenas um valor para a variável tempo $(t = 3)$ em $T = 18t + 20$ e escreveu: "Pois substituindo por valores, o resultado é correto e

$$18 \times 3 = 54$$
$$54 + 20 = 74"$$

> Outro grupo substituiu dois valores para a variável tempo: $t = 4{,}5$ e $t = 8{,}5$ em $T = 18t + 20$. A seguir, comparou os resultados com os valores de temperatura encontrados na tabela: "Porque os valores sempre são aproximados aos resultados da tabela quando substituídos. Por exemplo:

$100^{o} = 18 \times 4{,}5\,\text{min} + 20 = 81 + 20, 100^{o}\,C \cong 101^{o}\,C$

$175 = 18 \times 8{,}5 + 20 = 153 + 20, 175^{o}\,C \cong 173^{o}\,C.$”

> Um único grupo de alunos conseguiu relacionar taxa de variação com o coeficiente de t, pois calculou novamente a taxa de variação e assinalou $T = 18t + 20$. A justificativa dada: “Porque $200 - 20 = 180$, $180 \div 10 = 18$”.

> Outro grupo optou por testar um mesmo valor de temperatura ($t = 3$) nas quatro fórmulas.

c) alternativa III sem justificativa;

d) alternativa IV sem justificativa;

e) alternativa IV com a justificativa $T = 10 \times 10 + 100 = 100 + 100 = 200$.

Nota-se que, de uma maneira geral, os alunos ainda não conseguiram relacionar a taxa de variação com o coeficiente de t em $T = 18t + 20$, pois não há na atividade uma tarefa que tivesse pedido tal identificação. Vale ressaltar as iniciativas tomadas pelos alunos para identificar a expressão algébrica correta.

A sexta sessão, realizada no dia 20 de outubro, foi dedicada à revisão proposta pela professora Margarida.

Para essa retomada, os professores Marcos e Margarida planejaram e prepararam folhas do *flipchart* (veja ANEXO C – *Transcrição das folhas de flip-chart*), com o intuito de introduzir função como máquina desde a primeira atividade da seqüência.

Para a atividade *Dobrando papel*, na primeira folha, há uma tabela com as colunas: *número de dobras* e *número partes*: uma máquina, nomeada de P, com entrada e saída; duas expressões algébricas: $P = 2^{n}$ e $P(n) = 2^{n}$ e as respectivas técnicas de cálculo para o valor da função P, para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10$. A segunda folha traz o gráfico do número de partes em função do número de dobras.

Durante suas explicações, a professora utilizou os termos: potência de base dois, tabela, regularidade, a função P, a função de dobrar, máquina, variável dependente, variável independente, eixo das abscissas, eixo das ordenadas, pontos não alinhados, não há $\sqrt{2}$ dobras.

Para a atividade *Brincando no parque*, nas folhas, há uma tabela com as colunas: *número de brinquedos* e *gasto total*; uma máquina, nomeada de G; duas expressões algébricas: $G = 0{,}50n + 2{,}00$ e $G(n) = 0{,}50n + 2{,}00$ e as respectivas técnicas de cálculo para o valor da função G, para $n = 0, 1, 2, 3, 12{,}16$ e o gráfico do gasto total em função do número de brinquedos.

A professora explicou as duas técnicas, disse que o gasto dependia do número de brinquedos e apresentou o valor da entrada no parque como constante: "Nesses termos, a constante 2 é o ingresso". Mostrou o gráfico e chamou a atenção dos alunos para a necessidade da escala e o fato de não poder unir os pontos: "E por que não posso unir os pontos? Porque não tem meio brinquedo. Tenho que olhar o eixo das abscissas; a variável independente é que vai dizer se posso unir".

Para a atividade *Almoçando no restaurante*, nas folhas, há as expressões algébricas $V = 13x$, $V = 13x + 1{,}50$; $V = 12x$ e $V = 14x$. Para cada uma delas, encontra-se uma tabela com as colunas indicando as grandezas *massa* e *preço* e uma máquina nomeada de V. São apresentados os gráficos das funções: $V = 12x$, $V = 13x$ e $V = 14x$, utilizando o mesmo sistema de coordenadas cartesianas e os gráficos das funções: $V = 13x$ e $V = 13x + 1{,}5$, utilizando o mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

Ao mostrar os gráficos das funções: $V = 12x$, $V = 13x$ e $V = 14x$, a professora explicou por que se podem unir os pontos e completou: "Quando aumenta o preço, aumenta a inclinação da reta". Ao mostrar os gráficos das funções: $V = 13x$ e $V = 13x + 1{,}5$, introduziu a noção de translação: "Olha, subiu 1,5 na graduação. Eu arrastei a reta aqui".

Na revisão da atividade *Esvaziando reservatório*, a professora retomou a tabela, afirmou que "Para encontrar a vazão, eu preciso de duas grandezas: volume e tempo" e chamou a atenção para o sinal: "-200, porque vai tirando 200 litros por hora". De uma maneira informal, Margarida introduz as noções de função crescente e decrescente. Sem muita clareza e precisão, comparou as situações do restaurante, do forno aceso, que tratam de funções polinomiais do 1º grau e crescentes, com a situação em estudo, que trata de uma função decrescente, pois dizia respeito ao volume de água de um reservatório, que perde 200 litros de água por hora:

> No almoço, a reta subia; no forno, aumenta o tempo, aumenta a temperatura. Neste é ao contrário: quanto mais tempo, menos volume de água, aumenta aqui, diminui lá. A função é decrescente. No instante zero, tinha 1000 litros e, no instante 5 horas, tenho zero litro. (Professora Margarida, 20/10/2004).

Consideramos que uso da expressão “reta que subia” tem uma conotação de movimento, direção e sentido e pode levar o aluno a fortalecer uma idéia errônea de gráfico de função como uma trajetória de pontos.

A professora também mostrou a expressão algébrica da função que fornece o volume de água no reservatório em função do tempo, que é uma função definida por duas sentenças, tarefa que não consta da versão que se encontra no ANEXO B.

Na retomada da atividade que mostra a máquina idealizada por uma menina chamada Rosângela, a professora Margarida quis introduzir as noções de domínio, de contradomínio e de conjunto imagem, indo além da proposta inicial da seqüência de ensino.

A professora Margarida foi aplaudida pelos alunos no final desta apresentação, pois eles perceberam a sua boa vontade, apesar de alguns tropeços na fala. A seguir, destacaremos alguns pontos dessa apresentação.

As folhas de *flip-chart* constituem um material instrucional diferente daquele encontrado nos livros didáticos de oitava série porque, para cada atividade, há tabela(s), gráfico(s), expressões algébricas e desenho(s) de máquina(s) com entrada e saída. Esse material amplia o alcance das atividades propostas na seqüência de ensino, que se tornam o fio condutor para conceituar função como máquina, não somente para uma determinada máquina (máquina da Rosângela), descrita na atividade *Função como máquina* (veja ANEXO B).

Aparecem os ostensivos $\mathrm{P(n), G(n), V(x)}$ e $\mathrm{f(u)}$. Lembramos que, no início do projeto, alguns professores não conseguiam utilizar corretamente o ostensivo $f(x)$, outros sentiam antipatia ou rejeição. E agora eles conseguem dar significado e manipular tais ostensivos com a ajuda da máquina de entrada e saída.

Na apresentação, a professora identificou, para cada situação, a variável independente e a variável dependente; diante dos gráficos; indicou qual é a variável representada no eixo das abscissas, qual é aquela representada no eixo das ordenadas, percebendo que não poderia se furtar a fornecer essas indicações.

Lembramos que essa questão sobre dependência foi centro de alguns debates nas fases anteriores.

A professora Margarida citou as situações de proporcionalidade, mas não estabeleceu uma relação entre uma tabela de proporcionalidade e as características do gráfico correspondente.

O fato importante é que ela, ao fazer a apresentação, foi e voltou com as folhas, em uma tentativa de integrar os diversos tipos de tarefas que compuseram a seqüência elaborada pelos professores em torno do conceito de função. Este é o produto final de todo um processo de re(construção) do conceito de função.

Dessa forma foi institucionalizado o conceito de função nessa classe e assim terminou o quinto momento de estudo, segundo Chevallard (1999). O todo apresentado pela professora-formadora foi uma organização didática local, cujo discurso tecnológico diz respeito ao conceito de função.

Bosch *et al* (2004) introduzem a noção de organização matemáticas local relativamente completa, salientando que essa noção de "completude" é relativa, pois é uma questão de grau. Dentre os sete indicadores do grau de completude, encontra-se a integração dos tipos de tarefas. Segundo os autores, em uma organização matemática local, convivem necessariamente vários tipos de tarefas, relacionados entre si. O grau de completude depende da integração entre os distintos tipos de tarefas e dos vínculos existentes entre eles. Quanto mais isolados estão os tipos de tarefas que compõem uma organização local, menos completa ela se torna.

Acreditamos que essa integração, mesmo que parcial, só foi alcançada após um processo que se iniciou em maio e terminou em outubro de 2004: abrange desde os primeiros debates, a cópia de atividades, a aplicação do piloto, a reformulação, a aplicação da seqüência até a institucionalização final. Assim, de uma maneira totalmente inovadora, institucionalizou-se o conceito de função para uma classe de oitava série.

2.4.4. Encerramento da formação

A última reunião ocorreu no dia 22 de outubro de 2004 e contou com a participação de quatro pessoas: César, Juliano, Margarida e Bruna. Eles comentaram sobre a facilidade com que os alunos resolveram a atividade envolvendo palitos. Alguns acreditavam que, pelo fato de a tabela terminar com dez quadrados, quem determinou trinta e um palitos estava com a lei nas mãos. Outros pensavam que a resposta dada ao problema foi por causa da própria seqüência.

Sobre a releitura das atividades feita pela professora Margarida, na última sessão com os alunos, o professor César afirmou: “A função como máquina está mais clara” e confessou que ele e Rosa nunca tinham discutido entre eles as suas inseguranças sobre função, “sobre falar e escrever $f(x)$” e que, no momento, sentia-se mais seguro para lidar com os alunos.

Esse depoimento do professor César está bem distante daquela disputa verbal ocorrida na primeira fase, quando disse que a suas atividades estavam melhores do que aquelas da Rosa. Evidencia-se, dessa forma, que as questões de gênero foram superadas.

Além disso, notamos que ele deixou de depreciar o aluno, uma tônica durante a primeira fase. Agora temos um professor perplexo porque os alunos não saem da sala de aula, mesmo após o sinal.

Nessa reunião, disponibilizamos cópias dos protocolos dos alunos para que todos pudessem analisar a produção realizada. O professor Juliano mostrou-se particularmente interessado na atividade *Almoçando no restaurante por quilo*, pois não pôde estar presente no dia em que ela foi aplicada, pelo fato de não ter sido dispensado de suas obrigações para participar de um projeto. No final, ele se surpreendeu com aquilo que via: “Foi mesmo um aluno quem fez estas anotações e gráficos?!”.

Sobre a experiência adquirida durante esse processo de formação continuada, o professor Juliano, criticando a sua formação inicial, perguntava-se como se poderia “saber tudo isso”, a partir da definição de função dada na faculdade.

Esse desabafo a respeito de sua formação inicial, esse distanciamento em relação aos conhecimentos adquiridos anteriormente, esta dimensão crítica pode desempenhar um papel importante na busca da autonomia profissional, de acordo com Tardif (2002, p.100).

Além disso, o professor Juliano constatava seu próprio crescimento: “Fomos olhando nos livros, a idéia veio de lá, mas mudou totalmente a idéia do livro. A gente mudou, criou atividades. Só isso foi uma mudança enorme.” (Professor Juliano, 22/10/2004).

Lembramos que uma das primeiras propostas do professor Juliano fora mandar o aluno pesquisar a palavra função em dicionário, uma repetição de antigas práticas. O envolvimento desse professor ao longo do processo de elaboração da atividade do restaurante - desde o primeiro esboço feito em maio, descrito nas fases anteriores, até a leitura dos protocolos dos alunos - modificou seus pontos de vista.

Segundo Ponte (1992, p.220), mudanças profundas no sistema de concepções só se verificam perante abalos muito fortes, geradores de desequilíbrios. Para esse autor, isso ocorre devido às vivências pessoais intensas, como a participação num programa de formação altamente motivador ou numa experiência com uma forte dinâmica de grupo. Saber o quão forte ou profunda foi essa mudança no professor Juliano, somente um acompanhamento posterior poderá averiguar.

César, consciente de sua formação fragmentada, afirmou que o trabalho em grupo, com idas e vindas, com situações-problema, fez com que ele conseguisse “misturar disciplinas, unindo uma coisa com outra” e enfatizou que esse é o caminho adequado para uma formação continuada de professores.

Margarida lembrou que, anteriormente, só propunha aos alunos problemas do tipo “Dada a função $f(x) = -2x + 4$, esboce o gráfico, mostre o coeficiente angular e linear” e admitiu que “essa taxa de variação, já vimos, mas não ficou. Nós não usamos no dia-a dia e não aplicamos na nossa aula”. César confessou que não tratava de taxa de variação em sala de aula porque tinha medo.

Os depoimentos dos professores nessas duas últimas reuniões mostraram que eles tinham consciência de sua própria evolução. Suas declarações fizeram-nos acreditar que acompanhar e observar a aplicação de uma atividade na qual foram investidos tempo, dedicação além de uma participação ativa nos debates posteriores, foi fundamental para o desenvolvimento como profissionais.

A satisfação em ver sua produção aplicada em sala de aula; em ter tido a oportunidade de observar os resultados obtidos; em ter sentido a valorização de seu trabalho pelo colega, foram fatores que contribuíram para a realização dos participantes como professores e investigadores da prática.

Percebemos que estavam cansados. Todos tiveram um trabalho extra para atuar como observadores e / ou formadores, pois ninguém foi dispensado das suas aulas para participar da aplicação da seqüência de ensino.

CONCLUSÕES

Diversas inconsistências podem ser constatadas na formação do professor de Matemática do ensino fundamental e médio. Estas motivaram a realização deste trabalho, cujo propósito foi acompanhar um grupo de docentes na (re)construção do conceito de função. A tarefa dos participantes, conforme se registrou no capítulo 2 da Parte II, era preparar uma seqüência didática que pudesse ser aplicada a classes de oitava série.

Estas considerações finais pretendem retomar aspectos da pesquisa que acreditamos relevantes, tais como: fundamentação teórica e metodológica, a própria realização da pesquisa, os principais resultados observados, as contribuições deste trabalho para a comunidade acadêmica e as novas perspectivas de estudo sugeridas.

Fundamentação teórica e metodológica

Utilizamos, para fundamentar o trabalho, a *Teoria Antropológica do Didático*, desenvolvida por Yves Chevallard (1999), que permitiu modelar o conceito de função, de forma eficiente, em termos de organizações matemáticas.

Uma organização matemática ou *praxeologia* é constituída de pelo menos uma tarefa; de técnica(s) para executá-la; de uma tecnologia que explica a técnica, de uma teoria que, por sua vez, justifica a tecnologia.

Esse referencial permitiu analisar de forma consistente, em livros didáticos de oitava série, cada uma das organizações matemáticas, em torno das concepções de função: interdependência de grandezas, máquina de entrada e saída, expressão analítica, correspondência entre elementos de dois conjuntos e padrão de regularidade de seqüências numéricas ou geométricas. A noção de concepção adotado nesta tese possui o mesmo significado proposto por Artigue (1989), uma vez que ela evidencia determinadas propriedades do objeto matemático estudado.

A contribuição da teoria formulada por Chevallard foi importante para acompanhar e analisar, passo a passo, e de forma estruturada, o trabalho dos docentes envolvidos em um projeto de formação continuada de professores. No projeto aqui exposto, eles construíram e aplicaram uma seqüência didática para o ensino e aprendizagem de função em uma classe de oitava série do ensino fundamental da rede pública do Estado de São Paulo. O acompanhamento e a análise foram feitos com base nas organizações matemáticas mobilizadas pelos professores em torno das concepções de função.

A escolha dos conteúdos a serem desenvolvidos na organização matemática destinada a ensinar função a um aluno de oitava série sobre função foi feita pelos professores. Essa escolha levou à elaboração de organizações didáticas, que são as respostas à questão: "como colocar em prática, na sala de aula, o ensino dessas organizações matemáticas?". Para tanto, eles precisaram procurar respostas às suas próprias perguntas, como por exemplo: como iniciar uma seqüência, como escrever um enunciado ou uma tarefa, quais tarefas pedir, como pedir uma justificativa. Ou ainda resolver dúvidas como: deve-se (ou não) pedir ao aluno uma explicação a respeito da resolução de uma tarefa? Qual a melhor ordem das tarefas para uma determinada atividade? Qual a melhor ordem das atividades para organizar a seqüência?

Observarmos que, inicialmente, as decisões tomadas pelos professores quanto "ao que ensinar" e "como ensinar" eram baseadas nas próprias concepções de ensino de Matemática. Para melhor compreender esses aspectos, utilizamos a descrição e a identificação das diferentes tendências pedagógicas do ensino da disciplina no Brasil, elencadas por Fiorentini (1995). Alguns professores relutaram em abrir mão da sua forma de trabalho, o que vai ao encontro da explicação de Ponte (1992), para quem as concepções podem ser vistas como pano de fundo organizador dos conceitos, constituindo "miniteorias."

Neste trabalho, o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo sobre funções, categorias propostas por Shulman (1986), foram revisitados em termos de organização matemática e organização didática.

Para definir os diferentes saberes presentes na prática docente, utilizamos a tipologia proposta por Tardif (2002), que afirma ser o conhecimento do docente, um saber plural, formado pelo amálgama de saberes oriundos da formação profissional, de saberes disciplinares, curriculares e experienciais, em que a *dimensão temporal* não pode ser desconsiderada. Assim, identificamos diversos componentes da vida profissional dos docentes participantes do projeto: onde e quando ocorreu a formação inicial; seu envolvimento em outros projetos de formação continuada; tempo de serviço no magistério; experiência anterior em ministrar aulas sobre funções e, ainda, o alcance de seus conhecimentos curriculares.

A palavra *saber*, para Chevallard, tem uma outra conotação. Assim, segundo esse teórico, quando falamos em saberes, estamos nos referindo ao saber referente a uma organização matemática, cujos ingredientes são: tarefa, técnica, tecnologia da técnica e teoria.

O método de pesquisa utilizado considera alguns pressupostos da pesquisa-ação, que postula a explicita interação entre pesquisadores e os participantes da pesquisa. Além disso, conforma-se aos moldes de uma ação-pesquisa, segundo Barbier (2004), uma vez que nós decidimos o tema, sugerimos a elaboração e aplicação de uma seqüência didática e tendo sido as propostas aprovadas e bem vindas pelos participantes, que a partir desse momento, passaram a ser os agentes do processo. Cabe registrar uma peculiaridade dessa experiência: os professores, por conta própria, decidiram fazer um experimento-piloto.

Buscamos fundamentação de nossas práticas de formação em Lastória e Mizukami (2002), que consideram a construção de materiais instrucionais como um caminho para aprendizagens docentes e também em Nóvoa (1992), que salienta a importância da formação continuada estar engajada em práticas coletivas.

Execução da pesquisa

A formação ocorreu nas dependências de uma universidade filantrópica, com encontros semanais, ao longo de dezoito semanas. A aplicação do experimento-piloto e da seqüência didática para o ensino e aprendizagem de função ensino ocorreu em uma escola pública da Rede Estadual de Ensino localizada na região metropolitana da Grande São Paulo.

Dividimos o tempo da formação em quatro fases. Na primeira fase, após alguns debates coletivos, os professores passaram a trabalham em grupo; na segunda fase ocorreu o experimento-piloto acerca do qual são feitas discussões; na terceira fase, devido à diminuição do número de participantes, os remanescentes se reagrupam em uma única equipe e prepararam a seqüência de ensino; a quarta e última fase correspondeu à aplicação da seqüência de ensino. Os professores atuaram como observadores ou como formadores nas segunda e quarta fases.

Embora contradizendo a opinião de alguns a respeito da necessidade de manter o *locus* da formação na escola, o trabalho foi realizado propositalmente em dois locais distintos, na Universidade e na Escola. Com isso, o campo de visão dos docentes ganhou uma amplitude maior, pela natural oxigenação da mente em receber novos conhecimentos e pelo contato com outros pesquisadores.

Principais resultados

Os resultados obtidos comprovam a hipótese formulada e se constituem em respostas plausíveis e factíveis para a questão de pesquisa.

A questão de pesquisa pode ser resumida em "O que significou para um grupo de professores de ensino fundamental e médio da rede pública do Estado de São Paulo elaborar coletivamente uma seqüência didática sobre função e aplicá-la em classe?" Este trabalho apóia-se na crença de que a elaboração coletiva e as análises de uma seqüência didática sobre funções e sua posterior aplicação em sala pudessem deflagrar um processo de construção de um conjunto de saberes docentes. Estes se referem ao objeto matemático, ao saber pedagógico do conteúdo, à reflexão sobre a gênese do objeto matemático, sobre a importância desse conhecimento dentro do currículo e aos conhecimentos sobre as potencialidades dos alunos.

A complexa arquitetura da formação continuada de professores, cuja descrição e análise se encontra na parte II, capítulo 2, propiciou condições para que eles construíssem um saber docente sobre o conceito de função, que considera o conhecimento do conteúdo, o conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento da evolução histórica do conceito. Além disso, a atuação como observadores e/ou formadores possibilitou não só um novo olhar sobre as potencialidades dos alunos, mas também um olhar sobre si mesmos.

Essa forma de trabalho permitiu que os professores reconstruíssem e ampliassem seus conhecimentos pedagógicos sobre o conteúdo matemático, ou seja, sobre o objeto matemático *função*, simultaneamente à elaboração da seqüência didática para o ensino e aprendizagem de função. Pudemos perceber que o conhecimento pedagógico do conteúdo se fortaleceu nas organizações didáticas formuladas pelos professores.

Nesse período, as discussões sobre o objeto matemático *função* englobaram: as noções de dependência e a diferença, em uma dada situação, entre variável independente e dependente; as noções de correspondência, as vantagens (ou desvantagens) oferecidas pelos diagramas de Venn; a leitura e análise de tabelas; a leitura pontual e global de gráficos; a noção de escala e sua utilização na construção de gráficos; as funções definidas por mais de uma sentença; a identificação do coeficiente “a” em $y = ax + b$ como taxa de variação; o cálculo deste coeficiente a partir do gráfico da função definida por $y = ax + b$; a função linear como modelo matemático da proporcionalidade; a noção de função inversa; a concepção de função como máquina; as funções cuja variável independente é o tempo; as noções de domínio, contradomínio e conjunto-imagem de uma função; a visualização de configurações geométricas e o processo de generalização.

Este trabalho expõe as dificuldades, que chegaram à rejeição e antipatia dos professores em manipular o ostensivo $f(x)$, e sua posterior inclusão de tarefas que pedem o cálculo do valor de uma função em um ponto em uma das atividades propostas aos alunos. As discussões sobre variáveis levaram à inclusão de tarefas que pediam a identificação das variáveis em atividades da seqüência de ensino; as dificuldades em compreender correspondência e seu caráter arbitrário; sobre funções definidas por várias sentenças levam à criação e inclusão de uma atividade que recai nessa situação; as discussões sobre taxa de variação levam a tomada de consciência da necessidade de introduzir e utilizar esse conceito em sala de aula. Também mostra o encaminhamento das questões de visualização de padrões geométricos, com o objetivo de obter a expressão algébrica da função.

Os professores também estabeleceram gradativamente relações com o gráfico de função: sua construção, leitura e interpretação. Com referência à construção, é importante observar, do distanciamento inicial, chegou-se, na versão final da seqüência, à inclusão da tarefa em seis atividades. No que diz respeito à leitura e interpretação, nota-se que a sétima e última atividade da seqüência didática, escolhida dentre outras, inclui leitura e interpretação de um gráfico. A preocupação com escala aparece nos gráficos que compõem o material didático (folhas de *flip-*

chart) preparado para o fechamento geral das atividades na sala de aula. Em relação à tabela, também verificamos o fortalecimento das relações com esse objeto: inicia-se com a omissão do termo nos mapas conceituais; passa-se pelas discussões sobre organização de dados, pela compreensão desta representação por parte dos alunos e chega-se à inclusão de tarefas sobre tabelas durante a construção de atividades.

Um ponto importante é que, à medida que os professores se sentem mais seguros sobre uma determinada noção, eles a incluem durante a (re)formulação das atividades.

No início da formação, as organizações didáticas são aquelas propostas pelos autores de livros didáticos ou de apostilas. A seguir, os professores acumulam conhecimentos com a cópia de atividades, análise *a priori* e escrita de objetivos de algumas das atividades que compõem o experimento-piloto ou com a cópia e posterior construção de novas atividades.

Durante a terceira fase, eles investem suas energias na elaboração da seqüência didática para o ensino e aprendizagem de função. Descartam, reformulam ou criam novas atividades; preocupam-se com a redação de tarefas sobre tabelas, gráficos, expressão algébrica; questionam-se se devem ou não pedir a identificação das variáveis; se devem pedir explicações ou justificativas para determinados resultados; querem saber a ordem de apresentação das tarefas em cada uma das seis atividades trabalhadas e assim como a ordem em que elas devem ser aplicadas. Dessa forma, cada atividade tem sua história, desde a cópia extraída de algum livro ou apostila, ou esboço inicial, até a redação final.

As organizações didáticas elaboradas coletivamente trazem a marca das experiências anteriores, pois há professores que já haviam ministrado aulas sobre função. Há as experiências acumuladas durante a formação como elaboradores, observadores e formadores do experimento-piloto; e o tempo de duração da formação e da sinergia do conjunto. Elas são situadas, porque foram construídas e utilizadas em uma situação particular de trabalho.

Ao acompanharmos os momentos didáticos, vemos a evolução dos professores, desde a cópia de atividades, de elaboração de roteiros, de construtos inacabados ou abandonados, a construção ou reconstrução de atividades, até o momento de institucionalização.

No primeiro momento didático, denominado por Chevallard (1999) de mimético-cultural, ocorreu o (re)encontro do objeto matemático *função* a partir de leituras individuais de livros didáticos, da exposição de opiniões pessoais sobre a maneira como ele é apresentado nos livros. A seguir, houve grupos de professores que fizeram leitura em voz alta de atividades copiadas de livros antes de conseguirem apresentar uma produção de próprio punho, sendo que um dos grupos verbalizou a importância do escrever juntos.

No final da aplicação da seqüência de ensino, a professora / formadora, ao preparar e apresentar uma institucionalização para os alunos, junto com outro professor que trabalha na mesma escola e foi participante da formação, procurou fazer uma articulação dessas organizações didáticas. Dessa forma, emerge o conceito de função como fruto de uma articulação das organizações didáticas construídas em torno dos tipos de tarefas que constam na seqüência de ensino: conceituar *função* como padrão de regularidade de seqüências geométricas, como interdependência de grandezas, como máquina de entrada e saída, sob a égide de função como máquina.

Ressaltamos que esse momento didático não se constituiu apenas uma retomada ou revisão das atividades trabalhadas pelos alunos, mas também uma nova leitura, um saber, em termos chevallardianos. A articulação, que jazia escondida, emerge. Ela é resultado de todo um processo de formação, de experiências anteriores ao ministrar aulas sobre o assunto.

A oportunidade de participar como observadores, tanto no experimento-piloto, como durante a aplicação da seqüência, permitiu que os professores pudessem identificar pontos de dificuldades em um grupo de alunos, as iniciativas tomadas, a produção discente. Após essa fase, foi possível refletir sobre a observação, individualmente e depois coletivamente, ao passo que, durante a aplicação da seqüência, reflexão coletiva e observação foram intercaladas.

Os professores tiveram a oportunidade de ampliar seus conhecimentos sobre as dificuldades dos alunos, bem como sobre suas potencialidades. Eles puderam perceber que tinham subestimado a capacidade dos estudantes, na atividade que tratava de função como padrão de regularidade, acompanhada de palitinhos para formar o padrão. Ela foi considerada pelos professores mais difícil daquela intitulada *Função como máquina*, que incluiu a manipulação do ostensivo $f(u)$. A surpresa de um dos professores ao acessar os protocolos dos alunos mostrou também que ele tinha subestimado a competência dos alunos em lidar com gráficos.

Outro ponto que chamou a nossa atenção foi a polêmica, que surpreendeu os professores (observadores e formador) e envolveu todos os presentes. Ela foi iniciada por um aluno, a propósito do zero e do nada, relacionados com um cronômetro que continua a marcar o tempo mesmo após o esvaziamento da caixa de água, durante o fechamento da atividade *Esvaziando reservatório*. Percebeu-se que há alunos que conseguem sustentar uma argumentação própria e debater suas idéias com os professores.

Os mestres que haviam subestimado a capacidade dos alunos, começaram a mudar suas opiniões a partir da observação do experimento-piloto, mas a constatação ocorreu nos momentos em que observavam a aplicação da seqüência de ensino.

As declarações dos professores, relatadas após a aplicação do experimento-piloto e da seqüência de ensino, mostram que caminharam juntos: o que eles conhecem acerca do aluno e o fato de valorizarem não só esse aluno mas também seu próprio trabalho. Provou igualmente ser possível romper a imagem social da escola pública, habitualmente estigmatizada em relação ao seu corpo docente e discente. A nossa formação abriu possibilidades para que tanto o professor quanto o aluno se sentissem valorizados e ressaltou a importância da presença da universidade em todos os níveis de ensino.

Para acompanhar a aplicação da seqüência de ensino, fornecemos aos professores / observadores uma ficha de observação para cada uma das atividades. Se tivéssemos tido a oportunidade de fazer uma terceira aplicação em sala de aula, um avanço seria levar os professores a criar suas próprias fichas de observação para que eles pudessem se envolver mais integralmente como investigadores das práticas discentes.

A intrincada trama de vivências, trabalhos coletivos e reflexões levou os professores não só à elaboração de enunciados e tarefas para as atividades que compõem a seqüência de ensino, mas também a perceber e apresentar articulação de tipos de tarefas em torno do conceito de função, um discurso que vai além daquilo que se encontra nos livros didáticos analisados. Assim, o professor se tornou produtor de conhecimentos e não só um técnico que aplicou uma tarefa proposta por um livro didático.

Ressalte-se que alguns professores têm consciência de que sua submissão a uma exaustiva jornada de trabalho – devido à baixa remuneração por hora-aula, leva-o a não acompanhar a atuação dos alunos. Além disso, ouvimos críticas à transformação das Horas de Trabalho Pedagógico Coletivo em horas de trabalho burocrático, para atender às necessidades das instâncias superiores. Conseguidas após árdua luta - de que a memória das novas gerações de professores não tem registro – as HTPC, como foram conhecidas, devem destinar-se ao desenvolvimento profissional dos docentes. Ou seja; ao estudo, à discussão de assuntos pertinentes à sua disciplina. Desse modo, o emprego que vem sendo dada a elas desvirtua seu objetivo original.

A leitura dos capítulos que compõem esta tese mostrou que o trabalho colaborativo foi uma conquista. O início foi marcado por diferentes níveis de participação, não só individual, mas também nos três grupos que se formaram, de maneira espontânea, na primeira fase. O grau de participação começou a mudar a partir da aplicação do experimento-piloto, quando todos os professores comprometidos com a formação e o projeto em andamento puderam estar presentes como um grupo interessado em verificar o trabalho dos alunos. A partir da terceira fase, passou-se a desenvolver um trabalho colaborativo, com o objetivo de finalizar e aplicar uma seqüência de ensino. Um marco importante, identificado por alguns participantes, foi a escrita coletiva de atividades.

Construir e aplicar uma seqüência didática para o ensino de função foi um árduo desafio para os professores. Ao final, eles avaliaram o significado particular dessa vivência: segurança para tratar de função na sala de aula, para conversar sobre o tema com o colega; satisfação por ter conseguido criar atividades, com a própria dinâmica da formação o que, segundo os professores, possibilitou unir conhecimentos fragmentados. Dessa forma, acreditamos ter contribuído para o desenvolvimento profissional dos professores que chegaram até o final do projeto e também para a formação inicial das duas estudantes.

A partir dos depoimentos dos professores, pudemos perceber que a criação ou a reformulação de atividades foi crucial: "Aqui a gente aprende até a elaborar o nosso próprio material"; "Fomos olhando os livros, a idéia veio de lá, mas mudou totalmente a idéia do livro. A gente mudou, criou atividades, só isso foi uma mudança enorme."

O processo de mudança dos professores foi gradual, iterativo e pessoal. A alteração ficou patente, quando se analisou o comportamento dos professores em relação ao seu apego às próprias concepções. No início da formação, alguns deles acreditavam que os alunos assimilavam a linguagem algébrica, apenas ao tomar contato com textos onde aparecesse a expressão "linguagem algébrica", seguida por um exercício resolvido; nessa linha de raciocínio, os alunos resolveriam facilmente outros "problemas" do mesmo estilo; um grupo de professores acreditava que fosse preciso começar com a pesquisa da palavra *função* no dicionário; outro insistia em que se deveria começar a seqüência pela *batalha naval*. A seqüência final aplicada foi bem diferente de tudo isso. Ela desafiou os alunos com seus pedidos de justificativas, que explicassem novas situações.

Os alunos também se beneficiaram da formação, pois eles se interessaram pelas atividades. Debruçaram-se sobre as atividades propostas do grupo de professores e aprenderam a trabalhar em grupo. O acompanhamento de suas produções e a posterior leitura dos seus protocolos evidenciou que eles foram criativos em muitas das explicações ou justificativas sobre dependência e que suas dúvidas sobre a identificação das variáveis independente e dependente em uma dada situação foram as mesmas dos professores no início da formação. O ganho desses alunos foi que a identificação das variáveis foi apontada pelo professor / formador ao longo das sessões, em especial, durante a construção de gráficos na lousa e na apresentação final. Dessa forma, houve o resgate do ingrediente de dependência.

Restrições

Cabe registrar algumas restrições que se constituíram em limitações da pesquisa.

Uma delas diz respeito à motivação dos professores em relação à leitura das sugestões sobre o ensino e aprendizagem de função encontrados nos PCNs de

Matemática. Consideramos difícil a leitura desse documento, uma vez que ele pressupõe um professor que conheça tanto o conteúdo específico, quanto seu viés pedagógico. Além disso, percebemos que não há uma cultura que dê importância à leitura de documentos oficiais.

Outra situação, com a qual não contávamos, foi a evasão de professores após o período de férias escolares do meio do ano. No retorno às aulas, apenas a metade deles continuou até o final dos trabalhos. Não é possível afirmar que a evasão tenha causado um desvio dos resultados, mas o dado pode servir de recomendação para que trabalhos similares sejam executados dentro de um mesmo semestre.

Contribuições

Uma das importantes contribuições deste trabalho é expor como uma ação-pesquisa voltada para o desenvolvimento profissional de professores de Matemática deve ser formulada. Desse modo, sua originalidade reside, entre outros, no fato de usar uma metodologia envolvendo dois aspectos importantes:

- uma investigação sobre a formação de professores tendo como pano de fundo o conceito de função;
- uma formação continuada de professores que articula as dimensões didática, conceitual e uma análise critica de suas práticas docentes.

Propomos, além do engajamento espontâneo e da concentração em torno de um único tema, a elaboração e aplicação de materiais instrucionais em sala de aula; a atuação do professor em diversos papéis: alternadamente, de construtor e analista da seqüência de ensino, para formador ou para observador e analista critico do que foi observado e sua própria prática docente; retorno ao papel de construtor e analista e assim sucessivamente; a socialização das reflexões individuais sobre a observação. A adoção dessas medidas permitirá que os professores possam reorganizar e divulgar uma nova maneira de introduzir o conceito de função em uma oitava série. Acreditamos que os mesmos benefícios seriam obtidos com um outro tema e esperamos que os professores que participaram da pesquisa usem seus achados em termos de aprendizagem didática e matemática para a construção, a análise, a experimentação de novas organizações didáticas para o ensino de outras organizações matemáticas de ensino fundamental ou do ensino médio.

Consideramos também que a formação continuada de professores deve acontecer tanto no ambiente universitário como na escola. Lá o professor pode ter acesso ao acervo de livros, à copiadora xerográfica, à troca de idéias com diversos pesquisadores e não se sentir asfixiado pelo ambiente escolar, pois há estabelecimentos que, em vez de oferecer um ambiente favorável à pesquisa, desestimulam intelectualmente seu quadro docente. Na escola, aplicar seqüências de ensino. Esse ir e vir, da escola para a universidade, da universidade para a escola, sem privilegiar um ambiente em detrimento do outro, propicia melhores condições para uma formação continuada.

Outras contribuições:

- Nova abordagem do tema *função* no ensino fundamental

O conceito de função pode ser introduzido em uma classe de oitava série, sem que se apresente uma definição formal, mas sim organizações em torno de tarefas relacionadas às diversas concepções do tema, considerando-se a concepção de função como máquina como eixo articulador.

A nossa investigação trouxe à tona um processo de ressignificação dos ostensivos $f(x)$ e f, vivenciado pelos professores a partir da concepção de função como máquina de entrada e saída e a inclusão desses ostensivos na atividade intitulada *Função como máquina*. Ter investigado a produção discente nessa atividade sinalizou para a possibilidade de introduzir *f* na organização pontual, cujo tipo de tarefa é conceituar função como máquina em materiais instrucionais para o ensino fundamental e médio, bem como para a formação de professores.

- Detalhamento do primeiro momento didático em uma formação continuada de professores

No re-encontro com o objeto matemático *função*, os professores folhearam alguns livros, emitiram opiniões em uma plenária, copiaram atividades ou esboçaram roteiros para o ensino de função. A prática social da leitura de atividades extraídas de algum material didático, de uma maneira geral, foi seguida de uma escrita coletiva ou de atividades com alguma inovação ou de objetivos ou de uma análise *a priori* de atividades selecionadas. Um dos grupos que se formou inicialmente se conscientizou da importância do “escrever juntos” a formulação de uma atividade.

Constatou-se que a cópia, seguida de práticas individuais de estudo e reflexão de práticas sociais de leitura: "ler em voz alta" e de escrita: "escrever juntos" são atividades essenciais para a formação continuada de professores. Elas se complementaram e seus efeitos transformadores puderam ser vistos ao longo da formação. Essas práticas não são descritas por Chevallard (1999).

Entretanto, é importante ressaltar que constitui fator de risco, o fato de que, se não forem exercidas continuamente, cairão no ostracismo e os professores não poderão perpetuar seus benefícios. Consideramos, portanto, a necessidade de estruturar o processo de letramento dos professores (ler e escrever individual e socialmente), para que eles possam construir sentidos e relações.

Além das fragilidades da formação inicial, frequentemente a trajetória escolar desses professores se restringe a copiar na lousa o texto encontrado no livro didático. Acessar a razão dos fatos, através da fala, mesmo que seja um monólogo, pode levar a algum tipo de reflexão, melhor ainda se houver um trabalho colaborativo entre colegas.

- Inserção, no processo formativo dos professores, de atividades específicas destinadas ao desenvolvimento da criatividade

A criatividade é uma característica do ser humano mas, para florescer, precisa de condições propícias. Como vimos, somente com um trabalho constante, persistente e coletivo com os professores, ultrapassa-se uma prática pedagógica calcada na cópia. Professores criativos podem seguramente contribuir para a formação de alunos criativos que, por sua vez, poderão se tornar cidadãos com possibilidades de enfrentar os desafios de uma sociedade complexa.

Implicações e perspectivas futuras

O processo de formação continuada – que se iniciou com a leitura superficial de alguns livros didáticos, apresentação de cópias de atividades, de roteiros e chegou à formação de um canteiro de obras destinado à confecção de organizações didáticas e chegar à formulação final da seqüência didática para o ensino e aprendizagem de função em uma classe de oitava série – mostrou a necessidade de uma reflexão sobre os livros utilizados na formação inicial do professor, bem como sobre essa formação.

Os livros de cálculo, análise ou álgebra tratam da definição formal, como se todo o processo de construção de uma organização matemática em torno do objeto *função* tivesse acontecido em algum momento da vida do estudante. Parece que a eles basta definir *função*, dentro dos moldes da transmissão do conhecimento. Daí o caráter "mágico" de $f(x)$ ou a exclamação de um professor "Como saber tudo isso, a partir da definição de função vista na faculdade!"

Esse panorama nos leva a acreditar que os formadores de professores deveriam modificar suas práticas para o ensino e a aprendizagem de função, não mais seguindo o roteiro padrão dos livros, que partem de uma definição, mas pela construção coletiva de uma organização matemática, levando em consideração as diferentes concepções desse conceito que emergiram ao longo de sua história.

A coordenação entre as disciplinas da formação específica e de formação profissional poderia ser feita, de forma objetiva, pelo envolvimento dos licenciandos na construção coletiva de organizações didáticas, pela sua análise e pertinência nos níveis fundamental e médio. O mesmo procedimento poderia ser adotado também com outros conceitos matemáticos, uma maneira de tentar superar as fragmentações que têm ocorrido na formação dos professores.

O estudo dos fundamentos da *Teoria Antropológica do Didático* forneceria ao futuro professor um instrumento de análise de livros didáticos.

A evolução histórica das atividades que compuseram a seqüência do projeto, a sua reorganização no fechamento, bem como a breve vida daquelas que foram apenas delineadas ou que foram ignoradas pelos que não a idealizaram, levam-nos a olhar as atividades que constam nos livros didáticos de uma outra perspectiva. As organizações didáticas em torno de tipos de tarefas, idealizadas pelo(s) autor(es) de livros didáticos parecem "artefatos" prontos e imutáveis. Muitas vezes não há um texto explicativo sobre a importância das atividades, nem mesmo no manual pedagógico, que acompanha o livro do professor.

Reiteramos, portanto, a necessidade de elaborar material para a formação inicial e continuada de professores – em particular, sobre o conceito de função – que leve em consideração as organizações matemáticas e que forneça subsídios para a elaboração das organizações didáticas, uma vez que não existe uma literatura especializada sobre o assunto no Brasil, acessível ao professor.

Sugerimos um estudo detalhado do objeto matemático *tabela*, tendo em vista as discussões e dificuldades detectadas neste trabalho sobre leitura e interpretação desse recurso. Também verificamos que vieram à tona diversas questões didáticas: “Como explicar ao aluno o que é uma tabela? Como redigir uma tarefa que peça a construção de uma tabela? Como pedir ao aluno a organização de dados?”

Outro tema que merece um estudo à parte, em todos os níveis de ensino, é função linear como modelo matemático da proporcionalidade, porque observamos que, nas atividades trabalhadas pelos professores, onde esse conteúdo é abordado, as tarefas sobre proporcionalidade ficam isoladas ou nem são pedidas. Além disso, as palavras linear e linearidade não fazem parte do vocabulário corrente dos professores.

O conceito de função inversa de uma função bijetora, quanto à organização matemática requer igualmente atenção. Neste trabalho, fizemos apenas um breve relato sobre a falta, em livros didáticos, de um discurso tecnológico que envolva função inversa.

As noções de instante e de intervalo de tempo, assim como as funções temporais exigem um estudo mais aprofundado com aos alunos, porque é evidente sua dificuldade em diferenciar a noção de instante da noção de intervalo de tempo.

Sugerimos que a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, por meio da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas: restaure os objetivos iniciais que levaram à criação das Horas de Trabalho Pedagógico Coletivo, para que essas horas sejam realmente dedicadas ao estudo e desenvolvimento de projetos pedagógicos; trate o professor de forma profissional, ou seja, remunere-o pelas horas dedicadas à pesquisa em projetos desenvolvidos em universidades; crie canais de comunicação entre escolas para a divulgação de experiências ou da existência de novos materiais didáticos.

Finalizando, a formação continuada de professores deve ser considerada uma atividade perene e cabe à academia a responsabilidade de pesquisar, rever e propor continuamente novas formas de melhorar a qualidade dos docentes. Dessa forma, o efeito duradouro da formação de professores, aqui exposta, só poderá ser avaliada por meio de outros trabalhos de pesquisa, mas que envolvam os mesmos sujeitos participantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. Trad. Alfredo Bosi. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. São Paulo: PUC - SP, 2000. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.

ARTIGUE, M. Epistemologie et Didactique. Université Paris VII: **Cahier de Didirem**, n.3, 1989.

ÁVILA, G. **Introdução à Análise Matemática**. 2.ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher,1999.

________ Razões, proporções e regra de três. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro: SBM, n.8, p.1-8, 1o sem 1986.

AZANHA, J. M. P. Comentários sobre a formação de professores em São Paulo. In: SERBINO, R. V. *et al.* (ORG). **Formação de Professores**. São Paulo: Fundação Editora da UNESP, p.49-58, 1998.

BARBIER, R. **A Pesquisa-ação**. Tradução: Lucie Didio. Brasília: Liber Livro Editora (Série Pesquisa em Educação, v.3), 2004.

BELLEMAIN, P.M.B. Elaboração e experimentação de uma engenharia de formação continuada de professores de Matemática relativa ao ensino-aprendizagem do conceito de área. In: I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2000. Serra Negra. **Anais**..., SBEM, p.304-310, 2000.

BIGODE, A.J.P. **Matemática hoje é feita assim**. 8ª série. São PAULO: FTD, (Coleção Matemática hoje é feita assim), 2000.

BONGIOVANNI, V.; VISSOTO, O.; LAUREANO, J. L. T. **Matemática e Vida**. 7ª série. São Paulo: Ática, 1996.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'ativité mathématique aux ostensifs Objet d'etude et problematique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. v.19, no 1, p.77-124, 1999.

BOSCH, M.; FONSECA, C.; GASCÓN, J. Incompletitud de las organizaciones locales em las instituiciones escolares. In: **Recherches em Didactique des Mathématiques**, Grenoble, França: la Pensée Sauvage, v.24, p. 205-250, 2004.

BOULOS, P. **Cálculo Diferencial e Integral**. v.1.São Paulo: MAKRON Books do Brasil, 1999.

BOURBAKI, N. **Elementos de historia de las matemáticas**. Madrid: Aliança Editorial, 1976.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgar Blücher, 1999.

BRASIL. **LEI DE DIRETRIZES E BASES DA EDUCAÇÃO NACIONAL** - LDB n.9394 de 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. 1998. Disponível em <http://www.mec.gov.br/sef/estrut2/pcn/pdf/matematica.pdf >. Acesso em: 05 jan 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. **Programa Nacional do Livro Didático, 2005**. Disponível em <http:// www.fnde.gov.br/guiasvirtuais/pnld2005 > . Acesso em: 05 jan 2005.

CAMPOS, S.; PESSOA, V.I.F. Discutindo a formação de professoras e de professores com Donald Schön. GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D. (Org) **Cartografias do trabalho docente**. Campinas: Mercado das Letras, p.183-206, 2003.

CAVALCA, A. P. V. **Espaço e representação gráfica: visualização e interpretação**. 1997. Dissertação (Mestrado) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo,1997.

CHEVALLARD, Y. Organizer l' Etude. Strutures & Fonctions. In: 11a Ecole d' Été de Didactique des Mathematiques. 2001. Curso... Grenoble, 2001. CD-ROM.

_______________L' analise des pratiques enseignantes en théorie antropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Editions, v.19. n.2, p.221-265, 1999.

CLAGETT, M. **Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions**. Madison: The University of Wisconsin Press, 1968.

COMIN, E. **Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire**. Bordeaux, 2000. Tese de Doutorado, Universite Bordeaux, 2000.

DANTE, L.R. **Tudo é Matemática**. Livro do professor. 8ª série. São Paulo: Ática, 2002.

__________ **Tudo é Matemática**. Livro do professor. 6ª série. São Paulo: Ática, 2002.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática**. 10. ed. Campinas: Papirus Editora, 2003.

DIAS, M. S. **Reta real conceito: imagem e conceito definição**. 2002. Dissertação (Mestrado) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 2002.

DIEUDONNÉ, J. A. **Formação da Matemática Contemporânea**. Tradução: J.H. von Hafe Perez. Lisboa: Publicações Dom Quixote,1990.

________________**Foundations of Modern Analysis**. Lectures Notes 1956-57. New York: Academic Press, 1969.

DIMENSTEIN, G. Grito de Independência. **Jornal Folha de São Paulo**, São Paulo, 23/abril/2006, Caderno Cotidiano, p.C9.

DOMINGUES, H.H.; IEZZI,G. Álgebra Moderna. São Paulo: Atual,1999.

DOUADY, R. Jeux de Cadres et dialectique outil-objet. In: **Recherches em Didactique Des Mathématiques**. v.7, n.2, p.5-31, 1986.

DUBINSKY, E.; HAREL, G. The nature of the process conception of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Edit) **The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy**. Mathematical Association of America, MAA Notes and Reports Series, v.25, p.85-106, 1992.

DUVAL, R. Basic Issues for research in mathematics education. In: Twenty-fourth Annual Meeting of Psychology of Mathematics Education (PME 24), Hiroshima, JP. **Anais...**PME 24,v.1, p.55-69, 2000.

EDWARD, C.H.; PENNEY, D. **Cálculo com Geometria Analítica**, 4.ed. Tradução: Alfredo Alves de Farias. Rio de Janeiro: Prentice- Hall do Brasil, v.1,1997.

EULER,L. **L'Introduction à l' analyse infinitésimale, par Leonard Euler** (1748). Tradução de J.B.Labey, do latim para o francês. Impresso em 1797. Paris: Bachelier.

EVEN, R. Subject matter knowledge for teaching: the case of functions. **Educational Studies in Mathematics**. v.21, p. 521-544, 1990.

_______ Factors Involved in linking representations of functions. **The Journal of Matemical Behavior**. v.17,n. 1, p.105-121,1998.

FERREIRA, A.B.H. **Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa**. 3ª ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999.

FERREIRA, A.C. Analisando o desenvolvimento profissional e metacognitivo de professores de Matemática a partir de sua participação em um grupo de trabalho colaborativo. In: 27a Reunião Anual da ANPED, 2004, Caxambu. **Anais...** Caxambú, 2004. CD-ROM.

FIGUEIREDO, D.G. **Análise I**. 2.ed. Rio de Janeiro: LTC,1996.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil. **Zetetiké**. Campinas: Unicamp, ano 3, n. 4, p.1-37, 1995.

____________.Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente?In: BORBA, M.; ARAÚJO, J.L.(Org). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, p. 47-76 (Coleção Tendências em Educação Matemática), 2004.

FONTE, R.B. **Algumas concepções e dificuldades sobre o ensino e aprendizagem de funções envolvendo os contextos algébrico e gráfico e a conexão entre os mesmos**. Rio de Janeiro, 2002. Dissertação de Mestrado, PUC-RJ, 2002.

GARCIA, C. M. **Formação de professores: para uma mudança educativa**. Lisboa: Porto, 1999.

GIOVANNI, J.R.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI Jr, J.R. **A Conquista da Matemática - NOVA**. 8. série: livro do professor. São Paulo: FTD (Coleção a conquista da matemática), 1998.

GOLDENBERG, P.; LEWIS,P.; O´KEEFE,J. Dynamic representation and the development of a process understanding of function In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Edit) **The Concept of Function**. **Aspects of Epistemology and Pedagogy**. Mathematical Association of America, MAA Notes and Reports Series, vol 25, p.235-260, 1992.

GRASSESCHI,M. C.; ANDRETTA, M.C.; SILVA, A. B. S. **PROMAT: Projeto Oficina de Matemática**. 8. série: livro do professor. São Paulo: FTD, (Coleção PROMAT, Projeto oficina de matemática),1999.

HADJIDEMETRIOU, C.; WILLIANS, J. Children´s graphical conceptions: assessment of learning for teaching. In: Twenty-fiveth Annual Meeting of Psychology of Mathematics Education (PME 25), 2001, The Netherlands. **Proceedings**…Utrecht, Freudenthal Institute, v.3, p. 89-96, 2001.

HITT, F. Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of funtion. **Journal of Mathematical Behavior.** v.17, n.1, p.123-134, 1998.

IEZZI, G. DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.M.; PÉRIGO, R. **Matemática** (2º grau) volume único. Manual do Professor. São Paulo: Atual Editora,1997.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática**. 8ª série: livro do professor. São Paulo: Scipione, 1997.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA – INEP. **EDUDATABRASIL**: Sistema de Estatísticas Educacionais. Disponível em: < http://www.edudatabrasil.inep.gov.br >. Acesso em: 10/fev/2006.

JANVIER, C. **The Interpretation of complex cartesian graphs – studies and teaching**. 1978.Tese (Doutorado)- Universidade de Nottingham, Nottingham, UK, 1978.

____________Modeling and the initiation into Algebra. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Editores) **Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p.225-236, 1996.

___________ The Notion of Chronicle as an Epistemological Obstacle to the Concept of Function. **Journal of Mathematical Behavior**. v.17, n.1, p.79 -103, 1998.

KIERAN, C.; BOILEAU, A.; GARANÇON, M. Introducting Algebra by means of a tecnology-supported, funcional approach. In: BEDNAZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Edit). **Approaches to Algebra Perspectives for Research and Teaching**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p.257-293, 1996.

LASTÓRIA, A. C.; MIZUKAMI, M.G.N. Construção de material instrucional como ferramenta para aprendizagens docentes. In: MIZUKAMI, M.G.N.; REALI, A. M.R. (Org) **Aprendizagem Profissional da Docência: Saberes, Contextos e Práticas**. São Carlos: EdUFSCar, p.187-207, 2002.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. Rio de Janeiro: SBM, 1989.

_________Conceituação, Manipulação e Aplicações. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro: SBM, n. 41,1999.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM. (Coleção do Professor de Matemática), v.1, 2001.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus (Coleção Perspectivas em Educação Matemática), 1997.

LOPES, C. A. E. Educação Matemática na infância: o desenvolvimento profissional de um grupo de professoras. In: 27a Reunião Anual da ANPED, 2004, Caxambu. **Anais...** Caxambú, 2004. CD-ROM.

MARIN, A. J. Educação continuada: introdução a uma análise de termos e concepções. **CADERNOS CEDES**. Campinas: Papirus, n.36, p13-20, 1995.

MASON, J. Expressing Generality and Roots of Algebra. In: BEDNAZ, N.; KIERAN, C.; LEE,L (Edit). **Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p.65-86,1996.

MONNA, A. F. The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Borel and Lebesgue. **Arch. For Hist. of Exact Sciences**, v.9, p.57-84,1972.

MONTEIRO, C. E. F.; SELVA, A. C. V. Investigando a atividade de interpretação de gráficos entre professores do Ensino Fundamental. In: XXIV Reunião Anual da Associação Nacional de Pós Graduação e Pesquisa em Educação, 2001. Caxambu. **Anais...** Caxambu, 2001.

MONTEIRO, L. H. J. **Elementos de Álgebra**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico,1969.

MOREIRA, M. A; BUCHWEITZ, B. **Mapas Conceituais. Instrumentos didáticos, de avaliação e de análise de currículo**. São Paulo: Editora Moraes,1987.

NOVAK, J. D.; GOWIN, D. B. **Learning how to Learn**. Cambridge: Cambridge University Press, 1984.

NÓVOA, A. Formação de professores e profissão docente. In: NÓVOA, A. (Org). **Os professores e a sua formação**. Lisboa: Dom Quixote, p.15-33, 1992.

NUNES, C.S.C. **Os sentidos da formação continuada de professores: o mundo do trabalho e a formação de professores no Brasil**. 2000. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação: Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

OLIVEIRA, N. **Conceito de Função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem**, 1997. Dissertação (Mestrado) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 1997.

PAVANELLO, R. M. Formação de professores e dificuldades de aprendizagem em Matemática. In: Maciel, L.S.B et al (Org). **Formação de Professores e Prática Pedagógica**. Maringá: Eduem, p.65-80, 2002.

PELHO, E. B. B. **Introdução ao conceito de função: a importância da Compreensão das variáveis. 2003**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 2003.

PIERRO NETO, S. **Matemática Conceitos e Histórias**. 8ª série. São Paulo: Editora Scipione (Coleção Matemática Conceitos e Histórias), 1998.

PINTO, A.H. **As concepções de álgebra e educação algébrica dos professores de Matemática**. 1999. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação. UFES, Vitória-ES, 1999.

PONTE, J. P. Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. In: BROWN, M. et al (Org). **Educação Matemática**. Portugal: Instituto de Inovação Educacional (Coleção Temas de Investigação), p.185-239, 1992.

____________ Da formação ao desenvolvimento profissional. In: **Actas do Profmat 98**. Lisboa: Associação dos Professores de Matemática, p.27- 44, 1998. Disponível em <http:// www.educ.fr.ul.pt/docentes/jponte > . Acesso em: 15 fev 2005.

SANGIACOMO, L.; SILVA, M.C.L.; CAMPOS,T.M.M.;BONGIOVANI, V. **Geometria plana com Cabri-géométre:** diferentes metodologias. São Paulo: PROEM, 1999.

SÃO PAULO (Estado). **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática Ensino Fundamental**. 5. ed. Secretaria de Estado da Educação - São Paulo Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. São Paulo,1997.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Estado da Educação / Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Ensinar e Aprender Matemática - Volume Impulso Inicial**, v.1, v.2, v.3. São Paulo: SE / CENP, 2002.

SCHOENFELD A. H.; ARCAVI, A. On the meaning of variable. **The Mathematics Teacher**, v.81, n.6, p.420-427, set 1988.

SCHWARZ, O. **Sobre as concepções de função dos alunos ao término do 2º grau**. 1995. Dissertação (Mestrado) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 1995.

SERRES, M. **Luzes Cinco entrevistas com Bruno Latour**. Tradução: Luiz Paulo Rouanet. São Paulo: Unimarco Editora, 1999.

SFARD, A. Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – the case of function. In: HAREL,G.; DUBINSKY, E. (Edit) **The Concept of Function**. Aspects of Epistemology and Pedagogy. Mathematical Association of America, MAA Notes and Reports Series, v.25, p.59-84,1992.

SHULMAN, L.S. Those Who Understand Knowledge Growth in Teaching. In: **Educational Researcher**, p.4 -14, fev 1986.

SIERPINSKA, A. On understanting the notion of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Edit) **The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy**. Mathematical Association of America, MAA Notes and Reports Series, v.25, p.25-58, 1992.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 2005. Tese de Doutorado. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. PUC-SP. São Paulo, 2005.

SILVEIRA, E.C. **Uma seqüência didática para a aquisição da noção de taxa de variação média de uma função**. Dissertação (Mestrado) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 2001.

SIMÕES, M.H.P. **Uma seqüência para o ensino / aprendizagem de função do 2º grau**. 1995. Dissertação (Mestrado) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 1995.

SOARES, E.F; FERRREIRA, M.C.C; MOREIRA, P.C. Da prática do matemático para a prática do professor: mudando o referencial da formação matemática do licenciado. **ZETETIKÉ**, Campinas, v. 5, n.7 p.25-36, jan/jun/1997.

STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo, 4.ed. Tradução: Cyro C. Patarra. vol 1. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

STILLWELL, J. **Mathematics and its History**. New York: Springer-Verlag,1989.

TAPSCOTT, D. **Plano de ação para a economia digital**. São Paulo: MAKRON Books, 1999.

TARDIF, M. **Saberes Docentes e Formação Profissional**. Petrópolis: Editora Vozes, 2002.

TARDIF,M.; LESSARD, C. **O trabalho Docente**. Elementos para uma teoria da docência como profissão das interações humanas. Tradução: João Batista Kreuch. Petrópolis, R.J.: Vozes, 2005.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. Tradução: Paulo Boschcov. v.1. São Paulo: Addison Welley, 2002.

YOUSCHKEVITCH, A. P. Le concept de fonction jusqu´au milieu du XIXe siècle.In: **Fragments d´historie des Mathématiques,** Brochure A.P.M. E. P. n. 41, p.7- 67, 1981.

ZUFFI, E. M. **O tema "funções" e a linguagem matemática de professores do Ensino Médio – por uma aprendizagem de significados**. 1999. Tese (doutorado em Didática - Ensino de Ciências e Matemática), Faculdade de Educação, USP, São Paulo,1999.

___________.Uma seqüência didática sobre "funções" para a formação de professores do Ensino Médio. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004, Recife. **Anais...** Recife, 2004. CD-ROM.

APÊNDICE A

Construção do gráfico da função linear $f(x) = ax$ sob a luz de uma organização praxeológica.

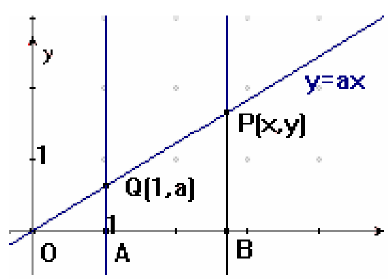
A *tarefa*: construir o gráfico da função $f(x) = ax$.

A *técnica*: é a maneira usual de executar a tarefa proposta que, no caso, é formada pelas seguintes etapas: construção de duas retas perpendiculares, estabelecimento de uma escala em cada eixo, localização de dois pontos A e B no plano cartesiano de coordenadas $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ respectivamente e, finalmente, a construção da reta que passa pelos pontos A e B.

A *tecnologia*: O gráfico de uma função linear $f(x) = ax$ é uma reta que passa pela origem.

Demonstração[20]:

i) Caso $a > 0$. A origem O = (0, 0) é um ponto do gráfico. Para x = 1, temos $y = a.1 = a$, de forma que o ponto Q = (1, a) também está no gráfico. A condição para que um ponto qualquer P = (x, y), com x ≠ 0, satisfaça a equação $y = ax$ é que $\frac{y}{x} = \frac{a}{1}$. Observando a figura abaixo, isso equivale a dizer que os triângulos OAQ e OBP são semelhantes, ou que o ponto P está na reta OQ.



ii) O raciocínio no caso a < 0 é o mesmo.

iiiI) Se a = 0, a equação se reduz a y = 0, cujas soluções são os pontos $(x,0)$, isto é, os pontos do eixo Ox, portanto, o gráfico é o eixo Ox.

---

[20] A demonstração foi adaptada de ÁVILA (1997, p.10).

A teoria, isto é, o conjunto de explicações e justificações utilizadas nesta demonstração provém da Análise, da Geometria Analítica, da Geometria e da Álgebra.

Da Análise: o conjunto dos números reais e suas propriedades, o conceito de função como correspondência, o conceito de continuidade de uma função e a demonstração de que a função linear f: R $\rightarrow$ R é contínua.

Da Geometria Analítica: plano cartesiano.

Da Álgebra: a proporcionalidade e suas propriedades e o conceito de gráfico de uma função.

Da Geometria: os teoremas sobre semelhança de dois triângulos.

O bloco [tarefa/técnica] é considerado o *saber-fazer*, ao passo que o bloco [tecnologia/teoria] é considerado o *saber.* No exemplo apresentado, *saber* construir o gráfico da função linear é conhecer a praxeologia descrita.

APÊNDICE B

QUESTIONÁRIO I

Nome: ____

Graduação: ____

Instituição: ____

Início: _________________ Ano da Graduação: _______________

Leciona na(s) escola (s):____

____

Tempo de exercício no magistério:

Ensino Fundamental ____________ Ensino Médio______________

Utiliza livro didático? Sim ☐ Não ☐

Nome(s) da(s) Coleção (ões):____

____

Ministrou (ou ministra) aulas sobre funções?: ______________________________

____

Explique, com suas palavras, o que entende por função: _____________________

____

No seu entender, qual é a importância do estudo desse tema?________________

____

Teve a oportunidade de ler algum texto sobre a história do conceito de função?

____

Conhece, nos Parâmetros Curriculares Nacionais, os textos relativos ao tema?____

Comentários: ____

APÊNDICE B

QUESTIONÁRIO II

1.Analise a tabela abaixo e responda às questões:

r	3,5	5,0	2,0	7,0
s	4,9	7,0	2,8	9,8

a) Os números r e s são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não se enquadram dentro dessas duas classificações. Justifique sua resposta.

b) É possível encontrar uma lei que relaciona r e s? Em caso afirmativo, escreva essa lei.

c) Existe uma função *f* que para cada valor de r faz corresponder um único valor de s?

2.Analise a tabela abaixo e responda às questões:

P	120	90	180	360
Q	15	20	9	5

a) Os números p e q são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não se enquadram dentro dessas duas classificações. Justifique sua resposta.

b) É possível encontrar uma lei que relaciona p e q? Em caso afirmativo, escreva essa lei.

c) Existe uma função *f* que para cada valor de p faz corresponder um único valor de q?

3.Um litro de água do mar contém 25 g de sal.

a) Se *l* designa a quantidade de litros de água e *S* a quantidade de sal nos *l* litros de água, é possível estabelecer uma relação entre *S* e *l*? Em caso afirmativo, expresse a relação.

b) Construa um gráfico que mostra a quantidade de sal em função do volume de água do mar.

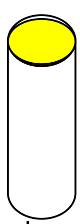
4. As leis da Física, muitas vezes, descrevem relações de proporcionalidade direta ou inversa entre grandezas. Escreva a expressão matemática correspondente:

a) Para cada substância, a massa é diretamente proporcional ao volume.

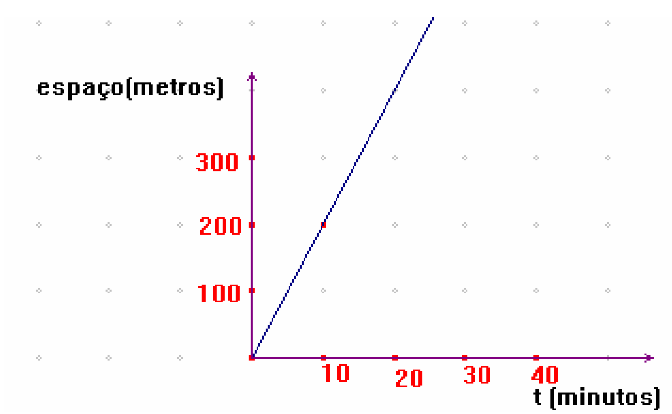
b) A resistência elétrica R de um fio elétrico é diretamente proporcional ao seu comprimento L e inversamente proporcional à área de sua seção reta A e depende do material do qual é feito o fio.

Seção reta

L



5. O gráfico abaixo representa o espaço percorrido por um móvel em função do tempo:



a) Complete a tabela, explicando seu preenchimento.

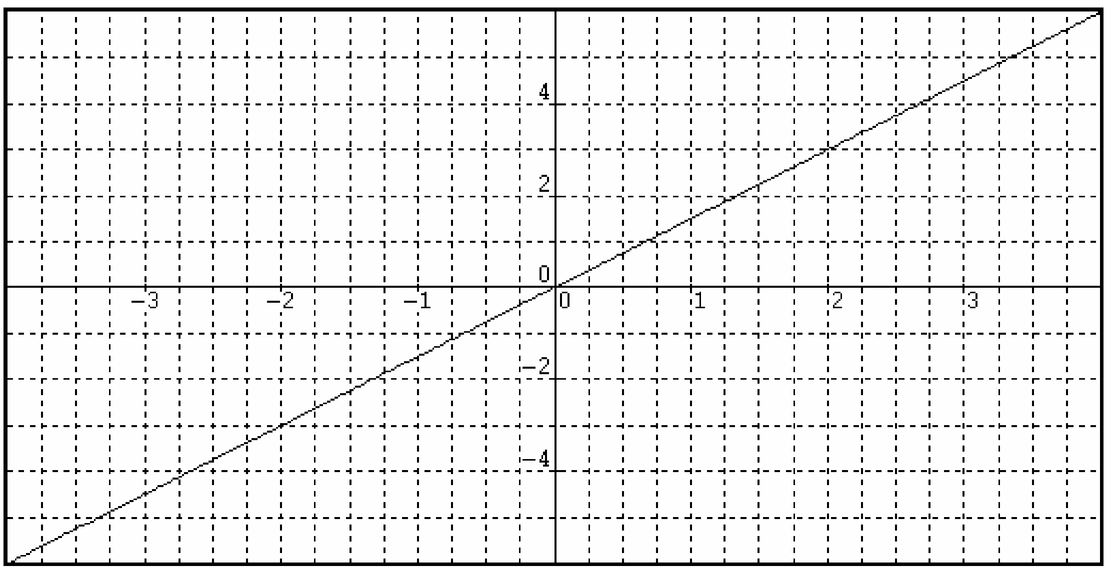
Tempo (minutos)	10	22			
Espaço (metros)			100	250	830

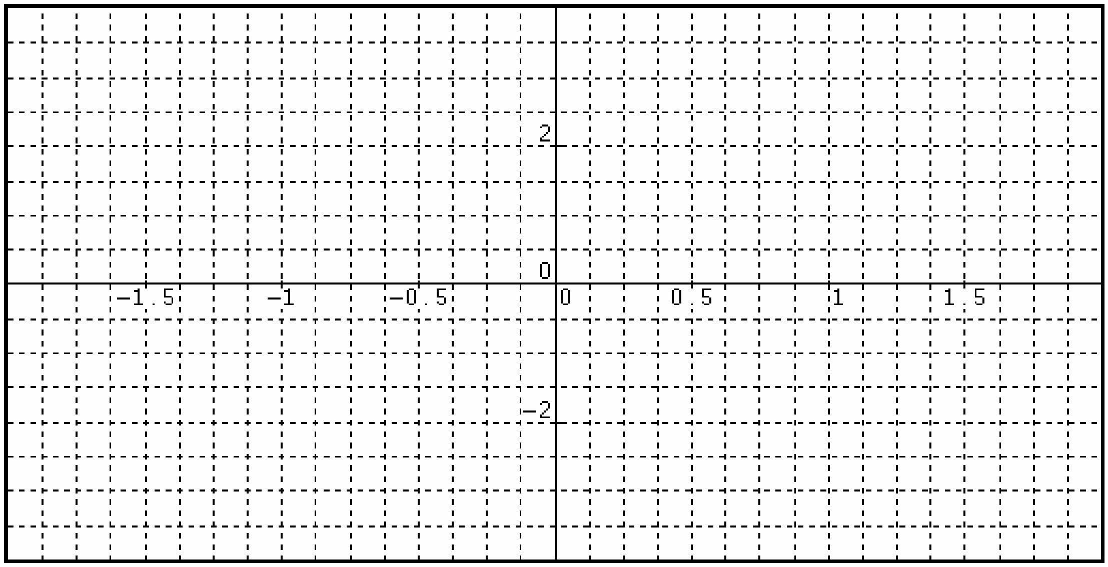
b) Determine a lei que relaciona tempo e posição, justificando sua resposta.

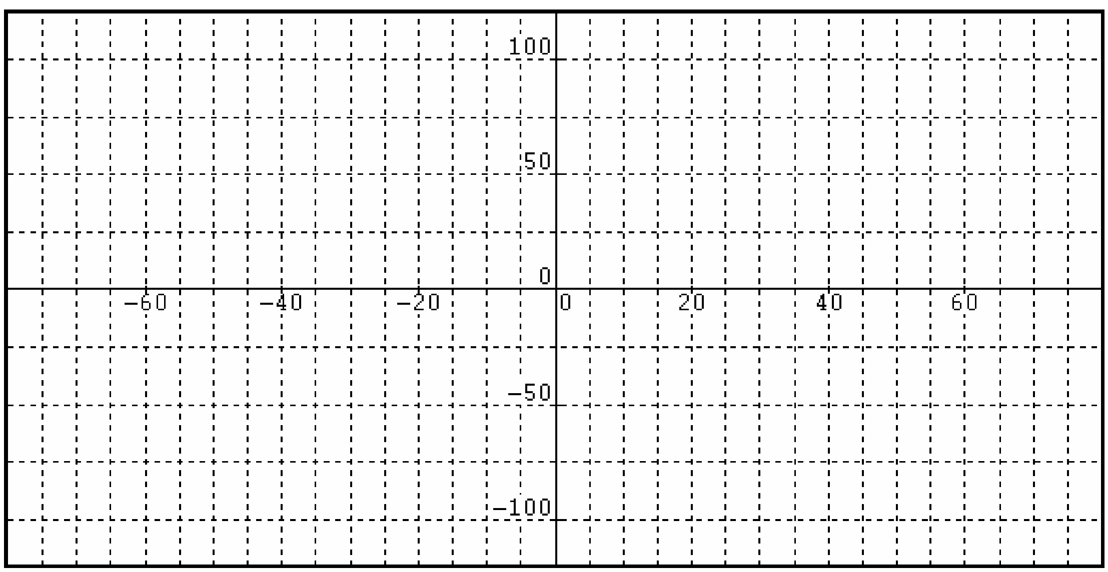
6.Se a fórmula de uma função é do tipo $y = kx$ na qual k é um número diferente de zero, explique porque y é diretamente proporcional a x.

7.Sabendo que $f(2) = 10$ e que $f(4) = 16$, podemos dizer que a função é do tipo $f(x) = kx$?

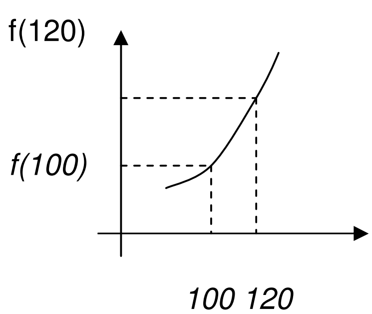
8.Dado um gráfico da função *f*, construa dois outros gráficos da mesma função, obedecendo às escalas dadas.







9.



O gráfico da função $f(x)$ é dado acima. Sabe-se que *f* é contínua, mas só se conhecem, exatamente, os seus valores nos pontos indicados. Assim sendo, perguntou-se a dois alunos o valor de *f(110)*.

A respondeu:

100 *f(100)* $\longrightarrow$ $y = \dfrac{110 \times f(100)}{100}$

110 *y*

B respondeu:

120 *f(120)* $\longrightarrow$ $y = \dfrac{110 \times f(120)}{120}$

110 *y*

Os alunos se surpreenderam ao encontrar resultados diferentes. Com base no exposto, atenda às solicitações abaixo.

a) Algum dos alunos determinou o valor correto de *f(110)*? Por quê?

b) Dê o gráfico de uma função *f* para a qual o método usado pelo aluno A estaria correto.

ANEXO A

ATIVIDADES DO EXPERIMENTO PILOTO

ATIVIDADE 1- Dobrando papel

Vamos dobrar a folha de papel e contar em quantas partes ela fica dividida

N. dobras	1 dobra	2 dobras	3 dobras			
N. partes	2 partes	4 partes	8 partes			

a) Se pudermos continuar, com 5 dobras, quantas seriam as partes? E com 8 dobras?
b) E quando o número de partes for 1024, quantas dobras foram feitas?
c) Qual é a sua conclusão?
d) A professora Vera disse que dobrando 4 vezes o papel conseguem-se 8 partes? Ela está correta?

ATIVIDADE 2 – Brincando no parque

Para entrar em um parque de diversões, as crianças pagam R$ 2,00 de entrada e para brincar em cada um dos brinquedos pagam R$ 0,50. qual será o gasto de uma criança que, depois de entrar no parque, quer brincar em:

a) 1 brinquedo?
b) 2 brinquedos?
c) 3 brinquedos?
d) 12 brinquedos?

Chiquinho brincou tanto que esqueceu em quantos brinquedos brincou. Você seria capaz de descobrir quanto Chiquinho gastou?

É claro que não dá para descobrir quanto Chiquinho gastou, você pode estar pensando, se a gente não sabe em quantos brinquedos ele brincou. Mas, você saberia calcular quanto Chiquinho gastaria se soubesse em quantos brinquedos ele foi, não é mesmo?

Veja se você concorda com o seguinte modo de calcular o gasto de Chiquinho.

Gasto de Chiquinho = 2,00 + <u>0,50</u> × <u>número de brinquedos</u> que Chiquinho brincou

Entrada

Preço de cada brinquedo

se você conhecer este número, você poderá conhecer o seu gasto

As pessoas que trabalham com Matemática, em situações como esta, usam "símbolos" para representar valores numéricos desconhecidos. Os símbolos que podem ser usados são as letras (de qualquer alfabeto), expressões formadas por letras ou mesmo alguns desenhos. Considerando a letra g como Gasto de Chiquinho e n o número de brinquedos, a frase do Gasto de Chiquinho passaria a ser escrita assim:

$$G = 2{,}00 + 0{,}50n$$

Se você fizer isto que sugerimos, você estará escrevendo na linguagem algébrica. Agora é a sua vez. Utilize a linguagem algébrica para expressar a situação:

Todos os dias da semana, Fernando vai de táxi até o seu escritório no centro da cidade de São Paulo. Toda vez que alguém entra no táxi, paga a bandeirada que custa R$ 2,00 e, quando o táxi começa a sua viagem, o taxímetro começa a marcar R$ 0,80 para cada km rodado. Qual será o valor de uma corrida de táxi, se a viagem tiver:

a) 8 km?
b) 12 km?
c) 16,5 km?
d) 20,3 km?

Para calcular o valor de uma corrida de táxi, uma pessoa precisa saber quantos quilômetros o táxi irá andar. Este cálculo poderá ser escrito assim:

Valor da corrida de táxi = ...+........... × distância percorrida pelo táxi.

Represente o valor da corrida por uma letra a seu critério e a distância da corrida por uma letra diferente da primeira e escreva esta situação utilizando a linguagem algébrica.

ATIVIDADE 3- Alugando carro

Bonifácio mora em Fortaleza e foi a São Paulo, a negócios. Logo que desembarcou na capital paulista foi a uma loja para alugar um carro. Na primeira em que entrou ele encontrou as seguintes condições:

Preço do aluguel $ 50,00 a cada dia de aluguel mais uma taxa de R$ 100,00 para despesas. Para entender melhor o preço, Bonifácio montou uma tabela:

Tempo	Aluguel a ser pago
1 dia	50.1 + 100 = 150
2 dias	50.2 + 100 = 200
3 dias	
4 dias	

Bonifácio resolveu não escrever os centavos. Assim, na tabela onde está escrito 50 significa R$ 50,00; onde está escrito 100 significa R$ 100,00 etc.

a) Complete a tabela acima.
b) Qual é o aluguel por 12 dias?
c) Qual é o aluguel por um número "T" de dias?
d) Qual é o aluguel por um mês comercial?

Em outra loja, Bonifácio encontro a seguinte tabela de preços:

Tempo	1 dia	2 dias	3 dias	4 dias		
Aluguel (em R$)	60,00	120,00	180,00	240,00		

a) Qual seria o aluguel do carro por 5 dias?
b) E por "T" dias?
c) E por mês comercial?

Dirceu, colega de Bonifácio, propôs alugar-lhe um de seus carros de modo que o aluguel (A) fosse pago em reais de acordo com a sentença:

A = 20T + 150, na qual "T" significa o número de dias que Bonifácio ficaria com o carro.

a) Faça uma tabela onde consta a quantia a ser paga pelo aluguel de 1, 2, 3, 4 e 5 dias.
b) Por 6 dias de aluguel, é possível pagar R$ 260,00? Justifique.
c) Você poderia dizer qual desses três planos é mais vantajoso para alugar carros? Justifique e aponte duas razões.
d) Algum plano pode ser considerado como o pior? Por quê?

ATIVIDADE 4 – Produção de peças de informática

A tabela abaixo indica o custo de produção de certo número de peças para informática.

Número de peças	1	2	3	4	5	6	7	8
Custo (em R$)	1,20	2,40	3,60					

a) Complete a tabela

b) A cada quantidade de peças corresponde um único custo em reais?

c) O custo é dado em função do quê?

d) Neste caso, quais são as variáveis?

e) Examinando os dados da tabela, descubra a regularidade e escreva a fórmula que associa o custo (C) com o número de peças (x).

f) Qual é o custo de 10 peças? E de 50 peças?

g) Com um custo de R$ 120,00, quantas peças podem ser produzidas?

h) O custo de produção varia de forma diretamente proporcional ao número de peças produzidas?justifique sua resposta.

i) Use os dados da tabela e construa um gráfico dessa situação. Nesse caso, é possível ligar os pontos por linha cheia?

ATIVIDADE 5 – Medindo lados e perímetros

Observe na tabela a medida do lado de um quadrado e seu perímetro.

Medida do lado	1	2	2,5	3	3,1	....	L
Perímetro	4	8	10	12	12,4		P

a) Qual é o perímetro de um quadrado cujo lado mede 7 cm?

b) Qual é a medida do lado de um quadrado cujo perímetro mede 38 cm?

c) É verdade que o perímetro depende da medida do lado?

d) Qual é a lei que associa a medida do lado de um quadrado com o perímetro?

e) É possível ter perímetros diferentes para o mesmo quadrado?Justifique.

f) Com os dados da tabela marque em um sistema de eixos os pontos correspondentes aos pares (L,P).

Como estamos trabalhando com medidas, ou seja, números reais, podemos ligar esses pontos por uma linha cheia. Faça essa ligação no gráfico que você construiu.

ANEXO B

SEQÜÊNCIA DE ENSINO

1ª AULA

ATIVIDADE 1: Dobrando papel

Você está recebendo uma folha de papel, que deverá ser dobrada.

a) Conte em quantas partes a folha ficará dividida e preencha a tabela abaixo.

Número de dobras	1	2	3	4	5
Número de partes					

b) É possível escrever o número de partes como potências de base 2? Em caso afirmativo, preencha novamente a tabela.

Número de dobras	1	2	3	4	5
Número de partes					

c) Existe uma limitação física para continuar dobrando o papel, mas você pode fazer isto mentalmente. Se você pensar em 8 dobras, quantas partes são obtidas?

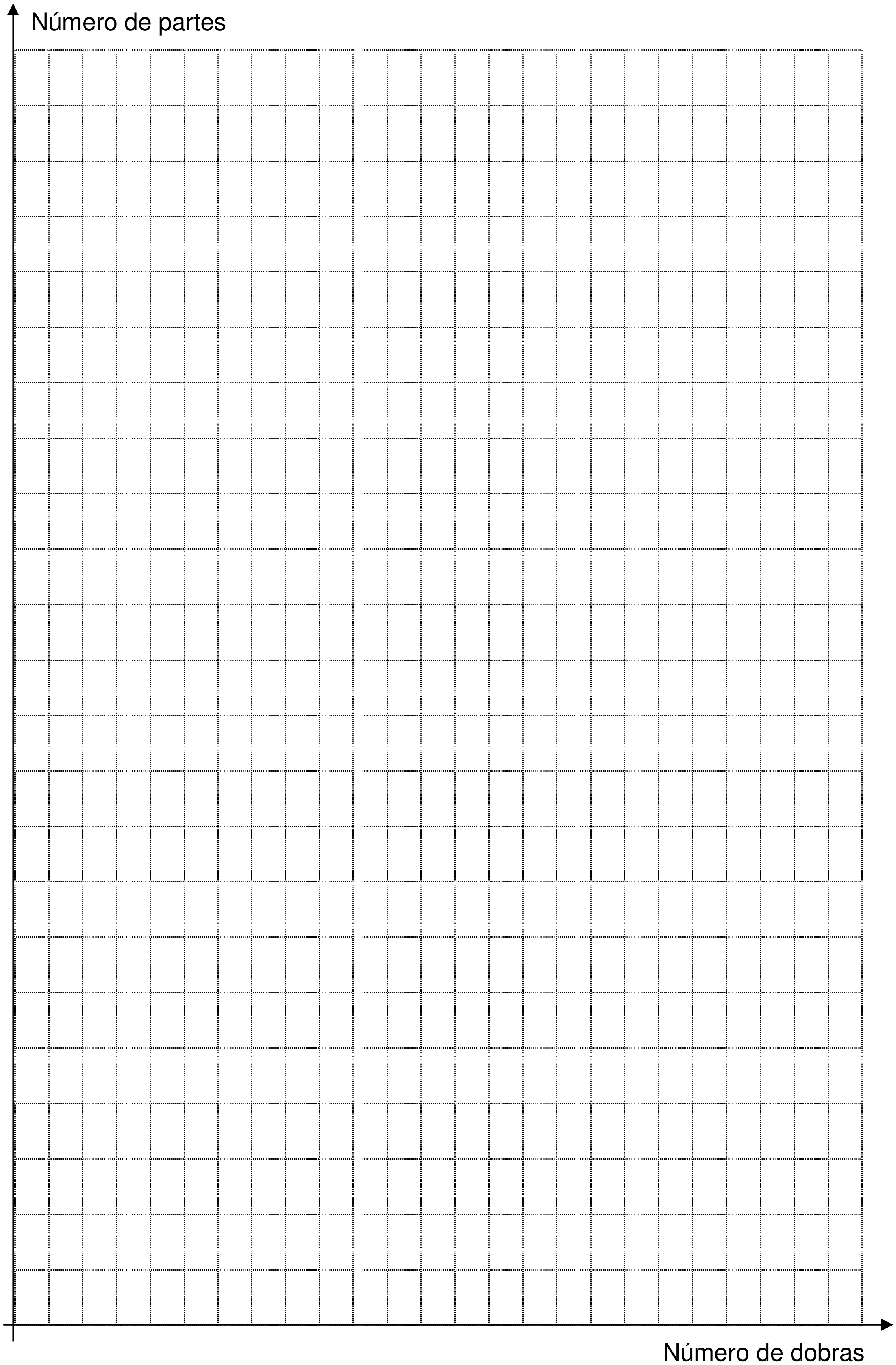
d) Se o número de partes for 512, quantas dobras devem ser feitas? Explique a sua maneira de obter o resultado.

e) O número de partes depende do número de dobras?

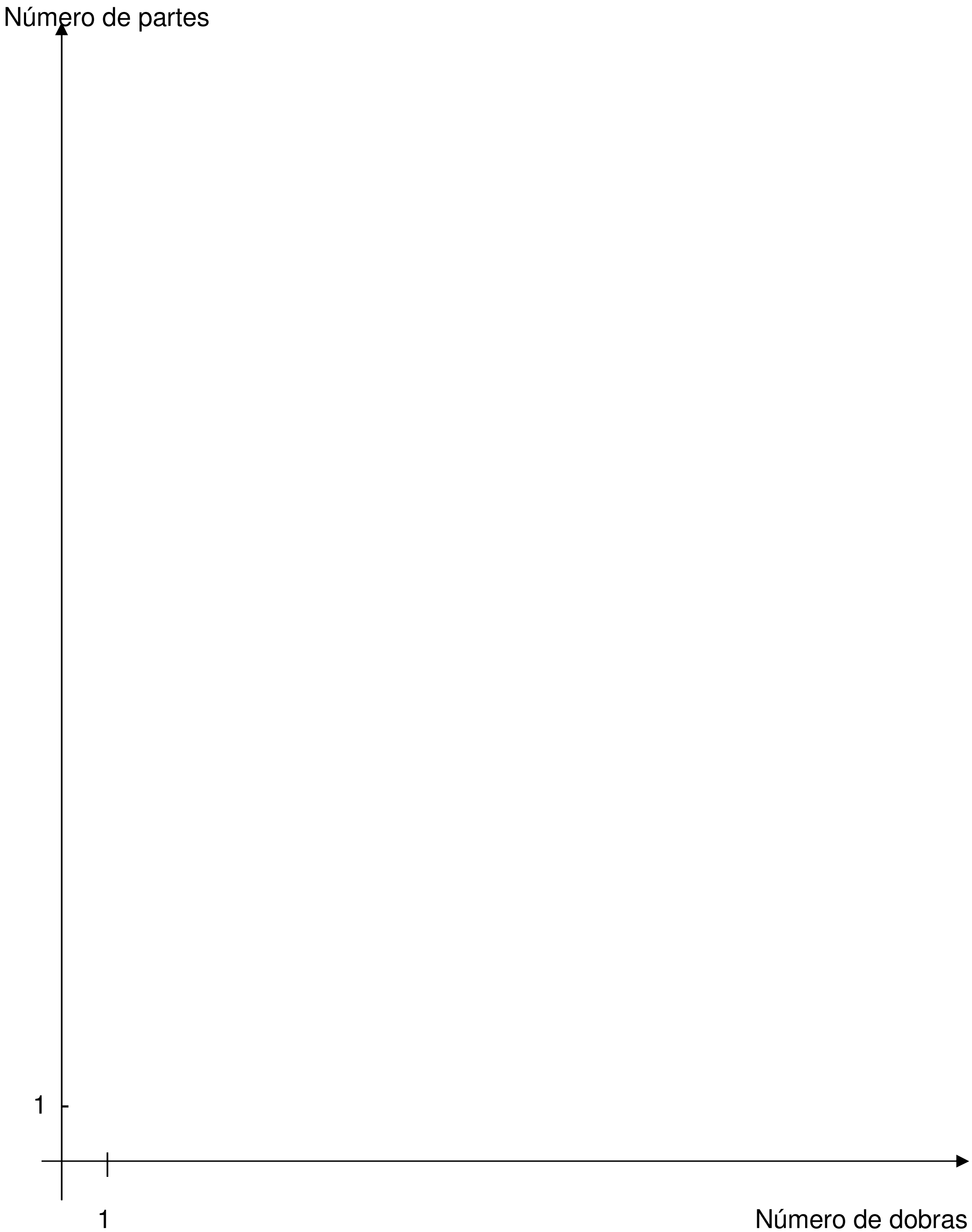
f) Utilizando a primeira tabela, construa o gráfico que mostra o numero de partes em função do número de dobras.

Seguem as duas opções de folha para a construção do gráfico.

A primeira opção



A segunda opção



ATIVIDADE 2: Brincando no parque

Para entrar num parque de diversões, as crianças pagam R$ 2,00 de entrada e R$ 0,50 para brincar em cada um dos brinquedos.

a) Qual será o gasto de uma criança que, depois de entrar no parque, quer brincar em:

- ▢ 1 brinquedo?
- ▢ 3 brinquedos?
- ▢ 2 brinquedos?
- ▢ 12 brinquedos?

b) Chiquinho saiu de casa com R$ 10,00. Qual será o número máximo de brinquedos que ele poderá utilizar?

c) O gasto total depende da quantidade de brinquedos utilizados?

d) Complete, utilizando uma das duas palavras indicadas abaixo do traço.

O número de brinquedos chama-se variável____________________

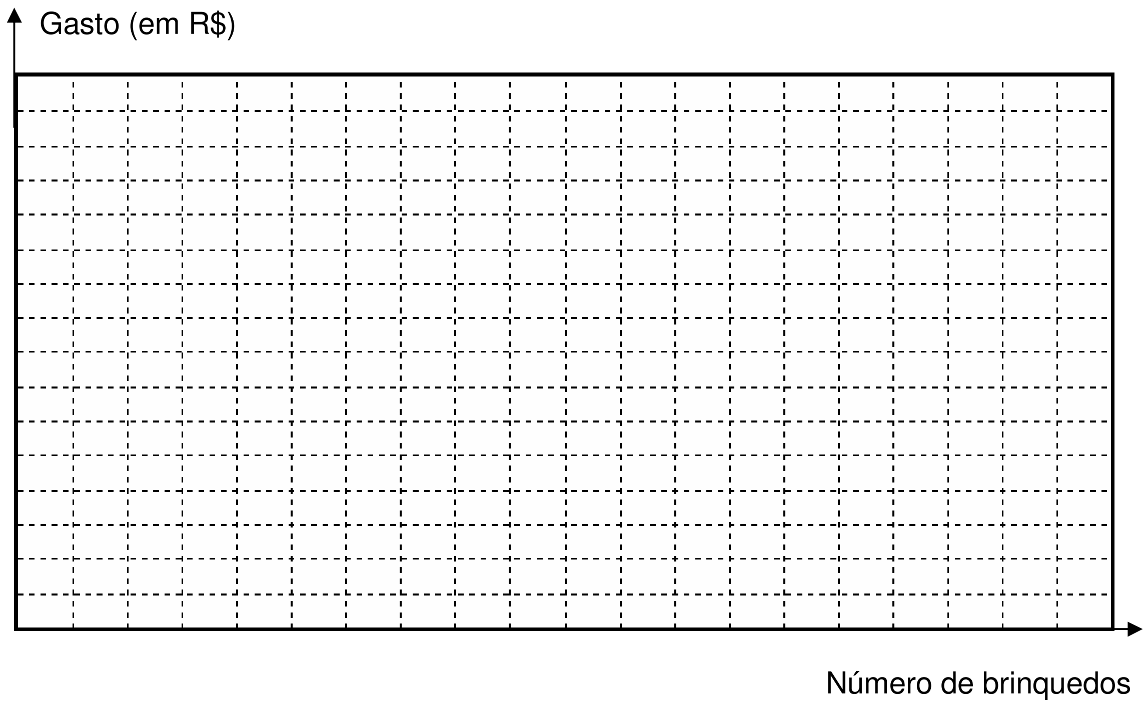
dependente/independente

e) O gasto total chama-se variável_____________________

dependente/independente

f) Chamando de n o número de brinquedos utilizados por uma criança e de G o gasto total, escreva uma expressão algébrica que relaciona G e n.

g) Construa o gráfico que mostra o gasto em função dos brinquedos utilizados.Suponha que o parque tenha 20 brinquedos.



h) É possível unir os pontos do gráfico? Justifique sua resposta.

2ª AULA

ATIVIDADE: Almoçando no restaurante

Esclarecimentos:

1. Num restaurante por quilo sempre se divulga o preço de 100 gramas de comida porque se for divulgado o preço de um quilo de comida, isso poderá afastar os clientes. Mas as balanças marcam o preço por quilo.

2. A palavra correta para falar de quantidade de comida é massa.

3.A palavra peso é utilizada no dia-a-dia para indicar a quantidade de comida, mas na Física, na Química e na Biologia, a palavra peso é utilizada para indicar um outro conceito, o produto da massa pela aceleração da gravidade (9,8 m/s^2).

4.A frente da balança tem três visores, como está desenhado abaixo.

Peso kg	Preço/kg R$/kg	Total R$

5. Na entrada do restaurante “Bom prato” está afixada uma tabuleta.

100 gramas
R$ 1,30

A partir de agora é com você.

a) Se o prato do restaurante tem 615 gramas, antes de colocar o prato com a comida, uma pessoa observa:

Peso kg	Preço/kg R$/kg	Total R$
- 0,615	13,00	0,00

a) Explique porque o gerente do restaurante precisa fazer isso.

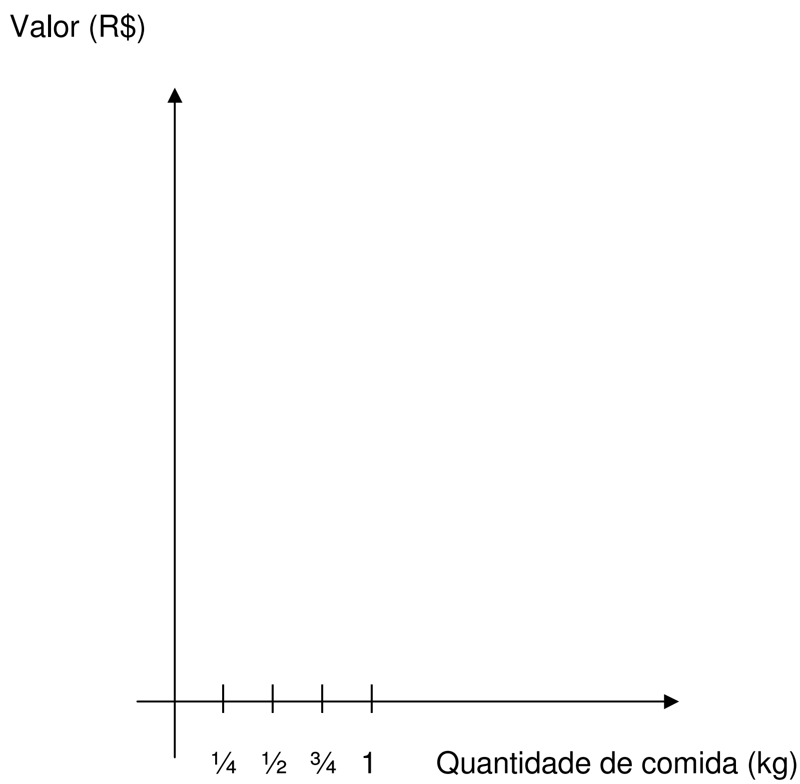
b) Após colocar o prato na balança, o primeiro visor mostra a quantidade de comida, o segundo mostra o preço por quilo e o terceiro o total a pagar. Complete o visor em branco com o número que falta.

0,500	13,00	
0,650	13,00	
0,780	13,00	
0,420	13,00	
	13,00	9,10
	13,00	3,90

c) O valor a ser pago depende da quantidade de comida? Explique com suas próprias palavras.

d) Chamando de V o valor a ser pago (em reais) e de x a quantidade de comida (em kg) colocada no prato, escreva uma fórmula matemática que relaciona o preço a pagar com a quantidade de comida.

e) Construa o gráfico do preço a pagar em função da quantidade de comida. Se necessário, faça uma tabela auxiliar.



f) Você pode unir os pontos? Explique.

g) Se todas as pessoas tomarem um copo de suco, que custa R$ 1,50, escreva a fórmula matemática que dará o valor total T (em R$) a ser pago em função da quantidade de comida x (em kg).

h) Agora construa o gráfico do valor a ser pago em função da quantidade de comida, na situação em que todas as pessoas tomam um copo de suco, utilizando o mesmo sistema de coordenadas do item e). Utilize um lápis de outra cor.

i)Você poderia ter construído o segundo gráfico de uma maneira mais rápida, traçando uma semi-reta paralela á primeira, 1,5 unidades acima?

j) Utilizando um mesmo sistema de coordenadas, construa o gráfico do preço a pagar em função da quantidade de cômoda, colocando os seguintes preços por quilo: R$12,00, R$ 13,00 e R$14,00 e sem pensar em adicionar o suco. Utilize cores diferentes, uma para cada gráfico.

k) O que você pode dizer sobre os três gráficos construídos sobre um mesmo sistema de eixos? Estamos nos referindo à inclinação das semi-retas em relação ao eixo horizontal.

l) Se um cliente tem apenas R$7,80 e o preço por quilo é de R$ 13,00:

-Quanto de comida poderá consumir?

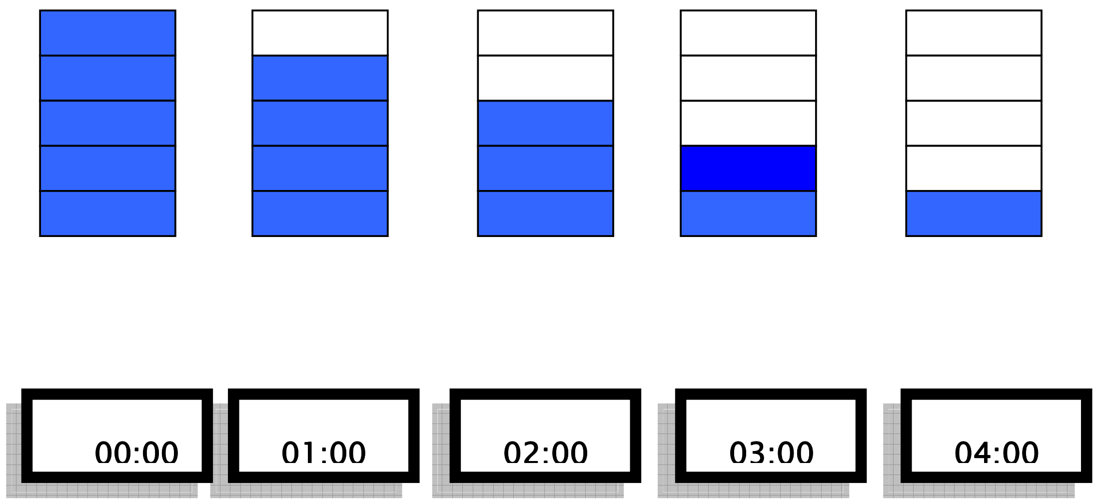
-Se este mesmo cliente tomar um refrigerante no valor de R$ 1,30, quanto de comida irá consumir?

3ª AULA

ATIVIDADE: Esvaziando reservatório

Um reservatório de água, com capacidade para 1000 L, está cheio. O registro é aberto para esvaziá-lo e um cronômetro é acionado no instante em que se inicia o escoamento constante, como ilustram as figuras abaixo.

V= 1000 L V= 800L

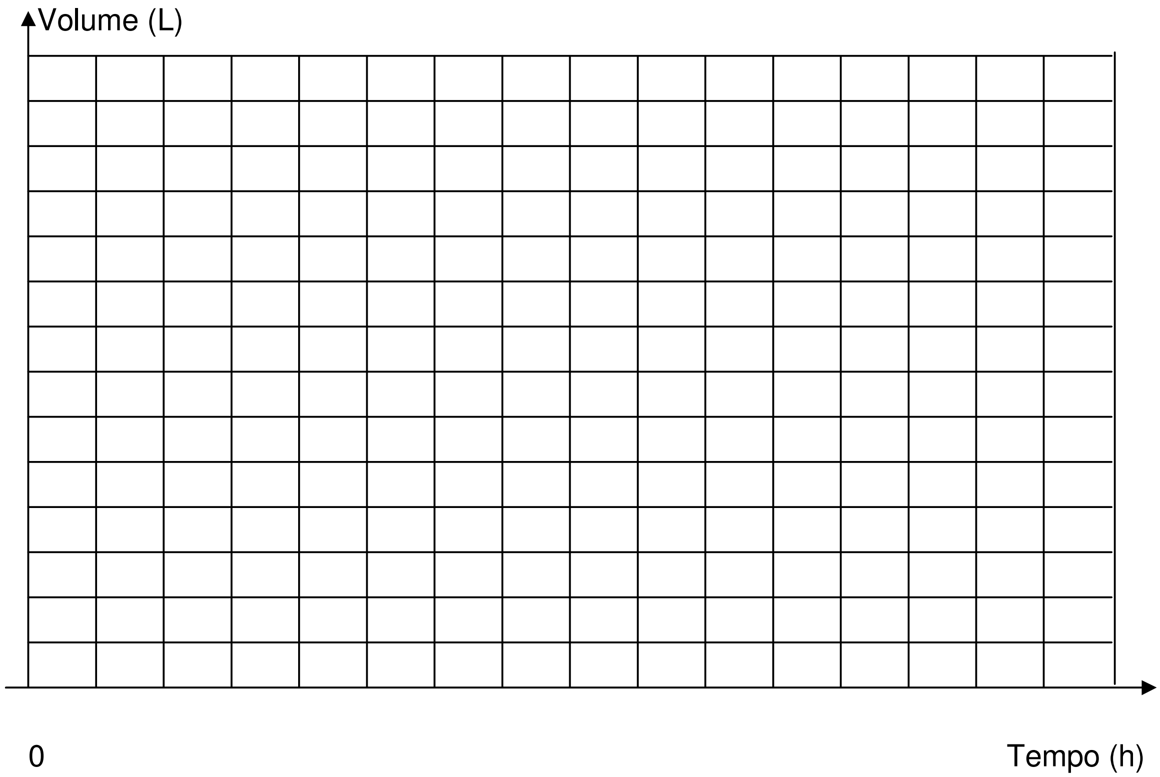


a) Observando as ilustrações acima, preencha a tabela:

Tempo (h)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5
Volume (L)	1000		800		600			200	

b) Qual a vazão?

c) Represente em um gráfico que você observou na tabela.



d) Se o cronômetro continuar funcionando após o esvaziamento do reservatório, qual o volume de água no mesmo para t = 7h? Represente no gráfico essa situação.

e) Verifique se o seu gráfico está representando a situação do cronômetro continuar funcionando após o esvaziamento do reservatório.

f) É necessário unir os pontos do gráfico? Explique.

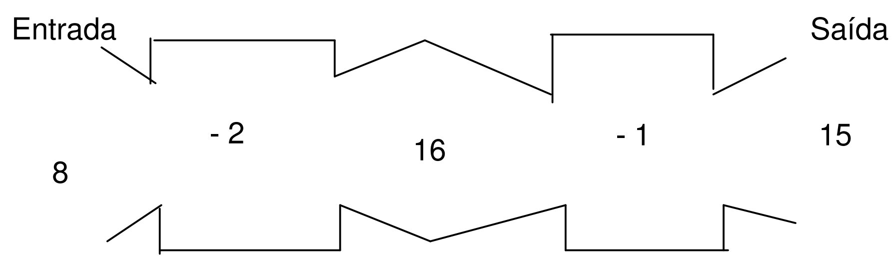
g) O volume de água observado no reservatório depende do tempo transcorrido? Explique.

4ª AULA

ATIVIDADE: Função como máquina

Rosângela bolou uma máquina interessante. Ela está programada para “multiplicar o número de entrada por dois e a seguir, subtrair o resultado de uma unidade.” Por exemplo, se entrar o número 8, sairá o número 15; se entrar o 20, sairá o 39. Note que os números de saída são obtidos em **função** dos números de entrada, isto é, os números que saem dependem dos números que entram.

DESENHO DA MÁQUINA



a) Complete a tabela que contém os números de entrada.

N. de entrada	-5	- 1,2	- 0,5	0	0,5	1,0	1,8	2,0	3,0	3,3	6,5	√3	u
N. de saída													

b) Se **u** representa a variável *número de entrada* e **s** a variável *número de saída*, qual a *fórmula* ou *lei da função* que fornece **s** em função de **u**?

c) Neste caso, qual é a variável dependente?

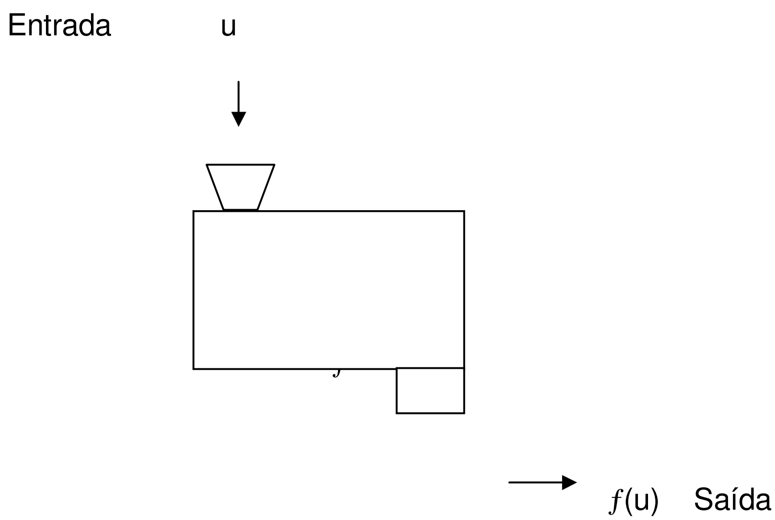
d) Se o número de entrada for 1250, qual será o número de saída?

e) Se o número de entrada for $-\frac{3}{7}$, qual será o número de saída?

f) Se o número de saída for 29, qual será o número de entrada?

g) Se o número de saída for $\frac{10}{3}$, qual será o número de entrada?

Importante: Podemos visualizar uma **função** como uma **máquina**.



Na máquina da Rosângela, para cada número real u que entra, sai o número real f(u).

Os números de entrada são elementos de um conjunto denominado **Domínio** da função.

Os números de saída são elementos de um conjunto denominado **Imagem** da função.

h) Encarando a situação desta maneira e pensando na máquina da Rosângela, que está programada para multiplicar o número de entrada por dois e a seguir, subtrair o resultado de uma unidade, complete:

$f(2) =$ $\quad$ $f(8) =$ $\quad$ $f(20) =$

$f(-1) =$ $\quad$ $f(1{,}8) =$ $\quad$ $f(\sqrt{3}) =$

i) Colocando a variável independente no eixo horizontal, construa o gráfico dessa função[21].

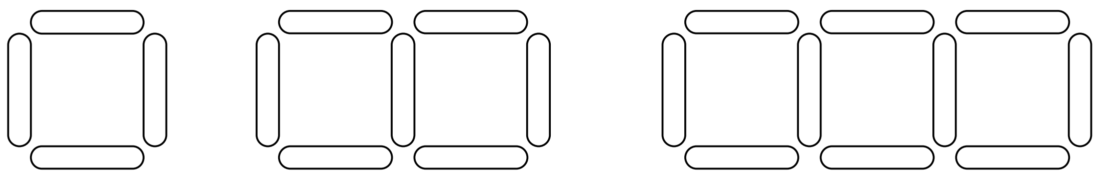
---

[21] Os alunos receberam uma folha de papel milimerado.

5ª AULA

ATIVIDADE 1: Brincando com palitos

Observe a seqüência de retângulos formados por palitos de sorvete que está desenhada abaixo:



a) Como os palitos de sorvete que você recebeu, continue a seqüência e em seguida, preencha a tabela:

Número de quadrados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de palitos										

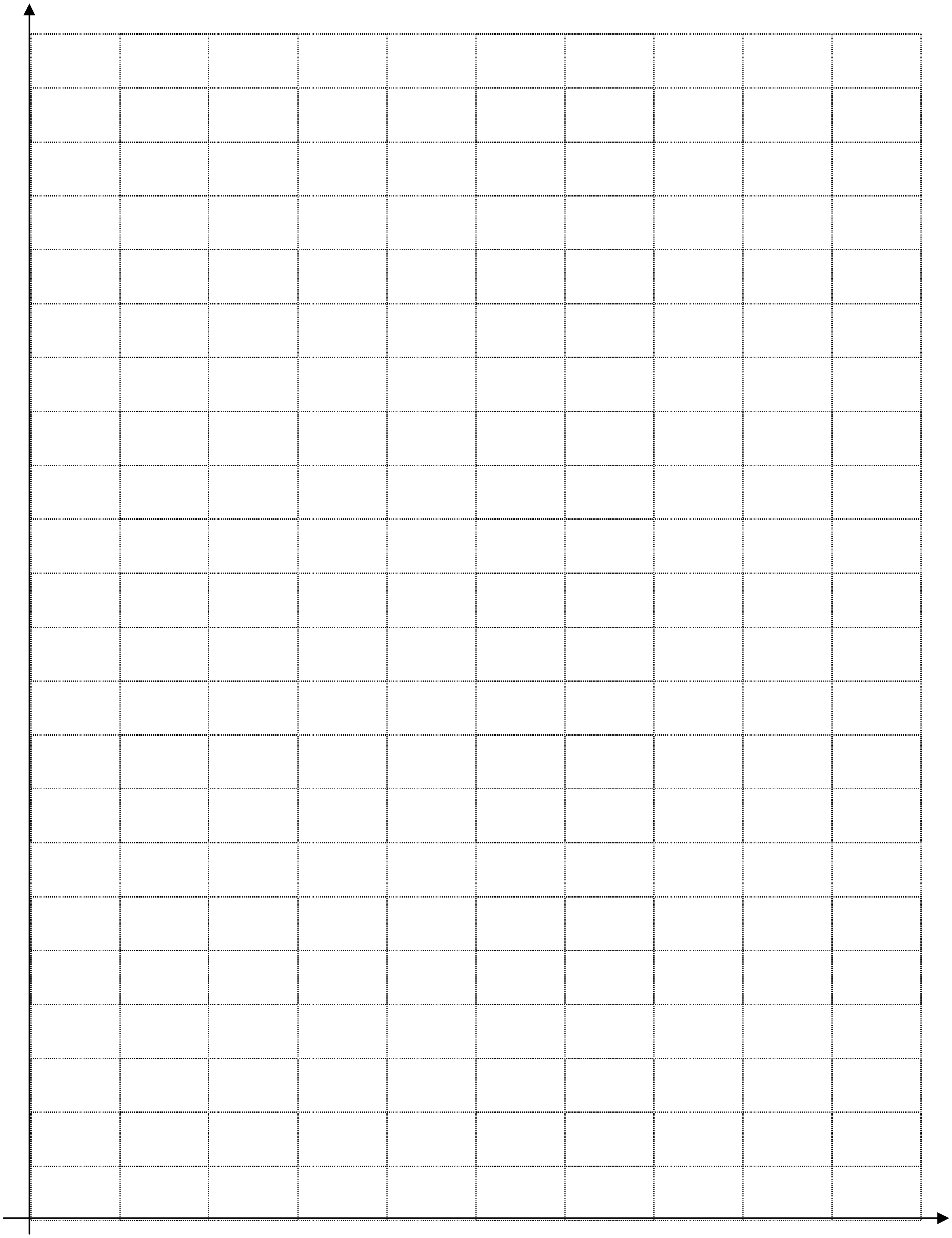
b) Como você poderia calcular o número de palitos necessários para formar uma "frisa" formada por 12 quadrados? Mostre os seus cálculos.

c) Como você poderia calcular o número de palitos necessários para formar uma "frisa" formada por 100 quadrados? Mostre os seus cálculos.

d) Se você tivesse 55 palitos, quantos quadrados conseguiria formar? Sobraria algum palito? Mostre os seus cálculos.

e) Chamando de **p** quantidade de palitos e de **q** a quantidade de quadrados, escreva a expressão algébrica que relaciona o número de quadrados **q** com a quantidade de palitos **p**.

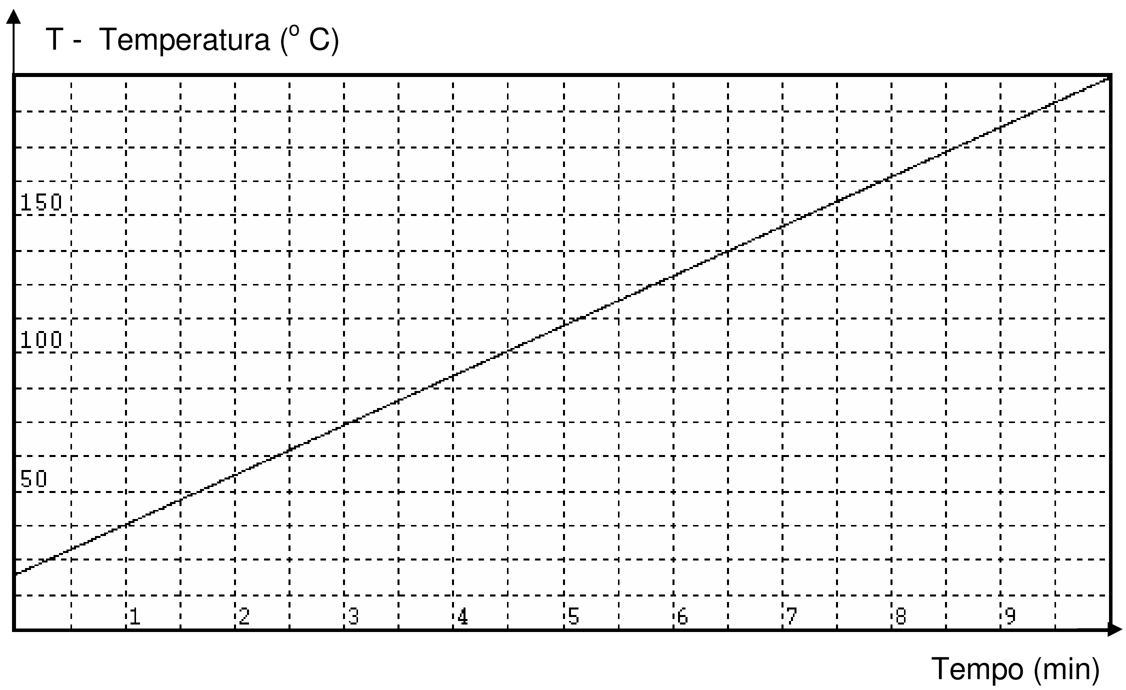
f) Com os registros da tabela, construa o gráfico que mostra o número de palitos em função do número de quadrados.



ATIVIDADE 2: A padaria

Abaixo está um moderno forno de padaria. Ele atinge 200° C, a partir da temperatura ambiente, entre 10 e 15 minutos[22].

O gráfico mostra o aquecimento de um forno deste tipo, inicialmente à temperatura ambiente de 20° C, até atingir a temperatura de 200° C em 10 minutos.



a) Complete a tabela, a partir do gráfico e do enunciado do problema.

Tempo (min)	0	3	4,5		8		10
Temperatura (°C)				137,5		175	

b) A temperatura depende do tempo em que o forno está aceso?

[22] Dados obtidos no site www.lieme.com.br/portugues/fornotrblenhaPrint.htm

c) Para cada instante t, há somente uma temperatura dentro do forno?

d) Existe uma função que associa para cada valor de t, o correspondente valor T?

e) Chamando de T a temperatura do forno e de t o tempo decorrido desde o instante em que ele é aceso, indique qual é a fórmula correta que relaciona T e t? Justifique sua resposta. I) $T = 20t + 20$ II) $T = 18t + 20$ III) $T = 20t$ IV) $T = 10t + 100$

ANEXO C

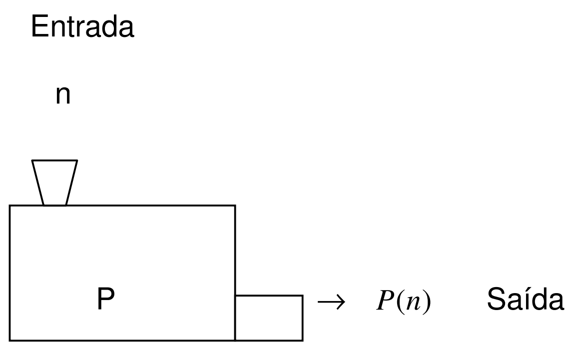
Transcrição das folhas de flip chart

Folha 1

ATIVIDADE 1: Dobrando papel

TABELA: Número de partes em função do número de dobras

Numero de Dobras (n)	Número de partes (P)
0	1
1	2
2	4
3	8
5	32
8	256
10	1024



Expressão algébrica que mostra o número de partes em função do número de dobras:

$P = 2^n$ $\qquad\qquad$ $P(n) = 2^n$

$1 = 2^0$ $\qquad\qquad$ $P(0) = 2^0 = 1$

$2 = 2^1$ $\qquad\qquad$ $P(1) = 2^1 = 2$

$4 = 2^2$ $\qquad\qquad$ $P(2) = 2^2 = 4$

$8 = 2^3$ $\qquad\qquad$ $P(3) = 2^3 = 8$

$32 = 2^5$ $\qquad\qquad$ $P(5) = 2^5 = 32$

$256 = 2^8$ $\qquad\qquad$ $P(8) = 2^8 = 256$

$1024 = 2^{10}$ $\qquad\qquad$ $P(10) = 2^{10} = 1024$

Folha 2 Gráfico: número de partes em função do número de dobras

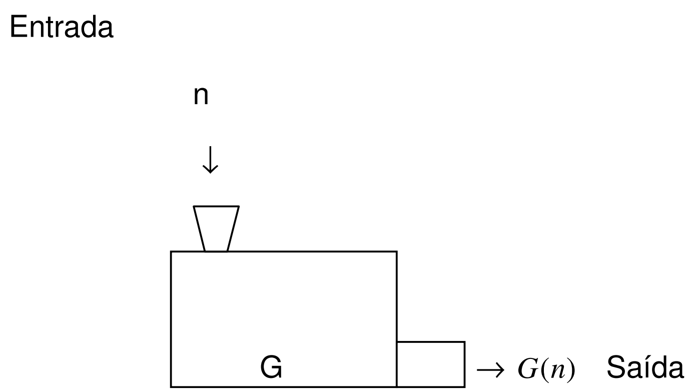
Folha 3

ATIVIDADE 2: Brincando no parque

Preço da entrada: R$ 2,00   Preço para brincar em cada brinquedo: R$ 0,50

TABELA: Gasto total em função do número de brinquedos

Número de brinquedos	Gasto Total
0	2,00
1	2,50
2	3,00
3	3,50
12	8,00
16	10,00



Expressão algébrica que mostra o gasto total em função do número de brinquedos

$G = 0{,}50n + 2{,}00$ $G(n) = 0{,}50n + 2{,}00$

2,00 = 0,50 . 0 + 2,00   G(0) = 0,50 . 0 + 2,00 = 2

2,5 = 0,50 . 1 + 2,00   G(1) = 0,50 . 1 + 2,00 = 2,50

3 = 0,5 . 2 + 2   G(2) = 0,5 . 2 + 2 = 3,5

3,5 = 0,5 . 3 + 2   G(3) = 0,5 . 3 + 2 = 3,5

8 = 0,5 . 12 + 2   G(12) = 0,5 . 12 + 2 = 8

10 = 0,5 . 16 + 2   G(16) = 0,5 . 16 + 2 = 10

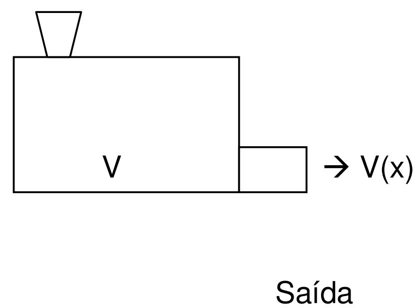
Folha 4 Gráfico Gasto total em função do número de brinquedos

Folha 5

Atividade 3 Almoçando no restaurante

V = 13x

Peso (kg)	Preço (R$)
0	0
0,250	3,25
0,500	6,50
0,750	9,75
1,000	13,00
1,125	16,25

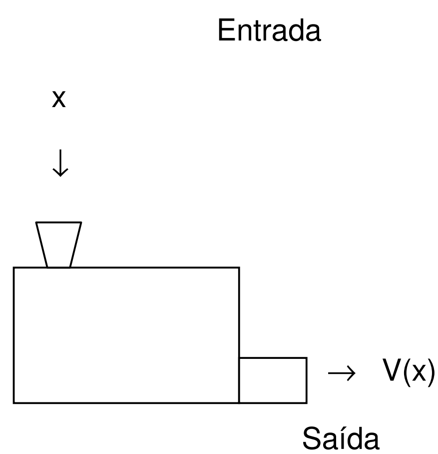


Folha 6

Atividade 3 Almoçando no restaurante

V = 13x + 1,50

Peso (kg)	Preço (R$)
0	1,50
0,250	4,75
0,500	8,00
0,750	11,25
1,000	14,50
1,125	17,50
1,125	16,25



Folha 7

Atividade 3 Almoçando no restaurante

V= 12x

Peso (kg)	Preço (R$)
0	0
0,250	3,00
0,500	6,00
0,750	9,00
1,000	12,00
1,125	15,00

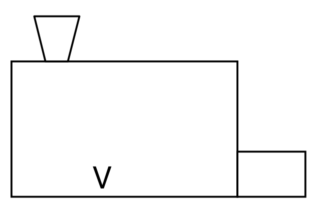
V = 14x

Peso (kg)	Preço (R$)
0	0
0,250	3,50
0,500	7,00
0,750	10,50
1,000	14,00
1,125	17,50

Entrada

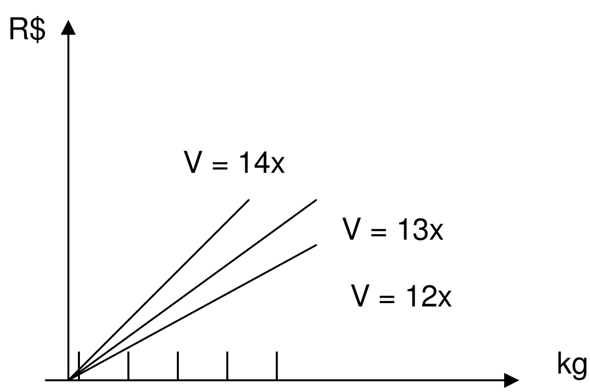
X

↓



→ V(x) Saída

Folha 8 Gráfico Valor a ser pago em função da quantidade de comida



Folha 9

Apresenta os gráficos das funções V= 13x e V = 13x + 1,5 utilizando um mesmo sistema de eixos, referentes à atividade 3, denominada Almoçando no restaurante.

Folha 10

Atividade 4 Esvaziando reservatório

Tabela Volume em função do tempo

Tempo	0	0,5	1	2	4,5	5	7
Volume	1000	900	800	600	100	0	0

Vazão de 200 litros por hora

Expressão algébrica que mostra o volume de água em função do tempo

$$L = \begin{cases} -200t + 1000 \quad para \quad 0 \leq t \leq 5 \\ 0 \quad para \quad t > 0 \end{cases}$$

Folha 11

Apresenta o gráfico do volume de água no reservatório em função do tempo referente à atividade 4.

Folha 12

Atividade 5 Máquina da Rosângela

Tabela

Número de entrada	Número de saída
U	f(u)
-5	-11
-0,5	-2
√3	2√3 - 1
U	2u - 1

Expressão algébrica que mostra o número de saída em função do número de entrada

S = 2u – 1   f(u) = 2u – 1

-11 = 2.(-5) –1   f(-5) = 2.(-5) –1

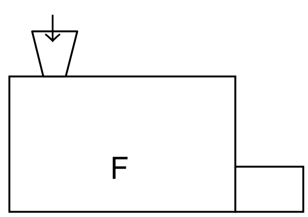
-2 = 2. (-0,5) – 1   f(-0,5) = 2. (-0,5) - 1

Folha 13

Atividade 5 Máquina da Rosângela

Entrada   f(2) = 2.5 – 1

U   f(u) = 2u - 1



→ f(u)

Saída

Na máquina da Rosângela, para cada número real u que entra, sai o número real f(u)

Os números de entrada são elementos de um conjunto denominado Domínio da função.

Os números de saída são elementos de um conjunto denominado Imagem da função.