ALECIO DAMICO

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE A FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE NÚMEROS RACIONAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
SÃO PAULO
2007

ALECIO DAMICO

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE A FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE NÚMEROS RACIONAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***Doutor em Educação Matemática****, sob a orientação da Profa. Dra. Sandra Maria Pinto Magina e sob a co-orientação do Prof. Dr. João Pedro da Ponte.*

PUC/SP
SÃO PAULO
2007

BANCA EXAMINADORA

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura:________________________________**Local e Data:**________

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização deste trabalho.

À Profa. Dra. Sandra Maria Pinto Magina, minha orientadora, por ter acreditado em mim e oportunizado este trabalho; pelas orientações valiosas, incentivo, apoio incondicional e por ter aberto as portas que me levaram a Portugal, proporcionando uma experiência que permanecerá indelével em minha memória. Para além de uma grande orientadora, uma grande amiga, cuja presença foi fundamental para a realização deste estudo.

Ao Prof. Dr. João Pedro Mendes da Ponte, grande orientador e amigo, com quem muito aprendi sobre formação de professores de Matemática. Agradeço pela carinhosa acolhida na Universidade de Lisboa durante o meu período de estágio, por todos os livros e artigos que me presenteou e por todas as horas de discussão que contribuíram enormemente para o meu amadurecimento.

À Capes, pela concessão de bolsa de estágio de doutorado (PDEE) em Portugal, na Universidade de Lisboa. Seguramente este estágio propiciou um grande salto qualitativo nesta investigação.

Ao Centro Universitário Fundação Santo André pelo incentivo a minha qualificação profissional propiciado pelo Regime de Tempo Integral ao qual estou vinculado.

A todos os professores e alunos das duas universidades pesquisadas, por terem contribuído com a coleta de dados, sem a qual este trabalho não seria possível.

Aos diretores e coordenadores dos cursos pesquisados, por terem permitido que a coleta de dados fosse realizada nestas duas conceituadas instituições de Ensino Superior.

Aos colegas do grupo de pesquisa da PUC-SP, pelas valiosas discussões e reflexões coletivas, meus sinceros agradecimentos. Aprendi muito com todos vocês.

Ao prof. Roberto Barbosa, grande educador e grande amigo, com quem muito aprendi sobre Educação Matemática.

Às professoras Esvetlana P. Lázaro e Diva V. Rebelo pela inestimável ajuda com a língua inglesa e francesa.

RESUMO

Neste estudo investigamos a formação inicial de professores de Matemática para o ensino dos números racionais no Ensino Fundamental. Foram pesquisados 346 estudantes para professores de Matemática (189 iniciantes e 157 concluintes) e 41 formadores de professores de duas universidades do ABC Paulista. A coleta de dados foi realizada por intermédio de cinco fontes, denominadas Instrumentos: Instrumento 1 (os alunos concluintes foram solicitados a criarem oito problemas envolvendo frações, com o objetivo de avaliar alunos do Ensino Fundamental; Instrumento 2 (os alunos concluintes resolveram os oito problemas que criaram); Instrumento 3 (todos os alunos, iniciantes e concluintes, foram submetidos a uma avaliação contendo vinte questões que versavam sobre conhecimentos fundamentais sobre números racionais); Instrumento 4 (entrevista interativa com 10% dos alunos concluintes participantes da pesquisa); Instrumento 5 (entrevista interativa com 41 professores). Optamos por uma abordagem qualitativa de interpretação dos dados. Em função do grande volume de informações, a análise qualitativa sempre foi precedida por um resumo estatístico, com o objetivo de mostrar a freqüência com que cada categoria ou subcategoria foi observada. Os resultados foram apresentados em três unidades de análise que abordam, respectivamente: o conhecimento matemático (conceitual e processual) dos estudantes para professores em relação a cinco subconstrutos ou significados das frações (parte-todo; operador; quociente ou divisão indicada; medida e coordenada linear); o conhecimento matemático e o PCK (conhecimento pedagógico do conteúdo ou conhecimento didático) em relação às operações básicas com frações (adição, multiplicação e divisão); os números racionais na formação universitária. Nossos dados apontam para o fato de que os estudantes para professores têm uma visão sincrética dos números racionais. Há um acentuado desequilíbrio entre o conhecimento conceitual e processual, com prevalência do processual, como também se observa um baixo nível de conhecimento didático relacionado às formas de representação dos conteúdos normalmente ensinados no Ensino Fundamental que versam sobre números racionais (frações).

Palavras-chave: Formação de Professores de Matemática; Números Racionais; Frações; PCK; Educação Matemática.

ABSTRACT

In this study we investigated the initial preparation of the Elementary School math teachers. 346 future math teachers were surveyed (189 first-year students and 157 last-year students) and 41 professors from two of the ABC 'paulista' region universities. The data gathering was accomplished from the five sources called Instruments: Instrument 1 (the last-year students were asked to create eight problems containing fractions aiming at the evaluation of the Elementary School students; Instrument 2 (the last-year students themselves solved the eight problems they created; Instrument 3 (all students, the undergraduates and the graduates, were submitted to an evaluation containing twenty problems about elementary knowledge of rational numbers); Instrument 4 (interactive interview with 10% of the last-uear students who took part in the research); Instrument 5 (interactive interview with 41 teachers). We have chosen a qualitative approach to analyze the data. Due to the great number of data the qualitative analysis was always preceded by a statistical summary account to show the frequency with which each category or sub-category was observed. The results were grouped into three units of analysis that respectively treated of the mathematical knowledge (concept and process) of the future teachers related to the five subconstructs or definitions of the fractions (part-whole; operator; quotient or indicated division; measurement and linear coordinate); the mathematical knowledge and the PCK (Pedagogical Content Knowledge or didactical knowledge) related to the elementary operations with fractions (addition, subtraction, multiplication and division) and rational numbers in the higher education. Our data draw our attention to the fact that future teachers have a syncretical vision of rational numbers. There is a significant unbalance between the concept and process knowledge, being greater the knowledge of the process, as well as it is also observed the low level of the didactical knowledge related to the forms of representation normally taught at the Elementary School which treat rational numbers (fractions).

Keywords: Preparation of the Mathematics Teachers; Rational Numbers; Fractions; PCK; Mathematics Education.

RÉSUMÉ

Dans cette étude, nous avons observé la formation initiale des professeurs des Mathématiques pour l'enseignement des nombres rationnels dans l'Enseigment Fondamental. On a recherché 346 étudiants envisageant d'être professeurs des Mathématiques (189 débutants et 157 en phase de conclusion) et 41 formateurs de professeurs dans deux Universités de l'ABC à São Paulo. La récolte des données a été réalisée au moyen de cinq sources, nommées Instruments: dans l'Instrument 1 (les étudiants concluants ont été solicités de créér huit problèmes à propos de fractions avec le but d'évaluer les élèves de l'Enseignement Fondamental); Instrument 2 (les étudiants concluants ont résolu les huit problèmes qu'ils ont créés); Instrument 3 (tous les étudiants , débutants ou concluants ont été soumis à une évaluation avec vingt questions sur les connaissances fondamentales des nombres rationnels); Instrument 4 (interview avec 10% des étudiants concluants faisant partie de la recherche); Instrument 5 (interview intératif avec 41 professeurs). Nous avons opté par un rapport qualitatif d'interpretation des données . En raison du grand nombre d'informations, l'analyse qualitative a été toujours précédée par un résumé statistique pour montrer la fréquence d'observation de chaque cathégorie ou sous-cathégorie. Les résultats ont été présentés en trois unités qui envisagent respectivement: la connaissance mathématique (conception ou processus) des étudiants à professeurs par rapport à cinq sousconstruits ou signifiés des fractions (partie-tout; opérateur;quocient ou division indiquée; mésure ou coordonnée linéaire); la connaisance mathématique et le PCK (connaissance pédagogique du contenu ou connaissance didactique) par rapport aux opérations fondamentales avec des fractions (addition, multiplication et division) et les nombres rationnels dans la formation uniersitaire. Nos données indiquent le fait que nos étudiants à devenir professeurs ont une vision sincrétique des nombres rationnels. Il y a un déséquilibre très fort entre la connaissance conceptuelle et la connaisance processuelle avec le domaine de celle-ci et on observe aussi un bas niveau de connaissance didactique par rapport aux formes de représentations des contenus d'ordinnaire enseignés à l'Enseignement Fondamental qui s'adressent aux nombres rationnels (fractions).

Mots-clé: Formation de Professeurs de Mathématiques; Nombres Rationnels; Fractions; PCK; Éducatin Mathématique.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

Página

INTRODUÇÃO

A formação de professores, de forma geral, tem sido problematizada e estudada com intensidade cada vez maior, o que pode ser constatado pelo grande número de teses, artigos e livros que vem sendo publicado nos últimos anos sobre este tema. As pesquisas nesta área cresceram não só quantitativamente, como qualitativamente, o que tem possibilitado um conhecimento mais detalhado das necessidades formativas dos professores. O professor, antes tomado como objeto passivo de estudo, hoje é visto como um profissional capaz de pesquisar, refletir e modificar sua própria prática a partir de seus conhecimentos, experiências, crenças e valores, ou seja, como um profissional capaz de articular seu próprio desenvolvimento profissional.

As componentes relacionadas ao conhecimento profissional dos professores, necessárias a uma docência de qualidade, são de natureza muito distintas e abrangentes. Especificamente, se considerarmos a prática pedagógica em Educação Matemática composta por múltiplas dimensões, cada uma delas com suas dificuldades intrínsecas, chegaremos à constatação de que a formação inicial do professor de Matemática é um grande desafio. Entre estes aspectos destacamos, por exemplo: a necessidade de construção de um amplo espectro de conhecimentos relacionados não só aos conteúdos que o futuro professor irá ensinar, como também o aprofundamento essencial do conhecimento das estruturas matemáticas; o conhecimento de contudo pedagógico geral e específico; o conhecimento de materiais de ensino, como manipulativos, softwares etc.; conhecimento dos alunos; conhecimentos das necessidades educativas; conhecimento dos contextos educativos; a formação de um profissional ético e consciente de sua função social e da necessidade de se envolver com o projeto político-pedagógico do seu futuro local de trabalho.

Quando pensamos em um currículo destinado à formação de professores de Matemática que contemple todas estas múltiplas dimensões, é fácil perceber o escopo do problema. Na visão de Walker (1973, p. 247), citado por Sacristán (2000, p. 21),

> os fenômenos curriculares incluem todas aquelas atividades e iniciativas através das quais o currículo é planejado, criado, adotado, apresentado, experimentado, criticado, atacado, defendido e avaliado, assim como todos os objetos materiais que o configuram, como os livros-texto, os aparelhos e equipamentos, os planos e guias do professor.

O currículo, desta forma, inclui valores explícitos e ocultos presentes no cotidiano escolar e que vão muito além de meros princípios de seleção e organização de conteúdos programáticos. Assim, o currículo destinado à formação do professor de Matemática deve ser concebido a partir da reflexão sobre a seguinte questão: O que devem saber e saber fazer os professores de Matemática para uma docência de qualidade? Em outras palavras: Quais são os conhecimentos profissionais necessários a uma docência de qualidade?

Partiremos do pressuposto de que a formação inicial dos professores, por melhor que ela seja, não é a panacéia que resolverá todos os problemas de ensino e de aprendizagem hoje constatados nas salas de aula, uma vez que estamos diante de um processo dinâmico que se inicia muito antes do ingresso do aluno na Universidade e se estende ao longo da trajetória profissional do professor. Acreditamos, contudo, que um bom processo de formação inicial pode ser um ponto de partida importante para transformações significativas das práticas pedagógicas atuais, além de propiciar a construção de um forte alicerce que facilitará o desenvolvimento profissional do futuro professor. Por esta perspectiva, a complexidade da atividade docente não deve ser encarada como uma barreira intransponível; ao contrário, deve ser um convite à pesquisa e a um trabalho que busque o rompimento com visões simplistas sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática.

Apesar desta forte crença na possibilidade de transformação das práticas pedagógicas dos futuros professores de Matemática por intermédio de uma boa formação inicial, não desconsideramos a existência de fortes influências antagônicas. A tradição enraizada na metodologia de ensino tradicional[1] é uma delas, que desde criança nos acompanha, influenciando enormemente nossas concepções e crenças sobre ensino e que vai gradativamente formando nosso

---

[1] Entendemos por “ensino tradicional” aquele em que, na maior parte das vezes, o professor se utiliza da exposição oral, em uma seqüência didática que normalmente inclui: a definição de um conceito, exemplos de aplicação e exercícios de fixação. Predominantemente observa-se a transmissão de conhecimentos elaborados por parte do professor.

ideário pedagógico sobre Educação Matemática. Não se trata de menosprezar o ensino tradicional, mas sim colocar em evidência o fato de que hoje já dispomos de um arcabouço de informações consistentes, que nos permitem melhor conhecer os processos de ensino e de aprendizagem que resultam em uma melhor qualidade de ensino.

Entre todas as múltiplas vertentes relacionadas com o conhecimento profissional dos professores de Matemática, duas delas têm sido bastante enfatizadas nos últimos vinte anos nas pesquisas sobre a formação de professores: o conhecimento da matéria de ensino e o conhecimento pedagógico do conteúdo. Shulman (1986, 1987) e outros autores fazem uma discussão ampla a respeito destas e de outras vertentes do conhecimento profissional, que apresentaremos mais detalhadamente na fundamentação teórica. Apenas a título de introdução, e com o objetivo de embasar o nosso problema de pesquisa, expomos nesta seção apenas a distinção entre o conhecimento da matéria de ensino e conhecimento pedagógico do conteúdo. Para Shulman (1986), conhecimento da matéria se refere à quantidade e organização de conhecimento na mente do professor e inclui a compreensão dos fatos principais, conceitos e princípios. Conhecimento pedagógico do conteúdo (Pedagogical Content Knowledge – PCK)[2] diz respeito à forma como o assunto é tratado, incluindo-se, aí, as formas mais úteis de representação das idéias, as analogias, ilustrações, exemplos, explicações, demonstrações, modos de representar e formular o assunto de maneira a torná-lo compreensível para os outros. Nestes termos, se inclui a compreensão do professor do que faz a aprendizagem de um tópico específico ser considerado fácil ou difícil.

Formar novos professores de Matemática desconsiderando os principais avanços que podem ser observados nos resultados de inúmeras pesquisas recentes em Educação Matemática, em especial sobre ensino e aprendizagem, parece-nos um imenso retrocesso. Em nossa pesquisa de mestrado (Damico, 1997), constatamos ser possível implantar um processo eficiente de formação continuada que seja capaz de produzir significativos avanços na metodologia de ensino utilizada por professores de Matemática do Ensino Médio, mesmo quando estes professores,

[2] Doravante, denominaremos Pedagogical Content Knowledge pela sigla PCK, como tem sido comum nos textos que tratam deste assunto. Com sentido análogo, também é bastante utilizada a expressão *Conhecimento Didático* ou *Conhecimento Didático do Conteúdo*, que será empregada em nosso texto, caso o autor citado faça menção explícita desta forma.

com características eminentemente tradicionais, são solicitados a empregarem procedimentos metodológicos complexos, como é o caso da chamada "Metodologia de Resolução de Problemas como uma Atividade de Investigação".[3]

Dando continuidade ao nosso interesse em aprofundar os conhecimentos sobre a formação de professores, motivados pela possibilidade de compartilhar os resultados conquistados, propusemo-nos a estudar nesta pesquisa a formação inicial de futuros professores de Matemática de duas Universidades do ABC Paulista, no que se refere ao seu nível de conhecimento matemático e PCK para o ensino de números racionais (frações), no Ensino Fundamental.

Behr, Harel, Post e Lesh (1992) afirmam que entre os pesquisadores e educadores matemáticos existe uma grande concordância de que aprender as noções envolvendo os números racionais continua sendo um sério obstáculo no aprendizado matemático de alunos. Este consenso é manifestado na semelhança das conclusões de investigações recentes sobre a construção da idéia de número racional pelos alunos (Freudenthal, 1983; Ohlsson, 1987, 1988; Bigelow, Davis e Hunting, 1989; Kieren, 1989). Estas constatações nos mostram que os problemas relacionados ao ensino e a aprendizagem dos números racionais são extremamente amplos e devem ser atacados por diversos ângulos; um deles é a formação de professores.

Resultados de avaliações internacionais, como a Avaliação Nacional do Progresso Educacional (Naep), analisada por Carpeter et al. (1976, 1980) e Post (1981), demonstraram que as crianças sentem dificuldades significativas na construção ou aplicação de conceitos de número racionais. Os resultados indicam que alunos dos 13 aos 17 anos de idade somam frações com o mesmo denominador com sucesso, mas só um terço com 13 anos de idade e dois terços com 17 anos somam corretamente 1/2 + 1/3. Segundo estes pesquisadores, o desempenho geralmente pobre pode ser um resultado direto da ênfase curricular calcada em procedimentos mecanizados, em lugar do desenvolvimento cuidadoso das compreensões das suas funções importantes.

No Brasil, os resultados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Relatório Saeb, 2001) revelam que os alunos da 4ª série do Ensino Fundamental sentem dificuldades em reconhecer partes de um todo e associá-los a

---

[3] Para maiores detalhes veja Damico (1997).

uma fração, quando não existe o apelo visual de figuras, por exemplo, desenhos de tortas fatiadas. O problema a seguir obteve apenas 35% de acertos: “Para fazer uma horta, Marcelo dividiu um terreno em sete partes iguais. Em cada uma das partes, ele plantará um tipo de semente. Que fração representará cada uma das partes dessa horta?” (Relatório Saeb, 2001, p. 29).

Salientamos, também, os resultados da análise pedagógica do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (Saresp, 1998), que indicam resultados igualmente preocupantes. A avaliação realizada com os alunos da 1ª série do Ensino Médio mostra que apenas 23% dos alunos do diurno e 19% dos alunos do noturno conseguem resolver situações-problema que envolvem operações (adição, subtração, multiplicação, divisão ou potenciação) com números racionais representados na forma fracionária (Análise pedagógica dos itens das provas: Matemática, v. 4, p. 64-68)

A revisão bibliográfica que efetuamos sobre o tema revelou a existência de um número bastante grande de pesquisas relacionadas aos problemas de aprendizagem das frações. O foco principal destas investigações está dirigido para o entendimento da cognição de alunos em idade escolar equivalente ao nosso Ensino Fundamental, perante problemas que envolvem a idéia de número racional em seus diferentes significados. O estudo de problemas relacionados à formação de professores para o ensino deste conteúdo permanece ainda muito pouco problematizado e explorado, o que justifica nossa escolha.

É importante salientar que não se trata de uma pesquisa isolada. Este trabalho é parte de um extenso projeto de investigação que está sendo produzido na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, que tem como objetivo investigar os problemas do ensino e da aprendizagem das frações, ou, mais amplamente, números racionais. Nosso grupo de investigação é constituído por cinco mestrandos e dois doutorandos que estão sob a orientação das Professoras Doutoras Sandra Maria Pinto Magina e Tânia Maria Mendonça Campos. Este grupo está inserido em um projeto de cooperação internacional com um grupo de investigação sobre os problemas de ensino-aprendizagem das frações, coordenado pela Profa. Dra. Terezinha Nunes da universidade de Oxford. Realizamos, também, estágio de doutorado na Universidade de Lisboa, sob a orientação do Prof. Dr. João Pedro Mendes da Ponte. Nossa contribuição, enriquecida pela reflexão coletiva dos vários grupos de discussão de que temos participado, dar-se-á na área de formação de professores de Matemática, mais precisamente a preparação dos futuros professores em relação à matéria de ensino (particularizada para os números racionais não negativos em sua representação fracionária).

Entre os problemas relacionados ao ensino-aprendizagem dos números racionais, um deles é de ordem semântica. Kieren (1976) foi o primeiro a introduzir a idéia de que os números racionais constituem-se de vários construtos. Inicialmente, este autor identificou sete interpretações para os números racionais:

a) os números racionais são frações que podem ser comparadas, somadas, subtraídas etc.;
b) os números racionais são frações decimais que formam uma extensão natural (via nosso sistema de numeração) dos números naturais;
c) os números racionais são classes de equivalência de frações. Assim {1/2, 2/4, 3/6, ...} e {2/3, 4/6, 6/9, ...} são números racionais;
d) os números racionais são números da forma p/q, em que p e q são inteiros e
e) os números racionais são operadores multiplicativos (por exemplo, "estreitadores", "alargadores" etc.);
f) os números racionais são elementos de um campo quociente ordenado e infinito. Há números da forma x = p/q, em que x satisfaz a equação qx = p;
g) os números racionais são medidas ou pontos sobre a reta numerada.

Posteriormente, este mesmo autor sintetiza os números racionais por meio de cinco idéias consideradas básicas e essenciais: relação parte-todo; quociente; medida; razão; operador.

De forma mais ampla, Behr, Harel, Post e Lesh (1992) propõem sete interpretações para as frações que eles chamam de subconstrutos:[4]

---

[4] Estes e outros autores utilizam livremente o termo "subconstruto" sem, contudo, o terem definido. O vocábulo "significado" também é bastante usado para se referir às várias interpretações das frações. Em sentido análogo, Ohlsson (1988) também adota a expressão "personalidades da frações". Para nós, "subconstruto" significará cada uma das partes em que o construto dos números racionais pode ser subdividido, em termos de significados das frações, mas que ainda assim são construtos matemáticos. No mesmo sentido, "construto matemático" para nós terá o sentido dado por Ohlsson (1988). Para esta autora os construtos matemáticos são úteis porque eles podem ser aplicados a situações do mundo real. Uma descrição de uma situação do mundo real em termos de construção matemática envolve pelo menos as quatro entidades seguintes: (a) um construto matemático, (b) uma situação do mundo real, (c) um conceito e (d) uma linguagem conceitual entre a construção matemática e a situação do mundo real que especifica a referência do construto dentro da aplicação particular. Um construto matemático pode ter múltiplos significados de aplicação se forem nomeadas linguagens diferentes em aplicações referencialmente diferentes. Há dois fatores que os construtos matemático podem significar. Primeiro, um construto adquire significado matemático na teoria na qual se insere. Os axiomas e teoremas da teoria funcionam como que significando postulados que especificam o significado do construto matemático. Segundo, um constructo adquire o significado das suas aplicações no mundo real.

a) o subconstruto “medida fracionária” que indica “a questão de quanto há de uma quantidade relativa a uma unidade especificada daquela quantidade”. Eles propuseram esta interpretação como uma reformulação da noção parte/todo;
b) o subconstruto razão;
c) o subconstruto taxa, que define uma nova quantidade como relação entre duas outras quantidades. O que distingue taxas de razões é que as taxas podem ser adicionadas, subtraídas enquanto as razões não;
d) o subconstruto quociente, que vê o número racional como resultado de uma divisão;
e) o subconstruto das coordenadas lineares, que interpreta o número racional como um ponto da reta numerada;
f) o subconstruto decimal que enfatiza as propriedades associadas ao nosso sistema de numeração;
g) o subconstruto operador, que vê a fração como uma transformação.

É importante destacar que as abordagens relacionadas anteriormente não exaurem as possíveis interpretações das frações e dos números racionais. Parece-nos consensual entre os pesquisadores dessa área que a aprendizagem dos vários construtos de números racionais é necessária para se obter um completo entendimento de sua natureza. Entretanto, entendemos que o problema não reside apenas em conhecer cada um dos subconstrutos isoladamente de forma fragmentada e compartimentalizada, mas sim com uma visão de conjunto e de forma inter-relacionada.

A relevância de uma sólida formação que permita aos alunos trabalharem com números racionais com desenvoltura se justifica por uma variedade de perspectivas; entre elas destacamos: (a) as relacionadas à estrutura educacional, uma vez que a presença dos números racionais no currículo de Matemática da Educação Básica é uma constante, dada a sua importância; (b) de uma perspectiva prática, ou seja, a habilidade em lidar com estes conceitos melhora imensamente a capacidade dos alunos em entender, controlar situações e resolver problemas do mundo real (Behr et al., 1983, p. 91-92); (c) de uma perspectiva psicológica, uma vez que permite desenvolver uma diversidade de competências cognitivas e prover as crianças e adolescentes de um rico campo conceitual a partir do qual se expandem estruturas mentais necessárias ao desenvolvimento intelectual continuado (Behr et al., 1983, p. 91-92); e (d) de uma perspectiva matemática, pois a compreensão dos números racionais provê uma sólida base conceitual na qual se apóiam estruturas matemáticas mais complexas (Behr et al., 1983, p. 91-92).

Apesar da grande importância dos números racionais no currículo de Matemática, vários pesquisadores (Behr et al., 1983; Bell, Costello e Kuchemann, 1983; Tatsouka, 1984; Ohlsson, 1988) apontam uma extensa relação de sérios problemas concernentes às dificuldades de aprendizagem deste assunto. Salientam que, entre os assuntos ensinados na Educação Básica, o conceito de número racional está entre as idéias matemáticas mais complexas para as crianças e adolescentes. As evidências, ressaltadas nas pesquisas destes autores, mostram que as crianças, não obstante os professores, só entendem e trabalham com desenvoltura com frações após muito esforço e dedicação e, ainda, com muita dificuldade de compreensão do significado das operações que executam.

Partimos da hipótese de que os cursos de Licenciatura em Matemática não têm oferecido aos futuros professores uma preparação sobre os números racionais com a abrangência e o cuidado que este assunto requer. Como conseqüência, os estudantes para professores estariam sendo formados com uma compreensão bastante limitada sobre os diferentes construtos que compõem o conceito de número racional, as dificuldades relacionadas ao seu ensino e sua aprendizagem na Educação Básica e, também, sobre a compreensão de sua estrutura como sistema, como conjunto de entes, relações e operações.

Com base nesta hipótese, nosso problema de pesquisa pode assim ser sintetizado:

Os alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática estão saindo das Universidades pesquisadas com uma formação que os capacite para o ensino dos números racionais no Ensino Fundamental?

Como formadores de professores de Matemática para os Ensinos Fundamental e Médio, estamos interessados em investigar alguns aspectos relacionados ao conhecimento matemático e ao PCK dos licenciandos em relação aos números racionais, que poderiam nos dar evidências sobre o grau de preparo dos futuros professores para o ensino deste assunto. Conhecimento matemático e

PCK são temas extremamente amplos, mesmo que particularizados para os números racionais. Desta forma, delimitamos a abrangência desta pesquisa para o estudo de três aspectos relacionados com a formação de professores para o ensino dos números racionais:

- O conhecimento matemático (conceitual e processual) dos estudantes para professores em relação a cinco subconstrutos ou significados das frações: parte-todo; operador; quociente ou divisão indicada; medida e coordenada linear.
- O conhecimento matemático e o PCK relativos às operações básicas com frações (adição, multiplicação e divisão). Segundo Shulman (1986), o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) está vinculado ao uso que o professor deve fazer de seus conhecimentos de Matemática nas situações de ensino. Nesta componente do conhecimento profissional do professor, enfatiza-se a forma como a Matemática deve ser apresentada no ensino. Destaca-se neste caso o conhecimento do professor sobre diferentes formas de como representar as idéias matemáticas para facilitar a aprendizagem. Nossa investigação sobre o PCK dos futuros professores quanto aos números racionais estará especialmente particularizada para a avaliação do conhecimento sobre diferentes formas de representação, principalmente geométricas, das operações básicas com frações.
- Os números racionais na formação universitária. Neste item faremos uma investigação a respeito das formas como os números racionais são introduzidos nas diferentes disciplinas que compõem os cursos pesquisados, procurando constituir o modelo de formação praticado pelas universidades pesquisadas, por intermédio da análise das concepções dos alunos e dos formadores de professores em relação ao ensino dos números racionais.

Para respondermos a nossa questão de pesquisa faremos uso de dados advindos de cinco fontes, denominadas por nós de Instrumentos. A descrição detalhada de cada um deles será apresentada no capítulo destinado à explicação dos Procedimentos Metodológicos. O resumo a seguir mostra uma visão geral de cada um dos Instrumentos:

- **INSTRUMENTO 1**: solicitamos a todos os alunos concluintes que criassem oito questões/problemas sobre frações destinadas a avaliar, de forma abrangente, os conhecimentos de alunos do Ensino Fundamental (1ª a 8ª séries);
- **INSTRUMENTO 2**: posteriormente, pedimos para que os alunos concluintes resolvessem as questões ou problemas por eles criados;
- **INSTRUMENTO 3**: avaliação dos conhecimentos básicos sobre números racionais. Esta avaliação foi aplicada a todos os alunos iniciantes e concluintes dos cursos de Licenciatura em Matemática pesquisados;
- **INSTRUMENTO 4**: entrevista interativa com 10% da população de alunos concluintes que participaram das etapas anteriores;
- **INSTRUMENTO 5**: entrevista interativa com professores cujas disciplinas tinham alguma ligação com números racionais, quer seja sobre o seu ensino, quer seja como aplicação deste conjunto numérico nos problemas cotidianamente propostos em sala de aula.

Com esta coleta de dados foi possível reunir um conjunto de informações consistentes que permitiram embasar uma ampla reflexão sobre o *status quo* da formação inicial dos professores de Matemática, das universidades pesquisadas, para o ensino dos números racionais. A análise destes dados, por sua vez, pode contribuir para uma discussão circunstanciada em termos de reformulações curriculares, intentando impedir que uma formação deficitária nesta área concorra para que as possíveis dificuldades de compreensão dos professores de Matemática sobre este assunto retroalimentem os erros conceituais observados nos alunos da Educação Básica.

Nosso objetivo com este amplo diagnóstico é identificar, descrever e categorizar a situação atual da formação dos futuros professores das universidades pesquisadas para o ensino dos números racionais, por intermédio da análise de situações que captem os conhecimentos matemáticos e didáticos dos estudantes para professores. O acúmulo sistemático destas descrições e reflexões permitirá compor um quadro compreensivo da situação atual dos cursos de formação de professores de Matemática, ponto de partida para um esforço de compreensão do currículo vigente. Um mapeamento dos aspectos positivos e negativos identificados no processo de formação inicial é condição necessária para refletir e compreendê-los nas suas dimensões histórica, didática, epistemológica e metodológica, possibilitando ao pesquisador explicitar, mais acuradamente, o conhecimento da cultura universitária quanto a sua necessidade e possibilidade de mudança do paradigma vigente.

Nosso problema de investigação se justifica a partir de múltiplas considerações, tais como:

- a escassez de trabalhos que tratam da formação inicial dos futuros professores de Matemática, no que tange ao seu conhecimento conceitual e metodológico para o ensino dos números racionais na Educação Básica;
- a falta de estudos sobre a forma ideal de como os números racionais devem ser inseridos e tratados nos currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática, com o objetivo de propiciar aos futuros professores uma boa formação;
- investir na preparação dos futuros professores para o ensino deste conteúdo se justifica, dado que a presença dos números racionais no currículo de Matemática da Educação Básica é uma constante e está plenamente justificado pelo seu interesse conceitual, permitindo o desenvolvimento de uma diversidade de competências cognitivas nos sujeitos em idade escolar;
- resultados de diversas investigações (Behr et al., 1983; Bell, Costello e Kuchemann, 1983; Tatsouka, 1984; Ohlsson, 1988) têm chamado a atenção para os muitos problemas de compreensão sobre números racionais que não se superam durante o período destinado à Educação Básica. Da mesma forma, por hipótese, se situam os professores durante o processo de formação, ou em pleno exercício da função profissional, que carregam dificuldades de compreensão deste conjunto numérico. A superação destas dificuldades é imprescindível para uma formação que capacite os futuros professores a uma docência de qualidade;
- as dificuldades relacionadas ao ensino-aprendizagem dos números racionais exigem um processo de formação de professores não trivial, pois demandam um incremento significativo de seus conhecimentos matemáticos sobre a estrutura peculiar deste conjunto numérico. Estrutura esta que tem apresentado problemas de compreensão e de aprendizagem conforme justificativas dadas anteriormente e que serão complementadas no capítulo seguinte. Entendemos que os licenciandos, durante seu período de formação, têm de construir conhecimentos conceituais sólidos sobre número racional, o que implica: um processo de reflexão, domínio e integração dos seus diferentes subconstrutos, com respectivo

domínio de sua simbologia específica; a realização de operações com desenvoltura e com compreensão do seu significado e não só como aplicação mecânica de algoritmos; a capacidade de elaboração de situações-problema relevantes que permitam construir e reinvestir conhecimentos de números racionais, relacionando e integrando os seus diferentes significados; a habilidade para utilizar modelos de representação adequados que possam “traduzir” coerentemente conceitos de números racionais e que possam servir como recurso didático para ensino deste conteúdo; a aquisição de estruturas algébricas formais relacionadas à construção do corpo dos números racionais necessária à solução de uma infinidade de problemas aritméticos, geométricos e algébricos etc.

Compreender quanto a formação inicial dos professores se distancia destas considerações é imprescindível para que se possa, com o auxílio dos resultados obtidos nesta e em outras pesquisas já desenvolvidas, propor modificações cientificamente embasadas que possibilitem uma melhor formação dos futuros professores.

O estudo está dividido em três capítulos. No primeiro apresentamos um embasamento teórico contendo duas partes: na primeira tecemos uma breve revisão teórica sobre formação de professores, enfocando principalmente os aspectos relacionados com o conhecimento matemático e o PCK; na segunda parte expomos uma revisão teórica sobre o ensino-aprendizagem dos números racionais. No segundo capítulo faremos uma descrição circunstanciada dos procedimentos metodológicos utilizados nesta investigação. O terceiro capítulo foi dedicado à análise dos dados coletados. Finalmente, apresentamos nossas conclusões e recomendações, seguidas da lista de Referências Bibliográficas utilizadas na elaboração e desenvolvimento desta investigação. Como complemento da revisão teórica, o leitor encontrará um apêndice sobre a construção dos números racionais e, também, um anexo contendo uma cópia dos Instrumentos 1, 2 e 3, além dos protocolos usados nas entrevistas com alunos e professores (Instrumentos 4 e 5, respectivamente).

CAPÍTULO 1
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 A formação de professores de Matemática

De forma geral, a literatura existente atualmente sobre formação de professores mostra um quadro complexo, envolto em metáforas diversas e, por vezes, marcado por uma "estandardização" de competências, imputando à prática docente uma racionalidade técnica. Para Schön (2000, p. 37), a competência profissional, no âmbito da racionalidade técnica, "consiste na aplicação de teorias e técnicas derivadas da pesquisa sistemática, preferencialmente científica, à solução de problemas instrumentais da prática". Na visão de Freitas (2004), esta racionalidade técnica corresponde a um retorno às concepções tecnicistas e pragmáticas da década de 1970, só que agora num patamar mais avançado, o que tem deslocado o referencial da qualificação profissional para o emprego para a qualificação do indivíduo, em que a concepção neoliberal de competência tem levado a centrar os processos de formação no desenvolvimento de competências comportamentais. No entanto, quando a discussão gira em torno das questões relativas ao ofício de professor, profissão docente, profissional professor, profissionalização ou desenvolvimento profissional, a literatura parece evidenciar uma grande convergência na necessidade da construção de saberes próprios desta profissão, habilidades específicas e conhecimento de normas e valores éticos que lhe são inerentes.

O interesse dos investigadores no professor de Matemática, tanto no ensino como nos processos de formação, tem mudado durante os últimos 30 anos. Para Llinares (1996), os primeiros estudos realizados consideravam variáveis criteriais (características pessoais dos professores, número de cursos realizados etc.) e a correlação destas variáveis com os resultados dos exames de seus alunos. Posteriormente, as investigações começaram a se centrar na avaliação daquilo que os professores conhecem e acreditam, como também nas variáveis intervenientes nos processos de ensino-aprendizagem e de aprender a ensinar. Assim, o centro do interesse tem se transladado para o professor em formação como indivíduo e aos processos de mudança e desenvolvimento que são constitutivos do processo de chegar a ser um professor. Em particular, estes estudos têm se voltado às cognições, crenças e aos processos mentais dos professores. Segundo este autor, em relação à atenção dada ao professor como uma variável na investigação, podem ser destacados dois aspectos relevantes. Por um lado, a evolução experimentada pela investigação educativa tem começado a singularizar os processos cognitivos que subjazem a conduta dos professores. Por outro lado, a inovação e o desenvolvimento do currículo nos últimos anos têm destacado o papel de filtro e adaptação que desempenham as cognições dos professores. Neste contexto, como aponta Shulman (1986), os processos cognitivos dos professores em relação à matéria que ensinam, bem como sua formação pedagógica, têm merecido atenção especial na análise do processo de aprender a ensinar.

Algumas áreas de pesquisa têm concentrado um grande número de investigações relacionadas com a formação de professores. Borko et al. (1990), que fizeram uma revisão bibliográfica sobre as investigações que analisavam os fatores intervenientes no processo de se chegar a ser um professor de Matemática, indicam que as pesquisas analisadas até aquele momento podiam ser agrupadas em três grandes áreas de estudo: (a) aprender a ensinar; (b) processos de socialização do professor e (c) processos de desenvolvimento profissional.

Recentemente, Ponte e Chapman (2006b) apresentaram um resumo histórico sobre as tendências das pesquisas em formação de professores. Indicam que nos anos 1970 eram comuns as questões de pesquisa relacionadas com as atividades em sala de aula, seguindo o paradigma processo-produto, focalizadas nos comportamentos dos professores. A atenção estava voltada para o que o professor faz na sala de aula relativamente aos desempenhos dos estudantes. Referem que, depois, nos anos 1980, as abordagens cognitivas tornaram-se populares. A atenção principal foi colocada na opinião e nas concepções dos professores em relação às estruturas que explicavam a sua atividade, quer seja na resolução dos seus problemas práticos, como também nos processos de tomada de decisão em relação a estes problemas. A noção de reflexão sobre a prática como uma maneira de melhorá-la tornou-se também proeminente. Finalmente, indicam que os anos 1990 viram emergir as perspectivas socioculturais, dando ênfase à importância de ver os professores na sala de aula, no contexto social e como membros de comunidades profissionais. As perspectivas e os métodos que foram usados nos estudos recentes sobre formação inicial de professores refletem esta evolução. As pesquisas sobre a formação inicial de professores de Matemática têm utilizado abordagens teóricas e metodológicas diversificadas e poderosas. Entretanto, parece seguir “ondas de interesse”, geradas freqüentemente por novos conceitos que ganham forte visibilidade. Isto é o que tem acontecido com as noções sobre crenças e concepções, conhecimento de conteúdo pedagógico, reflexão, investigação e, mais recentemente, comunidades da prática. No entanto, segundo os autores, a formação inicial do professor é um processo complexo, que é difícil reduzir a um conjunto restrito de conceitos, mesmo sendo parte de teorias poderosas. Conseqüentemente, o estudo sobre a formação inicial de professores requer a mobilização e uma integração de campos e de teorias diferentes.

Uma outra área de pesquisa em franca evolução é a que trata dos processos de desenvolvimento profissional dos professores de Matemática. Para Guimarães (2005) o reconhecimento da importância da aprendizagem contínua do professor para adaptar-se ao contexto complexo e problemático em que se desenvolve seu trabalho tem dado lugar a um incremento de investigações sobre o desenvolvimento profissional, considerando-o como um processo decisivo para melhorar o âmbito educativo.

Segundo Ponte (1995), há uma diferença entre formação e desenvolvimento profissional do professor. A formação está muito associada à idéia de “freqüentar” cursos, enquanto o desenvolvimento profissional ocorre de múltiplas formas, como atividades, projetos, trocas de experiências, leituras, reflexões e, inclusive, freqüentar cursos. Na formação o movimento é essencialmente de fora para dentro, cabendo ao professor assimilar os conhecimentos e as informações que são transmitidas, ao passo que no desenvolvimento profissional é de dentro para fora, imputando ao professor autonomia para tomar decisões fundamentais e empreender projetos. Os processos de formação procuram atender os professores naquilo em que eles são carentes, ao passo que no desenvolvimento profissional dá-se especial atenção às suas potencialidades. Outra diferença entre formação e desenvolvimento apontada pelo autor é de que a formação tende a ser vista de modo compartimentado, por assuntos ou por disciplinas, enquanto o desenvolvimento profissional atua no professor como um todo, ou seja, nos seus aspectos cognitivos, afetivos e relacionais. A formação parte invariavelmente da teoria e freqüentemente não chega a sair da teoria, ao passo que o desenvolvimento profissional tende a considerar a teoria e a prática de uma forma interligada.

Finalmente, o desenvolvimento profissional acontece ao longo de toda a carreira e, hoje em dia, é um aspecto marcante da profissão docente.

Quando se refere especificamente ao desenvolvimento profissional de professores de Matemática, Ponte (1995) salienta que a sua finalidade é tornar os professores mais aptos a conduzir um ensino de matemática adaptado às necessidades e interesses de cada aluno e a contribuir para a melhoria das instituições educativas, realizando-se pessoal e profissionalmente. No desenvolvimento profissional dá-se grande importância à combinação de processos formais e informais. O professor deixa de ser objeto para ser sujeito da formação. Quando se refere à competência, o autor destaca a necessidade de desenvolver nos futuros professores as competências referentes ao domínio dos conteúdos matemáticos, de seus significados em diferentes contextos e de sua articulação interdisciplinar. O professor de Matemática faz parte de uma equipe escolar responsável não apenas pela aprendizagem nesta disciplina, mas também pela formação geral do aluno, o que torna imprescindível o desenvolvimento das competências referentes à compreensão do papel social da escola. Assim, é importante que as competências matemáticas sejam desenvolvidas de forma articulada com o conhecimento pedagógico e do conhecimento de processos de investigação que possibilitem o aperfeiçoamento da prática pedagógica. Além disso, um curso de formação de professores deve destacar as competências referentes ao gerenciamento do próprio desenvolvimento profissional.

Voltando nossa atenção especificamente para a formação de professores no Brasil, Bellochio, Terrazan e Tomazetti (2004) argumentam que nos anos 1970 a docência era compreendida como um fazer técnico que tinha sua sustentação basicamente nos conhecimentos científicos. O Brasil encontrava-se em um momento tecnicista em que para ser professor era necessário o domínio de teorias e conhecimentos deduzidos a partir de procedimentos e regras de ação em forma de receituário. O professor era visto como um técnico. Nos anos 1980 houve um movimento de reação a esta concepção. No discurso educacional a palavra “técnico” foi gradualmente substituída pela palavra “educador”. Esta concepção imputa ao professor um comprometimento que vai além do saber a ser ensinado, ou seja, representa o comprometimento do professor com a formação do cidadão crítico e responsável pela mudança social. A partir dos anos 1990 alguns adjetivos foram agregados à palavra professor, por exemplo: profissional, pesquisador e reflexivo.

Todas as tendências de pesquisas apresentadas anteriormente convergem para uma melhor compreensão sobre os aspectos desafiadores envolvidos no processo de vir a ser um professor. Uma vez que a nossa investigação está centrada na formação inicial de professores de Matemática, é pertinente passar brevemente em revista alguns aspectos relacionados com os cursos de licenciatura, mais precisamente os ministrados no Brasil. Os primeiros cursos de formação de professores de Matemática no Brasil, as chamadas licenciaturas, eram constituídos de três anos de formação específica e mais um ano de formação pedagógica. Este sistema, conhecido como "3 + 1", tinha a sua carga horária predominantemente voltada para a formação específica, ou seja, o fortalecimento do conhecimento matemático do futuro professor. Os alunos ingressantes nos cursos de Matemática podiam optar, após a conclusão do terceiro ano, entre bacharelado ou licenciatura, ou seja, os três primeiros anos eram comuns, fazendo-se a distinção apenas no último ano. Este sistema também era denominado de "Bacharelado + Didática", no caso dos licenciandos. Neste sistema, a formação pedagógica, além de reduzida, consistia em um conjunto de técnicas que procuravam dar suporte às formas de transmissão de saberes elaborados, reforçando o que hoje denominamos de "ensino tradicional". Também existiam as licenciaturas "curtas" (realizadas em três anos), que habilitavam os professores para a docência da 5ª a 8ª série do antigo 1º grau (hoje Ensino Fundamental), e as licenciaturas "plenas" (realizada em 4 anos), que habilitavam para a docência no 1º e 2º graus (hoje denominado Ensino Médio).

Moreira e David (2005) argumentam que a partir da década de 1970 uma discussão mais intensa sobre o papel social e político da educação começou a impulsionar mudanças estruturais nos cursos de licenciatura. Entre as propostas e concepções mais debatidas, destaca-se aquela em que a formação do professor deveria ocorrer de forma mais integrada, em que o conhecimento específico sobre a disciplina não se constituísse em foco dominante no processo de formação. Apontava-se, assim, a necessidade de aprofundar a formação do professor como educador. Por conseguinte, gradualmente os cursos começaram a apresentar modificações, de modo que a formação pedagógica não ficava limitada a transmissão de técnicas de ensino, mas começava a se articular com disciplinas, tais como Sociologia da Educação, Política Educacional, entre outras. Contudo, segundo os autores, permanece o problema de integração desses saberes com a prática profissional dos professores.

Com a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional/LDBEN no final de 1996, as metas do sistema educacional brasileiro são sinalizadas, com o delineamento das diretrizes básicas a serem seguidas pelas escolas em todo o território nacional. Além da Educação Básica, constituída da Educação Infantil, o Ensino Fundamental e Médio, a LDBEN também dá suporte legal para a formação de professores. Destaca-se o artigo 62 que diz: “a formação de docentes para atuar na educação básica far-se-á em nível superior, em curso de licenciatura, de graduação plena [...]”. Salienta-se, neste caso, o fato de que todas as licenciaturas pós-LDBEN são plenas.

Apesar dos avanços observados nas pesquisas em relação às necessidades formativas dos professores, assim como nas leis que regem o sistema educativo, a situação atual da formação inicial de professores promovida pelos cursos de licenciatura parece não acompanhar estes avanços e continua a merecer sérios questionamentos, como ressalta Schnetzler (1998, p. 7):

> [...] Calcados no modelo da racionalidade técnica, os currículos de formação docente têm instaurado a separação entre a teoria e a prática, entre a pesquisa educacional e o mundo da escola, entre a reflexão e a ação ao abordar situações e problemas pedagógicos ideais, porque estão abstraídos do contexto e da vivência concreta das instituições escolares. Concebidos como técnicos, os professores, ao final de seus cursos de licenciatura, vêem-se desprovidos do conhecimento e de ações que lhe ajudam a dar conta da complexidade do ato pedagógico, ao qual não cabem receitas prontas nem soluções padrão, por não ser reprodutível e envolver conflito de valores.

Uma breve análise do cenário mundial aponta questões importantes que obviamente influenciam a educação, tais como: a veloz disseminação das tecnologias de informação, induzindo modificações nas formas de convivência social; a globalização influenciando muitos setores, como a internacionalização da economia; a organização e a capacitação para o mundo do trabalho etc. Este panorama se configura como um enorme desafio para a educação, cuja centralidade está no conhecimento, o que, naturalmente, tem implicações com a agenda curricular de formação dos profissionais da educação. Em conseqüência destas ampliações da visão sobre o ensino e do papel social do professor, importantes questionamentos emergiram ressaltando a necessidade de desenvolvimento de novos currículos, novos métodos de ensino voltados para a preparação de professores para atuarem nos níveis fundamental e médio.

Considerando especificamente a formação inicial do professor de Matemática e o conjunto de conhecimentos, habilidades e competências necessários a esta formação, surge a necessidade de resposta para a seguinte questão: o que devem saber e saber fazer os professores de Matemática para uma atuação profissional de qualidade? A busca de respostas para esta difícil questão nos remete à análise das idéias principais relacionadas a um amplo campo de pesquisa, comumente denominado de *conhecimento profissional.* Naturalmente, a nossa intenção nesta fundamentação teórica não é fazer um exame exaustivo sobre todos os aspectos ligados ao conhecimento profissional, e sim canalizar nossa discussão para uma reflexão sobre as questões mais intimamente relacionadas com o conhecimento profissional adquirido durante a formação inicial, mais precisamente os aspectos relativos ao conhecimento matemático e didático sobre os números racionais dos futuros professores.

1.1.1 Conhecimento profissional

Ponte e Oliveira (2002) definem o conhecimento profissional como

> o conhecimento necessário para desempenhar com sucesso uma atividade profissional, que se debate com questões bastante diferentes das da vida acadêmica ou da vida cotidiana. Uma atividade profissional envolve tanto processos de rotina como a resolução de problemas concretos num domínio delimitado de prática social.

Referindo-se especificamente aos professores, os autores salientam que o conhecimento profissional

> envolve o conhecimento relativo à prática letiva na sala de aula e a outros papéis profissionais, tais como a tutoria de alunos, a participação em atividades e projetos da escola, a interação com membros da comunidade e o trabalho em associações profissionais (p.146).

Para Climent (2002), o conhecimento profissional dos professores de Matemática consiste na junção de todos os saberes e experiências que os professores possuem e usam no seu cotidiano profissional e que são construídos a partir de sua formação inicial, tendo uma continuidade durante toda a sua carreira profissional. Elbaz (1983) estudou o caso de uma professora de inglês identificando vários componentes do que ela denominou de “conhecimento prático do professor”. Para a autora o conhecimento profissional resulta da articulação entre o conhecimento teórico e a experiência do professor, envolvendo componentes, tais como conhecimento da matéria de ensino, conhecimento do currículo, conhecimento do contexto educacional e, também, o conhecimento de si mesmo. Também Bromme e Tillema (1985) entendem o conhecimento profissional como um conhecimento eminentemente orientado para a atividade profissional.

> Este conhecimento inclui não só informações específicas sobre dados e métodos de comprovação de resolução de problemas, como também a informação necessária para definir e compreender os problemas que devem enfrentar o profissional (p. 263).

As reflexões sobre a natureza do conhecimento profissional do professor de Matemática e a análise de seus diferentes componentes têm sido de interesse para a investigação. As diferentes abordagens adotadas para estudar este tópico mostram sua complexidade (Bromme, 1994; Fennema e Loef, 1992; Llinares e Sánchez, 1990). Analisar o conhecimento profissional do professor de Matemática é uma tarefa difícil, visto que tem componentes tácitas e explícitas, tem elementos conectados na experiência prática do professor, como também requerem conteúdo mais teórico, e tudo isto aliado a uma certa componente pessoal e contextualizada. Ademais, a análise do uso que um professor faz de seu conhecimento e das situações de ensino tem indicado que suas crenças epistemológicas e as condições contextuais em que se tomam decisões também intervêm em seus processos de raciocínio pedagógico (Llinares, 1996).

Conhecimento profissional envolve assim uma abundância de aspectos que designam ou que dão qualidade e forma ao conjunto de saberes e destrezas inerentes à profissão. Sem ter a pretensão de esgotar a relação de componentes necessários à categorização do conhecimento profissional, é possível dizer que estes envolvem aspectos relacionados a um conjunto de conhecimentos, concepções, atitudes e capacidades inerentes ao ato de ensinar. Entre todos os aspectos envolvidos no conhecimento profissional, e levando em consideração os objetivos desta investigação, focaremos nossa revisão bibliográfica em alguns elementos relativos aos saberes acadêmicos envolvidos na formação de professores de Matemática. Entre estes saberes, daremos especial atenção: ao conhecimento sobre a matéria de ensino, suas aplicações e relações com outros saberes; aos conhecimentos ligados ao ensino de Matemática; a natureza e fontes de conhecimento profissional concernentes ao ensino de Matemática. Faremos também algumas breves considerações sobre a importância da reflexão e da investigação na formação do professor.

Shulman (1986) faz uma distinção entre três categorias relacionadas ao conhecimento da matéria de ensino:

- ***conhecimento da matéria**,* que se refere-se à quantidade e organização de conhecimento na mente do professor e inclui a compreensão dos fatos principais, conceitos e princípios;
- ***conhecimento pedagógico do conteúdo (Pedagogical Content Knowledge – PCK)***, que diz respeito à forma como o assunto é tratado, incluindo-se aí as formas mais úteis de representação das idéias, as analogias, ilustrações, exemplos, explicações, demonstrações, modos de representar e formular o assunto de maneira a torná-lo compreensível para os outros;
- ***conhecimento curricular***, representado pelo projeto completo dos programas de ensino e que abrange desde assuntos particulares ao nível dos tópicos à variedade de materiais de ensino disponíveis em relação a esse programa, e o conjunto de características que servem particularmente como indicação e contra-indicação quanto ao uso de um determinado material em circunstâncias particulares.

De forma mais ampla, Shulman (1987) salienta que no processo de formação do professor é necessária a constituição de uma base de conhecimentos para o ensino. Esta base é composta por várias categorias que abrangem: um corpo de compreensões; habilidades; conhecimento do conteúdo específico da sua disciplina; conhecimento pedagógico geral; conhecimento de currículo; conhecimento pedagógico relativo ao conteúdo de ensino; conhecimento de outros conteúdos relativos à disciplina de ensino; conhecimento das características dos alunos; conhecimentos dos contextos educacionais e seus fins; propósitos e valores educacionais. Isto tudo é necessário ao futuro professor, para que ele possa levar a cabo processos de ensino-aprendizagem em diferentes níveis, contextos e modalidades. Para o autor, esta base de conhecimentos é relativa a um repertório profissional que contém categorias de conhecimentos inerentes à compreensão que o professor necessita ter para desenvolver suas atividades de forma a promover a aprendizagem dos alunos.

Apesar do seu caráter amplo, o modelo de Shulman sobre o conhecimento profissional também sofre críticas. Por exemplo, Gimeno e Perez (1993) consideram-no academicista por deixar em segundo plano o conhecimento que deriva das experiências práticas dos professores. Ponte e Chapman (2006a), por seu turno, criticam o seu caráter formal e a sua falta de referência explícita às práticas de ensino e ao contexto letivo e profissional do professor. De forma oposta, Serrazina (1998, p. 94) situa o modelo de Shulman (1986) como uma reação à investigação sobre o conhecimento profissional que valorizava quase que exclusivamente a prática.

Muitos são os modelos que procuram caracterizar o conhecimento profissional (por exemplo, Blanco, Mellado e Ruiz, 1995; Elbaz, 1983; Leinhardt et al., 1985, 1986, 1991; Ponte e Oliveira, 2002; Porlán e Rivero, 1998, entre outros), contudo em certa medida todos eles apresentam alguma limitação, em função da abrangência dos aspectos envolvidos neste tema. Neste trabalho, centraremos nossa atenção em duas componentes relativas ao conhecimento profissional do professor descritas por Shulman: o conhecimento da matéria (no nosso caso o conhecimento matemático) e PCK. Esta pontuação não significa estabelecer uma fronteira nítida entre conhecimento do conteúdo e PCK, uma vez que um se nutre do outro.

1.1.1.1 O conhecimento da matéria de ensino

Um componente importante do conhecimento profissional do professor está relacionado com o conhecimento da matéria relativa a sua especialidade. A necessidade de saber em profundidade a matéria que o professor vai ensinar é um ponto em que encontramos a mais absoluta concordância entre os pesquisadores na área de formação de professores. Se admitirmos que o ensino de um conteúdo matemático esteja estreitamente ligado à habilidade do professor em criar/selecionar e organizar tarefas/atividades, levantar questões produtivas sobre o assunto em pauta, implantar uma metodologia eficiente para a construção dos conhecimentos desejados e avaliar a aprendizagem dos alunos, então a compreensão profunda do que deve ser ensinado passa a ser uma exigência central do ato de ensinar.

A partir dos anos 1990 as pesquisas sobre o conhecimento matemático dos professores passaram por uma revitalização. O foco principal destas investigações estava centrado, principalmente, no estudo das compreensões dos professores em relação a tópicos matemáticos específicos que fazem parte dos currículos escolares (Ball, 1990a; Even, 1989, 1993; Even e Tirosh, 1995; Tirosh e Graeber, 1990).

Argumentos filosóficos, tanto quanto o senso comum, suportam a convicção de que o conhecimento da matéria, por parte do professor, influencia nos seus esforços em ajudar os seus alunos a aprenderem essa matéria (Ball e McDiarmid, 1990). Várias pesquisas (Grossman, 1988; Lampert, 1986; Leinhardt e Smith, 1985; Shroyer, 1981; Wilson, 1988; Wineburg e Wilson, 1988) sobre o conhecimento do professor têm revelado de que maneiras estes conhecimentos afetam o aprendizado dos seus estudantes. Se os professores tiverem informações imaturas ou restritas sobre a matéria que ensinam, podem passar estas idéias a seus estudantes. Podem, sobretudo, não desafiar as concepções errôneas dos estudantes, como também usar informações e textos acriticamente ou alterá-los indevidamente (Ball e McDiarmid, 1990).

A matéria, objeto de ensino, que estamos nos referindo tem uma estrutura que pode ser dividida em duas categorias denominadas por Schwab (1978, apud Shulman, 1986) de estruturas substantivas e estruturas sintáticas. As estruturas substantivas correspondem à variedade de modos nos quais são organizados os conceitos básicos e princípios da disciplina e que são utilizados para incorporar os fatos. Por seu turno, a estrutura sintática é o conjunto de modos no qual verdades ou falsidades, validades ou invalidades são estabelecidas no âmbito da ciência a que se refere a matéria. Trata-se de um conjunto de regras que determinam o que é legítimo em certo domínio e que fatores rompem com estas regras. Segundo estas definições, incrementar o desenvolvimento do conhecimento substantivo dos futuros professores em relação à Matemática corresponde a construir conhecimentos de tudo aquilo que é convencionalmente pensado como o conhecimento da matéria. Isto inclui um amplo e profundo conhecimento de conceitos específicos e definições, regras e procedimentos, como o que é uma função, uma circunferência, uma equação, como encontrar o valor máximo de uma função, resolver uma equação etc.

Para Shulman (1986) é importante que os professores não só sejam capazes de definir para os estudantes as verdades aceitas em certo domínio, mas que também conheçam formas diferenciadas de explicar por que uma determinada proposição particular é julgada verdadeira, por que é importante saber aquilo e como aquilo se relaciona com outras proposições. De forma similar, Ball e McDiarmid (1990) fazem referência ao conhecimento *sobre* o assunto. Para estes autores, isto significa conhecer a validade relativa de diferentes idéias matemáticas; saber a distinção entre convenção e construção lógica, por exemplo: a indefinição da divisão por 0 ou qualquer número elevado a 0 é igual a 1 etc. Inclui, também, o conhecimento das relações existentes entre a Matemática e outros campos do saber e o conhecimento das atividades matemáticas fundamentais (como fazer conjecturas, justificar proposições e validar soluções e generalizações).

Ter um profundo conhecimento de Matemática não garante, por si só, a capacitação de um professor para a realização de um bom ensino. Ma (1999) observou que os estudantes chineses ultrapassavam normalmente os estudantes norte-americanos em comparações internacionais que avaliavam a competência matemática relativa à escolaridade básica. Paradoxalmente, a pesquisa de Ma (idem) mostrou que, embora os professores dos Estados Unidos da América tivessem tido uma formação matemática mais avançada durante a Educação Básica e a universidade em relação aos professores chineses, estes mostraram uma melhor compreensão do conhecimento matemático do ensino básico comparativamente aos professores americanos.

Ma (ibidem) defende a idéia de que os professores não só devem saber a Matemática com "profundidade", mas com "profundidade e largura". A autora define a compreensão de um tópico com profundidade "como a forma de conectá-lo a idéias conceituais mais poderosas e gerais em relação ao assunto. Quanto mais próxima uma idéia é da estrutura da disciplina, mais poderosa será e, conseqüentemente, mais tópicos será capaz de abarcar" (p. 121). Compreender um tópico com "largura" significa "conectá-lo com aqueles similares ou de menor poder conceitual". Compreendendo a dificuldade de definição das metáforas "profundidade" e "largura" do conhecimento, argumenta que, para alguns investigadores da área educacional, a profundidade do conhecimento dos professores em relação à matéria de ensino parece ser *sutil e intrigante*. Por um lado, parece inequívoco que a compreensão dos professores quanto à matéria de ensino deve ser profunda (Ball, 1989; Grossman, Wilson e Shulman, 1989; Marks, 1987; Steinberg, Haymore e Marks, 1985; Wilson, 1988). Por outro lado, há que ter em atenção que o termo profundidade é "vago", "inclusive em sua definição e medida" (Ball, 1989; Wilson, 1988).

Ma (1999) conclui sua pesquisa argumentando que a *compreensão profunda da Matemática fundamental* é mais do que uma compreensão conceitual sadia da Matemática elementar. Ela é a consciência da estrutura conceitual e das atitudes básicas do matemático inerentes à Matemática elementar e da habilidade de fornecer uma fundamentação para essa estrutura conceitual, facilitando a construção de conhecimentos por parte dos estudantes. Como fruto da sua investigação, a autora identificou uma série de características próprias dos professores que possuem uma profunda compreensão da Matemática fundamental:

- O ensino de um professor com compreensão profunda da Matemática fundamental tem conectividade, ou seja, faz conexão entre conceitos matemáticos e procedimentos, evitando que a aprendizagem dos alunos seja fragmentada; em vez de aprenderem tópicos isolados, os alunos aprendem um corpo unificado de conhecimentos.
- Aqueles que atingiram um alto grau de conhecimento da Matemática elementar apreciam os diferentes aspectos de uma idéia e as várias abordagens à resolução de uma questão, assim como as suas vantagens e inconvenientes. Além disso, são capazes de fornecer explicações matemáticas desses aspectos e abordagens. Deste modo, os professores podem guiar os seus alunos em direção a uma compreensão flexível da disciplina.
- Professores que tenham um profundo conhecimento da Matemática fundamental têm uma atitude favorável em relação à Matemática e estão particularmente atentos aos "simples, mas poderosos conceitos e princípios básicos da matemática", além de terem a tendência a revisitar e reforçar essas idéias básicas. Ao centrarem a sua atenção nessas idéias básicas, os alunos não são apenas encorajados a abordar problemas, mas são conduzidos a desenvolver atividade matemática real.
- Finalmente, professores com um alto grau de conhecimento da matemática elementar não estão limitados ao conteúdo que deve ser ensinado num certo ano de escolaridade. Em lugar disso, têm um conhecimento profundo de todo o currículo matemático elementar. Estão preparados para aproveitar sempre uma oportunidade para rever conceitos cruciais que os alunos estudaram anteriormente. Além disso, sabem o que os alunos deverão aprender a seguir, e aproveitam as oportunidades para estabelecer as bases para essa aprendizagem.

Wilson, Shulman e Richert (1987) argumentam que os professores deveriam possuir um "repertório representacional" para a matéria que ensinam. Se este repertório se estende, conseqüentemente a compreensão que o professor tem da matéria também fica ampliada e enriquecida. Para estes autores este repertório inclui uma interpretação crítica dos conteúdos de ensino. Isto implica que o professor deve saber analisar criticamente os textos, livros didáticos, assim como os materiais que utiliza em suas aulas.

Ponte e Chapman (2006a) analisaram os trabalhos produzidos pela comunidade do PME centrados no conhecimento matemático do professor e sua prática. Para realização do estudo, classificaram os trabalhos em quatro grandes categorias: (a) conhecimento matemático dos professores; (b) conhecimento sobre ensino de Matemática; (c) crenças e concepções dos professores e (d) prática. O estudo mostra que, em todas as quatro categorias do conhecimento dos professores e sua prática, a imagem emergente revela os professores como profissionais com conhecimento deficiente, em particular sobre Matemática e ensino de Matemática. Entre os problemas relacionados ao conhecimento da matéria de ensino por parte dos professores em formação, apontados nas pesquisas analisadas pelos autores, destacam-se os seguintes: representações incompletas e compreensão reduzida sobre frações (em especial sobre divisão de frações); falta de habilidade em conectar situações do mundo real e cálculo simbólico; definições e imagens distorcidas sobre os números racionais; conhecimento adequado sobre procedimentos algorítmicos, mas inadequado em relação à compreensão do significado das operações que realizam; falta de conhecimento sobre os conceitos geométricos básicos; sérias dificuldades com a Álgebra e no raciocínio lógico.

Estas deficiências detectadas no conhecimento dos professores concernente à matéria de ensino podem ser um dos fatores que levem os professores a sentir necessidade de desenvolvimento profissional nesta área. Em um estudo recente sobre o desenvolvimento profissional de professores de Matemática, Cohen e Hill (2001) detectaram que o tipo de programa de desenvolvimento profissional que mais influenciava a prática cotidiana dos professores está focalizado em ensino de conteúdos curriculares particulares, tanto quanto em idéias matemáticas e nos pensamentos dos estudantes sobre essa mesma Matemática. Os resultados da pesquisa apontam para a necessidade de sondar com mais cuidado o conteúdo do desenvolvimento profissional e identificar as variáveis curriculares associadas à aprendizagem dos professores (Hill e Ball, 2004).

Refletindo sobre a forte ênfase dada ao conhecimento de Matemática em detrimento do conhecimento sobre Matemática durante a formação inicial de professores, Ball e McDiarmid (1990) argumentam que isto pode ter influência na forma como os futuros professores concebem o ensino de Matemática. Segundo estes autores, embora epistemologicamente estes assuntos sejam raramente tratados explicitamente nas salas de aula, eles estão implicitamente organizados no currículo de formação, na interação entre professores e estudantes e na natureza da atividade e do discurso da sala de aula. Por exemplo, no caso da história, os estudantes podem vê-la como uma seqüência de fatos do passado ou na Matemática como um conjunto de regras, fatos e respostas claramente certas ou erradas. Esta visão dos estudantes para professores sobre a natureza dos assuntos que estudam constitui um elemento crítico de seu conhecimento em relação à matéria, influenciando também seus entendimentos substantivos.

1.1.1.2 O conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK)

O conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) vai muito além do conhecimento do assunto. Inclui, também, a necessidade de o professor saber o que faz a aprendizagem de um tópico ser mais fácil ou mais difícil, a necessidade de o professor saber identificar as concepções errôneas dos estudantes e conhecer estratégias frutíferas que promovam a reorganização e a compreensão do que está sendo ensinado (Shulman, 1986, p. 10-11).

Shulman (1987, p. 8) argumenta que o PCK incluiu atributos especiais, que permitem ao professor que os possui ajudar melhor os seus alunos a entenderem os conteúdos. Para este autor, o PCK, entre outras componentes, incluiu: “uma compreensão de tópicos particulares; problemas; as formas de como os assuntos podem ser organizados, apresentados e adaptados aos interesses diversos e habilidades dos alunos” (p. 15). Sugere ainda que a base do conhecimento para o ensino está na interseção do conteúdo e da pedagogia. É importante que o professor saiba transformar o seu conhecimento dos diversos conteúdos de ensino em formas que sejam pedagogicamente poderosas, com o objetivo de facilitar a aprendizagem dos estudantes. Observamos, em Shulman (1987), uma ampliação das categorias ressaltadas no artigo de 1986, identificando o PCK como uma de sete categorias básicas do conhecimento dos professores, que também inclui conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico geral, conhecimento de currículo, conhecimento dos estudantes e suas características, conhecimento dos contextos educacionais e conhecimento dos fins educacionais, propósitos e valores. O PCK foi conceituado aqui como uma categoria em si própria, e não como uma subcategoria do conhecimento do conteúdo, como acontecia no artigo de 1986.

Para Hashweh (2005), na concepção de Shulman (1986) é possível observar que o PCK está associado com "os tópicos regularmente ensinados na área de estudo da pessoa" (p. 9), que inclui: o conhecimento de representações (analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações) e o conhecimento das dificuldades de aprendizagem dos estudantes e estratégias para lidar com elas. De acordo com esta conceituação, o PCK é: uma subcategoria do conhecimento do conteúdo e também um tópico específico. Este conhecimento incluiu aqui duas subcategorias adicionais: conhecimento de representações e as dificuldades de aprendizagem, bem como as estratégias para superá-las. Para Hashweh (2005), enquanto o PCK, como tópico específico, era negligenciado por alguns investigadores, a conceituação de PCK como uma subcategoria do conhecimento do professor em relação ao conteúdo foi aceita. A ênfase dada por Shulman na transformação do assunto para o ensino (conhecimento de representações) obscureceu, para muitos investigadores, o outro componente: conhecimento das dificuldades dos estudantes e estratégias pedagógicas de superação destas dificuldades. Além disso, ninguém questionou como esse componente poderia ser classificado como uma subcategoria do conhecimento do conteúdo. Em outras palavras, os educadores aceitaram uma conceituação de PCK como uma mistura de conhecimento do conteúdo e pedagogia e também como um componente do conhecimento do conteúdo.

Para Ponte e Oliveira (2002), o *conhecimento didático* tem uma vertente fundamental relativa à Matemática:

> Não se trata, aqui, do conhecimento da Matemática como ciência, mas da interpretação que dela faz o professor enquanto disciplina escolar. Para além dos conceitos e procedimentos fundamentais da disciplina (indicados nos respectivos programas) surgem aqui igualmente as formas de representação desses mesmos conceitos (em diversas linguagens e suportes, incluindo representações gráficas e simbólicas), bem como a perspectiva geral sobre a Matemática escolar, incluindo as conexões internas (entre diversos tópicos) e externas (com outras disciplinas e áreas do conhecimento). Ou seja, faz uma grande diferença se o professor está ou não à vontade no que respeita aos conceitos fundamentais da sua disciplina, como também, se os vê como fazendo parte de um todo integrado ou em compartimentos estanques. Faz uma grande diferença se o professor considera fundamentais os aspectos calculatórios, conceituais ou argumentativos da Matemática, dando ênfase, em conseqüência, ao ensino de algoritmos, à compreensão de conceitos ou à argumentação e demonstração matemática. O conhecimento que o professor tem da Matemática escolar é o seu traço mais distintivo relativamente ao conhecimento dos outros professores – pois é aqui que intervém de modo mais direto a especificidade da sua disciplina. No entanto, o que está em causa não é o conhecimento de Matemática, como ciência, avaliado por padrões acadêmicos de conhecimento (mais ou menos extenso, mais ou menos profundo), mas o conhecimento e a visão que o professor tem dos aspectos específicos do saber que ensina (p. 148).

Vários investigadores modificaram ou acrescentaram categorias às anteriormente descritas por Shulman. Por exemplo, Grossman (1990) e Gudmundsdottir (1990) defendem a idéia de que o conhecimento das crenças dos professores sobre o ensino deve ser levada em consideração. Grossman (1990) acrescenta ainda a necessidade de incluir o conhecimento de materiais de ensino. Mark (1990), por sua vez, não considera o conhecimento da matéria de ensino e o PCK como categorias separadas, mas, sim, inclui o conhecimento da matéria de ensino como uma parte do PCK. Analogamente, para Cochran, King e DeRuiter (1991), o que define o PCK é a maneira como os professores relacionam o seu conhecimento da matéria de ensino com o seu conhecimento pedagógico. Nesta definição, os autores incorporaram quatro componentes: "conhecimento da matéria, conhecimento dos estudantes, conhecimento de contextos ambientais e conhecimento de pedagogia" (p. 1).

Algumas das categorias já salientadas em Shulman (1987) mereceram estudos mais aprofundados, como é o caso dos *modos de representação e formulação do assunto de forma a torná-lo compreensível para os outros*. Para Even e Tirosh (1995), este componente do conhecimento dos professores necessita de um corpo de conhecimentos sobre as concepções mais comuns dos estudantes. Tal conhecimento foi acumulado principalmente a partir dos anos 1980 em pesquisas sobre a cognição e aprendizagem dos estudantes que trouxeram muitos dados úteis sobre as concepções e pensamentos dos estudantes em Matemática. Muitos destes estudos (por exemplo, Even, 1993; Even e Tirosh, 1995; Kieran, 1992) mostraram que os estudantes freqüentemente dão sentido à matéria do seu próprio modo e que este nem sempre é isomórfico ou paralelo à estrutura da matéria de ensino.

O PCK está diretamente vinculado ao conhecimento do professor concernente à matéria de ensino. Isto, como visto, engloba perspectivas variadas e envolve, por exemplo, o conhecimento do professor das potencialidades e limitações dos alunos, além dos modos de representação dos conteúdos matemáticos como meio para fazê-los compreensíveis para os estudantes. Para Llinares (1998b) as investigações centradas na caracterização do conhecimento de conteúdo pedagógico dos estudantes para professor têm enfatizado a relação que deve existir entre a compreensão das noções matemáticas e a articulação desta compreensão quando se pensam nas noções matemáticas como objetos de ensino-aprendizagem.

Ponte e Oliveira (2002) consideram o conhecimento do currículo e o modo como os professores fazem a gestão curricular como uma vertente do conhecimento didático. Incluem, neste caso, o conhecimento das finalidades, objetivos e formas de organização dos conteúdos, bem como o conhecimento de materiais de ensino e formas de avaliação da aprendizagem. Os autores também ressaltam o *conhecimento do processo instrucional* como uma outra vertente fundamental do conhecimento didático. Consideram, neste caso, os seguintes aspectos fundamentais relativos à gestão da sala de aula:

> a planificação de longo e médio prazo, bem como de cada aula, a concepção das tarefas e tudo o que diz respeito à condução das aulas de Matemática, nomeadamente as formas de organização do trabalho dos alunos, a criação de uma cultura de aprendizagem na sala de aula, a regulação da comunicação e a avaliação das aprendizagens dos alunos e do ensino do próprio professor (p. 149).

O conhecimento sobre os estudantes é um aspecto importante do PCK dos professores. É cada vez mais comum encontrarmos investigações que estudam o conhecimento dos professores sobre o seu entendimento dos modos de pensamento dos estudantes em relação a tópicos específicos, como também sobre a natureza e qualidade das respostas dos professores para as perguntas, observações e idéias manifestadas pelos estudantes (Ball, 1988; Even, 1989, 1993; Even e Markovits, 1993; Leinhardt et al., 1991; Maher e Davis, 1990; Peterson et al., 1991; Tirosh, 1993). Outro aspecto é a escolha, pelos professores, das possíveis formas de apresentações da matéria de ensino para os estudantes. Tomar decisões apropriadas para ajudar a guiar corretamente os estudantes na construção do seu conhecimento requer do professor uma compreensão dos modos de pensar dos estudantes. Um professor que tem o conhecimento de onde os estudantes estão conceitualmente pode desafiar o seu pensamento, desenvolvendo atividades apropriadas e adaptadas ao nível intelectual dos seus alunos. Partindo das concepções limitadas ou errôneas dos estudantes, o professor pode ajudá-los a construir conceitos mais sofisticados (Even e Tirosh, 1995).

Nesta mesma direção, Ponte e Oliveira (2002) salientam o *conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem* como uma vertente do conhecimento didático:

> Na verdade, conhecer os seus alunos como pessoas, os seus interesses, os seus gostos, a sua forma habitual de reagir, os seus valores, as suas referências culturais, e conhecer o modo como eles aprendem são condições decisivas para o êxito da atividade do professor. Neste campo, reconhece-se a importância do estudo dos processos de aprendizagem dos alunos, das suas dificuldades cognitivas, das suas estratégias microssociais, bem como dos fenômenos de diferenciação e afirmação cultural. Muito tem sido estudado sobre estas questões pela Psicologia e Sociologia da Educação, em diversos países, com referência a diferentes contextos sociais e culturais – e a investigação que se realiza neste campo é, frequentemente, mais geradora de controvérsia do que de consenso. O professor tem sempre as suas teorias (implícitas ou explícitas) sobre estas questões, nem sempre muito compatíveis com as teorias acadêmicas dominantes. Também aqui não é a correspondência do conhecimento do professor com o conhecimento acadêmico que está em causa, mas o fato do conhecimento que o professor tem sobre estas questões ser fundamental para o exercício dos seus papéis profissionais (p. 148).

A fim de saber se as tarefas de ensino estão de fato atingindo os objetivos propostos, é importante que os professores avaliem o “sentimento” dos estudantes quanto ao que estão fazendo e o que estão aprendendo. Para que isto seja possível é necessário que os professores desenvolvam o hábito de constantemente observar, escutar e fazer conjecturas. Além disso, é importante periodicamente testar e revisar este conhecimento conjetural de forma a proceder aos ajustes necessários. Em suma, ensino de maneira responsável requer que os professores trabalhem continuamente para conhecer os estudantes. Para ajudarem os seus alunos a desenvolver o entendimento do assunto, os professores têm necessariamente de escutar os estudantes – empregando, para isto, o seu próprio conhecimento do assunto, sem ser limitado por ele. A um professor que saiba pouco do assunto, ou que o saiba somente de maneira compartimentalizada e rígida, pode faltar a introspecção necessária para entender as múltiplas concepções das crianças. Entretanto, paradoxalmente, um professor com um conhecimento com profundidade considerável pode não saber ouvir sob uma perspectiva não *standard*, restringindo, da mesma forma, a abrangência do sentido que tem “ouvir os estudantes” (Ball, 1997).

Para Wilson, Shulman e Richert, (1987) é necessário que o professor disponha de um repertório de abordagens ou estratégias de ensino que deve incluir uma gama variada de formas, como: aprendizagem cooperativa, ensino recíproco, maiêutica socrática, aprendizagem por descoberta, elaboração e realização de projetos, aprendizagem fora do ambiente de sala de aula etc. Neste processo educacional o professor deve levar em consideração as diferentes características dos alunos, como: as concepções, preconcepções, concepções equivocadas, dificuldades, linguagem, cultura, motivação, classe social, gênero, idade, habilidade, aptidão, interesse, autoconceito, atenção etc.

Veil e MaKinster (1999) fizeram um estudo sobre a taxonomia do conceito de PCK para o ensino de Ciências. As três características sobre o PCK predominantemente encontradas nas pesquisas analisadas contemplavam: o conhecimento dos estudantes, o conhecimento da matéria de ensino e o conhecimento de estratégias de ensino (pedagogia). Na taxonomia organizada por estes autores o PCK é hierarquizado em três níveis, denominados de: *PCK Geral, PCK relativo a um domínio específico* e *PCK relativo a um tópico específico.* O primeiro nível dentro desta taxonomia é PCK geral. O professor experiente ou especialista com PCK geral teria um entendimento dos conceitos pedagógicos gerais e que podem ser aplicados a qualquer disciplina, como Física, Química, História, Matemática etc. O PCK relativo a um domínio específico se distingue do PCK geral porque está focalizado nos diferentes domínios e assuntos existentes dentro de uma disciplina em particular. PCK de domínio específico é posicionado entre disciplinas e domínios da Ciência. O nível mais específico e moderno da taxonomia geral é o PCK como tópico específico. Trata-se do conhecimento, por parte do professor, do ensino específico de cada um dos conteúdos que compõem a disciplina. Teoricamente, um professor que tem conhecimento neste nível de PCK poderia ter um repertório sólido de habilidades nos três níveis prévios.

Para Hashweh (2005), que analisou diversas pesquisas, as diferentes definições apresentadas em uma série de pesquisas analisadas não convergem para uma conceituação clara do PCK. Na realidade foram retratadas diferentes opiniões e, contudo, falta clareza sobre a natureza do PCK e sobre seu desenvolvimento. Segundo a autora, levantam-se questões sobre os componentes do PCK, o tipo de conhecimento que representa, sua generalidade ou especificidade e seu desenvolvimento. Na sua perspectiva o PCK é uma coleção de *construções pedagógicas do professor*. Assim, PCK é um grupo ou coleção de entidades ou unidades menores de conhecimentos que ela chama de *construções pedagógicas*. O termo “construções” foi utilizado para indicar a conceituação do PCK como um conjunto de entidades e não como uma unidade inteira. Metaforicamente, a autora faz uma analogia com a Química, dizendo que cada uma destas construções é uma molécula, mas que PCK é essencialmente uma mistura de moléculas diferentes, e não uma combinação nova (moléculas maiores e mais complexas). Estas unidades são construções intelectuais e profissionais do professor. Elas incluem o conhecimento que o professor experimenta, constrói e acumula relativamente ao ensino de tópicos específicos regularmente ensinados. As *construções pedagógicas* são, em grande parte, o resultado da interação entre diferentes categorias de conhecimento e crenças do professor. Assim, a riqueza do PCK não resulta do conhecimento profundo em uma única categoria de conhecimento, ou seja, o conhecimento só do assunto não é o bastante.

Cochran, King e DeRuiter (1991) argumentam que o PCK caracteriza uma diferença entre um professor e um especialista, dizendo que os professores de Biologia diferem dos biólogos, professores de História dos historiadores, professores de Línguas dos escritores etc., não necessariamente na qualidade ou quantidade do seu conhecimento sobre a matéria concernente a sua especialidade, mas em como este conhecimento é organizado e usado. Por exemplo, nos professores de Ciências experientes o conhecimento da Ciência é estruturado de uma perspectiva pedagógica e é usado como uma base para ajudar os estudantes a construir conceitos específicos. Por outro lado, o conhecimento de um cientista é estruturado de uma perspectiva da pesquisa e é empregado como uma base para a construção de conhecimento novo no campo.

1.1.1.3 A relação entre conhecimento da matéria e PCK

Embora normalmente seja assumido que o conhecimento da matéria de ensino dos professores e o PCK estejam relacionados, há poucas evidências de que apóiam e ilustram estas relações (Even e Tirosh, 1995). Diferentes concepções sobre o conhecimento da matéria de ensino dos professores evoluíram ao longo dos anos. Não muitos anos atrás, o conhecimento da matéria de ensino dos professores era definido em condições quantitativas, ou seja, pelo número de cursos realizados em faculdade ou por intermédio de avaliações do conhecimento da matéria de ensino dos professores em testes unificados superficiais (Ball, 1991; Wilson et al., 1987). Mas estas “medidas” são problemáticas. Atualmente, o conhecimento da matéria de ensino dos professores tem sido avaliado de forma mais qualitativa, enfatizando os processos cognitivos e procurando entender os fatos, conceitos e princípios, além dos modos nos quais eles estão conectados e organizados. Epistemologicamente, o conhecimento sobre a natureza da disciplina também recebeu mais atenção (Ball, 1988, 1991; Even, 1990; Even e Tirosh, 1995; Leinhardt e Smith, 1985; Shulman, 1986; Tamir, 1987).

Para Even e Tirosh (1995), uma possível explicação para a falta de pesquisas sobre as inter-relações entre o conhecimento da matéria de ensino dos professores e o PCK tem a ver com as diferentes concepções a respeito do papel do professor no processo de aprendizagem dos alunos. O desenvolvimento curricular observado durante o período compreendido entre 1960 a 1970 colocava o professor como aquele que executa um currículo feito por peritos e, além disso, assumiu-se que as crianças poderiam aprender diretamente de materiais preparados pelo professor. Em vez de ensinar, o professor era visto como gerente e facilitador. A maioria dos estudos sobre os professores que foram realizados nesta época adotou uma abordagem semelhante. Muitas pesquisas sobre processo-produto tentaram identificar os comportamentos genéricos dos professores que pareciam ser mais eficazes. Os procedimentos metodológicos considerados eficientes tenderam a ser conectados com a forma de administração das salas de aula, e não com a pedagogia do conteúdo. Em meados dos anos 1980 houve uma mudança nas concepções do papel do professor na promoção da aprendizagem, que veio a ressaltar a importância de uma série de atributos desejáveis, que incluíam, entre outras questões, a forma de gerência da sala de aula, a criação de atividades de ensino, a administração da discussão em sala de aula, a forma de fazer perguntas etc. O conhecimento da matéria de ensino é muito mais crítico para este "novo papel" do professor.

Even (1993) investigou a inter-relação entre o conhecimento da matéria de ensino (no caso Matemática) e o PCK de professores do ensino secundário em formação, no contexto do ensino do conceito de função. Durante a primeira fase da coleta de dados, 152 futuros professores secundários em formação responderam a um questionário com perguntas abertas que procurava captar o conhecimento dos futuros professores sobre funções. Na segunda fase, após terem respondido ao questionário, 10 professores em formação foram entrevistados. A análise mostrou que muitos dos sujeitos pesquisados não tiveram uma compreensão atualizada sobre o conceito de função. A autora concluiu que o conhecimento matemático limitado relativo a funções influenciou o pensamento pedagógico dos futuros professores a respeito do assunto.

Ball, Bass, Sleep e Thames (2005) identificaram quatro domínios de conhecimento matemático para o ensino. Primeiro, é o conhecimento de conteúdo comum (Common Content Knowledge – CCK). Trata-se do conhecimento da Matemática do currículo escolar que inclui, por exemplo, saber o que é um número primo, como se multiplicam frações, converter frações em decimais etc. Um segundo domínio é o conhecimento de conteúdo especializado (Specialized Content Knowledge – SCK). É o conhecimento matemático que os professores usam para o ensino. Ao contrário da conhecida combinação existente entre Pedagogical Content Knowledge (PCK) e o Specialized Content Knowledge (SCK), o SCK é conhecimento matemático, não um entrelaçamento entre o conhecimento dos estudantes e Pedagogia. É conhecimento de Matemática especificamente necessário para o ensino. O terceiro domínio é o conhecimento dos estudantes e conteúdo (Knowledge of Students and Content – KSC). Este domínio repousa na intersecção do conhecimento sobre os estudantes e o conhecimento sobre Matemática. O quarto domínio, conhecimento sobre ensino e conteúdo (Knowledge of Teaching and Content – KTC), é a intersecção do conhecimento sobre o ensino e o conhecimento sobre Matemática. O KSC inclui o conhecimento sobre os estudantes, suas concepções errôneas e sobre as dificuldades de aprendizagem. O KTC inclui o conhecimento de seqüências de ensino de conteúdos particulares, vantagens e desvantagens relacionadas com diferentes formas de representação de conteúdos específicos. Para ilustrar estes quatro domínios, consideremos a diferença entre (i) calcular a resposta a um problema de multiplicação com vários dígitos (CCK); (ii) analisar erros de cálculo neste problema (SCK); (iii) identificar o pensamento dos estudantes que estão produzindo tais erros (KSC); e (iv) identificar qual manipulativo poderia ser utilizado para melhor realçar as características do algoritmo utilizado (KTC). Estes últimos dois domínios, KSC e KTC, são os que mais se aproximam do significado freqüentemente dado ao “pedagogical content knowledge”.

Para Ponte e Chapman (2006b) uma forma de integrar a aprendizagem dos futuros professores relativamente à matéria de ensino e à pedagogia e promover a reflexão seria colocar uma ênfase especial na resolução de problemas. A resolução de problemas pode ser considerada um processo matemático e um processo pedagógico, isto é, uma maneira de ensinar Matemática. Assim, o desenvolvimento da compreensão dos estudantes a respeito da resolução de problemas pode incidir sobre seu conhecimento concernente ao ensino de Matemática no tocante e por meio da resolução de problemas.

Uma outra forma de buscar a inter-relação entre a aprendizagem da matéria e da pedagogia está na utilização das novas tecnologias, mais precisamente o computador. Por exemplo, Ponte, Oliveira e Varandas (2002) realizaram um estudo focalizado explicitamente no uso de computadores em um curso de um semestre para professores da escola secundária. Este curso objetivava ajudar os professores a desenvolver uma atitude positiva em relação aos computadores e a utilizá-lo de forma confiável. O projeto de trabalho pedagógico voltou-se para a exploração de softwares educacionais, além de utilização do potencial da Internet como meio de pesquisar e publicar material educacional. Tendo como base as observações realizadas em sala de aula, um questionário e análise da produção dos participantes, os autores concluíram que os professores em formação mudaram sua atitude inicial de medo e de suspeita quanto aos computadores para um relacionamento positivo com esta tecnologia. Os professores pesquisados se mostraram aptos a entender as conexões entre tópicos da Matemática, seu desenvolvimento histórico, aplicações e aspectos relacionados aos processos de aprendizagem em sala de aula, desenvolvidos em uma perspectiva geral sobre os usos desta tecnologia na instrução da Matemática.

1.1.1.4 Fontes de conhecimento profissional em relação à matéria de ensino

Pensando-se na formação inicial do professor de Matemática em relação à matéria de ensino, uma primeira consideração quanto às fontes de aquisição de tais conhecimentos seria, obviamente, as disciplinas ministradas nos cursos de licenciatura. Normalmente, o rol de disciplinas fornecidas tem como principal objetivo propiciar uma formação profissional básica que habilite o aluno a desenvolver sua atividade profissional no magistério, tão logo tenha concluído o curso. Contudo, a análise circunstanciada que fizemos anteriormente quanto ao conhecimento dos professores a respeito da Matemática e do seu ensino nos mostra um quadro envolto numa série de problemas. Cabe perguntar, então: qual a contribuição de todas estas disciplinas no processo de formação do professor de Matemática?

Considerando todos os saberes de referência constituinte do conhecimento profissional e a sua forte vinculação com a prática, uma dificuldade que se coloca está relacionada com os cursos de formação de professores de Matemática e a forma de construção destes conhecimentos. Llinares (1998) salienta que o grande desafio dos programas de formação inicial e continuada procede do caráter integrado do conhecimento profissional, por exemplo, a relação entre o conhecimento de Matemática e o conhecimento de conteúdo pedagógico específico da Matemática e o uso deste conhecimento na prática profissional.

As diferentes disciplinas ministradas nos curso de formação de professores de Matemática (Álgebra, Análise, Aritmética, Geometria, Estatística, Probabilidade), segundo Rico (1998), apresentam várias características, tais como: "têm caráter objetivo, oferecem uma diversidade de opções para estruturar unidades didáticas, permitem reconhecer coincidências e discrepâncias entre distintas estruturações assim como discutir sobre elas". Contudo, o autor acrescenta que, embora elas tenham uma base científica ampla, não esgotam as necessidades organizativas do currículo de Matemática, sendo necessária a busca de novas organizações que possam ter como resultado a melhor formação do professor de Matemática.

Tardif (2000), tomando como referência diversas pesquisas sobre a formação de professores realizadas nos últimos 30 anos, tais como Fenstermacher, 1994; Wideen et al., 1998; Schön, 1983, Zeichner e Hoeft, 1996, argumenta que se observa na América do Norte uma relação de distanciamento entre os saberes profissionais necessários à docência e os conhecimentos veiculados nas universidades. Como conseqüência, a prática profissional em sala de aula não se converte em um espaço de aplicação dos conhecimentos construídos na universidade. É importante salientar que estas pesquisas não tratam especificamente da formação de professores de Matemática.

A forma de entender e dotar de significado as diferentes disciplinas que compõem um programa de formação de professores de Matemática também tem sido objeto de investigações dentro da Didática da Matemática. Para Garcia (2003), o processo ensino-aprendizagem é complexo por congregar aspectos pedagógicos, psicológicos e práticos. Em contrapartida, em muitos programas de formação estes domínios de conhecimento se apresentam isolados, esperando que a sua integração se produza na prática de ensino, o que nem sempre acontece. Nesta perspectiva, a autora propõe a implementação de programas de formação de professores apoiados na teoria construtivista, de tal modo que permitam implementar uma nova visão da Matemática escolar.

No tocante aos saberes provenientes das diferentes fontes disciplinares, como as relacionadas com os conteúdos e com os processos de ensino-aprendizagem, Bromme (1988) argumenta que os conhecimentos teóricos requerem uma transformação heurística e uma integração para poderem se transformar em conhecimentos práticos. Desta forma, as informações provenientes das diferentes disciplinas que compõem um curso de formação de professores necessitam ser integradas, de modo a permitir uma visão global tanto dos alunos e suas dificuldades de aprendizagem como dos aspectos relacionados com o ensino e o contexto em que este se desenvolve.

Moreira e David (2005) refletindo sobre a formação Matemática do professor, referem-se à Matemática escolar, dizendo que ela não é nem Matemática científica didatizada nem uma construção autônoma da escola. No processo de escolarização básica há uma *lógica tácita,* que orienta a incorporação dos diferentes saberes à Matemática escolar. Os autores chamam a atenção para a necessidade de uma cuidadosa reflexão sobre a relação entre o tipo de conhecimento que se trabalha no processo de formação do professor e o modo como este professor vai utilizar estes conhecimentos na sua prática profissional.

> É no contexto de interação com essa lógica da prática escolar que a lógica interna da Matemática Científica, seus valores, seus métodos, suas técnicas e seus resultados passam por um processo de adaptação, filtração, revalorização e transformação, tendo como referência – implícita ou explícita – o ambiente educativo em que essas operações se realizam (p. 44-45).

Os livros-textos também se constituem em importante fonte de idéias que contribuem para a formação do professor. Ball e McDiarmid (1990) argumentam que os futuros professores podem aprender por intermédio dos livros-textos, em especial os destinados à Educação Básica, contudo consideram que tal aprendizagem deve ser vista como problemática, dada as maneiras como o conhecimento disciplinar é deturpado em muitos destes livros-textos. Na Matemática elementar, em muitos livros-textos os conceitos e procedimentos, freqüentemente, estão desenvolvidos inadequadamente. Além disso, promovem uma visão algorítmica do assunto, por exemplo, “para fazer a divisão de frações basta multiplicar pelo inverso”. Desta forma, aprender pelos livros-textos, embora possa ajudar a aclarar alguns conceitos para os professores, pode também contribuir para a perpetuação de representações inexatas da matéria.

Moreira e David (2005) investigaram a formação Matemática de alunos em relação aos campos numéricos, no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais. Observaram, pela análise do conhecimento matemático sobre "números" veiculado nos livros-textos mais utilizados no curso, que havia uma discrepância entre as necessidades formativas dos futuros professores e as formas como o conhecimento matemático era tratado nestes livros.

Vários autores (Ball e Wilson, 1990; Brown et al., 1990; Borko et al., 1992; Llinares, 1990, Richardson, 1996) têm destacado que as concepções sobre ensino-aprendizagem dos estudantes para professores também são fortemente influenciadas pelas experiências pregressas que tiveram como estudantes. Antes de chegar à universidade, o estudante para professor já passou por pelo menos 11 anos de escolaridade. Neste período teve contato com a maior parte dos conteúdos que ele próprio terá que ensinar depois de formado. Desta forma, limitar nossa análise sobre a preparação dos futuros professores em relação à matéria que irão ensinar à sua instrução da universidade seria incorrer em sério reducionismo. Dimensionar a contribuição desta experiência anterior à faculdade pode ser valioso para se pensar a constituição de um currículo de formação equilibrado.

Schön (2000) destaca a forte influência dos métodos de ensino utilizados pelos formadores. Segundo ele, os estudantes fazem como viram o formador fazer, reproduzindo suas ações, para descobrir o significado que elas têm. Os estudantes tentam decifrar se os significados que construíram são semelhantes ou diferentes do formador. Quando um estudante olha para traz, tende a tornar-se um revisionista, reestruturando o passado para adequá-lo em suas crenças presentes.

Semelhantemente, o MEC, nas Diretrizes Curriculares para a Formação de Professores da Educação Básica (2001), traz a idéia de "simetria invertida". Este documento salienta o fato de que a preparação do professor tem duas peculiaridades: "ele aprende a profissão no lugar similar àquele em que vai atuar, porém numa situação invertida. Isso implica que deve haver coerência entre o que se faz na formação e o que dele se espera como profissional" (p. 30). O conceito de *simetria invertida* faz referência não apenas à experiência como aluno nos cursos de formação docente, como em toda a sua trajetória como aluno. Ainda, segundo este documento:

> A compreensão desse fato evidencia a necessidade de que o futuro professor experiencie, como aluno, durante todo o processo de formação, as atitudes, modelos didáticos, capacidades e modos de organização que se pretende venham a ser concretizados nas suas práticas pedagógicas. Nesta perspectiva, destaca-se a importância do projeto pedagógico do curso de formação na criação do ambiente indispensável para que o futuro professor aprenda as práticas de construção coletiva da proposta pedagógica da escola onde virá a atuar.
> A consideração da simetria invertida entre situação de formação e de exercício não implica em tornar as situações de aprendizagem típicas da criança e do jovem na educação média. Não se trata de infantilizar a educação do professor, mas de torná-la uma experiência análoga à experiência de aprendizagem que ele deve facilitar a seus futuros alunos (p. 30-31).

Segundo Ball e McDiarmid (1990), a escolarização anterior à universidade dá forma a um pedaço muito maior da instrução formal dos futuros professores quando comparado ao período relativamente curto de estudo na faculdade. A fase de estudo da matéria, anterior à faculdade, não só é maior e mais longa do que o período da faculdade, mas também o conteúdo estudado nas aulas da Educação Básica é frequentemente mais próximo daquele que os professores em formação irão ensinar realmente. Contudo, os tópicos estudados na Educação Básica raramente são revisitados na faculdade. Assim, a compreensão destas idéias pelos professores é o produto de sua experiência matemática construída durante a educação básica. Experiência esta que pode, provavelmente, ter sido focalizada em uma aproximação algorítmica dos conteúdos (Davis e Hersh, 1981; Goodlad, 1984; Madsen-Nason e Lanier, 1987; Wheeler, 1980) e é pouco provável que tenha contribuído para uma compreensão conceitual dos mesmos.

Ball (1990b) realizou um estudo sobre o conhecimento matemático de futuros professores da Educação Básica que freqüentavam cursos de formação inicial. A pesquisa tinha como objetivo examinar o que os futuros professores compreendiam sobre a Matemática elementar enquanto realizavam o curso universitário. O estudo também revelou os conhecimentos matemáticos que os futuros professores trouxeram com eles para o curso universitário. Ball conclui que os professores em formação pesquisados focalizaram em procedimentos e em regras, com justificativas que pareceram ir além da natureza de seu conhecimento substantivo, justificativas estas baseadas em suas idéias sobre a Matemática. Algumas suposições predominantemente refletidas em suas entrevistas incluíam: a Matemática é feita por métodos que seguem etapas passo a passo ajustada em procedimentos para chegar a respostas; saber matemática significa saber “como fazer" e a Matemática era interpretada como uma coleção arbitrária de fatos e regras. As idéias dos professores em formação sobre o que significa saber Matemática estavam centradas geralmente em recordar regras e no uso de procedimentos padrão. Muitos professores em formação não mostraram uma compreensão conceitual explícita e conectada de idéias e de procedimentos matemáticos.

Um estudo longitudinal realizado pelo National Center for Research on Teacher Education com 252 professores de Matemática em formação constatou que a maioria dos participantes teve dificuldades em recordar idéias e procedimentos particulares. Além disso, muitos eram incapazes de dar sentido conceitual à Matemática que tinham aprendido. Ao procurar explicar conceitos, termos e procedimentos matemáticos, os professores em formação apenas recordavam fragmentos, truques e definições. A maioria não tinha uma compreensão significativa dos conceitos básicos. Outros estudos que examinaram o nível de compreensão matemática de professores em formação encontraram resultados similares. Cabe salientar que o maior número destas pesquisas focalizou muito mais a atenção em avaliar o nível de conhecimento matemático dos futuros professores (Graeber, Tirosh e Glover, 1986; Mansfield, 1985) do que nas compreensões desses assuntos necessárias aos futuros professores para ensinar com eficiência na educação básica (Ball e McDiarmid, 1990).

Este processo de assimilação dos procedimentos, instrumentos, estratégias, metodologias que foram utilizados pelos professores durante todo o processo de escolarização e que, em certa medida, contribuem na constituição do ideário pedagógico do futuro professor, nos remete a considerar a importância que tem a concepção de aprendizagem que é defendida explícita ou subliminarmente pelas instituições formadoras. Se os formadores de professores só se utilizam da metodologia de ensino tradicional, passam a idéia de que o conhecimento é algo a ser transmitido, e não algo que está sendo construído. Além disso, contribuem para que a educação continue estagnada no paradigma de transmissão de conhecimentos elaborados e, o que é pior, legitimado pela própria academia representada pelos professores.

Recentemente, Llinares e Krainer (2006) procuram resumir os principais resultados das pesquisas sobre a aprendizagem de professores de Matemática produzidas pela comunidade do PME. As pesquisas analisadas pelos autores ressaltam a importância de os futuros professores trabalharem ativamente na resolução de problemas contextualizados e significativos: matemáticos, didáticos, educacionais etc. A própria reflexão crítica dos futuros professores sobre a prática (por exemplo, interesse em resolver problemas matemáticos, observação de outros professores, análise das suas próprias experiências pedagógicas) é considerada uma característica de aprendizagem essencial. Os autores vêem o conhecimento compartilhado, transmitido em rede, construindo tipos diferentes de comunidades, como elementos cruciais na aprendizagem dos futuros professores. Em particular, no caso da iniciação profissional dos professores, a questão da participação em comunidades de professores e socialização no contexto escolar fica ainda mais proeminente.

1.1.2 A construção do conhecimento profissional na formação inicial

As atuais teorias da cognição e da aprendizagem têm enunciado nas últimas décadas uma série de princípios que permitem conhecer com maior riqueza de detalhes a forma como as pessoas constroem conhecimento. Termos como “cognição situada”, “cognição distribuída” e “comunidade da prática” têm sido cada vez mais freqüentes nos meios de comunicação científica na área da educação. Muitas idéias sobre a natureza do conhecimento, pensamento e aprendizagem do professor tiveram a sua gênese nas investigações sobre a cognição e a aprendizagem de crianças e adolescentes, como é o caso da cognição situada.

1.1.2.1 O conhecimento profissional tem um caráter situado

Referindo-se especificamente à formação inicial de professores de Matemática, Collins, Brown e Newman (1989) argumentam que a aprendizagem do futuro professor desta disciplina se produz mediante um processo por intermédio do qual adquire um conhecimento e uma forma de raciocinar como um especialista, cujos aspectos-chave essenciais são:

- a aprendizagem não acontece apenas pela assimilação passiva de teorias e princípios gerais, mas sim mediante participação ativa e contextualizada;
- a aprendizagem acontece em um contexto definido por *atividades autênticas*. Brown, Collins e Duguid (1989) utilizam a expressão “atividades autênticas” para designar aquelas atividades que incrementam a categoria de pensamento e de

destrezas em resolução de problemas relacionando-as ao aprender a ensinar dos estudantes para professor: “as atividades autênticas definem-se simplesmente como as práticas ordinárias da cultura”;

- o aprendizado do estudante para professor de Matemática acontece mediante a participação nessas atividades autênticas sob a orientação dos formadores de professores; e o significado que dá a estas atividades tem como referência seus conhecimentos prévios e suas crenças;
- o estudante para professor de Matemática pode modificar ou ampliar suas concepções como conseqüência da sua utilização em situações-problema.

Uma discussão atual que tem levado ao conceito de “cognição situada” diz respeito à dependência do conhecimento das situações em que um dado conhecimento é adquirido e das situações em que é aprendido e utilizado. Para Brown, Collins e Duguid (1989), o conhecimento depende, entre outros fatores, da atividade, do contexto e da cultura nos quais se desenvolve e é utilizado. Esses três elementos (atividade, contexto e cultura) atuam como referências nos quais o conhecimento é lembrado, interpretado e utilizado. Segundo estes autores, a atividade aliada às características do contexto no qual o conhecimento está inserido constitui a base do que uma pessoa aprende.

As idéias relativas ao conceito de cognição situada, particularizadas para os professores de Matemática, podem ser entendidas por intermédio da triangulação realizada entre: o conhecimento de Matemática, o conhecimento dos procedimentos pedagógicos e o conhecimento dos alunos. Estes conhecimentos podem ser utilizados pelos professores com o propósito de organizar e estruturar as situações de aprendizagem. Existe uma inter-relação entre o conhecimento do professor e as atividades e situações nas quais estes conhecimentos são usados. É nesta perspectiva que o conhecimento dos professores de Matemática pode ser considerado como situado, pois é gerado, desenvolvido e utilizado por intermédio de atividades e interações sociais existentes entre as pessoas (Fennema e Loef, 1992)

De acordo com Putnam e Borko (1997), o conhecimento profissional não está armazenado na mente dos professores como princípios abstratos livres de contexto; ao contrário, desenvolve-se em situações reais e carrega as características das aulas e atividades nas quais foi gerado. Esse conhecimento organiza-se ao redor de tarefas que o professor desenvolveu em suas aulas. Quando um professor soluciona problemas que surgem em suas aulas, desenvolve um conhecimento que traz embutidos aspectos-chave das situações de aula nas quais o dito conhecimento foi gerado. Assim, esse conhecimento não pode estar organizado como um conjunto de princípios abstratos sobre o ensino, pois resulta em algo totalmente conectado e estruturado ao redor de situações da aula por meio das quais se desenvolve.

Para García Blanco (2003), a forma de conceber a formação de professores tem implicações na maneira como os programas de formação se articulam por meio da prática, principalmente no que diz respeito às tarefas e atividades utilizadas no processo, nas quais seja possível discutir, negociar e compartilhar os significados gerados pessoalmente. Neste caso, o binômio “tarefa-atividade” é um dos pilares básicos dos programas de formação inicial de professores de Matemática. A atividade é o centro do processo de aprendizagem possibilitando compreender melhor o próprio contexto de onde se origina. A atividade, neste contexto, deve ser vista como um conjunto de processos vinculados a uma situação-problema com o propósito de gerar um conhecimento, considerada não apenas um conglomerado de processos cognitivos individuais, mas também contemplando os aspectos sociais presentes quando um grupo tenta resolver uma situação-problema.

1.1.2.2 O conhecimento profissional está distribuído

Uma outra característica do conhecimento profissional é o fato de que este conhecimento não está em uma só pessoa, mas sim distribuído entre indivíduos, grupos e ambientes. Embora este tema tenha ganhado força recentemente na pesquisa educacional, ele tem suas raízes em educadores e psicólogos como Dewey e Vygotsky. A idéia de conhecimento profissional como distribuído tem sido impulsionada com o avanço das pesquisas que utilizam as novas tecnologias como recurso na formação de professores. A facilidade com que hoje se pode dialogar com pessoas geograficamente distantes, ter acesso a informações que até pouco tempo eram dificultosas e a possibilidade de poder participar de comunidades virtuais de discussão, têm fortalecido o discurso sobre a importância de melhorar e agilizar as formas de distribuição e acesso ao conhecimento (Putnam e Borko, 1997, 2000).

1.1.2.3 O conhecimento profissional também é construído pela interação social

É bastante difundida a idéia de que a cognição tem um cunho social, ou seja, vai além do fornecimento de estímulos e incentivo individual para a construção de conhecimento. Partindo do pressuposto de que o conhecimento profissional está distribuído, ele pode ser compartilhado. Desta forma, as interações entre pessoas ou grupos de pessoas passam a ser uma importante situação de geração de conhecimento profissional pessoal.

Esta visão sociocêntrica (Soltis, 1981) do conhecimento e da aprendizagem suporta a idéia de que o que nós conhecemos, em parte, é o produto das nossas interações com as pessoas ou grupo de pessoas. Os indivíduos participam de diversas *comunidades do discurso* em várias disciplinas escolares, partilhando interesses comuns (Fish, 1980; Michaels e O'Connor, 1990; Resnick, 1991). Estas *comunidades do discurso* fornecem ferramentas, idéias sobre cognição, teorias e conceitos que os indivíduos se apropriam, dando sentido e corpo às suas experiências pessoais (Putnam e Borko, 2000).

Alguns pesquisadores (Cobb, 1994; Lave e Wenger, 1991; Putnam e Borko, 2000) concebem a aprendizagem como o resultado da participação da discussão e das práticas de uma *comunidade do discurso*. Nesta perspectiva, aprender é tanto quanto uma forma de aculturação relativamente às formas de pensamento de uma comunidade, assim como é um resultado da instrução explícita em conceitos específicos, habilidades e procedimentos (Driver, Asoko, Leach, Mortimer e Scott, 1994; Resnick, 1988; Schoenfeld, 1992). É importante notar nesta idéia que o aprendizado não é um fenômeno unidirecional; a comunidade muda suas idéias e maneiras de pensar de acordo com o que seus membros trazem para o discurso (Putnam e Borko, 2000).

As teorias relacionadas com as formas de aquisição de conhecimento profissional dos professores têm vindo a levar em consideração o importante papel que desempenham as relações sociais no processo de construção do conhecimento profissional. Assim, o aprendizado da docência, além de ser situado e contextualizado, não ocorre isoladamente. Ele é uma experiência que acontece em interação com este contexto ou ambiente em que o indivíduo se relaciona. Desta forma, uma questão importante a ser tomada em conta no tocante ao conhecimento profissional não é só a constatação de que este conhecimento e aprendizagem profissional são situados, mas em que quais contextos devem estar situados o ensino dos professores em formação.

Putnam e Borko (2000) examinaram vários contextos em que a aprendizagem de professores foi situada e concluem que as perspectivas situada, distribuída e social da cognição fornecem lentes poderosas pelas quais é possível ter uma visão pormenorizada sobre o que os professores aprendem, tanto na formação inicial quanto em serviço. Segundo estes autores, estas investigações permitiram ver mais claramente as forças e as limitações de várias práticas relacionadas com a aprendizagem de professores. Varias situações foram analisadas, como: a utilização de situações práticas de sala de aula; a utilização de casos reais para serem analisados pelos professores em formação; a formação de comunidades de diálogo e o acesso a equipamentos, tais como computadores. Os resultados de suas pesquisas identificaram vantagens e limitações específicas nos vários contextos dentro dos quais a aprendizagem dos professores foi situada.

1.1.7 O papel da reflexão e da investigação na formação do professor

Algumas outras questões têm sido colocadas em evidência nas últimas décadas e tornaram-se referência em muitos trabalhos que tratam da formação de professores, por exemplo, a formação do professor reflexivo e do professor investigador. Ao começar a considerar o professor como um profissional reflexivo, algumas investigações realizadas neste campo têm se centrado no estudo dos processos de aquisição e evolução do conhecimento e das destrezas cognitivas e metacognitivas sobre o ensino (veja-se Brown e Borko, 1992; Carter, 1990; Llinares, 1996). Neste caso, a epistemologia da prática é o coração da teoria que rege a profissionalização. Tardif (2000, p. 10-11) define epistemologia da prática profissional como “o estudo do conjunto dos saberes utilizados realmente pelos profissionais em seu espaço de trabalho cotidiano para desempenhar todas as suas tarefas”. Para este autor, a finalidade de uma epistemologia da prática é revelar quais são os saberes (em sentido amplo, o que engloba os conhecimentos e competências, as habilidades ou aptidões e as atitudes), “compreender como são integrados concretamente nas tarefas dos profissionais e como estes os incorporam, produzem, utilizam, aplicam e transformam em função dos limites e dos recursos inerentes às suas atividades de trabalho”. Um outro objetivo é “compreender a natureza desses saberes, assim como o papel que desempenham tanto no processo de trabalho docente quanto em relação à identidade profissional dos professores”.

As primeiras referências concernentes à reflexão começaram a surgir nos anos 1980 e tiveram sua gênese nos trabalhos de Donald Schön (1983). Curiosamente, até o final da década de 80, Schön não tinha como centro dos seus estudos a formação de professores, mas estava envolvido com a educação profissional e o conceito de profissional eficiente, a relação existente entre a teoria e a prática e o conceito de reflexão e a educação para a reflexão. É neste contexto que é possível compreender o significado do termo *reflexão* e o valor epistemológico que Schön concede à prática, o que pode ser resumido em uma de suas questões de pesquisa: “que tipo de educação profissional seria adequada para uma epistemologia da prática baseada na reflexão-na-ação?”.

Esta questão se situa entre o dilema de duas fontes colocadas por Schön (2000, p. 15):

> em primeiro lugar, a idéia estabelecida de um conhecimento profissional rigoroso, baseado na racionalidade técnica, e, em segundo, a consciência de zonas de prática pantanosas e indeterminadas, que estão além dos cânones daquele conhecimento.

Para este autor, a racionalidade técnica é uma epistemologia da prática que tem suas raízes na filosofia positivista. Nesta concepção, os profissionais são aqueles que solucionam problemas instrumentais por intermédio da seleção de meios técnicos apropriados a cada situação, o que requer a aplicação de teorias e técnicas derivadas do conhecimento científico. O conhecimento que se apresenta nas soluções dos problemas que os profissionais se deparam no exercício da profissão foi denominado *conhecimento na ação.* Trata-se do conhecimento implícito, interiorizado, que está presente no momento da ação; é o *conhecimento tácito* (termo que Schön pediu emprestado de Polanyi, 1967).

Contudo, os problemas práticos advindos do mundo real nem sempre se apresentam aos profissionais de forma bem estruturada e bem definida. Há situações em que a pessoa se depara com um problema inédito cuja solução não é possível com os conhecimentos preexistentes. Diante disso, os profissionais buscam novos caminhos, novas teorias que dêem conta de resolver o novo problema, o que se dá por um processo denominado por Schön de “reflexão na ação”. Considerando-se que outras situações-problema inéditas ocorrerão mobilizando novas teorias, exigindo novas análises, novos caminhos, e assim por diante, o profissional vai acumulando paulatinamente um rol de experiências. A este movimento, Schön (1983) denomina “reflexão sobre a reflexão na ação”.

A reflexão pode ocorrer simultaneamente com a ação ou depois de realizada a ação. No primeiro caso, estamos no âmbito da “reflexão na ação” e no segundo, “reflexão sobre a ação”. Se refletimos durante a ação reformulando o que estamos fazendo no momento da realização da ação, estamos inseridos no fenômeno de “reflexão na ação”. Se fazemos um retrospecto e reconstituímos mentalmente uma ação com o intuito de analisá-la, estaremos fazendo uma “reflexão sobre a ação”.

Segundo Pimenta (2002), as idéias de Schön foram apropriadas, ampliadas e se disseminaram em vários países, abrindo novas perspectivas e necessidades de reformas curriculares nos cursos de formação de profissionais. Uma destas ampliações diz respeito à formação de professores e, nesta área, as questões levantadas eram relativas aos currículos necessários para formação de professores reflexivos e pesquisadores e de como isto se daria nas escolas. Ressaltam-se, por exemplo, as questões organizacionais das escolas, seu projeto pedagógico, as condições de trabalho dos professores, a degradação das relações sociais, as novas necessidades colocadas às escolas pela sociedade etc.

No que se refere especificamente à formação de professores, a proposta de profissional reflexivo tem algumas limitações, como as evidenciadas por Zeichner (1992). Para este autor, a atividade reflexiva exige uma relação dialógica e critica Schön por considerá-la um processo solitário, em que o professor se mantém em comunicação apenas com a situação, e não com os seus pares. Zeichner aponta, também, o estreitamento da reflexão centrada na atividade em si, sem reputar o contexto na qual ela está inserida, no caso do professor, às condições político-sociais e institucionais inerentes à atividade profissional do professor. Ele entende que a concepção de reflexão proposta por Schön é equivocada, uma vez que perpassa a idéia incoerente de identificar o conceito de professor reflexivo com práticas ou treinamentos que possam ser aplicados tecnicamente em módulos.

No tocante à formação do professor pesquisador, expressão utilizada inicialmente nos trabalhos de Elliot (1993) e Stenhouse (1984; 1987), destaca-se o fato de que o exercício da docência nem sempre é composto por ações idênticas. Normalmente o profissional se depara com situações novas, alunos diferentes com distintas dificuldades de aprendizagem; avanços tecnológicos; novas teorias relativas ao ensino etc. Por estas razões, é essencial que os profissionais da educação tenham desenvolvido o espírito investigativo das situações inerentes a sua profissão.

Para Ponte (2002),

> a investigação é um processo privilegiado de construção do conhecimento. A investigação sobre a prática é, por conseqüência, um processo fundamental de construção do conhecimento sobre essa mesma prática e, portanto, uma atividade de grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que nela se envolvem ativamente.

Para este autor, investigar sobre a prática é importante em pelo menos dois sentidos: pode ter por objetivo alterar algum aspecto da prática, uma vez que seja detectada alguma necessidade de mudança ou, ainda, pode procurar compreender a natureza dos problemas que afetam essa mesma prática.

Zeichner (1998) defende a necessidade de eliminar a separação que existe entre o mundo dos professores-pesquisadores e o mundo dos pesquisadores acadêmicos. De um lado, muitos professores assinalam que a pesquisa educacional conduzida pelos acadêmicos é irrelevante para suas vidas nas escolas. Por outro lado, muitos acadêmicos nas universidades rejeitam as pesquisas realizadas pelos professores nas escolas por considerá-las triviais, ateóricas e irrelevantes para seus trabalhos. Este autor acredita que a linha divisória que separa professores e pesquisadores acadêmicos pode ser ultrapassada de três maneiras: (a) o pesquisador comprometendo-se com o corpo docente em realizar ampla discussão sobre o significado e a relevância da pesquisa que estão realizando; (b) desenvolvendo uma colaboração mútua com os professores, rompendo com velhos padrões acadêmicos; (c) colaborando e dando suporte às investigações feitas pelos professores e acolhendo seriamente os resultados desses trabalhos.

1.2 Sobre o ensino-aprendizagem dos números racionais

Quantos significados podem ter a fração $\frac{2}{5}$?

Seguramente vários, por exemplo, pode significar uma pizza que foi dividida em cinco pedaços, dos quais comemos dois deles ou, diferentemente, duas pizzas que foram compartilhadas entre cinco pessoas. É fácil perceber que se trata de situações bem distintas. Assim, o mesmo ente matemático $\left(\frac{a}{b}\right)$ pode ser utilizado em diferentes situações e contextos com significados bastante distintos.

Durante os últimos 30 anos, a literatura que analisa os construtos dos números racionais cresceu significativamente (Kieren, 1976, 1988, 1993; Hiebert e Behr, 1988; Behr, Lesh, Post e Silver, 1983, 1992, 1993; Harel e Confrey, 1994). Estes trabalhos teóricos proveram uma base conceitual sólida que permite identificar os principais problemas que envolvem números racionais e as soluções que as crianças dão a eles (Behr, Harel, Post e Lesh, 1992, 1993; Post et al., 1993).

"Muitas" das dificuldades em Matemática no Ensino Fundamental estão relacionadas com a idéia de número racional. Além disso, o desenvolvimento da idéia de número racional é vista num contexto ideal e não se investiga a aquisição deste conceito de forma mais ampla na Matemática, porque: (a) grande parte do desenvolvimento dos conceitos de número racional acontece num período significativo de reorganização cognitiva, isto é, numa transição do pensamento concreto para o pensamento formal; (b) transições qualitativamente interessantes não só acontecem na estrutura dos conceitos subjacentes, mas também nos sistemas de representação usados nos modelos destas estruturas; (c) o conceito de número racional envolve um conjunto rico de subconstrutos integrados, relacionando processos de uma grande gama de conceitos elementares (Behr, Lesh, Post e Silver, 1983, p. 91-92).

Os números racionais podem ser interpretados de pelo menos cinco modos diferentes, que são chamados de subconstrutos: uma comparação entre parte-todo, um quociente ou divisão indicada, um operador, uma coordenada linear e uma medida do contínuo ou quantidade discreta. Kieren (1976) (seguido por vários outros pesquisadores, como Novillis, 1976; Rappaport, 1962; Riess, 1964; Usiskin, 1979, Behr, Lesh, Post e Silver, 1983) defende a idéia de que uma compreensão completa sobre números racionais não só requer uma compreensão de cada um destes subconstrutos separados, mas também de como eles se relacionam. Behr, Lesh, Post e Silver (1983) salientam que análises teóricas e evidências empíricas recentes sugerem que diferentes estruturas cognitivas são necessárias para lidar com os vários subconstrutos de número racional. Evidenciam, ainda, que muitos estudos identificaram diversas fases de desenvolvimento no pensamento das crianças ao lidarem com números racionais, constatando uma gradual diferenciação e progressiva integração dos subconstrutos.

Durante muito tempo uma quantidade desproporcional de pesquisas realizadas sobre números racionais esteve relacionada a perguntas relativas a quais procedimentos algorítmicos facilitaria e melhoraria o desempenho das crianças nas tarefas que envolviam cálculos. Nos últimos 25 anos as pesquisas têm incluído análises de dados, não só interessadas em comparações simples entre dois procedimentos instrutivos, mas procurando identificar e descrever os processos mentais empregados por crianças envolvidas em situações-problema com números racionais. A grande maioria destes esforços está ligada a “estudos de estado”*;* quer dizer, o investigador coleta dados relativos ao conhecimento das crianças em uma área particular, sem consideração simultânea com a instrução recebida ou considerações da qualidade ou extensão das experiências instrutivas anteriormente passadas pelas crianças. Muito do que as crianças sabem sobre os aspectos mais formais da Matemática foi influenciado pela instrução. Estes estudos, embora muito úteis, estão inerentemente limitados a saber até que ponto as estruturas cognitivas de crianças podem ser ligadas diretamente à instrução e/ou experiências específicas. Além disso, elas não mostram evidências de como os conceitos se desenvolvem com o passar do tempo sob a influência de uma sucessão instrutiva bem definida. Tal informação é indubitavelmente crucial se a pesquisa tiver como objetivo orientar a redefinição de currículos escolares com o propósito de promover uma aprendizagem mais efetiva de matemáticas para todas as crianças. Esforços têm sido investidos para compreender o desenvolvimento das estruturas cognitivas envolvidas no pensamento envolvendo números racionais, com o objetivo de fundamentar um programa instrutivo teoricamente embasado (Behr, Lesh, Post e Silver, 1983).

Por outro lado, um grande número de pesquisas empíricas (Kerslake, 1986; Post, 1981) sobre aprendizagem de números racionais tem seu foco voltado para a análise dos erros ou concepções errôneas das crianças. Estes estudos documentam que muitas crianças (e também professores) têm seus conhecimentos limitados aos conceitos básicos sobre frações e fundamentados em concepções errôneas. Estes resultados poderiam ser utilizados para sugerir que seria inútil tentar construir conhecimento sobre frações com base nos conhecimentos anteriores das crianças, uma vez que seus conhecimentos prévios são limitados e carregados de concepções errôneas. Contudo, há um corpo de pesquisas (Kieren, 1989; Mack, 1990; Streefland, 1991a, 1993) que documentam que as crianças têm conhecimento intuitivo, advindos de situações extraídas do mundo real, sobre os construtos e conceitos básicos de números racionais. Estes estudos mostram que as crianças podem resolver problemas críticos ou bastante difíceis, quando eles são colocados em contextos semanticamente ricos; também evidenciam que os conhecimentos advindos da resolução destas situações-problema podem constituir uma base para o desenvolvimento de conceitos formais de número racionais.

Kieren (1989) apresenta um modelo teórico de conhecimento sobre número racional em que estabelece uma hierarquia em relação aos seus diferentes construtos. Um aspecto desta teoria é a noção de uma rede ideal de conhecimento pessoal sobre número racional. Esta rede consiste em seis níveis de conhecimento e pode ser pensada como uma imagem de conhecimento ideal.

- 1º nível (mais primário): contém construtos muito simples e locais (a pessoa domina apenas linguagens simples, como meios, terços).
- 2º nível: inclui os construtos divisão, equivalência e formação e divisão de unidades.
- 3º nível: engloba os construtos medida, quociente, razão e operador.
- 4º nível: neste nível Kieren coloca o conhecimento sobre relações e funções e conhecimento formal de equivalência entre números racionais.
- 5º nível: O penúltimo nível sintetiza a construção de números racionais e conceitos relacionados para produzir o campo conceitual multiplicativo e o reconhecimento do número racional como um elemento de um campo quociente infinito.
- 6º nível: no nível mais alto a pessoa é capaz de explicar vários fenômenos, demonstrar teoremas sobre estruturas matemáticas, bem como transitar com habilidade pelos níveis anteriores.

Kieren (1989) também apresenta um modelo de conhecimento de número racional representado por quatro anéis concêntricos. O anel interno consiste no conhecimento básico adquirido como resultado de viver em um ambiente particular. O próximo anel representa o conhecimento intuitivo (Kieren relaciona o conhecimento intuitivo ao conhecimento construído por intermédio das experiências cotidianas das pessoas). O terceiro anel representa a linguagem técnica que envolve os símbolos e os algoritmos. O último anel representa o conhecimento axiomático do sistema.

Uma observação importante sobre este modelo de conhecimento de número racional é que ele é pensado como dinâmico, orgânico e interativo, quer dizer, conhecer número racional significa ser capaz de interagir nos quatro anéis.

Para uma melhor compreensão das dificuldades relacionadas ao ensino-aprendizagem dos números racionais dedicaremos os próximos segmentos a uma revisão teórica sobre as principais características estruturais dos subconstrutos dos números racionais e as dificuldades de aprendizagem associadas a eles. De forma complementar à análise das características dos subconstrutos, mostraremos os principais aspectos ligados à construção da noção de ordem e equivalência, a influência do contexto no processo de ensino, e terminaremos com uma fundamentação teórica sobre o ensino das operações elementares com as frações.

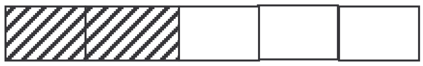
1.2.1 Os subconstrutos dos números racionais: a semântica das frações

1.2.1.1 O subconstruto parte-todo

Para Behr, Lesh, Post e Silver (1983, p. 93), a interpretação de um número racional como parte-todo depende diretamente da habilidade de dividir uma quantidade contínua ou um conjunto discreto de objetos em subpartes de tamanhos iguais.

Complementando esta idéia, salientamos que esta situação se apresenta quando um todo (contínuo ou discreto) se divide em partes “congruentes” (equivalente como quantidade de superfície ou quantidade de objetos). A fração indica a relação que existe entre um certo número de partes e o número total de partes em que o todo foi dividido. O todo recebe o nome de unidade.

De forma análoga, Nunes (2003) salienta que parte-todo significa que um todo foi fatiado em *n* fatias, cada fatia é codificada como *1/n.* Se a pessoa se refere a várias (*k*) fatias, temos, então, *k/n*. O inteiro 1 (1= *n/n*) é uma característica básica nesta representação. A autora exemplifica dizendo que, se um todo foi dividido em cinco partes e duas foram pintadas, os alunos podem interpretar esta representação como um processo de dupla contagem: acima do traço da fração se escreve o número de partes pintadas, abaixo do traço escreve-se o número total de partes.



$\frac{2}{5}$

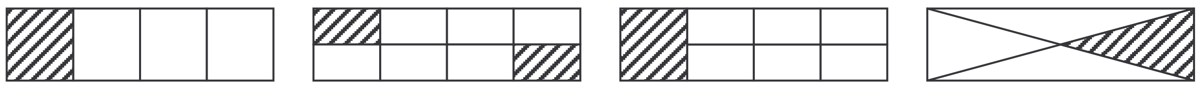
Por se tratar de um conceito básico na compreensão dos números racionais, concordamos com Kieren (1981), ao dizer que este subconstruto é uma importante linguagem a ser construída por ser de fundamental importância para o entendimento de interpretações posteriores mais complexas.

Situações-problema que envolvem o subconstruto parte-todo são largamente empregadas no mundo todo e são normalmente apresentados aos alunos com o auxílio de modelos envolvendo as tradicionais pizzas ou chocolates subdivididos em partes ou, ainda, utilizando-se conjuntos discretos de objetos, como bolas de gude. Estas idéias começam a ser apresentadas para os alunos por volta da 3ª série, sendo bastante trabalhadas até o final da 4ª série do Ensino Fundamental. Na segunda metade do Ensino Fundamental estas idéias são aplicadas com outras abordagens, mas agora com o objetivo claro de ampliar as possibilidades algébricas dos alunos em atividades que envolvem resolução de problemas.

Em situações de ensino da relação parte-todo envolvendo quantidades contínuas é possível fazer várias perguntas como: podemos solicitar aos estudantes para fazerem uma partição qualquer do todo; ou identificar uma partição particular; ou descrever como a parte (a) se relaciona com o todo (b) expressando-a na forma a/b. Para Marshall (1990, 1993) e Sweller e Cooper (1985), um dos aspectos da característica do conhecimento da situação parte-todo é visual. Muito da instrução e explicação está em termos de representação visual. O modelo visual correto para a situação parte-todo precisa ser codificado em memória pelo estudante, junto de ligações sobre quais aspectos da figura visual representam o todo e quais representam as partes e como elas se relacionam. Duas formas de representação visual predominam. Uma é o símbolo *a/b* que é também uma representação visual, uma vez que difere de outros números que os estudantes vêem. A segunda representação visual tem a ver com dividir regiões. Normalmente, estas regiões são retângulos ou círculos, colocados de forma que eles possam ser divididos facilmente em pedaços de tamanho iguais.

Os modelos que se utilizam da interpretação de regiões geométricas envolvem, aparentemente, uma compreensão da noção de área. Owens (1980) e Sambo (1980) examinaram a relação entre o conceito de área de uma criança e a sua habilidade para aprender conceitos de fração. Acreditam esses pesquisadores que ensinar a noção de área pode ajudar na habilidade de crianças para aprender conceitos de fração quando regiões geométricas forem utilizadas e interpretações de medida estiverem envolvidas (Behr, Lesh, Post e Silver, 1983, p. 93-95).

Estas dificuldades se apresentam em situações parecidas como as do exemplo a seguir:



Nas quatro situações acima a fração correspondente à parte hachurada é equivalente a ¼. A habilidade requerida nestas situações não é a de dividir "todos" em partes com formas iguais, mas sim dividir em partes com áreas congruentes. Além disso, para uma compreensão completa deste subconstruto, é necessária a identificação do "todo" (qual todo está sendo tomado como unidade?). Estas são algumas questões que mostram as dificuldades intrínsecas à relação parte-todo, quando tomamos quantidades contínuas divididas em partes congruentes. Desta forma, a identificação da relação entre a área correspondente à parte hachurada e à área total da figura requer estruturas cognitivas distintas que devem ser levadas em consideração quando se elaboram seqüências de ensino envolvendo este subconstruto.

Quando tomamos conjuntos discretos para trabalhar com a relação parte-todo, as questões a serem consideradas são diferentes das de quantidades contínuas, anteriormente salientadas. Seja, por exemplo, a situação colocada por Marshall (1993): Billy tem 3 bolas de gude, Tony tem 4 bolas de gude e Joe tem 9 bolas de gude. Juntos eles têm 16 bolas de gude. Se a pessoa aceitar a bola de gude individual como a unidade de divisão, então a pessoa pode ilustrar esta situação por meio de 16 círculos. A representação parte-todo para a parte de Billy seria feita então obscurecendo 3 destes círculos. Assim, a "parte" é agora o número de objetos sombreados, e o "todo" é o número total de objetos. Cada uma das unidades que compõem a "parte" tem tamanho igual, porque cada uma representa o mesmo número de objetos (por exemplo, 1 bola de gude). No entanto, a divisão não resulta em partes de tamanho iguais. Há três partes que se combinam para formar o todo, e cada uma pode ser representada por uma fração: 3/16 (Billy); 4/16 (Tony) e 9/16 (Joe).

Payne (1976) considera que a relação parte-todo pode ser objeto de aprendizagem das frações desde aproximadamente oito anos, mediante o uso de modelos manipulativos como dobraduras de papel que possam conduzir à idéia de um todo dividido em partes iguais e, posteriormente, pode-se investir em um trabalho oral e simbólico. Muitos educadores matemáticos (como Behr, Lesh, Post e Silver, 1983) vêem o construto parte-todo como fundamental para as interpretações posteriores de números racionais. Contudo, este modelo isoladamente se mostra insuficiente para abarcar a completa compreensão deste conjunto numérico, uma vez que a compreensão das frações impróprias não pode ser adquirida por intermédio deste tipo de abordagem.

1.2.1.2 O subconstruto quociente ou divisão indicada

Nesta interpretação olhamos para a fração $\frac{a}{b}$ como uma divisão entre dois números inteiros, neste caso o símbolo $\frac{a}{b}$ representa uma relação entre duas quantidades *a* e *b* denotando uma operação, quer dizer, às vezes $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$), é usado como um modo de escrever $a \div b$ (esta é a divisão indicada). Esta situação aparece quando um ou alguns objetos precisam ser divididos igualmente num certo número de grupos (dividir uma quantidade é separá-la em partes de tamanhos iguais). É a idéia de partilha, de fazer agrupamentos, de divisão indicada. Isto quer dizer que, conhecido o número de grupos a serem formados, o quociente representa o tamanho de cada grupo.

Para Nunes (2003), este significado está presente em situações em que está envolvida a idéia de divisão; por exemplo, uma pizza a ser repartida igualmente entre cinco crianças. Nas situações de quociente temos duas variáveis (número de pizzas e número de crianças), sendo uma correspondente ao numerador e a outra, ao denominador – no caso $\frac{1}{5}$. A fração, neste caso, corresponde à divisão (1 dividido por 5) e também ao resultado da divisão (cada criança recebe $\frac{1}{5}$).

Kieren (1980) assinala uma diferença significativa desta interpretação com a interpretação parte-todo, indicando que para a criança que está aprendendo a trabalhar com as frações dividir uma unidade em cinco partes e tomar três (3/5) resulta bastante diferente do fato de dividir três unidades entre cinco pessoas, ainda que o resultado seja o mesmo. Nesta interpretação se considera que as frações têm um duplo aspecto: (a) o de ver a fração 3/5 como uma divisão indicada, estabelecendo a equivalência entre 3/5 e 0,6 numa situação de repartição e (b) considerar as frações (números racionais) como elementos de uma estrutura algébrica, quer dizer, como elementos de um conjunto numérico no qual está definida uma relação de equivalência; duas operações (adição e multiplicação) que cumprem certas propriedades, de tal forma que dotam o dito conjunto de uma estrutura algébrica de corpo comutativo.

O conjunto quociente de $\mathbb{Z}$ x $\mathbb{Z}$*, por intermédio da relação de equivalência (~), ou seja, o conjunto de todas as classes de equivalência determinada por ~ sobre $\mathbb{Z}$ x $\mathbb{Z}$ *, constituem Q = $\{\frac{a}{b}$ / (a, b) $\in$ $\mathbb{Z}$ x $\mathbb{Z}$ *$\}$. (Para maiores detalhes veja o apêndice.) Desta forma, podemos definir um número racional como um par de inteiros satisfazendo a equação bx = a. Em outras palavras, podemos dizer que números racionais são por definição quocientes. A existência deles está relacionada à propriedade de corpo que garante a existência de um inverso multiplicativo para cada inteiro b diferente de zero.

Segundo Ohlsson (1988), os números racionais, interpretados como quociente, podem ser entendidos de quatro maneiras diferentes:

Divisão: Dividir uma quantidade é separá-la em partes de tamanhos iguais. Segundo Silver (1986) esta aplicação é conhecida como a interpretação **partitiva** do quociente. Assim, 6 ÷ 3 = 2 é interpretado como a quantidade seis dividida em três partes de tamanhos iguais a dois.

$$6 \div 3 \rightarrow 2 + 2 + 2 \text{ ou } 6 \div 3 \rightarrow \{2, 2, 2\}.$$

Extração: Extrair é tomar (ou retirar) uma quantidade repetidamente de outra quantidade. Para Silver (1986), esta interpretação é conhecida como **quotitiva**. Neste caso, 6 ÷ 3 significa que a quantidade três é repetidamente retirada da quantidade seis, assim, a operação pode ser efetuada duas vezes.

Diminuição: É o processo de "encolher", envolve uma única quantidade que é diminuída durante certo tempo por alguma outra quantia. Assim, 6 ÷ 3 pode ser "lido" como uma quantidade de seis que é "encolhida" de um fator três e se torna uma quantidade dois. Por exemplo, podemos falar sobre o volume de um balão como encolhendo com um fator três (como resultado, digamos, do aumento da pressão externa). Não há nenhum vocábulo especial para "encolhendo"; em termos rudimentares poderíamos dizer que o balão encolheu a um terço de seu tamanho anterior. A expressão "um terço" pressupõe uma relação particular entre quociente e números racionais.

Eduzir (Educing): Eduzir é tirar algo oculto ou potencial de algo. Embora esta aplicação é menos intuitiva do que as três anteriores, ela é interessante, pois existe uma classe de relações que não podem ser entendidas em termos de dividir, extrair ou encolher. Por exemplo, aplicando o quociente à área de um retângulo, a área, necessariamente, não é dividida em pedaços semelhantes ao retângulo original, nem o comprimento é extraído repetidamente, nem a área é encolhida para produzir a largura. A área é uma quantidade multidimensional; é o produto do comprimento pela largura. Neste caso, a variação da área pode ser produzida com a manutenção da largura e variando-se o comprimento, ou vice-versa.

Muitas das discussões das crianças sobre as alternativas de interpretações de problemas e as diferentes estratégias que eles utilizam para resolvê-los constituem-se em grandes oportunidades para professores e pesquisadores melhor compreenderem as relações internas existentes nos conceitos fundamentais de números racionais. Consideremos, por exemplo, as três estratégias alternativas para compartilhar três barras de doce entre quatro crianças relatadas por Carpenter et al. (1994). Uma solução envolve dividir cada uma das três barras de doce em quatro partes iguais e distribuir um quarto de cada uma das barras de doce para cada criança. Em uma segunda solução, são divididas duas barras de doce pela metade e as metades distribuídas às quatro crianças. A terceira barra de doce é dividida ao meio, e, então, os meios são divididos ao meio. Este autor relata, ainda, uma terceira solução descrita por Behr, Harel, Post e Lesh (1992): as três barras de doce são unidas como uma unidade que é dividida em quatro.

Estas distintas soluções oferecem interpretações bastante diferentes do problema que pode ser analisado em termos da escolha inicial da unidade. A primeira solução pode ser concebida como um quarto de três unidades, e a terceira solução pode ser interpretada como um quarto de uma unidade de três. Embora, provavelmente, não seja necessário ou esperado que as crianças articulem estas diferenças nestas condições, Behr, Harel, Post e Lesh (1992, 1993) propõem que este tipo de análise da unidade pode ser útil para os professores entenderem o que as crianças estão pensando. As duas primeiras soluções ilustram como as frações podem ser pensadas em termos de diferentes composições aditivas (Carpenter et al. 1994)

Para Streefland (1984), as seqüências de ensino poderiam tomar a interpretação das frações como divisão indicada como centro do processo; aponta, ainda, que a grande dificuldade em relação ao ensino das frações na escola consiste na tendência de apresentar o assunto com um tratamento formal e algorítmico das idéias. A alternativa, segundo este autor, consistiria em buscar situações da vida real, utilizando-se de problemas que incluem a idéia de partição e medida, apoiados no conhecimento informal das crianças, e potencializar, por intermédio destas situações, a construção dos conceitos, as operações e as relações. Assim, Streefland, ao destacar as situações de repartição e medida, mostra-nos uma diferença significativa em relação a outros subconstrutos, por exemplo: “Em um restaurante temos que repartir três pizzas entre cinco crianças. Quanto corresponde a cada uma?”. O resultado 3/5 aparece a partir de um processo de diferenciar, dividir, abreviar, representar, simbolizar etc., requerendo do aluno muito mais do que a simples representação de um diagrama.

1.2.1.3 O subconstruto medida

Neste caso, a idéia é de comparação de duas grandezas, por exemplo: quantas vezes um palmo cabe no comprimento de uma mesa?

Para Caraça (1951), é necessário que se estabeleça um termo de comparação único para todas as grandezas de mesma espécie; ou seja, uma unidade de medida como centímetros para comprimentos; gramas para peso; segundos para tempo etc. A questão também exige uma resposta para a pergunta quantas vezes?, o que se faz dando um número que exprima o resultado da comparação. Esse número chama-se medida da grandeza em relação a essa unidade.

Esta situação poderia ser exemplificada tomando-se dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, conforme o desenho a seguir:

A ______ B

C ____________________ D

|______|______|______|

Se tomarmos o segmento $\overline{AB}$ como unidade, quanto mede o segmento $\overline{CD}$? O problema consiste em verificar quantas vezes o segmento $\overline{AB}$ cabe no segmento $\overline{CD}$. Desta verificação obtém-se o número 3 que é a medida do segmento $\overline{CD}$, tomando se o segmento $\overline{AB}$ como unidade de medida. Por outro lado, consideremos a tarefa de medir o segmento $\overline{AB}$ tomando se como unidade de medida o segmento $\overline{CD}$. Neste caso, não há um número inteiro capaz de identificar esta medida; recaímos, então, na necessidade de expressar esta relação por intermédio do número racional 1/3.

Contudo, temos que tomar cuidado. Tratando-se de números racionais estamos nos referindo, neste caso, a grandezas comensuráveis. Existem, também, as grandezas incomensuráveis, por exemplo, suponha um triângulo retângulo de catetos medindo 1 cm e sua respectiva hipotenusa. Neste exemplo, não há um número racional capaz de expressar a medida da hipotenusa em relação a seus lados. É aí que surge a necessidade dos números irracionais.

Também podemos pensar em medidas utilizando-se como unidade conjuntos discretos, como é o caso do problema proposto por Carpenter et al. (1994): "Temos 6 latas de tinta para pintar um quilômetro das linhas existentes no meio da estrada. Quantos quilômetros de estrada podem ser pintados com 27 latas de tinta? (p. 4)".

Essencialmente, 6 latas são utilizadas como unidade para medir as 27 latas. Vinte e quatro latas representam 4 grupos de 6 latas (pintará 4 quilômetros). As 3 latas que permaneceram são comparadas com a divisão da unidade (6 latas). Se as latas forem utilizadas individualmente como subunidades (um sexto da unidade), a resposta sairá como 4 3/6 quilômetros. Se uma criança notar que 3 latas representam a metade das 6 latas (unidade), a unidade (6 latas) poderia ser dividida em subunidades de 3 latas cada, chegando a resposta 4 1/2 quilômetros. Neste caso, o número racional representa uma razão entre a quantidade que está sendo medida e a unidade de medida. As medidas só fazem sentido em termos de unidade e a divisão desempenha um papel central. No caso explicitado, a quantidade a ser medida é dividida inicialmente em partes de uma determinada medida, posteriormente a própria unidade é dividida (Carpenter et al., 1994, p. 14-15)

No que se refere ao ensino dos números racionais, Kieren (1980) defende a idéia de que as frações interpretadas como medida proporcionam um contexto natural para a "soma" de frações (união de duas medidas) e, também, facilita a introdução dos decimais (notação decimal).

1.2.1.4 O subconstruto operador

O subconstruto de número racional como operador define uma estrutura multiplicativa em que o operador $\frac{p}{q}$ faz duas operações: uma de multiplicação por *p* e outra de divisão por *q*. Neste caso, $\frac{p}{q}$ impõe aos números racionais uma interpretação algébrica podendo ser pensado como uma função que transforma um conjunto em outro conjunto. Ao operar em objeto contínuo (por exemplo, comprimento), nós pensamos em $\frac{p}{q}$ como uma combinação entre esticar e encolher. Qualquer segmento de reta de comprimento ℓ operado por meio de $\frac{p}{q}$ será "esticado" de um fator *p* e "encolhido" de um fator *q.* Uma interpretação de multiplicador/divisor será dada a $\frac{p}{q}$ quando operar em um conjunto discreto. O número racional $\frac{p}{q}$ transforma um conjunto com *n* elementos em um conjunto com *np* elementos e, então, este conjunto é reduzido a $\frac{np}{q}$ (Behr, Lesh, Post e Silver, 1983).

Um problema simples que pode ilustrar bem esta situação seria: tenho 36 balas, dei ¾ destas balas para Maria. Quantas balas eu dei?

Nesta interpretação as frações são vistas com um papel de transformação: "algo que atua sobre uma situação (estado) e a modifica". Concebe-se aqui a fração como uma sucessão de operações: multiplicação e depois divisão, ou o inverso. Assim, o operador leva implícita uma convenção: primeiro atua a divisão e depois a multiplicação. Também pode-se inverter a convenção e atuar sempre a multiplicação em primeiro lugar e depois a divisão. Esta interpretação enfatiza o papel das frações (números racionais) como elementos da álgebra das funções (transformações) ao mesmo tempo em que conduz à idéia de que os números racionais formam um grupo (estrutura algébrica) com a multiplicação. (Ciscar e Garcia, 1988, p. 72-74).

Behr, Harel, Post e Lesh (1993) identificam várias formas diferentes de raciocinar utilizando-se o construto operador. Entre elas, o raciocínio que mais freqüentemente as crianças utilizam para resolver situações-problema que envolvem operador é uma variação do que Behr e colegas chamam de "duplicador/redutor-partição". Esta interpretação pode ser representada de forma semelhante às estratégias utilizadas nos problemas de partição. Por exemplo, considere o seguinte problema: "Há 18 vacas no campo. Dois terços delas pertencem ao Fazendeiro Bob. Quantas vacas pertencem ao Fazendeiro Bob? Neste problema a fração 2/3 está operando no conjunto constituído por 18 vacas. As crianças resolvem freqüentemente o problema dividindo 18 objetos em três grupos e contando o número de objetos em dois destes grupos. Esta é essencialmente a mesma estratégia que as crianças usariam para resolver um problema de divisão partitiva, no qual 18 é dividido em três grupos; a diferença é que a resposta é o número contado em dois grupos em lugar do número de elementos em um grupo.

1.2.1.5 O subconstruto coordenada linear

Neste caso, $\frac{a}{b}$ expressa um número na reta real. Se considerarmos que a cada ponto da reta real está associado um número real, ao localizarmos a fração $\frac{a}{b}$, ou seu decimal equivalente, na reta real estaremos fazendo a correspondência biunívoca ente um ponto da reta e o número $\frac{a}{b}$. Em outras palavras, neste caso, $\frac{a}{b}$ representa um número.

Um problema característico desta situação seria: localize, aproximadamente, a fração 2/5 na reta numerada a seguir:

No processo de ensino-aprendizagem dos números racionais algumas vantagens podem ser obtidas utilizando-se o modelo da reta real em relação a outros modelos, tais como:

a) os tipos de problemas envolvendo a localização de pontos na reta numerada ou vice-versa fazem com que os alunos concebam as frações como números, tais como 1, 2, 3, 4 etc.;

b) facilita a compreensão da idéia de que os números racionais são uma extensão dos números inteiros, incluindo a idéia de que os números inteiros também são racionais;

c) faz com que as frações impróprias (frações maiores que a unidade) e as frações mistas (3 ½) apareçam de forma muito mais natural;

d) facilitam o trabalho de compreensão das propriedades topológicas da reta, tais como a densidade dos números racionais;

e) a reta numérica pode ser utilizada na construção do significado de equivalência e ordem, além de servir como modelo representacional para auxiliar a compreensão das operações básicas com frações.

Para Lamon (2006) a reta numerada é um poderoso instrumento para construir o significado de número racional. A pesquisa realizada por esta autora mostra que as crianças conseguiram um ótimo desempenho em tarefas que envolviam o conceito de medida, relação de ordem e equivalência de frações, todas elas trabalhadas na reta numérica. Inclusive a noção de densidade dos números racionais foi desenvolvida.

No tocante à representação de uma fração na reta numerada, alguns problemas podem ser identificados. Novillis (1980) apresentaram a crianças de sétima série tarefas que envolviam localização de frações na reta numerada. Os resultados da pesquisa revelaram que os alunos associavam mais facialmente as frações próprias com pontos da reta quando a graduação da reta era igual a um. Os resultados também indicam uma aparente dificuldade concernente à percepção da unidade de referência quando era utilizada uma reta numérica de comprimento correspondente a duas unidades; quase 25% da amostra adotou a linha inteira como unidade. Os dados também indicam que as crianças não associam o número racional dois sextos ao mesmo ponto na reta atribuído para o número um terço. E, por último, os problemas nos quais o número de subdivisões da unidade não era igual ao denominador da fração eram mais difíceis de resolver do que problemas em que o número de subdivisões da unidade era igual ao denominador (Behr, Lesh, Post e Silver, 1983).

Os problemas identificados relativamente à utilização do modelo da reta numérica não atingem apenas as crianças. Llinares e Sánchez (1996) prepuseram a professores em formação para a escola primária (denominação espanhola) a tarefa de associar uma fração, dado um ponto sobre a reta numérica. Observaram que os professores se utilizavam de ensaio e erro para responder as questões sem, contudo, conseguir identificar um número para o ponto assinalado. Constataram, também, que estes futuros professores mostraram uma desconexão entre diferentes domínios do conhecimento matemático.

1.2.1.6 Relação entre os subconstrutos

Em razão dos diversos significados com os quais se pode conceber o conceito de fração/número racional, podemos considerá-lo um “superconceito”, pelo fato de sintetizar uma série de interpretações, anteriormente descritas, constituindo-se em uma rede de subconceitos. Conforme salientado anteriormente, a interpretação e aprendizado desta rede de significados mobilizam diferentes estruturas cognitivas, neste caso entendidas como diversos esquemas de pensamento subjacentes às ações necessárias para desenvolver tarefas que implicam a idéia de número racional e que são construídas pelas crianças e jovens em diversas épocas de seu desenvolvimento. Do ponto de vista do ensino, não é possível isolar completamente cada uma das interpretações das demais. Algumas delas têm vinculações "naturais" que não se podem ignorar e fazem com que, ao se tratar de um determinado aspecto de um subconstruto, outros estejam implicitamente presentes.

Merlini (2005) investigou as estratégias utilizadas por alunos, de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental, perante a resolução de problemas que abordavam cinco significados das frações: parte-todo, número, quociente, medida e operador multiplicativo. Os resultados obtidos revelam que não houve, em nenhuma das duas séries pesquisadas, um desempenho eqüitativo entre os cinco significados da fração. Quanto às estratégias de resolução dos problemas, também não houve uma regularidade. Em outras palavras, para um mesmo significado foram encontradas diferentes estratégias de resolução. Segundo a autora, os resultados obtidos permitem concluir que a abordagem que se faz de um determinado conceito de fração não garante que o aluno construa o conhecimento desse conceito especificamente.

A noção de fração simultaneamente como quociente e razão é bastante interessante. Como quocientes, números racionais são quantias aditivas. Eles respondem à pergunta (quanto?), advindos do ato social de compartilhar. Nas condições de Schwartz (1988), estes casos envolvem quantidades extensivas. Como razões, números racionais também têm um caráter intensivo; eles contêm uma propriedade que relaciona uma quantidade e uma unidade. Assim, os números racionais ou frações podem ser tomados para demonstrar uma complementaridade entre razão e quociente (Kieren, 1993).

Carpenter et al. (1994) também focalizam a relação existente entre os problemas de divisão ou quociente e razão. Para tanto, eles consideram o problema de dividir 3 biscoitos para 6 crianças. A resposta pode ser pensada em termos de quantidade (a quantia de doce que cada criança adquire) ou em termos de razão (a razão de biscoitos para cada criança). Esta distinção fundamental pode ser refletida nas representações que as crianças dão aos problemas. Uma ilustração dos tipos de raciocínios que as crianças poderiam utilizar para resolver o problema seria: uma criança pode tomar 3 biscoitos, cortá-los ao meio e fazer a distribuição entre os 6 participantes. Outra criança poderia tomar três biscoitos e 6 crianças, com cada biscoito emparelhado para duas crianças. Poderíamos argumentar que a primeira representação focaliza a quantidade (medida, "área") de biscoito que a criança adquire, e o segundo representa a razão entre biscoitos e crianças.

O caso das representações das frações na reta numérica (subconstruto coordenada linear) também pode ser considerado como um caso particular da relação parte-todo. Pensemos, por exemplo, na representação da fração ¾ na reta numérica. Uma criança pode tomar o segmento que vai do 0 ao 1, dividi-lo em quatro partes e tomar três deles, da esquerda para a direita. Neste caso o raciocínio utilizado pela criança é concernente ao subconstuto parte-todo em quantidades contínuas.

Uma ligação forte entre o subconstruto medida e coordenada linear foi identificada por Kieren (1976). Para este pesquisador, uma abordagem concreta e interessante do subconstruto medida de número racional pode ser feita utilizando-se a reta numérica. Neste contexto, uma unidade é representada por um comprimento, em contraste com o subconstruto parte-todo no qual a unidade é freqüentemente uma área ou um conjunto de objetos discretos. Ciscar e Garcia (1988) salientam que a reta numérica serve também como uma boa representação da interpretação das frações como medida. Identificada uma unidade de medida (segmento), esta admite subdivisões congruentes. O número de "adições interativas" da parte resultante das subdivisões que cobrem o objeto indica a medida do objeto (processo interativo de contar o número de unidades – subunidades – que se vai utilizar para cobrir o objeto).

Rodrigues (2005) realizou uma investigação com o objetivo de identificar aspectos do conceito de fração, relativos aos significados parte-todo e quociente, que permanecem não apropriados por alunos em fase de escolarização posterior ao ensino formal desses números. A pesquisa teve por objetivo buscar respostas para a seguinte questão: "Que aspectos do conceito de fração nos significados parte-todo e quociente permanecem sem ser apropriados por alunos de oitava série do Ensino Fundamental, terceira série do Ensino Médio e Ensino Superior na área de exatas?". Os resultados obtidos evidenciam que, mesmo nesses níveis de escolaridade, os alunos ainda apresentam dificuldades significativas sob três pontos de vista: da compreensão do papel da unidade nos problemas envolvendo frações; das peculiaridades das situações envolvendo grandezas discretas; e de aspectos mais abstratos da construção dos números racionais, como a inclusão dos inteiros e a explicitação de soluções em termos de operações com frações.

Como outro exemplo, podemos considerar uma interface existente entre os subconstrutos parte-todo e medida. Seja uma pizza dividida em oito pedaços dos quais comemos três pedaços. A fração 3/8 pode significar que o todo (pizza) foi dividido em oito pedaços e foram tomados três destes pedaços. Podemos considerar, também, a relação entre as áreas correspondentes entre os três pedaços de pizza e o todo (pizza inteira), neste caso, esta comparação denota uma medida (3/8).

Cada subconstruto tem peculiaridades que o caracterizam, como vimos nos segmentos anteriores. Muitas situações-problema possibilitam vários caminhos para a sua resolução, a identificação do subconstruto subjacente a cada uma destas situações depende muito mais da análise do tipo de raciocínio utilizado na resolução do que da situação-problema em si.

1.2.2 O papel do contexto

A utilização de determinados contextos pode influenciar a dificuldade da situação-problema proposta, para explorar determinados conceitos envolvendo números racionais. O tipo de número fornecido no problema, o tipo de apelo visual utilizado e, até mesmo, as questões culturais presentes no cotidiano dos alunos podem refletir na maior ou menor dificuldade das situações-problema apresentadas. Conseqüentemente, a elaboração de seqüências didáticas devem ser pensadas, também, em termos destas dificuldades.

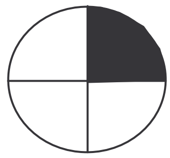
Irwin (2001) estudou o papel do conhecimento cotidiano de estudantes da Nova Zelândia, no desenvolvimento do conhecimento de números racionais colocados na forma decimal. Dezesseis estudantes, com idades entre 11 e 12 anos, pertencentes à classe econômica baixa, foram colocados a trabalhar em pares constituídos por um estudante mais hábil em Matemática com outro menos hábil. Metade dos pares trabalhou em problemas apresentados em contextos familiares e metade, em problemas apresentados sem contexto. A análise dos resultados do pós-teste revelou que aqueles estudantes que trabalharam em problemas contextualizados tiveram um significativo progresso na construção dos conceitos envolvidos, melhor do que aqueles que trabalharam em problemas não contextualizados. A pesquisadora analisou os diálogos entre os pares de estudantes durante a resolução dos problemas, com respeito aos argumentos utilizados. Os resultados desta análise sugerem que maior reciprocidade existiu no entrosamento de pares de alunos nos problemas contextualizados. Pode-se postular, por intermédio do exame dos resultados obtidos, que os estudantes que resolveram problemas contextualizados puderam construir um entendimento científico sobre números decimais, refletido no seu conhecimento cotidiano sobre esses números.

Hiebert e Tonnessen (1978) investigaram se o tipo de conjunto utilizado (contínuo ou discreto) demandava estruturas cognitivas diferentes. Uma das questões de pesquisa era identificar se a interpretação parte-todo, nos moldes dos colocados por Piaget, Inhelder e Szeminska (1960), era igualmente apropriada para os casos envolvendo quantidades discretas e contínuas. No processo de investigação estes pesquisadores utilizaram tarefas que exigiam que as crianças dividissem igualmente uma quantidade de objetos incluindo quantidades discretas e contínuas entre vários animais. Concluíram que as crianças executaram consideravelmente melhor as tarefas que envolviam conjuntos discretos do que no caso de contínuo. Uma possível explicação é que as soluções das tarefas com quantidades contínuas (Piaget et al., 1960) requerem um esquema de pensamento antecipatório bem desenvolvido, considerando-se que as tarefas com quantidades discretas podem ser resolvidas simplesmente por divisão. Em particular, as tarefas abrangendo conjuntos discretos podem ser resolvidas sem tratar o conjunto como um todo e sem necessidade de antecipar a solução final (Behr, Lesh, Post e Silver 1983, p. 93-95).

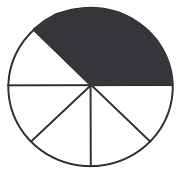
A aquisição das primeiras noções concernentes à relação parte-todo pode ter sua dificuldade influenciada pelo contexto (discreto ou contínuo). Tem-se indicado que as seqüências de ensino sejam inicialmente desenvolvidas em contextos contínuos, embasadas em atividades de dobrar papel, uma vez que a utilização de contextos discretos pode apresentar algumas dificuldades iniciais (Payne, 1976). Esta opinião contradiz as conclusões de Novillis (1976), que indica que os contextos resultam ser de mesmo grau de dificuldade. Ainda que interessantes, estes resultados devem ser considerados com precaução (Ciscar e Garcia, 1988).

O tipo de apelo visual utilizado nas situações-problema ou, até mesmo, a ausência deste recurso também pode determinar o grau de dificuldade de resolução de uma situação-problema. Observemos, por exemplo, três problemas que foram apresentados às crianças de 4ª séries sobre frações no Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb, 2001):

1) "O desenho representa uma torta dividida em partes iguais. Ana comeu a parte escura. Que fração da torta Ana comeu?"



2) "Observe a torta de morango que Letícia fez. Ela dividiu a torta em 8 partes iguais e comeu 3 partes desta torta. Qual a fração que representa as partes que ela comeu?"



3) "Para fazer uma horta, Marcelo dividiu um terreno em 7 partes iguais. Em cada uma das partes, ele plantará um tipo de semente. Que fração representará cada uma das partes dessa horta?"

Os resultados mostram que há uma dificuldade crescente entre estas três situações apresentadas. No primeiro caso, o número de acertos foi de 80%, no segundo este índice cai para 63% e, no terceiro caso, que não contava com o apelo visual, o índice de acerto foi de 35%.

1.2.3 – Os invariantes: equivalência e ordem

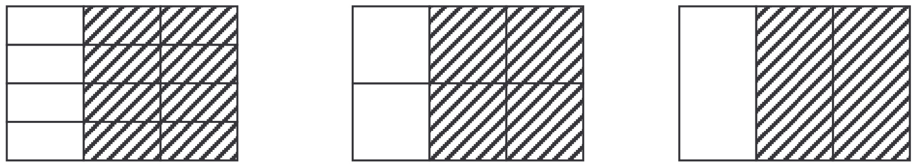
A importância do estudo das idéias envolvidas com a equivalência e a relação de ordem de frações é o fato de estes conceitos serem fundamentais na formalização da construção dos números racionais. Como vimos anteriormente, o conjunto dos números racionais é constituído por um conjunto infinito de classe de equivalência de frações. Estas classes de equivalência podem ser entendidas como o conjunto de todas as frações que descrevem a mesma relação entre a parte considerada e o todo.

Alguns procedimentos importantes a serem reputados no processo ensino-aprendizagem e que propiciam a compreensão de algumas características interessantes do conjunto dos números racionais envolvem situações de equivalência e ordem, tais como: (a) comparar duas frações quaisquer e dizer se são iguais ou uma é maior do que outra; (b) inserir várias frações entre duas frações dadas (idéia de densidade do conjunto). Outra importância do estudo da equivalência e ordem dos números racionais diz respeito ao desenvolvimento dos algoritmos da soma e subtração de frações com denominadores diferentes.

Os conceitos de equivalência e ordem aparecem diretamente em problemas nos quais as crianças comparam situações de repartição. Os casos mais simples envolvem comparações de situações de compartilhamento que representam frações da unidade (Quem adquire mais: 5 crianças que compartilham uma torta ou 6 crianças que compartilham uma torta do mesmo tamanho?). As crianças com uma compreensão limitada de frações cometem freqüentemente o erro de assumir que 1/6 é maior do que 1/5 porque 6 é maior do que 5. Este erro raramente acontece em situações bem contextualizadas. Inicialmente, as crianças podem construir representações das duas situações de repartição e podem comparar o tamanho das partes, fazendo a generalização prontamente de que maior o número de participantes, menor o tamanho de cada parte. Outro exemplo seria a situação que envolve compartilhar 4 pizzas entre 6 crianças. Algumas crianças dividirão cada pizza em 6 partes e outras dividirão cada pizza em 3 partes. No primeiro caso, cada pessoa adquire 4 pedaços equivalentes a 1/6 de uma pizza; no outro, cada pessoa adquire 2 pedaços equivalentes a 1/3 de uma pizza. Uma discussão de quem adquire mais pizza começa a conduzir à noção de equivalência (Carpenter et al. 1994, p. 12).

Os conhecimentos prévios necessários para uma boa compreensão da equivalência de frações são os relacionados com as idéias que envolvem a concepção parte-todo, tanto em contextos contínuos como discretos. Entretanto, é importante salientar que a idéia matemática de equivalência pode ter vários níveis de dificuldades para o que o professor precisa estar atento para melhor preparar as atividades e ensino.

Como exemplo, utilizando quantidades contínuas, poderíamos criar inúmeras situações análogas às apresentadas abaixo, que envolvem diferentes formas de mostrar a equivalência de frações por intermédio da relação parte-todo:

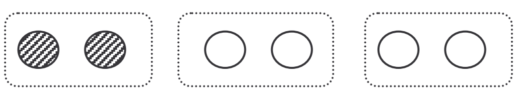


$\frac{8}{12}$ é equivalente a $\frac{4}{6}$ que é equivalente a $\frac{2}{3}$

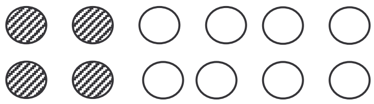
Para Ciscar e Garcia (1988), o trabalho na escola deve ser dirigido para que as crianças desenvolvam em um primeiro momento as relações de equivalência em contextos concretos (contínuos e discretos), potencializando a capacidade da criança de realizar translações entre as representações concretas, oral, escrita e simbólica. A habilidade da criança em realizar as diferentes translações, assim como sua paulatina independência do material concreto, podem ser consideradas como índices do desenvolvimento desta idéia matemática. Em um contexto contínuo é possível estabelecer novas divisões do todo ou ignoramos parte das que existem para encontrar frações equivalentes. Em um contexto discreto realizamos novas reordenações dos elementos (física ou mentalmente) para obter frações equivalentes. Assim, estas atuações no nível concreto acabam sendo vinculadas à regra de ter que multiplicar ou dividir o numerador e o denominador da fração pelo mesmo número para se obterem frações equivalentes. Em um momento posterior da seqüência de ensino será útil propor atividades em contextos discretos que requeiram o manejo da idéia de equivalência.

Ciscar e Garcia (1988) apresentam os seguintes exemplos de obtenção de frações equivalentes a 2/6 em contextos discretos:

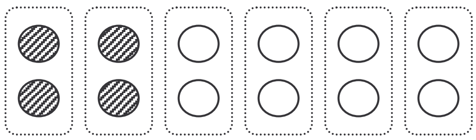
Para se obter uma representação de 1/3, temos que realizar um reagrupamento das fichas e considerar os grupos formados pelas fichas:



Entretanto, por outro lado, se queremos obter uma representação de 4/12, deveremos considerar como unidade, por exemplo, um grupo formado por doze fichas com quatro delas hachuradas:

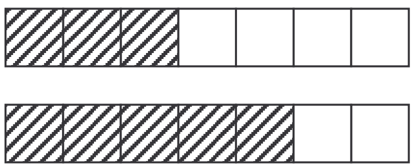

4/12

Tendo que reagrupar as fichas de dois em dois para obter uma representação de 2/6 (que é a situação de que partimos), para poder estabelecer a equivalência:



Este fato de ter que conjecturar quantas fichas devem ser utilizadas para formar, neste caso, a unidade para obter uma boa representação da fração equivalente, ou no caso anterior, ao ter que determinar quantas fichas devem estar em cada subgrupo, faz com que o manejo deste concreto seja mais complexo (Ciscar e Garcia, 1988).

A idéia de frações equivalentes é particularmente importante para trabalharmos a relação de ordem, ou seja, quando queremos comparar duas frações e determinar se uma é menor, igual ou maior que a outra. A comparação de duas frações de mesmo denominador não apresenta grandes dificuldades, especialmente se trabalhada com a relação parte-todo como suporte. Como exemplo, podemos ilustrar a comparação entre 3/7 e 5/7:


3/7
5/7

Ou, ainda, podemos utilizar a idéia de operador para fazer:

3/7 = 3 x 1/7 e 5/7 = 5 x 1/7, daí é fácil ver que 3/7 $\angle$ 5/7.

A primeira dificuldade aparece quando queremos comparar frações com denominadores distintos, por exemplo, 3/4 e 2/3. Neste caso, surge a necessidade de estabelecer parâmetros para realizar a comparação, ou seja, padronizar a medida, determinar o todo a ser tomado como referência, o que equivale a identificar frações equivalentes às dadas, mas que tenham o mesmo denominador. Assim:

¾ = 9/12 e 2/3 = 8/12, como 8/12 $\angle$ 9/12, temos que 2/3 $\angle$ ¾.

As dificuldades ao se utilizarem situações-problema envolvendo contextos discretos para trabalhar a relação de ordem são as mesmas das já salientadas para a equivalência.

A utilização da reta numérica para representar as frações e estabelecer uma relação de ordem entre duas ou mais frações é bastante eficaz, além de potencializar a conexão com a noção de medida e de número.

1.2.4 Operações elementares com números racionais

As operações são pontos extremamente importantes da aritmética que é trabalhada com os alunos na primeira metade do Ensino Fundamental. Contudo, a ênfase exagerada nos procedimentos algoritmos e o treinamento exaustivo por intermédio de extensas listas de exercícios repetitivos e descontextualizados acarretam, muitas vezes, um distanciamento entre as operações e a compreensão do significado do cálculo realizado. Quando estas operações envolvem números racionais, o problema se torna ainda maior, como nos mostra a própria história da Matemática.

Nosso objetivo neste segmento é realizar uma breve análise e discussão sobre o ensino das operações elementares com frações procurando ressaltar dois pontos que consideramos essenciais:

- o entendimento dos conceitos envolvidos nas operações, como algo que deve anteceder a sua generalização, ou seja, a aplicação de algoritmos;
- uma análise das dificuldades de aprendizagem subjacentes a estas operações, com o propósito de refletir sobre possíveis formas de organização do ensino.

A compreensão destes dois fatores envolvidos nas operações com frações é importante porque deles depende a ênfase que se pode dar ao ensino, evitando mecanizações desprovidas de sentido para os alunos. Segundo Ciscar e Garcia (1988), a razão para que os algoritmos se tornem regras sem sentido pode ser em virtude de uma introdução demasiadamente precoce na escola do manejo de símbolos sem a existência de um esquema conceitual que os embase. No entanto, também em alguns casos, por uma introdução desvinculada de um fundamento suficientemente concreto e natural para a operação (falta da existência de um "modelo de compreensão"). Outro aspecto a se ter em conta quando se fala dos algoritmos nas operações com frações é o fato de que existe uma aparente desvinculação entre a regra para resolver uma "conta", por exemplo, ½ x ¾, e uma situação-problema que contenha implicitamente esta operação.

Uma dificuldade inicial ao se trabalhar a adição ou subtração de frações com denominadores diferentes está na identificação da unidade tomada como referência. Quando somamos 1/5 + 1/3 temos que em primeiro lugar torná-las expressões do mesmo todo, "padronizar a medida". Assim, temos: 1/5 = 3/15 e 1/3 = 5/15. Então: 1/5 + 1/3 = 3/15 + 5/15 = 8/15.

Quando o ensino está calcado exclusivamente na aplicação de algoritmos, o processo gira em torno de calcular o Mínimo Múltiplo Comum dos denominadores e posterior aplicação dos passos subseqüentes para a determinação do resultado. Neste caso, a pergunta: por que se calcula o MMC? – nem sempre é respondida e o procedimento fica desprovido de significado.

Ciscar e Garcia (1988) chamam a atenção para o fato de que os algoritmos para a soma e subtração de frações com denominadores distintos pertencem a um nível pouco intuitivo. É importante ter isto presente ao seqüenciar os passos que devemos dar para ajudar as crianças a realizarem a transposição da utilização de seus procedimentos pessoais para um procedimento síntese e geral dos processos adotados. Enfatizam, também, o fato de que algumas interpretações podem conduzir o aluno, de uma forma mais natural, ao conceito de determinadas operações. Assim, se a seqüência de ensino relativa ao conceito inicial de fração enfatiza o aspecto medida e a relação parte-todo, o conceito de soma e subtração se apresenta com maior naturalidade. Assinalam estes autores, relativamente ao uso de algoritmos para realização da adição e subtração, o baixo rendimento que as crianças manifestam em seu manejo, junto ao fato de que em determinados problemas as crianças substituem o algoritmo que estava implícito na dita situação pelo uso de procedimentos próprios. De forma resumida, as constatações são as seguintes: (a) baixo rendimento no manejo dos algoritmos; (b) desvinculação entre a situação-problema e a realização da operação mediante o algoritmo correspondente. Tendo isto em conta, seria importante refletir sobre a forma como estes algoritmos estão sendo utilizados em sala de aula.

Estudos realizados por Baker (1994) e Mack (1990) sugerem que, se as crianças entenderem o conceito de equivalência, elas terão condições de construir soluções para situações-problema que envolvem adição e subtração de números racionais sem nenhuma instrução formal. O fato é que eles reconhecem que as crianças têm que somar ou subtrair com base em uma mesma unidade e as crianças são suficientemente proficientes na obtenção de frações equivalentes, encontradas a partir de frações com denominadores comuns. Os algoritmos inventados e usados pelas crianças para somar e subtrair números inteiros constitui uma base para entender a adição e subtração com números racionais.

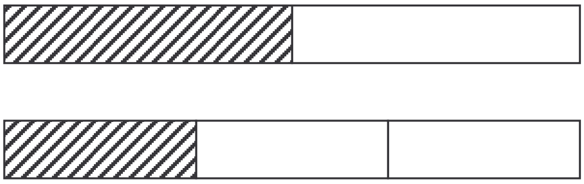
Para Mack (1990), a construção do aspecto quantitativo da adição e subtração de frações, fixado em problemas com contextos nos quais as quantidades têm significado explícito para as crianças, desempenha um papel importante no processo de construção de procedimentos significativos. Problemas que envolvem frações mistas parecem ter mais significado para os alunos; estes problemas ajudam a reconhecer a unidade, como unidades inteiras, além das frações da unidade no mesmo problema e as crianças, muito prontamente, interagirão com estas situações.

Como exemplo, podemos colocar:

1 ¼ de metro + ¾ de metro

```
____|____|____|____|____|____|____|____|____|____|____|____|____|___
    0                   1                   2                   3
    ______________________
    |       1 ¼          |______________|
                                ¾
```

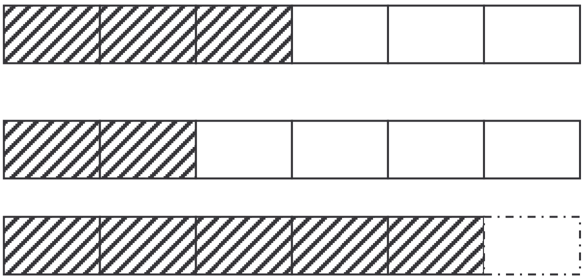
O apelo visual como tentativa de melhorar a interpretação da adição ou subtração de frações também pode ser um recurso interessante no processo de ensino. Seja, por exemplo, a adição: ½ + 1/3. Associando-se esta operação à seguinte situação-problema: Paulo comeu ½ de uma barra de chocolate e João comeu 1/3 de outra barra de chocolate idêntica a de Paulo. Quanto de uma barra de chocolate equivale ao que Paulo e João comeram?



Paulo comeu ½ da barra de chocolate

João comeu 1/3 da barra de chocolate

Utilizando a noção de equivalência, temos:



Paulo comeu ½ = 3/6 de chocolate

João comeu 1/3 = 2/6 de chocolate

Paulo e João comeram ½ + 1/3 = 5/6

O objetivo destas observações é ressaltar a idéia de que no processo de ensino o algoritmo seja o resultado final, a síntese da evolução das estratégias pessoais conquistadas a partir de resolução de problemas contextualizados e significativos para os alunos. Além disso, estes algoritmos não podem ficar só como sínteses de procedimentos vinculados a situações mais ou menos concretas, mas devem fazer parte de um repertório de estratégias conquistadas com o objetivo de serem reinvestidas em outras situações.

Outra operação elementar importante a ser considerada é o caso da multiplicação. Com os números naturais a multiplicação pode ser vista como adições repetidas. Sendo assim, é claro que a multiplicação "produz algo maior". Com os números racionais a multiplicação é melhor vista como uma função em que os números se tornam operadores multiplicativos. Esta visão da multiplicação está associada à idéia de esticar e encolher, própria dos operadores multiplicativos (Dienes, 1972). Assim, com os racionais, ao contrário dos números inteiros, a multiplicação tem uma natureza conceitualmente complexa; agora, a multiplicação nem sempre produz algo maior (Kieren, 1993).

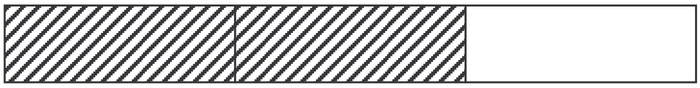
Para Carpenter (1994), há muito menos pesquisas sobre as estratégias informais de crianças ao resolverem problemas que envolvem multiplicação e divisão do que no caso da adição e subtração. Muitas situações que incluem multiplicação e divisão são na essência extensões das situações de multiplicação e de divisão com números inteiros ou, de outra forma, situações que compreendem divisão podem ser resolvidas com estratégias que são extrapoladas das estratégias utilizadas na resolução de problemas de divisão de números inteiros. Carpenter (1994) e Ciscar e Garcia (1988) defendem a idéia de que o conceito de multiplicação de números racionais seja construído junto do construto operador. Propõem, também, que as situações sejam fortemente contextualizadas, apresentando problemas inseridos em situações semanticamente ricas e que tenham significado para crianças. Carpenter et al. (1994), no caso do construto operador, propõem limitar a discussão inicial a operadores (multiplicadores) menores do que um; mas ressaltam que não há nenhuma razão para limitar o multiplicando. É interessante denotar que problemas contextualizados utilizando-se multiplicadores menores do que um são os mais difíceis para as crianças identificarem a forma de multiplicar quando ensinados empregando-se métodos tradicionais (Bell, 1989; Fischbein, Deri, Nelo e Merino, 1985). Complementam estes pesquisadores que provavelmente esta dificuldade esteja mais fortemente relacionada à metodologia de ensino tradicional do que propriamente à dificuldade relativa ao conceito e aos problemas utilizados.

Vários investigadores (Armstrong e Bezuk, 1995; Behr et al., 1992; 1993; 1994; Confrey, 1994; Empson, 1999; Kieren, 1988; 1995; Olive, 1999; 1993; Steffe, 1988) sugerem que o conhecimento sobre divisão, isto é, o processo de dividir um todo ou unidade em partes de tamanho iguais, pode prover uma fundamentação propícia ao desenvolvimento da compreensão, pelos estudantes, sobre a multiplicação de frações. Por outro lado, segundo Behr et al., (1992), Kieren (1995), Olive (1999) e Steffe (1988) são unânimes em assegurar que, para os estudantes construírem seu conhecimento sobre multiplicação, eles precisam ser capazes de reconceituar a unidade, ou melhor, qual é o todo? Tal reconceituação habilita à determinação da unidade apropriada a ser dividida, como também a unidade na qual os resultados da divisão estão baseados. Por exemplo, considere o problema que envolve a seguinte multiplicação: 3/4 x 2/3 =? Um estudante poderia resolver este problema do seguinte modo: primeiramente tomaria dois terços como parte de uma unidade (por exemplo, uma pizza inteira). Posteriormente, considerando os dois terços, agora como uma nova unidade, procederia à divisão desta nova unidade (dois terços) em quatro partes de tamanho iguais e tomaria três delas relacionado-o a unidade original, ou seja, ½ da unidade original.

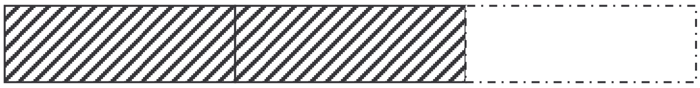
Esta forma de resolução utilizada para interpretar ¾ x 2/3 também pode ser entendida em termos de área. Carpenter et al. (1994) defendem esta forma de interpretação e salienta que os professores poderiam adotar este recurso em suas aulas como medida auxiliar na compreensão da multiplicação de frações.

Como ilustração, utilizaremos barras de chocolate para interpretar, em termos de área, a operação ¾ x 2/3.

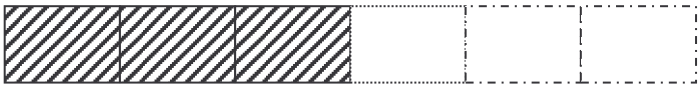
Primeiramente, consideramos 2/3 do chocolate:



Posteriormente, tomamos a área correspondente aos 2/3 como um novo todo:



Este novo todo é dividido em 4 partes, das quais tomamos 3 delas:



Como resultado, obtemos 3/6, que é igual a ½ do todo original.

Quanto à divisão de frações, os professores freqüentemente apresentam dificuldades em construir situações que envolvem divisão de fração ou até mesmo não conseguem identificá-las (Ball, 1990, Tirosh e Graeber, 1990), mas se os conceitos de medida e divisão partitiva forem completamente compreendidos para situações que encerram números inteiros, esta compreensão constitui um contexto para o entendimento da divisão de fração. Quando o divisor for uma fração, esta se torna a unidade de medida. Segundo Carpenter et al. (1994), as crianças podem resolver problemas como o exemplificado a seguir usando estratégias semelhantes à empregadas para divisão de números inteiros, juntamente com a idéia presente no subconstruto medida:

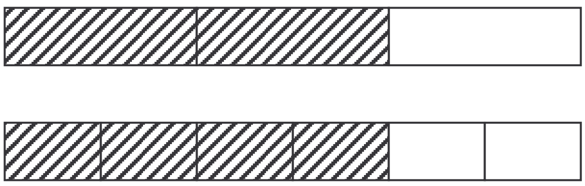
Uma receita de bolo pede ¾ de xícara de farinha de trigo. Quantas receitas poderemos fazer com 1 xícara e meia de farinha? (Fizemos uma adaptação do problema proposto por Carpenter et al., 1994).

Ainda para Carpenter (ibidem), a conexão entre divisão partitiva para números inteiros e para frações é menos direta. Contudo, é possível propor problemas simples, cujos contextos fazem sentido para as crianças, por exemplo:

> "Doze crianças estavam em classe na segunda-feira. Isso corresponde a dois terços da classe. Quantas crianças compõem esta classe?".

Note que o problema pode ser pensado em termos de inverso de um operador que opera em um conjunto (dois terços de quanto dão 12?), ou como uma razão da unidade (12 corresponde a dois terços; quanto corresponde ao número um?). Este é o tipo de flexibilidade que queremos encorajar no pensamento de crianças e professores. É claro que a escolha dos números faz diferença nos problemas que as crianças podem resolver e influenciam as possíveis estratégias que eles utilizarão. Nem todos os números possibilitam soluções que sejam extensões diretas de estratégias usadas com números inteiros. Estes problemas têm o objetivo de desenvolver uma compreensão básica sobre divisão de fração, e não a geração de uma estratégia de generalização da divisão como inverso da multiplicação (Carpenter et al., 1994).

O apelo visual para a construção da idéia de divisão de frações nem sempre é muito fácil. No entanto, é perfeitamente possível trabalhar com frações que resultem em quociente de fácil interpretação, como no caso: 2/3 ÷ 1/6. Neste caso, a questão é descobrir quantas vezes 1/6 de um dado todo cabe em 2/3 deste mesmo todo.



2/3 ÷ 1/6 = 4

A ilustração mostra que 1/6 cabe 4 vezes em 2/3.

1.2.5 O ensino dos números racionais

Segundo assinala Payne (1976), citado por Ciscar e Garcia (1988, p. 30-31), no tocante às investigações sobre o ensino-aprendizagem das frações realizadas nas décadas de 60 e 70, distinguem-se dois períodos: no primeiro momento, a ênfase dos trabalhos centra-se em "comparar e analisar as vantagens e inconvenientes dos algoritmos das operações com frações". Para tanto, foram estudadas diferentes abordagens sobre o ensino destes algoritmos que facilitavam sua compreensão e manejo por meio de diagramas, materiais manipulativos etc. Em um segundo período, o interesse das investigações se translada para verificar o que é que as crianças aprendem quando seqüências de ensino são desenvolvidas minuciosamente.

Nos segmentos anteriores mostramos uma ampla visão sobre as diversas formas em que os números racionais podem ser pensados, as características fundamentais de cada uma delas e as dificuldades e destrezas envolvidas nos cálculos com frações, além das dificuldades encontradas pelas crianças e adolescentes para obter uma compreensão conceitual aceitável dos números racionais em diversos contextos. Buscamos esta compreensão em diferentes trabalhos de diversos pesquisadores oriundos de vários países. Nossa intenção com esta revisão teórica foi buscar uma análise detalhada, e com bases científicas, destas dificuldades para, a partir delas, possibilitar a reflexão sobre possibilidades de soluções para os problemas relacionados ao ensino dos números racionais. Embora as dificuldades observadas sejam de natureza bastante diversa, a grande maioria delas revela uma falta profunda de compreensão conceitual que se estende pelas diferentes formas de representação simbólicas dos números racionais utilizadas nos métodos atuais de ensinar estas representações. A seguir, apresentaremos um breve resumo dos problemas mais evidentes relacionados com os processos de ensino e de aprendizagem dos números racionais.

A primeira observação diz respeito à forma como as frações são trabalhadas, em especial, no Ensino Fundamental. Hiebert e Wearne (1986) e Resnick (1982) evidenciam que o programa relativo aos números racionais, muita vezes, é dedicado quase que exclusivamente para ensinar procedimentos de manipulação de números racionais e muito pouco tempo para ensinar o seu significado conceitual. “Com efeito, o conhecimento sintático é predominado sobre o conhecimento semântico.” Moss e Case (1999) enfatizam que, embora a maioria dos estudantes aprenda os algoritmos específicos que lhes são eventualmente ensinados, o seu conhecimento conceitual geral permanece notavelmente deficiente.

Em trabalhos com frações, os algoritmos freqüentemente são desenvolvidos como uma extensão dos algoritmos de números inteiros (teoria dos números), uma extensão da soma (adição com denominadores comuns), ou uma extensão com sintaxe poderosa do sistema de numeração de base 10. Em virtude disto, o currículo, bem como o ensino, enfatizam prematuramente as regras operacionais do simbolismo técnico. Estas extensões não são comumente construídas na Matemática intuitiva das frações. As crianças entendem a forma, mas não a substância do sistema. Isto deve resultar em realizações temporárias com fragmentos de conhecimento, mas não em duração, utilidade e poder de conhecimento pessoal (Kieran, 1989).

Outra questão que merece reflexão diz respeito ao sistema de representação das frações. Quando são feitas tentativas de enfatizar os significados, quando da introdução dos números racionais, eles não são suficientemente diferenciados de números inteiros. Um problema particular nesta consideração é o uso de gráficos de setores circulares como veículos para apresentar as frações às crianças (Kerslake, 1986; Kieren, 1995; Mack, 1990; Nunes e Bryant, 1997; Ohlsson, 1988). No domínio dos números racionais na sua forma decimal, a maioria dos escolares de nível médio afirma que números "grandes", como 0,1814, são maiores do que números "pequenos", como 0,3 ou 0,385 (Hiebert e Wearne, 1986). Estimativas percentuais também parecem não ser fáceis para os estudantes, quando solicitados a calcular 65% de 160; a maioria dos estudantes da escola secundária falha ao dar qualquer resposta, ou dá respostas que estão fora de magnitude, por exemplo, 2,5 (Moss, 1997; Moss e Case, 1999, p.122-124).

Ciscar e Garcia (1988) sugerem que, antes de nos movermos diretamente no nível dos símbolos, temos que realizar numerosas atividades em que intervenha a utilização da expressão verbal. Uma translação paulatina para a introdução dos símbolos mediante atividades em que existam as três formas de representação (concreta, oral e simbólica) ajudará no momento em que estivermos trabalhando no nível simbólico, unicamente.

Outra questão crucial a ser cuidadosamente considerada quando lidamos com números racionais, em qualquer um dos seus subconstrutos, é o conceito de unidade. Behr, Harel, Post e Lesh (1992) apresentam uma detalhada análise das transformações envolvidas na resolução de problemas que englobam os diferentes subconstrutos de número racional. Estas transformações são caracterizadas em termos de composição e decomposição da unidade. As distintas abordagens entre as diferentes concepções dos subconstrutos de números racionais dependem de como as unidades são selecionadas, transformadas; e os passos críticos destas transformações são especificados em termos de como as unidades foram recompostas. Um elemento importante da análise proposta por estes pesquisadores é o desenvolvimento de um sistema de notações para localizar a composição, decomposição e conversão de unidades que, seguramente, trouxe uma melhor compreensão do conceito de unidade em diferentes situações.

As questões anteriores nos remetem a evidenciar a metodologia de ensino como um outro problema a ser elencado. Em um grande número de casos os professores não levam em conta as tentativas espontâneas dos alunos para dar sentido aos números racionais, enquanto desencorajam as crianças ao tentar entender estes números pelos seus próprios procedimentos ou regras por elas criadas (Confrey, 1994; Kieren, 1992; Mack, 1993). Normalmente, a metodologia utilizada é eminentemente tradicional, calcada na transmissão de conteúdos elaborados, minando oportunidades de o professor ouvir e refletir sobre o pensamento das crianças.

É essencial chamar a atenção para o fato de que as dificuldades de ensino e de aprendizagem explicitadas anteriormente não são mutuamente exclusivas. Os problemas apresentados são oriundos de pesquisas que procuraram estudar problemas focalizados em certos aspectos. Há, ainda, uma preocupação crescente de que os investigadores precisam atacar o problema do ensino-aprendizagem de uma forma mais abrangente e mais integrada.

Nas suas recomendações para reforma de currículo, Post et al. (1993) sugeriram que a atenção dos idealizadores de currículo não deveria ser dirigida para conseguir tarefas individuais que almejam o desenvolvimento de processos cognitivos mais globais. Uma observação semelhante foi feita recentemente por Sowder (1995) e por Markovits e Sowder (1991), que apontaram que as crianças precisam aprender a se mover entre as várias e possíveis representações de número racional de uma maneira flexível. Embora eles tenham uma preocupação com um entendimento conceitual profundo, análises contemporâneas estão defendendo claramente que criemos currículos que ajudem as crianças a desenvolver melhor as concepções globais do sistema de número racional como um todo e os seus vários componentes juntos – e não a compreensão de um ou outro destes componentes isoladamente (Moss e Case, 1999).

Na atualidade, parece ser uma crença bastante geral (Behr, Lesh, Post e Silver, 1983; Dienes, 1972; Kerslake, 1986; Kieren, 1976; Lesh et al., 1983; Streefland, 1978) a necessidade de proporcionar às crianças uma adequada experiência com as muitas possibilidades de interpretações das frações, se quisermos que elas cheguem a compreender o conceito. Desta forma, a autêntica compreensão do conceito de número racional não só pode ser alcançada por intermédio de apresentações plurais deste conceito, como também mediante um trabalho de forma inter-relacionada entre os subconstrutos, promovendo um movimento no interior desta teia de relações. Pensar a seqüência de ensino, nesta perspectiva, significa considerar no processo ensino-aprendizagem os múltiplos resultados conquistados até o momento no que se refere ao ensino deste conjunto numérico. É necessário ter em conta, também, que todos os conceitos relacionados com as frações necessitam de um processo a longo prazo e devem ser desenvolvidos no decorrer de toda a escolaridade básica.

Desde 1980, o Rational Number Project (RNP) tem coordenado, desenvolvido e divulgado um série de pesquisas importantes sobre o ensino-aprendizagem dos números racionais. Tendo como base estas pesquisas, foi desenvolvido e testado um currículo para ensino das frações ao nível de 5ª e 6ª séries. As investigações que utilizaram este currículo refletiram as seguintes convicções: (a) as crianças aprendem melhor quando há um envolvimento ativo com modelos concretos variados; (b) a utilização de representações pictóricas é um importante aliado na construção de conhecimentos sobre as frações; (c) as crianças deveriam ter a oportunidade de verbalizar suas idéias matemáticas juntas e com o professor; (d) o currículo tem que focalizar no desenvolvimento de conhecimento conceitual antes do trabalho formal com símbolos e algoritmos. Este modelo sugere que a aprendizagem é aumentada quando as crianças têm oportunidades para explorar idéias matemáticas por múltiplas perspectivas: manipulativos, quadros, símbolos escritos, símbolos verbais e contextos da vida real. Este modelo de currículo também tem mostrado que, quando os conceitos são “traduzidos” nestas formas de representação, torna as idéias sobre números racionais mais compreensíveis para as crianças (Cramer e Post, 1995).

Lesh, Landau e Hamilton (1983) sugerem um modelo interativo que considera cinco sistemas de representação (diagramas, símbolos escritos, materiais concretos, linguagem falada e situações reais) que nos permitem facilitar a aquisição e o uso do conceito de número racional, sendo a habilidade para fazer translações entre os diferentes modos de representação o que faz as idéias significativas para os alunos.

Pelo visto anteriormente, os processos de aprendizagem estão atrelados a uma variedade de estruturas cognitivas que estão presentes nas diferentes interpretações das frações. Desde as primeiras experiências das crianças com frações elementares, como metades e terços, normalmente vinculados à relação parte-todo, até a habilidade de manejar o mecanismo de dividir e atingir a destreza de trabalhar com a inclusão de classe, perpassando pelos problemas que envolvem o trabalho com razões e proporções, que estão estreitamente vinculadas a habilidade de comparar e manejar dois ou mais conjuntos de dados ao mesmo tempo, seguramente existe um longo e trabalhoso caminho a percorrer. Desta forma, é importante que os professores tenham estas informações sobre os processos de ensino-aprendizagem, quando pensarem no desenvolvimento de seqüências de ensino que tenham como objetivo a aprendizagem das noções relativas às frações. Assim, a formação de professores de Matemática relativa ao ensino dos números racionais é um outro problema a ser solucionado.

1.2.6 A formação de professores para o ensino dos números racionais

De forma geral, as pesquisas que versam sobre a formação de professores de Matemática para o ensino dos números racionais estão, em grande medida, dirigidas à verificação das concepções e conhecimentos matemáticos de professores, em relação a este conteúdo (Vinner, 1989; Llinares e Sánchez, 1991; Pinto e Tall, 1996; Philippou e Christou, 1994, Leinhardt e Smith, 1985, entre outros). Quando a questão está relacionada com as operações elementares, a divisão de frações é a mais utilizada para verificação do conhecimento dos professores quanto ao entendimento conceitual das operações com números racionais. A metodologia de coleta de dados mais comumente empregada está associada à utilização de questionários, testes, entrevistas com o objetivo de captar, para posterior análise, as concepções ou estrutura cognitiva dos professores relativamente a particularidades ligadas aos números racionais, como definições, imagens do conceito ou sistemas de representação do conceito. Em menor número, identificamos pesquisas que procuravam testar a eficácia de determinados processos de formação (Tirosh, Fischbein, Graeber e Wilson, 1998a; Silva, 2005). O alvo principal de um número grande destas pesquisas (Cramer e Lesh, 1988; García, 2003) está centrado no conhecimento do professor (em formação ou em exercício) da escola elementar (no caso do Brasil, primeiro ciclo do Ensino Fundamental).

Garcia (2003) apresenta um estudo sobre as dificuldades específicas na aprendizagem das frações e destaca a necessidade de os programas de formação de professores de Matemática considerarem os avanços das investigações relacionados à aprendizagem das noções matemáticas escolares, entre elas as frações. Trata-se

> da necessidade de considerar a informação proporcionada pelas investigações sobre a aprendizagem dos alunos (considerada em termos amplos que englobariam os processos de aprendizagem, dificuldades, erros etc.) de diferentes conteúdos matemáticos do programa (quer dizer, passa a ser considerado como algo que deve formar parte do conteúdo de um programa de formação) (p. 3).

Leinhardt e Smith (1985) investigaram o conhecimento sobre frações em estudantes para professores e, também, em professores experientes (foram selecionados professores cujos alunos mostraram um bom conhecimento, ou conhecimento incomum, sobre frações). Os autores desenvolveram o que eles denominaram de “rede semântica do conhecimento” dos professores pesquisados em relação às frações. Depois de comparar as redes semânticas dos professores experientes com os novatos (estudantes para professores), informaram que os professores experientes apresentaram uma melhor estrutura hierárquica mais refinada do conhecimento. Estes professores pareciam não só saber as regras processuais na resolução de problemas envolvendo frações, mas também conheciam a inter-relação entre os procedimentos utilizados.

Cramer e Lesh (1988) avaliaram o conhecimento sobre números racionais de 48 professores elementares em formação. Os resultados indicam que os estudantes, em sua grande maioria, não tinham uma base de conhecimentos sobre números racionais, mínima necessária para propiciar um ensino de qualidade. Os autores sugerem mudanças no currículo de formação no sentido de fornecer aos futuros professores um entendimento conceitual das noções matemáticas essenciais a um ensino de qualidade.

Orton (1988) pesquisou o conhecimento de professores concernente a formas de representação envolvendo frações. Foram pesquisados 29 professores elementares em serviço sobre como eles ensinariam frações a um estudante hipotético que apresentava concepções errôneas a respeito de frações. A maioria dos professores recaiu na utilização de processos algorítmicos em vez de procedimentos representacionais que melhor promoveriam o entendimento dos conceitos por parte dos alunos.

Linchevski e Vinner (1989) estudaram as concepções de professores em formação para a escola elementar, quanto à identificação do “todo” *canônico* das frações, quando este era substituído por um outro inteiro. Os resultados mostram que as representações visuais dos professores elementares em formação sobre frações são incompletas e insatisfatórias. Elas não são suficientes para formar um conceito completo de fração. Os autores recomendam que vários tipos de representações sejam apresentados aos professores em formação para uma completa caracterização das frações.

Ball (1990a) estudou as habilidades de 19 estudantes para professores da escola elementar no desenvolvimento de representações para a operação 1 ¾ dividido por ½, por intermédio de história ou outro meio qualquer. Os estudantes para professores mostraram conhecer as regras de cálculo, contudo não conseguiram encontrar uma forma de representação da operação nos termos solicitados.

Llinares e Sánchez (1991) realizaram uma pesquisa com o objetivo de investigar o conhecimento didático de 26 estudantes para professores da escola elementar sobre frações. Os pesquisadores utilizaram questionários e entrevistas individuais para verificar o PCK dos estudantes sobre sistemas de representação das frações. A análise do material coletado indica que a maioria dos participantes foi incapaz de identificar a unidade, representar frações como partes de um todo e trabalhar com frações impróprias.

Philippou e Christou (1994) investigaram o conhecimento conceitual e processual de professores elementares em formação. Além disso, o estudo também teve como objetivo determinar se havia diferenças entre professores em formação que vêm de tipos diferentes de ensino secundário com ou sem ênfase adicional em Matemática e Ciência. Os resultados indicam que os professores elementares em formação exibiram sérias dificuldades na compreensão conceitual sobre frações. Eles pareciam ter conhecimento apropriado dos símbolos e algoritmos associado com as frações, mas muitas conexões importantes pareciam estar perdidas. Embora a maioria dos futuros professores pudesse executar cálculos corretamente, eles tiveram dificuldades significativas em dar sentido para as operações. As evidências para esta conclusão estão especialmente apoiadas nas operações de divisão e multiplicação de frações. Os autores sugerem que os cursos de formação de professores para a escola elementar dediquem um pouco mais de atenção ao estabelecimento de conexões entre os conceitos e as operações envolvendo frações.

Pinto e Tall (1996) entrevistaram sete estudantes de um curso de formação de professores de Matemática, colocando para cada um deles as seguintes questões: “como você define um número racional?” e “como você define número irracional?”. Os pesquisadores também apresentaram uma lista de números, tais como: $\sqrt{2}$, $\sqrt{4}$, 22/7, 0,97853, 0,3333.., entre outros, solicitando aos alunos que os classificassem em racionais e irracionais. Os resultados revelaram que três dos sete estudantes entrevistados apresentaram o que os autores chamaram de “quase definição satisfatória do conceito”, ou seja, embora não tivessem apresentado a definição, tinham uma boa imagem do conceito. Nenhum dos alunos indicou a definição usual de número racional.

Llinares e Sánchez (1996) realizaram uma investigação com professores elementares em formação com o objetivo de analisar as relações entre a compreensão sobre números racionais, por parte dos estudantes para professor, e o conhecimento de diferentes sistemas de representação para o conceito e procedimentos com números racionais. Uma implicação que deriva da análise efetuada é que os estudantes para professor necessitam conhecer o papel que desempenha os distintos modos de representação que podem ser utilizados para os números racionais e o processo de aprendizagem dessas idéias pelas crianças. Salientam, também, que, para poder selecionar ou julgar a veracidade de uma representação para potencializar algum significado específico dos números racionais, é importante que o estudante para professor tenha uma adequada e ampla compreensão dos números racionais. Para dar conta da compreensão das noções matemáticas vinculadas aos modos de representação, Llinares (1994, 1998a) usou um processo que envolvia a utilização de diversos modos de representação de uma mesma situação, no sentido de compreender e descrever as características do conhecimento do conteúdo relacionado com as frações e os números racionais em estudantes para professores.

Tirosh, Fischbein, Graeber e Wilson (1998a) organizaram um módulo pedagógico sobre números racionais para professores elementares em formação, em que eram discutidos os conceitos e operações principais relacionados aos números racionais. Este módulo foi usado em um projeto de experiência pedagógica com professores elementares em formação em pequenos grupos, como também com a classe inteira. Os autores argumentam que muitos comentários dos professores em formação no início das sessões de formação refletiram suas concepções sobre o principal papel dos professores de Matemática, por exemplo: transmitir aos alunos deles a informação que é impressa nos livros de ensino de Matemática e que o ensino de Matemática é um processo “passo a passo”. Gradualmente, os professores em formação começaram a considerar a possibilidade de aplicação da instrução recebida no curso em suas futuras classes. Outra questão positiva é a de que eles relacionaram as várias concepções que as crianças trazem à situação de aprendizagem, com a importância de prestar atenção aos modos de pensar dos estudantes. Também perceberam a necessidade de atuarem como facilitadores da aprendizagem e a viabilidade de deixar os estudantes trabalharem na solução de equívocos.

Tirosh (2000) realizou uma investigação sobre o conhecimento de professores que participaram de um curso em formação, sobre as concepções das crianças a respeito da divisão de frações. Os resultados revelam que antes do curso os sujeitos da pesquisa se ativeram apenas aos erros dos alunos correspondentes à aplicação dos algoritmos ou relacionados com as formas de interpretação dos textos dos problemas. Ao terminar o curso, salientaram a tentativa dos estudantes de aplicarem as propriedades dos números inteiros aos números racionais. De forma geral, o estudo indica que a maioria dos sujeitos pesquisados teve uma compreensão ingênua sobre ensino-aprendizagem dos números racionais. A autora sugere a importância de serem discutidos os problemas associados aos processos cognitivos e erros mais comuns dos alunos nos programas de formação de professores.

Santos (2005) realizou um estudo diagnóstico com 67 professores do Ensino Fundamental distribuídos em sete escolas da rede pública do Estado de São Paulo. A investigação teve como intuito responder a seguinte questão: “É possível reconhecer as concepções dos professores que atuam nos 1º e 2º ciclos (polivalentes) e no 3º ciclo (especialistas) do Ensino Fundamental, no que diz respeito ao conceito de fração? Se sim, quais? Se não, por quê?”. Os resultados obtidos mostram uma tendência, tanto entre os professores polivalentes como entre especialistas, em valorizar a fração com o significado operador multiplicativo na elaboração de problemas envolvendo frações. Quanto à resolução de problemas, há uma valorização dos aspectos procedimentais – aplicação de um conjunto de técnicas e regras (algoritmo) – nos três grupos. Segundo o autor, as evidências constatadas levam a concluir que não existe diferença significativa entre a concepção dos professores polivalentes e especialistas, seja na elaboração ou na resolução de problemas compreendendo fração em seus diferentes significados.

Silva (2005) pesquisou as concepções de um grupo de professores de Matemática sobre números fracionários (denominação adotada pela pesquisadora) em relação à aprendizagem de alunos de 5ª série. Analisou questões relacionadas com a autonomia e dificuldade em possíveis mudanças de concepções em um processo de formação continuada desenvolvido pela pesquisadora. O trabalho foi idealizado com a finalidade de responder as seguintes questões:

> Que organização didática os professores constroem para o ensino de números fracionários para a quinta série do Ensino Fundamental durante a formação? É possível encaminhar professores de Matemática a reflexões que possibilitem mudanças nas concepções que têm os alunos, proporcionando-lhes um novo lugar na instituição escolar? É possível em uma formação continuada promover ações que permitam aos professores algumas mudanças em sua prática de ensino de números fracionários para a quinta série?.

As concepções de números fracionários utilizadas pela investigadora no processo de formação foram: parte-todo, medida, quociente, razão e operador. Como resultado da investigação, a autora argumenta que é possível afirmar que os professores constroem para a 5ª série organizações didáticas muito rígidas para os números fracionários, com tipos de tarefas que associavam, sobretudo, a concepção parte-todo em contextos de superfícies, mobilizando a técnica de dupla contagem das partes e, com menos incidência, a concepção de razão mobilizando a mesma técnica. Foram constatadas mudanças nos sentidos e emoções dos professores em relação aos fracionários que propiciaram modificações em suas concepções a respeito dos números fracionários, e alguns indícios de mudanças em suas práticas de ensino. Modificações nos discursos dos professores foram observadas a respeito da aprendizagem de seus alunos e da maneira de organização didática elaborada na formação de uma sala de 5ª série. A formação explicitou a necessidade de os professores desenvolverem autonomia e reflexão a respeito do conteúdo e de suas práticas docentes.

CAPÍTULO 2
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

2.1 A natureza da pesquisa

Na introdução deste trabalho ressaltamos resumidamente que a busca de evidências que possibilitem responder à nossa questão de pesquisa será obtida por intermédio da análise de uma série de dados coletados a partir:

- dos textos provenientes da elaboração das questões/problemas, e suas respectivas resoluções, sobre frações realizada pelos alunos concluintes;
- da avaliação diagnóstica dos estudantes para professores sobre seus conhecimentos básicos de números racionais;
- dos discursos provenientes das transcrições das entrevistas realizadas com professores e alunos.

A coleta e a análise destes dados, pelas suas características intrínsecas, conduzem-nos à utilização de uma abordagem metodológica eminentemente qualitativa de apresentação de resultados. A compreensão do fenômeno a ser investigado, consubstanciado em particularidades, enquadra-se nas observações de Stake (1983), que aponta como características básicas de uma pesquisa qualitativa ou naturalista interpretativa: selecionar casos especiais para observação; analisar seqüências de testemunhos em determinados contextos; entrevistar e registrar; determinar padrões ou regularidades; selecionar fatos importantes; classificar; triangular; validar e reinterpretar dados ou fenômenos; fazer relatórios, até obtenção de um produto que permita generalizações naturalistas.

Além das observações anteriores, podemos considerar outras características das pesquisas qualitativas que se encaixam nos nossos propósitos, como as apontadas por Patton (1986): permitem uma visão holística do fenômeno observado (a compreensão do significado de um comportamento só é possível se realizado de forma contextualizada); possibilita a realização de uma abordagem indutiva (é aquela em que o pesquisador parte de observações mais livres e as categorias de interesse surgem progressivamente durante o processo de coleta e análise dos dados) e investigação naturalista (é aquela em que a intervenção do pesquisador fica reduzida ao mínimo possível no contexto observado). Este autor também salienta como procedimentos básicos das pesquisas qualitativas: as citações literais do que as pessoas falam sobre suas experiências, interações e comportamentos observados; descrições detalhadas das situações observadas; transcrição de trechos ou íntegras de documentos etc. (Patton, 1986, p. 22).

Também utilizaremos os recursos próprios das pesquisas quantitativas em quase todo o capítulo destinado à análise dos dados. Para que o leitor possa quantificar a ocorrência de determinados fenômenos que queremos evidenciar, apresentaremos um resumo estatístico dos mesmos antecedendo nossas considerações qualitativas.

2.2 Contexto e desenvolvimento da pesquisa

O ABC Paulista (Santo André, São Bernardo do Campo e São Caetano do Sul) é uma região que se destaca não só no cenário paulista, como também no brasileiro, por uma variedade de razões, tais como: alta densidade populacional; reconhecido pólo produtivo e comercial nacional; berço do sindicalismo da classe trabalhadora; e, infelizmente, também pelas profundas desigualdades sociais. Desnecessário seria dizer, neste contexto, da enorme importância de uma Educação Básica de boa qualidade, o que, obviamente, demanda um contingente de profissionais da educação bem qualificados e preparados para atuar neste nível de ensino. Estas características sociais e regionais, associadas à existência de instituições de nível superior que preparam professores de Matemática, muitos deles atuando nesta região, se encaixam perfeitamente no perfil por nós idealizado para a coleta de dados. Entendemos ser este um *locus* que permite um estudo profundo e representativo do problema que nos propusemos a investigar.

Nesta região existem três universidades que oferecem cursos de Licenciatura em Matemática. Não dispomos de pesquisas que mostrem a forma de inserção no mundo do trabalho dos professores formados por estas universidades, contudo é bastante disseminada nesta região a idéia de que a maior parte dos professores de Matemática que atuam em escolas do ABC Paulista é formada por estas instituições. *A priori* tínhamos a intenção de coletar dados nas três instituições; porém observamos posteriormente que duas delas eram bastante parecidas na forma de organização curricular e administrativa. Como exemplo deste fato podemos citar: ambas possuem uma grade curricular com rol de disciplinas bastante semelhantes; a seriação é semestral e a carga horária permite aos alunos a conclusão do curso em três anos. Diferentemente, a outra instituição tem uma carga horária bem maior que as duas anteriormente citadas, a seriação é anual e distribuída em quatro anos de escolaridade mínima obrigatória. Logo, entendemos que seria suficiente pesquisarmos os cursos da universidade que oferecia o curso de licenciatura em quatro anos e uma das que fornecia o curso em três anos. Entre as duas instituições com características análogas utilizamos como critério de escolha a receptividade encontrada em uma delas. A coordenação do curso nos deu toda a atenção possível para que pudéssemos fazer a coleta de dados da forma como a idealizamos.

No sentido de preservarmos a identidade destas instituições, doravante elas serão denominadas por α e β. No mesmo sentido, todos os nomes de professores e alunos entrevistados ou avaliados serão omitidos.

2.2.1 A Instituição α

A Instituição α é um centro universitário que dispõe de uma estrutura acadêmica e administrativa que poderia ser considerada de natureza mista, ou seja, estatutariamente ela é denominada de privada, porém todo o seu gerenciamento acadêmico e administrativo é de natureza pública, com forte ingerência do poder público municipal.

Esta Instituição mantém 23 cursos de graduação, um colégio (Escola de Ensino Médio) e 19 opções de cursos de pós-graduação *lato sensu,* abrigando um total aproximado de 10.000 alunos. O curso de Licenciatura em Matemática, à época da coleta de dados, era composto por 12 classes, sendo uma de cada série no período matutino e duas de cada série no período noturno, com um total aproximado de 700 alunos.

Os alunos cumprem uma carga horária de 24 horas/aula semanais, de segunda-feira a sábado. A carga horária total é de 3.264 horas/aula, acrescidas de 400 horas de estágio supervisionado.

A matriz curricular desenvolvida no curso de Licenciatura em Matemática é a seguinte:

Tabela 1: Estrutura curricular do Curso de Licenciatura em Matemática (α)

	Carga horária semanal/ anual			
DISCIPLINAS	**1ª Série**	**2ª Série**	**3º Série**	**4ª Série**
Geometria	4/136	4/136	-	-
Geometria Descritiva	-	2/68	-	-
Complementos de Matemática	2/68	-	-	-
Fundamentos de Aritmética	-	4/136	-	-
Fundamentos de Geometria	-	-	2/68	-
História da Matemática	-	-	-	2/68
Matemática Financeira	-	-	2/68	-
Física	-	-	2/68	4/136
Cálculo Diferencial e Integral	4/136	4/136	2/68	-
Análise Matemática	-	-	-	4/136
Geometria Analítica	4/136	-	-	-
Álgebra	4/136	4/136	-	-
Álgebra Linear	-	4/136	-	-
Cálculo Numérico	-	-	4/136	-
Probabilidade	-	-	4/136	-
Estatística	-	-	-	4/136
Língua Portuguesa	2/68	-	-	-
Laboratório de Ensino de Matemática	2/68	-	-	-
Informática na Educação	-	-	2/68	-
Tendências do Ensino de Matemática	-	-	-	2/68
Projetos de Ensino de Matemática	-	-	-	2/68
Educação Física	2/68	-	-	-
Psicologia de Educação	2/68	-	-	-
Estr. e Func. do Ens. Fund. e Méd.	-	-	-	2/68
Didática	-	2/68	-	-
Prática de Ensino	-	-	-	4/136
Metodologia do Ensino de Matemática	-	-	4/136	-

Fonte: Secretaria da Instituição.

2.2.2 A Instituição β

A Instituição β é uma universidade privada com 35 anos de existência, que oferece 29 cursos de graduação, 22 opções de cursos de pós-graduação *lato sensu* e 36 cursos de extensão. Dispõe de uma estrutura com 75 mil metros quadrados de área construída, 52 laboratórios, 2 auditórios, 350 salas de aula e biblioteca com acervo de 100 mil volumes.

A estrutura organizacional que conduz o sistema didático-administrativo é composta hierarquicamente pelo Conselho Universitário (Consu), Conselho de Ensino Pesquisa e Extensão (Consepe), Reitoria Acadêmica, Pró-Reitoria Acadêmica, Pró-Reitoria Administrativa, Pró-Reitoria de Pesquisa, Pró-Reitoria de Extensão e Relações Comunitárias, além das Coordenarias de Cursos.

O curso de Licenciatura em Matemática pode ser concluído em três anos, com seriação semestral, e é oferecido no período matutino, comportando uma classe de cada semestre, e no período noturno, com duas classes de cada semestre, abrigando um total aproximado de 390 alunos.

A carga horária total do curso corresponde a 2.414 horas/aula, acrescidas de 400 horas de estágio supervisionado. A matriz curricular desenvolvida é:

Tabela 2: Estrutura curricular do Curso de Licenciatura em Matemática (β)

DISCIPLINAS	Carga horária semanal/semestral					
	1º Sem.	2º Sem.	3º Sem.	4º Sem.	5º Sem.	6º Sem.
Cálculo Dif. e Integ.		04/68	04/68	04/68		
História da Matemática						02/34
Mét. Computacionais					02/34	02/34
Geometria Plana		04/68				
Física			04/68	04/68	02/34	02/34
Matemática Financeira						04/68
Intr. À Mat. Superior	06/102	-	-	-	-	-
Fund. de Álgebra			04/68			
Análise Matemática					04/68	04/68
Geometria Analítica	04/68	04/68				
Geometria II			04/68			
Compl. de Matemática	04/68	04/68	02/34			
Equaç. Dif. Ordinárias					04/68	
Álgebra Linear			04/68	04/68		
Álgebra				04/68	04/68	
Prática de Ensino				04/68		
Compl. de Estatística						04/68
Inform. Apl. à Educ.						02/34
Informática	02/34			04/68		
Intr. ao Proc. de Dad.					04/68	
Língua Portuguesa	04/68	-	-	-	-	-
Didática						02/34
Psicologia da Educação					04/68	
Educação Física	04/68	04/68				
Pol. Educ. da Ed. Brasileira		04/68				
Estr. e Func. Do Ens. Fund. e Médio						02/34

Fonte: Coordenação do curso.

2.3 Caracterização dos sujeitos pesquisados

2.3.1 Professores

Foram entrevistados 21 professores da Instituição α e 20 da Instituição β. O critério de escolha destes sujeitos esteve atrelado à(s) disciplina(s) que eles lecionavam. Nosso interesse estava centrado em investigar de que forma os números racionais estavam inseridos e eram tratados nas diferentes disciplinas que compunham o curso; desta forma, excluímos os professores cujas disciplinas que lecionavam não apresentavam, em nenhum momento, um tratamento deste conteúdo. Assim, não foram entrevistados os professores de Língua Portuguesa, Psicologia da Educação, Didática Geral, Educação Física, Estrutura e Funcionamento do Ensino Fundamental e Médio, Introdução ao Processamento de Dados e Introdução à Informática.

A maior parte dos professores da Instituição α tem idade superior a 40 anos e experiência profissional no Ensino Superior de mais de oito anos. Atualmente, apenas 2 professores lecionam na Educação Básica; porém, dos 18 que não lecionam nestes níveis de ensino, 17 já tiveram experiência profissional anterior no Ensino Fundamental e/ou Médio. Quanto à titulação, apenas 4 são doutores, 10 apresentam apenas Graduação ou Especialização e 6 concluíram o Mestrado.

A maioria dos professores da Instituição β tem idade entre 30 e 49 anos; experiência profissional no Ensino Superior menor do que 10 anos; 7 lecionam atualmente na Educação Básica e 9 dos demais já tiveram experiência profissional no Ensino Fundamental e/ou Médio. Quanto à titulação, constatamos que 7 são doutores, 8 são mestres e 5 são especialistas.

Anexo, estamos disponibilizando duas tabelas contendo o número de identificação, as disciplinas que lecionam e a maior titulação de cada um dos professores participantes desta pesquisa.

2.3.2 Alunos

Foi pesquisado um total de 346 alunos, sendo 189 iniciantes (113 do 1º ano da Instituição α e 76 pertencentes ao 2º semestre da Instituição β) e 157 concluintes (75 do 4º ano Instituição α e 82 do 6º semestre Instituição β).

Do total de alunos pesquisados, 47,1% é do sexo masculino e 52,9%, do sexo feminino.

No tocante à vida escolar pregressa dos alunos, constatamos que a imensa maioria (aproximadamente 87%) cursou totalmente o Ensino Fundamental em escola pública, e 4,6% do total de alunos pesquisados fez curso supletivo.

Quanto ao Ensino Médio, observamos que 79,3% são oriundos de escolas públicas. Do total de alunos pesquisados constatamos que: 61,2% fez curso regular ou propedêutico; 9,2% fez curso supletivo; 21,6% fez cursos técnicos com opções bastante variadas (como Mecânica, Contabilidade, Administração de Empresas etc.) e 8% cursou Magistério.

A respeito da atividade profissional dos alunos pesquisados constatamos que há uma variedade muito grande de profissões por eles declaradas, com predominância de atuações no setor metalúrgico e no comércio. Acreditamos ser importante relatar que 23,5% dos alunos da Instituição α e 23,9% da Instituição γ já estavam lecionando no momento em que a coleta de dados foi realizada.

2.4 Procedimentos e instrumentos de coleta de dados

A coleta de dados, como dito anteriormente, foi realizada utilizando-se cinco fontes denominadas por nós de "Instrumentos". Faremos a seguir uma descrição detalhada destes Instrumentos, procurando evidenciar nossos objetivos com cada um deles.

2.4.1 Instrumento 1 – Criação de questões/problemas

Este procedimento só foi utilizado com os alunos concluintes (4ª série da Instituição α e 6º semestre da Instituição β). Solicitamos a todos os estudantes para professores concluintes que criassem oito questões/problemas envolvendo o assunto frações (números racionais), destinadas a avaliar o conhecimento de alunos do Ensino Fundamental (1ª a 8ª séries) sobre este assunto.

Os alunos receberam um impresso contendo na primeira página um questionário designado à caracterização do seu perfil como idade, local de residência, características relativas a sua Educação Básica etc. Nas páginas seguintes, havia oito espaços demarcados destinados à criação das questões (vide anexo).

Os alunos foram instruídos a não identificarem o seu nome ou número de chamada na Instituição, para que se mantivesse o anonimato dos participantes na pesquisa. Cada aluno recebeu um número de identificação que foi registrado em espaço próprio no canto superior da primeira página. Solicitamos aos alunos que memorizassem este número, pois nas avaliações posteriores eles deveriam se identificar por meio dele.

Antes de os alunos iniciarem o trabalho, orientamos para que se colocassem na posição de examinadores, que teriam como objetivo avaliar o conhecimento dos alunos do Ensino Fundamental sobre o tema “frações”. Para tanto, deveriam primeiro pensar e elencar os conteúdos relacionados a este assunto, em toda a extensão da 1ª a 8ª série, que eles consideravam mais importantes e que fosse imprescindível que os alunos terminassem o Ensino Fundamental com estes conhecimentos construídos. As oito questões criadas por eles teriam como finalidade averiguar justamente se os alunos tinham estes conhecimentos construídos. Várias vezes reforçamos a idéia de que os alunos deveriam variar o máximo possível os conceitos envolvidos nas questões/problemas formulados, para melhor avaliar a abrangência dos conhecimentos dos alunos do Ensino Fundamental. Nesta fase, nenhuma alusão foi feita quanto à possibilidade de solicitação de resolução das questões formuladas; quando perguntavam se era para resolver as questões, respondíamos que não.

Este instrumento teve como objetivo investigar a extensão dos conhecimentos dos estudantes para professores sobre as necessidades formativas dos alunos do Ensino Fundamental a respeito do tema “frações” (números racionais). Isto pode ser avaliado pela diversidade e profundidade dos temas e situações contempladas nos problemas; pelos conceitos e operações utilizados e pela variedade e integração dos diferentes significados das frações, além dos contextos envolvidos nas oito questões por eles criadas. Por outro lado, o próprio conhecimento dos estudantes para professores é passível de avaliação, uma vez que, ao elaborarem as questões, eles colocam estes conhecimentos em jogo, permitindo a detecção da ocorrência ou não de concepções errôneas sobre este tema.

2.4.2 Instrumento 2 – Resolução das questões/problemas criados

Após a formulação dos problemas, os alunos foram solicitados a resolvê-los, em um outro impresso idêntico ao utilizado para criação das questões (vide anexo).

As duas fases (criação e resolução das questões/problemas) foram realizadas de forma independente. Entendemos que qualquer alusão à possibilidade de solicitação de resolução das questões antes ou durante a criação das mesmas poderia interferir no grau dificuldade e abrangência dos problemas propostos pelos alunos. Depois de todos os alunos terem terminado de criar as questões, entregamos o impresso para resolução das mesmas (Instrumento 2), juntamente com as questões por eles elaboradas (Instrumento 1).

2.4.3 Instrumento 3 – Avaliação básica sobre números racionais

Uma outra etapa do processo de diagnóstico envolveu a resolução de 20 questões contendo conhecimentos básicos sobre números racionais, denominado de Instrumento 3. Esta avaliação foi aplicada a todos os alunos iniciantes e também concluintes. Para os alunos iniciantes, o impresso contendo as 20 questões vinha acompanhado de um questionário destinado à obtenção de informações pessoais e de escolarização, idêntico ao que foi entregue aos alunos concluintes com o Instrumento 1.

Este procedimento teve como objetivo a investigação do nível de conhecimentos conceituais e operacionais dos estudantes para professores, sobre conceitos elementares envolvendo números racionais em seus diferentes subconstrutos, especialmente em sua representação fracionária, em situações contextualizadas ou não, com o auxílio de recursos icônicos ou não, apoiadas em conjuntos discretos e contínuos.

Para um melhor aprofundamento da análise dos dados coletados, além de ajustes quanto ao escopo deste trabalho, nossa investigação sofreu alguns recortes relativos ao que era previsto no projeto inicial, de forma que nem todas as 20 questões contidas no Instrumento 3 foram objeto de análise. As questões utilizadas, bem como nossos objetivos em relação a cada uma delas, serão apresentados nas seções destinadas as suas respectivas análises. Nos anexos o leitor encontrará o Instrumento 3 na íntegra.

Nossa intenção ao investigar a *performance* de alunos iniciantes e concluintes relativamente aos seus conhecimentos básicos a respeito de números racionais não significa necessariamente que estamos interessados em mostrar a evolução ou retrocesso do processo de formação pela comparação de resultados.

As comparações, quando forem realizadas durante a análise, terão o objetivo de mostrar apenas os aspectos estáticos, ou seja, como os alunos ingressaram e como estão saindo naquele ano em que os dados foram coletados. As informações advindas dos alunos iniciantes foram úteis para que pudéssemos dimensionar os conhecimentos prévios dos alunos ao ingressar no curso universitário. As informações relativas aos alunos concluintes são importantes na medida em que permitem avaliar de forma geral o resultado do processo formativo, possibilitando reflexões abrangentes sobre as necessidades de correções.

2.4.4 Instrumento 4 – Entrevista interativa com alunos

No sentido de conhecermos mais profundamente as concepções dos licenciandos sobre números racionais, alguns deles foram submetidos a uma entrevista interativa (Instrumento 4). A entrevista foi aplicada a uma amostragem correspondente a aproximadamente 10% do total de alunos *concluintes* envolvidos na pesquisa nas etapas anteriores. Para escolha dos sujeitos entrevistados solicitamos em cada uma das classes de concluintes o voluntariado de 10% do total de alunos que participaram das etapas anteriores. Normalmente o número de voluntários que se predispunha à entrevista era menor do que aquele que havíamos projetado. Foi preciso, então, certa insistência de nossa parte para conseguirmos o número de sujeitos pretendido.

O protocolo básico que deu origem às questões exploradas na entrevista foram as 20 questões (Instrumento 3) resolvidas pelos alunos. Pelo número de identificação foi possível resgatar a avaliação de cada sujeito entrevistado. Interpelamos cada um deles sobre todas as questões, respondidas ou não, procurando resgatar da melhor maneira possível o raciocínio utilizado pelo aluno durante a resolução.

Nosso objetivo com este procedimento foi resgatar o pensamento dos alunos para melhor conhecermos os conceitos mobilizados para resolução das questões, as estratégias utilizadas, suas maiores dificuldades e habilidades. Aproveitamos a oportunidade para introduzirmos algumas perguntas adicionais direcionadas ao entendimento da qualidade do processo de formação, na visão de cada sujeito, atinente ao ensino dos números racionais.

2.4.5 Instrumento 5 – Entrevista interativa com os professores

Este instrumento foi idealizado para que pudéssemos coletar um volume de informações capaz de mostrar um conjunto de evidências que nos permitissem constituir um quadro compreensível das concepções dos professores, no que se refere à formação dos futuros professores para o ensino dos números racionais. Por intermédio do relato das suas concepções e ações no trato com as frações em sala de aula, foi possível ter uma visão dinâmica dos conteúdos sobre números racionais com os quais os alunos tiveram contato durante o processo de formação.

Assim, o nosso propósito com estas entrevistas foi verificar:

- de que maneira os números racionais se inserem no curso ministrado pelo professor;
- se o professor identifica as dificuldades dos alunos quando da resolução de problemas que envolvem números racionais;
- quais são as concepções dos professores sobre as necessidades formativas dos alunos da Educação Básica no tocante ao aprendizado das frações;
- quais são as concepções dos professores sobre as necessidades formativas dos estudantes para professores de Matemática para o ensino dos números racionais (frações).

Os dois últimos itens têm como objetivo verificar, de forma indireta, a abrangência dos conhecimentos dos professores universitários concernentes aos diferentes construtos dos números racionais, bem como das relações entre eles necessárias à sua compreensão, além do conhecimento das dificuldades de aprendizagem inerentes a este conjunto numérico. Entendemos que um dos aspectos importantes no ato de idealizar o currículo de formação dos futuros professores de Matemática perpassa pela abrangente compreensão das necessidades formativas dos alunos da Educação Básica por parte dos professores universitários.

As entrevistas, tanto para os alunos como para os professores (Instrumentos 4 e 5), foram semi-estruturadas, ou seja, partiram de um protocolo preestabelecido e se tornaram interativas nos momentos oportunos. Por ser de natureza interativa, a entrevista permitiu tratar de temas complexos que dificilmente poderiam ser investigados adequadamente só com o auxílio de questionários ou provas escritas. Por ser flexível, a entrevista pôde ser adaptada a cada sujeito; a partir das questões preestabelecidas procuramos manter um diálogo dirigido por conjecturas formuladas pelo pesquisador. No decorrer da entrevista, as respostas dadas pelos sujeitos, por sua vez, propiciaram a formulação de novas conjecturas, permitindo ao investigador o aprofundamento das idéias do entrevistado.

As entrevistas com os alunos e professores foram gravadas e posteriormente transcritas, constituindo-se em fértil material de análise. Eis uma grande vantagem da entrevista, uma vez que possibilita ao pesquisador idas e vindas às falas na busca da melhor interpretação para elas. Nossa experiência com gravações de entrevistas utilizadas em outras pesquisas tem mostrado que apenas no início os sujeitos prestam atenção ao equipamento, envolvendo-se posteriormente com as questões formuladas e concentrando-se nas suas falas.

2.5 Organização dos dados para análise

A massa de dados coletada por intermédio dos cinco instrumentos será utilizada em três unidades básicas de análise que, por sua vez, serão organizadas em categorias e subcategorias. A expressão “unidade de análise”, segundo Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2002), se refere à forma de organização dos dados utilizada pelo pesquisador para efeito de análise. Pesquisas qualitativas geram um enorme volume de dados que precisam ser organizados e compreendidos. Normalmente isto é feito por intermédio de um processo continuado em que se procura identificar dimensões, categorias, tendências, padrões, relações, desvendando significados. Trata-se de um processo complexo, não linear, que demanda do pesquisador um trabalho de redução, organização e interpretação dos dados que propicie análises relevantes sobre o que se está observando.

As três unidades de análise podem assim ser resumidas:

- **A compreensão do conceito de número racional e dos seus subconstrutos.** Nesta unidade de análise investigaremos o conhecimento matemático (conceitual e processual) dos estudantes para professores atinente ao conceito de número racional e aos cinco subconstrutos ou significados das frações: parte-todo; operador; quociente ou divisão indicada; medida e coordenada linear. Utilizaremos os dados provenientes dos Instrumentos 1, 2, 3 e 4.

- **O conhecimento matemático e o PCK relativos às operações básicas com frações.** Articulando os dados provenientes dos Instrumentos 1, 2, 3 e 4, apresentaremos uma avaliação da preparação dos estudantes para professores em relação ao ensino dos números racionais. Este item terá como linha central de investigação o conhecimento dos estudantes para professores de formas de representação capazes de "traduzir" o conhecimento conceitual envolvido nas operações básicas com frações, em especial adição, multiplicação e divisão, com o objetivo de facilitar a aprendizagem de alunos do Ensino Fundamental.
- **Os números racionais na formação universitária.** Neste item faremos uma investigação sobre as formas como os números racionais são introduzidos nas diferentes disciplinas que compõem os cursos pesquisados, procurando constituir o modelo de formação praticado pelas universidades pesquisadas, por intermédio da análise das concepções dos alunos e dos formadores de professores em relação ao ensino dos números racionais. Utilizaremos os dados provenientes dos Instrumentos 4 e 5.

CAPÍTULO 3
ANÁLISE DOS DADOS

3.1 Unidade de análise 1: a compreensão do conceito de número racional e dos seus diferentes subconstrutos

A importância sobre o conhecimento da matéria de ensino por parte do professor foi resumidamente abordada na fundamentação teórica. Sua relevância foi ressaltada não como valor isolado ou quantificado como o mais importante entre todas as questões que compõem a formação profissional do professor de Matemática, mas sim como um importante e fundamental componente do conhecimento profissional que se articula com outros componentes, como o PCK, dando corpo ao conhecimento profissional do futuro professor. Para além da formação inicial, entendemos que, na medida em que o professor começa a atuar profissionalmente, ele continua seu processo de formação dando prosseguimento ao seu desenvolvimento profissional. Contudo, entendemos também que a formação inicial é responsável por uma parte extremamente essencial e delicada deste desenvolvimento. Assim como o médico deve ter uma formação que o capacite para o diagnóstico e tratamento das doenças mais comuns, tão logo termine seu curso na universidade; o engenheiro civil deve diplomar-se com conhecimentos necessários para construir um edifício ou uma ponte, também o professor de Matemática, entre outros assuntos, deve ser capaz de ensinar eficientemente números racionais.

Para Fennema e Franke (1992), “muitas evidências estão se acumulando para apoiar a idéia de que se um professor tiver uma boa compreensão conceitual da Matemática isto influenciará positivamente sua atuação em sala de aula” (p. 151). Graeber, Tirosh e Glover (1989) entendem que, se os professores tiverem dificuldades conceituais em relação às frações, é provável que eles também tenham dificuldades em facilitar a construção de significados por parte de seus alunos ou reconhecer erros relacionados ao que os estudantes fazem em sala de aula.

O conceito de número racional envolve um rico conjunto de subconstrutos integrados, relacionando processos de uma grande gama de conceitos elementares (Behr, Lesh, Post e Silver, 1983). A compreensão ampla desta gama de conceitos é condição necessária para que o professor possa desenvolver atividades de ensino capazes de construir conhecimentos significativos por parte dos alunos.

Esta unidade de análise tem justamente o objetivo de averiguar a extensão destes conhecimentos por parte dos estudantes para professores.

3.1.1 O conceito de número racional

3.1.1.1 As concepções espontâneas

Do total de problemas criados pelos alunos concluintes no Instrumento 1, 58 (4,7%) tratava-se de questões dissertativas que, em sua grande maioria, procuravam avaliar o conhecimento do conceito, de definições ou nomenclaturas relacionadas aos números racionais. Entre os conceitos envolvidos nestas questões, destacamos:

- 10 solicitavam a conceituação ou a definição de fração:

> O que significa fração? (A140, concluinte, Instrumento 1).
> Resposta dada pelo aluno: É um número dividido por outro (Instrumento 2).
>
> Escreva o conceito de fração (A152, concluinte, Instrumento 1).
> Resposta dada pelo aluno: Fração é um número que representa uma ou mais partes de um inteiro (Instrumento 2).

As respostas dadas pelos alunos, em sua maioria (9 entre 10), evidenciavam uma tendência conceitual em admitir as frações como divisão indicada. Estes resultados serão retomados durante a análise dos dados relativos aos diferentes subconstrutos.

- 21 procuravam avaliar o conhecimento de nomenclaturas relacionadas às frações, como: frações irredutíveis ou redutíveis; frações próprias, impróprias, aparentes, mistas, ordinárias; identificação do numerador e denominador, dada uma ou mais frações.

> O que são frações próprias? Dê exemplos. (A171, concluinte, Instrumento 1)
> Resposta dada pelo aluno: São aquelas em que o numerador é menor do que o denominador. Ex. 5/9 (Instrumento 2).
>
> Identifique na fração abaixo o numerador e denominador. ¾ (A173, concluinte, Instrumento 1).
> Resposta apresentada pelo aluno: $\dfrac{3 \rightarrow numer.}{4 \rightarrow denom.}$ (Instrumento 2).

- 27 delas envolviam conceitos variados, tais como: escrever como se lê uma determinada fração, condição de existência de uma fração a/b etc.

> Dê o nome correspondente: a) 2/3; b) 20/100; c) 1/10000. (A288, concluinte, Instrumento 1)
> Resposta apresentada pelo aluno: a) dois terços
> b) vinte centésimos
> c) um décimo de milésimo (Instrumento 2).

3.1.1.2 O que é um número racional?

Fizemos esta pergunta a todos os alunos pesquisados. Nossa intenção não era precisamente verificar se os alunos sabiam de cor a definição de número racional, e sim se eles tinham bem construída a imagem do conceito, no sentido dado por Vinner (1991).[5] Partimos do pressuposto de que ter a definição de um conceito de cor em nada garante que a pessoa tenha o conceito de fato construído em sua memória, mas, segundo Vinner (1991), ter a imagem do conceito bem construída é condição fundamental para se obter a definição.

Dreyfus (1991) argumenta que, para se ter êxito em Matemática é desejável ter representações mentais ricas dos conceitos. Uma representação é rica se contém muitos aspectos coerentemente unidos sobre aquele conceito. Uma representação é pobre se tiver muito poucos elementos para permitir flexibilidade na resolução de problemas.

Se a imagem do conceito estiver bem formada, sua definição pode ser alcançada, mesmo que inicialmente não atenda requisitos como concisão e precisão de linguagem; ela pode ser paulatinamente melhorada no sentido de se obter a elegância estética, tão valorizada pelos matemáticos.

Classificamos todas as respostas dadas pelos alunos no Instrumento 3 em quatro grupos: (a) alunos que apresentaram a definição usual de número racional; (b) alunos que apresentaram uma boa imagem do conceito; (c) alunos que apresentaram concepções absolutamente errôneas; e (d) alunos que não apresentaram resposta nenhuma para a questão. A tabela a seguir mostra o resultado deste levantamento:

---

[5] Para Vinner (1991), quando vemos ou ouvimos o nome de um conceito, nossa memória é estimulada. O que se forma em nossa memória nem sempre é a definição do conceito, mas sim a “imagem do conceito”. Imagem do conceito, para este autor, é algo não verbal associado em nossa mente com o nome do conceito. Pode ser uma representação visual do conceito, no caso de o conceito ter representações visuais ou, ainda, pode ser uma coleção de impressões ou experiências.

Tabela 3: O conceito de número racional

	Apresentou a definição usual	Imagem aproximada do conceito	Concepção absolutamente errônea	Não respondeu
INICIANTES	04 (2,1%)	63 (33,3%)	84 (44,5%)	38 (20,1%)
CONCLUINTES	02 (1,5%)	82 (60,7%)	27 (20,0%)	24 (17,8%)

Fonte: Instrumento 3.

Entre todos os alunos pesquisados, 4 iniciantes (1,1%) e 2 concluintes (1,5%) apresentaram a definição usual de números racionais, por exemplo:

> É um número que pode ser representado na forma de fração a/b, sendo *a* um número inteiro e *b* um número inteiro diferente de zero (A23, iniciante, Instrumento 3).

> É um número que pode ser expresso na forma p/q, com $p \in Z$ e $q \in Z^*$ (A191, concluinte, Instrumento 3).

Em muitos casos, embora não existisse a precisão na caracterização do ente matemático, era possível perceber uma aproximação ao conceito que merece ser considerada. Como estamos envolvidos com a formação de professores, entendemos que é muito diferente um aluno que mostrou não entender nada sobre um determinado conceito em relação a outro que apresenta uma boa aproximação da caracterização precisa do objeto matemático em questão; ou seja, estes alunos demandam necessidades formativas diferentes. Nossos dados revelam que 63 alunos iniciantes (33,3%) e 82 concluintes (60,7%), embora não tivessem caracterizado precisamente os números racionais, mostraram uma "imagem do conceito" que se aproximava da definição usual. Por exemplo:

> É um número que é expresso sob a forma de fração (A2, iniciante, Instrumento 3).

> É todo número que pode ser escrito na forma de fração (A135, concluinte, Instrumento 3).

> É todo número que pode ser escrito na forma a/b com $b \neq 0$ (A158, concluinte, Instrumento 3).

Obviamente existem incorreções nestas conceituações, como, a fração $\frac{\sqrt{2}}{3}$ poderia ser encaixada em qualquer uma das três conceituações anteriores e, no entanto, não é um número racional. Este fato indica que estas conceituações em contextos técnicos do fazer matemático não seriam aceitáveis. É a proximidade com a caracterização precisa do ente matemático é que está sendo por nós evidenciada. É também importante destacar a diferença nos percentuais apresentados, nesta categoria, pelos alunos iniciantes (33,3%) em relação aos concluintes (60,7%), denotando um maior amadurecimento dos alunos concluintes.

Pinto e Tall (1996) entrevistaram sete estudantes para professores e solicitaram a eles a definição de número racional. O resultado a que eles chegaram são proporcionalmente próximos dos nossos. Concluíram estes autores que, embora três dos sete estudantes entrevistados tivessem apresentado uma “quase” definição satisfatória do conceito, nenhum deles mostrou conhecer precisamente a definição usual de número racional. Em vez da definição, eles apresentaram uma imagem do conceito possivelmente desenvolvida durante os anos de escolaridade. Muitas vezes estas imagens se distanciavam muito dos termos implícitos na definição formal.

Os alunos iniciantes apresentaram um maior percentual de incidência de concepções errôneas. Identificamos 84 alunos iniciantes (44,5%) e 27 concluintes (20,0%) que mostraram idéias muito distantes da conceituação precisa de número racional. Em outras palavras, as respostas dadas nos indicam que os alunos não tinham sequer uma imagem aproximada do conceito, por exemplo:

> É todo número inteiro (A87, iniciante, Instrumento 3).
>
> É um número lógico e exato (A275, iniciante, Instrumento 3).
>
> É todo número que existe no conjunto dos números reais (A177, concluinte, Instrumento 3).
>
> Todos que têm divisão exata (A284, concluinte, Instrumento 3).
>
> É um conjunto real (A138, concluinte, Instrumento 3).
>
> O conjunto dos números inteiros positivos e negativos (A114, concluinte, Instrumento 3).

Estas evidências nos mostram que 20,0% dos alunos concluintes estão saindo dos cursos de licenciatura pesquisados sem ter minimamente construído uma imagem aceitável de número racional. Se somarmos estes percentuais ao dos alunos que não responderam, chegamos a quase 38,0% de alunos que não apresentaram uma resposta aceitável para caracterizar os números racionais no Instrumento 3. Entre as concepções errôneas manifestadas pelos alunos destacamos algumas, em que conceitos que apresentavam nomenclaturas parecidas (por exemplo: racionais – racionalização – raiz) foram utilizados na tentativa de caracterizar os números racionais:

> É todo número que pode ser escrito em forma de raiz (A317, iniciante, Instrumento 3).
>
> Número racional é aquele que pode ser racionalizado, ou seja, tirar a raiz desse número e o resultado ser um número inteiro (A1, iniciante, Instrumento 3).
>
> É todo número que se jogarmos na raiz obtemos um resultado finito (A335, concluinte, Instrumento 3).
>
> Um número racional é aquele que se racionalize (*sic*) dentro de cada conjunto (A193, concluinte, Instrumento 3).
>
> É um número cujo nós podemos encontrar a raiz quadrada dele (A299, concluinte, Instrumento 3).

É possível que não tenha ocorrido apenas uma associação indevida entre nomes, como racionais/racionalização ou racional/raiz, mas sim uma possível evidência de que estes alunos não tinham nenhum dos conceitos envolvidos claramente construídos.

Após alguns dias da aplicação da avaliação, realizamos as entrevistas. É provável que os alunos tenham conversado entre si ou com seus professores ou, ainda, consultado algum livro. Vejamos, por exemplo, o caso do aluno A280. No tocante à questão que solicitava o conceito de número racional, no Instrumento 3, o aluno respondeu: "É um número que pertence aos racionais (ou seja, um número inteiro)". Durante a entrevista, notamos que as suas concepções sofreram alterações, como pode ser observado na seqüência a seguir:

Pesq.: Aqui na primeira pergunta dizia assim: o que é um número racional? Você disse que é um número que pertence....
A280: [inaudível].
Pesq.: Hã. Ou seja, um número inteiro.
A280: Um número inteiro. É.
Pesq.: Então, qual é a idéia que você tem de número racional? Dê alguns exemplos, assim…
A280: É, eu pensei que era... eu inverti aí, né? Porque eu pensei que era um número que não era quebrado. Que seria.... que não era quebrado. Que não fosse número quebrado. Assim....
Pesq.: Sei.
A280: ... número inteiro. Um, dois, três... não um vírgula dois, um vírgula três.
Pesq.: Entendi. Isso pra você é um número racional?
A280: É. Que é errado.
Pesq.: E o que que seria o certo?
A280: O certo é quando é quebrado, né?
Pesq.: Quando é número quebrado?
A280: É.
Pesq.: Número dois é um número racional?
A280: Não.
Pesq.: Não?
A280: Não.
Pesq.: Zero vírgula quatro é?
A280: É. É um número racional.
Pesq.: Pra ser racional precisa ser um número quebrado?
A280: Precisa ser um número quebrado (A280, concluinte, Instrumento 4).

Ainda assim, o aluno nos apresenta uma imagem dos números racionais bastante precária ao excluir os números inteiros deste conjunto.

Verificamos que 38 alunos iniciantes (20,1%) e 24 concluintes (17,8%) deixaram a questão em branco no Instrumento 3. Durante a entrevista, um dos alunos concluintes não só se manifestou inseguro quanto a conceituação de número racional, como também apresentou um semblante que transparecia profunda estranheza diante da expressão "número racional":

Pesq.: Na primeira pergunta: o que é um número racional? Você não lembrava o que é? [o aluno havia deixado a questão em branco no Instrumento 3].
A348: Não, não me lembrei.
Pesq.: [Observando o ar de estranheza manifestado pelo aluno.] Esta palavra pra você é estranha?
A348: É estranha! (A348, concluinte, Instrumento 4).

Os dados apresentados na tabela anterior nos mostram que 44,5% dos alunos iniciaram o curso sem saber o conceito de número racional e 20,0% dos alunos concluintes o estavam terminando sem uma imagem aceitável deste conceito que pudesse dar a eles autonomia para o ensino deste assunto. Os demais, aproximadamente 60%, têm uma imagem limitada, porém menos preocupante que o caso anterior. Uma representação rica do conceito só foi manifestada por 1,5% dos alunos concluintes pesquisados.

3.1.2 A compreensão dos diferentes subconstrutos dos números racionais

Como visto na introdução e também na fundamentação teórica, os números racionais podem ser interpretados de várias maneiras diferentes que são chamadas de subconstrutos. No âmbito do nosso trabalho estamos considerando cinco subconstrutos: parte-todo, operador, quociente ou divisão indicada, medida e coordenada linear. O conhecimento matemático dos estudantes para professores sobre cada um deles será analisado tomando-se como base os dados oriundos dos Instrumentos 1, 2, 3 e 4.

3.1.2.1 As frações como parte-todo

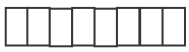
3.1.2.1.1 A natureza das concepções conceituais espontâneas manifestadas pelos alunos concluintes

A análise de todos os problemas criados pelos alunos concluintes no Instrumento 1 e suas respectivas resoluções, Instrumentos 2, mostrou que, entre os

157 alunos participantes desta fase da pesquisa, 79 (50,3%) criaram ao menos uma situação-problema em que o principal conceito envolvido era o significado parte-todo. Considerando-se os 1.237 problemas cridos pelos alunos concluintes no Instrumento 1, constatamos que 139 deles (11,2%) envolviam este subconstruto. Com a finalidade de melhor entendermos o tipo de problema criado pelos alunos, os conceitos envolvidos em cada questão, a forma como a avaliação destes conhecimentos foi pensada e explicitada no texto do problema, agrupamos estas 139 questões em três categorias:

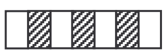
a) Problemas em que os alunos forneciam uma determinada fração e solicitavam um desenho que representasse a fração dada. Este tipo de situação apareceu em 37 (26,6%) das 139 questões parte-todo. Como exemplo, apresentamos as questões criadas por dois alunos:

> Expresse as frações através de desenhos: a) 4/5 b) 9/4 c) 4/4 d) 9/10 e) 10/15 (A133, concluinte, Instrumento 1).
>
> Pinte o valor correspondente a 6/8. (A244, Instrumento 1).



b) Problemas em que os alunos forneciam um determinado desenho e solicitavam a fração correspondente. Este tipo de situação apareceu em 42 (30,2%) das 139 questões parte-todo:

> Dado a figura abaixo, como você a representaria em forma de fração? (A139, Instrumento 1).



> De acordo com a figura, quanto representa a parte pintada da figura? (A241, Instrumento 1).

c) Os demais problemas em que o significado parte-todo estava presente envolviam situações simples do cotidiano em que “todos”/unidades, contínuos ou discretos, eram divididos e a fração relativa a certo número destas partes em relação ao todo era solicitada. Trata-se de uma variação da situação apresentada no item anterior. A diferença é que a fração solicitada não contava com recurso icônico, ela tinha que ser determinada pela identificação das partes e do todo na situação-problema em que estes elementos estavam inseridos. Observamos nestes problemas a predominância de contextos contínuos em relação a contextos discretos, conforme discriminado a seguir:

- 43 (30,9%) das 139 questões utilizavam situações em que os todos/unidades eram predominantemente pizzas, bolos, chocolates etc., divididos em certo número de partes como:

> Em uma festa de aniversário. Pedro repartiu o bolo em 10 pedaços de tamanhos iguais, sobraram 4 pedaços de bolo. Que fração do bolo sobrou? (A170, concluinte, Instrumento 1).
>
> Eduardo comprou um chocolate e dividiu em 3 partes. Aninha comprou um mesmo chocolate e dividiu em 6 partes. Qual a fração correspondente às partes do chocolate de Eduardo e Aninha? (A287, concluinte, Instrumento 1).
>
> Imagine uma pizza cortada em 12 pedaços, que, após jantar, sobrou somente 3 pedaços na forma. Qual é o valor, em fração, da parte que foi comida? (A238, concluinte, Instrumento 1).

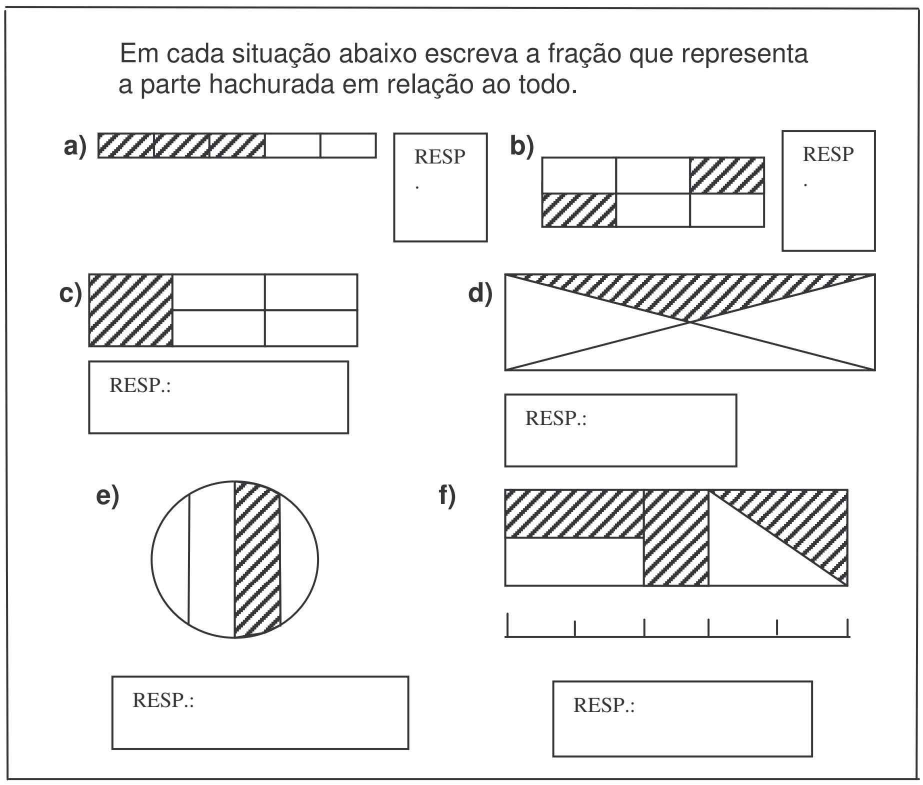
- Os contextos envolvendo conjuntos discretos apareceram em 17 (12,2%) das 139 questões. Os conjuntos utilizados foram bastante diversificados, envolviam bolas, frutas, pessoas etc. Alguns exemplos característicos são:

> Numa caixa há 20 bolas no total. Dessas 3 são brancas, 10 são pretas e 7 são azuis. Represente numericamente a quantidade de bolas brancas, pretas e azuis em relação ao total de bolas contidas na caixa. Qual a fração de cada cor? (A139, concluinte, Instrumento 1).
>
> Em um teste de vestibular com 60 questões, um aluno acertou 36 questões. Que fração do teste ele acertou? (A146, concluinte, Instrumento 1).
>
> Paulo comeu 5 bananas em sua casa. Sabendo que havia uma dúzia. Qual é a fração que nos diz quantas bananas sobraram? (A116, concluinte, Instrumento 1).

3.1.2.1.2 A face mnemônica do significado parte-todo

O significado parte-todo das frações tem uma face imagética muito forte. É bastante comum os professores se valerem de recursos mnemônicos, tais como desenhos de chocolates, pizzas, ícones, materiais manipuláveis etc., na construção das primeiras idéias sobre números racionais. A utilização destes recursos mnemônicos no ensino de Matemática tem a função precípua de estabelecer uma associação entre o conceito e uma ou mais imagens, auxiliando o aluno no processo de construção e memorização de um determinado conceito matemático. Se, por um lado, os recursos mnemônicos desempenham um importante papel na construção e uso de idéias matemáticas, por outro, se não forem bem explorados no ensino, podem induzir concepções equivocadas em relação ao conceito em fase de construção.

No sentido de avaliarmos os conhecimentos dos alunos concernentes ao significado parte-todo associado a modelos contínuos, apresentamos a todos eles as seis figuras a seguir e solicitamos que associassem a cada uma delas a fração correspondente à parte hachurada:



A tabela a seguir mostra resumidamente os dados coletados no Instrumento 3, relativos a esta questão:

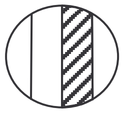
Tabela 4: O subconstruto parte-todo

RESPOSTAS DADAS PELOS ALUNOS	INICIANTES	CONCLUINTES
Associou a fração 3/5 à figura do item *a*.	131 (97,0%)	163 (86,2%)
Associou a fração 2/6 ou 1/3 à figura do item *b*.	129 (95,6%)	160 (84,6%)
Associou a fração 2/6 ou 1/3 à figura do item *c*.	103 (76,3%)	109 (57,7%)
Associou a fração 1/4 à figura do item *d*.	117 (86,7%)	157 (83,1%)
Associou a fração 1/4 à figura do item *e*.	138 (73,0%	106 (78,5%)
Alegou não ter como identificar a fração correspondente à figura do item *e*.	04 (3,0%)	00 (0,0%)
Associou a fração 3/5 à figura do item *f*.	109 (80,7%)	101 (53,4%)

Fonte: Instrumento 3.

Conforme visto no item anterior, 11,2% dos problemas criados pelos alunos no Instrumento 1 tinham o significado parte-todo como conceito central envolvido no problema. Estes problemas foram propostos por aproximadamente 50% dos alunos concluintes, o que mostra que o significado parte-todo está medianamente presente no repertório conceitual dos alunos em relação às frações. A análise dos dados retirados do Instrumento 3 mostra uma série de problemas atinentes a este subconstruto. Vejamos, por exemplo, a comparação entre os dados obtidos no item *a* com os obtidos no item *e* da questão apresentada anteriormente:

163 alunos iniciantes (86,2%) e131 concluintes (97,0%)
associaram a fração 3/5 à figura:  (item *a*).

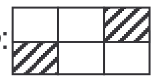
138 alunos iniciantes (73,0%) e 106 iniciantes (78,5%)
associaram a fração ¼ à figura:  (item *e*).

Estes dados revelam que a compreensão dos alunos tanto iniciantes quanto concluintes, a respeito deste subconstruto, é limitada e está circunscrita a situações simples como a colocada no item *a*. A não-congruência entre as áreas das quatro partes em que a figura *e* foi dividida não foi observada pela maioria dos alunos.

3.1.2.1.3 O processo de dupla contagem

Uma análise dos dados coletados por intermédio das entrevistas (Instrumento 4) foi determinante para que pudéssemos compreender o tipo de raciocínio utilizado pelos alunos concluintes em relação a este subconstruto. Observemos o procedimento adotado pelo aluno A291, que é análogo ao empregado pelos demais alunos entrevistados:

Pesq.: […] no item *a* você disse que aqui, esta fração, corresponde a três quintos. Assim... O que você pensou pra dizer que é três quintos?
A291: É porque são... é um inteiro dividido em cinco partes, né? E eu estou usando apenas três (A291, concluinte, Instrumento 4).

Ou, ainda, a resposta dada pelo aluno A161 para o item *b*: 

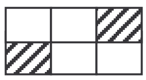
Pesq.: E no item *b*, você colocou dois sextos. Qual foi o critério que você usou aqui?
A161: Foi o mesmo [se referia ao item anterior].
Pesq: Hum, hum.
A161: O mesmo critério. Eu vi que tinham seis... seis partes. Foi dividido em seis partes, eu tomei duas partes dessas seis (A161, concluinte, Instrumento 4).

Como pode ser observado, os alunos utilizaram o processo de dupla contagem para obter a fração correspondente à figura dada.

3.1.2.1.4 O processo de dupla contagem e a noção de equivalência

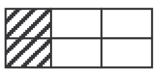
A idéia de que um determinado "todo" está composto por elementos separáveis ou uma superfície ser vista como divisível, podendo ser recomposta pela junção das partes em que foi dividida, está estreitamente relacionada à noção de frações equivalentes. Como salientado por Ciscar e Garcia (1988), isto envolve a habilidade de reconhecer quando distintas partes de um mesmo todo, obtidas com diferentes divisões, nos dão a mesma parte da totalidade e que nos leva a uma mesma relação parte-todo por intermédio de frações equivalentes. Esta habilidade foi claramente explicitada pelo aluno A160 que observou que poderia agrupar duas a duas as partes da figura no item *b*. Assim, a parte hachurada corresponderia a 1 de um total de 3 partes em que o todo foi redividido.

Pesq.: E aqui no item *b* você colocou um terço...

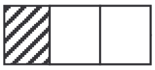


A160: [...] Porque se você dividir em três a figura, tá em seis, mas se dividir em três partes, considerar cada dois, né...
Pesq.: Hum, hum.
A160: Dividir em três partes dá um de três. Tá pintada uma parte de três...
Pesq.: Uma parte de três...
A160: Iguais, né? Partes iguais (A160, concluinte, Instrumento 4).

No tocante à figura do item *c,* dos 15 alunos entrevistados, sete deles dividiram a parte hachurada da figura em duas partes para obter partes congruentes às outras partes não hachuradas, chegando à resposta 2/6 por um processo de dupla contagem.



Quatro deles se utilizaram da estratégia de considerar as duas partes não hachuradas como equivalentes, em área, à parte hachurada. Assim, a figura foi recomposta ficando dividida em três partes, das quais uma foi tomada, gerando a fração 1/3:



Pesq.: Aqui no item *c*, como é que você chegou à conclusão de que era um terço?
A124: Deu pra visualizar que aqui é como se fosse uma parte de cada tamanho [aponta o dedo para a parte hachurada e uma não hachurada]. Desconsiderando essa reta do meio, então como tava hachurado, deu um terço. Eu desconsiderei esse daqui [o aluno se referia à parte hachurada como tendo área equivalente a duas não hachuradas] (A124, concluinte, Instrumento 4).

O tipo de divisão do todo que utilizamos nos itens *b* e *c* favorecia reagrupamentos diferenciados das partes, permitindo observar, de acordo com o tipo de raciocínio usado pelo aluno, se a noção de equivalência estava presente. Estes exemplos mostram que a idéia de equivalência foi manifestada por 11 dos 15 alunos entrevistados. O tipo de raciocínio adotado e a freqüência de ocorrência foram exemplificados nos dois excertos anteriores. Apenas um aluno errou o item *b,* enquanto quatro erraram o item *c*, o que sugere uma diferença de dificuldade entre as duas situações. As concepções errôneas envolvidas nestes casos serão tratadas a seguir.

3.1.2.1.5 Problemas com a identificação das partes, do todo e o processo de realização da dupla contagem

Entre as habilidades necessárias para o domínio da relação parte-todo em situações que envolvem superfícies e a correta realização da dupla contagem entre as partes e o todo, estão: a capacidade de reconhecer o todo; saber dividir ou reconhecer as partes em que o todo foi dividido; realizar ou reconhecer divisões congruentes. No que concerne a estas habilidades, identificamos uma série de concepções errôneas que evidenciam sérios comprometimentos no entendimento deste subconstruto por parte dos alunos concluintes. Para melhor entendimento da natureza destes erros, dividimos estas concepções em três categorias:

a) Realiza a dupla contagem sem levar em consideração a necessidade da congruência entre as áreas das partes consideradas

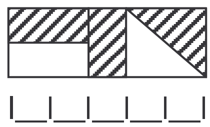
Um primeiro raciocínio equivocado relativamente ao processo de dupla contagem diz respeito à contagem pura e simples das partes em que o todo foi dividido, sem levar em consideração a congruência das áreas. O resumo dos dados coletados no Instrumento 3 mostra que 15 alunos iniciantes (11,1%) e 22 concluintes (16,3%) associaram a fração 1/5 à figura:

O mesmo tipo de erro foi observado em 4 dos 15 alunos concluintes entrevistados, como pode ser observado pela seqüência de falas apresentadas pelo aluno A348:

Pesq.: Tá. Aqui você, no item *c*, você falou que era um quinto?
A348: É.
Pesq.: O que significa o um e o que significa o cinco?
A348: É, ele... ele... ele pegou cinco... dividiu em cinco partes e deu uma parte só pra uma pessoa. Daí ficou assim. (A348, concluinte, Instrumento 4).

Isto significa que o aluno levou em consideração apenas o número de partes em que o todo foi dividido e o número de partes tomadas para realizar a dupla contagem, sem, contudo, atinar-se para o fato de que as cinco partes em que o todo foi dividido não eram congruentes.

Em relação a situação colocada no item *f*



observamos o acontecimento de situação análoga a anterior. Dos 15 alunos entrevistados, 9 apresentaram a resposta correta (3/5); porém, quando explicaram o procedimento utilizado durante a entrevista, constatamos que 4 deles haviam realizado apenas a dupla contagem. As áreas das partes hachuradas, relativamente à área do "todo", não foi levada em consideração.

O raciocínio apresentado pelo aluno A253 é representativo deste grupo:

Pesq.: Tá. No item *f* você colocou três quintos. Como é que você riscou [O aluno tinha a figura toda riscada], por exemplo, usando essas partes divididas desse jeito?
A253: Mas a ... como que eu tô falando, a idéia que eu tive é essa: tava dividido em cinco partes, embora diferentes... Embora diferentes, eu peguei três partes de cinco.
Pesq.: Hum, hum.
A253: Eu não levei em consideração a .. a questão de medidas, se são iguais as figuras [partes].
Pesq.: Entendi (A253, concluinte, Instrumento 4).

b) Dificuldades com a identificação de áreas congruentes em uma figura

Há situações, como, a colocada no item *c,*  em que a área da parte hachurada é visivelmente maior do que a área de qualquer uma das partes em branco. Neste caso, ao dizer que a fração correspondente à parte hachurada é 1/5 (conforme anteriormente explicado pelo aluno A348), identificamos um problema que está na raiz conceitual do significado parte-todo. Para Behr, Lesh, Post e Silver (1983, p. 93), “a interpretação de um número racional como parte-todo depende diretamente da habilidade de dividir uma quantidade contínua ou um conjunto discreto de objetos em subpartes de tamanhos iguais”. Complementando esta idéia, salientamos que esta situação se apresenta quando um todo (contínuo ou discreto) se divide em partes “congruentes” (equivalente como quantidade de superfície ou quantidade de objetos). A fração indica a relação que existe entre certo número de partes e o número total de partes em que o todo foi dividido.

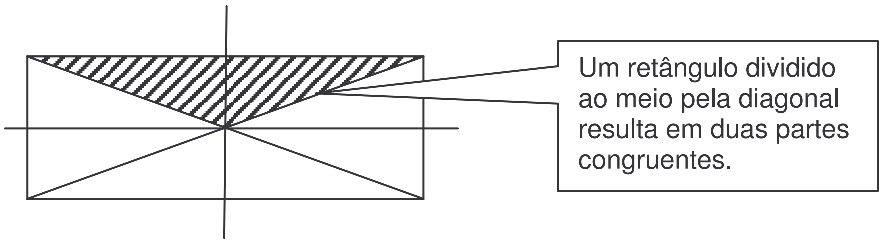
Em outros casos, como a figura do item *d,*  em que a congruência da área das partes não é tão evidente, exige do aluno conhecimento de geometria para saber identificar a existência ou não desta congruência. Em relação a este item observamos que, embora 13 alunos, dos 15 entrevistados, tenham colocado a resposta correta (1/4), apenas 4 deles conseguiram identificar corretamente a congruência entre as áreas das partes em que o “todo” foi dividido, como mostra o caso a seguir, representativo desta situação:

Pesq.: Tá. Aqui no item *d* você colocou um quarto. Como é que você pensou aqui?
A124: É, embora não esteja igual, a gente dividiu o quadrado em quatro partes que eu chamei de um quarto. Mas...
Pesq.: E... e... esta parte que está hachurada é igual a esta parte que não está hachurada?
A124: Não... é... (pensando). Parece que é... parece que é diferente, mas...
Pesq.: Em termos de área, elas são iguais ou são diferentes?
A124: Iguais.
Pesq.: São iguais. E me diga uma coisa: pra... pra gente raciocinar assim, como você fez aqui tomou três partes de cinco partes no item *a*, você tem que ter dividido necessariamente em partes iguais ou se não tivesse dividido em partes iguais você não poderia chegar a uma conclusão?
A124: Não. Tinha que ser partes iguais, senão não tinha como descobrir (A124, concluinte, Instrumento 4).

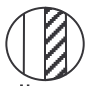
Fica evidente que, além do conhecimento conceitual sobre o subconstruto parte-todo, o aluno não apresentou grandes dificuldades em reconhecer que a figura estava dividida em partes congruentes. Situação contrária aconteceu com 8 dos 13 alunos que associaram a fração ¼ à figura do item *d*; eles alegaram que as partes em que o todo havia sido dividido não tinham a mesma área, como mostra o aluno A161:

Pesq.: Tá. No item *d* você colocou um quarto.
A161: É. Eu pensei no mesmo critério, que eu tinha quatro partes, tomei uma ... [inaudível].
Pesq.: Me diga uma coisa, olhando pra esta área que está hachurada na questão *d* e olhando pra esta área lateral que não tá hachurada. Esta área é diferente desta área [O pesquisador aponta o triângulo hachurado e o seu adjacente não hachurado].
A161: É.
Pesq.: É diferente?
A161: É diferente. Olhando agora, eu acredito que seja diferente.
Pesq.: Você não chegou a fazer nenhum cálculo pra provar isso.
A161: Não. Não fiz.

No caso da figura *d*, os alunos não necessitavam efetuar cálculos para chegar à conclusão de que a área das quatro partes era congruente, bastava um procedimento simples para obter esta conclusão, por exemplo:



Outras vezes, dependendo da figura, a determinação da fração fica praticamente impossível de ser determinada se algumas medidas da figura não forem fornecidas.

Na situação colocada no item *e*  a determinação da fração correspondente à parte hachurada não é imediata. Contudo, é evidente, mesmo visualmente, que a área da parte hachurada não é congruente à área das partes laterais da figura. Oito alunos entrevistados alegaram que as áreas das partes da figura eram iguais, como nos mostra o aluno A124:

Pesq.: E no item *e* como é que você chegou a um quarto? Esta parte hachurada é igual às outras três que não estão pintadas?
A124: É. Embora teje [*sic*] um pouco diferente, mantém o mesmo tamanho dependendo onde passasse.
Pesq.: Você acha que tem a mesma área?
A124: Acho que sim. Quase certeza (A124, concluinte, Instrumento 4).

Ou ainda o relato do aluno A175 que afirma que as quatro partes em que o todo foi dividido têm áreas congruentes, valendo-se de conceitos da trigonometria para chegar a esta contestação:

Pesq.: Bom, no item *e*, você também deu resposta um quarto.
A175: Também. Porque na verdade se a gente for fazer a ... os cálculos pela corda e o ângulo..... e o raio, é a mesma situação.
Pesq.: Esta área daria igual a qualquer outra? [aponta as quatro partes].
A175: É igualzinha. Mesma coisa também.
Pesq.: Que conta que você fez para achar que é igual?
A175: É que na verdade aqui a gente tem que fazer pela corda, né, trigonométrica.
Pesq.: Tá.
A175: Fazendo pela corda, essa área aqui vai ser igualzinha, a mesma coisa que essas outras também.

Estes casos evidenciam que um dos problemas sérios subjacentes ao entendimento do subconstruto parte-todo, em situações que envolvem superfícies, está relacionado com a noção de área. As entrevistas foram determinantes para que pudéssemos entender esta dificuldade. Metade dos alunos concluintes entrevistados mostrou fragilidades no que concerne ao entendimento do conceito de área, comprometendo a compreensão deste subconstruto.

c) Erro no processo de dupla contagem: o aluno considera sempre o numerador da fração igual a 1 (o “todo”) e o denominador igual ao número de partes tomadas

Em menor escala (1 aluno entre 15 entrevistados), observamos um caso interessante de erro no processo de dupla contagem. O aluno pensa no numerador da fração sendo o “todo” (igual a 1) e o denominador como o número de partes tomadas. Vejamos o relato do aluno:

Pesq.: Aqui no item *a*  você colocou que corresponderia à fração um terço.
A280: Um terço.
Pesq.: Como é que você pensou pra chegar neste um terço?
A280: Porque é um inteiro, pegou três partes.
Pesq.: De um inteiro?
A280: De um inteiro, pegou três partes.
Pesq.: É isso que significa....
A280: Um terço.
Pesq.: Esse um para você significa? [apontando para o numerador da fração]
A280: Esse... esse... um inteiro.
Pesq.: A barra inteira?
A280: A barra inteira.
Pesq.: E o três?
A280: As três partes que foi pega (A280, concluinte, Instrumento 4).

Cabe salientar que este mesmo aluno cometeu o mesmo erro nos outros itens, confirmando assim sua concepção errônea a respeito da forma de realizar o processo de dupla contagem.

d) O somatório das partes é maior do que o todo

Os Instrumentos 1 e 2 foram importantes não só para identificação da tendência conceitual dos alunos em relação às frações, mas também como forma de identificação de concepções errôneas envolvendo este subconstruto, que não seriam possíveis pela análise somente do Instrumento 3.

Entre os 79 alunos concluintes que criaram problemas em que o subconstruto parte-todo era central, identificamos 8 casos (1,0%) em que os alunos apresentavam todos (terrenos, mesadas, pizzas etc.) divididos em certo número de partes, em que o somatório das partes resultava em algo maior do que 1 (o todo). Vejamos dois exemplos:

> Pedro repartiu um terreno entre seus três filhos. Deu 1/3 para o mais velho e 3/6 para o do meio e 4/9 para o menor. Quanto tinha o terreno inteiro? (A142, concluinte, Instrumento 1).
>
> Solução apresentada pelo aluno: $\frac{1}{3}+\frac{3}{6}+\frac{4}{9}=\frac{6+9+8}{18}=\frac{23}{18}$ (Instrum. 2).

> Comprei um bolo e dividi em 9, comi 2/3, minha mãe 2/4, quanto sobrou do bolo? (A251, concluinte, Instrumento 1).
>
> Resolução apresentada pelo aluno: $9-\frac{2}{3}-\frac{2}{4}=\frac{108-8-6}{12}=\frac{94}{12}=7{,}8$ (Instrumento 1).

No primeiro caso (A142) é fácil ver que 1/3 + 3/6 + 4/9 = 23/18 > 1, ou seja, o somatório das partes dá maior do que o todo (o terreno dividido), fato este não percebido pelo aluno na resolução apresentada. Por este motivo, a resposta dada pelo aluno (23/18) fica incongruente com a pergunta: “Quanto tinha o terreno inteiro?”.

No segundo caso (A143), um bolo foi dividido em 9 partes (fatias), das quais 2/3 foram comidas pelo aluno e 2/4 pela sua mãe. O primeiro problema surge ao efetuarmos a adição das frações correspondentes às partes 2/3 + 2/4 = 14/12 = 7/6, ou seja, o somatório das partes consumidas do bolo resulta em algo maior do que o próprio bolo. Em segundo lugar, o aluno opera com as frações correspondentes às partes em que o todo foi dividido como se fosse o próprio número de partes. Neste caso, é a idéia das frações como operadores é que está prejudicada. Veja a ilustração:

Parte do bolo que o aluno comeu: $\frac{2}{3}.9=6$ (partes/fatias)

Parte do bolo que sua mãe comeu: $\frac{2}{4}.9=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}=4{,}5$ (partes/fatias)

Total consumido: 6 + 4,5 = 10,5 (partes/fatias), maior do que 9 (parte/fatias)

3.1.2.2 As frações como operadores

O subconstruto operador é largamente utilizado tanto na Educação Básica como nos cursos de licenciatura em Matemática, nos mais diferentes contextos. A operação $\frac{a}{b}.x = y$ é extremamente comum na resolução de problemas de Álgebra, Cálculo Diferencial e Integral e Análise Matemática, perpassando pela Matemática Aplicada em cálculos diversos de Matemática Financeira, Estatística etc. É importante lembrar que as frações interpretadas como operadores são vistas como transformações, ou seja, atuam sobre uma situação modificando-a. Esta modificação ocorre sucessivamente por uma operação de multiplicação e posterior divisão ou vice-versa.

O domínio conceitual e as concepções errôneas envolvendo este subconstruto, por parte dos alunos, foram avaliados por intermédio dos dados coletados nos Instrumentos 1, 2, 3 e 4.

Segundo Behr, Lesh, Post e Silver (1983), há uma diferença significativa de tipo de raciocínio utilizado quando $\frac{p}{q}$ atua sobre uma quantidade contínua ou um conjunto discreto. Ao operar em objeto contínuo (por exemplo, comprimento), pensamos em $\frac{p}{q}$ como uma combinação entre esticar e encolher. Qualquer segmento de reta de comprimento ℓ operado através de $\frac{p}{q}$ será "esticado" de um fator *p* e "encolhido" de um fator *q.* Uma interpretação de multiplicador/divisor será dada a $\frac{p}{q}$ quando operar em um conjunto discreto. O número racional $\frac{p}{q}$ transforma um conjunto com *n* elementos em um conjunto com *np* elementos e, então, este conjunto é reduzido a $\frac{np}{q}$. Em função destas diferenças dividimos a análise dos dados em três categorias:

- O operador aplicado em conjuntos discretos;
- O operador aplicado em quantidades contínuas;
- O operador aplicado em frações que não estavam associadas a nenhuma grandeza específica (nem contínuo, nem discreto).

As duas primeiras categorias serão iniciadas com uma exposição e análise das concepções espontâneas dos alunos manifestadas nas situações-problema criadas no Instrumento 1 e resolvidas no Instrumento 2. Em seguida, apresentaremos os resultados obtidos com a análise dos dados coletados no Instrumento 3. Na terceira categoria somente dados advindos dos Instrumentos 1 e 2 serão utilizados. Um segmento será dedicado para a análise das principais concepções errôneas observadas nos problemas que envolviam este subconstruto, retiradas dos Instrumentos 1 e 2. Finalizaremos com uma discussão geral fundamentada nas evidências salientadas nas três categorias e, também, nas concepções errôneas.

3.1.2.2.1 Operador aplicado em quantidade contínua: a natureza das concepções conceituais espontâneas

A análise dos dados coletados nos Instrumentos 1 e 2 mostraram que problemas envolvendo frações como operadores foram os que tiveram maior freqüência, entre os cinco subconstrutos aqui considerados. 218 (17,4%) problemas criados pelos alunos concluintes tinham a fração como operador como principal conceito envolvido. Mais da metade dos alunos participantes (52,9%) criou pelo menos uma situação-problema compreendendo este subconstruto. A imensa maioria das questões criadas pelos alunos concluintes apresentava situações simples do cotidiano, em que os operadores utilizados eram frações próprias. Além disso, com raríssimas exceções, observamos que para a resolução da maioria dos problemas era necessária a realização de apenas uma operação, ou seja: $\frac{a}{b} . x$, em que $\frac{a}{b}$ é o operador e x a grandeza a ser operada.

Identificamos 118 (54,4%) das 217 questões, em que o operador incidia sobre grandezas como tempo, distâncias, comprimentos, áreas, pizzas, chocolates, ou seja, os alunos utilizaram grandezas contínuas. Este tipo de contexto é o que surgiu com maior freqüência entre os problemas que envolviam operadores.

> Uma peça de tecido tem 24 cm de comprimento, quanto terá 2/3 dessa peça? (A297, concluinte, Instrumento 1).
> Resolução apresentada pelo aluno: 24 : 3 = 8; 8 x 2 = 16. 2/3 da peça tem 16 cm. (Instrumento 2).

> Em uma caixa d'água cabem 500 litros de água. Quantos litros teria a mesma caixa com 1/5 de água a menos? (A240, concluinte, Instrumento 1).
> Resolução apresentada pelo aluno: 5/5 = 500 litros; 1/5 = 100 litros. A caixa tem 400 litros (Instrumento 1).

Conforme dissemos anteriormente, as questões expostas pelos alunos envolviam situações do cotidiano e necessitavam de cálculos simples para se chegar à resposta. Problemas que apresentavam um texto mais elaborado e/ou que necessitavam do conhecimento de outros conceitos, além do operador, para se chegar à(às) resposta(s) foram raros. Identificamos apenas dois problemas deste tipo envolvendo grandezas contínuas:

> Se um tanque de gasolina de um automóvel tem sua capacidade máxima em 60 litros, e o automóvel gasta 1 litro há [*sic*] cada 6 km rodados. Ele gastou de combustível ¼ da capacidade então o veículo percorreu quantos km? E se o motorista tivesse percorrido 129 km qual a quantidade de combustível gasta? E quanto equivale esse valor ao tanque? (A135, concluintes, Instrumento 1).
> Resolução apresentada pelo aluno:
>
> $60.\frac{1}{4}$ = 15 litros   6.x = 120   60.x = 20
>
> 15.6 = 90 km   x = $\frac{120}{6}$ =20 litros   x = $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$
>
> Com 15 litro ele percorre 90 km.
> 120 km percorridos ele usará 20 litros
> 20 litros é 1/3 do tanque (Instrumento 2).

> A base de um triângulo mede 12 cm, sua altura é ¾ da base. Qual é a área desse triângulo? (A145, concluinte, Instrumento 1).
> Resolução apresentada pelo aluno:
>
> h = $\frac{3}{4}.a$; h = $\frac{3}{4}.12$ = 9 cm.
>
> A = $\frac{b.h}{2} = \frac{12x9}{2}$ = 54 cm³ [o aluno confundiu a unidade (cm²)] (Instrumento 2).

Como vemos, no primeiro caso, o aluno cria um problema bastante comum no cotidiano das pessoas e o explora de maneira ampla. No segundo caso, além do operador, o problema envolve também o conceito de área de triângulo.

3.1.2.2.2 Avaliação de uma situação-problema envolvendo operador em contexto contínuo

Em muitas situações o operador $\frac{a}{b}.x = y$ não aparece organizado e equacionado, pronto para efetuar o cálculo. Na maior parte das vezes as situações-problema, principalmente as relacionadas com problemas do nosso cotidiano, se apresentam de forma que as informações ali contidas requerem do resolvente a habilidade para compreender, organizar e modelar matematicamente a situação-problema. Com o objetivo de avaliar esta habilidade, propusemos a seguinte situação-problema para todos os alunos:

3/7de um tambor de óleo corresponde a 36 litros. Quantos litros corresponderão:

a) ¾ do tambor de óleo?
b) o tambor inteiro?

[Problema adaptado de Silva (1997)]

Pelos dados do problema sabemos que 3/7 do tambor de óleo corresponde a 36 litros. Algebricamente, temos:

$$\frac{3}{7}.x = 36 \Rightarrow x = \frac{7}{3}.36 \Rightarrow x = 84$$ (o tambor inteiro tem 84 litros)

Daí: $\frac{3}{4}.84 = 63$ (3/4 do tambor de óleo corresponde a 63 litros)

O resumo dos dados coletados no Instrumento 3 pode ser evidenciado na tabela a seguir:

Tabela 5: Operador aplicado em quantidade contínua

	Iniciantes	**Concluintes**
Acertaram o item *a*	99 (52,4%)	101 (74,8%)
Acertaram o item *b*	111 (58,7%)	103 (76,3%)
Não responderam	25 (13,2%)	18 (13,3%)

Fonte: Instrumento 3.

A tabela anterior mostra que há uma diferença de aproximadamente vinte pontos percentuais entre o número de acertos dos alunos iniciantes comparados com os dos concluintes. Observamos, pelos tipos resoluções apresentadas pelos alunos no Instrumento 3, que eles equacionaram acertadamente o problema, chegando sem grandes dificuldades às respostas solicitadas. O subconstruto operador tem um caráter algébrico muito forte e está presente em inúmeras situações que os alunos vivenciam durante a escolaridade básica e, muito mais intensamente, em um curso de licenciatura em Matemática. Esta pode ser uma das evidências que explicam o fato de que ¾ dos alunos concluintes mostraram habilidade com os aspectos algébricos envolvidos na resolução do problema proposto.

No que concerne aos alunos concluintes, 13 dos 15 entrevistados acertaram os dois itens da questão. Um exemplo prototípico do tipo de raciocínio utilizado pelos alunos pode ser observado pela solução apresentada pelo aluno A160:

Pesq.: [...] você colocou no item *a*, sessenta e três, e no item *b*, oitenta e quatro. Você usou que tipo de raciocínio pra chegar nessas respostas?
A160: [...] Eu considerei um tambor de litro sendo uma incógnita, certo, x. Então, tá falando que três sétimos do tambor é trinta e seis litros. Então três sétimos do total, trinta e seis [o aluno tinha escrito: $\frac{3}{7}.x = 36$].
Pesq.: E aí você pra achar o sessenta e três?
A160: Três quartos do total, como eu achei... como x é o total, achei o total e fiz três quartos do total (A160, concluinte, Instrumento 4).

Neste caso, o aluno utilizou exatamente a mesma estratégia de resolução por nós adotada para comentar o problema proposto:

$$3/7.x = 36 \rightarrow x = 7/3.36 \rightarrow x = 84, \text{ depois fez: } \quad 3/4.\ 84 = 63$$

Dois alunos entrevistados não responderam esta questão quando da aplicação do Instrumento 3 em sua classe. Eles alegaram que deixaram a questão em branco porque não se lembravam como resolver este tipo de problema. Vejamos a justificativa de um deles:

Pesq.: Aqui pedia pra achar três quartos do tambor de óleo e o quanto tinha o tambor inteiro. Aqui você não respondeu?
A348: Não, não. Eu não me lembrava mesmo.
Pesq.: Não acha... não teria um jeito de...
A348: Não. (A348, concluintes, Instrumento 4).

O objetivo dessa questão era constatar se os alunos conseguiam modelar matematicamente a situação proposta e chegar à resposta solicitada; ou seja, trata-se de verificar a parte processual do conhecimento das frações como operadores. O equacionamento envolvido no modelo matemático da situação proposta é, de certa forma, bastante comum e trabalhado desde o Ensino Fundamental até o último ano do curso de licenciatura em Matemática, em diferentes situações. É possível que uma limitação nos conhecimentos algébricos tenha se constituído na principal causa do insucesso destes dois alunos, uma vez que, pelo menos nestes dois casos, eles não responderam por que não sabiam equacionar a questão. Quanto aos dados retirados do Instrumento 3, observamos que o percentual efetivo de erro corresponde a 34,4 % (item a) e 28,1% (item b), no caso dos alunos iniciantes, e 11,9% (item a) e 10,4% (item b), em relação aos concluintes. Efetivamente, não podemos afirmar que os alunos que deixaram a questão em branco o fizeram porque, de fato, não sabiam respondê-la; contudo, se unirmos os percentuais dos alunos que não responderam aos do que erraram, perceberemos que eles atingem um percentual que gira aproximadamente em torno de 45%, no caso dos iniciantes, e 25%, no caso dos concluintes. Por se tratar de situação algébrica bastante comum, trabalhada desde o Ensino Fundamental, esperava-se um índice maior de acertos, tanto pelos iniciantes quanto pelos concluintes.

3.1.2.2.3 O operador aplicado em conjunto discreto: a natureza das concepções espontâneas

No Instrumento 1 identificamos 83 (38,2%) das 217 questões em que o operador incidia sobre conjuntos discretos, tais como: dinheiro; número de pessoas, bolas, balas, frutas etc. Algumas questões representativas desta categoria seriam:

> Ganho R$ 2.500,00 reais por mês e gasto 2/5 do meu salário com aluguel. Com quanto ficou no final do mês? (A289, concluinte, Instrumento 1).
> Resolução apresentada pelo aluno: 2500,00 : 5 = 500,00; 500,00 x 2 = 1.000,00
> Ficou com R$ 1.000,00 reais (Instrumento 2).
>
> Dentro de um saco de bolas coloridas há 30 bolas, sendo que 1/5 são bolas brancas, 2/5 são bolas azuis. Qual será o total de bolas laranjas? (A149, concluinte, Instrumento 1).
> Resolução apresentada pelo aluno:
> 1/5 de 30 = 6 bolas brancas
> 2/5 de 30 = 12 bolas azuis
> Total de bolas brancas + azuis = 18 bolas
> Então: 30 - 18 = 12
> R. As bolas laranjas são 12.

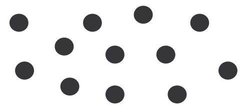
Os problemas criados pelos alunos são todos bem adaptados ao Ensino Fundamental e envolvem resoluções simples. Ressalva-se o fato de o aluno A289 ter apresentado uma resposta errada, pois se esqueceu de efetuar a subtração:

2.500,00 - 1.000,00 = 1.500,00

3.1.2.2.4 Uma avaliação dos conhecimentos básicos sobre operador aplicado em conjunto discreto

No sentido de avaliarmos os conhecimentos dos alunos concernentes à aplicação do operador em conjunto discreto, utilizamos um recurso mnemônico em que apresentávamos um conjunto de 12 bolas de gude e solicitávamos que os alunos contornassem ¾ deste total de bolas.

Contorne com a caneta a quantidade correspondente a ¾ do total de bolas de gude representadas abaixo:



Problema adaptado de Silva (1997) e Merlini (2005).

Os dados extraídos das respostas dos alunos concluintes por intermédio do Instrumento 3 revelam que 138 alunos iniciantes (73,0%) e 98 concluintes (72,6%) acertaram esta questão; 9 iniciantes (4,8%) e 12 concluintes (8,9%) não a responderam. As entrevistas com os alunos concluintes evidenciam que 3 alunos alegaram não recordar o procedimento para resolver problemas deste tipo. Os 12 alunos que acertaram utilizaram estratégias variadas para chegar à resposta, como mostraremos a seguir:

a) Contar o número de bolas de gude, multiplicar este número por 3 e, posteriormente dividir por 4, como explicitado pelo aluno A151:

Pesq.: […] Como é que você pensou aqui?
A151: Aqui foi [...] contei quantas bolas de gude tinha, no caso doze. E três quartos de doze, nove.
Pesq.: Então, você fez o quê? Três quartos de doze.
A151: Isso.
Pesq.: E o que significa três quartos de doze?
A151: Três vezes doze dividido por quatro.

Neste caso os alunos adotaram uma interpretação de operador sobre conjunto discreto como “multiplicador/divisor”.

b) Contar o número de bolas de gude (12), dividir este número por 4 e, posteriormente, multiplicar o número obtido por 3, como é a resolução apresentada pelo aluno A124:

Pesq.: Tá. Aqui... eh... no item *c* que era pra contornar três quartos do total de bolas, como é que você pensou?
A124: Eu contei o número de bolas, dividi por quatro e pintei o tanto que seria três vezes o que eu dividi, né?
Pesq.: Ah, tá.
A124: Eu pintei o número de bolinhas.

Podemos resumir este tipo de resolução utilizando a mesma forma de interpretação dada por Ciscar e Garcia (1988) para situações análogas a esta:

Parte-se de um estado inicial, aplica-se o operador e obtém-se o estado final (resposta).

Estado-unidade (situação)	**Operador**	**Estado final**
12 bolas de gude	dividir por 4, multiplicar por 3	9 bolas de gude

Nesta interpretação as frações são vistas como um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação (estado) e a modifica. Para Ciscar e Garcia (1988) esta interpretação enfatiza o papel dos números racionais (frações) como elementos da álgebra das funções (transformações).

c) Em uma outra situação, embora a seqüência de operações realizadas seja idêntica ao caso anterior, o aluno agrega à operação um raciocínio de divisão partitiva. Primeiro, o aluno dividiu as 12 bolas de gude em quatro grupos contendo 3 bolas cada ($12 \div 4 = 3 + 3 + 3 + 3$ ou $12 \div 4 = \{3, 3, 3, 3\}$). Finalmente, tomou três destes grupos, ou seja, nove bolinhas.

A133: Vamos ver.
Pesq.: Três quartos das bolinhas.
A133: Quantas bolas têm no todo? 2, 3, 4, 5, 6, 7 , 8, 9, 10, 11, 12, né?
Pesq.: Ham ham.
A133: Doze bolas. Pega o todo que é doze, dividi em quatro partes. Depois pega essas quatro partes, pega três e uma parte põe pra fora.
Pesq.: Ah, entendi.
A133: Foi três.
Pesq.: Deixa eu ver... se eu entendi. Você pegou o todo que era doze bolas e aí?
A133: O todo são doze. Quatro partes.
Pesq.: Hum.
A133: Então eu peguei três quartos dessas quatro partes.
Pesq.: Entendi.
A133: Dividi em grupos de três em três. Três, seis, nove e doze. [desenha em uma folha sulfite quatro grupos contendo três bolas cada]
A133: Aí 9 bolinhas eu coloquei no balãozinho, que é este aqui [mostrava as nove bolinhas circundadas], e três bolinhas pra fora.

d) Uma outra forma interessante de pensar a resolução desta questão, valendo-se de outro subconstruto, foi apresentada pelo aluno A169. O aluno pegou a fração $\frac{3}{4}$, multiplicou numerador e denominador por 3, obtendo a fração equivalente $\frac{9}{12}$.

Esta operação foi realizada de tal forma que o denominador da fração obtida fosse 12 (que era o número total de bolas de gude). Concluiu, então, que 9 bolas de gude deveriam ser circundadas:

A169: Eu multipliquei tanto em cima quanto embaixo [referia-se à fração ¾] pra ficar um total de doze bolinhas. Aí deu nove doze avos 9/12.
Pesq.: Quer dizer... não... você ... quer dizer que ele [apontava o número 9/12] é três quartos do total? Então, que conta que você fez?
A169: Eu multipliquei tanto o numerador quanto o denominador por três.
Pesq.: Tanto o numerador quanto o denominador?
A169: Isso. Aí deu nove dozeavos. Aí que peguei nove bolinhas de doze ao total. Dá três partes... simplificando.

Na realidade, o aluno utilizou-se de um raciocínio parte-todo envolvendo quantidade discreta. A busca de uma fração equivalente a ¾ com denominador 12 teria sido no sentido de obter a quantidade de bolas que compunham o todo. Cada bola representaria uma parte em que o todo foi dividido e o numerador 9 significaria o número de partes tomadas.

Como já dissemos na fundamentação teórica, a resolução de uma mesma situação-problema envolvendo números racionais pode ser pensada de diferentes formas. Embora um problema, pela sua constituição, tenha *a priori* uma vinculação mais forte com um determinado subconstruto, podem existir diferentes formas de pensar em sua resolução utilizando-se de outros subconstrutos. O trânsito por diferentes formas de resolução em um mesmo problema é didaticamente rico, não só em termos de ensino de números racionais, mas de forma mais abrangente no âmbito da Educação Matemática. Acreditamos que é aí que reside a riqueza das situações apresentadas nos itens anteriores. Quando nos deparamos com a operação $\frac{a}{b}.x$, em termos de obtenção de uma resposta, é indiferente a seqüência de operações que se realiza: multiplicar primeiro ($a.x$) e o resultado dividir pelo denominador $\left(\frac{a.x}{b}\right)$ ou o inverso. Ou, ainda, se valer do raciocínio de divisão partitiva (como nos apresentou o aluno A133) ou raciocínio parte-todo (como fez o aluno A169). A observação que fazemos é a seguinte: para um aluno do Ensino Fundamental que está iniciando a construção de conhecimentos relacionados ao operador, pode não ser evidente que multiplicar primeiro pelo numerador e depois dividir o resultado pelo denominador dá o mesmo resultado que dividir primeiro pelo denominador e posteriormente multiplicar o resultado pelo numerador. Entendemos que estas situações devem ser exploradas no processo ensino-aprendizagem, permitindo ao aluno fazer experimentações até chegar a uma generalização deste resultado.

3.1.2.2.5 Operador aplicado a números não associados a uma grandeza específica

Identificamos 16 (7,4%) questões criadas pelos alunos concluintes em que os dados fornecidos no problema não estavam associados a nenhuma grandeza específica, apenas a habilidade em realizar a operação era requerida:

> Qual é o valor referente a 3/8 de 80? (A341, concluinte, Instrumento 1).
> Resolução apresentada pelo aluno: $\frac{3}{8}.80 = 30$ (Instrumento 2).

Este tipo de questão mostra o lado processual do operador. Procura avaliar tão-somente a habilidade do resolvente concernente à realização correta dos cálculos envolvidos. O enfoque algorítmico envolvido nas operações com números racionais será discutido mais adiante.

3.1.2.2.6 A natureza das concepções errôneas

A avaliação dos problemas criados pelos alunos juntamente da sua resolução forneceu informações ricas sobre a forma como eles pensam os diferentes subconstrutos. Foi possível, também, verificar quais são as principais concepções errôneas que se tornaram evidentes pela leitura do texto do problema com a forma como os alunos pensam a sua resolução. Destacamos neste segmento as concepções errôneas mais freqüentes e que comprometem a resolução do problema proposto pelos alunos concluintes:

a) Não especifica a quantidade sobre a qual o operador deve incidir.

Nesta categoria incluímos os problemas em que os alunos não especificaram no seu texto o valor numérico sobre o qual o operador deveria ser aplicado. Observamos que 13 (8,3%) dos 157 alunos que criaram ao menos uma questão envolvendo operadores foram incluídos nesta categoria. Vejamos um exemplo característico desta situação:

> Numa empresa 3/5 dos funcionários são homens. 2/8 dos funcionários têm menos que 21 anos. 2/3 têm mais de 45 anos e 238 são mulheres. a) Qual é a quantidade de homens, b) dos que têm mais de 21 anos, c) dos que têm menos de 45 anos (A155, concluintes, Instrumento 1).
> Resolução apresentada pelo aluno: O aluno não resolveu a questão

Neste caso faltou especificar a quantidade total de funcionários da empresa, sem a qual é impossível chegar às respostas solicitadas. Ao tentar resolver o problema é possível que o aluno tenha percebido o erro, uma vez que deixou o espaço destinado à resolução em branco.

b) Opera em conjunto discreto como se fosse contínuo

Este problema foi detectado nas questões criadas por 9 (5,7%) alunos concluintes entre os 157 que apresentaram ao menos uma questão com o significado parte-todo. Vejamos dois exemplos:

> Um professor tem 6 aulas por semana de matemática em uma determinada escola, porém a diretora quer que ele de (*sic*) apenas 1/8 dessas, quanto será o resultado? (A334, concluinte, Instrumento 1).
> Resolução apresentada pelo aluno: 6 ÷ 8 . 1 = 0,75 (Instrumento 2).
>
> João tem 300 bolinhas de gude, resolveu emprestar 1/8 para seu irmão e deu ½ para seu amigo, quanto lhe restou? (A247, concluinte, Instrumento 1).
> Resolução apresentada pelo aluno:
> 300 bolinhas ÷ 8 = 37,5 bolinhas
> 300 bolinhas ÷ 2 = 150 bolinhas
> 300 - 150 - 37,5 = 112,5 bolinhas(Instrumento 2).

No primeiro caso, o problema nos leva à seguinte resolução: 1/8 . 6 = 6/8 = ¾ = 0,75 aula por semana. Neste caso o professor deveria dar menos de uma aula por semana, o que é incompatível do ponto de vista prático da realidade profissional dos professores. No segundo, a resposta do problema sugere que a pessoa ficou com 112,5 bolinhas de gude, que é incompatível por não ter gerado um número inteiro de bolinhas.

c) Opera com frações como se fosse número inteiro

Em menor escala (5 questões) os alunos apresentam problema em que frações próprias são utilizadas fora de um contexto real. As operações necessárias à resolução da questão proposta nos leva a dar um tratamento às frações próprias como se fossem números inteiros. Um exemplo típico deste tipo de situação foi apresentado pelo aluno A345:

> João comprou 2/3 de feijão, e seu irmão comprou 2/5, quantos feijões compraram os dois juntos? (A345, concluintes, Instrumento 1).
> Resolução apresentada pelo aluno: $\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=\frac{10+6}{15}=\frac{16}{15}$ (Instrumento 2).

O aluno efetua a adição 2/3 + 2/5, obtendo como resposta 16/15. No texto do problema o aluno utiliza frações próprias para quantificar o número de feijões (o que significa 2/3 de feijão?). Para ganhar coerência faltou explicitar uma grandeza sobre a qual deveria incidir o operador, por exemplo, 2/3 de um milheiro de feijões ou 2/3 de quilo de feijão. A ausência da grandeza a ser operada impede os operadores (2/3 e 2/5) de incidirem sobre a mesma unidade gerando uma resposta coerente. Como posto, o problema envolve um contexto irreal, não é comum comprar feijão por unidades, muito menos 2/3 de feijão.

3.1.2.3 As frações como divisão indicada

Na interpretação de um número racional denominada de quociente ou divisão indicada olhamos para a fração $\frac{a}{b}$ como uma divisão entre dois números inteiros ($b \neq 0$); neste caso, a representação $\frac{a}{b}$ simboliza uma relação entre duas quantidades *a* e *b* denotando uma operação, quer dizer, $\frac{a}{b}$ é visto como $a \div b$.

No sentido de melhor conhecermos o grau de compreensão dos estudantes para professores sobre este importante subconstruto e, por conseqüência, avaliarmos quais são as suas necessidades formativas, organizamos a análise em três partes: primeiramente, vamos apresentar as tendências conceituais espontâneas dos alunos relativamente à divisão indicada, manifestadas nos problemas criados por eles; em seguida, mostraremos os resultados obtidos por intermédio da análise da resolução de uma questão proposta no Instrumento 3 que envolvia a divisão de dois números inteiros; para finalizar este segmento, expomos os resultados da análise das respostas dos alunos a uma questão, também constante do Instrumento 3, em que uma situação-problema foi colocada para interpretação e resolução. Para realização desta análise nos valemos de cinco fontes de dados:

- Problemas criados pelos alunos concluintes no Instrumento 1 que envolviam o conceito de divisão indicada;
- Resolução dos problemas selecionados no item anterior, constantes do Instrumento 2;

- Resolução de questão proposta a todos os alunos (iniciantes e concluintes) no Instrumento 3 em que solicitávamos a realização de uma divisão indicada simples entre dois números inteiros positivos;
- Resolução de questão proposta a todos os alunos (iniciantes e concluintes) no Instrumento 3 em que procuramos avaliar a compreensão conceitual da divisão indicada em situação-problema envolvendo a divisão de cinco objetos entre nove pessoas;
- Transcrição das entrevistas com os alunos concluintes (Instrumento 4).

3.1.2.3.1 A natureza das concepções conceituais espontâneas

A análise dos Instrumentos 1 e 2 mostrou que 90 questões, correspondendo a 7,3% do total de problemas criados pelos alunos concluintes, tinham a divisão indicada como conceito central. 54 alunos (34,4%) idealizaram ao menos um problema envolvendo este conceito. No âmbito deste subconstruto, aproximadamente metade dos problemas criados pelos alunos concluintes consistiu de situações em que um ou mais "todos" era fornecido e se solicitava sua divisão em certo número de partes. Vejamos um exemplo característico desta situação:

> Ana Lucia tem 2 barras de chocolate e precisa dividi-la com 4 pessoas. Quantos pedaços cada pessoa irá receber? (A149, concluinte, Instrumento 1).
> Resolução apresentada pelo aluno:
> Apresenta o desenho de duas barras de chocolate partidas ao meio e escreve: Cada pessoa irá receber metade da barra de chocolate (Instrumento 4).

Em 46,6% das questões formuladas pelos concluintes as frações utilizadas nos problemas não estavam associadas a alguma grandeza específica. Apenas a obtenção da decimal correspondente à fração era solicitada, por exemplo:

> Representar os números na forma decimal. a) 25/10 b) 9 8/3 (A115, concluinte, Instrumento 1).
> Resolução apresentada pelo aluno:
> a) $\frac{25}{10}$ = 2,5 b) $9\frac{8}{3} = 9+\frac{8}{3}=\frac{35}{3}=11{,}666...$ (Instrumento 2).

Em 7,9% dos casos as questões que envolviam a divisão indicada eram dissertativas, ou seja, os alunos solicitavam a definição ou conceituação de fração. A conclusão de que o aluno tinha em mente o conceito de divisão indicada foi obtida por intermédio da resposta que ele deu para a própria questão que formulou, por exemplo:

> O que você entende por fração? (A185, concluinte, instrumento 1).
> Resposta dada pelo aluno: É uma divisão (Instrumento 2).
>
> O que é uma fração? (A140, concluinte, Instrumento 1).
> Resposta dada pelo aluno: É um número dividido por outro (Instrumento 2).
>
> O que é fração? (A353, concluinte, Instrumento 1).
> Resposta dada pelo aluno: É a divisão de números (Instrumento 2).

Os problemas criados pelos alunos que envolviam divisão indicada não apresentavam grandes sofisticações em suas elaborações. Normalmente tratavam de situações bastante simples, poucas delas inseridas em situações cotidianas que pudessem apresentar algum tipo de peculiaridade ou dificuldade. Talvez, por este motivo, identificamos poucas concepções errôneas manifestadas pelos alunos na elaboração dos problemas.

3.1.2.3.2 A fração como divisão de dois números inteiros

O conjunto quociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, por intermédio da relação de equivalência (~), ou seja, o conjunto de todas as classes de equivalência determinada por ~ sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, constituem Q = $\{\frac{a}{b}$ / (a, b) $\in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\}$. Em outras palavras, podemos dizer que números racionais são por definição quocientes.

No Instrumento 3 propusemos a todos os alunos uma das questões mais básicas, envolvendo o conceito de divisão indicada, que pode aparecer no cotidiano escolar do Ensino Fundamental: a divisão de um número inteiro por outro inteiro diferente de zero. A questão foi apresentada da seguinte maneira:

Qual é a decimal (com 5 casas após a vírgula) correspondente à fração $\frac{2}{7}$?

Resumo dos dados coletados no Instrumento 3:

Tabela 6: As frações como divisão de dois números inteiros

	Iniciantes	Concluintes
Acertaram	110 (58,2%)	92 (68,2%)
Erraram	23 (12,2%)	25 (18,5%)
Não responderam	56 (29,6%)	18 (13,3%)

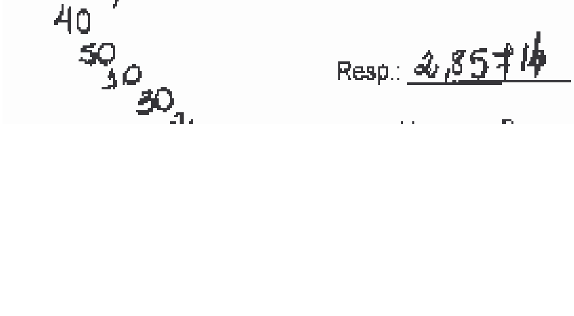
Fonte: Instrumento 3.

Os dados constantes da tabela nos mostram que a operação de divisão entre dois números inteiros, em que o dividendo é menor do que o divisor, não se constitui em operação trivial para os alunos. Obviamente, não podemos alegar que os alunos que não responderam esta questão não dominam o algoritmo da divisão de dois números inteiros ou, ainda, que não conhecem o fato de que há uma decimal associada à fração 2/7; contudo, não podemos deixar de registrar que há um percentual importante de alunos que não realizaram a divisão. Se nos apegarmos estritamente ao percentual de alunos que erraram (quase 20%, no caso dos concluintes), fica evidente a falta de conhecimento matemático em relação a este conteúdo em uma expressiva parcela de alunos em fase final de formação. Trata-se de uma evidência importante, uma vez que a divisão entre números inteiros é (ou pelo menos deveria ser) uma operação corriqueira para um professor de Matemática. Registra-se também o fato de que exatos dez pontos percentuais separam iniciantes de concluintes relativamente a seus conhecimentos para realização acertada da divisão de dois números inteiros. Este dado nos conduz à hipótese de que é possível que este tema não tenha sido revisitado na graduação.

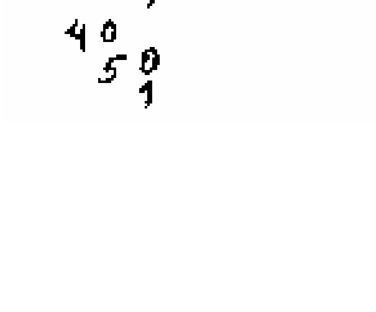
De maneira geral identificamos dois tipos de erros mais freqüentes na aplicação do algoritmo da divisão. São eles:

a) O aluno multiplica o dividendo por 10 e nada faz com o quociente. Em vez de dividir 2 por 7, a operação passou a ser 20 dividido 7, resultando em um quociente maior do que 1.

(A124, concluinte, Instrumento 3)

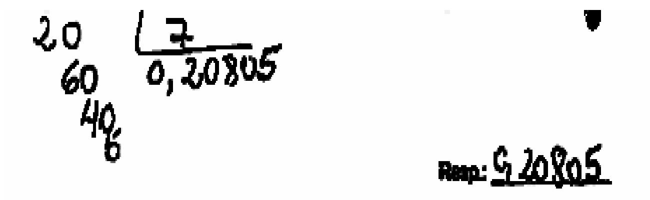


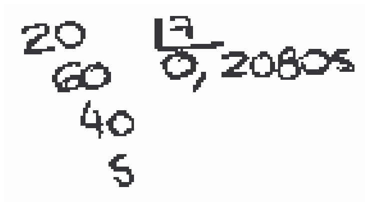
(A14, iniciante, Instrumento 3)



b) Os alunos acrescentam um zero ao resto e outro ao quociente a cada passagem.

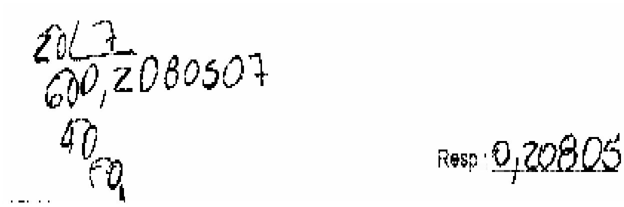
(A142, concluinte, Instrumento 3) (A38, iniciante, Instrumento 3)





No tocante aos 15 alunos entrevistados, apenas 1 aplicou erroneamente o algoritmo da divisão, como pode ser observado pela seqüência de falas a seguir:

Pesq.: Nesta questão você... que pedia pra fazer divisão. Dois dividido por sete. Você colocou zero, dois, zero, oito, zero, cinco, zero, sete...



A280: Ah, é, aí foi equívoco também. Porque aí, vamos supor, sessenta não dava [incompreensível] zero. Mas aí não tem esse zero aqui [aponta para o zero após o 2, no quociente]. É só ... no final (A280, concluinte, Instrumento 3).

O aluno percebe durante a entrevista que tinha cometido um equívoco no dia da realização da avaliação. Mesmo assim, uma questão que passou despercebida durante o diálogo foi a frase final: "É só... no final". Na seqüência o aluno revela o motivo da sua dificuldade:

Pesq.: Quando você faz contas assim... quando o numerador é menor que o denominador, você sente dificuldade em fazer essas divisões ou você faz com tranqüilidade?
A280: Se fosse... se fosse constante eh... fazer constante, aí você acostuma. Acho que seria mais fácil. Se fosse constante, você faria estas divisões. Mas como é raro, vamos supor, vai, se você fez isso aí no ... agora fez com você e vai fazer isso aqui daqui a um ano, ou mais, aí já, pô, será que tem o zero, a vírgula ou não?
Pesq.: Tá. Ou seja, não é uma coisa que tenha aparecido muito?
A280: Não tem. Praticamente não tem aparecido.
Pesq.: Tá.
A280: Não tem aparecido (A280, concluinte, Instrumento 3).

Este argumento deixa transparente que aspectos importantes da aritmética elementar, como a compreensão dos procedimentos implícitos na divisão de dois números inteiros, não é retomada na Licenciatura. Os algoritmos são formas organizadas de se obter resultados de maneira fácil e prática. Também são formas sintéticas que generalizam, por vezes, grandes idéias; por este motivo trazem mascaradamente embutidos os princípios lógicos e estruturas que dão sustentação a cada procedimento envolvido na sua aplicação. Desenvolver competências na articulação entre as idéias, princípios e estruturas matemáticas envolvidas nos algoritmos nos parece ser uma questão fundamental que merece ser discutida com os futuros professores, para que eles tenham condições de debatê-las com seus futuros alunos.

Os erros observados anteriormente nos parecem característicos dos alunos que fazem o procedimento mecanicamente, procuram lembrar da técnica sem terem interiorizado o conhecimento matemático que está subjacente a cada passagem da aplicação do algoritmo que dá sustentação ao que se faz. A estrutura sintática relacionada a este conteúdo é que está prejudicada.

As entrevistas também mostram que o domínio do conhecimento sintático não é amplo o suficiente para dar a necessária segurança para a realização de procedimentos como os solicitados neste item. Embora tenham acertado, dois dos quinze alunos entrevistados revelam sentir dificuldades no que se refere à aplicação do algoritmo da divisão, como mostra o aluno A337:

Pesq.: Você sente dificuldade em fazer essa conta? Dois dividido por sete? Ou você faz com... você tem segurança ao fazer alguma coisa assim?
A337: Não. Pra eu dividir assim à mão, eu acho um pouco difícil. Aí eu faço mais na calculadora.
Pesq.: Isso. Mas eu tô perguntando de você... se fizer à mão? Você sente dificuldade?
A337: Eu sinto um pouco de dificuldade.
Pesq.: Tá.
A337: Eu tenho um pouco de dificuldade numa dessas contas assim.
Pesq.: Tá.
A337: Mas eu consigo fazer (A337, concluinte, Instrumento 4).

3.1.2.3.3 Análise de uma situação-problema inserida em um contexto contínuo

Além da divisão pura e simples de dois números inteiros, é importante no processo ensino-aprendizagem que os professores trabalhem situações-problema variadas envolvendo o conceito de divisão indicada, utilizando tanto contextos discretos quanto contínuos, conforme salientamos na fundamentação teórica. Dependendo do tipo de problema usado, ele pode se constituir em rica fonte de discussão sobre formas possíveis de se pensar o processo de divisão, uma vez que os tipos de soluções possíveis têm fortes vinculações com a forma como a unidade ("todo") foi considera e o modo como sua divisão foi pensada. Para que explorações deste tipo de problemas em sala de aula se convertam em construção de conhecimento por parte dos alunos, é preciso que o professor esteja preparado para enfrentar discussões sobre problemas que apresentam multiplicidade de caminhos de soluções e que nem sempre estes caminhos são triviais. O conhecimento matemático do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo são fundamentais neste processo.

A questão a seguir foi proposta com o objetivo de verificar o conhecimento matemático dos futuros professores sobre divisão indicada, por intermédio da forma como eles pensaram a divisão de cinco barras de ouro idênticas entre nove pessoas.

> Pretendemos dividir 5 barras de ouro idênticas entre 9 pessoas. Qual a porção (expressa em fração) destinada a cada pessoa? Explique seu raciocínio com o auxílio de um desenho.

O número de acertos, erros e abstenções encontrados nas soluções apresentadas pelos alunos no Instrumento 3 está resumido na tabela a seguir e será discutido em seguida.

Tabela 7: Resolução de problema envolvendo divisão indicada

Procedimento utilizado pelo aluno	Iniciantes	Concluintes
Apresentaram soluções corretas	102 (54,0%)	67 (49,6%)
Apresentaram concepções errôneas ou apenas tentativas	61 (32,3%)	30 (22,2%)
Não responderam	26 (13,8%)	38 (28,2%)

Fonte: Instrumento 3.

Nosso levantamento revelou que 61 alunos iniciantes (32,3%) e 30 concluintes (22,2%) apresentaram concepções errôneas ou esboçaram apenas tentativas de resolução, sem que se pudesse chegar a alguma conclusão a respeito do raciocínio utilizado. 26 alunos iniciantes (13,8%) e 38 concluintes (28,2%) deixaram a questão em branco. O somatório destes casos mostra que 87 alunos iniciantes (46,1%) e 68 concluintes (50,4%) não apresentaram uma solução satisfatória para a situação-problema.

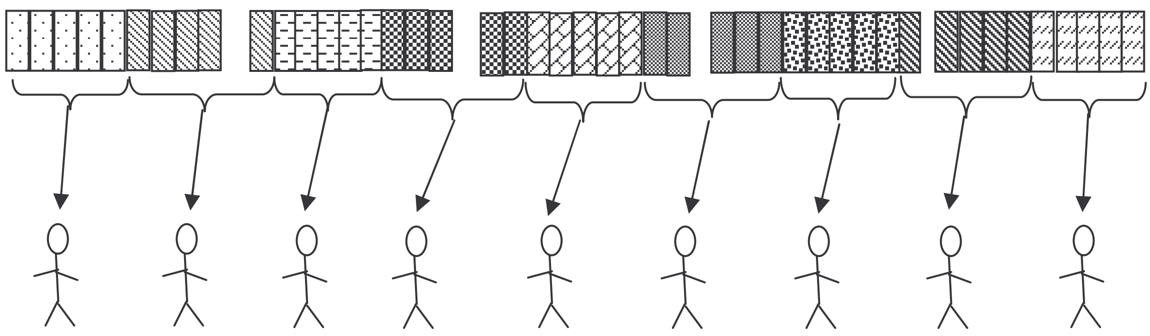
A análise dos dados coletados por intermédio do Instrumento 3 mostra que, entre os alunos que acertaram a resposta, 63 alunos iniciantes (33,3%) e 35 concluintes (25,9%) apresentaram a resposta em forma de fração (5/9), ou fizeram a divisão de 5 por 9 expondo a resposta em forma de decimal. Estes alunos, embora tenham acertado, atenderam parcialmente ao solicitado no texto do problema, uma vez que nenhuma explicação acompanhava as respostas. Na maioria destes casos, o aluno demonstrava uma tentativa de esboço, porém não era possível tirar nenhuma conclusão a respeito do raciocínio utilizado, revelando uma possível incapacidade de dar sentido à resposta fornecida. Estas tentativas de esboços se caracterizavam pela apresentação de cinco retângulos representando as barras de ouro e nove traços ou bonequinhos representando as pessoas.

3.1.2.3.4 Estratégias de resolução mais utilizadas

Entre os alunos que apresentaram uma explicação satisfatória para a situação-problema, reconhecemos quatro estratégias diferentes que apareceram com maior freqüência e serão comentadas a seguir. Alguns pequenos erros foram identificados, contudo sem grandes prejuízos para a compreensão geral do raciocínio utilizado.

a) O aluno divide cada uma das 5 barras em 9 partes e dá 5 destas partes, em seqüência, para cada uma das pessoas, conforme desenho a seguir. De acordo com o Instrumento 3, esta solução foi apresentada por 12 alunos iniciantes (6,3%) e 12 concluintes (8,9%). O raciocínio apresentado pelo aluno A300 durante a entrevista é característico desta situação.

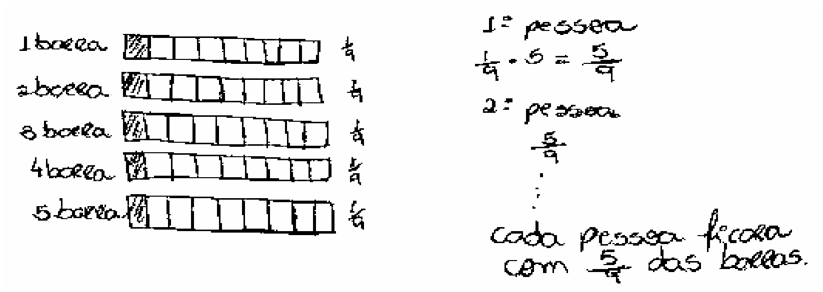
Pesq.: [...] nós tínhamos cinco barras de ouro pra dividir pra nove pessoas. Você colocou como resposta cinco nonos e fez um raciocínio que me parece interessante aqui. Eh... como é que você pensou?
A300: Eu ... que que eu fiz? É... cinco barras, dividi todas essas barras em nove. Isso [inaudível]... e se eu tinha que dá pra nove pessoas, eu fui vendo qual a... se é cinco pra nove, então cinco pedacinhos de cada barra. Aí fui somando, a da primeira, segunda, terceira, quarta, e as sobras eu fui dividindo novamente em cinco partes, ó (A300, concluinte, Instrumento 4).



Pesq.: Entendi.
A300: [inaudível]. Pra diferenciar, né?
Pesq.: Então...
A300: Aí dá pra mostrar que é cinco partinhas pra cada, né?

b) O aluno divide cada barra em 9 partes e dá uma parte de cada barra para cada pessoa. Este tipo de raciocínio foi apresentado por 6 alunos iniciantes (3,2%) e 13 alunos (9,6%) Como exemplo, vejamos a solução apresentada por um dos alunos concluintes:

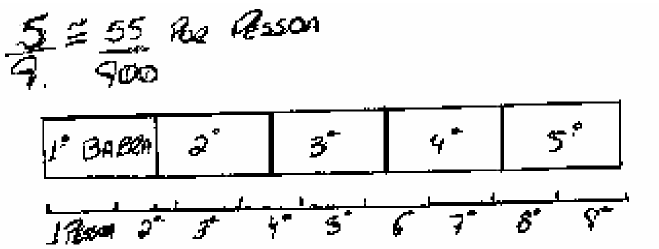
(A117, concluinte, Instrumento 3)



c) O aluno desenha as 5 barras unidas formando uma única barra de ouro. Divide esta nova barra em 9 partes e dá uma para cada pessoa. A porção correspondente a cada pessoa é de 1/9 desta barra unida. Uma variante desta solução consistiu em dividir cada barra em 9 partes iguais, juntar as 5 barras formando 45 pequenos pedaços e dar 5 pedaços para cada pessoa. Neste caso a fração correspondente seria 5/45 ou 1/9 da barra unida. Esta solução foi apresentada por 10 alunos iniciantes (5,3%) e 4 concluintes (3,0%). Como exemplo deste tipo de caso, observemos a explicação dada pelo aluno A151 durante a entrevista, enquanto verificava a sua resolução apresentada no Instrumento 3:

A151: Eu acho que eu iria fazer mais ou menos o que eu fiz aqui. Enfileirar as cinco barras.
Pesq.: Ok.
A151: E [...] procurar dividir os cinco [barras] em nove partes iguais.
Pesq.: A barra toda? Uma emendada na outra?
A151: Isto. Emendava na outra, procurava olhar como um todo ...
Pesq.: Tá.
A151: ... e dividir em nove partes iguais. Palmos, dedos...
Pesq.: Teria outros raciocínios que poderiam ser feitos, ao invés de juntar todas as barras, ficar uma barra única e depois cortar a barra? Teria um outro [...] que te ocorre assim?
A151: [...] Como eu enxergo esse como o mais simples. No momento só me vem ele.

No Instrumento 3, o aluno apresenta a solução reproduzida a seguir:



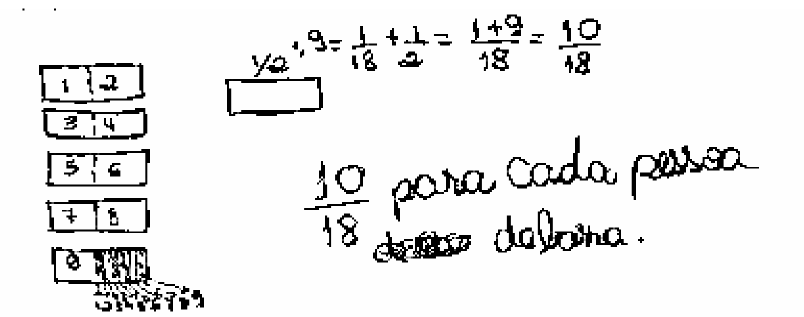
Na continuidade da entrevista questionamos o aluno quanto à possibilidade de o resultado ser 1/9 em vez de 5/9 como ele tinha colocado. Isto parece ter gerado um desequilíbrio cognitivo, o aluno começa a perceber a possibilidade de ter um resultado diferente daquele que ele tinha apresentado.

Pesq.: [...] Tá. E se fosse fazer assim, do jeito que você falou, pegar cinco barras emendadas uma na outra e cortar... em quantas partes?
A151: Em nove.
Pesq.: Em nove. Corta em nove e aí pega quantas dessas nove?
A151: Como assim? Não entendi.
Pesq.: Então, você juntou a barra... ficou a barra.... as cinco barras juntas. Ficou uma única barra.
A151: Certo.
Pesq.: Aí você pegou essa barra única e fez o quê?
A151: Dividi ela em nove pedaços.
Pesq.: Em nove pedaços. E cada pessoa recebeu quanto desses pedaços?
A151: Um pedaço.
Pesq.: Um pedaço.
A151: Um pedaço.
Pesq.: Tá. Então quer dizer que seria um nono? Se eu tenho uma barra e eu dividi em nove e peguei um desses nove, então eu tenho um nono?
A151: Sim.
Pesq.: Um nono.
A151: Um nono.
Pesq.: É. Porque pensa assim: quando você falou, no início, que dava cinco nonos, a pergunta que eu te faço é: cinco nonos do quê?
A151: É. Tem razão. Um nono seria a fração correta, né? Um nono, uma parte de um todo dividido em nove pedaços.
Pesq.: Mas o cinco nonos não dá também?
A151: Hummm [...] Como eu mudei a... como eu mudei a forma de ver, agora eu tô chamando cinco pedaços de um todo, então é por isso que eu acho... é..., mas na verdade não são valores iguais. Não são valores iguais, então [...] acho que... eu acho que na prática corresponderia ao mesmo tamanho. Mas, eh... algebricamente como eu mudei a... eu tava falando em cinco barras e agora eu tô falando em uma única barra, então é por isso que...
Pesq.: Que dá essa diferença.
A151: É. Aritmeticamente também [incompreensível] pode ser... tão distante uma coisa da outra.
Pesq.: Ok.
A151: Na verdade, acho que até é.

Novamente nos deparamos com uma questão que envolve a determinação do todo. Quando dizemos 5/9 ou 1/9 temos que especificar sobre qual todo se refere a fração, uma vez que este procedimento envolve o conceito de medida. Para ilustrar, suponhamos todas as barras com comprimento, espessura e largura exatamente iguais. Suponhamos, também, que o comprimento de cada uma delas seja igual a 9 cm. Na hipótese de dividirmos cada barra em 9 pedaços (1 cm cada pedaço) e darmos 5 deles para cada pessoa, estaremos dando, na realidade, 5 cm de ouro para cada uma delas. Portanto, a fração 5/9, neste caso, se refere a 5/9 de uma barra, o que corresponde a 5/9 de 9 cm, que é igual a 5 cm de ouro para cada pessoa. No caso de juntarmos todas as barras formando uma única barra, estaremos construindo um novo todo, ou seja, uma barra de ouro com 45 cm de comprimento. Ao dividirmos esta nova barra em 9 partes, cada uma delas corresponderá a 1/9 deste todo. Com efeito, 1/9 de 45 cm de ouro corresponde a 5 cm de ouro para cada pessoa, o que equivale à solução anterior. A diferença está na especificação do todo: 5/9 de uma barra ou 1/9 do todo formado pela junção das 5 barras.

d) O aluno divide as 5 barras ao meio. Dá 1 destas metades para cada uma das 9 pessoas. A metade que sobra é dividida em 9 pedaços e distribuída entre as 9 pessoas. Este raciocínio foi apresentado acertadamente por 11 alunos iniciantes (5,8%) e 4 concluintes (3,0%). Um exemplo característico desta forma de pensamento foi exposto pelo aluno A119:

(A119, concluinte, Instrumento 3)



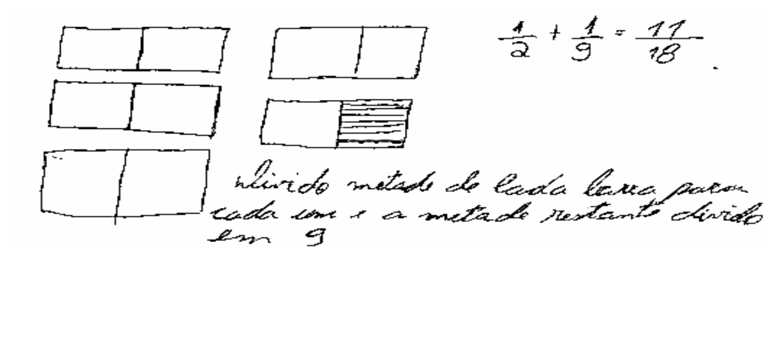
Há um erro no início do desenvolvimento da expressão: $\frac{1}{2}$: 9 = $\frac{1}{18}+\frac{1}{2}$ =....

Entretanto, foi possível identificar que o pensamento do aluno estava correto. Ele atribui para cada pessoa $\frac{1}{2}$ barra mais $\frac{1}{18}$ de uma barra (que é igual $\frac{1}{2}\div 9$). O aluno chega acertadamente à resposta $\frac{10}{18}$ que é equivalente a $\frac{5}{9}$ de uma barra.

Cabe salientar que este tipo de solução apresentou algumas dificuldades para os alunos, uma vez que identificamos mais quatro casos em que os alunos se utilizaram deste tipo de raciocínio, porém erraram a resposta ou a forma de explicar o procedimento. O percentual relativo a estes casos está agregado aos percentuais de erros mostrados na tabela anterior.

Vejamos um exemplo:

(A248, concluinte, Instrumento 3)



Este é um caso característico dos alunos que efetuam operações com as frações sem a respectiva compreensão do que estão fazendo. As frações ½ e 1/9, adicionadas pelo aluno, referem-se a "todos" diferentes, o que culmina com um resultado errado diante do contexto por ele apresentado. Este tipo de problema será mais amplamente abordado no segmento destinado à discussão das operações básicas com frações.

3.1.2.4 A fração como medida

Medida envolve a idéia de comparação. Neste caso é necessário que se estabeleça um termo único de comparação entre duas grandezas de mesma espécie. A questão também exige uma resposta para a pergunta "quantas vezes?", o que se faz dando um número que exprima o resultado advindo de uma comparação. Esse número chama-se medida da grandeza em relação a essa unidade (Caraça, 1951).

O conhecimento das frações como resultado de uma medida foi avaliado por intermédio de três fontes de dados:

- Análise conjunta dos problemas criados e resolvidos respectivamente nos Instrumentos 1 e 2;
- Respostas dos alunos a uma questão envolvendo medida, constante do Instrumento 3;
- Transcrição das falas dos alunos (Instrumento 4) relativas às respostas dadas por eles para a questão constante do Instrumento 3.

3.1.2.4.1 A natureza das concepções conceituais espontâneas

A idéia de medida associada às frações foi muito pouco lembrada pelos alunos concluintes ao formularem os problemas no Instrumento 1. Apenas 5 (0,4%) questões foram criadas envolvendo este conceito. Isto é uma evidência de que frações e medidas não são conceitos espontaneamente associados pelos alunos. Vejamos um dos cinco problemas:

> Quero encher um balde que contém 90/95 de litros com copos de 1/5 de litro. Quantos copos serão necessários? Ao encher o último copo, vai sobrar ou preencher o balde completamente? (A115, concluinte, Instrumento 1).
>
> Resolução apresentada pelo aluno:
>
> Para sabermos quantos copos são necessários precisamos dividi-los:
>
> $\dfrac{\frac{90}{95}}{\frac{1}{5}} = \dfrac{90}{95}.\dfrac{5}{1} = \dfrac{90}{19} \cong 4{,}7$. São necessários 5 copos, sendo que no último copo restará água (Instrumento 2).

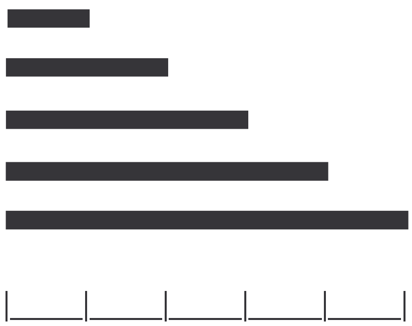
As outras questões elaboradas pelos alunos constituíam-se em situações simples do cotidiano e envolviam principalmente o conceito de capacidade, tendo como unidade de medida o litro, igualmente ao caso anterior.

3.1.2.4.2 A fração como resultado de uma medida

Os números inteiros são abstrações do processo de contar coleções de objetos. No entanto, em problemas da vida real nos deparamos com a necessidade não apenas de contar objetos individualmente, mas medir quantidades, tais como tempo, comprimentos e áreas. Em um grande número de situações a aritmética dos números naturais não é suficiente para dar solução a uma vasta quantidade de problemas que envolvem medidas. Com base nesta idéia, propusemos uma situação-problema em que as medidas solicitadas envolviam não só números naturais, mas também frações próprias e impróprias. Para tanto, fornecemos aos alunos uma seqüência de cinco réguas com tamanhos diferentes, cujo comprimento de cada uma podia ser determinado por uma escala, conforme desenho a seguir. O problema consistia em dar a medida de uma determinada régua tomando-se uma outra como unidade de medida. Trata-se de uma situação simples que pode ser apresentada a alunos do Ensino Fundamental, com o auxílio de barras de Cuisinaire ou até mesmo em forma de desenho, com o objetivo de trabalhar o conceito de medida compreendendo números racionais.

Observe as réguas abaixo e responda as perguntas:

Régua 1:
Régua 2:
Régua 3:
Régua 4:
Régua 5:



a) Quanto mede a régua 2 tomando-se a régua 1 como unidade? Resp.:______
b) Quanto mede a régua 1 tomando-se a régua 4 como unidade? Resp.:______
c) Quanto mede a régua 3 tomando-se a régua 5 como unidade? Resp.:______
d) Quanto mede a régua 4 tomando-se a régua 3 como unidade? Resp.:______

Resumidamente, os dados extraídos do Instrumento 3 mostram os seguintes percentuais de acertos:

Tabela 8: As frações como medida

Item	Iniciantes		Concluintes	
	Acertos	**Não Responderam**	**Acertos**	**Não Responderam**
a	155 (82,0%)	08 (4,2%)	105 (77,8%)	10 (7,4%)
b	153 (80,9%)	09 (4,8%)	109 (80,7%)	10 (7,4%)
c	147 (77,8%)	11 (5,8%)	105 (77,8%)	10 (7,4%)
d	121 (64,0%)	17 (9,0%)	89 (65,9%)	13 (9,6%)

Fonte: Instrumento 3.

À exceção do item *a*, iniciantes e concluintes apresentaram percentuais de acerto bastante próximos. Os alunos não devem ter encontrado grandes dificuldades nos três primeiros itens, uma vez que mais de 75% dos estudantes para professores responderam acertadamente cada um deles. O último item (*d*) parece ter causado um pouco mais de dificuldade, pois observam-se uma nítida diminuição dos percentuais de acertos e um leve aumento das abstenções.

Entre os 15 alunos concluintes pesquisados, 8 deles acertaram todos os itens e nos forneceram uma explicação satisfatória para o procedimento que utilizaram. Um exemplo característico desta situação pode ser observado pela solução apresentada pelo aluno A124:

Pesq.: Nesta questão era pra dar as medidas das réguas... da [inaudível].
A124: Nossa! Eu fiz um monte de rabiscos.
Pesq.: Não, não têm problema os rabiscos. Os rabiscos não têm problema. Mas é que aqui você colocou no item *a* dois, né. Tomando a régua um como referência... quanto mede a régua dois?
A124: Olha, se tomar esse [régua 1] como medida, aqui vai ter duas vezes um.
Pesq.: Quer dizer que cabem duas vezes?
A124: Duas vezes a régua um. Isso.
Pesq.: Tá. Eh... aqui na ... no item *d* você colocou um mais um terço.
A124: Hã... quanto mede a régua quatro tomando a régua três. A régua três dá um inteiro...
Pesq.: Hum, hum.
A124: ...e esse pedacinho eu contei como se fosse dividir a régua três. Cada pedacinho cabe três na régua três, então seria um inteiro mais um terço da régua...
Pesq.: Entendi (A124, concluinte, Instrumento 4).

Nesta questão, no item *d*, em que podíamos ter como resposta $\frac{4}{3}$ ou $1\frac{1}{3}$, observamos que a fração mista foi a forma de representação preferida pela maioria dos alunos que acertaram este item.

Pesq.: No item *d* você colocou um e um terço, que seria a régua quatro...
A253: Quatro... eh... péra aí.... De quanto mede a régua quatro tomando-se a três como unidade? Certo. Então seria a régua quatro, né, se a régua três mede e... usando o termo assim ela... cabe dentro da régua quatro e sobra ainda um terço (A253, concluinte, Instrumento 3).

Esta constatação nos leva a uma comparação com os dados obtidos no Instrumento 1. Observando as frações fornecidas como dados em todos os problemas criados pelos alunos concluintes, verificamos que 495 (39,4%) continham frações impróprias, ao passo que em apenas 24 (1,9%) forneciam como dados frações mistas. Isto é um indicativo de que frações mistas não fazem parte de um repertório comum dos estudantes. É possível que o tipo de problema apresentado no item *d* seja um indicativo de situação facilitadora para geração de frações mistas. Ao realizar a comparação entre o comprimento de uma régua menor sobre uma maior, de forma que a menor não caiba um número inteiro de vezes na maior, propiciou a visualização da medida como o número de vezes que a régua menor cabe na maior, acrescido de uma fração própria, ou seja, uma fração mista.

Também é digno de registro o fato de que as entrevistas mostraram que 7 alunos entre os 15 entrevistados tiveram dificuldades para encontrar as medidas solicitadas. Os erros normalmente aconteciam quando o aluno introduzia um outro elemento para realizar a comparação, diferente daquele que foi explicitado no problema ou invertia a régua a ser medida com a régua tomada como a unidade de medida. Vejamos, por exemplo, a solução apresentada pelo aluno A348:

Pesq.: Então, era pra dar a medida da régua dois tomando a régua um como unidade.
A348: Hum, hum.
Pesq.: Você colocou dois quintos. Como que você pensou aqui pra dar dois quintos?
A348: Olha, eu vou na régua um, é... Se você for analisar aqui [mostra a régua dois] daria... eu estaria ocupando duas casas, né?
Pesq.: Que seria dois, né?
A348: Isso.
Pesq.: Tá.
A348: Daria dois terços.
Pesq.: Esse... eh... então, o significado desse dois? É o quê?
A348: Você, você ter cinco, cinco barras dividido pra duas pessoas (A348, concluinte, Instrumento 4).

O aluno apresenta uma idéia bastante confusa. Inicialmente pensamos que ele teria comparado a régua 2 com a escala que era composta por 5 unidades. Assim, a comparação da régua 2 (2 unidades) com a escala (5 unidades) geraria a fração 2/5. Na finalização de sua idéia, o entendimento fica ainda mais difícil, quando surge a fração 2/3 como resposta. Ao solicitarmos a explicação sobre o significado do numerador (2) da fração, o aluno complementa: “Você... você ter cinco... cinco barras ... dividido pra duas pessoas”.

Na seqüência da entrevista prosseguimos na tentativa de entendimento da resposta dada para o item *b*:

Pesq.: Quanto mede a régua um tomando a régua quatro como unidade?
A348: Hum.
Pesq.: Você colocou um quinto.
A348: Não, tá errado.
Pesq.: [inaudível]
A348: Eu errei esse aí.
Pesq.: Daria o quê?
A348: Régua quatro, né? Como... como... como base, né?
Pesq.: Isso.
A348: Daria quatro quintos. Não é quatro quintos?
Pesq.: Aqui [mostrando a resposta do aluno no Instrumento3] tá um quinto.
A348: É ... então, é... seria quatro quintos.
Pesq.: Seria quatro quintos.
A348: Isso.

Neste trecho da entrevista o aluno retifica a resposta dada no Instrumento 3 e volta a fazer uma comparação errônea entre a régua a ser medida e a escala colocada após a última régua.

3.1.2.5 As frações como coordenadas lineares

Uma fração (ou um número racional) $\frac{a}{b}$ também pode representar um ponto sobre a reta numerada. Neste caso, implicitamente, fazemos a associação de uma fração a um ponto sobre a reta numerada; em outras palavras, pensamos na fração $\frac{a}{b}$ como um número abstrato.

A aceitação do zero, dos inteiros negativos e das frações como números não ocorreu do dia para a noite, ela envolveu uma gradual e lenta evolução. A sucessiva evolução dos números naturais até chegar aos números racionais se deu por situações de ordem prática, ou seja, para resolver problemas que não tinham solução apenas com o conjunto dos números naturais e inteiros. Os números racionais, embora estejam em uso por vários séculos e se encontrem na base de toda a Matemática, somente recentemente foram estruturados logicamente. Com as frações, a Matemática dá um salto qualitativo em sofisticação, símbolos, significados e estratégias operatórias relativas aos números inteiros que não são úteis aqui. Esta sofisticação conceitual é responsável por muitas das dificuldades encontradas pelas crianças ao lidarem com estes números.

Os números racionais possuem uma interpretação geométrica que pode ser obtida por intermédio da “reta numérica”. Nesta situação estamos enfatizando as propriedades associadas com a topologia métrica da reta numérica, como densidade e distância.

Segundo Courant e Robbins (2000),

> para representar frações com denominador *n*, dividimos cada segmento da unidade de comprimento em *n* partes iguais; os pontos de subdivisão então representam as frações com denominador *n*. Se fizermos isto para cada inteiro *n*, então todos os números racionais poderão ser representados por pontos na reta numérica.

Como um modelo para representar frações, a reta numérica difere de outros modelos (por exemplo, modelos que utilizam conjuntos de objetos, regiões geométricas etc.) em vários aspectos. Quando tomamos conjuntos discretos ou regiões como modelos, estes possuem uma divisão visual nítida entre as partes e o todo. Uma diferença fundamental no modelo proporcionado pela reta numérica é o fato de que não há nenhuma separação visual entre partes ou elementos sucessivos. Como a cada ponto da reta numerada corresponde um número real e levando em consideração a densidade dos números racionais ali contidos, podemos dizer que este modelo (reta real) é contínuo.

Várias pesquisas (Novillis, 1980; Behr, Lesh, Post e Silver, 1983) nos mostram que a utilização da reta numérica é um importante instrumento para ensino dos números racionais. Destacamos a possibilidade de sua utilização, entre outras possibilidades, para propiciar o entendimento da relação de ordem entre os racionais ou, também, no trabalho com frações impróprias e mistas e, até mesmo, como auxiliar no entendimento de operações e medidas. Entretanto, estas mesmas pesquisas nos revelam que este modelo traz muitas dificuldades para os alunos em idade escolar equivalente ao nosso Ensino Fundamental.

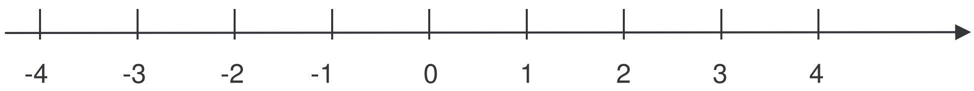
Estas observações anteriores nos levam a considerar de fundamental importância o conhecimento matemático dos professores para poderem trabalhar com segurança as vantagens proporcionadas pela reta real para construção de conceitos importantes relacionados aos números racionais. Este conhecimento também pode ser um aliado importante no trato das concepções errôneas dos estudantes a fim de revertê-las em conhecimento significativo. Dado este grau de relevância, procuramos avaliar o conhecimento matemático dos estudantes para professores quanto a dois aspectos associados ao subconstruto das coordenadas lineares: se este significado aparece espontaneamente nas questões criadas pelos alunos concluintes; e sua habilidade e concepções errôneas relacionadas à localização de frações próprias, impróprias e mistas na reta numerada. Os dados para análise são provenientes dos Instrumentos 1, 2, 3 e 4.

3.1.2.5.1 As concepções espontâneas

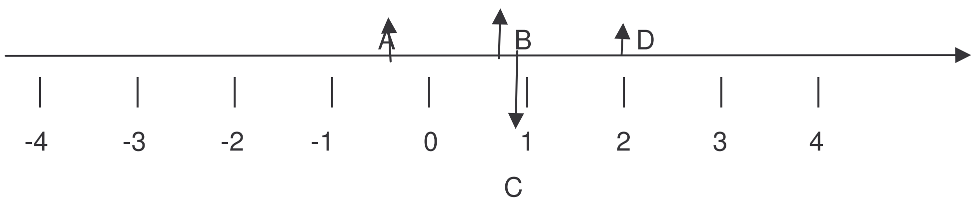
Problemas que solicitavam a localização de frações na reta numerada foram os que tiveram menor freqüência, entre todos os problemas criados pelos alunos concluintes envolvendo os cinco subconstrutos. Identificamos apenas três questões (0,2%) que contemplavam este significado.

Vejamos uma delas:

Localize os pontos associados às frações na reta real: a) -2/5, b) 1 ¾, c) 5/3 e d) 4/2.



Resolução apresentada pelo aluno:



(A191, concluinte, Instrumentos 1 e 2)

A questão criada pelo aluno A191 é bastante interessante e procura avaliar o conhecimento do resolvente sobre a localização na reta real de diferentes tipos de frações: próprias, impróprias, mistas e aparentes; frações negativas e positivas.

Analogamente ao caso das frações como medidas, os alunos concluintes parecem não atribuir um grau muito alto de importância a este significado, relativamente ao rol de conceitos subjacentes aos números racionais.

3.1.2.5.2 A localização de frações na semi-reta numerada

A questão a seguir foi projetada para avaliar a habilidade dos alunos no que se refere à localização de frações em uma semi-reta numerada dada.

Marque na semi-reta numerada abaixo a localização **aproximada** dos pontos correspondentes a: $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{6}{4}$; $\frac{15}{4}$ e $2\frac{3}{4}$.

A tabela abaixo mostra o número de alunos e respectivo percentual de acertos obtidos pelos alunos iniciantes e concluintes nesta tarefa.

Tabela 9: Localização de frações na semi-reta numerada

	2/3	4/5	4/3	6/4	15/4	2 ¾	Confundiram 2 ¾ com 6/4	Não Respondeu
Iniciantes	140 74,1%	146 77,2%	145 76,7%	146 77,2%	151 79,9%	73 38,6%	53 28,0%	11 5,8%
Concluintes	102 75,6%	101 74,8%	101 74,8%	100 74,1%	99 73,3%	73 54,1%	18 13,3%	16 11,8%

Fonte: Instrumento 3.

O resumo dos dados mostra que, à exceção da fração 2 ¾, algo em torno de 75% dos alunos iniciantes e concluintes conseguem localizar com facilidade frações na reta numérica. Registra-se um pequeno aumento de acertos, em pontos percentuais, dos alunos iniciantes em relação aos concluintes. A maior dificuldade foi encontrada no caso da fração mista 2 ¾, em que 13,3% dos alunos confundiram 2 inteiros e ¾ com 2 vezes ¾, além de alunos que não recordavam a forma de trabalhar com este tipo de representação de fração.

Mais do que simplesmente conhecer o número de acertos neste tipo de questão, interessava-nos entender o tipo de raciocínio utilizado pelos universitários para chegar ao acerto ou, também, entender o tipo de estratégia utilizada que os conduziu ao erro. Para tanto, buscamos este entendimento por intermédio da análise das entrevistas concedidas pelos alunos concluintes.

O Instrumento 4 revela que quase a totalidade dos alunos entrevistados (13 entre 15) utilizou a técnica de dividir o numerador pelo denominador, transformando a fração em decimal para, assim, "facilitar" a localização na semi-reta numerada. A fala do aluno A160 é representativa desta tendência:

Pesq.: Tá. Aqui pedia pra localizar ... eu tô vendo que você fez algumas contas aqui, não é?
A160: Isso.
Pesq.: Como é que você fez pra localizar?
A160: Eu calculei no caso [inaudível] ... fração, né? Procurei em decimais pra poder localizar na reta onde que tava exatamente aquela fração. Que eu não consigo visualizar só visualizando a fração, não consigo enxergar quanto vale.
Pesq.: Ah... tá. Então, pra localizar na reta, necessariamente você...
A160: Eu passei em decimais.
Pesq.: Você sente mais facilidade?
A160: Isso. Eu não consigo enxergar vendo a fração. Algumas, né! Não consigo enxergar quanto que vale a melhor fração (A160, concluinte, Instrumento 4).

No tocante à localização da fração 2 ¾, alguns alunos (6 entre 15) entrevistados disseram não saber como proceder para localizar esta fração na reta numérica. A alegação predominante foi a de que faz muito tempo que estudaram este tipo de representação ou, até mesmo, que não aprenderam este assunto. Esta é mais uma evidência de que as frações mistas não parecem ser objeto de estudo no curso universitário, quer seja como tópico relacionado ao ensino de frações, quer seja como tipo de representação fracionária presente nos problemas abordados nas diferentes disciplinas que compõem o curso.

Pesq.: Agora, dois... dois e três quartos, você colocou depois do quatro e um pouquinho antes aqui do cinco. É... o que significa pra você dois e três quartos?
A124: Ah, faz muito tempo que eu não vejo isso. Mas eu tava vendo na escola, acho que multiplica pelo número de baixo e soma com o de cima? Acho que era isso.
Pesq.: [inaudível]
A124: Faz muito tempo que eu não faço fração mista.
Pesq.: Tá, então é... fração... essa... esse tipo de fração colocada desse jeito você não tem muito contato...
A124: Ah, eu aprendi, mas faz muito tempo. Eu tive acho que [incompreensível] contato na última vez como aluna, mas eu me esqueci.
Pesq.: Tá.
A124: Faz muito tempo que eu não mexo. Pode ser até que esteja errado (A124, concluinte, Instrumento 4).

Ou, ainda, o caso do aluno A161 que alega desconhecimento sobre esta forma de representação das frações:

Pesq.: Tá. E aqui eu percebi que essa fração, dois inteiros e três quartos, você não colocou. Você não sabia o que era?
A161: Eu acho... Não sabia. Não sabia... Não sabia responder por isso eu não coloquei. Não sabia.
Pesq.: Você não tem hábito de trabalhar com fração assim?
A161: Não.
Pesq.: Que é o que a gente chama de fração mista.
A161: Não.
Pesq.: Não?
A161: Não tenho.

Levando-se em consideração as evidências observadas anteriormente, concernentes às dificuldades encontradas por quase metade dos alunos entrevistados, é razoável supor que os alunos que acertaram este item demonstraram uma recuperação de conhecimentos construídos na escolarização anterior à universitária, uma vez que a fala do aluno A124 deixa claro que faz muito tempo que não trabalha com este tipo de fração.

Os alunos que não tiveram dificuldades para efetuar a localização das frações na semi-reta numerada utilizaram a técnica de transformar primeiro a fração mista em fração imprópria, multiplicando o denominador 4 pelo inteiro 2, somando a seguir com o numerador 3, obtendo a fração 11/4. Depois, dividiram o numerador 11 pelo denominador 4, obtendo a decimal 2,75, para depois efetuar a localização na semi-reta numerada, como nos mostra o aluno A151:

Pesq.: E a fração representada assim,dois e três quartos, é uma coisa comum pra você isso? Você lidou várias vezes com isso? Tem entendimento do que seja dois e três quartos?
A151: Sim. Dois inteiros e três quartos. Para localizar ele na reta, eu fiz quatro vezes dois, mais três, oito ... oito... Não, onze quartos; onde dividi por quatro, deu dois vírgula setenta e cinco e localizei na reta.

Identificamos dois casos entre os 15 alunos entrevistados que erraram todos os itens. O primeiro deles considerou o intervalo de 0 a 6 da semi-reta numerada como o “todo”.

Pesq.: Nesta questão que pedia pra localizar estas frações aqui na reta.
A175: Certo. Eu considerei um inteiro...
Pesq.: Por exemplo, você colocou...
A175: Eu considerei seis, um inteiro. Seis é um inteiro.
Pesq.: Seis é o todo?
A175: É o todo. Aí eu fui fazendo os pedaços, né?
Pesq.: Ah... agora que eu entendi o que você fez, porque você colocou o dois terços...
A175: Isso.
Pesq.: ... colocou o dois terços um pouco depois do dois.
A175: Isso. Exatamente.

Esta situação mostra que o aluno associou o modelo da reta numérica com o modelo parte-todo, ou seja, considerou o segmento de [0, 6] como o todo e as subdivisões: [0, 1]; [2, 3], etc., como partes deste todo.

Os resultados por nós obtidos, neste caso, são idênticos aos alcançados por Novillis (1980). Estes pesquisadores apresentaram às crianças de 7ª série diversas tarefas que envolviam a localização de frações na reta numérica. Os resultados atingidos indicaram que a associação de frações com pontos sobre a reta era significativamente mais fácil quando apenas eram apresentadas frações próprias para serem localizadas em segmentos unitários [0, 1]. Os pesquisadores também observaram que, quando a reta numérica era apresentada com duas unidades, quase 25% dos alunos da amostra usaram o segmento [0, 2] como o “todo” ou a unidade.

No segundo caso, o aluno confundiu a representação $\frac{a}{b}$ dos números racionais, com notação decimal *a,b*; por exemplo: $\frac{2}{3}$ foi confundido com 2,3. Para realizar, por exemplo, a localização da fração $\frac{2}{3}$, o aluno dividiu o intervalo [2, 3] da semi-reta numerada em 10 partes, como se fosse uma régua, e localizou a fração 2/3 no ponto correspondente a 2,3, como pode ser evidenciado pela sua fala:

Pesq.: Nesta questão era pra localizar dois terços, quatro quintos na... nessa semi-reta aqui.
A280: É.
Pesq.: Como é que... como é que você pensou?
A280: Ah, eu dividi, fui dividindo tipo em milímetros assim, né, e peguei dois terços.
Pesq.: Tá. Então, dois terços ficou um pouco depois do dois?
A280: É. Foi esses dois terços.
Pesq.: Hã.
A280: De dois, aí vamos supor, se fosse dois vírgula um, vírgula dois... dois terços. Tá ok?
Pesq.: Tá. A mesma coisa você fez com as outras contas?
A280: É.

O conjunto dos dados coletados em relação a este subconstruto nos mostra que alguns problemas relacionados com o modelo da reta numérica ainda são evidenciados, mesmo entre os alunos concluintes. Para Pinto e Tall (1996), no sistema universitário tradicional, o entendimento informal dos estudantes sobre os sistemas numéricos normalmente é superestimado, na medida em que é assumida uma aparente intuição ligada a sua representação na reta real, o que na realidade não existe em estudantes típicos. Parece ser uma convicção implícita que logo o estudante adquirirá o significado da representação simbólica trabalhando formalmente nisto, e assim não se dedica tempo para uma discussão satisfatória sobre números concernente ao significado matemático da reta real.

3.2 Unidade de análise 2: o PCK dos futuros professores em relação ao ensino das operações básicas com frações

O objetivo deste segmento é investigar o PCK dos futuros professores pesquisados tomando como parâmetro de análise o conhecimento deles sobre as operações básicas com frações. Retomando as idéias de Shulman (1987), explicitadas na fundamentação teórica, uma das características de um bom conhecimento para o ensino seria a "qualidade de um professor transformar o seu conhecimento do conteúdo em formas que sejam pedagogicamente poderosas e adaptáveis às variações relativas as habilidades e conhecimentos prévios apresentados pelos estudantes" (p. 15).

Particularizando nossa interpretação destes argumentos para o ensino de Matemática, ressaltamos a importância de o professor conhecer diferentes formas de representação e formulação dos diversos conteúdos matemáticos, o que inclui: a habilidade em fazer analogias, utilizar ilustrações com desenvoltura, valer-se de exemplos, explicações e demonstrações; tudo isto com o fim precípuo de organizar o ensino de forma a tornar os assuntos abordados em sala de aula compreensíveis para os alunos.

Para Fennema e Loef (1992), isto envolve tomar um assunto complexo e "traduzi-lo" em representações que possam ser entendidas pelos estudantes. Esta "tradução" da Matemática em representações compreensíveis é o que distingue um professor de Matemática de um matemático. É bastante difundida a idéia de que o uso de situações concretas do mundo real ou representações pictóricas ajuda os estudantes a desenvolver, com entendimento, idéias abstratas da Matemática. Assim, para os professores ensinarem facilitando a aprendizagem, é importante que eles saibam como interpretar ou representar as idéias matemáticas que eles desejam que os seus alunos aprendam.

É cada vez mais proeminente a defesa de que o conhecimento de diferentes modos de representações das idéias matemáticas, por parte do professor, desempenha um papel importante no processo de ensino-aprendizagem. O conhecimento do professor das características de diferentes modos de representação de tópicos concretos é um aspecto essencial no planejamento e implementação de seqüências de ensino facilitando o processo de negociação de significados. Por outra parte, explicitar diferentes aspectos deste componente do conhecimento do professor nos pode permitir chegar a compreender os processos contextualizados de raciocínio pedagógico desenvolvido por estes. Neste sentido, estão sendo geradas novas questões de investigação sobre o conhecimento do professor do conteúdo matemático e os modos de representação, (McDiarmid et al., 1989).

A Matemática é compreendida se sua representação mental fizer parte de uma rede de representações. O grau de compreensão vem determinado pelo número e pela força das conexões. Uma idéia, procedimento ou fato matemático é compreendido a fundo se se liga a redes existentes com conexões mais numerosas e mais fortes (Sallán, 2001).

Ter uma compreensão madura sobre números racionais envolve muito mais habilidades do que a destreza em realizar cálculos utilizando elementos deste conjunto numérico. Tratando especificamente do ensino de frações, Llinares e Sánchez (1993) argumentam que uma das características desejáveis do professor em relação ao seu PCK seria a capacidade de reconhecer as características dos diferentes significados da fração e as limitações e "potencialidades" dos distintos modos de representação que podem ser empregados no ensino deste conteúdo. Estes aspectos do conhecimento do professor é que podem ajudá-lo a elaborar e propor seqüências de ensino-aprendizagem adequadas e dotar de significado as produções dos alunos.

Conforme apresentado, o PCK envolve uma série de aspectos inter-relacionados e, pela amplitude de cada um deles, são difíceis de ser abordados conjuntamente em uma única pesquisa. Sendo assim, o recorte que adotaremos para investigação do PCK dos futuros professores estará restrito a dois aspectos que consideramos extremamente importantes no âmbito do ensino dos números racionais:

- a análise no conhecimento matemático conceitual e processual, em relação as operações básicas, dos futuros professores.
- o conhecimento de modos de representação que possam apresentar uma possibilidade de interpretação geométrica capaz de "traduzir" o conhecimento conceitual das operações básicas com frações;

Os dados que serão utilizados para análise neste segmento são provenientes de duas fontes:

- **Instrumentos 3**: seis das vinte questões do Instrumento 3 versavam sobre as operações básicas com frações e tinham por objetivo avaliar o conhecimento conceitual e processual, bem como o conhecimento dos alunos sobre formas de representação das operações básicas com frações. Estas questões, bem como nossos objetivos com elas, serão apresentadas no desenvolvimento deste segmento.
- **Instrumento 4**: transcrições das entrevistas com os alunos concluintes sobre as justificativas apresentadas para as respostas que eles deram em cada uma das seis questões selecionadas do Instrumento 3.

3.2.1 A adição/subtração

3.2.1.1 Por que calculamos o MMC para efetuar a adição e subtração de frações?

Suponhamos a operação $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$. Um procedimento bastante utilizado pelos professores do Ensino Fundamental para ensino da operação de adição de frações com denominadores diferentes é o seguinte:

- Primeiramente, devemos calcular o mínimo múltiplo comum dos denominadores [mmc (2, 3) = 6]. Este valor será o denominador da fração correspondente à soma;
- Em seguida devemos pegar o valor correspondente ao mmc (6), dividi-lo pelo denominador da primeira fração (2) e o resultado multiplicar pelo numerador da mesma fração [(6 : 2) x 1 = 3];
- Procedimento análogo para a segunda fração [(6 : 3) x 2 = 4];
- A soma será obtida efetuando-se a seguinte operação:
  $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}$ ou $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3+4}{6}=\frac{7}{6}$.

Esta regra para o cálculo da adição (ou subtração) de frações é bastante conhecida por muitas pessoas. Contudo, questionamos: ser habilidoso na aplicação deste procedimento para efetuar a adição de frações é suficiente para capacitar uma pessoa para ensinar esta operação? Se a pessoa concebe o ensino de Matemática como um conjunto de regras arbitrárias que são transmitidas como algo preestabelecido, e vê a Matemática como um processo de memorização sobre como e quando aplicar estas regras, é possível que responda afirmativamente a esta questão. Neste caso, pelo menos teoricamente, muitas pessoas, mesmo não tendo passado por cursos de formação de professores, poderiam ser consideradas habilitadas para o ensino de adição de frações; como é o caso de muitos pais que, mesmo não sendo professores de Matemática, ajudam seus filhos com as tarefas que eles trazem para casa. Agora, se a concepção de ensino de Matemática estiver embasada na teoria construtivista de construção de conhecimentos matemáticos, o conhecimento de regras ou algoritmos, por parte de quem ensina, seria um item necessário, mas não seria suficiente. Neste caso, a organização do ensino é mais complexa, uma vez que não se trata de transmissão de conhecimentos em fase final de elaboração, o que demanda de quem ensina um amplo conhecimento conceitual do objeto de estudo que, obviamente, está além do conhecimento processual imposto pelas regras. É possível que este seja um elemento que diferencia o bom professor de Matemática de uma pessoa habilidosa na aplicação de regras, como o pai que ajuda seu filho nas suas dúvidas sobre adição de frações.

As necessidades formativas dos professores de Matemática não se restringem a saber calcular corretamente, mas precisam também saber usar imagens ou diagramas, representar conceitos e procedimentos matemáticos, fornecer aos estudantes as explicações para as regras e procedimentos matemáticos mais comuns e analisar soluções e explanações verbalizadas pelos estudantes (Hill, Rowan e Ball, 2005).

Estas considerações nos levam à idéia de que investigar a extensão do conhecimento conceitual e processual, além do conhecimento de sistemas de representação dos futuros professores de Matemática, identificando suas concepções errôneas, é um passo fundamental para refletirmos sobre a qualidade da formação.

Quando estamos preocupados em trabalhar com a construção de conhecimentos matemáticos, é importante que os alunos, para além do conhecimento processual dos algoritmos, adquiram uma compreensão conceitual do objeto de ensino que está sendo trabalhado. Quando se pretende organizar a aprendizagem como uma construção de conhecimentos por parte dos alunos, torna-se extremamente relevante que o professor faça um planejamento cuidadoso dos temas a serem abordados à base de atividades de ensino, bem como saiba dirigir o trabalho dos alunos durante a consecução destas atividades.

No caso específico dos números racionais, saber trabalhar com diferentes formas de representação e interpretação de uma operação com frações, analisar e julgar qual delas é a melhor para abordar um assunto, nos parece ser um conhecimento fundamental a todo professor, que pode ser determinante no ato de planejar e aplicar atividades de ensino eficazes. A difícil tarefa de fazer as operações elementares da aritmética ganharem sentido no fazer matemático dos alunos exige dos professores versatilidade, que depende, entre outras questões, de um conhecimento conceitual profundo e amplo a respeito do assunto.

Para verificarmos a compreensão dos estudantes para professores em relação às operações com frações, iniciamos a investigação na busca de evidências que permitissem compreender a forma como os alunos interpretam o cálculo do Mínimo Múltiplo Comum (MMC), quando efetuam a adição ou subtração de frações com denominadores diferentes. Para tanto, propusemos a seguinte questão para todos os alunos pesquisados:

> Por que ao efetuarmos a adição ou subtração de frações com denominadores diferentes nós, normalmente, encontramos o MMC dos denominadores?

A tabela a seguir resume as justificativas dadas pelos alunos, iniciantes e concluintes, quando responderam as questões do Instrumento 3.

Tabela 10: A interpretação do Mínimo Múltiplo Comum

Justificativas apresentadas pelos alunos para necessidade do cálculo do MMC para realização da adição e subtração de frações	**Nº de alunos e percentual**	
	Iniciantes	**Concluintes**
Pela necessidade de dividir o todo em partes iguais	07 (3,7%)	16 (11,8%)
Necessidade de manter a “proporcionalidade” ou para que as frações fiquem “equivalentes”	15 (8,0%)	10 (7,4%)
Para igualar os denominadores	46 (24,3%)	32 (23,7%)
Fazem alusão à necessidade de aplicar a “regra” ou explicam os passos do algoritmo da adição/subtração	08 (4,2%)	04 (3,0%)
Dizem que é para encontrar o menor múltiplo dos denominadores ou um divisor comum dos denominadores	27 (14,3%)	13 (9,6%)
Apresentam explicações confusas ou erradas	36 (19,0%)	16 (11,8%)
Não responderam	50 (26,4%)	44 (32,6%)

Fonte: Instrumento 3.

Quando nos referimos à adição ou subtração de frações que tenham o mesmo denominador, por exemplo, $\frac{3}{7} + \frac{2}{7}$, podemos pensar algebricamente nesta operação como:

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = 3 \times \frac{1}{7} + 2 \times \frac{1}{7} = (3 + 2) \times \frac{1}{7} = 5 \times \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$$

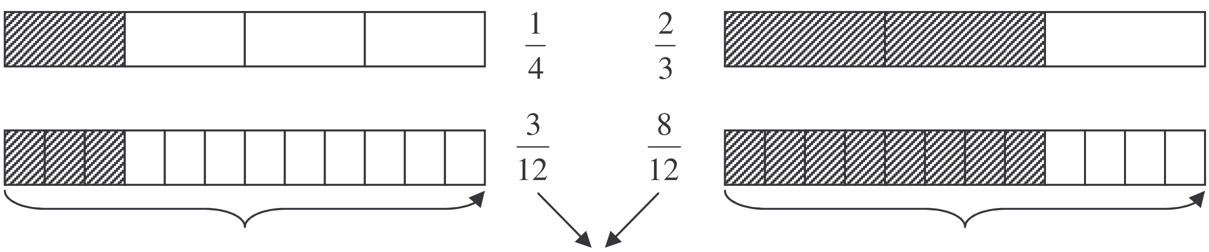
Nesta interpretação, 3 e 2 representam quantidades, enquanto a fração $\frac{1}{7}$ é a medida. Como a medida nas duas frações é igual, bastou somar as quantidades (3 +2) e conservar o denominador (referência da medida).

Esta "facilidade", observada na operação anterior, nem sempre acontece. Seja agora a operação $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} = 3 \times \frac{1}{12} + 8 \times \frac{1}{12} = (3 + 8) \times \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

Neste caso nos deparamos com uma dificuldade não encontrada no primeiro exemplo: estamos lidando com medidas diferentes ($\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$). Assim, uma providência inicial tomada foi a padronização da medida, só que para isto a noção de equivalência de frações foi automaticamente requerida. Quando calculamos o MMC entre os denominadores das frações, estamos justamente padronizando a medida. No caso deste exemplo, a medida utilizada foi $\frac{1}{12}$, mas poderia ser $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{36}$ etc.

Uma outra forma de observarmos a padronização da medida é utilizar um apelo visual por intermédio de representações icônicas. Assim, $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$ pode ser "visto" como:



Mínimo Múltiplo Comum entre 4 e 3

Este tipo de representação possibilita a observação da padronização da medida das partes, e esta padronização implica a necessidade de que as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{3}$ sejam tomadas de todos (unidades) idênticos, caso contrário, a padronização ou uniformização da medida não seria possível.

Seguramente estas não são as únicas formas de justificar o significado do MMC nas operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes. Os exemplos mostram uma base de informações que permitem uma excelente discussão conceitual acompanhada da representação parte-todo que facilitam a visualização do que se está fazendo algebricamente. É claro que estas considerações estão sendo pensadas como algo a ser trabalhado após os alunos terem construído a noção de equivalência de frações.

O Instrumento 3 nos revela que 3,7% dos alunos iniciantes e 11,8% dos concluintes demonstraram ter conhecimento sobre os detalhes salientados anteriormente, como a explicação dada pelo aluno A331: "porque para efetuarmos estas operações precisamos de um denominador comum para as frações, porque o denominador representa a parte a ser dividida, sendo assim, não podemos efetuar as operações com partes diferentes a serem divididas" (A331, concluinte, Instrumento 3).

Ou, ainda, a explicação dada pelo aluno A160 durante a entrevista:

Pesq.: [...] a gente queria saber o seguinte: por que, pra fazer a adição e subtração, a gente calcula o MMC?
A160: [...] Reconhecer as... partes hachuradas. Tem que tá dividido em partes iguais. Então, você tem duas coisas divididas em partes diferentes, como é que eu vou somar se tá o todo dividido em partes diferentes? Tá somando coisas diferentes.
Pesq.: Compreendi. Você escreveu inclusive aqui [no Instrumento 3]: "porque o todo precisa estar dividido em partes iguais".
A160: Isso (A160, concluinte, Instrumento 4).

A criação de um conceito matemático está, quase sempre, vinculada à necessidade de dar resposta a um problema concreto, proveniente da realidade ou, até mesmo, de natureza puramente especulativa. Muitos destes conhecimentos ao fazerem parte do *corpus* científico são apresentados de forma generalizada. No processo de generalização, estes saberes sofrem uma descontextualização em que desaparece(m) o(s) problema(s) que lhe deu(deram) origem, as delimitações a que foram circunscritas sua resolução, bem como os obstáculos epistemológicos que tiveram que ser transpostos para se chegar à resposta do problema. Ao figurarem nos livros de Matemática, estes saberes se apresentam destemporalizados, despersonalizados, descontextualizados e generalizados (Chamorro, 1992; Damico, 1997). As “formulas”, algoritmos ou regras são exemplos de saberes matemáticos que se apresentam com esta configuração.

Quando um professor se utiliza da transmissão de conhecimentos elaborados, ou seja, um ensino calcado na apresentação e uso de fatos ou procedimentos algorítmicos, está partindo do pressuposto de que estes saberes a serem ensinados já estão constituídos enquanto objeto de ensino. No construtivismo, o conhecimento não tem o mesmo estatuto. Para que haja ensino e, conseqüentemente, aprendizagem, é necessário que o conceito a ser ensinado seja problematizado, transformado num constante trabalho de reconstituição, para que, após construído (pelo aluno), faça parte do seu *corpus* de conhecimento como algo significativo. Nesta perspectiva, a generalização é a última etapa do processo (Damico, 1997).

Qual a natureza do conhecimento requerido para explicar com precisão como um determinado algoritmo “funciona”, a necessidade ou não de realização de determinados passos ou procedimentos? Por que são esses procedimentos os necessários e não outros? Qual o raciocínio que deu origem àquela regra? Entendemos que este conhecimento é de natureza matemática, sem o qual o professor se vê desprovido de argumentação cientificamente embasada para constituir sua justificativa. Por outro lado, um baixo conhecimento matemático sobre um determinado assunto pode comprometer o PCK. Vejamos o excerto a seguir:

Pesq.: Hã.. por que é que a gente acha o mínimo múltiplo comum quando a gente soma ou subtrai fração? É assim que você faz?
A151: Certo. Sim... é assim que eu faço. Colocar as duas frações na mesma base para poder facilitar a soma delas.
Pesq.: Então seria pra isso?
A151: Sim.
Pesq.: Na ... [no Instrumento 3] você escreveu porque é a forma mais simples....
A151: É a forma mais simples de efetuarmos a operação.
Pesq.: Mas não tem uma explicação? Por exemplo, se você for dar aula para uma quinta série, sexta série, e você vai ensinar a adição de fração com denominadores diferentes, aí você vai explicar ... muito bem, primeiro a gente vai achar... Aí um aluno pergunta lá: mas por que tem que fazer isso, né? Como é que você se sairia nessa pergunta dele?
A151: Olha [...], eu iria explicar para ele que a Matemática busca sempre a forma mais simples de ver as coisas. E, para somar dois números que têm parâmetros diferentes, a forma mais simples de enxergar isso é fazer os dois ter uma base em comum pra poder, então, a gente poder efetuar esta adição e subtração (A151, concluinte, Instrumento 4).

Percebemos uma evidência de como a falta de conhecimento matemático pode influenciar o PCK. Ao ser solicitado a simular uma situação em que é preciso responder a pergunta de um aluno sobre a necessidade de calcular o MMC, a justificativa é evasiva e o aluno recai no pragmatismo dos algoritmos. Um professor com um bom conhecimento matemático e didático (PCK) sobre adição de frações poderia se valer de uma série de estratégias para ajudar seu aluno a entender a necessidade do procedimento em tela, tais como: utilização de procedimentos algébricos que justificassem esta necessidade; emprego de representações geométricas diversas que pudessem facilitar o entendimento algébrico; uso de atividades ou situações-problema que levassem o aluno a um processo de investigação, cujo resultado seria a resposta para a sua própria questão ou, ainda, utilizar materiais ou manipulativos que atingissem o mesmo objetivo.

Steinberg, Haymore e Mark (1985), citados por Fennema e Loef (1992), não só investigaram o conhecimento de professores, mas também examinaram o impacto deste conhecimento e sua relação com o ensino. Eles apontaram uma relação entre a educação formal dos professores, o seu conhecimento matemático atual sobre o assunto que eles estavam ensinando, o seu conhecimento de como aquele assunto se ajustou dentro do campo matemático. Estes pesquisadores concluíram que os professores, cujo conhecimento matemático parecia estar conceitualmente conectado e estruturado, refletiam esta característica no seu ensino, enquanto os professores que não apresentavam esta característica ministravam cursos mais calcados em regras e fórmulas. Para Fennema e Loef (1991), estas conclusões reforçam a convicção de que, quando os professores tiverem um entendimento conceitualmente integrado do assunto a ser ensinado, eles estruturam suas salas de aula de forma que os estudantes possam interagir com a natureza conceitual do assunto. Nos vários estudos analisados, a profundidade da matéria a ser ensinada parecia estar relacionada diretamente à profundidade do conhecimento do assunto por parte do professor.

A falta de conhecimento matemático é um fator limitante do PCK. Entendemos que uma das necessidades formativas dos professores de Matemática é aquela que considera a construção do conhecimento matemático e PCK de forma imbricada, em que um não sobrepõe por completo o outro.

Dando continuidade à análise dos dados coletados por intermédio do Instrumento 3, encontramos uma quase paridade nos percentuais dos alunos iniciantes (32,3%) e concluintes (31,1%) que alegaram a necessidade de “deixar na mesma proporção” (A40, iniciante, Instituição α) ou “para que as frações fiquem equivalentes” (A02, iniciante; A172, concluinte, Instrumento 3) ou, ainda, “para igualarmos os denominadores diferentes ou seja, tornar os denominadores diferentes em um só denominador” (A05, iniciante, Instrumento 3). Muitas vezes, os termos “equivalente”, “proporção” e “igualar” apareceram em frases que se apresentavam com escassez de informações, dificultando uma análise mais profunda sobre a real compreensão do aluno em relação à questão colocada. Embora os termos utilizados sejam compatíveis, as explicações precárias podem significar uma compreensão matemática da situação igualmente precária. No que se refere aos dados obtidos com o Instrumento 4, constatamos que 13 dos 15 alunos entrevistados disseram que a necessidade de calcular o MMC é para deixar os denominadores iguais, como é o caso:

Pesq.: quando a gente faz a adição ou subtração de frações, a gente normalmente encontra o MMC. E a pergunta era por que precisa encontrar o MMC?
A161: Ah, eu coloquei que não é possível adição... com denominadores diferentes, que a gente tinha que achar o mínimo múltiplo... o mínimo múltiplo comum pra fazer uma simplificação da operação.
Pesq.: Ou seja, na tua resposta aqui [no Instrumento 3] era pra deixar os dois com o mesmo denominador?
A161: Isso. Pra poder fazer a adição e subtração entre eles (A161, concluinte, Instrumento 4).

Nossos dados também revelam muitas concepções ingênuas acerca do cálculo do MMC que denotam desconhecimento total sobre a questão colocada. Evidenciamos que 18,5% dos alunos iniciantes e 12,6% dos concluintes limitam-se a explicar o óbvio, ou seja, que o MMC serve para encontrar um múltiplo comum dos denominadores ou, ainda, explicam os passos da “regra” ou “propriedade”, por exemplo, a resposta dada por este aluno:

> Porque existe uma propriedade que diz que não podemos nem somar nem subtrair frações c/ denominadores diferentes, então, primeiramente, temos que encontrar o mínimo múltiplo comum (MMC) entre os denominadores para depois realizarmos operação (A18, iniciante, Instrumento 3).

Estes alunos sabem explicar como a “regra” funciona, mas não sabem por que ela precisa ser assim para funcionar.

A169: É... essa é uma questão muito, entre aspas, “chatinha” de responder... porque nós, quando vamos resolver uma fração, é automática. Achamos o MMC para seus denominadores ficarem iguais, para dividir pelo denominador e multiplicar pelo numerador. Certo? [inaudível]. Agora, por quê? Se tem alguma coisa específica, eu acho que tem muita gente que deixa a desejar com isso.
Pesq.: Ah. Você não tem uma explicação clara para isso.
A169: Explicação clara não tenho (A169, concluinte, Instrumento 4).

A explicação para este fato foi dada por um dos alunos iniciantes: “Quando me ensinaram, disseram apenas que não podíamos efetuar sem antes encontrarmos o MMC. Agora o porquê? Não sei” (A49, Instrumento 3, Instituição α). Ou, ainda, a fala deste aluno:

Pesq.: Por que que acha o MMC?
A337: Eu coloquei porque as frações são diferentes. Eu sei, que nunca ninguém falou. Eu tenho certeza que nunca ninguém falou pra gente por que que a gente faz isso. A gente sempre aprendeu isso assim meio na raça, eu acho. E nunca falaram pra gente o porquê. Então, eu falei porque estamos trabalhando com frações diferentes. Isso que eu coloquei (A337, concluinte, Instrumento 4).

Esta fala evidencia que durante o processo de formação na universidade, segundo o aluno, em nenhum momento este tema foi tratado.

O somatório dos percentuais relativos aos alunos que apresentaram explicações erradas, confusas ou que não responderam corresponde a 45,4%, no caso dos iniciantes, e 44,4%, para os concluintes. Estes dados mostram que quase a metade dos alunos pesquisados, quer seja por ter respondido errado ou por ter se abstido, não apresentou um conhecimento conceitual que os levassem a uma justificativa correta para o cálculo do MMC nas operações de adição e subtração. O excerto a seguir é representativo desta categoria:

Pesq.: Por que que acha esse MMC?
A348: É denominadores diferentes, né?
Pesq.: É.
A348: Você tem que tirar o MMC ...
Pesq.: Você tem que tirar o MMC pra quê?
A348: Pra você achar o MMC, né?
Pesq.: Sim, mas por que precisa achar?
A348: Da conta... bom, aí você me pegou, hein? [risos]. É que essas coisas aí você acaba, né...
Pesq.: Acaba esquecendo.
A348: É (A348, concluinte, Instrumento 4).

As justificativas erradas ou evasivas incluíam desde alegações que evidenciavam um desconhecimento acentuado das operações com frações (“Porque não podemos multiplicar, subtrair, somar ou até cancelar frações com denominadores diferentes” – A303, iniciante, Instituição β), até frases com cadeia de idéias confusas ou com termos ambíguos, por exemplo: “Pois, apesar de termos os valores, eles não representam exatamente o seu valor. Assim com exemplos explicar a diferença se no caso somá-los sem utilizar o MMC” (A154, concluinte, Instrumento 3).

No tocante aos alunos concluintes, após quatro anos de contato com diversas disciplinas que objetivavam a construção de pensamento matemático avançado, tais como Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra, Análise etc., seria esperado eles se apropriassem de um vocabulário condizente com a titulação que estão prestes a conquistar. No caso dos alunos concluintes que se propuseram a dar alguma explicação para a questão durante a entrevista, observamos uma dificuldade acentuada na construção de frases que pudessem dar um sentido claro ao fenômeno matemático que eles queriam comunicar. Na ausência do termo matematicamente correto, foi bastante comum a utilização de metáforas, muitas delas descabidas, que prejudicavam a compreensão das suas idéias. Dos quinze entrevistados o caso mais marcante foi o seguinte:

Pesq.: [...] A gente pedia pra vocês falarem por que é que quando se faz a adição ou se faz a subtração de frações a gente tem que achar o MMC? Você disse que é pra ...
A175: Para ter o resultado concreto da fração.
Pesq.: Mas o que significa ter o resultado concreto da fração?
A175: É porque, na verdade, eu tenho um meio ... adição... É adição, né?
Pesq.: Isto.
A175: Quando tenho meio mais três quartos menos dois quintos, por exemplo,...
Pesq.: Hum.
A175: ... eu preciso saber essas partes aqui [mostra as frações] quem é ele, né?
Pesq.: Hum.
A175: Então, pra fazer isso aqui a primeira coisa que tem que se fazer é isso aqui.
Pesq.: Achar o mínimo...
A175: O mínimo ...
Pesq.: De dois, quatro e cinco?
A175: É.
Pesq.: Sim, mas eh... tá.
A175: Mas... eu vou achar o valor puro dele.
Pesq.: Porque a gente ... tá...
A175: E depois vai substituir, né.
Pesq.: Mas eu não entendi ainda por que precisa achar o mínimo múltiplo comum. Por quê? Tem alguma explicação?
A175: Porque ...
Pesq.: ... alguma justificativa?
A175: Porque se eu achar ... eu achando o mínimo múltiplo comum ... Aquele múltiplo comum é comum a todos eles ... a todas às partes.
Pesq.: A todas às frações que são somadas ou subtraídas.
A175: Isso. Exatamente isso (A175, concluinte, Instrumento 4).

Um olhar amplo por todas as respostas que tivemos disponíveis para análise provenientes dos Instrumentos 3 e 4 nos leva à conclusão de que existe um desequilíbrio acentuado entre o conhecimento conceitual e processual dos professores em formação, em relação ao entendimento matemático do cálculo do mínimo múltiplo comum nas operações de adição e subtração de frações. Entre a importância dada ao tratamento conceitual e/ou processual no ensino de

Matemática, há autores com posições bastante radicais, como é o caso de Silver (1981b), quando diz que o conhecimento conceitual é mais significativo do que o conhecimento processual.

Acreditamos que o conhecimento matemático inclui importantes relações entre conhecimento conceitual e processual; trata-se de aspectos complementares e não excludentes, ambos essenciais quando se pensa na construção de conhecimento matemático. Entendemos, em conseqüência, que os programas de formação inicial de professores de Matemática deveriam desenvolver nos estudantes para professores estes dois aspectos de forma articulada.

O conhecimento conceitual e processual é um outro aspecto importante pertinente ao PCK, relacionado com os diferentes conteúdos matemáticos que os futuros professores irão ensinar. No caso específico das frações, Philippou e Christou (1994) sugerem que os professores precisam ser expostos a conectar conhecimento conceitual e processual de frações em programas de formação, como forma de prover uma base sólida de conhecimentos para o ensino deste conteúdo.

3.2.1.2 A compreensão da adição de frações

Ainda em relação à adição de frações, propusemos uma outra questão com o objetivo de verificar o conhecimento dos futuros professores a respeito de diferentes formas de representação da operação de adição que pudessem servir como recurso didático no ensino desta operação:

> Você deseja explicar a operação ½ + 2/3 para uma classe de ensino fundamental. Como você pode fazer isto utilizando desenhos como, por exemplo, barras de chocolate?

É importante lembrar que, quando aplicamos o Instrumento 3, que continha esta questão, deixamos claro para todos os alunos que eles poderiam se utilizar de quaisquer tipos de representação. “Barras de chocolate” foi incluído no texto apenas como uma sugestão. Esta observação foi feita para todas as questões subseqüentes que tratavam das operações básicas com frações.

Identicamente à questão anterior, utilizaremos duas fontes de dados para análise: Instrumentos 3 e 4.

A análise e tabulação das respostas dadas pelos alunos no Instrumento 3 nos levaram ao seguinte resumo:

Tabela 11: Resumo dos dados relativos à operação de adição

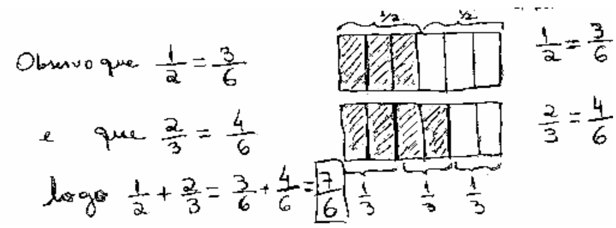
Procedimentos utilizados pelos alunos	Iniciantes	Concluintes
1) Apresentaram uma representação correta da adição	14 (7,4%)	23 (17,0%)
2) Apresentaram o desenho parte-todo das frações dadas e ao lado aplicaram o algoritmo. Utilizaram todos ou unidades de tamanhos diferentes.	37 (19,6%)	18 (13,3%)
3) Fizeram apenas tentativas. Apresentaram desenhos e/ou explicações erradas	110 (58,2%)	68 (50,4%)
4) Não responderam	28 (14,8%)	26 (19,3%)

Fonte: Instrumento 3.

3.2.1.3 Conhecimento conceitual e representacional corretos

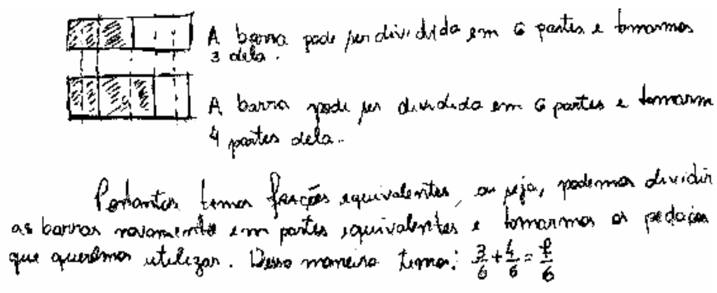
Os dados constantes da linha 1 da tabela mostram que 14 alunos iniciantes (7,4%) e 23 alunos concluintes (17,0%) conseguiram interpretar geometricamente a operação de adição de frações utilizando modelos que envolviam o subconstruto parte-todo.

Um exemplo que caracteriza o tipo de representação apresentada pelos alunos concluintes é o seguinte:



(A150, concluinte, Instrumento 3)

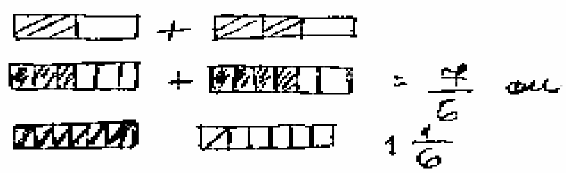
Embora tenham aparecido em menor percentual, alunos iniciantes também mostraram conhecimento conceitual e representacional da adição de frações, como é caso da solução apresentada pelo aluno A56:



(A56, iniciante, Instrumento 3)

As representações utilizadas pelos alunos, bem como suas explicações, mostraram que eles compreendem a operação de adição para além da aplicação do algoritmo. Para usar corretamente um determinado sistema de representação, como é o caso do modelo parte-todo, é necessário que a pessoa tenha uma compreensão conceitual do objeto matemático que pretende representar. Quando empregamos modelos contínuos para representar a adição ou subtração de frações, é preciso que os todos ou unidades adotados para representar cada uma das frações dadas sejam do mesmo tamanho. Além disso, deve-se padronizar a medida, questão já abordada anteriormente, o que, por sua vez, implica a necessidade de ter construído o conceito de equivalência de frações. Uma representação geométrica, para ser boa e fidedigna, deve "traduzir" coerentemente do conceito matemático. É justamente este fato que nos alimenta a crença de que uma representação geométrica correta das operações básicas com frações só é possível de ser realizada se a pessoa tiver conhecimento matemático destas operações.

Alguns alunos optaram por expor somente o sistema de representação sem o acompanhamento de explicações adicionais. Podemos ilustrar com a resolução apresentada pelo aluno concluinte A160.



(A160, concluinte, Instrumento 3)

Esta seqüência de desenhos, embora não viesse acompanhada de outros tipos de explicações, além dos próprios desenhos, foi suficiente para constatarmos que o aluno consegue trabalhar com representações parte-todo para mostrar a operação de adição solicitada. Posteriormente, por intermédio das entrevistas, conseguimos entender melhor o seu pensamento, confirmando nossa conclusão inicial:

Pesq.: E vamos supor agora que você queira explicar para uma classe. Você vai dar uma aula e quer saber, quer explicar meio mais dois terços. Só que você não quer só fazer a conta, você quer utilizar algum desenho, né? Como é que você explicaria isso pro teu aluno?
A160: No caso, eu tenho que tá trabalhando sempre com um inteiro, né?
Pesq.: Hum.
A160: Então eu tô dividindo o inteiro em duas partes e em três partes. Tô dividindo em partes diferentes.
Pesq.: Tá.

A160: Então, primeiro eu dividi na metade, em meio, e o outro eu dividi em três partes e peguei duas... dois terços.
Pesq.: Tá.
A160: Pra poder somar, como eu disse, tem que tá dividido em partes iguais. Então eu vou ter que pegar e dividir essa minhas figuras que são as duas representando um inteiro e vou ter que igualar essas divisões. No caso, seis, né? Dá pra igualar em seis partes e aí já é possível somar as partes que ficaram.
Pesq.: Entendi. Então no teu caso, vamos supor, você colocou: sete sextos como um inteiro e um sexto.
A160: Isso (A160, concluinte, Instrumento 4).

Em sua explicação o aluno aborda justamente as questões cruciais que determinam o conhecimento conceitual da operação, como a correta necessidade de identificação do inteiro tomado como referência e a necessidade de padronização da medida.

Para Llinares e Sánchez (1996), o tipo de compreensão que um professor ou estudante para professor tem sobre um tópico matemático específico determina, em parte, o tipo de tarefa e de formas de representação que ele pode utilizar no ensino. Pensando na formação de professores, uma outra possibilidade apresentada pelos autores seria a realização da operação inversa, ou seja, uma determinada representação vinculada a uma noção matemática particular é apresentada para análise, isto pode fazer com que o professor ou futuro professor reflita sobre a questão e amplie sua compreensão conceitual das idéias e procedimentos matemáticos. Segundo estes autores, existe uma relação mútua entre o conhecimento do conteúdo matemático e o conhecimento dos modos de representação por parte do professor.

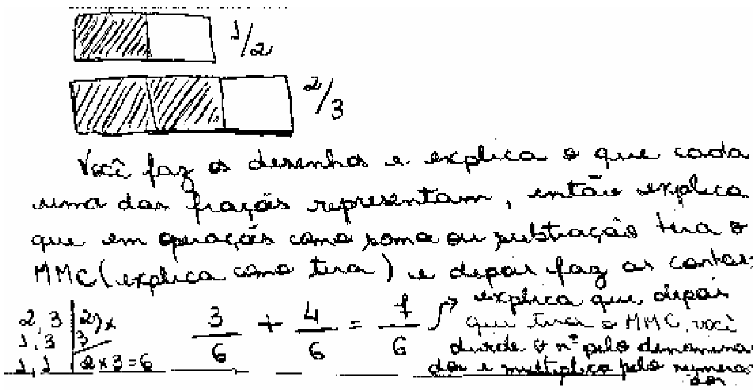
3.2.1.4 A natureza das concepções errôneas

O somatório dos percentuais relativos aos itens 2 e 3 da tabela nos mostra que 77,8% dos alunos iniciantes e 63,7% dos concluintes, que se manifestaram buscando uma tentativa de explicação para a operação, não foram capazes de expor uma representação utilizando-se de recursos icônicos minimamente aceitáveis para a adição solicitada. Se acrescentarmos a estes os percentuais dos alunos que não responderam a questão, chegaremos a 92,6% no caso dos iniciantes e 83,0% para os alunos concluintes. Estes altos índices revelam que há um considerável comprometimento do entendimento conceitual da operação de adição, manifestado tanto pelos alunos iniciantes quanto pelos concluintes.

Observando as respostas dadas pelos alunos que se valeram de algum tipo de tentativa de explicação para a situação proposta, selecionamos algumas situações que merecem destaque por apresentarem concepções errôneas significativas:

a) Interpretação icônica como enfeite para uma aplicação ou explicação apoiada no algoritmo

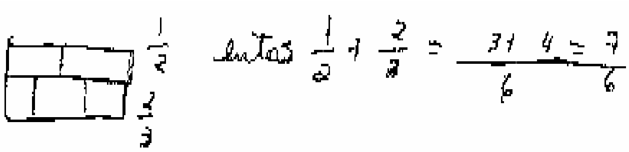
37 alunos iniciantes (19,6%) e 18 concluintes (13,3%) expuseram as representações das frações dadas utilizando o significado parte-todo, contudo a explicação, quando houve, apoiou-se integralmente na exposição dos passos necessários para aplicação do algoritmo da adição. Este grupo de alunos nos mostra que são capazes de realizar a operação com sucesso, porém não conseguem "traduzi-la" em um sistema de representação. Selecionamos duas resoluções representativas desta categoria. Uma apresentada por um aluno iniciante e outra por um aluno concluinte:



(A01, iniciante, Instrumento 3)

Notamos que o desenho foi feito apenas para apoiar a explicação do algoritmo. Na realidade, a representação utilizada, além de não contribuir para a compreensão da operação, faz por piorá-la, uma vez que o aluno usa "todos" de tamanhos diferentes, comprometendo assim a padronização da unidade.

Ou ainda a solução apresentada por um aluno concluinte:

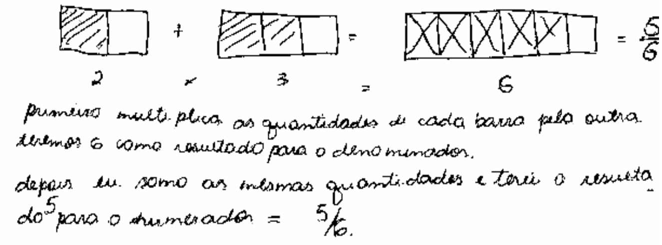


(A292, concluinte, Instrumento 3)

Ball, Bass, Sleep e Thames (2005) fazem uma distinção entre o conhecimento de conteúdo comum (CCK) e conhecimento especializado do conteúdo (SCK). Argumentam estes autores que um ensino qualificado requer que o professor esteja preparado para ajudar os estudantes a aprender os conteúdos de forma significativa. Durante o processo de ensino-aprendizagem o professor se depara com a necessidade de analisar com competência os erros cometidos pelos alunos. Professores com conhecimento especializado do conteúdo (SCK) podem examinar com maior competência estes erros, uma vez que tal verificação requer freqüentemente um conhecimento especializado de Matemática. O ensino de Matemática demanda conhecimentos pedagógicos que não são necessários se o objetivo for apenas aplicar algoritmos confiantemente. Cotidianamente, o professor se depara com tarefas, tais como: entender as concepções errôneas apresentadas pelos alunos; necessidade de explicar os fundamentos teóricos envolvidos em um algoritmo, mostrar como ele funciona (conhecimento de teoria matemática) e selecionar exemplos estratégicos (resolução de problema matemático). É Importante notar que cada uma destas tarefas comuns ao ato de ensinar é tanto um empreendimento de tipo matemático como pedagógico. O argumento principal defendido por estes pesquisadores é que o ensino não requer só conhecimento de conteúdo, mas, sim, exige, além de muitos outros recursos, um tipo especializado de conhecimento do conteúdo que tem sido freqüentemente negligenciado.

b) Conhecimento conceitual precário implicando representação errada

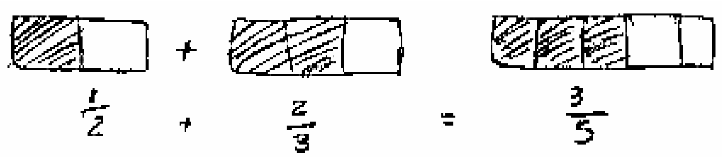
Constatamos que 29 alunos iniciantes (15,3%) e 12 concluintes (7,4%), além da representação parte-todo das frações dadas, apresentaram também um desenho ilustrativo correspondente à soma. As representações apresentadas por este grupo de alunos, em todos os casos, continham erros graves de interpretação. Encontramos uma variedade bastante grande de erros, muitos deles com uma ligação forte com o não-entendimento da representação parte-todo das frações. Selecionamos três exemplos representativos desta categoria:



(A06, iniciante, Instrumento 3)

Neste caso, notamos que o grau de confusão foi bastante alto. A iniciar pela associação feita entre as representações parte-todo e os numerais escritos abaixo de cada uma. Para realizar a operação o aluno utiliza apenas os denominadores das frações dadas, multiplicando-os, para gerar o denominador da fração soma e somando-os para gerar o numerador.

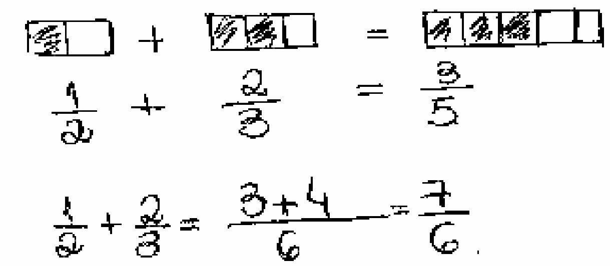
Um outro tipo de concepção errônea bastante comum, presente neste grupo, pode ser exemplificado por esta solução:



(A09, iniciante, Instrumento 3)

A representação realizada pelo aluno leva a uma compreensão absolutamente equivocada da adição de frações. Esta representação mostra que o aluno interpretou a adição de duas frações como a adição direta dos numeradores e denominadores.

Situação análoga foi apresentada pelo aluno concluinte A120:



(A120, concluinte, Instrumento 3)

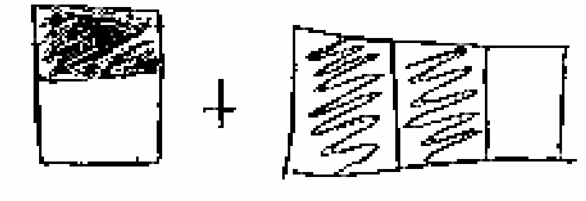
Nesta solução, há um claro conflito entre os procedimentos utilizados pelo aluno. Por um lado, o sistema de representação o conduz para a resposta 3/5; por outro, a aplicação do algoritmo leva a um resultado diferente do anterior. O aluno não faz nenhuma alusão a este fato. Ressalta-se que nestes dois últimos casos os alunos utilizam um procedimento simplista para obtenção da figura representativa da soma. Tudo se passa como se eles tivessem cinco quadradinhos de cartolina, três pretos e dois brancos. Para compor a fração ½ foram empregados um quadrado branco e outro preto; para compor a fração 2/3, foram usados dois quadrados pretos e um branco. Para obtenção da soma, bastou unir os quadrados das duas figuras.

O procedimento adotado por estes alunos suscita duas hipóteses: ou, de fato, o aluno concebe a adição de frações como a adição direta dos numeradores e denominadores ou o aluno foi traído pela própria representação; ou seja, a representação o induziu ao erro. Em nenhum dos casos em que este tipo de solução apareceu tivemos a oportunidade de aprofundar a análise em virtude da escassez de informações presentes nas soluções. De qualquer forma, a solução apresentada conflita com a teoria matemática evidenciando o não-entendimento conceitual envolvido na questão.

Estes casos nos chamam a atenção para o fato de que a utilização de representações geométricas só deve ser utilizada pelo professor se ele tiver segurança do que está fazendo; caso contrário, um instrumento que poderia ser um recurso didático importante se converte em fonte de erro que pode levar os alunos a uma interpretação equivocada do conceito estudado.

c) Explicações confusas e/ou desenhos incompreensíveis

81 alunos iniciantes (42,9%) e 58 concluintes (43,0%) fizeram apenas desenhos representativos das frações dadas. O tipo de erro mais comum estava relacionado com o significado parte-todo e com a não-padronização da unidade de referência. Alguns alunos tentaram esboçar alguma explicação durante a resolução das questões do Instrumento 3, contudo não foi possível compreender a natureza dos erros pela precariedade envolvida na linguagem utilizada. Algumas informações adicionais sobre as dificuldades encontradas pelos alunos puderam ser obtidas durante a entrevista. Vejamos, por exemplo, a representação exposta pelo aluno concluinte A354 no Instrumento 3 e sua justificativa durante a entrevista:



Pesq.: [...] Se você tivesse que explicar pra um aluno de quinta série, sexta série, né, como que a gente faz meio mais dois terços, mas tentando concretizar um pouco, assim, com barrinha de chocolate ou outra forma de representação....
A354: É, então, eu fiz só essa divisão de meio, que seria meio e mais os dois terços, mas teria que ter... assim, que aprofundar um pouquinho mais, o porquê do mínimo...
Pesq.: Hum, hum.
A354: ... tudo isso.

Pesq.: Ali você não saberia explicar usando barrinhas?
A354: Não. Com desenho assim, não.
Pesq.: Mas saberia explicar se fosse pra fazer as continhas?
A354: Ah, sim.
Pesq.: Continha tudo bem?
A354: Continha tudo bem. Desenho é que não.

Esta seqüência de alegações, mais uma vez, mostra o caso de um aluno que se sente habilitado apenas para um procedimento tecnicista e processual. Esta formação tecnicista e instrumental se afasta das concepções de ensino-aprendizagem voltadas para a construção de conhecimentos. Mostra uma pobre formação em relação ao PCK, dado que o aluno apresenta conhecimentos limitados em relação a possibilidades didáticas para ensino do assunto em tela.

3.2.1.5 A explicação conclusiva

Por intermédio do Instrumento 4 constatamos que 13 dos 15 alunos entrevistados não sabiam outra forma de explicar a operação solicitada que não fosse a explicação dos passos do próprio algoritmo. Uma justificativa para este fato foi dada pelo aluno A133:

> Eu acho porque fui educado no modo algébrico. Como tá acontecendo né, com os alunos aí, assim. A gente é educado muito no... só no algébrico, né. Mais na conta. É teoria mais 20 exercícios e vai embora. Isso que já tá refletindo aqui. A faculdade não ensina isto (A133, concluinte, Instrumento 4).

O comentário do aluno é contundente e nos dá a visão necessária ao entendimento do processo formativo que eles receberam na universidade; ou seja, uma seqüência didática embasada na definição, exemplificação e exercitação de conceitos e técnicas que configuram a metodologia de ensino tradicional. Professores com uma limitada formação em relação ao PCK acabam por dispor de poucas possibilidades didáticas para abordagens dos diferentes conteúdos que devem ensinar. No nosso caso, constatamos que o PCK da maioria dos futuros professores para o ensino da adição de frações está restrito ao ensino do algoritmo; contudo, até mesmo em relação ao próprio algoritmo, eles sentem dificuldades em explicar matematicamente como ele funciona. Trata-se de um misto de falta de conhecimento matemático do conteúdo e de conhecimento pedagógico do conteúdo.

Os nossos dados não nos permitem inferir que estes futuros professores reproduzirão estas limitações didáticas no seu trabalho cotidiano em sala de aula; os dados coletados nos possibilitam apenas afirmar que no momento da pesquisa os alunos apresentavam PCK limitado em relação ao ensino da adição de frações. Todavia, é difícil pensar que uma formação de professores de Matemática, com ênfase na transmissão de saberes elaborados, algebricamente generalizados e trabalhados na forma de resolução de exercícios repetitivos, como salientado pelo aluno, possa prepará-los, pelo menos em início de carreira, para uma docência que denominaremos de “moderna”, ou seja, que reflita os avanços conquistados pelas pesquisas em Educação Matemática.

Entendemos que a maneira como o futuro professor concebe o ensino de Matemática poderá condicionar o modo como ele irá ensiná-la. O professor que pensa que a atividade Matemática tem pouco a ver com ensaiar soluções, aproximar resultados ou recorrer a diferentes tipos de representações de um fenômeno poderá condicionar a sua forma de ensino a esta concepção. Acreditamos que não ensina igual um professor que vê a Matemática como um conjunto de receitas ou ferramentas de cálculo ou aquele que a interpreta como uma ciência especulativa (Damico, 1997).

A busca do entendimento de formas alternativas de ensino dos conteúdos fica a cargo do desenvolvimento profissional dos alunos:

> Então, depois... depois que eu resolvi a questão, e detalhado, aí eu corri atrás [o aluno se refere ao Instrumento 3]. Eu dou aula numa escola... 50 (cinqüenta) professores que dão aula e eu falei: como é que eu faço adição com gráficos? Aí eles me ensinaram. Até hoje em dia eu não sabia fazer. Adição, multiplicação, eu não sabia fazer. Acho que era porque na escola, te deixa muito a desejar. Mas ninguém passa isso para os alunos. Só passa o lógico: meio mais dois terços, achar o MMC. [...] Ninguém ensina lógica. Por isso, eu nunca aprendi isso. Na faculdade também em Complementos [disciplina que tem por objetivo recordar conteúdos da Educação Básica] a gente não viu (A169, concluinte, Instrumento 4).

A curiosidade em aprender novas formas de ensinar a adição de frações levou o aluno, que já leciona em uma Escola Pública, a procurar seus colegas de trabalho para discutir a questão. É relevante salientar que a formação inicial é apenas uma etapa do processo de aquisição de conhecimento profissional. O desenvolvimento profissional contínuo é algo de fundamental importância na formação profissional de qualquer professor. Por sua vez, a formação inicial é uma etapa fundamental deste desenvolvimento profissional e, portanto, seria desejável que ela não só contribuísse para uma mudança das concepções sobre ensino-aprendizagem dos futuros professores, como também os dotassem de conhecimentos matemáticos e didáticos que permitissem a eles colocarem em prática estes conhecimentos tão logo iniciem sua carreira profissional.

3.2.2 A compreensão da multiplicação

O contexto adotado para a verificação do PCK dos alunos concernente à multiplicação de frações foi o mesmo do adotado para a adição. Solicitamos aos alunos que se colocassem na posição de professores com o objetivo de explicar a operação 2/3 . 3/4, para uma classe de Ensino Fundamental, utilizando-se de desenhos, como barras de chocolate, ou outro recurso representacional qualquer. A questão constante do Instrumento 3 era a seguinte:

> Da mesma forma que na questão anterior, utilize recursos geométricos para explicar a operação: $\frac{2}{3} . \frac{3}{4}$.

A tabela a seguir resume os dados coletados com o Instrumento 3:

Tabela 12: A multiplicação de frações

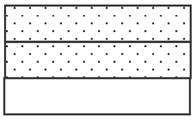
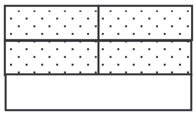
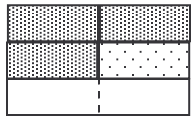
Procedimentos utilizados pelos alunos	Iniciantes	Concluintes
Acertaram a representação e/ou a explicação	01 (0,5%)	05 (3,7%)
Fizeram a representação geométrica das frações dadas de forma precária e ao lado aplicaram o algoritmo	44 (23,3%)	18 (13,3%)
Apresentaram apenas representações geométricas precárias	44 (23,3%)	40 (29,6%)
Só aplicaram o algoritmo	18 (9,5%)	04 (3,0%)
Desenho incompreensível e/ou explicação confusa	15 (7,9%)	13 (9,6%)
Não respondeu	67 (35,4%)	55 (40,7%)

Fonte: Instrumento 3.

A multiplicação de frações parece ter revelado um grau de dificuldade maior do que o caso da adição. Apenas um aluno iniciante e cinco concluintes conseguiram expor uma solução geometricamente correta para a multiplicação no Instrumento 3. Nas entrevistas (Instrumento 4) apenas 1 aluno dos 15 entrevistados apresentou uma solução correta para a multiplicação.

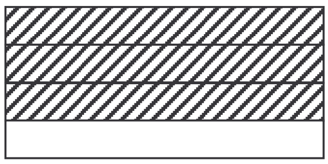
Entre os alunos que apresentaram uma solução correta para a representação da multiplicação, identificamos basicamente duas estratégias utilizadas por eles, que passaremos a analisar a seguir.

Um dos alunos (A145, concluinte, Instrumento 3) entendeu a multiplicação 2/3 . ¾ da seguinte maneira: dividiu um retângulo em três partes e tomou duas delas (2/3). Em seguida, tomou a área correspondente aos 2/3 como um novo todo e dividiu-a em quatro partes, tomando três delas, gerando assim a fração correspondente a ¾ de 2/3.

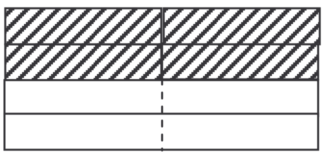
  ¾ de 2/3 → 

Na realidade, em vez de mostrar a operação 2/3 . ¾, o aluno indicou a operação 3/4 . 2/3. Como a multiplicação é comutativa em Q, não há nenhum problema nesse procedimento. Há que observar, contudo, que, embora conduza à mesma resposta, as representações têm configurações diferentes. A representação geométrica para 2/3 de 3/4 poderia ser pensada da seguinte maneira:

a) Primeiro, faz-se a representação da fração 3/4 em um todo/unidade qualquer, por exemplo, um retângulo:

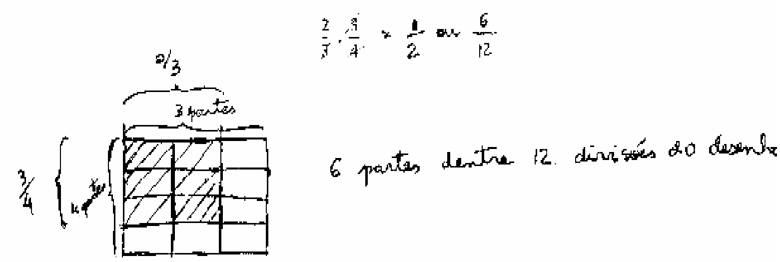


b) A seguir, toma-se como um novo todo/unidade a área hachurada correspondente aos ¾ do todo original e determinam-se 2/3 dessa área. Se as frações forem próprias, como é o nosso caso, o produto resulta como parte de uma parte do todo.



A fração correspondente ao produto é igual a 4/8 do todo original ou, ainda, 1/2.

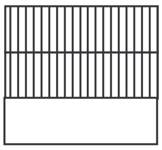
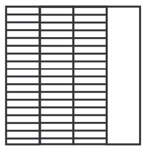
Os outros cinco alunos que acertaram a questão valeram-se uma idéia bastante interessante que permite uma visualização rápida e simples da multiplicação. Vejamos a solução apresentada pelo aluno (A168, concluinte, Instrumento 3), representativa desta categoria:



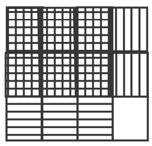
Este tipo de representação pode ser conseguida da seguinte forma:

a) Primeiro, faz-se o desenho de dois retângulos idênticos. Podem-se utilizar outras formas geométricas, porém com o retângulo a representação torna-se mais simples e fácil.

b) A seguir, faz-se a representação das frações dadas em cada um deles, com traços verticais em uma das representações e traços horizontais na outra.

2/3  3/4 

b) Sobrepõem-se as figuras. A fração correspondente ao produto é a intersecção das áreas hachuradas das duas figuras.

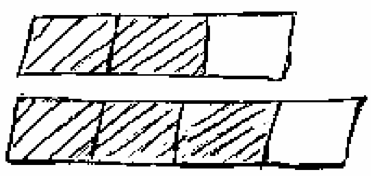
2/3 . ¾ = 6/12 = 1/2 → 

3.2.2.1 A natureza das concepções errôneas

Os demais alunos que tentaram uma explicação para a questão apresentaram soluções erradas e bastante precárias. De forma geral, limitavam-se à representação parte-todo das frações dadas, muitas delas formadas por “todos” de tamanhos ou formas diferentes. O algoritmo da multiplicação acompanhava muita destas representações. Destacaremos a seguir algumas concepções errôneas com o objetivo de apresentar uma visão global das tentativas de soluções apresentadas, bem como as características dos erros mais comuns cometidos pelos alunos.

a) Expuseram apenas representações geométricas precárias

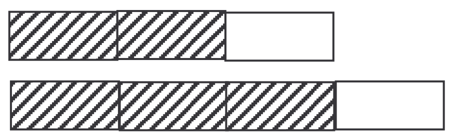
44 alunos iniciantes (23,3%) e 40 concluintes (29,6%) expuseram apenas representações geométricas utilizando o subconstruto parte-todo, como a apresentação do aluno (A253, concluinte, Instrumento 3):



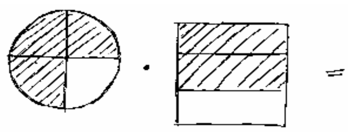
Durante a entrevista o aluno justifica:

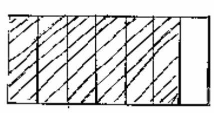
Pesq.: Tá. Nesta questão era pra fazer a multiplicação. Você também... eh... sentiu dificuldades aqui? [o aluno já tinha apresentado dificuldades com a adição]
A253: Senti. Pra mim explicar como fazer isso...
Pesq.: Agora, pra fazer a continha, você sabe fazer numa boa?
A253: Eh... resolver isso aqui? (aponta para a operação 2/3 . ¾) Não. Beleza! [...] Agora, pra mim explicar, assim, fica meio complicado.

Anteriormente, salientamos várias situações que apresentavam sérios problemas com as representações expostas pelos alunos que envolviam o subconstruto parte-todo. Uma delas dizia respeito à forma como concebiam os todos ou unidades. Constatamos um erro bastante comum que está na origem dos problemas, já citados, em relação ao dimensionamento da unidade. O aluno A253, como outros apontados anteriormente, padroniza o tamanho das partes e, a partir daí, constitui o "todo". Este tipo de procedimento leva o aluno a apresentar unidades de tamanhos diferentes, comprometendo a padronização da medida. Para ilustrar, o tipo de representação mais comum para as frações 2/3 e 3/4 utilizada pelos alunos foi:



Alguns alunos tentaram mostrar a seqüência toda da operação, como é o caso do aluno (A312, concluinte, Instrumento 3):

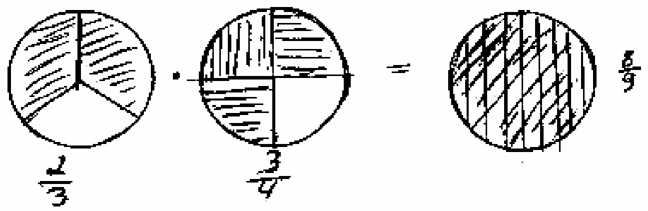




Neste caso, não se trata apenas de utilização de todos/unidades retangulares com tamanhos diferentes, mas sim de uma miscelânea de formas que distorcem absolutamente o significado geométrico da operação.

b) Apresentaram representações corretas das frações dadas, porém erraram as conclusões

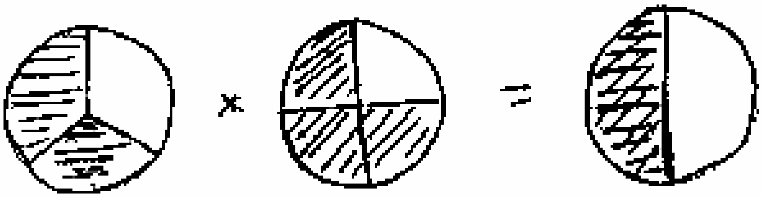
Solução apresentada pelo aluno (A385, iniciante, Instrumento 3):



Neste caso, não foi a representação parte-todo das frações dadas a gênese do erro. A interpretação utilizada para o produto reforça o erro cometido na aplicação do algoritmo. Para efetuar $\frac{2}{3}.\frac{3}{4}$ o aluno "multiplica em cruz", ou seja, faz 2 . 4 = 8, para obter o numerador do produto e 3 . 3 = 9, para gerar o denominador. Supostamente o aluno utilizou este resultado para gerar a figura. Uma representação é boa quando ela "explica" por si só o conceito que pretende traduzir. Quando sabemos fazer uma boa representação, não precisamos do algoritmo para nos orientar na confecção da mesma.

Em contraposição à solução apresentada pelo aluno A385, vejamos a representação utilizada pelo aluno, também iniciante, A363:

(A363, iniciante, Instrumento 3):



Este aluno utiliza uma representação parte-todo das frações dadas muito próxima da apresentada pelo aluno A385, só que neste caso a representação do produto está correta. Se fizermos a sobreposição das duas primeiras representações e tomarmos a intersecção das partes hachuradas, chegaremos à resposta fornecida.

Isto não nos garante que o aluno não tenha efetuado o algoritmo e aproveitado a resposta para fazer a representação do produto, conclusão esta impossível, uma vez que temos escassez de informações. De qualquer forma, não fica descartada a possibilidade de que a construção de uma representação fique amparada pelo algoritmo; mais importante do que isto é ter conhecimento conceitual suficiente para explicar ambos.

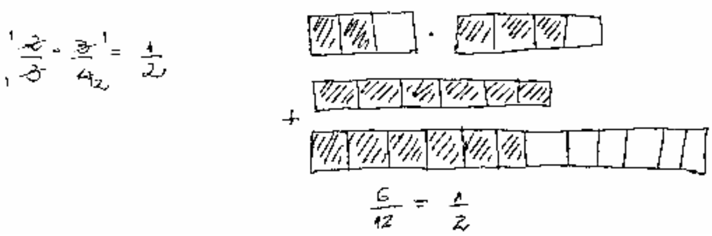
> A caracterização da relação entre a compreensão de um tópico matemático concreto e o conhecimento de diferentes modos de representação vinculados a eles é um aspecto importante no caminho que nos leva a compreender o processo de aprender a ensinar matemática. Parte do conhecimento pedagógico que os estudantes para professores começam a construir nos programas de formação, se geram vinculados ao tipo de relação que se estabelece entre a compreensão das noções matemáticas e o modo de representação empregado, é de interesse a análise dos aspectos que caracterizam esta relação (Llinares e Sánchez, 1996).

c) Novamente: o desenho como enfeite para apoiar a explicação do algoritmo

O Instrumento 3 mostra que 44 alunos iniciantes (23,3%) e 20 concluintes (14,8%) apresentaram desenhos com a representação das frações dadas; contudo, a explicação ou representação da operação foi totalmente apoiada no algoritmo da multiplicação.

Em continuidade ao que expúnhamos no item anterior, a construção de uma representação, mesmo que amparada pelo algoritmo, só é possível se o aluno tiver a compreensão matemática do conceito que está representando. Vejamos, por exemplo, a solução apresentada pelo aluno A161:

(A161, concluinte, Instrumento 3)

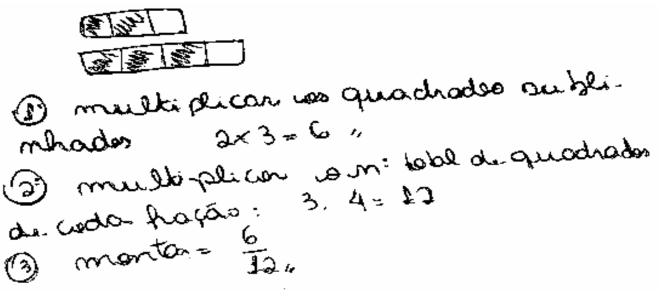


Durante a entrevista o aluno revela que chegou ao resultado “fazendo [a conta] na mão” e que sentiu muita dificuldade em encontrar uma forma de visualizar a multiplicação solicitada:

A161: Eu senti mais dificuldade [em relação à adição]. Eu acho que nem... Eu acho que nem tá certo o que eu fiz. Eu senti mais dificuldade. Tanto que eu fiz a multiplicação na mão. Eu fiz na mão a multiplicação.
Pesq.: Deu... na tua conta você encontrou o meio e...
A161: É.
Pesq.: ... e você quando foi tentar fazer aqui [mostra o desenho] não... não achou alguma forma?
A161: Não achava. Tive muita dificuldade pra visualizar (A161, concluinte, Instrumento 4).

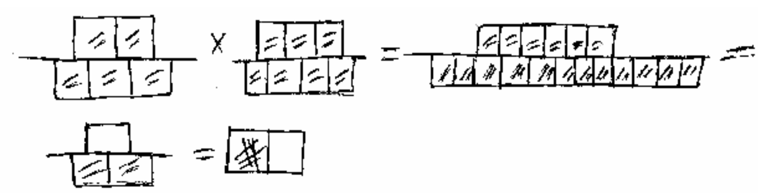
Como já pontuado na análise da adição, a utilização de representações como enfeite para aplicação ou explicação do algoritmo foi bastante freqüente também no caso da multiplicação, como pôde ser evidenciado pelos percentuais de ocorrência deste tipo de procedimento. Uma situação característica desta categoria pode ser exemplificada com a solução apresentada pelo aluno A384:

(A384, iniciante, Instrumento 3)



O aluno utiliza os desenhos apenas como suporte para desenvolver os passos do algoritmo. Nesta mesma linha, uma situação curiosa foi apresentada aluno A364:

(A364, iniciante, Instrumento 3)



Ele substitui os numeradores e denominadores das frações por quadrados, aplica o algoritmo da multiplicação, só que, em vez de utilizar os numerais das frações, emprega os seus correspondentes em número de quadrados. Este é mais um exemplo de forma indevida de uso de sistemas de representação. O perigo inerente a este tipo de procedimento já foi comentado anteriormente.

3.2.3 A compreensão da divisão de frações

A extensão da compreensão dos alunos em relação à operação de divisão de frações foi avaliada por intermédio de três questões constantes do Instrumento 3, que tinham por objetivo verificar, de forma integrada, o conhecimento matemático e o PCK dos alunos sobre este assunto. As vertentes escolhidas para análise destes fatores podem ser resumidas da seguinte forma:

- **Significado do quociente e sua relação com o dividendo**. Uma das questões, composta por dois itens, procura avaliar o conhecimento conceitual sobre o significado do quociente em uma divisão envolvendo fração e também sua relação com o dividendo.
- **Interpretação geométrica da divisão de frações.** Procuramos avaliar elementos do PCK, particularmente o conhecimento de formas diversificadas de representação geométrica da operação de divisão de frações.
- **Simulação de situação comum de sala de aula.** Mais uma vez procuramos verificar o conhecimento matemático por intermédio da análise das respostas dos alunos relativamente a uma simulação de situação comum de sala de aula. Os alunos foram solicitados a dar um parecer sobre um procedimento algorítmico efetuado por um aluno fictício do Ensino Fundamental.

Os dados utilizados para análise foram extraídos de duas fontes de dados: os Instrumentos 3 e 4.

3.2.3.1 O significado do quociente e sua relação com o dividendo

A seguinte questão, constante do Instrumento 3, foi proposta para todos os alunos:

> Ao dividirmos 2 por ½, encontramos como resposta 4.
> a) Explique o que significa o resultado 4.
> b) Por que o resultado (4) deu maior que o dividendo.

A tabela abaixo resume os dados coletados por intermédio do Instrumento 3, em relação aos itens *a* e *b* da questão acima.

Tabela 13: Significado do quociente e sua relação com o dividendo

Procedimentos utilizados pelos alunos	Iniciantes		Concluintes	
	Item *a*	Item *b*	Item *a*	Item *b*
Apresenta uma explicação coerente, sem apelo ao "inverte e multiplica"	47 (24,9%)	28 (14,8%)	41 (30,4%)	25 (18,5%)
Apenas aplica o algoritmo ou o utiliza para fazer a justificativa	51 (27,0%)	33 (17,5%)	29 (21,5%)	19 (14,1%)
Resposta evasiva ou errada	45 (23,8%)	59 (31,1%)	16 (11,8%)	33 (24,4%)
Não respondeu	46 (24,3%)	69 (36,5%)	49 (36,3%)	58 (42,9%)

Fonte: Instrumento 3.

3.2.3.2 A compreensão do significado do quociente

Em um curso de licenciatura em Matemática é bastante comum o uso de divisões envolvendo frações na resolução dos mais variados problemas. Trata-se de uma atividade corriqueira para um estudante de Matemática. O resumo dos dados coletados constantes da tabela nos mostra que a interpretação do significado do quociente, sem apelo algorítmico, é compreendida por 47 alunos iniciantes (24,9%) e 41 concluintes (30,4%).

Estes baixos percentuais de alunos que compreendem o significado do quociente e sua relação com o dividendo, para além do "inverte e multiplica", podem ser um indício de que estas operações são realizadas mecanicamente sem a devida reflexão sobre o significado do resultado. Uma outra hipótese a ser considerada seria a possibilidade de que estes significados não foram discutidos na Educação Básica nem durante o curso de licenciatura.

As explicações corretas manifestadas por este grupo podem ser classificadas em dois subgrupos, de acordo com o tipo de raciocínio utilizado pelos alunos, como veremos a seguir.

a) A visão partitiva da divisão

Observamos que 39 alunos iniciantes (29,6%) e 28 concluintes (20,7%) utilizaram a interpretação partitiva do quociente, no sentido dado por Silver (1986) e Ohlsson (1988), ou seja, entendem que dividir uma quantidade é separá-la em partes de tamanhos iguais. Selecionamos três citações representativas desta tendência, duas de alunos iniciante e outra de um concluinte.

> São 4 metades que somadas darão 2 (A23, iniciante, Instrumento 3).
>
> 2 = ½ + ½ + ½ + ½ então 2 : ½ = 4 (A372, iniciante, Instrumento 3).
>
> Em dois inteiros temos 4 metades, ou seja: metade + metade + metade + metade = 2 inteiros (A150, concluinte, Instrumento 3).

Nesta concepção a divisão 2 : ½ = 4 é interpretada como a quantidade 2 dividida em 4 partes de tamanhos iguais a ½. Assim, 2 : ½ $\rightarrow$ ½ + ½ + ½ + ½ ou, ainda, 2 : ½ $\rightarrow$ {½, ½, ½, ½}. Utilizando esquemas:

1/2	1/2

1/2	1/2

b) A visão quotitiva da divisão

O instrumento 3 mostra que 8 alunos iniciantes (4,2%) e 13 concluintes (9,6%) utilizaram a idéia quotitiva do quociente. Neste caso, o quociente é a resposta da seguinte questão: quantas partes de tamanho ½ cabem (ou estão contidos) em duas unidades. A idéia presente nesta situação envolve o conceito de medida, em que ½ passa a ser a unidade de medida e 2 a quantidade a ser medida.

> Que existem 4 vezes o número ½ dentro do 2 (A154, concluinte, Instrumento 3).
>
> O ½ cabe 4 vezes no número 2 (A08, iniciante, Instrumento 3).
>
> Quatro é o número de unidades de valor ½ compreendidas em uma unidade de valor 2 (A151, concluinte, Instrumento 3).

Para melhor compreensão da idéia utilizada pelo aluno A151 (último citado), vejamos sua explicação durante a entrevista:

A151: Quatro. É... pegando... pegando a parte maior, que é o dois, o quatro significa eh... quantas vezes a parte menor está contida dentro dessa maior.
Pesq.: E quem que é menor?
A151: Meio.
Pesq.: Ah... tá. Quantas vezes...
A151: Quantas vezes essa unidade meio está contida dentro da unidade dois.
Pesq.: Entendi. É isso que significa para você o quatro?
A151: Sim.

Estas explicações anteriores correspondem a uma visão simples de utilização do conceito de medida para explicar o quociente em operações deste tipo, em que os números apresentados não estavam associados a nenhuma grandeza específica. Alguns cuidados devem ser tomados quando trabalhamos com unidades de medida que dão qualidade às relações numéricas estabelecidas na operação. Vejamos algumas situações:

a) Seja a seguinte situação: ½ litro : 2 = ¼ litro. Ao dividirmos ½ litro por 2 obtemos ¼ de litro.
b) Façamos agora uma inversão na situação anterior: 2 litros : ½ = 4 litros (Há coerência nesta resposta?)
c) Consideremos agora a divisão: 2 litros : ½ litro = 4. Neste caso, o 4 significa quantos ½ litros cabem em 2 litros. Trata-se de uma situação que envolve medida.

Nosso objetivo com estas considerações é mostrar que muitas sutilezas podem estar presentes nas operações com frações e que, muitas vezes, elas não são tão evidentes. Se um professor não estiver preparado para enfrentá-las, pode ter dificuldades com a resolução de problemas que envolvem operações com números racionais em situações concretas do mundo real.

3.2.3.3 A relação entre quociente e dividendo

No que diz respeito à interpretação da relação entre quociente e dividendo (item *b*), destacamos que 3 alunos iniciantes (1,6%) e 17 concluintes (12,6%) utilizaram a mesma justificativa dada no item *a* para justificar o item *b.* Cabe salientar que, além dessas justificativas, observamos que 25 alunos iniciantes (13,2%) e 8 concluintes (5,9%) apresentaram concepções diferentes das analisadas anteriormente. Estes alunos alegaram que o quociente é maior do que o dividendo porque o divisor é uma fração menor do que 1. Vejamos algumas respostas:

> Porque estamos dividindo por um número menor que 1 (A06, iniciante, Instrumento 3).
>
> Porque dividimos um número por outro menor que a unidade (A191, concluinte, Instrumento 3).

Considerando a questão colocada para análise (2 : ½ = 4), estas justificativas são pertinentes. É importante denotar que isto é verdadeiro se o universo numérico for o conjunto dos números racionais positivos. Com efeito, se o universo englobar todos os racionais, poderemos ter situações como: - 2 : ½ = - 4. Neste caso, estamos dividindo por um número menor do que 1 e, no entanto, o quociente (-4) resultou em um valor menor do que o dividendo (-4 < -2), contradizendo a hipótese dos alunos.

3.2.3.4 Novamente o algoritmo como a "tábua da salvação"

No tocante ao item *a,* 51 alunos iniciantes (27,0%) e 29 concluintes (21,5%), e em relação ao item *b,* 33 alunos iniciantes (17,5%) e 19 concluintes (14,1%), apenas aplicaram o algoritmo ou o utilizaram para apresentar uma justificativa para a sua resposta. Um retrato das justificativas usadas pelos alunos pode ser obtido pelas citações a seguir:

> Quando dividimos fração nós multiplicamos pelo inverso (A27, iniciante, Instrumento 3).
>
> Por que ao dividirmos duas frações, nós copiamos a primeira fração e multiplicamos pelo inverso da segunda (A123, concluinte, Instrumento 3).
>
> O resultado 4 vem da troca de operação que é feita ao obtermos divisão com frações: $2 : \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 4$ [apontando para o denominador 1] troca de operação e mudança de posição do numerador com o denominador (A161, concluinte, Instrumento 3).

As justificativas do último aluno citado (A161) durante a entrevista foram as seguintes:

A161: Hum... Ah, é. Eu pensei que na... na troca de operações, que a gente sempre aprendeu pra divisão de fração, dois dividido por um meio, você inverte, muda a operação e muda o denominador e o numerador. Pensei nessa resposta que era o resultado dessa operação.

Pesq.: Tá certo. E na questão *b,* o resultado quatro deu... olha: por exemplo, eu pego dois que foi dividido por alguma coisa e deu quatro, que é maior do que o dois. Então a gente perguntava assim: por que que dá maior?

A161: Ah, eu coloquei que é ... que é efeito da multiplicação porque nós trocamos a operação de divisão pela multiplicação, o dois vezes o dois. Eu já não sei explicar de outra forma.

A entrevista deixa claro que o algoritmo é a forma que o aluno "sempre aprendeu" e que não sabe "explicar de outra forma". É mais uma evidência de que há uma falta de conhecimento conceitual em relação à divisão de frações. O baixíssimo índice de acertos observado no grupo de alunos iniciantes nos indica que a maioria deles chegou para um curso de licenciatura em Matemática sem ter este conhecimento construído. Seria importante que este fato fosse levado em consideração na idealização do currículo de formação.

3.2.3.5 A natureza das concepções errôneas

a) O quociente é maior do que o dividendo porque dividimos por uma fração

11 alunos iniciantes (5,8%) e 3 concluintes (2,2%) se valeram de justificativas semelhantes a estas:

> Devido o divisor ser uma fração a tendência é sempre que o quociente seja maior que o dividendo (A08, iniciante, Instrumento 3).
>
> Porque o divisor é uma fração (A169, concluinte, Instrumento 3).

É possível que os alunos tenham pensado em divisores constituídos por frações próprias, tendo como universo o conjunto dos números racionais positivos, conforme comentado anteriormente. Enfim, conforme colocado, as respostas não procedem, uma vez que poderemos ter situações, tais como: 3 : 3/2 = 2. Neste caso, o divisor é uma fração e, no entanto, o quociente deu um valor menor do que o dividendo.

b) O quociente é maior do que o dividendo porque o numerador é menor do que o denominador

5 alunos iniciantes (2,6%) e 4 concluintes (3,0%) disseram que é porque o numerador é menor do que o denominador ou porque o divisor é menor do que o dividendo, conforme citações:

> Porque o numerador é menor que o denominador (A322, iniciante, Instrumento 3).
>
> Porque o divisor é menor que o dividendo (A159, concluinte, Instrumento 3).

Em ambas as situações os alunos apresentam concepções equivocadas em relação à operação. No primeiro caso (A322), a interpretação causa dúvidas, uma vez que a frase muito resumida não deixa claro o real pensamento do aluno. No segundo caso (A159), a idéia ficou clara, contudo, não procede. Imaginemos a divisão: 5 : 5/3 = 3. Neste caso, o divisor é menor que o dividendo e, no entanto, o quociente é menor do que o dividendo, contradizendo a hipótese dos alunos.

c) Dividir "ao meio" como sinônimo de dividir "por meio"

Foi bastante comum nas justificativas apresentadas pelos alunos a utilização da expressão dividir "ao meio" como sinônimo dividir "por meio". Vejamos dois exemplos característicos desta situação:

> Se eu tiver 2 quadrados e dividi-los ao meio terei 4 metades, 2 quadrados divididos por ½ é igual a 4 (A58, iniciante, Instrumento 3).
>
> Temos 2 inteiros e dividimos ao meio ficaremos com 4. Pois, se dividirmos 2 inteiros por meio ficaremos com 4 partes (A143, concluinte, Instrumento 3).

A constituição da unidade é uma questão fundamental para se trabalhar corretamente com números racionais. Com o objetivo de dar uma fundamentação teórica para esta questão, Behr, Harel, Post e Lesh (1992) desenvolveram um sofisticado sistema de interpretação e utilização das unidades no contexto dos números racionais. A título de ilustração, a operação 2 : ½ = 4, colocada nos termos notacionais propostos por estes autores, ficaria da seguinte forma:

2 : ½ =

= 2 (1 - unidade) : 1 (½ - unidade)

= 4 (½ - unidade) : 1 (½ - unidade)

$$= \frac{4(1/2 - unidade)}{1(1/2 - unidade)}$$

= 4

d) Uma confusão generalizada

45 alunos iniciantes (23,8%) e 16 concluintes (11,8%) apresentaram respostas erradas, confusas ou idéias em que nada contribuíam para um entendimento do valor encontrado como quociente. Da mesma forma que 59 alunos iniciantes (31,1%) e 33 concluintes (24,4%) apresentaram idéias confusas ou erradas a respeito da relação entre o quociente e o dividendo. Estes números denotam percentuais expressivos e preocupantes não só no que se refere ao desconhecimento do assunto abrangido pela questão colocada, mas também um desconhecimento acentuado sobre a Matemática elementar. Os erros observados

são de natureza muito variada e na maior parte das vezes fogem do tema central desta pesquisa. Apresentaremos, a título de exemplo, algumas destas concepções errôneas.

A resposta dada pelo aluno iniciante A03 no item *a* foi: "significa metade de um [possivelmente se referia ao divisor ½]. 2 vezes a metade de um é 4" (A03, iniciante, Instrumento 3). Esta resposta pode denotar desde um lapso de distração durante a avaliação ou, até mesmo, um sério problema relacionado com a Matemática elementar.

No sentido de justificar o quociente da operação 2 : ½ = 4, um aluno diz: "porque o 2 já era a metade de um determinado objeto, ou seja, uma pizza" (A123, concluinte, Instrumento 3). Neste caso, não foi possível extrair conclusões precisas sobre o pensamento do aluno.

Algumas respostas em nada contribuíam para o entendimento do significado do quociente, por exemplo: "o resultado 4 que podemos fazer para um determinado objeto" (A122, concluinte, Instrumento 3); ou, ainda, frases que denotam desconhecimento do fato de que ½ não é um número inteiro, como mostra a seguinte justificativa apresentada por um aluno concluinte: "porque dividimos dois inteiros" (A331, concluinte, Instrumento 3).

Observamos que a natureza de uma grande quantidade de erros cometidos pelos alunos está atrelada a uma extensão indevida das propriedades pertinentes aos números inteiros para os números racionais. Na aritmética dos números naturais a multiplicação está diretamente associada com a idéia de aumento, pois podemos pensá-la como uma soma de parcelas iguais, enquanto na divisão a idéia presente é a de diminuição, pelo fato de esta operação poder ser pensada como subtração de parcelas iguais. Quando estas operações são realizadas no âmbito do conjunto dos números racionais, seus significados devem ser repensados, pois nem sempre podem ser entendidos como uma extensão direta do que ocorre no conjunto dos números naturais. Com a ampliação dos números naturais e inteiros, proporcionada pelos racionais, uma classe imensa de problemas passa a ter soluções que, em grande parte, envolvem contextos e procedimentos de resolução que são diferentes dos envolvidos na aritmética dos números naturais e inteiros.

3.2.3.6 Interpretação geométrica da divisão

Atendendo aos mesmos critérios utilizados no caso da adição e multiplicação, propusemos a seguinte questão para todos os alunos:

Explique a operação 3/4 : 1/8 utilizando barras de chocolate.

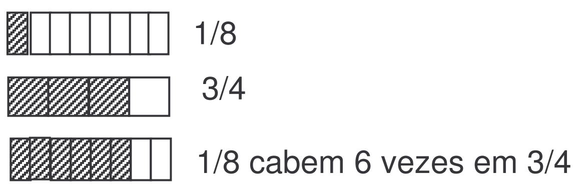
O objetivo desta questão era verificar se os alunos conheciam alguma forma de representação geométrica da divisão de frações. Como fizemos nos casos anteriores, alertamos os alunos para o fato de que eles poderiam utilizar qualquer forma geométrica de representação. Os dados coletados no Instrumento 3 estão resumidos na tabela a seguir:

Tabela 14: Interpretação geométrica da operação de divisão de frações

Procedimento utilizado pelo aluno	Iniciantes	Concluintes
Apresentaram solução correta	06 (3,2%)	06 (4,4%)
Apresentaram representações parte-todo das frações dadas e aplicaram o algoritmo	75 (39,7%)	52 (38,5%)
Apresentaram desenhos e/ou explicações confusas ou erradas	31 (16,4%)	20 (14,8%)
Não responderam	77 (40,7%)	57 (42,2%)

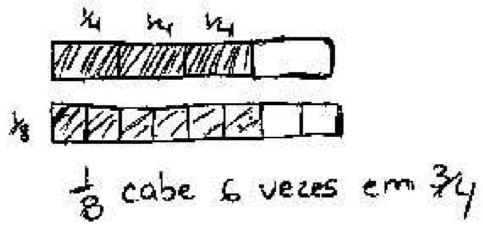
Fonte: Instrumento 3.

Diferentemente das operações de adição, subtração e multiplicação, as formas de interpretação geométrica para a divisão de frações nem sempre se constituem em uma tarefa fácil. Por este motivo, escolhemos uma situação simples, ou seja: ¾ : 1/8. Com base na visão quotitiva da divisão, poderíamos interpretar esta operação como a busca pela resposta a seguinte questão: quantas vezes 1/8 cabem em ¾?

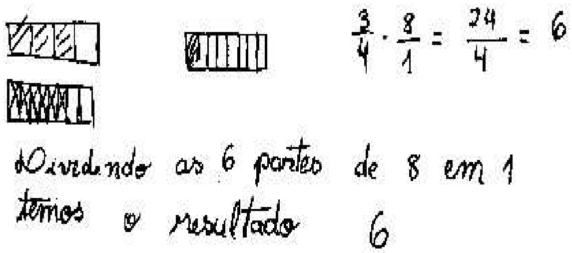


Por intermédio do Instrumento 3 constatamos que 6 alunos iniciantes (3,2%) e 6 concluintes (4,4%) apresentaram uma representação geométrica correta da operação. Como exemplo, vejamos uma solução apresentada por um aluno iniciante e outra por um aluno concluinte:

Solução apresentada pelo aluno A319, iniciante, Instrumento 3:



Solução apresentada pelo aluno A160, concluinte, Instrumento 3:



O aluno apresenta uma construção conjunta: representação geométrica e resolução do algoritmo. Durante a entrevista o aluno explica o raciocínio por ele utilizado durante a resolução desta situação:

Pesq.: [...] Na divisão você conseguiu explicar?
A160: Tive alguma dificuldade, mas eu consegui.
Pesq.: Hum.
A160: É mais fácil a soma. Não sei por que, mas a soma ficou fácil de mostrar. Agora, a multiplicação e divisão... foi difícil mostrar com os desenhos. Mas o que eu tentei fazer aí? São três partes de quatro [mostra a figura representativa da fração ¾]. Então desenhei.
Pesq.: Tá.
A160: Fiz, na barra de chocolate, três partes de quatro. Eu tenho que dividir essas três partes em uma parte de oito, né? Em um oitavo. Eu peguei, dividi essas três partes e dividi também em oito partes e eu consegui representar um desenho que cabiam seis dentro daquela uma parte das oito. Exatamente tinham seis iguais.

O procedimento utilizado pelos dois alunos é análogo ao adotado por nós para exemplificar uma forma de solução para a situação-problema.

3.2.3.7 As marcas do insucesso

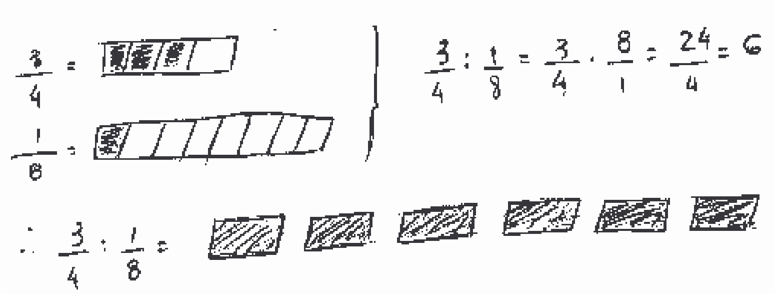
106 alunos iniciantes (56,1%) e 72 concluintes (53,3%) apresentaram apenas tentativas de solução. Estas tentativas envolviam a representação das frações dadas utilizando o subconstruto parte-todo. Na imensa maioria das vezes os alunos usaram unidades de tamanhos diferentes e, muito freqüentemente, estas representações vinham acompanhadas da aplicação do algoritmo da divisão. Se acrescentarmos aos índices anteriores os percentuais dos alunos que deixaram a

questão em branco, observamos que 183 alunos iniciantes (96,8%) e 129 concluintes (95,5%) não apresentaram convincentemente formas de representação geométrica da divisão solicitada. A interpretação e representação geométrica da divisão se configuraram como a situação-problema que revelou maior dificuldade para os alunos.

Os problemas detectados em relação à constituição da unidade já foram reiteradas vezes salientados.

Vejamos alguns exemplos que ilustram estas situações:

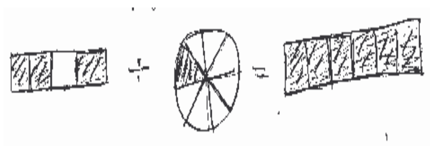
Solução apresentada pelo aluno iniciante A18:



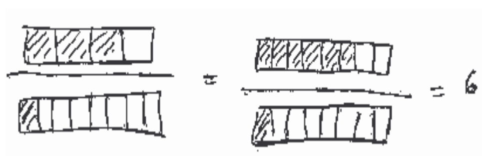
Além de empregar unidades contínuas de tamanhos diferentes para a representação das frações dadas, a resposta é apresentada utilizando-se um conjunto discreto. Trata-se da discretização do contínuo.

Já as representações usadas pelos alunos concluintes A174 e A136, ambos concluintes, mostram uma mistura de formas de representações, como é o caso do aluno A174, e uma substituição indevida dos numerais por suas representações parte-todo, na constituição da divisão $\frac{3/4}{1/8}=\frac{6/8}{1/8}=6$, como apresentado pelo aluno A136:

(A174, concluinte, Instrumento 3):



(A136, concluinte, Instrumento 3):



Os contextos utilizados nas representações devem ser frutíferos e têm que equilibrar respeito e integridade pela teoria matemática, servindo como uma âncora para o desenvolvimento de ferramentas e modos de argumentar, ampliando as idéias matemáticas dos estudantes (Ball, 1993).

Conhecer diversas formas de abordagem de um mesmo conteúdo matemático pode ser importante para o professor não só no momento de preparar atividades de ensino, como também no instante de aplicá-las. Esta flexibilidade é um componente essencial do PCK. Um professor com um conhecimento limitado sobre formas de representação das operações com frações pode não se sentir à vontade para transitar por alternativas didáticas diferentes das possibilitadas pelas aplicações dos algoritmos tradicionais. Por outro lado, nossa investigação tem nos levado à constatação de que uma compreensão inadequada do conceito impede a criação de uma representação coerente. Para se ter uma representação pedagogicamente poderosa relativamente a um tópico, o professor precisa ter primeiro uma compreensão conceitual ampla do conceito a ser representado.

A divisão de frações é considerada freqüentemente o mais mecânico dos tópicos ensinados no Ensino Fundamental (Payne, 1976). As pesquisas indicam que a taxa de sucesso das crianças em várias tarefas relacionadas com a divisão de frações normalmente é muito baixa (Carpenter et al., 1980). Em contrapartida, a pesquisa realizada por Ball (1990b), sobre os conhecimentos matemáticos de professores em formação, mostra que eles têm uma compreensão limitada sobre a divisão de frações. Parece que estamos sob a forte influência de um ciclo vicioso, professores com baixo entendimento conceitual sobre divisão de frações, educando alunos que apresentam dificuldades no assunto, mesmo depois de terminada a escolaridade básica.

A pesquisa por nós realizada, embora ataque o problema por algumas perspectivas diferentes das enfrentadas por Ball (1990b), revela resultados semelhantes. Mais uma vez, constatamos que o baixo conhecimento conceitual apresentado pelos alunos em nossas avaliações denuncia uma possível negligência no que concerne ao enfrentamento destas dificuldades durante o processo de formação. Acreditamos que a preparação dos professores para encararem dificuldades relativas ao ensino-aprendizagem dos números racionais não se constitui em barreira intransponível, é preciso, contudo, que discussões como estas façam parte da agenda de reflexão dos elaboradores de currículos. Estas reflexões devem ter como conseqüência mudanças estruturais nos cursos de formação, no sentido de propiciar aos estudantes para professores a oportunidade de enfrentamento e discussão das dificuldades aqui abordadas sobre o conhecimento matemático e PCK envolvido na divisão de frações.

3.2.3.8 O conhecimento sintático da divisão de frações

Se pensarmos no processo ensino-aprendizagem por uma perspectiva construtivista, o papel de um professor vai muito além do "dar aula", no sentido de ser um transmissor de conhecimentos elaborados. Orientar a aprendizagem dos alunos em atividades que compreendem, por exemplo, investigação ou resolução de situações-problema exige do professor conhecimento da matéria suficiente para, no momento oportuno, levantar questões desequilibrantes em relação a alguma afirmação feita por um de seus alunos ou emitir um veredicto sobre a aplicação de algum procedimento matemático realizado pelos alunos. As situações em que o professor se vê envolvido em uma aula deste tipo nem sempre são corriqueiras, muitas delas aparecem de forma inédita para o professor e exige dele habilidade e conhecimento para analisá-las caso a caso. Resumidamente, nesta perspectiva de ensino, é importante que o professor esteja preparado para tomar decisões matematicamente fundamentadas, uma vez que ele é visto como um especialista e sua palavra tem a força e o peso científico da academia por ele representada naquele momento. Em outras palavras, situações como estas exigem do professor conhecimento sintático sobre a matéria de ensino.

A análise dos dados coletados nas duas questões anteriores revelou a forte influência exercida pelo algoritmo tradicional da divisão (conserva a primeira fração e multiplica pelo inverso da segunda) na maioria das tentativas de explicação e representação manifestadas pelos alunos. Mas o que acontece se o algoritmo tradicional for mudado?

A próxima questão tem o objetivo de avaliar justamente a extensão do conhecimento sintático dos futuros professores quando eles são submetidos a uma variação do algoritmo tradicional da divisão de frações. Procuramos contextualizar este problema em uma simulação de uma situação comum de sala de aula.

Um aluno fez a divisão de frações utilizando a seguinte regra $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a:c}{b:d}$.
Comente este procedimento.

Durante a aplicação do Instrumento 3, particularmente nesta questão, solicitamos aos alunos que se colocassem na posição de professores e que avaliassem o procedimento utilizado por um de seus alunos para efetuar a divisão de frações. Para a realização da divisão, o aluno dividiu o numerador da primeira fração pelo numerador da segunda e, posteriormente, dividiu o denominador da primeira fração pelo denominador da segunda, conforme apresentado genericamente na questão. Para além de dizer se o procedimento estava certo ou errado, pedimos aos futuros professores que justificassem o melhor possível sua resposta.

O algoritmo apresentado na questão corresponde a uma correta alteração do algoritmo tradicionalmente utilizado na divisão de frações, conforme pode ser evidenciado pela justificativa a seguir:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a:c}{b:d}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}}=\frac{\frac{a}{c}.\frac{d}{b}}{\frac{b}{d}.\frac{d}{b}}=\frac{\frac{a}{c}.\frac{d}{b}}{1}=\frac{a}{c}.\frac{d}{b}=\frac{a.d}{c.b}=\frac{a.d}{b.c}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}$$

(é equivalente ao algoritmo tradicional)

As respostas e justificativas dos licenciandos, coletadas por intermédio do Instrumento 3, é apresentada resumidamente na tabela a seguir:

Tabela 15: Alteração do algoritmo da divisão

Procedimento utilizado pelo aluno	Iniciantes	Concluintes
Diz que o procedimento está correto e apresenta uma justificativa numérica ou uma justificativa algébrica apoiada no algoritmo tradicional	06 (3,2%)	04 (3,0%)
Diz que o procedimento está correto, mas não justifica, ou apresenta justificativa contendo erros nas operações	09 (4,8%)	08 (5,9%)
Diz que o procedimento está errado. Justifica dizendo que o aluno confundiu a regra da divisão de frações	66 (34,9%)	42 (31,1%)
Resposta evasiva ou que não explica nada de coerente	23 (12,2%)	08 (5,9%)
Não respondeu	85 (45,0%)	73 (54,1%)

Fonte: Instrumento 3.

3.2.3.9 Um retrato do baixo poder de argumentação matemática

Constatamos que 6 alunos iniciantes (3,2%) e 4 concluintes (3,0%) disseram que o procedimento estava correto e apresentaram alguma justificativa, mesmo que frágil do ponto de vista algébrico.

Entre as justificativas apresentadas, destacamos dois casos distintos. Um deles, o de menor freqüência (2 alunos iniciantes e 2 concluintes), consiste na busca uma demonstração algébrica para defender que o procedimento está correto, como é o caso apresentado por estes alunos:

> Pode-se identificar que ao dividirmos passo a passo $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ (I). Toda fração dividida por outra na mesma posição em que se encontram por isso podemos dizer $\frac{a:c}{b:d}$ = $\frac{a}{b}$: $\frac{c}{d}$, pois $\frac{a}{c} \div \frac{b}{d} = \frac{a}{c}.\frac{d}{b} = \frac{ad}{cb}$ igualmente à primeira (I) (A44, iniciante, Instrumento 3).
>
> Está correta, pois $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$ → $\frac{1:1}{2:3}$ = $\frac{1}{\frac{2}{3}}$ = 1. 3/2 = 3/2.
>
> a/b : c/d = a/b . d/c = ad/bc
>
> $\frac{a:c}{b:d}$ = $\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}}$ = $\frac{a}{c}.\frac{d}{b} = \frac{ad}{cb} = \frac{ad}{bc}$ (A160, concluinte, Instrumento 3).

Durante a entrevista o aluno A160 explica o seu procedimento:

> Eu coloquei que estava correto. Primeiro, representei com números. Fiz o cálculo com números da maneira como ele tinha feito e a resposta bate com o cálculo que a gente utiliza, o convencional, o outro. E aí eu fiz a demonstração também com a álgebra e também bate, então, tá correto (A160, concluinte, Instrumento 4).

Observa-se que para demonstrar que o algoritmo alternativo estava correto os alunos utilizaram como corolário o algoritmo tradicional. Nenhum aluno apresentou uma demonstração em que não figurasse o algoritmo tradicional da divisão no seu desenvolvimento.

Um outro tipo de justificativa foi apresentada por 4 alunos iniciantes e 2 concluintes. A forma adotada para justificar que o procedimento estava correto consistia em fazer uma verificação numérica local, como a solução apresentada pelos dois alunos a seguir:

> O procedimento foi correto, pois se substituirmos as letras por nome teremos:
>
> $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{1 \div 3}{2 \div 4} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{4}}$ → $\frac{1}{3}.\frac{4}{2} = \frac{4}{6} = \frac{1}{2}$. De outra maneira teremos $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{1.4}{2.3} = \frac{4}{6} = \frac{1}{2}$ (A85, iniciante, Instrumento 3).

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d} \qquad \frac{2}{3} \div \frac{4}{6} = \frac{2 \div 4}{3 \div 6} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} . \frac{2}{1} = 1$$

$\frac{2}{3} . \frac{6}{4} = 1$ (A181, concluinte, Instrumento 3).

Estas justificativas apenas mostram que o algoritmo alternativo é equivalente ao algoritmo tradicional para os números utilizados. Trata-se de uma verificação local. Não é aceitável, contudo, para se afirmar generalizadamente que se trata de um procedimento correto.

Os baixos percentuais de alunos que justificaram a validade do algoritmo apresentado, aliado aos que disseram que o procedimento estava correto, sem, contudo, apresentar alguma justificativa coerente, nos mostram um quadro de fragilidade em relação ao poder de argumentação matemática dos alunos, tanto iniciantes como concluintes. A carga horária das duas universidades pesquisadas privilegia significativamente as disciplinas relacionadas à Matemática Pura e Aplicada. Supostamente, todos os conteúdos construídos por estas disciplinas deveriam ter dotado os alunos concluintes de uma estrutura de pensamento lógico-dedutiva, que é inerente a estas disciplinas, principalmente no que se refere à demonstração da validade ou refutação de proposições matemáticas simples, como a apresentada. Quando comparamos os percentuais dos alunos que estavam iniciando o curso com os que estavam saindo, em relação aos procedimentos dos dois primeiros itens relacionados na tabela anterior, percebemos que a diferença, em termos de pontos percentuais também é muito pequena. Estes dados mostram que alunos iniciantes e concluintes estão bastante próximos em relação à habilidade de se utilizar dos seus conhecimentos matemáticos para demonstrar proposições simples concernentes à divisão de frações. Resta então a seguinte indagação: qual foi a contribuição das diferentes disciplinas da Matemática Pura na preparação matemática dos futuros professores para este tipo de tarefa?

Acreditamos que é fundamental para nossos estudantes para professores, saber julgar se um determinado procedimento é correto ou não, utilizando-se de cadeias de argumentos matematicamente bem construídos; saber modos alternativos de se chegar à solução de um problema e poder julgar qual modo é mais razoável; saber buscar soluções simples para problemas complexos; saber utilizar com elegância a linguagem matemática etc. Todos estes elementos, entre outros tão essenciais quantos estes, parecem fazer parte dos padrões estéticos da comunidade matemática e, portanto, seria importante que eles fossem cultivados e desenvolvidos nos estudantes para professores durante o processo de formação.

3.2.3.10 A conseqüência: uma visão sincrética[6] da Matemática

66 alunos iniciantes (34,9%) e 42 concluintes (31,1%) argumentaram que o procedimento utilizado pelo aluno estava errado. Na imensa maioria das vezes os licenciandos se justificaram dizendo que o aluno confundiu o algoritmo da divisão com o da multiplicação, como pode ser observado pelos três excertos a seguir:

> Está errado, pois ele teria que fazer a inversão da segunda fração para obter o resultado correto e não simplesmente dividir membro a membro, denominador c/ denominador e numerador com numerador (A2, iniciante, Instrumento 3).
>
> $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$. O aluno fez direto, confundiu divisão com multiplicação (A246, concluinte, Instrumento 3).
>
> ---
>
> Provavelmente ele tenha confundido a representação e uma boa forma de ajudá-lo a não cometer mais este tipo de erro seja lhe apresentar e explicar a divisão no formato $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ (A151, concluinte, Instrumento 3).

Durante a entrevista, este último aluno citado explica com mais detalhes o seu pensamento:

A151: Não. Está errado.
Pesq.: Por que que ele tá errado?
A151: Porque o procedimento seria ele ter, assim, uma fração e inverter a posição: numerador com denominador. É... ou, então,... É, na verdade é isso mesmo, ele tem que fazer, o numerador do primeiro com o denominador do segundo e o denominador do segundo com o numerador do primeiro. É... o que eu tentei explicar aqui. Foi que talvez ele tenha se confundido com a multiplicação. Corre o risco de você pegar numerador com numerador, denominador com denominador. Talvez ele tenha na hora, a primeira coisa que veio na cabeça foi que com a divisão ocorresse o mesmo ou então ele, como muitas vezes é trabalhado aquela teoria, assim, de... é... mantenha-se a primeira fração e inverte a segunda, na hora ele esqueceu essa história de inverter e apenas fez ali a multiplicação direta. Aí eu tentei explicar assim: talvez tenha faltado, ao invés de... Quando eu não consegui enxergar o porquê de manter a primeira e inverter a segunda, a professora adotou esse sistema comigo: colocar uma fração sobre a outra e a multiplicar os extremos e os meios. Entendeu? Foi o que me ajudou a enxergar de onde é que saía a divisão (A151, concluinte, Instrumento 4).

[6] “Visão sincrética” está sendo utilizada com o sentido filosófico; ou seja, visão de conjunto confusa ou distorcida de um todo complexo.

Mais uma vez observamos a fixação nos algoritmos tradicionais e um baixo poder de mobilidade por situações que fogem dos caminhos traçados pela regra básica. A idéia subjacente ao posicionamento do aluno é a de que entender uma operação matemática significa compreender os passos determinados pela regra de resolução associada à operação:

> Quando eu não consegui enxergar o porquê de manter a primeira e inverter a segunda, a professora adotou esse sistema comigo: colocar uma fração sobre a outra e a multiplicar os extremos e os meios. Entendeu? Foi o que me ajudou a enxergar de onde é que saía a divisão.

A importância é colocada mais na busca de artifícios que ajudem a memorizar a regra do que na busca da compreensão conceitual envolvida na regra.

3.3 Unidade de análise 3: os números racionais na formação universitária

Nesta unidade de análise investigaremos a dimensão da contribuição da formação universitária na preparação dos futuros professores para o ensino dos números racionais no Ensino Fundamental. Esta avaliação é precedida por um breve exame da contribuição da Educação Básica na constituição de uma base de conhecimentos prévios com os quais os alunos iniciam sua formação acadêmica.

Por intermédio do relato dos professores e alunos concluintes procuramos constituir um quadro compreensivo da extensão e forma como os números racionais são introduzidos nos diferentes componentes curriculares que compõem a matriz curricular dos cursos de licenciatura pesquisados. Partimos do pressuposto de que as concepções e crenças dos professores sobre a Matemática têm uma influência bastante grande no enfoque didático com o qual aborda o ensino de um conceito ou podem desempenhar um papel filtro no que se refere a inovações e desenvolvimentos curriculares.

O interesse pelo estudo das concepções e crenças dos professores, segundo Ponte (1992),

> baseia-se no pressuposto de que existe um substrato conceitual que joga um papel determinante no pensamento e na ação. Este substrato é duma natureza diferente dos conceitos específicos – não diz respeito a objetos ou ações bem determinadas, mas antes constitui uma forma de os organizar, de ver o mundo, de pensar. [...] As concepções têm uma natureza essencialmente cognitiva (p. 187).

As crenças, por sua vez, referem-se a verdades pessoais derivadas da experiência ou da fantasia que possui uma forte componente afetiva (Ponte, 1994). O sentido que daremos ao termo “concepções” mescla estes dois conceitos. Para nós, as concepções serão interpretadas como o conjunto de crenças e posicionamentos dos formadores de professores relatados durante uma sessão de entrevista, em que estes atores emitiram suas opiniões sobre diferentes questões levantadas pelo pesquisador, como: sobre a descrição da sua prática em relação ao tratamento dado aos números racionais em suas aulas; seu posicionamento a respeito das necessidades formativas dos alunos do Ensino Fundamental sobre os racionais; sua interpretação sobre a qualidade da formação dos seus alunos etc.

Os estudantes para professores, suas crenças e convicções, também exercem uma influência bastante grande no resultado final do processo de formação. Por conseguinte, pesquisas relativas às convicções dos futuros professores de Matemática e seu conhecimento para o ensino proveram informações importantes para o desenvolvimento de programas de formação de professores embasados nestas pesquisas (Llinares e Krainer, 2006). As concepções e crenças dos estudantes para professores também mereceram destaque nesta investigação. Por intermédio das entrevistas com os alunos concluintes procuramos captar: a descrição da forma como os números racionais apareceram nas diferentes disciplinas, possibilitando realizar uma triangulação destes dados com os obtidos com as entrevistas com os professores; as suas maiores dificuldades no enfrentamento de problemas de ensino-aprendizagem que envolvem números racionais e uma auto-avaliação quanto a sua formação no que se refere a sua preparação para o ensino do conteúdo em tela.

3.3.1 A contribuição da Educação Básica

Uma das questões importantes a ser considerada quando se pensa no processo de formação de professores de Matemática diz respeito aos conhecimentos prévios que os alunos têm construídos ao ingressar na faculdade. A construção do conhecimento matemático no âmbito da universidade não parte do zero. Antes de chegarem à universidade, os alunos construíram conhecimentos matemáticos durante sua permanência na Educação Básica. Estes conhecimentos se constituem em uma relevante base conceitual, não só do ponto de vista do conhecimento matemático, mas também no que concerne à formação do ideário pedagógico relativo ao ensino de Matemática do futuro professor. Para Llinares e Krainer (2006), a formação dos professores de Matemática começa muito antes do ingresso do aluno na faculdade. Estas experiências anteriores têm um impacto bastante grande no processo de formação, uma vez que os professores tendem a ensinar do mesmo modo como eles foram ensinados.

A identificação dos conhecimentos prévios dos alunos como fonte de informações que permitem organizar o ensino a partir delas não é uma questão recente nas pesquisas sobre ensino-aprendizagem. Vários autores (Ausubel, Novak e Hanesian, 1983) defendem a idéia de que um dos fatores mais importantes que influenciam a aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe. Ball e McDiarmid (1990), ao se referirem à preparação dos estudantes para professores em relação à matéria de ensino, sugerem que os formadores de professores deveriam se perguntar: de todas as coisas que os professores necessitam saber, qual delas os professores em formação já sabem? Argumentam estes autores que, embora seja extensamente reconhecido que a preparação matemática do professor é um componente central do que os professores necessitam saber, a preparação em relação aos conteúdos que os professores irão ensinar é raramente um foco de reflexão em toda a fase do processo formativo. O que estamos aprendendo sobre a compreensão matemática que os professores em formação trazem para a faculdade mostra a necessidade de fazer deste tema um foco central de discussão. Um dos caminhos que poderia contribuir para uma melhor formação dos professores de Matemática da Educação Básica seria trabalhar com o que eles trazem e ajudá-los a se mover para os tipos de compreensão matemática mais necessários a fim ensinar bem esta disciplina.

No que tange especificamente ao conhecimento sobre os números racionais, apresentamos nos segmentos anteriores uma avaliação consubstanciada que revelou que os alunos iniciantes terminam a escolaridade BÁSICA com uma compreensão bastante limitada e fragmentada sobre as frações. Em contrapartida, os alunos concluintes não apresentaram uma *performance* que os diferenciassem em grande medida do que foi apresentado pelos alunos iniciantes. Muitas das limitações observadas nos alunos iniciantes também são notadas nos alunos concluintes, como confirma o aluno A348:

A348: [...] Inclusive, acho que frações é... é o mal de todo o aluno. Você já sai da... da... do nível fundamental, passa pro médio sem ter uma base forte de frações.
Pesq.: Por exemplo, se você tivesse que dar uma aula amanhã sobre frações, você eh... você ...
A348: Teria que fazer uma boa consulta. Boa mesmo. Porque essa já é uma deficiência que a gente tá trazendo desde o nível fundamental até aqui (A348, concluinte, Instrumento 4).

Logo, os conhecimentos que os alunos concluintes apresentaram nos diferentes instrumentos de avaliação por nós utilizados não passam, supostamente, de fragmentos, lembranças conceituais mal elaboradas e uma abordagem marcadamente algorítmica dos conhecimentos sobre números racionais construídos durante a Educação Básica, que pouco contribuíram para a formação do futuro professor de Matemática. A seqüência de falas apresentadas pelo aluno A161 durante a entrevista constitui em uma evidência que vai ao encontro da nossa suposição:

A161: [...] Tem muita coisa que eu não lembro. Coisas que eu acabei não vendo na faculdade, de frações, são coisas que a gente...
Pesq: Então, era essa a pergunta que eu ia te fazer: durante os quatro anos, não teve, assim, nenhuma disciplina que foi comentado, que foi falado, trabalhado essas questões [referia-se às questões do Instrumento 3] sobre frações?
A161: Não. Que eu me lembre, não. Não. Que eu me lembre nós não tivemos essa matéria... que foi relacionado a fração. Não! Foi tudo o que eu aprendi no ginásio, né.
Pesq: Quer dizer, esses pensamentos que você colocou aqui [no Instrumento 3] são basicamente os que você carregou do Ensino da Educação Básica?
A161: Isso. Do que eu lembro. Que eu carreguei anteriormente. Quando a gente não lida muito com essas coisas é difícil a gente lembrar. Acaba esquecendo, né?

Há evidências convincentes de que a maioria dos estudantes egressos da escolaridade básica não construiu significados apropriados sobre frações. Entre as razões para esta aprendizagem insuficiente destaca-se a natureza matemática das frações e o ensino deficiente. Em vários aspectos, são os itens mais amplamente mencionados (Kieren, 1989; Ohlsson, 1988). Isto se confirma em nossa investigação. Se a Educação Básica tem uma influência importante na formação do professor, no sentido proposto por Ball e McDiarmid (1990), especificamente nos limites desta pesquisa, evidenciamos que a influência positiva proporcionada pelo Ensino Fundamental e Médio aos estudantes para professores é diminuta. Estas evidências são importantes porque elas permitem pensar o currículo universitário de forma a levar em consideração estas defasagens de aprendizagens.

Em qualquer nível de escolarização, identificar os conhecimentos prévios dos alunos se constitui em importante ponto de partida da organização do ensino.

Partimos do pressuposto de que o fato de os professores em formação ainda apresentarem dificuldades com a realização de alguns cálculos envolvendo frações não se traduz no maior problema, uma vez que eles apareceram em pequena escala e em situações bem localizadas. Nossa maior preocupação reside nos problemas detectados com os aspectos conceituais do conhecimento matemático e o PCK relacionado aos números racionais, observados tanto nos alunos iniciantes quanto concluintes, que não foram solucionados durante o tempo de permanência dos estudantes para professores no Ensino Superior.

Tudo leva a crer que existe uma ruptura entre a Educação Básica e o Ensino Superior. Os conhecimentos da Educação Básica são tidos como construídos, talvez por isto não são revisitados.

3.3.2 A contribuição da formação universitária

Durante as entrevistas com os professores e alunos concluintes procuramos identificar a forma como os números racionais (ou frações) eram introduzidos nas diferentes disciplinas que compõem a matriz curricular das duas instituições e o tipo de abordagem utilizada por todos os professores entrevistados.

a) Como estrutura

Nas duas instituições pesquisadas os professores de Álgebra alegaram que os números racionais são inseridos no curso durante o estudo das estruturas algébricas, tais como corpos, anéis, equivalência e relação de ordem. Vejamos as declarações de um professor de cada instituição:

P10, Álgebra, Instituição α:
Pesq.: [...] No teu conteúdo programático, o assunto números racionais, ele está contemplado?
P10: Sim. Está. Está contemplado. É dado números racionais.
Pesq.: E o que é visto? O que você trabalha, especificamente, sobre os números racionais com os alunos?
P10: Trabalho com as propriedades do conjunto dos racionais e... anel de racionais, corpo...
Pesq.: Relação de ordem?
P10: Relação de ordem [incompreensível], relação de ordem, tal, tal, tal, tal.
Pesq.: Equivalência?
P10: Equivalência? Sim!
Pesq.: Tá. Então seria a definição, relação de ordem, equivalência, anel...
P10: Anel, corpo... (P10, Álgebra, Instituição α, Instrumento 5).

P35, Álgebra, Instituição β:
Pesq.: O estudo dos números racionais faz parte do teu programa de Álgebra?
P35: Entra em Álgebra, não estudando o conjunto dos números racionais, mas entra como exemplo pra estudar as estruturas algébricas (P35, Álgebra, Instituição β, Instrumento 5).

Pelo exposto, os professores desenvolvem a teoria relacionada à construção do corpo ordenado dos racionais. Avaliando as entrevistas com todos os professores de Álgebra das duas instituições, verificamos que eles desenvolvem os conceitos de anel, corpo etc. e utilizam os conjuntos numéricos (naturais inteiros, racionais irracionais e reais) como exemplos para verificação se eles se constituem em anel corpo etc. ou não. Esta forma de inserção dos números racionais na disciplina Álgebra é confirmada pelo aluno A151 que sintetiza bem a posição dos demais alunos concluintes entrevistados:

> [...] Olha, eu me lembro de ter visto os números racionais, mas não por esse... olhando por esse lado [referia-se as questões do Instrumento 3], mas sim olhando como estrutura. Eu lembro de ter visto em Álgebra, olhando... quando a gente estudava anel de integridade, corpo. Naquele momento, sim, a gente trabalhou com números racionais, os inteiros. Mas, é... numa outra matéria eu não me lembro não (A151, concluinte, Instrumento 4,Instituição α).

Embora estas estruturas tenham sido estudas nos dois cursos pesquisados, questionamos o alcance de sua contribuição. No Instrumento 3 propusemos a seguinte questão: Dizemos que o conjunto dos números racionais possui uma estrutura de corpo. O que isto quer dizer? A análise das respostas mostrou que apenas três alunos concluintes (2,2%) apresentaram uma resposta aceitável. Dezoito alunos concluintes (13,3%) apresentaram idéias incompletas e os demais (84,5%) alegaram que não sabiam ou não responderam a questão.

Por intermédio da entrevista com o professor de Análise Matemática da Instituição α, constatamos que os números racionais são abordados no momento em que são estudados os números reais. Os números racionais são utilizados para se fazer um contraponto entre as diferenças estruturais existentes entre estes dois conjuntos numéricos, possivelmente para introduzir e caracterizar os números irracionais, como pode ser observado nesta declaração:

Pesq.: Os números racionais aparecem no seu programa de curso das 4as séries?
P13: De Análise Matemática aparece.
Pesq.: E que aspectos são abordados sobre os números racionais?
P13: Mais, assim, a diferença entre os racionais e os reais, o que tem nos reais que não tem nos racionais. Mais a comparação, assim (P13, Análise Matemática, Instituição α, Instrumento 5).

No que concerne a esta mesma disciplina na Instituição β, observamos que o professor limita-se a estudar as "propriedades genéricas" pertinentes aos racionais, como pode ser evidenciado nesta fala:

Pesq.: [...] Na disciplina Análise Matemática I e II, o assunto números racionais, ele faz parte do programa?
P27: É... em parte um pouco, professor, um pouco.
Pesq.: Que aspectos que são estudados?
P27: Ah, os aspectos? Por exemplo, as propriedades, mais, mais genéricas, né. As propriedades, é quando se trata de corpo, densidade do corpo dos números reais em relação a [inaudível]. (P26, Análise Matemática, Instituição β, Instrumento 5).

Os números racionais têm a sua definição revisada em algumas disciplinas, tais como: Complementos de Matemática (Instituição α), Introdução à Matemática Superior (Instituição β) e Cálculo Diferencial e Integral (nas duas instituições). Esta revisão acontece normalmente no início do curso, momento em que os conjuntos numéricos são recordados, como dizem os professores de Complementos de Matemática (P07) da Instituição α e o professor de Introdução à Matemática Superior (P26) da Instituição β, respectivamente:

> Na aula de Complementos eu faço uma abordagem sobre todos os conjuntos, né. Eu dou uma palavrinha no conjunto dos números racionais também. Eu coloco a definição (P07, Complementos de Matemática, Instrumento 5, Instituição α).
>
> Bom, começamos a disciplina fazendo uma revisão dos conjuntos numéricos. Então, nessa introdução nós fazemos, logicamente um adendo aos números racionais e colocamos, também as dízimas periódicas, a conversão de registros de representação, quer seja na parte decimal ou na parte fracionária. Então a gente faz esse elo, sim. Enfatiza bastante, até fazemos a revisão sobre dízimas periódicas, fração geratriz. Então, é mais um momento onde a gente faz essa revisão (P26, Introdução à Matemática Superior, Instrumento 5, Instituição β).

Na Instituição α existe uma disciplina chamada "Fundamentos de Aritmética". Procuramos identificar durante a entrevista com o professor que ministra esta disciplina se o estudo dos números racionais estava contemplado no seu planejamento. Observamos que todo o programa da disciplina é dedicado ao estudo dos números inteiros.

Pesq.: Na disciplina Fundamentos da Aritmética, tem alguma coisa contemplada no seu planejamento sobre números racionais, frações?
P01: Não, é que Fundamentos da Aritmética eu trabalho com números inteiros. Às vezes um exercício ou outro pra fazer a... pra que o aluno use os argumentos lá necessários... O sentido lógico pra chegar na solução às vezes ele precisa dos fracionários, mas em geral a gente trabalha com números inteiros, né. É só inteiro o trabalho dos... em Fundamentos da Aritmética (P01, Fundamentos de Aritmética, Instrumento 5, Instituição α).

b) Como ferramenta

Neste caso, tanto quanto os elementos de outros conjuntos numéricos, os números racionais aparecem naturalmente na resolução dos mais variados exercícios ou problemas. Nosso levantamento, realizado por intermédio dos dados coletados no Instrumento 5 (Entrevista com os professores), mostrou que os números racionais aparecem como ferramenta nas seguintes disciplinas:

- Cálculo Diferencial e Integral (α e β);
- Álgebra Linear (α e β);
- Geometria Analítica (α e β);
- Complementos de Matemática (α e β);
- Estatística (α), Complementos de Estatística (β);
- Probabilidade (α);
- Geometria Descritiva (α);
- Física (α e β);
- Matemática Financeira (α e β);
- Introdução à Matemática Superior (β);
- Equações Diferenciais Ordinárias (β);
- Cálculo Numérico (α); Métodos Computacionais (β);
- Geometria (α e β);
- Metodologia do Ensino de Matemática (α).

Predominantemente, nestas disciplinas, os números racionais são utilizados na resolução de exercícios ou problemas, como é confirmado pelo aluno A124:

> A gente usou, assim, mais fração se fosse pra, no meio de algum exercício, tá utilizando, no meio de uma equação tá utilizando [incompreensível] de fração. Mas, assim, é... um conteúdo só sobre frações, não. Assim, eu usei a ... como subsídio para resolver outros exercícios (A124, concluinte, Instrumento 4, Instituição α).

c) Como história das frações

Os professores de História da Matemática das duas instituições dedicam algum tempo para discussão da história das frações.

Na Instituição α o professor de História da Matemática fala dos números racionais quando aborda a Matemática no Egito, em especial as frações unitárias, sua importância, simbologia e dificuldades.

Pesq.: Começando com História da Matemática, no teu planejamento, você prevê alguma coisa, algum espaço pra falar sobre números racionais?

P01: [...] Sobre números racionais, claro. Quando eu falo do Egito, quando eu trabalho... quando eu começo a história do Egito, até, é muito interessante. Eu mostro pro aluno como eles lidavam com frações apesar da simbologia ser complicada. A simbologia... pra mostrar o que era o símbolo pra uma fração, no Egito era muito complicado, mas o trabalho que eles faziam era muito interessante. Eu acho que através da História é muito legal a gente trabalhar com os racionais.

Pesq.: Ah, então quer dizer que no teu planejamento você contempla a história das frações?

P01: Exato, exato, não especificamente. Então, eu não enfoco só isto, mas quando eu chego em frações e a gente fala mais precisamente em frações unitárias e as frações unitárias exigem um raciocínio muito interessante, né. Você ter que decompor uma fração em frações unitárias é um trabalho... é um trabalho... bacana. O aluno vai... o aluno remete por exemplo à História a dificuldade disso, e eles tabelavam isto, né. Porque como era difícil trabalhar com frações, então eles tabelavam. Então, daí começa o estudo dos números fracionários, quer dizer, como eles são importantes, né, como... Então eu procuro trazer esse aspecto, né (P01, História da Matemática, Instrumento 5, Instituição α).

Tratamento análogo é dado pelo professor de História da Matemática na Instituição β. Registra-se o acréscimo provocado pelas discussões sobre a crise dos irracionais e, em menor escala, o professor discute a “razão entre os números e a música”, como nos mostra o professor P23:

Pesq.: Nas aulas de História da Matemática, gostaria de saber se aparece alguma coisa sobre a História dos números racionais, das frações?

P23: Aparece! No primeiro semestre quando a gente trata da História da Matemática no Egito, que eu abordo as frações egípcias, falo do uso das frações unitárias e... procuro demonstrar, também, como se imagina que era o algoritmo que eles utilizavam para desenvolver uma fração e frações unitárias, depois vai, volta, vai aparecer de maneira com bastante ênfase quando entra na crise dos irracionais. Então, aí, na verdade, aparecem os racionais, mas por oposição, né. Quando a gente vai pros pitagóricos discutir a questão da diagonal do quadrado e mostrar que não poderia ser um número racional. Então, fundamentalmente, nesses dois momentos, né, que são momentos, assim... ah... são mais cruciais pro desenvolvimento da idéia. Tem um momento interessante, também, ainda, na questão dos pitagóricos, quando se fala da razão entre os números e a música, entre as notas, mas isto eu tenho comentado muito rapidamente, não tenho entrado em detalhes (P23, História da Matemática, Instrumento 5, Instituição β).

d) Como estudo dos aspectos metodológicos relacionados ao seu ensino

O professor da disciplina Prática de Laboratório, ministrada na Instituição β, declara que o ensino dos números racionais é deliberadamente incluído no planejamento do seu curso. Constatamos que a disciplina havia sido introduzida recentemente na matriz curricular daquela instituição, com uma proposta de trabalhar os campos numéricos, perpassando pelos números racionais.

> Então, essa disciplina de Prática de Laboratório começou esse semestre, né, do curso da grade nova. Então a gente optou por desenvolver os conteúdos de números. Começamos com números naturais, números inteiros e agora que a gente vai entrar em números racionais. Então, a gente procura trabalhar com atividades diversificadas, para que os alunos tenham uma oficina do tipo de trabalho que você podia desenvolver no Ensino Fundamental ou no Ensino Médio. E aí a gente começou trabalhando com jogos de frações. Frações no sentido que aparecem em terceira e quarta série (P35, Prática de Laboratório, Instrumento 5, Instituição β).

O enfoque escolhido pelo professor incluía atividades diversas que podem ser aplicadas no Ensino Fundamental e Médio, além da utilização de “jogos de frações”, destinados especificamente para a 3ª e 4ª séries do Ensino Fundamental. Como declarado pelo professor, esta disciplina havia sido introduzida na matriz curricular recentemente e os alunos concluintes entrevistados, que desenvolviam a matriz anterior, não tinham cursado esta disciplina no momento da entrevista.

No tocante à disciplina “Informática Aplicada à Educação”, a entrevista mostra que o professor da Instituição α trabalha com uma variedade de softwares para ensino de Matemática, dos quais um contém os números racionais.

Pesq.: Então, a primeira pergunta é o seguinte: no teu curso de Informática na Educação pros 3os anos, em algum momento é trabalhado algum *software*, alguma coisa relacionada a números racionais?
P09: Na realidade nós trabalhamos apresentando quase todos os tipos de *softwares* de matemática. Números racionais com certeza existem.
Pesq.: E tem algum, assim, que trabalha especificamente com frações?
P09: Tem vários *softwares* com frações.
Pesq.: Legal. E esses *softwares*, eles trabalham que aspectos das frações?
P09: Nós temos *softwares* desde o Ensino Médio e Fundamental que trabalham com as operações básicas, até de frações também, que são apresentados. Inclusive alguns são utilizados pelo Estado, pelas escolas que o governo apresentou alguns *softwares*.
Pesq.: [...] O que me interessava, assim, era mais saber quais aspectos que esses *softwares* trabalham. Assim, se eles trabalhavam mais com operações, ou com alguma outra parte conceitual, que tipo de conteúdo?
P09: Não, na realidade ele tem a parte de explicações no próprio computador e tem explicação falada também e tem os exercícios.
Pesq.: E esses exercícios são basicamente cálculos?
P09: São, cálculos com frações.

O *software* a que o professor se referia chama-se “fracionando”. Pesquisamos para saber sobre a forma como o conteúdo “frações” é exposto neste *software* e constatamos que este material não é mais fornecido.

Em relação ao professor de “Informática Aplica à Educação”, da Instituição β, constatamos que os recursos didáticos da informática utilizados por ele não contemplam os números racionais, como pode ser conferido pela sua fala:

> Especificamente *software* nós não encontramos nesse semestre. Porque foi o primeiro semestre que eu trabalho essa disciplina. Mas eles desenvolvem... Os próprios alunos desenvolvem aplicativos envolvendo Excel e que trabalhava frações e gráficos. Acho isso muito interessante. Agora, um *software* específico, não foi feito pesquisa pra saber se trabalhava com as frações (P40, Informática Aplicada ao Ensino, Instrumento 5, Instituição β).

Como pode ser observado nos quatro itens abordados anteriormente, a incidência de inserções dos números racionais no planejamento dos professores é majoritariamente aplicacionista. As abordagens voltadas para o seu ensino são episódicas e muitas vezes fragmentadas. Notamos também que os professores das disciplinas voltadas para o estudo da Matemática pura abordam de forma muito tímida os conteúdos específicos do Ensino Fundamental. Os conteúdos da Matemática superior muito pouco se ligam aos conteúdos que os futuros professores terão que ensinar. Na disciplina Álgebra os racionais são introduzidos como exemplos no estudo das estruturas algébricas de corpo, anel etc. Na disciplina Cálculo Diferencial e Integral os professores apenas definem e utilizam este conjunto numérico na resolução de exercícios. Os números racionais aparecem na Análise Matemática como contraponto entre racionais e irracionais no estudo dos números reais. Em algumas outras disciplinas encarregadas de revisar a Matemática da Educação Básica, apenas a definição é rememorada. Isto revela uma desconexão entre as estruturas formais estudadas no conjunto de disciplinas da Matemática pura com as estruturas "rudimentares" da Matemática elementar, objeto de ensino dos futuros professores. Em nenhum momento constatamos ações deliberadas no sentido de construir o conhecimento matemático voltado para um entendimento conceitual requerido no estudo dos subconstrutos e operações com as frações. O problema se arrasta uma vez que: por um lado, os alunos chegam à universidade com defasagens sérias em relação ao entendimento conceitual dos números racionais, como visto nas duas unidades de análise anteriores; por outro lado, os cursos de licenciatura pesquisados não solucionam estes problemas durante o tempo de permanência dos estudantes para professores na instituição.

3.3.3 A omissão das disciplinas que deveriam desenvolver o PCK relativo aos números racionais

Metodologia do Ensino de Matemática e Laboratório de Ensino de Matemática (ambas ministradas na Instituição α) são duas disciplinas voltadas para o desenvolvimento do PCK dos futuros professores. Por este motivo, esperávamos encontrar, entre o rol de conteúdos previstos para serem estudados nestas disciplinas, o estudo deliberado de questões relacionadas com o ensino-aprendizagem dos números racionais, seus diferentes significados, as dificuldades de aprendizagem, além da discussão de possibilidades metodológicas de abordagens deste conteúdo em sala de aula.

Nossa investigação mostrou que isto não acontece. O ensino dos números racionais, quando aparece, é por iniciativa dos alunos em aulas simuladas, como apontado pelos professores destas disciplinas:

> Em relação aos números racionais não tem nada programado. Mas eu solicitei dos alunos o que eles achavam que era importante, quais conteúdos eles gostariam de estar desenvolvendo no Laboratório de Matemática e fazendo uma aula mesmo. Uma aula diferente, uma aula mais concreta. E um dos assuntos relacionados, então, um dos assuntos apontados pelos alunos foi fração. E eles montaram a aula e apresentaram pra classe e fizeram as operações com frações, usaram material *Cuisinaire* e foi muito rico. Porque eles tiveram muita dificuldade na divisão de frações. E depois de uma semana de pesquisa, e perguntando pra vários professores como é que eles podiam estar explicando a questão do: *copia a primeira e multiplica pelo inverso da segunda*. Como é que podia ta explicando no material. Eles conseguiam essa resposta, né. Por meio destas pesquisas que foram feitas. E o seminário foi muito legal, foi muito produtivo, a classe toda ficou contente. De onde vem essa regra que todo professor fala em sala e o aluno não sabe nem o que ta fazendo (P15, Metodologia do Ensino de Matemática, Instrumento 5, Instituição α,).

> Sobre o ensino dos números racionais... Espera um pouquinho, deixa eu pensar pra responder. Eu acho que de maneira indireta sim, não como conteúdo conceitual, como procedimento pra você entender algo mais. Por exemplo, quando você vai estudar frações algébricas, polinômios, alguma coisa assim. Então, vai aparecer os racionais ali, como procedimento, simplesmente. Mas... ele como conteúdo, como conceito trabalhado não parece. Os irracionais até sim... os irracionais. Mas... os racionais, não. Por exemplo, determinar o número π, certo. Ele apareceu no Laboratório, mas, números racionais não pareceu não (P21, Laboratório de Ensino de Matemática, Instrumento 5, Instituição α).

Verifica-se, pela fala do professor de Metodologia do Ensino de Matemática, que a introdução de questões metodológicas relacionadas ao ensino-aprendizagem dos números racionais é episódica e depende da vontade dos alunos em introduzi-las. Segundo o relato do professor, no decurso da entrevista, este assunto foi abordado em forma de seminário em apenas uma de suas classes em que ministra esta disciplina. Trata-se, portanto, de um fenômeno esporádico, não previsto, particularizado para alguma questão específica deste conteúdo. A abrangência e eficácia do seu resultado dependem exclusivamente da habilidade de pesquisa dos alunos que se propuseram a apresentar um seminário sobre este tema. As demais classes sob responsabilidade do professor não tiveram contato com este conteúdo, uma vez que nenhum grupo se propôs a apresentar seminário a respeito deste tema. Em relação à disciplina Prática de Ensino, o professor da Instituição α nos informa sobre a inexistência de um espaço de discussão voltado para os aspectos teóricos/práticos relacionados ao ensino-aprendizagem dos racionais.

Analogamente ao constatado na disciplina Metodologia do Ensino de Matemática, a disciplina Prática de Ensino de Matemática também utiliza seminários em que os alunos escolhem os temas de interesse para elaboração da aula simulada. Desta forma, se alguma discussão sobre este tema acontece, ela foi provocada por iniciativa dos alunos interessados na abordagem deste conteúdo. Eles também produzem pesquisas em escolas fazendo observações do que é realizado em aulas de Matemática. Quando perguntado se o ensino dos números racionais estava contemplado em seu planejamento, o professor responde:

> Não, o assunto números racionais, ele... ele pode entrar em uma das aulas simuladas que os alunos dão ao longo do ano. Agora, o tema é um tema que é abordado à medida que os alunos têm que fazer investigação nas escolas do que é dado e do que não é dado. E ao investigar nas escolas o que é dado e o que não é dado, eles trazem a discussão sobre números racionais (P11, Prática de Ensino, Instrumento 5, Instituição α).

Quanto ao professor de Prática de Ensino da Instituição β, constatamos que, embora inicie a fala acenando afirmativamente no que se refere à questão colocada, no decorrer do discurso mostra incertezas e inseguranças que colocam dúvidas sobre a sua afirmação inicial:

Pesq.: [...] O ensino dos números racionais faz parte do seu programa? Daquilo que você programa pra discutir com os alunos?
P24: Faz! Depois eu... [manifestação de incerteza].
Pesq.: Agora, assim, particularizando pras frações, é abordado algum aspecto sobre o ensino das frações?
P24: Sim eu abordo. Agora vou começar... Vai ser abordado... Por enquanto ainda não consegui esta abordagem. Pretendo na próxima coisa... Vou abordar (P24, Prática de Ensino, Instrumento 5, Instituição β).

No decorrer da entrevista a falta de conhecimento sobre formas diversificadas de abordar as operações com frações deixa evidente que o conhecimento do professor em relação aos números racionais, em especial sobre a multiplicação e divisão de frações, não se distancia muito dos alunos concluintes:

Pesq: Nessas discussões..., por exemplo, alguma discussão também é feita sobre operações com frações como, por exemplo: qual é o significado de se encontrar o MMC? Dá pra gente dar uma interpretação geométrica pra 2/3 vezes ¼? Esse tipo de abordagem é feita?
P24: Eu... a questão da multiplicação... Eu fico mais na abordagem da soma. Tá. A divisão e a multiplicação é uma coisa que eu tô pensando como fazer pra transmitir pra eles. Agora, nesse momento. Então, eu tô, assim, programando essa aula pra trabalhar com Material Dourado,

pra eles ter uma idéia. Eu quero ver, também, se abordo a questão da escala também. Agora, a divisão e a multiplicação eu precisaria... vou ter que pensar em uma maneira matemática de mostrar geometricamente ou até na... com algum material que eu possa... e até os próprios alunos entenderem melhor essa... (P24, Prática de Ensino, Instrumento 5, Instituição β).

Neste caso, fica claro que o professor ainda procura formas diversificadas de abordar o ensino dos números racionais. Se ainda procura, significa que os alunos deste professor que foram pesquisados não trabalharam nesta disciplina os aspectos práticos sobre o ensino dos números racionais. O desenvolvimento do PCK relacionado aos números racionais, obviamente, não deve ficar a cargo de apenas uma disciplina. Contudo, a fala do professor coloca luz em mais uma evidência que nos permite entender uma possível gênese dos problemas observados nos estudantes para professores. O assunto não foi abordado pelo professor porque ele ainda busca conhecimento sobre o ensino deste conteúdo.

A Prática de Ensino é uma disciplina integradora de diversos conhecimentos e pode oportunizar aos futuros professores uma incorporação destes conhecimentos com o objetivo de gerar conhecimento prático pessoal. Para tanto, a Prática de Ensino deveria ser um dos principais entornos de aprendizagem nos programas de formação de professores. As lições desenvolvidas pelos estudantes para professor durante as Práticas se constituiriam na primeira oportunidade de utilizar os conhecimentos teóricos desenvolvidos em outras disciplinas com a finalidade de gerar conhecimento prático pessoal (Llinares, 1998a).

Uma questão interessante foi levantada pela coordenadora do curso da Instituição β, que pode dar indicativos sobre os critérios utilizados para contratação de professores para a disciplina Prática de Ensino e sua influência no tipo de abordagem didática prevista na organização do ensino. Ela nos mostra que a titulação dos professores contratados para esta disciplina nem sempre foi compatível com as necessidades formativas necessárias à disciplina. Quando perguntamos sua opinião a respeito da qualidade da formação dos alunos em relação ao conhecimento pedagógico dos conteúdos matemáticos, ela responde:

É... As aulas de Prática de Ensino seriam voltadas pra essa finalidade, mas no final não sei se elas acabavas abordando dessa maneira. De um tempo para cá, nós temos procurado com os professores trabalhar mais assuntos do cotidiano mesmo da sala de aula, né, e até mesmo procurando dar essas disciplinas a professores que sejam da Matemática. Por vezes, a gente acaba pegando professores de psicologia que dá também essa aula de Prática de Ensino e Didática. Mas não chega a sentir o efeito que o

> professor de Matemática mesmo, da área, consegue abordar tópicos mais relevantes Porque senão os outros acabam voltando pras metodologias, pras filosofias, não tanto pra parte conceitual matemática (Coordenadora do curso da Instituição β, Instrumento 5).

É importante deixar claro que esta observação não se aplica ao professor de Prática de Ensino citado anteriormente (P24), pertencente ao quadro de professores da Instituição β, uma vez que sua maior titulação é a de Mestre em Educação Matemática, portanto, absolutamente compatível com a disciplina que ministra. A verificação da influência ou não do tipo de titulação dos professores na qualidade do processo de formação de professores de Matemática não é objeto de estudos desta pesquisa. Esta citação foi introduzida apenas para chamar a atenção e levantar o problema relativo à possibilidade de que uma inadequação da titulação dos professores referente à disciplina que leciona possa se constituir em mais uma variável que influencia a formação dos estudantes para professores. Esta hipótese foi aventada a partir das evidências apontadas pela coordenadora do curso da Instituição β quando indica uma diferenciação no tipo de abordagem da disciplina Prática de Ensino e Didática de acordo com o tipo de titulação dos professores que a ministram.

3.3.4 Conseqüência: uma formação deficitária em relação ao PCK

Segundo Sacristán (2000), o currículo, em uma instituição escolar, reflete os interesses e forças que gravitam sobre o sistema educativo num dado momento. "O currículo, em seu conteúdo e nas formas através das quais se nos apresenta e se apresenta aos professores e aos alunos, é uma opção historicamente configurada, que está carregado, portanto, de valores e pressupostos que é preciso decifrar" (p. 17).

Pensar o processo de formação inicial de professores de Matemática e o currículo (entendido como projeto) praticado pelas universidades nos conduz a concebê-la como o resultado do equilíbrio de diferentes forças que atuam em um determinado contexto, em certo espaço de tempo e sob a influência de diversos atores, em especial professores e alunos. A orientação teórica científica, traduzida no fazer pedagógico revelado pelos professores, como também nos resultados obtidos pelos diversos instrumentos de coleta de dados por nós utilizados, revelam que nas duas instituições pesquisadas o currículo, pelo menos no que se refere à concepção de ensino-aprendizagem de Matemática, é idealizado para uma formação conteudista e tecnicista da Matemática. Há uma falta de ligação entre os conteúdos matemáticos estudados nas diferentes disciplinas que compõem a grade curricular do ensino superior com os conteúdos que os futuros professores irão trabalhar com os alunos do Ensino Fundamental e Médio. Há evidências, também, de que pouca importância tem sido dada à formação pedagógica dos estudantes para professores, especialmente em relação à didática da Matemática. A fala do aluno A169 nos mostra a forte ênfase que é dada à formação algébrica e à não-preparação dos alunos em relação à didática da Matemática.

> Taí uma coisa que eu acho que ... Eu acho que o curso, eu acho que em geral, ele forçou muito no conteúdo superior e não preparou os alunos pra dar esse tipo de aula [referia-se à utilização de representações para ensino de adição de frações]. No nosso curso, ele preparou os alunos pra fazer álgebra, e..., cálculo etc. etc. Esse tipo de coisa que eu acho que deveria ser dado para os alunos, pré-requisitos, não foi dado. Muitos alunos, se o senhor... as entrevistas que o senhor vai fazer, o senhor vai reparar que muitos alunos têm dificuldade em expor esse tipo de coisa. Faz [inaudível] continha, sabe a resposta, mas o porquê, como se chega lá, é complicado, é difícil de se responder (A169, concluinte, Instrumento 4).

Este aluno aponta para uma questão séria que merece atenção: a preparação dos futuros professores em relação ao conteúdo de ensino e ao PCK. Este aluno mostra evidências bastante claras de que a preparação do professor desenvolvida em seu curso está fortemente centrada na Matemática superior, como Álgebra, Cálculo Diferencial e Integral etc., com ausência de espaços de discussão dos assuntos pertinentes ao conhecimento do conteúdo matemático e do PCK referente aos assuntos que um dia terá que ensinar em seu cotidiano profissional. E acrescentamos a seguinte questão: fazendo um retrospecto de todos os problemas relacionados ao desconhecimento do conteúdo matemático reiteradamente evidenciado nas análises anteriores, qual foi a contribuição de toda a Álgebra, todo o Cálculo que estes alunos estudaram nos quatro anos do curso? Estas disciplinas, no mínimo, deveriam dotar os alunos de um bom conhecimento das estruturas matemáticas e um razoável grau de desenvolvimento lógico-matemático e, como conseqüência, poderíamos aferi-las, pois estariam refletidas nas respostas escritas, nas falas e opiniões emitidas pelos alunos.

As matrizes curriculares dos cursos pesquisados mostram uma declarada predileção pelas disciplinas relacionadas à Matemática Pura e Aplicada. A carga horária destinada às disciplinas de cunho pedagógico está em torno de 25% na Instituição α e 20% na Instituição β. Embora haja uma predileção pela formação matemática dos futuros professores, constatamos que, pelo menos no que tange aos números racionais, os dados evidenciam que os conhecimentos matemáticos exaustivamente estudados durante o curso não foram suficientes para incrementar o PCK dos estudantes para professores. Se a relação entre conhecimento matemático e PCK não for deliberadamente estudada durante o curso, dificuldades como as apontadas pelo aluno A135 poderão continuar a ser evidenciadas:

Pesq.: Mas você sente dificuldade, por exemplo, em fazer as contas? Por exemplo, de adição, de subtração, de divisão, você sente dificuldade?

A135: Nada. Eu sinto a dificuldade em mostrar no sentido palpável.

Pesq.: Entendi.

A135: Enorme.

Pesq.: Buscar uma interpretação geométrica?

A135: É… usar a barra de chocolate, por exemplo (A135, concluinte, Instrumento 4).

Como podemos observar, a dificuldade está centrada na parte conceitual do entendimento dos racionais e não nos cálculos corriqueiros. Neste sentido, o aluno A300 critica a clara deficiência da parte pedagógica prevista no currículo do curso:

> Ah, agora eu vou aproveitar e fazer... a minha queixa que eu estou reclamando há muito tempo... desse curso. Eu fiz Pedagogia, né? E no curso de Pedagogia a gente vê muito essa parte... Didática... Psicologia, Filosofia, você buscar, tentar a melhor maneira... Apesar que... de eu nunca ter dado aula, eu sempre trabalhei como coordenadora. E dei sim, em alguns anos, aulas, algumas disciplinas, eh, várias disciplinas... não só em Matemática. E eu acho que esse curso de Matemática aqui, como a gente sai com licenciatura, não é trabalhado a parte das matérias que você vai lecionar. Fica muita parte teórica, sabe? Você vê muito cálculo, não é? Que são coisas que você, na sala de aula, não vai te ajudar muito. Apesar de que, no caso, você necessita de um... uma parte... a teoria vai te ajudar muito no seu trabalho na escola. Só que não se trabalha, sabe, essa parte... as matérias que você veria, como Psicologia, Didática, Estrutura, eles ficam muito na parte de teoria por ser um tempo muito reduzido, né? E não dá tempo de você, assim, não é feito um trabalho de você estar pesquisando, de você tá buscando qual a melhor maneira de você tá trabalhando isso. O único semestre que nós vimos esse tipo de trabalho com frações, não foi nem na nossa série, foi numa série anterior, que hoje estão no quinto (5º), que eles fizeram... teve um grupo que fez um trabalho sobre frações, e eles fizeram uma... uma apresentação, na semana de Matemática, como... como trabalhar no concreto, né? Então, eu acho assim que essas últimas disciplinas, de matérias que você tem que levar mais a sério. Essa parte didática, de... de Metodologia, tem que ser trabalhado na licenciatura. Porque a maioria da nossa sala. Ah, mas porque você tem que sair... é bacharelado. Só que na nossa sala não tem ninguém que vai fazer bacharelado. Todos estão ali exclusivamente pra pegar licenciatura. Né? Nem todos pra lecionar, mas muitos pra lecionar. Então acho que essa base... Eu acredito que quando você vá trabalhar com a base, a quinta série, a quarta série, que aí entra frações, claro que você vai buscar livros, você vai tá... você vai buscar, né? Todo professor... você não vai chegar numa sala de aula com a mão, ah, vou trabalhar frações no método que foi explicado ó, eh... só divisão, né, multiplicação em x (xis), tal. Porque foi dessa forma que nós aprendemos. Se a pessoa sabe de uma outra forma é porque pesquisa fora (A300, Instrumento 4, concluinte).

Deparamo-nos com mais um ponto crítico da nossa investigação. Constatamos anteriormente uma série de problemas em relação ao conhecimento dos futuros professores sobre a matéria de ensino, no nosso caso, precisamente quanto ao conhecimento sobre números racionais. Por outro lado, o depoimento do aluno A300 também deixa claro que a parte do curso destinada à formação didática também não tem preparado os alunos eficientemente em relação ao PCK. Os conteúdos que os futuros professores terão que ensinar no Ensino Fundamental e Médio não são revisitados no Ensino Superior, como argumenta o aluno A300:

> [...] eu acho que esse curso de Matemática aqui, como a gente sai com licenciatura, não é trabalhado a parte das matérias que você vai lecionar. Fica muita parte teórica, sabe? Você vê muito cálculo, não é? Que são coisas que você, na sala de aula, não vai te ajudar muito.

Talvez, por este motivo, a maior dificuldade dos alunos não esteve centrada nos cálculos envolvidos em algumas questões por nós propostas, como explica o aluno A151:

> [...] enquanto foi pra eu resolver [referia-se às questões do Instrumento 3], eu tava... eu senti mais facilidade. Agora... a minha maior dificuldade é exatamente isso: é explicar qual foi o meu raciocínio. É exatamente aí que tá o problema. Entendeu? É assim... pegar a questão e resolver ela em si, sem problemas.

O problema crucial, por nós constatado, reside no desequilíbrio existente entre o conhecimento matemático (conceitual e processual) e o PCK dos futuros professores relativamente aos números racionais.

Alguns estudos sugerem que a pessoa não pode ensinar aquilo que não sabe. Os professores têm que conhecimento profundo não só da Matemática específica que eles ensinam, mas também da Matemática que os seus estudantes vão aprender no futuro. Tão-só com este conhecimento um professor saberá estruturar seu próprio conhecimento matemático e ensiná-lo de forma que os seus estudantes continuem aprendendo (Fennema e Loef, 1992).

O professor pode fundamentar suas ações didáticas em seu conhecimento das relações entre o conhecimento de Matemática e o conhecimento de distintos modos de representação para conseguir que seus alunos construam uma boa compreensão das noções matemáticas. O conhecimento do professor destas relações supõe-se que influencie as características das tarefas de ensino apresentadas, como também a própria interação didática em aula, e no grau de importância que o professor atribui às produções dos alunos. Os processos de negociação de significados entre o professor e os alunos, adscritos aos símbolos e modos de representação empregados nos processos de ensino-aprendizagem, se apóiam no conhecimento do professor do conteúdo matemático, das suas limitações e características concernentes aos modos de representação empregados e aos processos de aprendizagem destas noções e idéias matemáticas (Llinares e Sánchez, 1996).

As nossas observações anteriores não têm o propósito de inferir a idéia de que o curso universitário não contribuiu em nada para a formação dos futuros professores no que se refere ao seu conhecimento matemático e didático. Significa, sim, que a formação recebida está fortemente embasada numa exploração algorítmica do saber matemático e pautada na resolução de inúmeros exercícios com o propósito precípuo de treinamento. A compreensão conceitual, muito mais difícil do que a resolução mecânica de exercícios, é muitas vezes um objetivo não alcançado ou até mesmo negligenciado. Artigue (1995), em uma pesquisa que versava sobre o ensino de Cálculo Diferencial e Integral em cursos de licenciatura, aponta:

> Numerosas investigações realizadas mostram, com convergências surpreendentes, que é possível ensinar bem os estudantes a realizarem de forma mais ou menos mecânicas alguns cálculos de derivadas e primitivas e a resolver alguns problemas *Standard*; contudo, encontramos grandes dificuldades para fazê-los entrar verdadeiramente no campo do cálculo e alcançar uma compreensão satisfatória dos conceitos e métodos de pensamento que é o centro da Matemática. Estes estudos também mostram de maneira clara que, frente as dificuldades encontradas, o ensino tradicional e, em particular, o ensino universitário, ainda que se tenha outras ambições, tende a centrar-se em uma prática algorítmica e algébrica do cálculo e a avaliar, na essência, as competências adquiridas neste domínio. Este fenômeno se converte em um círculo vicioso: para obter níveis aceitáveis de êxito, se avalia aquilo que os estudantes sabem fazer melhor e, por sua vez, isto é considerado pelos estudantes como essencial, já que é o que se avalia... (Artigue, 1995, p. 97).

Uma formação nestes moldes, ou seja, no treino em resolução de exercícios, caminha na contramão da ciência, não contribui para a formação de educadores capazes de introduzir ações didáticas inovadoras e eficazes que tenham um maior poder de construir conhecimentos matemáticos significativos, para além das limitações impostas pela metodologia de ensino tradicional. Como um professor pode contribuir para que seus alunos construam conhecimentos significativos se os seus próprios conhecimentos não forem significativos? Como esperar que estes professores em formação se utilizem de metodologias de ensino que contemplem os avanços conquistados na área de Educação Matemática, se estes estudantes não tiverem a oportunidade de experimentá-las assistidamente durante o período destinado a sua formação?

Um problema detectado e relatado pelo aluno A280, e já comentado anteriormente, diz respeito à forma de organização das aulas de Prática de Ensino. Segundo o aluno, o professor apresentava uma série de temas envolvendo conteúdos específicos do Ensino Fundamental e Médio e solicitava aos alunos escolherem um deles, com o objetivo de preparar uma aula e apresentá-la em forma de seminário. A conseqüência é explicada pelo próprio aluno: “Então, ninguém pegava fração. [...] Só de falar em fração todo mundo já treme!” (A280, Instituição β, Instrumento 4).

A inserção limitada e localizada dos números racionais nas diversas disciplinas pode ser a responsável pelo predomínio da visão algorítmica e pela dificuldade de interpretação ou conhecimento do significado das operações que os alunos realizam. O relato do aluno A280 é contundente e nos mostra a ausência de abordagens que trabalhem com os aspectos experimentais da Matemática:

> É. Vamos supor que fosse pra falar de Física. O professor vai lecionar uma matéria legal, que você aprende, você vê as coisas; o porquê que o preto absorve mais calor do que os outros. Então, coisas que você tá vendo na realidade. Acho que seria mais fácil. Então, aí, como é uma coisa que quase a gente... praticamente não tem aqui. Praticamente não teve no curso inteiro. Praticamente não se falou de fração (A280, Instrumento 4, concluinte).

Nas duas universidades pesquisadas observamos a existência de laboratórios de Matemática. Estes ambientes haviam sido instalados recentemente à época da nossa coleta de dados e os professores ainda estavam se preparando para utilizá-los plenamente. Assim, os possíveis efeitos positivos que as atividades experimentais podem trazer para a formação em relação ao PCK dos futuros professores ainda não estão refletidos nas falas dos alunos. A fala do aluno A280 é contundente neste sentido, mostrando-nos uma visão da Matemática, diferentemente da Física, Química etc., como uma ciência não experimental. Consideramos extremamente importante a utilização de laboratórios de ensino de Matemática, pois, quando bem utilizados, podem situar a cognição dos professores em formação em contextos que permitem incrementar seus conhecimentos no que se refere a investigar situações problemáticas, experimentar soluções e fazer descobertas, usar sua intuição, seus conhecimentos prévios e criatividade para construir algo novo. As experiências matemáticas, quando trabalhadas neste contexto com os estudantes para professores, podem favorecer uma formação em que o conhecimento da matéria de ensino é trabalhado de forma conectada com o conhecimento pedagógico destes conteúdos. Além disso, o acúmulo sistemático destas experiências matemáticas por parte dos professores em formação, pode ser um elemento importante e distintivo do seu conhecimento profissional.

3.3.5 A visão dos formadores de professores sobre as necessidades formativas dos alunos do Ensino Fundamental

Durante as entrevistas com os professores, começávamos perguntando sobre a forma como os números racionais estavam inseridos no plano de curso de cada professor. Posteriormente, procurávamos saber se os professores conseguiam identificar as maiores dificuldades dos seus alunos ao lidarem com números racionais durante suas aulas, avaliações etc. Em seguida, já ambientados com a temática da entrevista, procurávamos investigar a visão dos professores sobre as necessidades formativas dos alunos do Ensino Fundamental, em termos de quais aspectos sobre os números racionais deveriam ser abordados pelos professores neste nível de ensino, para que os alunos tivessem uma boa formação em relação a este conteúdo. Em outras palavras, intentávamos saber como os professores universitários idealizavam um bom ensino de números racionais durante todo o Ensino Fundamental.

Esta questão tinha uma importância muito grande em nossa investigação, uma vez que indiretamente estávamos checando a amplitude do conhecimento destes professores em relação ao ensino deste conteúdo. Como a questão era bastante abrangente, permitia ao professor expor sua visão sobre o conhecimento dos diferentes significados das frações, sobre processos metodológicos, ou seja, a respeito de tudo o que possa se relacionar com o ensino-aprendizagem dos números racionais.

A análise das respostas que os professores deram a esta questão revela que dos 41 professores entrevistados apenas dois demonstraram ter uma visão ampla e atualizada sobre o ensino dos números racionais. O primeiro destes dois professores nos mostra uma concepção bastante interessante e moderna:

> Primeiro, é fundamental que eles [os professores do Ensino Fundamental] trabalhem essa questão conceitual sobre números racionais. E de uma maneira... já que você está pensando no Ensino Fundamental, é de uma maneira que dê significados, trate dos diversos significados que os números racionais têm, que isso possa ser trabalhado na sala de aula. Isso é fundamental. Eu não estou pensando na questão das operações, ainda, mas, as operações com os racionais ficam muito mais fáceis, mais tranqüilos, se você dá esses significados. Saber dosar atividades com os diversos significados que os números racionais possuem. [...] É assim, os professores de Matemática, tradicionalmente, considerando tradicionalmente aquilo que é comum, eles dão uma grande ênfase a linguagem matemática, porque essa é deveras importante. Porque a Matemática, ela tem uma linguagem própria, sua, e que a caracteriza. Mas os professores preocupados com essa... com a valorização da linguagem matemática acabam por dar aula de linguagem matemática e não de Matemática. Então, são os termos utilizados por eles pra dar os aspectos sintáticos do ensino. Não é? Vou ensinar o que é uma fração. O que é uma fração? É um número formado por um número em cima e um número embaixo; numerador e denominador. Inteiros, né. a sobre b, com b diferente de zero. Aí você aprender esse símbolo que é formado, na verdade, por três símbolos, um abaixo do outro e um traço. E, aí, como operar, então são apenas aspectos sintáticos, não é trabalhar significado nenhum. Aí, essa é uma explicação possível. Mas, ai tem uma outra, que outro grupo de educadores preocupados, porque a ênfase estava sendo dada simplesmente a linguagem e trabalhando simplesmente só o significado. E, aí, fica simplesmente como um joguinho. No primeiro caso, você tem prejuízo porque, por exemplo, eu aprendi bem números racionais, mais os aspectos sintáticos, e eu gostava disso. Mas eram quantos na sala de aula? Eu me dava bem, mas eu estava sem referencial. É como eu disse, eu aprendi trabalhando com os alunos. E esse grupo de alunos que hoje é educado simplesmente por significados, sem a parte sintática ele também fica prejudicado, porque não vai saber operar com os números na hora que precisa da forma como precisa. Quando chega na universidade, que é nossa discussão, ele vem aqui, aparece algo como frações algébricas, ou algo assim, como ele não tem a parte algébrica ele não vai operar; se só tem um referencial (P21, Laboratório de Ensino de Matemática, Instrumento 5, Instituição α).

A fala do professor deixa clara sua preocupação com procedimentos metodológicos que contemplem:

- O trabalho com a parte conceitual, dar significado ao que se faz;
- Uma abordagem que compreenda os diferentes significados das frações;
- Saber dosar atividades com os diferentes significados;
- Equilíbrio entre os aspectos operacionais (sintáticos) e conceituais.

Estas preocupações são compatíveis com o que temos defendido ao longo deste trabalho sobre ensino dos números racionais. Há, contudo, uma constatação intrigante. Em primeiro lugar, o professor nos apresenta uma concepção moderna e interessante não só a respeito de ensino dos racionais, como também sobre Educação Matemática de forma geral. Em segundo lugar, o professor ministra a disciplina Laboratório de Ensino de Matemática, que tem como objetivo precípuo levar os futuros professores a construir o PCK em relação aos mais variados conteúdos do Ensino Fundamental e Médio. Finalmente, a Instituição possui um Laboratório de Matemática muito bem equipado, inclusive contendo materiais destinados ao ensino das frações. Contudo, esta estrutura física e humana não favorece os estudantes para professores na construção do PCK sobre números racionais, uma vez que este mesmo professor declarou (e já assinalamos anteriormente) que o ensino dos números racionais não faz parte do seu curso, eles aparecem apenas como ferramenta.

O segundo professor mostra conhecimento dos diferentes significados das frações. Considera importante que os professores diversifiquem atividades que envolvam estes significados com o objetivo de fazer os alunos perceberem que fração é uma coisa muito mais ampla do que as frações unitárias.

> A fração é sempre abordada a partir do cotidiano; atividades práticas. Daí pode deixar a impressão de que é a unidade, um todo que é dividido por várias partes. Taí um dos problemas, realmente. Tem que tentar fazer uma ruptura entre uma introdução que usa o concreto e aí – entre aspas – é uma dificuldade que leva o aluno a perceber que, na realidade, a fração como uma parte de 1, nada mais é do que uma forma, uma idéia de um tipo de fração. Diversificar as atividades sobre frações que é a concepção parte-todo, razão, proporção... Tudo isso tem que preparar atividades que levem o aluno a perceber que fração é, na realidade, uma coisa muito mais ampla. Além disso, tem uma série de discursos que envolvem isso... Será que isso que os alunos estão manipulando é uma representação do número? O que é fração? Fração é um número ou uma representação? Isso que a gente precisa decidir. Muitas vezes você vê na escrita, diferenciar número fracionário de fração. Precisa fazer um trabalho que permita ao aluno fazer esse tipo de colocação. E, além disso, do jeito que é abordado, por exemplo, no Ensino Fundamental ou Ensino Médio, quando a gente escreve 2x + 5 sobre 3, não é uma fração? Então é um trabalho que deve ser feito (P20, Geometria Descritiva, Instituição α, Instrumento 5).

As concepções e os questionamentos explicitados por este professor, igualmente ao caso anterior, também são concernentes a uma visão cientificamente atualizada sobre ensino dos números racionais. Constata-se, também, que estas concepções não são colocadas em prática durante suas aulas, uma vez que leciona a disciplina Geometria Descritiva e os números racionais somente aparecem como ferramenta, segundo declaração do próprio professor.

Identificamos seis professores que apresentam uma visão interessante, porém localizada, de alguns problemas relacionados ao ensino dos números racionais. Um dos problemas cruciais, na visão destes professores, é de natureza metodológica, como:

- Trabalhar com problemas que desenvolvam o raciocínio dos alunos e não apenas utilizar procedimentos que o estimulem a decorar regras. “Acho que o maior problema é raciocínio. Eles não aprendem a pensar. Eles aprendem a decorar” (P25, Física e Matemática Financeira, Instrumento 5, Instituição β);
- Melhorar a conexão entre registros de representação, por exemplo, entre a representação fracionária e a decimal:

> Quer dizer, não está sendo bem tratado esse assunto. Provavelmente, não era feito essa correspondência entre registros. Ficava-se trabalhando ou fração ou ora os registros decimal; não havia essa conexão de um pro outro. Isso é realmente um problema. É um obstáculo, né (P26, Introdução à Matemática Superior e Fundamentos de Álgebra, Instrumento 5, Instituição β);

- Introdução de atividades lúdicas, como jogos:

> [...] Várias maneiras deles trabalharem com essas coisas, pra não ficar com exercícios repetitivos. Porque daí, né, eles acabam ficando enfastiados e não rendem nada, né. A gente propõe trabalhar com jogos mesmo. Jogos variados, quebra-cabeças, coisas assim (P33, Álgebra, Instrumento 5, Instituição β);

- Utilizar a história das frações no ensino das frações:

> Eu acho que a História é um veículo. Eu acho. Não que a gente tenha que colocar a História em tudo, porque às vezes a História pode atrapalhar o contexto, né. Então o professor tem que ter sensibilidade pra essas coisas, né. [...] A História pode contribuir porque a evolução dos povos, a evolução Matemática dos povos mostra um pouco de como evolui a criança de uma certa forma (P01, História da Matemática e Fundamentos de Aritmética, Instrumento 5, Instituição α);

- Incrementar o uso de representações geométricas ao abordar as operações com frações:

> Tem que usar a parte geométrica pra tá ensinando as operações com frações. Porque, por exemplo, quando o professor vai ensinar divisão de frações, ele fala: pega a primeira fração e multiplica pelo inverso da segunda. O que que é isso? Isso dá pra ser mostrado ou demonstrado através da geometria. Através dos desenhos, né (P15, Estatística, Fundamentos de Aritmética, Metodologia do Ensino de Matemática, Instrumento 5, Instituição α);

- O professor P06 expõe uma experiência positiva acompanhada por ele em que a construção do conceito de fração é realizada com “recortes”. Salienta que este processo necessita de tempo para ser executado a contento, além de exigir do professor uma boa formação, caso contrário o resultado final pode não ser satisfatório:

> Olha, eu me baseio nesse trabalho da minha esposa, que foi acompanhado por mim, incentivado por mim, eu acho que o professor lá na 5ª série deveria trabalhar... Dedicar-se aí um tempo nesse processo de construção através de recortes mesmo. Aí todas as regras das frações que parecem ser impossíveis de se dadas por esse mecanismo na verdade são possíveis. Leva-se um tempo maior, né. Agora, o professor precisa ter uma sala menor, o professor precisa ter um domínio didático muito grande, né, um bom conhecimento de Matemática também, porque, senão, ele distorce tudo e o processo se perde e invertendo-se aí, fica no negativo, não é. Ou seja, o aluno não aprende nem as regras automáticas padronizadas e aí ele fracassa no futuro. Então, é um processo delicado que esse profissional tem que ser muito bem conduzido pra que não ocorra essa perda, não é, e ele tem que ter claro que o programa dele tem que estar dimensionado pra um tempo significativo com isso, porque isso demora, [incompreensível] né, então ele teria que adequar o conteúdo específico, a este conteúdo, todo o programa dele, tá, privilegiar isso. Por quê? Porque eu reputo como sendo extremamente importante, né, o conceito das frações e que vai levar às proporções e que vai levar à física... então eu reputo como algo extremamente importante (P06, Álgebra, Instrumento 5, Instituição α).

No tocante aos demais professores (33), constatamos que as concepções sobre ensino dos números racionais se mostraram bastante restritas do ponto de vista do conhecimento matemático e metodológico aplicado a este assunto. No que concerne aos aspectos metodológicos e psicológicos, verificamos uma visão sobre ensino-aprendizagem predominantemente tradicional, ou seja, estes formadores de professores acreditam que no Ensino Fundamental os professores devem trabalhar com as propriedades dos números racionais, exercitá-las exaustivamente, resolvendo muitos exercícios. Selecionamos algumas falas representativas desta tendência:

- Visão empirista. O conhecimento matemático é algo que pode ser transferido, tem que “entrar na cabeça do aluno” pela repetição exaustiva de exercícios. Cabe ao aluno se esforçar para “absorver este conhecimento”. É prerrogativa do professor “forçar esta repetição”:

> A minha filosofia é de que precisa de exercício. Os alunos precisam exercitar determinado assunto. Todas as matérias que eu ministro são baseadas na prática, na repetição de um determinado grupo de conhecimento até a exaustão. Até que aquilo possa entrar na cabeça do aluno. E o professor tem que forçar esta repetição. Ele tem que deixar claro pro aluno que se ele não forçar ele não vai absorver o conhecimento (P39, Física e Métodos Computacionais, Instrumento 5, Instituição β).

Nesta concepção empirista o professor acredita que o conhecimento vem de fora, do objeto, que o sujeito recebe por meio das sensações ou experiências e deve ser praticado para ser “absorvido”. Esta visão positivista do conhecimento tem sido refutada já há algum tempo com as teorias interacionistas pós-Kant.

- A melhor metodologia é a tradicional. O professor não encontra respaldo em outras metodologias. Acredita que o melhor caminho é “fazer conta, fazer conta, fixação repetidas vezes”.

> Eu tive várias formações, e, infelizmente, me apego mais ao tradicional que é a mais perfeita pro aluno, mas eu não consigo ver em outras um respaldo, uma resposta tão firme quanto é fazer conta, fazer conta, fixação repetidas vezes. Talvez falte isso no Ensino Fundamental até pela falta de interesse do aluno. Então motivar o aluno e realmente passar listas pra ele, sei que já é uma coisa bem tradicional, né, mas eu não conheço outra que tenha funcionado bem (P34, Geometria Analítica, Equações Diferenciais Ordinárias, Instrumento 5, Instituição β).

É um grande erro pedagógico considerar que o ensino de Matemática, com o pretexto de que há uma grande quantidade de exercícios repetitivos, consiste na aquisição de costumes ou de procedimentos preestabelecidos por simples condicionamento. O estudante não adquire costumes, senão regras, que podem e devem aplicar-se em novos problemas. Adquire-as solidamente só se as compreende, quer dizer, se se dá conta da relação que estas mantêm com as estruturas relacionadas aos problemas aos quais se aplicam (Vergnaud, 1991).

- O professor acredita que é necessário “dar” as propriedades. Há uma preocupação com a eficácia das novas tecnologias e novos procedimentos didáticos. Dá exemplo de que os alunos estão chegando na universidade com dúvidas elementares:

> [...] se os professores que estão lá [no Ensino Fundamental] não derem as propriedades direitinho pros alunos, não ensinarem, sabe, direitinho as propriedades... Com todo o modernismo, vamos dizer assim, que eu acredito que esteja acontecendo com todas as novas técnicas, né, novas maneiras, novos processos didáticos, se eles não fizerem direitinho, nós vamos continuar recebendo alunos muito fracos. Alunos que não vão saber somar fração, fazer divisão de fração. Você não acredita quando o cara dá um exercício que tem que fazer divisão aonde tinha gente que dizia assim: olha, inverte a segunda, né. Era coisa assim tranqüila, né, pega a primeira e multiplica pelo inverso da segunda. Você vai falar isso hoje... Como é, professor, como é? Você não vai acreditar, eu vou te contar uma coisa que é... um pouco mais pra trás ainda. Ano passado, né, teve um... quando eu falei assim; olha, m.m.c. de 3, 4 e 6... 12! Como professor, 12? Como é que você achou esse 12? Aí eu tive que parar e levá-los pra fazer aquele processo de achar o m.m.c. Acredita? (P04, Álgebra, Instrumento 5, Instituição α).

Algumas suposições predominantemente refletidas nas entrevistas que realizamos com os professores incluíam: saber Matemática é saber como fazer, é fortemente calcada na dimensão processual. Nesta concepção, a Matemática é vista como uma coleção de fatos e regras, incluindo um conjunto de métodos que seguem etapas passo a passo, que servem para resolver inúmeros problemas. É possível que estas concepções tenham sido construídas com os anos de experiência profissional vivenciando esta cultura no ambiente de trabalho. É importante destacar que ela não reflete uma visão atualizada sobre ensino-aprendizagem de Matemática.

- Visão nostálgica. O ensino atual tem piorado sua qualidade. Uma possibilidade de melhoria seria voltar ao lado bom do ensino do passado, com um pouco mais de rigor.

> Eu sou filho de professora e minha mãe pegava no meu pé com relação a essa coisa, no estilo da educação antiga. Isto para mim, pra minha família, meus irmãos funcionou muito bem. Neste caso, um retorno, assim, ao lado bom do que havia no passado seria bem indicado. Na minha opinião o que tem acontecido realmente é que a educação tem caído de qualidade. E esse é o maior problema. Não consigo relacionar isso, o método diretamente, mas com a qualidade, com a maneira de ensinar e avaliar. Essa é só a minha opinião, um retorno ao passado, talvez com um pouco mais de rigor, de qualidade, já resolveria (P28, Geometria Analítica, Instrumento 5, Instituição β).

- O professor aponta problemas em relação ao sistema adotado pela Escola Pública, que não tem cumprido o seu papel eficientemente. Há problemas relativos "ao programa de distribuição de conteúdos", "sistema de avaliação, que é o Saresp", e ao sistema de progressão automática.

> Olha, são duas coisas diferentes, sabe, primeiro é em relação a aceitação do ensino da Escola Pública, tá, e outra, ensino em Escola Particular. Então vamos nos focar em Escola Pública, que é o que abarca aí 90% da nossa... da nossa clientela de Ensino Fundamental e 70%, 80% de Ensino Médio. Até 6, 7 anos atrás, antes de estar em vigência o programa de distribuição de conteúdos e sistemas de avaliação, que é o Saresp no Estado de São Paulo, nós tínhamos uma realidade. Hoje, temos outra realidade, né. Então eu vou falar rapidamente das duas: realidade anterior que é uma realidade que deverá voltar no momento em que o Saresp seja reformulado e parece que há um empenho nesse sentido de reformular [...] era uma situação em que razão, proporção, ou mesmo na... na abordagem de matemática financeira, no final do Ensino Fundamental, no ensino médio era tratado, e a gente poderia discutir a forma como era tratado. Atualmente os alunos têm nos trazido a seguinte preocupação, e este ano mesmo eu visitei duas escolas numa oficina com professores de Matemática. As questões estão bastante graves em relação até a abordagem de operações e de

> compreensão de números naturais e números inteiros. Ou seja, quando se trata de números irracionais então, está longe do universo deles, mas de números racionais, pra jovens adolescentes ali de 13, 14 anos, na 7ª e 8ª série. Hoje mesmo um grupo apresentou um seminário sobre isso e disse que eles estão tendo dificuldade de fazer divisões e multiplicações com números de 2 ou 3 algarismos, ta; ou seja, a questão não é nem a compreensão do que é parte, do que não é parte, então uma velha questão muito conhecida sobre perguntar pras crianças de 12 ou 13 anos o que que é maior, se é 0,7 ou 0,17 e isso fazia muito sentido 7 anos atrás. As dúvidas que os alunos traziam disso. Hoje, o que eu tenho percebido, conversando com gente que está lecionando, é que a situação está muito, muito grave. Ou seja, eles nem arriscam resposta. Se o 0,7 é maior ou menor que o 0,17, né. Então, quando essa dúvida aparecia, e aparecia pra 5ª série, ou 4ª série do fundamental, crianças de 10 a 12 anos, era muito razoável. Hoje, de acordo com os nossos alunos, de acordo com o que eu pouco tenho verificado, isso tem aparecido com alunos de início de 2º [ano]. Ou seja, vai trabalhar, por exemplo, com trigonometria, mas ao se abordar radiante, o que significa um radiante? Eles... eles tropeçam na questão mesmo do algarismo na forma decimal, ou mesmo na forma fracionária, não decimal, eu diria que é um, é um foco de grande investigação, especialmente na metodologia de ensino na educação básica. [...] À medida que a reprovação praticamente não existe antes da 8ª série, o conteúdo abordado... Que conteúdo! Ou seja, o resultado de aprendizagem está muito fraco e eu diria que números racionais é um foco de grande interesse pra investigação de vocês (P11, Prática de Ensino e Álgebra, Instrumento 5, Instituição α).

Estas considerações acerca da forma de pensar o ensino dos números racionais, supostamente, não se restringem somente a este conteúdo. Muito provavelmente estas concepções se constituem na visão geral destes professores sobre o que significa ensinar e o que significa aprender. Os cinco últimos excertos correspondem, em maior ou menor escala, ao resumo da visão sobre ensino de 33 dos 41 professores entrevistados. Isto significa que aproximadamente 80,5% dos professores entrevistados têm uma visão eminentemente tradicional do processo educacional, que em maior ou menor grau pode estar refletida nas suas ações em sala de aula. As suposições dos professores a respeito da natureza e do valor do conhecimento matemático e sobre o que significa saber Matemática permearam suas respostas ao conjunto de perguntas da entrevista. Algumas dessas idéias foram compartilhadas extensamente pelos professores entrevistados; entre elas, a mais proeminente diz respeito a conceber a Matemática como uma coleção de definições, propriedades e regras arbitrárias que precisam ser memorizadas.

Aprender a ensinar é visto como um processo que é gerado em contextos diferentes e que às vezes transmitem mensagens contraditórias aos estudantes para professores e revelam algumas dificuldades para que eles façam as conexões das mensagens advindas destes contextos com as suas experiências universitárias

(Llinares e Krainer, 2006). Há evidências de que a *estrutura* adotada pelos programas (Simon, 1988; Tirosh & Graeber, 2003) e o tipo de *tarefas matemáticas* levadas a cabo pelos professores (Zaslavsky et al., 2003) são fatores importantes que encorajam e promovem a aprendizagem matemática dos professores mudando sua prática pedagógica em sala de aula (Llinares e Krainer, 2006). Esta influência também é defendida por Brown (1986) quando afirma que o pensamento dos professores sobre o seu papel na sala de aula também é fortemente influenciado pelo programa universitário vivenciado durante a formação inicial.

Se o processo de formação de professores adotado pela instituição formadora influencia a concepção sobre ensino dos futuros professores, nossos dados sugerem que o desenvolvimento cognitivo dos alunos pesquisados está, em grande parte, situado em um contexto de ensino eminentemente tradicional, em que a transmissão de conhecimentos elaborados é a tônica adotada pela maioria dos professores das duas instituições pesquisadas. Desta forma, as crenças dos alunos em relação a este sistema de ensino não são modificadas. Muito ao contrário, podem ter sido reforçadas.

Para Collins, Brown e Newman (1989), a aprendizagem dos futuros professores de Matemática não acontece apenas pela assimilação passiva de teorias e princípios gerais, mas sim mediante a participação ativa e contextualizada em atividades que incrementem a destreza em resolução de problemas relacionados ao aprender a ensinar, sob a orientação dos formadores de professores. Estas idéias, fortemente ancoradas no trabalho de Lave (1988), têm levado vários pesquisadores (Brown, Collins e Duguid, 1989) a se interessar pelo estudo da cognição situada. Estes autores defendem a idéia de que o conhecimento depende, entre ouros fatores, da atividade, do contexto e cultura nos quais se desenvolve e é utilizado. Estes elementos atuam como referência, nos quais o conhecimento é lembrado, interpretado e utilizado. A atividade aliada às características do contexto no qual o conhecimento está inserido constitui a base do que uma pessoa aprende.

Mousley e Sullivan (1997), citados por Llinares e Krainer, 2006, sugerem que os programas de formação de professores precisam encontrar maneiras de perturbar as concepções sobre ensino-aprendizagem dos estudantes de Matemática, como também alargar os contextos educacionais e sociais, além de criar um ambiente no qual a mudança de concepção sobre ensino dos futuros professores seja um desafio desejado.

Mudar a cultura do ensino tradicional instalada nos cursos de licenciatura pesquisados parece ser uma difícil meta a ser perseguida. Não há um receituário a ser seguido; contudo algumas providências podem contribuir para uma mudança do *status quo*, por exemplo: o desenvolvimento de atividades que explicitem a resolução de problemas como atividade de investigação (Damico, 1997), como proposta metodológica a ser utilizada pelos professores universitários nos diversos componentes curriculares que compõem o curso; o desenvolvimento de atividades em grupo que evidenciem o conhecimento matemático como construção coletiva; a utilização e construção de materiais pedagógicos para o ensino dos conteúdos ensinados da Educação Básica. Em suma, levar os estudantes para professores a vivenciar atividades embasadas em novas propostas metodológicas, para que tenham a possibilidade de transladar esta experiência, com segurança, em sua futura atividade profissional.

Alguns autores (Blanco Nieto, 1996 e Ball, 2000), argumentam que as novas teorias sobre formação de professores conduzem à suposição de que, para os professores ficarem competentes no ensino de Matemática, é necessário que eles aprendam Matemática da mesma maneira como é esperado que eles a ensinem. Desta forma, a preparação de futuros professores na área de Educação Matemática deveria ser focalizada no conhecimento profissional relacionado ao ensino-aprendizagem da Matemática ao nível escolar correspondente ao que eles vão ensinar.

Isto não significa banalizar a Educação Superior ou transformá-la em uma mera revisão dos conteúdos ensinados na Educação Básica. Significa, sim, revisitar os conteúdos da Educação Básica, só que pela perspectiva do seu ensino. Trata-se de estudar estes conteúdos relacionados aos seus aspectos históricos, epistemológicos, psicogenéticos e didáticos voltados para o seu ensino e a sua aprendizagem, não só pelos seus aportes teóricos, como também os concernentes à a prática do professor em sala de aula. Nesta perspectiva, o conhecimento matemático (conceitual e processual) e o PCK, ligados os diversos conteúdos da Educação Básica, são construídos de forma imbricada e devem ter o propósito maior de habilitar o professor para o seu ensino. Todos estes fatores devem estar sintonizados dentro de uma nova cultura institucional e abrangidos pelas teorias renovadoras da Educação Matemática e, especificamente, pelas novas propostas curriculares.

3.3.6 Afinal, os alunos se sentem preparados para ensinar números racionais?

Os alunos concluintes entrevistados passaram por quatro dos cinco instrumentos de coleta de dados utilizados nesta pesquisa. Quando responderam as questões que envolviam a avaliação dos conhecimentos básicos, como as constantes do Instrumento 3, os estudantes para professores tiveram a oportunidade de auto-avaliar os seus conhecimentos em relação aos temas abordados. Por outro lado, o avaliador colocou aquelas questões e não outras porque, supostamente, considerava os conteúdos, conceitos e conhecimentos ali contidos como importantes para a formação de professores de Matemática. Dessa forma, quando perguntamos aos alunos concluintes se eles se sentiam preparados para ensinar números racionais no Ensino Fundamental, é possível que esta questão tenha servido como estratégia metacognitiva que tenha possibilitado a reflexão sobre os pontos que eles se sentiam preparados ou não, tendo como parâmetro as diversas avaliações por que passaram durante a nossa coleta de dados. Isto pôde ser captado pois muitos dos alunos entrevistados se remetiam aos diversos instrumentos de coleta de dados, em especial o Instrumento 3, para tecerem suas considerações.

Dos 15 alunos entrevistados 14 declararam que não se sentem preparados para ensinar números racionais (ou frações, como dito pela maioria). Percebemos, também, que os alunos têm metacognição aguçada, são conscientes das suas limitações, sabem avaliar sua própria formação e relatam suas preocupações em relação ao seu futuro profissional. A maioria dos alunos entrevistados é consciente de que existem métodos de ensino que superam em eficácia o ensino tradicional, mas em contrapartida reclamam não terem discutido estas possibilidades didáticas durante o processo de formação. Percebem que existem lacunas importantes na sua formação que só serão preenchidas com esforço pessoal em um processo contínuo de desenvolvimento profissional, que ocorrerá após a conclusão do curso universitário.

Apenas um dos alunos concluintes entrevistados admitiu estar preparado para ensinar números racionais. Embora tenha sentido dificuldades no momento de responder as questões do Instrumento 3, o aluno se sente capaz de pesquisar e aprender sozinho aquilo que não aprendeu durante o período de permanência na faculdade:

> Dúvidas eu senti, mas preparada eu sinto que estou. Mesmo porque eu já dei aula de reforço, né? Então, mesmo alguma coisa que a gente tem alguma dificuldade, a gente vai atrás, estuda e na hora você consegue. Tem condições de assimilar aquilo na hora, né? Eu vi que eu tive algumas dificuldades, principalmente em coisas simples... é... representar multiplicação no concreto, né? Então eu vi que eu preciso estudar essa parte. Mas acho que eu sou capaz (A160, concluinte, Instrumento 4).

Os demais alunos entrevistados (14) admitiram inseguranças e preocupações em relação a sua formação. As respostas dadas pelos alunos A151 e A253, quando questionados se estão preparados para lecionar, retratam bem o posicionamento da maioria absoluta dos alunos entrevistados:

> Não. Eu me sinto extremamente preocupado. Extremamente preocupado porque... eu acho que ainda vou ter que fazer ainda muita... muita pesquisa. Eu ainda vou ter que procurar esmiuçar ao máximo as dúvidas, né, as lacunas e os trechos obscuros ainda na minha mente. Ainda para eu não acabar adotando aquela teoria de chegar na sala e colocar alguma coisa na lousa e falar: – olha, é isso porque eu disse e pronto! Isso me preocupa muito porque a questão de você chegar na sala e, assim, e como você não... você não saber sanar a dúvida do aluno e acabar impondo aquilo, né? E... e acabar gerando traumas. Acho que é assim... e... é exatamente por causa dessa questão da imposição é, assim, um ponto que eu acho que, assim, muitas pessoas até hoje ainda têm tanta aversão à Matemática (A151, concluinte, Instrumento 4).
>
> É... não. Preparação nesse curso a gente não teve assim não. Tem que sentar e preparar uma boa aula. E... usar recursos audiovisuais, enfim, fazer alguma coisa. Mas... se falar assim: não... chegar pra mim amanhã e... você vai dar aula pra uma sexta série, fica meio difícil. A insegurança é... quer dizer pra [incompreensível] é fácil, mas quando eu peguei pra fazer a primeira e a segunda [referia-se as questões do instrumento 3], você vê que é meio... complicado mesmo. Quer dizer, se é complicado pra você resolver, pra ensinar acho que é mais complicado ainda (A253, concluinte, Instrumento 4).

Seria esperado que os cursos de Licenciatura em Matemática, como em qualquer curso universitário, trabalhassem os conhecimentos profissionais, teóricos e práticos, necessários ao exercício da profissão escolhida. Mais do que isto, seria desejável que os conhecimentos profissionais construídos durante o curso fossem embasados e estivessem ancorados em teorias e práticas que contemplassem os avanços científicos relacionados com a área de formação. As teorias provenientes do conhecimento científico em Educação Matemática não devem ser entendidas como fontes infalíveis de resolução de problemas sobre o ensino e sobre a aprendizagem. Elas são elaboradas para explicar determinados fenômenos e nos podem ser útil para que possamos refletir, balizar e confrontá-las com os dados concretos do nosso cotidiano profissional. Este é o parâmetro que nos permite avaliar os limites de sua abrangência e eficiência.

A universidade é por excelência o lócus da construção de conhecimento científico. Desta forma, o estudo dos avanços científicos em sua área de conhecimento, por intermédio da pesquisa, deve ser um instrumento indispensável ao professor universitário no ato de preparar o seu curso. Os saberes que são veiculados nas mais diferentes disciplinas que compõem o curso devem ter como objetivo propiciar uma reflexão e discussão atualizada destes saberes. Pensemos, por exemplo, em um curso de Odontologia ou Engenharia Civil em que os alunos não tenham contato durante o curso com os avanços tecnológicos nas suas futuras áreas de atuação, em termos de conhecimento de materiais e técnicas. Assim como novos materiais odontológicos ou para a construção civil são descobertos diariamente, novas técnicas são testadas e aprovadas com sucesso em ambas as áreas. Na Educação Matemática avanços também acontecem. É importante que os estudantes tenham uma formação em que, na medida do possível, as diferentes disciplinas que compõem o curso apresentem uma ciência atualizada com estes avanços.

3.3.7 A alternativa será aprender quando tiver que ensinar o assunto

Conscientes de que a universidade deixou a desejar em relação a sua preparação para o ensino dos números racionais, os estudantes para professores propõem alternativas para aprender quando tiver que lecionar este assunto. Uma das possibilidades de solução seria recorrer a colegas de profissão mais experientes:

> Ah, se eu for, por exemplo, vamos supor, eu saio agora em janeiro, se logo em março eu catar, eu pegar uma aula que tenha que explicar isso aí, a dificuldade vai ser imensa. Vou ter que correr bastante atrás de professores que já tão na área, pra me dá uma luz, melhor... (A135, concluinte, Instrumento 4).
>
> É... pra explicar, assim, através de gráficos, como fazer, eu acho... eu creio que vou ter dificuldade, né? Porque eu vou adquirir essa experiência ainda. A idéia do processo matemático, do processo da Álgebra, eu sei, eu entendo, eu compreendo. Só que pra explicar essa parte, eu nunca... nunca passei por isso, né? Então, eu não... não consigo assim achar materiais pra trabalhar isso, né? (A229, concluinte, Instrumento 4).

A fala do aluno A229 revela despreparos já salientados anteriormente; contudo, chama a atenção a frase: “Porque eu vou adquirir essa experiência ainda.

[...] eu nunca passei por isso, né? [...] Então, eu não... não consigo assim achar materiais pra trabalhar isso, né?". Observamos teor análogo na fala de outros alunos. A impressão que nos passou, mesmo admitindo certo grau de subjetividade, foi a de que os alunos parecem encarar com certa naturalidade uma desvinculação dos saberes teóricos discutidos na universidade com os aspectos práticos relacionados a sua profissão. A prática viria depois e seria naturalmente adquirida com o exercício da profissão

Uma outra alternativa de preencher as lacunas deixadas pela formação universitária foi apontada pelos alunos A133 e A280: recorrer aos livros e estudar o assunto:

> Eu preciso primeiro fazer um estudo bem aprofundado pra aprender e depois passar. Porque aluno é fogo. Aluno pergunta tudo. Pega a gente de surpresa. Tem que tá bem preparado. Inclusive nesse ponto que eu não estou, que eu não apresentei bom resultado, eu voltaria aos livros, né, e reestudaria todo o assunto aí atrás, né? Então eu não me sinto. Respondendo à questão, eu não me sinto preparado no momento pra explicar. Se fosse hoje pra dar uma aula particular, não tava... (A133, concluinte, Instrumento 4).

> Tô até com os livros de sexta série aí, pra você vê o que que você pode pegar pela frente, né? Você chega lá pra dar uma aula de cálculo, você pode dar na quinta ou na oitava. Então, então você pega [incompreensível] tipo eh..... Pitágoras, essas coisas assim que mais se dá, né. Fração, as coisas que mais se dá, aí você pega esse tópico e estuda ele pra você. Vamos supor, chega lá num livro de oitava série, mas não é porque você tá se formando em Matemática que você vai dominar, né? Como todo mundo pensa: agora fiz Matemática, então reserva esse aqui pra mim que dá na mão pra você resolver. Acho que aí não... não é por aí. Você tem que estudar o que você vai dar. Não é chegar assim: ah, peguei o canudo aqui, vou em um monte de escola e entrego o currículo e os cara me chamam, eu chego lá e o que é que eu vou dar? Vou dar fração.... ah, eu podia dar fração. É assim. Então, eu vou ter que fazer um estudo legal do que dá entre a quinta e oitava... fazer um estudo bem... bem mais aprofundado, né, de quinta a oitava porque o que a gente tá aprendendo hoje, tá totalmente fora da realidade da quinta a oitava (A280, concluinte, Instrumento 4).

É claro que defendemos a pesquisa como fonte de construção de conhecimentos. O problema reside na escolha destas fontes. Concordamos com Ball e McDiarmid (1990) quando dizem que os livros-textos se constituem em importantes fontes de pesquisa e de aprendizagem; contudo, esta aprendizagem deve ser vista com cautela, uma vez que muitos livros-textos, principalmente os destinados à Matemática elementar, freqüentemente apresentam uma visão algorítmica dos conteúdos matemáticos. Assim, em muitos casos, a pesquisa acaba por resultar em uma rememoração de definições e regras que pouco contribuem para uma mudança didática nos moldes que vimos discutindo neste trabalho.

Segundo estes autores, aprender pelos livros, embora possa ajudar a aclarar alguns conceitos para os professores, pode também contribuir para a perpetuação de representações inexatas da matéria.

Em vários pontos desta pesquisa denunciamos as dificuldades dos alunos em relação a muitos aspectos importantes atinentes ao seu conhecimento matemático e ao PCK sobre números racionais. Relembrando Ma (1999), um professor com profundo conhecimento de Matemática elementar que apresenta uma série de características que denotam senso crítico aguçado em relação aos diversos conteúdos que deve ensinar, por exemplo: fazem conexões entre conceitos e procedimentos evitando que a aprendizagem dos alunos seja fragmentada; se utilizam de abordagens diversificadas para resolução de um problema, desse modo o professor pode guiar os seus alunos em uma direção flexível e compreensível da Matemática; têm uma atitude favorável em relação à Matemática, têm a tendência de revisitar e reforçar idéias importantes; não se limitam ao conteúdo que têm que ensinar naquele ano de escolaridade, têm conhecimento profundo de todo o currículo, sabem transitar com desenvoltura entre os conteúdos já estudados e os que os alunos ainda terão que estudar. Os resultados obtidos nesta pesquisa evidenciam que os problemas encontrados relativos ao conhecimento matemático e didático dos alunos concluintes pesquisados podem imputar-lhes limitações severas no que se refere a estas importantes características, relatadas por Ma (1999), concernentes aos professores que têm um profundo conhecimento de Matemática.

CONCLUSÕES E REFLEXÕES

Em vários momentos deste trabalho defendemos a idéia de que para ser um bom educador na área de Matemática o professor precisa ter desenvolvido conhecimentos específicos e habilidades que são complementares ao conhecimento relacionado às estruturas matemáticas e aos algoritmos. A natureza do conhecimento profissional do professor de Matemática, sua gênese, origem, fontes, sua organização e, sobretudo, o processo que leva uma pessoa à sua construção é um problema de pesquisa que tem sido abordado por várias frentes, mas que ainda hoje as respostas que temos só nos permitem compreender uma parte limitada da sua solução. Também é bastante difundida a idéia de que os problemas relacionados ao ensino-aprendizagem enfrentados pelos professores, as limitações e dificuldades encontradas por eles no desenvolvimento do seu trabalho profissional no sistema educativo, mostram a necessidade de que a formação de professores de Matemática, tanto inicial quanto continuada, esteja fundamentada em outro paradigma.

A Educação Matemática é um campo de investigação que tem acumulado ao longo dos últimos 30 anos experiências e resultados importantes derivados das pesquisas e avanços no campo da educação, em especial dos estudos sobre a psicologia e sociologia do conhecimento; do desenvolvimento da Educação Matemática e da profissionalização crescente dos educadores. Estes avanços nos permitem conhecer melhor as necessidades formativas dos professores e, como conseqüência, também nos apontam a dimensão do desafio.

É importante que os professores de Matemática tenham conhecimentos sólidos sobre os fundamentos teóricos e práticos envolvidos no currículo da Educação Básica. Limitações teóricas severas em relação ao ensino e à aprendizagem dos conteúdos que um dia eles terão que ensinar podem contribuir para limitações à prática docente igualmente severas. Assim uma formação teórica e prática inadequada pode conduzir os professores a uma docência que prima pelo pragmatismo de uma didática de senso comum

Entre todas as componentes importantes relacionadas ao conhecimento profissional dos professores de Matemática, uma delas tem sido muito evidenciada nos últimos vinte anos: a formação matemática do professor. Os conteúdos da Matemática “elementar” estudados na Educação Básica consistem na componente fundamental do trabalho do professor em sala de aula e sua formação deveria habilitá-lo para o seu ensino. Temos defendido ao longo deste trabalho, juntamente de pesquisadores como Lee Shulman, Deborah Ball, Liping Ma, Salvador Llinares, entre outros, que o conhecimento matemático é uma componente extremamente relevante da formação de um professor de Matemática; porém, embora necessária, só esta componente não é suficiente. Como resume Rico (1998), “aos professores não basta somente dominar os conteúdos técnicos de sua matéria. O campo de atuação em que o professor de Matemática tem que desempenhar sua tarefa como educador necessita de conhecimento didático do conteúdo”. É evidente que há outras componentes do conhecimento profissional tão essenciais quanto estas. Estamos enfatizando estas duas em função do recorte que nos propusemos a estudar nesta investigação e ainda particularizadas para o ensino dos números racionais.

Procuramos durante todo o capítulo destinado a análise dos dados buscar o maior número possível de elementos que nos permitissem responder a seguinte pergunta:

> **Os alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática estão saindo das Universidades pesquisadas com uma formação que os capacite para o ensino dos números racionais no Ensino Fundamental?**

O conjunto de evidências que possibilitaram responder a esta questão foi agrupado em três unidades de análise, que passamos a resumi-las a seguir.

Unidade de análise 1

Na primeira unidade avaliamos o conhecimento matemático (conceitual e processual) dos estudantes para professores em relação ao conceito de número racional e a cinco subconstrutos ou significados das frações: parte-todo; operador; quociente ou divisão indicada; medida e coordenada linear.

Os Instrumentos 1 e 2 mostraram que o repertório conceitual espontâneo dos alunos segue a seguinte tendência conceitual:

1º O maior número de problemas (43,6%) criados pelos alunos concluintes envolvia **resolução de expressões** com números racionais. Estes dados revelam uma forte tendência algorítmica;

2º Problemas que tinham o subconstruto **operador** como principal conceito envolvido na questão apareceram em 17,6% das questões criadas. Foi o que obteve maior freqüência entre os subconstrutos;

3º **Parte-todo** apareceu em 11,2% das questões. Foi o segundo com maior freqüência entre os cinco subconstrutos;

4º **Divisão indicada** aparece em terceiro lugar com 7,3%;

5º **Medida** aparece com 0,4%; e

6º **Coordenada linear** foi o subconstruto menos lembrado pelos alunos concluintes. Este conceito foi utilizado em apenas 0,2% dos problemas.

Os demais problemas criados pelos alunos envolviam outros conceitos, como equivalência, relação de ordem, obtenção da fração geratriz de um determinado número racional dado na forma decimal etc.

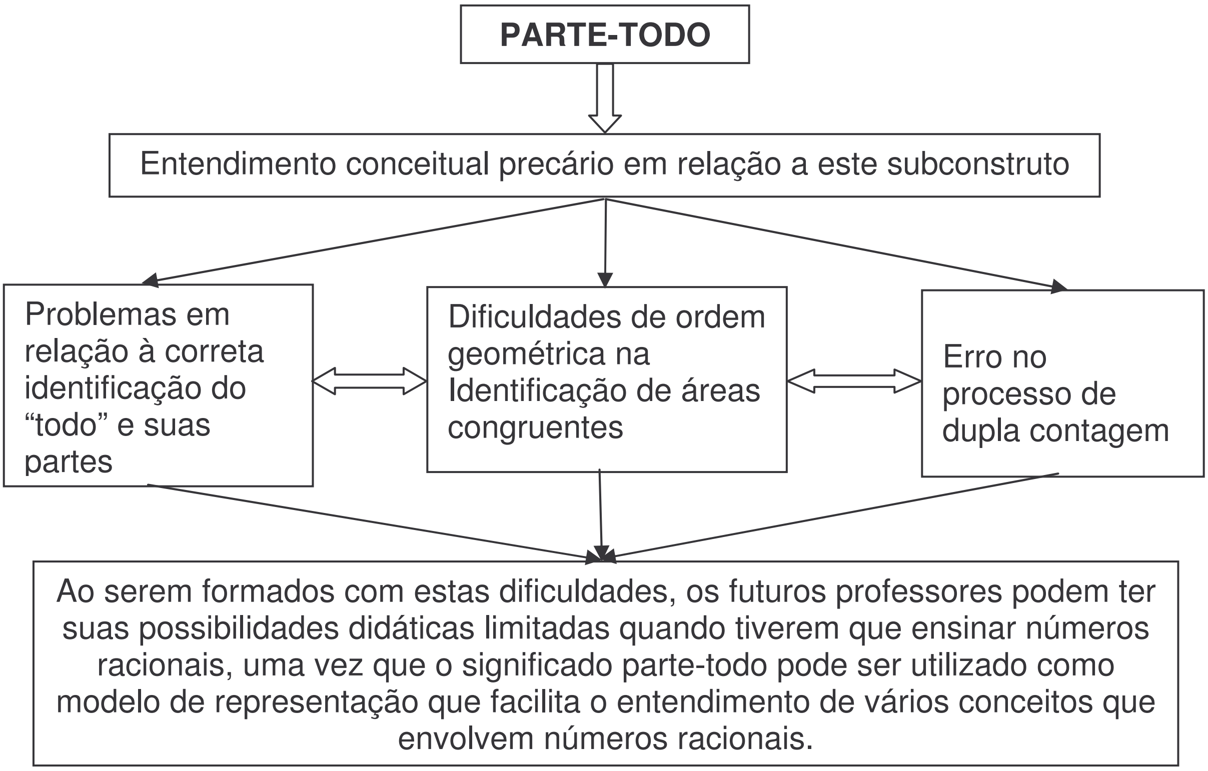
A título de síntese apresentaremos a seguir um resumo das principais evidências relacionadas ao conhecimento dos subconstrutos por parte dos estudantes para professores.

a) Parte-todo

O subconstruto parte-todo foi o segundo significado mais presente no repertório conceitual dos alunos concluintes nos problemas por eles criados no Instrumento 1. Aproximadamente metade dos estudantes para professores estabeleceu espontaneamente uma associação entre o conceito de fração e o significado parte-todo, na criação e resolução de questões envolvendo este assunto.

Os dados extraídos do Instrumento 3 nos levam à constatação de que a maioria dos estudantes para professores somente identifica corretamente frações, em modelos contínuos (barras de chocolate, pizzas, bolos), quando estas estão associadas a situações simples, ou seja, representações em que o "todo" foi dividido em partes claramente congruentes. Ressalta-se, também, pelos resultados obtidos que o percentual de acertos na maioria dos itens da questão que abordava o conhecimento da relação parte-todo é maior por parte dos alunos iniciantes do que dos concluintes.

Em termos de concepções errôneas alguns focos de dificuldades foram identificados e estão resumidos no diagrama a seguir:



b) Operador

Entre os cinco subconstrutos considerados neste trabalho o operador foi o conceito que apareceu com maior freqüência nos problemas criados pelos alunos concluintes. 52,9% dos alunos criaram pelo menos um problema envolvendo este significado. Também foi um dos subconstrutos que apresentou maior índice (aproximadamente 75%) de acertos nos dois problemas propostos no Instrumento 3 que envolviam este conceito. Registra-se o fato de que 20 pontos percentuais separam iniciante a favor dos concluintes relativamente ao número de acertos nestas duas questões. Isto sugere um maior amadurecimento dos alunos concluintes quanto aos aspectos algébricos envolvidos no subconstruto operador.

As maiores dificuldades encontradas pelos estudantes para professores neste subconstruto puderam ser identificadas por intermédio da análise dos problemas formulados e resolvidos nos Instrumentos 1 e 2, respectivamente, e podem assim ser resumidas:

- Situações-problema criadas em que os alunos não identificavam o “todo” sobre o qual o operador deveria incidir;
- Operações realizadas em conjuntos discretos como se fossem contínuos;
- Utilizavam frações próprias em contextos inadequados. Muitas vezes estas frações próprias eram manipuladas como se fossem números inteiros (João comprou 2/3 de feijão e seu irmão comprou 2/5, quantos feijões compraram os dois juntos? A345).

c) Divisão indicada

No tocante à divisão indicada as concepções espontâneas dos alunos concluintes revelam que aproximadamente 34% dos estudantes para professores utilizaram este conceito nos problemas que criaram. As situações propostas eram simples, e em aproximadamente metade delas era proposta a divisão entre o numerador e o denominador de uma fração dada.

A fração vista como a divisão entre numerador e denominador apresentou alguns problemas operacionais: 41,8% dos alunos iniciantes e 31,8% dos concluintes erraram ou não executaram com sucesso a operação $2 \div 7$. A utilização da calculadora para realização deste tipo de cálculo durante as aulas foi uma alegação para justificar o distanciamento deste tipo operação e, conseqüentemente, o esquecimento de seus procedimentos.

No que concerne à resolução de situações-problema envolvendo divisão indicada (cinco barras de ouro divididas para nove pessoas), nossos dados revelam que aproximadamente metade dos alunos concluintes apresentou uma solução aceitável para esta questão.

d) Medida

Nossa investigação aponta para o fato de que os alunos concluintes não fazem espontaneamente uma associação das frações com o conceito de medida. Apenas 0,4% das questões criadas por eles envolvia este subconstruto.

Quanto a resolver problemas relacionados a este conceito, percebemos que, em média, 70% dos alunos acertaram a questão proposta no Instrumento 3. Há uma paridade entre os percentuais de acertos apresentados pelos iniciantes e concluintes neste quesito.

e) Coordenada linear

Identicamente ao caso anterior, a associação das frações com pontos sobre a reta numerada não foi um conceito espontaneamente valorizado pelos alunos nas questões por eles criadas. Contudo, ao serem solicitados a localizar frações em uma semi-reta numerada, nossos dados mostram que aproximadamente 75% dos alunos são proficientes nesta tarefa, quando as frações dadas eram próprias ou impróprias. Os alunos sentiram maior dificuldade com frações mistas, uma vez que o percentual de acertos cai para 54% quando este tipo de fração foi utilizado.

De forma geral, esta unidade de análise nos mostrou uma série de aspectos relacionados ao conhecimento dos estudantes para professores, sobre os subconstrutos dos números racionais, que de certa forma revelaram seus elementos idiossincráticos. Observa-se uma acentuada falta de base teórica que leva os alunos a agir de acordo com a sua visão particular sobre os problemas apresentados e não por uma conduta pautada pela cientificidade. Os elementos teóricos evidenciados nas formulações e resoluções das questões, bem como os explicitados nas entrevistas com os alunos, são fatos acusatórios de uma formação deficitária nesta área.

A proximidade nos percentuais de acertos nas questões do Instrumento 3, entre iniciantes e concluintes, na maior parte dos itens avaliados e, em alguns casos, há até mesmo uma diferença desfavorável aos concluintes, são elementos que nos levam à conclusão de que o curso universitário não contribuiu para um incremento de conhecimentos dos alunos a respeito deste assunto. Tudo leva a crer que a *performance* dos estudantes para professores, revelada na análise dos diferentes Instrumentos, constitui-se na explicitação dos conhecimentos construídos pelos alunos durante sua permanência na Educação Básica e não na Educação Superior.

Um olhar amplo sobre os resultados obtidos sugere que estes futuros professores são carentes no que se refere à parte conceitual dos subconstrutos; há proficiência apenas nos aspectos algébricos envolvidos nos conhecimentos avaliados. Esta limitação teórica gera limitações de igual ordem sobre o PCK destes estudantes para professores. Como a proficiência se dá nos aspectos algorítmicos, uma hipótese bastante razoável é a de que o PCK dos futuros professores esteja fortemente influenciado pelo processo algorítmico dos números racionais.

Há, sob o nosso ponto de vista, a necessidade de que o estudo detalhado dos subconstrutos dos números racionais tivesse presença garantida no currículo dos cursos de licenciatura em Matemática. Esta inserção é plenamente justificada pelas dificuldades conceituais inerentes a este assunto e que não são facilmente dirimidas sem um estudo detalhado da sua natureza e composição por parte dos professores em formação. Os aspectos teóricos apresentados na fundamentação teórica e a análise da *performance* dos estudantes podem se constituir em uma base de informações que permita uma discussão e reflexão fundamentada sobre as reais necessidades formativas destes futuros professores.

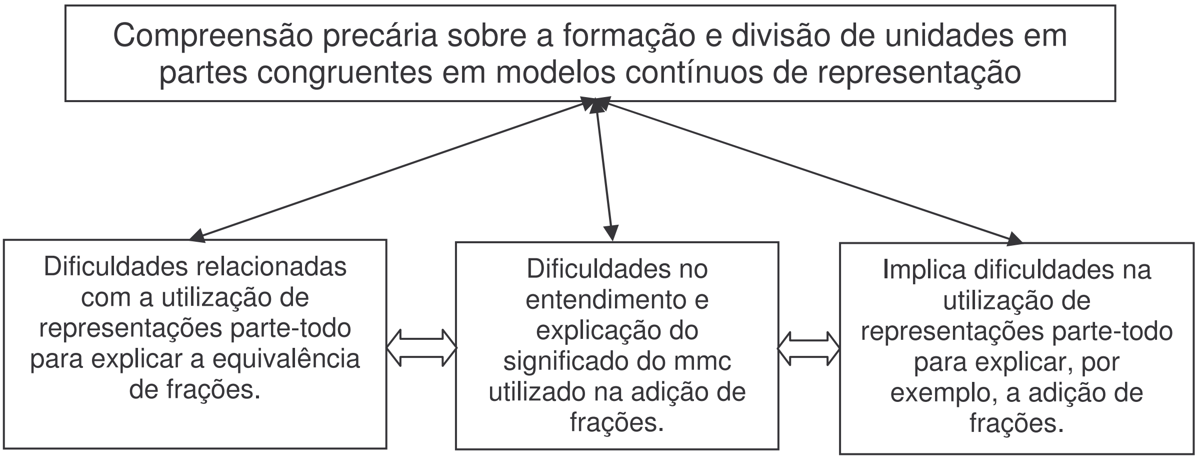
Unidade de análise 2

O conhecimento matemático e o PCK no tocante às operações básicas com frações (adição, multiplicação e divisão) foram objeto de reflexão na unidade de análise 2.

A utilização de diferentes modos de representação no ensino de conceitos de números racionais é uma forma interessante de compartilhamento de significados entre professor, alunos e objeto do conhecimento. Um bom sistema de representação pode servir como um recurso didático, mais um elemento a que o professor pode lançar mão para auxiliar a aprendizagem dos alunos. Funciona como mais uma forma de linguagem que pode servir como ponte facilitadora de acesso à simbologia matemática.

O estudo que realizamos sobre o conhecimento conceitual dos estudantes para professores a respeito das operações básicas com frações revela um quadro preocupante. O plano do fazer supera em muito o plano do compreender o que se faz. Há um desequilíbrio acentuado entre o entendimento conceitual e processual, diversas vezes ressaltado nesta pesquisa.

Observamos que muitas das dificuldades encontradas pelos alunos, em termos de construções de representações geométricas das operações com frações, têm a sua gênese nos débeis conhecimentos conceituais relativos aos subconstrutos, que acabam por gerar uma cadeia de problemas. Autores como Kieren (1980) e Romanatto (1997) defendem a idéia de que uma completa compreensão dos números racionais envolve não só o conhecimento de cada um dos subconstrutos isoladamente, como também de sua compreensão de forma inter-relacionada em uma rede de significados. A habilidade na utilização de modelos de representações (por exemplo, parte-todo) para explicação de um determinado conceito, como adição de frações, necessita de alguns conhecimentos básicos que atuam de forma inter-relacionada no momento de explicar a operação por intermédio de representações, como ilustrado a seguir:



De forma bastante ampla, os estudantes para professores apresentaram desconexão entre os diferentes conceitos que levam à compreensão ampla dos números racionais. As dificuldades dos estudantes, reiteradamente apontadas durante o processo de análise dos dados, nos levam à conclusão de que esta falta de conexão se dá por dois motivos: primeiro, há um precário entendimento conceitual que inibe o trânsito entre as principais idéias intrínsecas a cada um dos subconstrutos; segundo, esta compreensão precária e isolada de cada um dos significados das frações gera a falta de conexão ampla entre eles e dificulta sua utilização para explicação de outros conceitos, tais como equivalência, relação de ordem, operações aritméticas etc. Consideramos esta evidência como um sério fator limitante do PCK dos futuros professores para o ensino de números racionais.

Estas não são as únicas limitações do PCK relacionado ao ensino das operações básicas. Observamos que a falta de conhecimento conceitual da aritmética das frações também é responsável pela dificuldade de utilização de representações que "traduzam" os conceitos envolvidos nas operações básicas. Assim, o problema se apresenta por uma duplicidade de vertentes: por um lado a dificuldade própria advinda do não-conhecimento de sistemas de representação; por outro, a debilidade do conhecimento conceitual relacionado à operação básica com frações apresentada pelos alunos.

Uma implicação que deriva da análise realizada é que a maioria dos alunos das universidades pesquisadas está sendo formada com uma precária preparação didática. O PCK relativo aos números racionais requer não só habilidade para explicar com maestria os procedimentos algorítmicos das operações com frações, mas envolve, sobretudo, um profundo conhecimento conceitual dos conteúdos relacionados a este assunto que são estudados na Educação Básica. Isto é o que diferencia uma pessoa comum que sabe efetuar as principais operações com frações de um bom professor de Matemática. Saber selecionar e hierarquizar conteúdos, avaliar a sua importância e as suas dificuldades, preparar e implementar atividades de ensino utilizando recursos variados, com o objetivo de potencializar algum significado específico dos números racionais, são aspectos inerentes ao PCK. O desenvolvimento destas habilidades no futuro professor requer a implementação de um currículo em que o conhecimento da matéria de ensino e o PCK sejam tratados de forma imbricada.

Unidade de análise 3

Na terceira unidade de análise apresentamos os resultados de nossa investigação sobre as formas como os números racionais são introduzidos nas diferentes disciplinas que compõem os cursos pesquisados. A partir das declarações dos professores e alunos entrevistados, foi possível constituir um quadro geral do modelo de formação praticado pelas universidades pesquisadas em relação ao ensino dos números racionais, como também uma análise das concepções dos formadores de professores sobre as necessidades formativas dos futuros professores.

Falta um entendimento explícito dos conceitos e dos princípios envolvidos nos conteúdos sobre números racionais normalmente estudados no Ensino Fundamental. O plano do fazer supera o plano do compreender Matemática. A maioria dos assuntos que envolvem números racionais que os estudantes têm contato está imersa em um número bastante grande de procedimentos formais, precisamente delimitados e destinados a obter respostas a classes específicas de problemas ou exercícios. Os alunos concluintes estão terminando os cursos com certa habilidade na aplicação de algoritmos envolvendo números racionais; contudo, sem conhecer a gênese, os conceitos e a metodologia de funcionamento das teorias que os originaram. Esta falta de experiência dos estudantes para professores no trato com a parte conceitual subjacente aos números racionais limita de maneira significativa a sua habilidade e flexibilidade no enfrentamento de problemas inéditos envolvendo este conceito. Nossa investigação nos conduz à compreensão de que o processo de formação vivenciado por estes estudantes para professores foi conduzido para que eles conhecessem uma Matemática pronta, acabada e compartimentalizada, não adquiriram habilidade concernente aos processos e metodologias que conduzem à obtenção de resultados importantes nesta área do conhecimento.

Consideramos desejável que os saberes relacionados com a construção do conhecimento profissional dos futuros professores de Matemática tivessem como objetivo a formação de um profissional intelectualmente autônomo, crítico e responsável pelos seus atos. Profissionais com capacidade para criar e implantar projetos educacionais no âmbito do seu ambiente de trabalho, além de ter desenvolvido suficientemente sua metacognição, sendo capaz de refletir racionalizadamente sobre seu desempenho, como também sobre o desempenho de seus alunos. Isto não se consegue sem bases teóricas e instrumentos conceituais bem construídos, que permitam ao professor planejar seu trabalho e tomar decisões fundamentadas.

Há uma descontinuidade flagrante entre a base conceitual com que chegam os alunos para a universidade, os assuntos que são estudados efetivamente na universidade e as necessidades formativas dos futuros professores para o ensino dos números racionais. O processo que leva a uma complementação do currículo de Matemática desenvolvido na Educação Básica, até a Matemática estudada nas diversas disciplinas que compõem a grade curricular dos cursos de licenciatura, é bastante delicado, que envolve, entre outras questões, uma avaliação abrangente dos conhecimentos que os alunos trazem para a faculdade. Nossa investigação mostra que os alunos estão iniciando o curso universitário com uma base conceitual bastante deficitária e, por outro lado, apenas alguns aspectos desta defasagem são corrigidos durante o curso. Uma maior atenção aos conhecimentos prévios dos alunos nos parece ser uma primeira ação para se refletir sobre o currículo de formação.

O currículo desenvolvido pelas duas universidades pesquisadas gera uma formação inicial desequilibrada. Observa-se um enfoque predominantemente técnico dos conteúdos matemáticos e uma parca valorização dos componentes didáticos necessários ao exercício da profissão. Há também um descompasso entre o conhecimento matemático vivenciado pelos estudantes para professores na Educação Básica e os conhecimentos matemáticos veiculados na Educação Superior. A matriz curricular desenvolvida pelas universidades pressupõe uma continuidade e uma complementaridade dos conteúdos matemáticos na Educação Básica. Tudo leva a crer que os conteúdos da Educação Básica são tomados como sabidos e a partir daí a complementaridade é implementada.

Os conteúdos da Educação Básica constituem-se em um dos componentes essenciais do conhecimento profissional do professor de Matemática. Defendemos ao longo deste trabalho a idéia de que o conhecimento destes conteúdos por parte do professor tem duas dimensões indissociáveis: o conhecimento matemático e o PCK. Verificamos que, pelo menos no que tange aos números racionais, estes conteúdos não são revisitados no curso universitário, nem do ponto de vista dos aspectos matemáticos, e, muito menos, nos seus aspectos didáticos. Desta forma, uma boa parte dos conhecimentos conceituais sobre frações apresentados pelos estudantes para professores nos Instrumentos de coleta de dados não passa de rememorações, reminiscências do que os alunos conseguiram se lembrar do que aprenderam na Educação Básica.

Reflexões

O professor é o agente principal da colocação em prática do currículo de Matemática. Por este motivo é necessário que ele tenha uma formação diversificada, profunda e equilibrada. A matriz curricular dos cursos pesquisados mostra claramente que a tônica do processo formativo está calcado na preparação matemática do professor. Para administrar as complexas relações existentes entre teoria e prática pedagógica em sala de aula, são necessários conhecimentos teóricos e práticos que dificilmente são conquistados apenas com uma formação matemática sólida. Incrementar o estudo de conteúdos relacionados ao PCK nos parece ser uma questão necessária. Contudo, assegurar que estes conhecimentos sejam inseridos no currículo de formação não nos garante que o futuro professor colocará em prática estes conhecimentos tal e qual foram veiculados durante o processo de formação. O desafio está em tornar o período de permanência dos estudantes na universidade um período de constantes teorizações, discussões e reflexões vinculadas à prática, sobre os aspectos teóricos e metodológicos que as pesquisas têm apontado como mais eficientes, quando comparados com o ensino tradicional.

A utilização de sistemas de representação como recurso facilitador da aprendizagem de conceitos relacionados às frações não se constitui em único recurso didático, nem tampouco o mais importante deles. Este foi **um** aspecto do PCK que nos propusemos a estudar. Há uma série de outras possibilidades igualmente poderosas que o professor pode utilizar e que podem auxiliar a construção de significados por parte dos alunos do Ensino Fundamental. Conhecer uma variedade grande de recursos didáticos parece ser uma condição essencial da formação de professores de Matemática. Assim, entendemos que o estudo sobre a formação de professores em relação a outros componentes do PCK, tais como o conhecimento dos alunos; conhecimentos teórico e prático sobre a utilização eficiente de materiais concretos; *softwares* etc., para ensino dos números racionais, merece uma atenção especial e poderia ser alvo de futuras investigações.

Uma avaliação geral dos resultados desta investigação aponta para a necessidade de reflexão sobre um outro ponto que julgamos importante: conteúdos de Matemática Pura e Aplicada de nível superior *versus* conteúdos da Matemática "elementar" ensinada na Educação Básica. Qual deve ser a relação e a dosagem entre estes componentes curriculares para melhor formar o professor? O modelo atual de formação mostrou-se ineficaz, uma vez que reiteradas vezes denunciamos o despreparo dos futuros professores para o ensino dos conteúdos relacionados aos números racionais que um dia eles terão que ensinar. Será que isto também ocorre com outros conteúdos ou é específico deste conteúdo?

Nossa reflexão sobre este tipo de problema, e que merece um estudo mais específico, aponta para a necessidade de um redirecionamento metodológico de como os assuntos da Educação Básica são tratados em um curso de licenciatura. Entendemos que os conteúdos da Educação Básica devem ser retomados; porém, não como mera rememoração teórica, mas sim com uma abordagem epistemológica que contemple os múltiplos aspectos relacionados ao seu ensino. Isto envolve o estudo de sua parte conceitual, metodológica e psicológica de forma inter-relacionada que tenha como objetivo básico prover os estudantes para professores de uma preparação para o ensino destes conteúdos, respeitando o grau de desenvolvimento e amadurecimento dos alunos a que se destinam.

Pesquisas relacionadas ao caráter situado da cognição, como as desenvolvidas por Brown, Collins e Duguid (1989), propiciaram a abertura de um vasto campo de estudos não só em relação à aprendizagem dos alunos da Educação Básica, como também sobre a formação de professores. Uma das conclusões importantes advindas destas investigações é a de que seria importante que os futuros professores vivenciassem, como alunos, experiências didáticas semelhantes àquelas que um dia terão que conduzir como professores.

É fundamental que os futuros professores estudem em um ambiente de aprendizagem que cultive a construção significativa dos conceitos matemáticos. Professores com este tipo de preparação estariam mais seguros para propor tarefas ou atividades para os seus alunos, baseadas nesses procedimentos metodológicos, uma vez que vivenciaram esta experiência.

De forma geral, e como resposta à nossa questão de pesquisa, podemos dizer os estudantes para professores estão terminando os cursos de licenciatura em Matemática nas duas instituições pesquisadas com uma visão sincrética dos números racionais. A visão que se tem hoje sobre os conhecimentos necessários a uma boa construção do conceito de número racional, por parte dos alunos do Ensino Fundamental, está muito além dos conhecimentos apresentados pelos alunos concluintes dos dois cursos pesquisados. O currículo desenvolvido por estas instituições, no tocante à preparação dos futuros professores para o ensino dos números racionais, está em descompasso com os avanços científicos nesta área. Entendemos que o currículo de formação de professores de Matemática não pode nem deve ser monolítico. A busca do melhor processo de formação requer dos formuladores de currículo uma mudança de concepção que envolve, entre outras questões, um contínuo processo de pesquisa, reflexão cientificamente fundamentada, discussão e flexibilidade para aceitar modificações e adaptações. Entendemos que ensinar e aprender é essencialmente uma atividade que requer investigação contínua. Só esta dinâmica, associada a um esforço pessoal e coletivo, pode mudar a cultura enraizada nos cursos de licenciatura em Matemática e corrigir as falhas observadas. Para finalizar, é importante ter em mente que uma mudança de paradigma no processo de formação de professores de Matemática não ocorre prontamente do dia para noite. Quando mudanças que valorizem a formação didática dos futuros professores começarem a ser implementadas nos cursos de licenciatura, é possível que novas concepções ainda convivam com velhos procedimentos. Temos ciência de que o modelo de ensino aos quais os estudantes para professores foram submetidos durante todo o seu processo de Escolarização Básica exerce um peso muito acentuado na constituição de suas crenças e concepções sobre o ensino de Matemática; mas acreditamos, também, que, apesar de lento o processo de mudança, é possível e deve ser valorizado pela universidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALTET, M. Lês compétences de l'enseignant professionnel. Entre savoir, schèmes d'action et adaptation: lê savoir-analyser. In: PAQUAY, L. et al. (Org.). *Former des enseignants professionnels.* Quelle strategies? Quelles compétences? Bruxelas: De Boeck, 1996.

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. *O método nas ciências naturais e sociais:* pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2002.

ARMSTRONG, B.; BEZUK, N. Multiplication and division of fractions: the search for meaning. In: SOWDER, J. T.; SCHAPPELLE, B. (Ed.). *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades*. Albany: Suny Press, 1995.

ARTIGUE, M. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: GOMES, P. (Ed.), *Ingenieria didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. *Psicología educativa:* un punto de vista cognoscitivo. México: Trillhas, 1983.

AZCÁRATE, P. El conocimiento Professional: naturaleza, fuentes, organización y desarrollo. *Quadrante,* v. 8, p. 111-138, 1999.

BAKER, S. *The development of children's fraction thinking in a first-grade classroom.* 1994. Tese (Doutoramento) – University of Visconsin, Madison.

BALL, D. L. *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy:* examining what prospective teachers bring to teacher education. 1988. Tese (Doutoramento) – Michigan State University, East Lansing.

______.Teaching Mathematics for understanding: what do teachers need to know about the subject matter. East Lansing: National Center for Research on Teacher Education, 1989.

______. The mathematical understanding that prospective teacher education. *The Elementay School Journal,* v. 90, n. 4, p. 449-466, 1990a.

______. Prospective and elementary teacher's understading of division. *Journal for Research in Mathematics Education,* 21, p. 132-144, 1990b.

______. Research on teaching Mathematics: making subject matter knowledge part of the of the equation. In: BROPHY (Ed.). *Advances in research on teaching.* Greenwich: JAI Press, 1991. v. 2.

______. Halves, pieces, and twoths: constructing and using representational contexts in teaching fractions. In: CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E. H.; ROMBERG, T. (Ed.). *Rational numbers:* an integration of research. Hillsdale: Lawrence Erbaum, 1993.

______. What do student know? Facing challenger of distance, context, and desire in trying to hear children. In: BRIDLDE, B. J.; GOOD, T. L.; GOODSON, I. F. (Ed.). *International Handbook of Teachers and Teaching*. Dordrecht: Kluwer, 1997. v. 2.

______. Bridging practices. Intertwining and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, v. 51, n. 3, p. 241-247, 2000.

BALL, D.; McDIARMID, G. W.. The subject-matter preparation of teachers. Handbook of Research on Teacher Education. HOUSTON, W. R. (Ed.). *A Project of the Association of Teacher Educatiors*. New York: Mcmillan Publishing Company, 1990.

______; WILSON, S. *Knowing the subject and learning to teach it: examining assumptions about becoming a mathematics teacher.* Research Report. N.C.R.T.E., 1990b.

______; BASS, H.; SLEEP, L.; THAMES, M. A theory of mathematical knowledge for teaching. Comunicação realizada no 15.º ICMI. *The International Commission on Mathematical Instruction.* Águas de Lindóia, 2005.

BEERS, S. Epistemological assumptions and college teaching: interactions in the college classroom. *Journal of Research and Development in Education,* v. 21, n. 4, p. p. 87-94, 1988.

BEHR, M. J; LESH, R.; POST, T.; SILVER, E. Rational number concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). *Acquisition of Mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press, 1983.

BEHR, M. J.; HAREL, G.; POST, T.; LESH, R. Rational number, ratio, and proportion. In: GROUWS, D. A. (Ed.). *Handbook of research on Mathematics teaching and learning.* New York: MacMillan, 1992.

_____; _____; _____; _____. Rational numbers: toward a semantic analysis – emphasis on the operator construct. In: CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E. H.; ROMBERG, T. (Ed.). *Rational numbers:* an integration of research. Hillsdale: Lawrence Erbaum, 1993.

BELL, A. W.; COSTELLO, J.; KUCHEMANN, D. E. A review of research in mathematical education. Parte A. *Research on learning and teaching.* Berks: NFER-Nelson, 1983.

______; GREER, B.; GRIMSON, L.; MANGAN, C. Children's performance on multiplicative word problems: elements of a descriptive theory. *Journal for Research in Mathematics Education,* v. 20, p. 434-449, 1989.

BELLOCHIO, C. R.; TERRAZAN, E.; TOMAZETTI, E. Profissão docente: algumas dimensões e tendências. *Revista do Centro de Educação – UFSM*, v. 29, n. 2, 2004.

BIGELOW, J. C.; DAVIS, G. E.; HUNTING, R. P. Some remarks on the homology and dynamics of rational number learning. Artigo apresentado na reunião anual do NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). Orlando, FL, 1989.

BLANCO, L.; MELLADO, V.; RUIZ, C. Conocimiento didáctico del contenido de Ciência y Matemáticas e formación de professores. *Revista de Educación,* v. 307, p. 427-446, 1995.

BORKO, H. et al. Learning to teach hard mathematics: do novices teachers and their instructors give up too easily? *Journal for Research In Mathematics Education,* v. 23, n, 3, p. 194-222, 1992.

BRASIL. Governo do Estado de São Paulo. *Sistema de avaliação de rendimento escolar do estado de São Paulo – Saresp.* Análise Pedagógica dos itens das provas: Matemática. 1998. v. 4.

______. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*, n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996.

______. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. *Diretrizes curriculares nacionais para a formação de professores da Educação Básica, em nível superior, curso de Licenciatura, de graduação plena.* Parecer CNE? CP 009/2001.

______. *Sistema nacional de avaliação da Educação Básica – Saeb: relatório 2001- Matemática,* Brasília, 2002.

BROMME, R. Conocimientos profesionales del profesor. *Enseñanza de lãs ciências*, v. 6, n. 1, p. 19-29, 1988.

______. Beyond subject matter: a psycological topology of teachers' professional knowledge. In: R. BIEHLER,; R. SCHOLZ; R. STRÄSSER; B. WINKELMANN (Ed.), *Didatics of Mathematics as a scientific discipline.* Dordrecht. Kluwer Acd. PB, 1994.

______; TILLEMA, H. Fusing experience and theory: the structure of Professional knowledge. *Learning and instruction,* v. 5, p. 261-267, 1985.

BROPHY, J. E. Conclusion to advances in research on teaching. In: ______ (Ed.). *Advances in research on teaching:* teachers' subject matter knowledge and classroom instruction. Greenwich: Jai Press, 1991. v. 2.

BROWN, C.; BORKO, H. Becoming a mathematics teachers. In: GROUWS, D. A. (Ed.). *Handbook of research on teacher education*. New York: MacMillan, 1990.

BROWN, J.; COLLINS, A.; DUGUID, P. Situation cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, p. 32-42, jan.-fev. 1989.

BROWN, S. I.; COONEY, T. J.; JONES, D. Mathematics teacher education. In: HOUSTON, W. R. (Ed.). *Handbook of research on teacher education.* New York: MacMillan, 1990.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da matemática.* Lisboa: Sá da Costa, 1951.

CARPENTER, Thomas P. *Teaching and learning rational numbers*: proposed framework for CGI teacher development in the upper elementary grades. Wisconsim Center for Education Research. School of Education, University of Wisconsin-Madison, 1994.

______ et al. Notes from assessment: addition and multiplication with fractions. *Arithmetic Teacher*, v. 23, n. 2, p. 137-141, 1976.

______ et al. National assessment: a perspective of students' mastery of basic mathematics skills. In: LINDQUIST, M. M. (Ed.). *Selected issues in Mathematics education*. Chicago: National Society for the Study of Education and National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 1980.

CARTER, K. Teachers' knowledge and learning to teach. In: HOUSTON, W. R. (Ed.). *Handbook for research on teacher education.* New York: MacMillan, 1990.

CHAMORRO, 1992. El aprendizaje significativo em el área de las matemáticas. Documento para a reforma, nº 6. Alhambra Longman. Madrid.

CHEVALLARD, Y. *La transposición didáctica:* del saber sabido al saber enseñado. Buenos Aires: Aique, 1991.

CISCAR, S. L.; GARCIA, M. V. S. *Fracciones*: la relación parte-todo. Madrid: Sintesis, 1988.

______; ______. The knowledge about unity in fraction task of prospective elementary teachers. In: FURINGHETTI, F. (Ed.). *Proceeding of the 15th PME International Conference,* v. 2, p. 334-341, 1991.

CLIMENT, N. *El desarollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática*. Un estudio de caso. 2002. Tesis doctoral (publicada em 2005 pela Proquest Michigan University, Michigan).

COBB, P. Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. *Educational Researcher*, v. 23, n. 7, p. 13-19, 1994.

COCHRAN, K. F.; KING, R. A.; DeRUITER, J. A. *Pedagogical content knowledge:* a tentative model for teacher preparation. East Lansing: National Center for Research on Teacher Learning, 1991. (ERIC Document Reproduction Service n. ED340683.)

COHEN, D. K.; HILL. H. C. *Learning policy*: when state education reform works. New Haven: Yale University Press, 2001.

COLLINS, A.; BROWN, J.; NEWMAN, S. Cognitive apprenticeship: teaching the crafts of reading, writing, and Mathematics. In: RESNICK, L. (Org.). *Knowing, learning, and instruction.* Essays in honor of Robert Glaser. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1989.

COMITI, C.; BALL, D. L. Preparing to teach mathematics: a comparative perspective. *International Handbook of Mathematics Education*, part two. In: BISHOP, K. C. A. J. et al. (Ed.). Dordrecht: Kluwer, 1996.

CONFREY, J. Splitting, similarity, and rate of change: a new approach to multiplication and exponential functions. In: ______; HAREL, G. (Ed.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. Albany: Suny Press, 1994.

COURANT, R.; ROBBINS, H. O que é Matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.

CRAMER, K.; LESH, R. Rational number knowledge of preservice elementary education teachers. In: BEHR, M. (Ed.). *Proceedings of the 10th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for Psychology of Mathematics Education.* DeKalb: PME, 1988.

______; POST, T. Facilitating children's development of rational number knowledge. In: OWENS, D.; REED, M.; MILLSAPS, G. (Ed.). *Proceedings of the Seventeenth Annual Meeting of PME-NA.* Columbus: PME, 1995.

DAMICO, A. *Uma alternativa de mudança didática para ensino de matemática no segundo grau.* 1997. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo.

DAVIS, P.; HERSH, R. *The mathematical experience*. Boston: Houghton Mifflin, 1981.

DIENES, Z. P. *Fracciones.* Barcelona: Teide, 1972.

DOMINGUES, Higinio. *Fundamentos de aritmética.* São Paulo: Atual, 1991.

DOSSEY, J.; MULLIS, I.; LINDIQUIST, M.; CHAMBERS, D. The Mathematics report card: are we measuring up? *Trends and achievement based on the 1986 national assessment.* Princenton: Educational Testing Service, 1987.

DREYFUS, Tommy. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, Mathematics Education Library, 1991.

DRIVER, R. et al. Constructing scientific knowledge in the classroom. *Educational Researcher*, v. 23, n. 7, p. 5-12, 1994.

ELBAZ, F. *Teacher thinking*: a study of practical knowledge. London: Croom-Helm, 1983.

ELLIOT, John. *Reconstructing teacher education.* Londres: The Falmer Press, 1993.

EMPSON, S. B. Equal sharing and shared meaning: the development of fraction concepts in a first-grade classroom. *Cognition and Instruction*, v. 17, p. 283-342, 1999.

EVEN, Ruhama. *"Prospective secondary teachers" knowledge and understanding about Mathematics function.* 1989. Tese (Doutoramento) – Michigan State University.

______. Subject matter knowledge for teaching and case of function. *Educational Studies in Mathematics,* v. 21, p. 521-544, 1990.

______. Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 24, n. 2, p. 94-116, 1993.

EVEN, R.; MARKOVITS, Z. Teacher pedagogical content knowledge of functions: characterization and applications. *Journal of Structural Learning,* v. 12, n. 1, p. 35-51, 1993.

______; TIROSH, Dina. Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of de subject-matter. *Educational Studies in Mathematics,* v. 29, n. 1, p. 1-20, 1995.

FENNEMA, E.; LOEF, M. Teachers' knowledge and its impact. In: GROUWS, D. (Org.). *Handbook of research on Mathematics teaching and learning.* Nova York: MacMillan, 1992.

FENSTERMACHER, G. D. The knower and the known: the nature of knowledge in research on teaching. In: DARLING-HAMMOND, L. (Org.). *Review of Research on Education*, Washington: Americam Educational Research Association, v. 20, p. 1-54, 1994.

FERREIRA, A. C. Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de matemática. In: FIORENTINI, D. (Org.). *Formação de professores de matemática*: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado de Letras, 2003.

FISCHBEIN, E. et al. The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 16, p. 3-17, 1985.

FISH, S. *Is there a text in this class?* The authority of interpretive communities. Cambridge: Harvard University Press, 1980.

FREITAS, H. de. Certificação do docente e formação do educador: regulação e desprofissionalização. *Educação & Sociedade*, v. 24, n. 85, p. 1095-1124, 2004.

FREUNDENTHAL, H. *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Boston: D. Reidel, 1983.

GARCÍA BLANCO, M. M. A formação inicial de professores de matemática: fundamentos para a definição de um *curriculum*. In: FIORENTINI, D. (Org.). *Formação de professores de matemática*: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado de Letras, 2003.

GARCIA, G. O.; SERRANO C. C. Variables institucionales en el conocimiento profesional del docente: el caso de la función. *Revista Iberoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, v. 3, n. 3, p. 357-370, 2000.

GARCÍA, Maria Vitória Sánches. Dificuldades específicas en el aprendizage de las fracciones. Estúdio de casos. Implicaciones para la formación de maestros. *Aulas de verano.* Instituto Superior de Formación del Profesorado, Ministério de Educación, Cultura y Deporte, 2003.

GIMBURG, M.; LINDAY, B. *The political dimension in teacher education*: policy formation, teacher socialization, and society. Londres: Palmer, 1995.

GIMENO, J.; PÉREZ, A. I. *Compreender y transformar la enseñanza.* Barcelona: Morata, 1993.

GODINO, Juan D.; BATANERO, Carmen. *Proporcionalidad y su didáctica para maestros.* Matemática y su didáctica para maestros, Proyeto EDUMAT-Maestros. Madrid: Ministerio de Ciencia y Tecnología, 2002.

GOODLAD, J. I. *A place called school*: prospects for the future. New York: McGraw-Hill, 1984.

GRAEBER, A.; TIROSH, D.; GLOVER, R. Preservice teachers' beliefs and performance on partitive and measurement division problems. Artigo apresentado no Eighth annual meeting of the North American chapter of the study group for the psychology of Mathematics education. East Lansing, MI, 1986.

______; ______; ______. Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Reseach in Mathematics Education*, v. 20, p. 95-102, 1989.

GROSSMAN, P. L. *Sources of pedagogical content knowledge in English.* 1988. Tese (Doutoramento) – Stanford University, Stanford.

______. *The making of a teacher:* teacher knowledge and teacher education. New York: Pergamon Press, 1990.

______; WILSON, S.; SHULMAN, L. Teachers of substance: subject matter knowledge for teaching. In: REYNOLDS, M. (Ed.). *Knowledge base for beginning teacher.* New York: Pergamon Press, 1989.

GUDMUNDSDOTTIR, S. Values in pedagogical content knowledge. *Journal of Teacher Education,* v. 41, n. 3, p. 44-52, 1990.

GUIMARÃES, Maria de Fátima. *A fidelidade à origem:* o desenvolvimento de uma professora de Matemática. Edições Colibri, Centro de Investigação em Educação da Faculdade de ciências da Universidade de Lisboa, 2005.

HAREL, G.; CONFREY, J. *The development of multiplicative reasoning.* Albany: SUMY, 1994.

HARGREAVES, A. *O ensino na sociedade do conhecimento.* A educação na era da insegurança. Porto: Porto Ed., 2004.

HASHWEH, Maher Z. Teacher pedagogical constructions: a reconfiguration of pedagogical content knowledge. *Teachers and Teaching: theory and practice,* vol. 11, nº 3, p. 273-292, 2005.

HIEBERT, J.; BEHR, M. *Number concepts and operations in the middle grades.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1988.

______; TONNESSEN, L. H. Development of the fraction concept in two physical contexts: an exploratory investigation. *Journal for Research in Mathematics Education,* v. 9, n. 5, p. 374-378, 1978.

______; WEARNE, D. Procedures over concepts: the acquisition of decimal number knowledge. In: HIEBERT, J. (Ed.). *Conceptual and procedural knowledge:* the case of Mathematics. Hillsdale: Erlbaum, 1986.

HILL, H. C.; BALL, D. L. Learning Mathematics for teaching: results from California's Mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 35, n. 5, p. 330-351, 2004.

______; ROWAN, B.; BALL, D. L. Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, v. 42, n. 2, p. 371-406, 2005.

IRWIN, Kathryn C. Using everyday knowledge of decimals to enhance understading. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 32, n. 4, p. 399-420, 2001.

KARPLUS, R.; KARPLUS, E. F.; WOLLMAN, W. Intellectual development beyond elementary school: ratio, the influence of cognitive style. *School Science and Mathematics,* v. 4, 76(6), 1974.

______ et al. Proportional reasoning and control of variables in seven countries. In: LOCHHEAD, J.; CLEMENTS, J. (Ed.). *Cognitive process instruction.* Philadelphia: Franklin Institute Press, 1979.

______; PULOS, S.; STAGE, E. K. Proportional reasoning of early adolescents. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Org.). *Acquisition of mathematical concepts and processes.* New York: Academic Press, 1983.

KERSLAKE, D. *Fractions*: children's strategies and errors. Londres: NFR-NELSON, 1986.

KIERAN, C. Functions, graphing, and technology: integrating research on learning and instruction. In: ROMBERG, T. A.; FENNEMA, E.; CARPENTER, T. P. (Ed.). *Integrating research on the graphical representation of function.* Hillsdale: Laurence Erlbaum, 1992.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, R. (Ed.). *Number and measurement:* paper from a research workshop. Columbus: ERIC/MEAC, 1976.

______. The rational number construct: its elements and mechanisms. In: ______. (Ed.). *Recent research on number learning*. Columbus: ERIC/SMEAC, 1980.

______. *Five faces of mathematical knowledge building.* Edmonton: Department of Secondary Education, University of Alberta, 1981.

______. Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. *Number concepts and operations in the middle grades.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

______. Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge. In: LEINHARDT, G.; PUTNAM, R.; HATTRUP, R. A. (Ed.). *Analysis of arithmetic teaching.* Hillsdale: Erlbaum, 1992.

______. Rational numbers and fractional numbers: from quotient field to recursive understanding. In: CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E.; ROMBERG, T. (Ed). *Rational numbers:* an integration of research. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1993.

______. Creating spaces for learning fraction. In: SOWDER, J. T.; SCHAPPELLE, B. P. (Ed.). *Providing a foundation for teaching Mathematics in the middle grades.* Albany: State University of New York Press, 1995.

KURTZ, B.; KARPLUS, R. Intellectual development beyond elementary school: teaching for proportional reasoning. *School Science and Mathematics,* v. 7, n. 79, p. 5, 1979.

LAMON, S. Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive processes. In: CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E.; ROMBERG, T. (Ed). *Rational numbers:* an integration of research. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1993.

LAMPERT, M. Knowing, doing, and teaching multiplication. *Cognition and Instrution,* v. 3, p. 305-342, 1986.

LAVE, J. *Cognition in practice:* mind, Mathematics, and culture in everyday life. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

______; WENGER, E. *Situated learning*: legitimate peripheral participation. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

LE BOTERF, G. *De la compétence à la navigation professionnelle.* Paris: Le Éditions d'organisation, 1997.

LEINHARDT, G.; GREENO, J. C. The cognitive skill of teaching. *Journal of Educational Psychology,* v. 2, p. 75-95, 1986.

______ et al. Where subject knowledge matters. In: BROPHY, J. (Ed.). *Advances in research on teaching.* Greenwich: Jai Press, 1991. v. 2.

______; SMITH, D. Expertise in Mathematics instruction: subject-matter knowledge. *Journal of Educational Psycology,* v. 77, p. 247-271, 1985.

LESH, R.; LANDAU, M.; HAMILTON, E. Conceptual models and applied mathematical problem-solving research. In: ______; LANDAU (Ed.). *Acquisition of mathematics concepts and processes.* Nova York: Academic Press, 1983

LINCHEVSKI, L.; VINNER, S. Canonical representations of fractions as cognitive obstacles in elementary teachers. In: VERGANAUD, G.; ROGALSKI, J.; ARTIGUE, M. (Ed.). *Proceeding of the 13th PME International Conference,* v. 2, p. 242-249, 1989.

LLINARES, S. Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y processos de formación. *Uno: Revista de Didáctica de las matemáticas*, n. 17, p. 51-63, 1998a.

______. *La investigación "sobre" el profesor de matemáticas*: aprendizaje del profesor y práctica profesional. Ediciones Universidad de Salamanca, aula 10, p. 153-179, 1998b.

______. El conocimiento y las creencias de los profesores de matemáticas y la innovación educativa. *Investigación en la Escuela,* v. 11, p. 61-69, 1990.

______. Contextos y aprender a enseñar matemáticas: el caso de los estudiantes para profesores de primaria. In: GIMENEZ, J.; LLINARES, S.; SANCHES, V. (Ed.). *El proceso de llegar a ser un professor de primaria.* Cuestiones desde la educación matemática. Granada, 1996. (Colección Mathema.)

LLINARES, S.; SÁNCHEZ, M. V. The knowledge about unity in fractions task of prospective elementary teachers. In: FURINGHETTI, F. (Ed.). *Proceeding of the 15th PME international Conference,* v. 2, p. 334-341, 1991.

______; ______. Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales en estudiantes para profesor de primária. In: GIMENEZ, J.; LLINARES, S.; SANCHES, V. (Ed.). *El proceso de llegar a ser um profesor de primaria.* Cuestiones desde la educación matemática. Granada, 1996. (Colección Mathema.)

______; KRAINER, Konrad. Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In: GUTIÉRREZ, A.; BOERO, P. (Ed.). *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education:* past, present and future. Netherlands: Sense Publishers, 2006.

LÜDKE, M.; MOREIRA, A. F. B. Recent proposal to reform teacher education in Brazil. *Teaching and Teacher Education*, v. 15, n. 2, p. 169-178, 1999.

MACK, N. K. Learning fractions with understanding: building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education,* v. 21, p. 16-32, 1990.

______. Learning rational numbers with understanding: the case of informal knowledge. In: CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E. H.; ROMBERG, T. (Ed.). *Rational numbers:* an integration of research. Hillsdale: Erlbaum, 1993.

MA, Liping. *Knowing and teaching elementary mathematics*: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United State. New Jersey,:Lawrence Erlbaum, 1999.

MADSEN-NASON, A.; LANIER, P. *Pamela kaye's general math class:* from a computational to a conceptual orientation (Research series n. 172). East Lansing: Michigan State University, Institute for Research on Teaching, 1987.

MAHER, C. A.; DAVIS, R. B. Teacher' learning: building representation of children's meaning. In: DAVIS, R. B.; MAHER, C. A.; NODDINGS, N. (Ed.). Constructivist views on the teaching and learning of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education,* NCTM, n. 4, p. 7-18, 1990.

MANSFIELD, H. Points, lines, and their representations. *For the learning of Mathematics,* 5(3), p. 2-6, 1985.

MARKOVITS, Z.; SOWDER, J. T. Students' understanding of the relationship between fractions and decimals. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* v. 13, n. 1, p. 3-11, 1991.

MARKS, R. *Those who appreciate*: a case study of joe, a beginning mathematics teacher (Knowledge Growth in a Profession Publication Series). Stanford: Stanford University, School of Education, 1987.

______. Pedagogical content knowledge: from a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education,* v. 41, n. 3, p. 3-11, 1990.

MARRERO, J. Las teorías implícitas del profesorado: un puente entre la cultura y la prática de enseñanza. In: ESTEBARANZ, A.; SÁNCHEZ, V. (Ed.). *Pensamiento de profesores y desarrollo profesional I.* Madrid: Visor, 1992.

MARSHALL, Sandra P. Assessment of rational number understanding: a schema-based approach. In: CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E. H.; ROMBERG, T. (Ed.). *Rational numbers:* an integration of research. Hillsdale: Lawrence Erbaum, 1993.

______. What students learn (and remember) from word problem instruction. In: CHIPMAN, S. (Org.). *Penetrating to the mathematical structure of word problems.* Simpósio apresentado na reunião anual da American Educational Research Association, Boston. 1990.

MARTÍNEZ, Enrique, C.; MARTÍNEZ, Encarnación, C. Conocimiento de contenido pedagógico de los estudiantes de magisterio sobre la estructura multiplicativa. In: GIMENEZ, J.; LLINARES, S.; SANCHES, V. (Ed.). *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria.* Cuestiones desde la educación matemática. Granada, 1996. (Colección Mathema.)

MCDIARMID, G. W. et al. Why staying one chapter ahead doesn't really work: subject-specific pedagogy. In: REYNOLDS, M. C. (Ed.). *Knowledge base or the beginning teacher*. Oxford: Pergamnon Press, 1989.

MERLINI, Vera Lucia. O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. 2005. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

MICHAELS, S.; O'CONNOR, M. C. *Literacy as reasoning within multiple discourses*: Implications for policy and educational reform. Paper presented at the Council of Chief State School Officers 1990 Summer Institute: "Restructuring Learning", Literacies Institute, Educational Development Center, Newton, MA, 1990.

MILIE, César Polcino; COELHO, Sônia P. *Números*: uma introdução à matemática. São Paulo: Edição Preliminar, 1996.

MIZUKAMI, Maria da Graça N. Aprendizagem da docência: algumas contribuições de L. S. Shulman. *Revista do Centro de Educação*, v. 29, n. 2, 2004.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. *A formação matemática do professor:* licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MOSS, J. *Development children's rational numbers sense*: a new approach and an experimental program. 1997. Tese (Doutorado) – University of Toronto, Canadá.

______; CASE, Robbie. Developing children's understanding of the rational numbers: a new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education,* v. 30, n. 2, p.122-147, 1999.

MOUSLEY, J.; SULLIVAN, P. Dilemmas in the profissional education of Mathematics teachers. In: PEHKONEN, E. (Ed.). *Proceedings of 21 st PME International Conference,* v. 1, p. 31-45, 1997.

NIVEN, Ivan. *Números*: racionais e irracionais. Tradução de Renate Watanabe. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984. (Coleção Fundamentos da Matemática Elementar.)

NOELTING, G. The development of proportional reasoning and the ratio concept: part 1. Definition of stages. *Educational Studies in Mathematics,* v. 11, p. 253-271, 1980.

NOVILLIS, C. An analysis of fraction concept into a hierarchy of subconcepts and the testing of the hierarchy dependences. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 7, p. 131-144, 1976.

NOVILLIS, C. Locating proper fractions. *School Science and Mathematics,* v. 53, n. 5, p. 423-428, 1980.

NUNES, T.; BRYANT, P. *Crianças fazendo matemática.* Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

______ et al. *Introdução à educação matemática:* os números e as operações numéricas. São Paulo: PROEM, 2002.

______ et al. *The effect of situations on children's understanding of fractions.* Trabalho apresentado no encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics, Oxford, jun. 2003.

OHLSSON, Stellan. Sense and reference in the design of interative illustrations for rational numbers. In: LAWLER, R. W.; YAZDANI, M. (Ed.). *Artificial intelligence and education.* Norwood: Ables, 1987.

______. Mathematics meaning and application meaning in the semantics of fractions and related concepts. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Ed.). *Number concepts and operations in the middle grades*. Hillsdale. Erlbaum and Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1988. v. 2.

OLIVE, J. From fractions to rational numbers of arithmetic: a reorganization hypothesis. *Mathematical Thinking and Learning,* v. 1, p. 279-314, 1999.

ORTEGA, G. M. Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral. *Relime,* v. 3, n. 2, p. 131-170, 2000.

ORTON, R. E. Using representations to conceptualize teachers' knowledge. Comunicação apresentada no Psycology of Mathematics Education-north America, DeKalb, IL, 1988.

OWENS, D. T. Study of the relationship of area and learning concepts by children in grades three and four. In: KIEREN, T. E. (Ed.). *Recent research on number concepts.* Columbus: ERIC/SMEAC, 1980.

PATTON, M. *Qualitative evaluation methods.* Londres: Sage Publications, 1986.

PAYNE, J. N. Review of research on fractions. In: LESH, R. (Ed.). *Number and measurement:* papers from a research workshop. Ohio: ERIC/SMEAC, 1976.

PERRENOUD, Philippe. *Práticas pedagógicas, profissão docente e formação:* perspectivas sociológicas. Tradução de Helena Faria, Helena Tapada, Maria J. Carvalho e Maria Nóvoa. Lisboa: Publicações Dom Quixote, Instituto de Inovação Educacional, 1993.

______. Le travail sur l'habitus dans la formation dês enseignants. Analyse dês pratiques et prise de conscience. In: PAQUAY, L. et al. (Org.). *Former des enseignants professionnels.* Quelle strategies? Quelles compétences? Bruxelas: De Boeck, 1996.

______. *De la réflexion dans lê feu de l'action à une pratique réflexive.* Université de Genève, Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation, 1998.

______. *Dez novas competências para ensinar.* Tradução de Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

PETERSON, P. L. et al. Teachers knowledge of students Mathematics problem solving knowledge. In: BROPHY, J. E. (Ed.). *Advances in Research on Teaching,* Greewich: JAI Press, v. 2, p. 87-113, 1991.

PHILIPPOU, G.; CHRISTOU, C. Prospective elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of fractions. In: PONTE, J. P.; MATOS, J. F. (Ed.). *Proceeding of the 18th PME International Conference,* v. 4, p. 33-40, 1994.

PIAGET, J.; INHELDER, B.; SZEMINSKA, A. *The child's conception of geometry.* New York: Basic Books, 1960.

PIMENTA, Selma Garrido; GHEDIN, Evandro (Org.). *Professor reflexivo no Brasil:* gênese e crítica de um conceito. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2002.

PINTO, M.; TALL, D. Student teachers' conception of the rational number. In: PUIG, I.; GUTIÉRREZ, A. (Ed.). *Proceeding of the 20th PME International Conference,* v. 4, p. 139-146, 1996.

POLANYI, M. *The tacit dimension.* Nova York: Doubleday, 1967.

PONTE, J. P. M. Didactas específicas e construção do conhecimento profissional. In: TAVARES, J. et al. (Ed.). *Investigar e formar em educação:* actas do IV Congresso da SPCE. Porto: SPCE, 1990.

______. Concepções dos professores de matemática e processo de formação. In: BROWN et al. *Educação matemática:* temas de investigação. Instituto de Inovação Educacional, Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciência da Educação, 1992.

______. Mathematics teachers' professional knowledge. In: ______; MATOS, F. (Ed.). *Proceedings of the XVIII PME*. Lisboa: Portugal, 1994.

______. Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de matemática. In: ______ et al. (Ed.). *Desenvolvimento profissional de professores de matemática:* que formação? Lisboa: SPCE, 1995.

______. Da formação ao desenvolvimento profissional. *Actas do ProMat 98,* Lisboa: APM, p. 27-44, 1998.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H. Remar contra a maré: a construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação,* v. 11, n. 2, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2002.

______; ______; VARANDAS, J. M. Development of pre-service mathematics teacher' professional knowledge and identity in with information and communication technology. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(2), p. 93-115, 2002.

______; CHAPMAN, Olive. Mathematics teachers' knowledge end practices. In: GUTIÉRREZ, A.; BOERO, P. (Ed.). *Handbook of research on the psychology of mathematics education:* past, present and future. Netherlands: Sense Publishers, 2006a.

______; ______. Preservice Mathematics teachers' knowledge and development. 2006b. No prelo.

PORLÁN, R.; RIVERO, A. *El conocimiento de los profesores.* Sevilla: Díada, 1998.

POST, T. R. Fractions: results and implications from national assessment. *The Arithmetic Teacher*, v. 28, n. 9, p. 26-31, 1981.

______ et al. Curriculum implications of research on the teaching and assessing of rational number concepts. In: CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E. H.; ROMBERG, T. (Ed.). *Rational numbers:* an integration of research. Hillsdale: Erlbaum, 1993.

PUTNAM, R.; BORKO, H. Teacher learning: implications of new views of cognition. In: BIDDLE, B. et al. (Org.). *International handbook of teachers and teaching.* Netherlands: Kluwer Academic, 1997.

______; ______. What do new view of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning? *Educational Research,* v. 29, n. 1, p. 4-15, 2000.

RAPPAPORT, D. The meaning of fractions. *School Science and Mathematics,* 62, p. 241-244, 1962.

RESNICK, L. B. Syntax and semantics in learning to subtract. In: CARPENTER, T. P., MOSER, J. M.; ROMBERG, T. A. (Ed.). *Addition and subtraction*: a cognitive perspective. Hillsdale: Erlbaum, 1982.

______. Treating Mathematics as an ill-structured discipline. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.). *Research agenda for Mathematics education:* v. 3. *The teaching and assessing of mathematical problem solving*. Hillsdale: Erlbaum, 1988.

______. Shared cognition: Thinking as social practice. In: RESNICK, L. B. J.; LEVINE, M.; TEASLEY, S. D. (Ed.). *Perspectives on socially shared cognition* Washington: American Psychological Association, 1991.

______; SINGER, J. Protoquantitative origins of ratio reasoning. In: CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E. (Org.). *Learning, teaching and assessing rational number concepts*: multiple research perspectives. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1992.

RICHARDSON, V. The role of attitudes and beliefs in learning to tech. In: SIKULA, J.; BUTTERY, T.; GUYTON, E. (Ed.). *Handbook of research on teacher education.* New York: MacMillan, 1996.

RICO, Luiz Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta professional. *Relime*, v, 1, n. 1, p. 22-39, 1998.

RIESS, A. P. A. A new approach to the teaching of fractions in the intermediate grades. *School Science and Mathematics*, v. 54, p. 111-119, 1964.

RODRIGUES, Wilson Roberto. *Números racionais*: um estudo das concepções de alunos após o estudo formal. 2005. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

ROMANATTO, Mauro Carlos. Número racional: relações necessárias à sua construção. 1997. Tese de Doutorado - UNICAMP, São Paulo

SACRISTÁN, J. Gimeno. *O currículo:* uma reflexão sobre a prática. Tradução de Ernani F. da Rosa. 3. ed. Porto Alegre: ArtMed, 2000.

SALLAN, J. M. G. Sistemas de representación de números racionales positivos. Um estudio con maestros en formación. *Contextos Educativos,* 4, p. 137-159, 2001.

SAMBO, Abdussalami, A. *Transfer effects of measure concepts on the learning of fractional numbers.* 1980. Tese (Doutoramento) – The University of Alberta.

SANCHÉZ, V. Conocimiento y socialización em professores de Matemáticas de primária. GID. Sevilla, 1990.

SANTOS, Aparecido dos. *O conceito de fração em seus diferentes significados:* um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no ensino fundamental. 2005. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SCHANK, R. *Tell me a story:* narrative and intelligence. Evanston: Northwestern University Press, 2000.

SCHNETZLER, A. Prefácio. In: GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. A. (Org.). *Cartografias do trabalho docente:* professor(a)-pesquisador(a). Campinas: Mercado de Letras, 1998.

SCHOENFELD, A. H. Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in Mathematics. In: GROUWS, D. (Ed.). *Handbook for research on Mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan, 1992.

SCHÖN, Donald A. *The reflective practitioner:* how professional think in action. Nova York: Longman, 1983.

______. *Educando o profissional reflexivo:* um novo *design* para o ensino e a aprendizagem. Tradução de Roberto Cataldo Costa. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

SCHWAB, J. J. *Science, curriculum and liberal education.* Chicago: University of Chicago Press, 1978.

SCHWARTZ, J. L. Intensive quantity and referent transforming aritmetic operations. In: J. Hiebert & M. Behr (Ed.), *Numbers concepts and operations in the middle grads,* Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum; Reston, VA: NCTM, p. 41-52, 1988.

SERRAZINA, L. *Teacher's professional development in a period of radical change in primary Mathematics education in Portugal.* 1998. Tese (Doutoramento) – Associação de Professores de Matemática, Lisboa.

SHROYER, J. *Critical moments in the teaching of Mathematics:* whatmakes teaching difficult? 1981. Tese (Doutoramento) – Michigan State University, East Lansing.

SHULMAN, L. S. Those who understanding: knowledge growth in teaching. *Educational Research,* v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

______. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, v. 57, n. 1, 1987.

______; GROSSMAN, P. *The Intern Teacher Casebook.* San Francisco: Far Wets Laboratory for Educational Research and Development, 1988.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: HAREL, G.; DUBINSKY, E. (Ed.). *The concept of function,* MAA Notes, v. 25, p. 25-58, 1992.

SIMON, M. A. Formative evaluation of a construtivist Mathematics teacher inservice program. In: BORBÁS, A. (Ed.). *Proceedings of the 12th PME International Conference,* v. 2, p. 576-583, 1988.

SILVA, Maria José Ferreira da. *Sobre a introdução do conceito de número fracionário*. 1997. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SILVA, Maria José Ferreira da. *Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série.* 2005. Tese (Doutoramento em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SILVER, E. Young adult's thinking about rational numbers. *Proceedings of the Third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Minneapolis, MN, 1981a.

______. Using conceptual and procedural knowledge: a focus on relationships. In: HIEBERT, J. (Ed.). *Conceptual and procedural knowledge*: the case of Mathematics. Hillsdale: Erbaum, 1981b.

SOLTIS, J. F. Educational and the concept of knowledge. In: ______ (Ed.). *Philosophy and education.* Chicago: National Society for the Study of Education, 1981.

STAKE, R. E. Pesquisa qualitativa/naturalista – Problemas epistemológicos. *Educação e Seleção,* v. 7, p. 19-27, 1983.

STEFFE, L. P. Children's construction of number sequences and multiplying schemes. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Ed.). *Number concepts and operations in the middle grades.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1988.

STEINBERG, R.; HAYMORE, J.; MARKS, R. *Teachers' knowledge and structure content in Mathematics.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago, 1985.

STENHOUSE, L. *Investigación y desarrollo del curriculum.* 3. ed. Madrid: Morata, 1984.

______. *La investigación como base de la enseñanza.* 2. ed. Madrid: Morata, 1987.

STODOLSKY, S. *The subject matter*: classroom activity in math and social studies. Chicago: University of Chicago Press, 1988.

STREEFLAND, L. *How to teach fractions so as to be useful.* Utrecht: OW & OC, 1984.

______. Fractions: an integrated perspective. In: OW & OC (Ed.). *Realistic Mathematics education in primary school.* Utrecht: Freudenthal Institute, 1991a.

______. *Fractions in realistic Mathematics education.* Boston: Kluwer, 1991b.

______. Fractions: a realistic approach. In: CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E. H.; ROMBERG, T. (Ed.). *Rational numbers:* an integration of research. Hillsdale: Erlbaum, 1993.

SWELLER, J.; COOPER, G. The use of worked examples as a substitute for problem solving in learning algebra. *Cognition and Instruction*, v. 2, p. 59-89, 1985.

TALL, D.; Vinner, S. Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits an continuity. *Educational Studies in Mathematics*, v. 12, n. 2, p. 151-169, 1981.

TAMIR, P. *Subject matter and related pedagogical knowledge in teacher education.* Trabalho apresentado na reunião annual da American Association for Educational Research, Washington, 1987.

TARDIF, M. Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários: elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas conseqüências em relação à formação para o magistério. *Revista Brasileira de Educação*, n. 13, p. 5-24, 2000.

______; LESSARD, C.; GAUTHIER, C. *Formation des maítres et contexts sociaux.* Paris: PUF, 1998.

TATSOUKA, K. K. *Analysis of errors in fraction addition and subtration problems.* Urbana: University of Illinois, Computer-based Education Research Laboratory, 1984.

TIROSH, D. Teachers' understanding of undefined mathematical expressions. *Substratum: Temas Fundamentales en Psicologia Education,* v. 1, p. 61-86, 1993.

______ et al. *Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers.* Relatório de pesquisa realizado pela The United States-Israel Binational Science Foundation, 1998a.

______ et al. *The teaching module on rational number for prospective elementary teachers.* Relatório de pesquisa realizado pela The United States-Israel Binational Science Foundation, 1998b.

TIROSH, D.; GRAEBER, A. Evoking cognitive conflict to explore preservice teachers' thinking about division. *Journal for Research in Mathematics Education,* v. 21, p. 98-108, 1990.

______; ______. Challenging and chaging mathematics teaching classroom practices. In: BISHOP, A. J. et al. (Ed.). *Second international handbook of Mathematics education 2*. Dordrecht: Kluwer, 2003. p. 643-687.

USISKIN, Z. P. The future of fractions. *The arithmetic Teacher,* v. 26, p. 18-20, 1979.

VEIL, Willian R.; MaKINSTER, James G. Pedagogical knowledge taxonomies. *Eletronic Journal of Science* Education, v. 3, n. 4, 1999.

VERGNAUD, G. *El niño, las matemáticas, y la realidad.* México: Trillas, 1991.

VINNER, Shlomo. Concept definition, concept image and notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 14, p. 239-305, 1983.

______. The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics. In: TALL, D. *Advanced mathematical thinking*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, Mathematics Education Library, 1991.

______. The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in Mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics,* v. 34, n. 2, p. 98-129, 1997.

WALKER, D. What curriculum research. In: TAYLOR, P. H. *Curriculum, school and society*. Windsor: NFER, 1973. p. 246-262.

WHEELER, David. An askance look at remediation in mathematics. *Outlook,* v. 38, p. 41-50, 1980.

WIDEEN, M. et al. A critical analysis of the research on learning to teach: making the case for an ecological perspective on inquiry. *Review of Educational Research,* v. 68, n. 2, p. 130-178, 1988.

WILSON, S. *Understanding historical understanding*: subject matter knowledge and the teaching of U.S. history. 1988. Tese (Doutoramento) – Stanford University, Stanford.

______; SHULMAN, L. S.; RICHERT, A. E. 150 ways of knowing: representations of knowledge in teaching. In: CALDERHEAD, J. (Ed.). *Exploring teachers' thinking.* Grã-Bretanha: Cassell Educational Limited, 1987.

WINEBURG, S. S.; WILSON, S. M. Models of wisdom in the teaching of history. *Phi Delta Kappa,* v. 70, n. 1, p. 50-58, 1988.

ZASLAVSKY, O.; CHAPMAN, O.; LEIKIN, R. Professional development in Mathematics education: trends and tasks. In: BISHOP, A. J. et al. (Ed.). *Second international handbook of Mathematics education 2.* Dordrecht: Kluwer, 2003.

ZEICHNER, Kenneth M. El maestro como profesional reflexivo. *Cuadernos de Pedagogia,* n. 220, p. 44-49, 1992.

______. *A formação reflexiva de professores*: idéias e práticas. Lisboa: EDUCA, 1993.

______. Para além da divisão entre professor-pesquisador e pesquisador acadêmico. In: FIORENTINI, D.; GERALDI, C. M. G.; PEREIRA, E. M. de A. (Org.) *Cartografias do trabalho docente.* Campinas: Mercado de Letras, 1998.

______ et al. Teacher socialization for cultural diversity. In: SIKULA, J.; BUTTERY, T. J.; GUYTION, E. (Org.). *Handbook of research on teacher education.* 2. ed. Nova York: MacMillan, 1996.

APÊNDICE

1 O corpo dos números racionais

Neste segmento faremos uma breve revisão sobre a construção dos números racionais, normalmente encontrada nos livros texto de Fundamentos da Aritmética, Teoria dos Números ou Análise Matemática. Tomamos como base para redação desta revisão os textos dos seguintes autores: Domingues, H. (1991); Milie, C. P. e Coelho, S. P. (1996) e Nivem, I. (1984).

1.1 Relação de equivalência

Seja Z o conjunto dos números inteiros e Z* = Z - {0}. Consideremos sobre Z x Z* $= \{(a, b) / a \in Z, b \in Z^*\}$ a relação ~ definida por (a, b) ~ (c, d) se, e somente se, ad = b c. A relação ~ recebe o nome de relação de equivalência.

A relação de equivalência fica caracterizada pelas três propriedades seguintes:

i) Reflexiva: (a, b) ~ (a, b), qualquer que seja (a, b) $\in$ Z x Z*.

ii) Simétrica: (a, b) ~ (c, d) $\Rightarrow$ (c, d) ~ (a, b).

iii) Transitiva: (a, b) ~ (c, d) e (c, d) ~ (e, f) $\Rightarrow$ (a, b) ~ (e, f).

1.2 Classes de equivalência

A relação ~ determina sobre Z x Z* uma partição em classes de equivalência. Para cada par (a, b) $\in$ Z x Z*, a classe de equivalência à qual esse elemento pertence será indicada por a/b. Ou seja:

$$a/b = \{(x, y) \in Z \times Z^* / (x, y) \sim (a, b)\} = \{(x, y) \in Z \times Z^* / bx = ay\}.$$

Como resultado da teoria das relações de equivalência, temos:

a/b = c/d $\Leftrightarrow$ (*a, b*) ~ (*c, d*), daí: a/b = c/d $\Leftrightarrow$ *ad = bc.*

Podemos ilustrar como exemplo deste fato: 2/3 = -2/-3 = 4/6 = -4/-6...

O conjunto quociente de Z x Z* por ~, ou seja, o conjunto de todas as classes de equivalência determinada por ~ sobre Z x Z*, será denominada de Q. Logo:

$$Q = \{a/b \ / \ (a, b) \in Z \times Z^*\}.$$

Desta forma cada elemento a/b $\in$ Q, com $b \neq 0$, admite infinitas representações. Em cada uma delas *a* é o *numerador* e *b* é o *denominador.*

Dois elementos de Q sempre admitem representações de denominadores iguais. De fato, sejam a/b e c/d dois elementos de Q, temos que:

a/b = ad/bd e c/d = bc/db, pois a(bd) = b(ad) e c(bd) = d(bc).

1.3 Adição em Q

Sejam x = a/b e y = c/d elementos de Q. Chama-se soma o elemento de Q definido da seguinte forma:

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd}.$$

A correspondência (x, y) $\to$ x + y, conforme a definição de soma é uma aplicação e, portanto, trata-se de uma operação sobre Q, chamada de *adição em Q.* Para a adição em Q valem as seguintes propriedades:

i) Associativa: (x + y) + z = x + (y + z), $\forall$ x, y, z $\in$ Q.

ii) Comutativa: x + y = y + x; $\forall$ x, y $\in$ Q.

iii) Elemento Neutro: Existe elemento neutro que é a classe de equivalência

$\frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \ldots\ldots$, que indicaremos simplesmente por 0. De fato:

$\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a.1+0.b}{b.1} = \frac{a.1}{b.1} = \frac{a}{b}$, para todo $\frac{a}{b} \in$ Q.

iv) Simétrico aditivo:Todo x = a/b $\in$ Q admite simétrico aditivo (oposto) em Q, representado por $-x = \frac{-a}{b}$, pois : $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{ab+(-a)b}{bb} = \frac{0}{bb} = 0$.

1.4 Subtração em Q

Sejam x e y dois elementos quaisquer de Q, denomina-se diferença entre x e y, e indica-se por $x - y$, o seguinte elemento de Q: $x - y = x + (-y)$.

Como $(-y) \in Q$, para todo $y \in Q$, $(x, y) \to x - y$ é uma operação sobre Q, à qual chamaremos *subtração* em Q.

1.5 Multiplicação em Q

Chama-se produto de $x = a/b$ por $y = c/d$, ambos pertencentes a Q o elemento: $xy = x.y = \frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \in Q$.

A multiplicação em Q é a operação definida por $(x, y) \to xy$, *para quaisquer* $x, y \in Q$.

Propriedades:

i) Associativa: $x(yz) = (xy)z$, $\forall\ x, y, z \in Q$.

ii) Comutativa: $xy = yx$, $\forall\ x, y \in Q$.

iii) Existência de um elemento neutro: trata-se da classe de equivalência $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \ldots$ que indicaremos apenas por 1. De fato, $\frac{a}{b} . \frac{1}{1} = \frac{a.1}{b.1} = \frac{a}{b}$; para todo $\frac{a}{b} \in Q$.

iv) Simétrico multiplicativo: todo $x \in Q$, $x \neq 0$, admite simétrico multiplicativo (inverso): se $x = a/b$, com $a, b \neq 0$, temos que $b/a \in Q$ e, então $\frac{a}{b}.\frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1$.

Como é de praxe indicaremos por x^{-1} o inverso multiplicativo de x.

1.6 Q é um corpo

Como visto anteriormente, estão definidas em Q as operações de adição e multiplicação. Verificamos, também, que para estas operações valem as propriedades: associativa, comutativa, existe um elemento neutro e existe de um elemento oposto (no caso da adição) e um elemento inverso (no caso da multiplicação). Além disso, para quaisquer x, y, z $\in$ Q, x(y + z) = xy + xz; ou seja, a multiplicação é distributiva em relação à adição. Atendida todas essas condições diz-se que sobre o conjunto dos números racionais (Q) está definida uma estrutura de ***corpo*** ou, simplesmente que Q **é um corpo**.

1.7 Divisão em Q

Entendemos por divisão em Q a operação de Q x Q*, em Q, definida por (x, y) $\rightarrow$ xy^{-1}. O elemento ab^{-1} é chamado *quociente* de x por y.

1.8 Relação de ordem em Q

Seja x = a/b $\in$ Q. Como x = a/b = -a/-b, pois a(-b) = b(-a), sempre é possivel, para x $\in$ Q, uma representação em que o denominador seja maior que zero. Por exemplo: 4/-5 = -4/5 e 4/5 = -4/-5

Sejam x e y dois elementos quaisquer de Q e tomemos, para cada um deles, uma representação x = a/b e y = c/d em que o denominador seja estritamente positivo. Nessas condições, diz-se que x é menor ou igual a y, e escreve-se x $\leq$ y, se *ad* $\leq$ *bc*. Equivalentemente pode-se dizer que y é maior ou igual a x (y $\geq$ x).

Sejam x = a/b, y = c/d e z = e/f elementos quaisquer de Q e, consideremos ainda, a relação $\leq$ conforme definida acima. Para a relação $\leq$ valem as seguintes propriedades:

i) reflexiva: a/b $\leq$ a/b.
ii) anti-simétrica: a/b $\leq$ c/d e c/d $\leq$ a/b, então a/b = c/d.
iii) transitiva: a/b $\leq$ c/d e c/d $\leq$ e/f, então a/b $\leq$ e/f.
iv) Tricotomia: quaisquer que sejam a/b e c/d $\in$ Q, temos que a/b < c/d ou a/b = c/d ou c/d < a/b.

As propriedades i, ii, iii, iv, garantem que $\leq$ estabelece uma relação de ordem em Q. Além disso:

v) se $a/b \leq c/d$, então $a/b + e/f \leq c/d + e/f$ ($\leq$ é compatível com a adição em Q).

vi) se $a/b \leq c/d$ e $0 \leq e/f$, então $a/b.e/f \leq c/d.e/f$ ($\leq$ é compatível com a mult. em Q).

ANEXOS

CARACTERIZAÇÃO DOS PROFESSORES DAS DUAS INSTITUÇÕES

Tabela 16: Caracterização dos professores da Instituição α

Número de Identificação	Disciplina(s)	Maior Titulação
01	História da Matemática; Fundamentos da Aritmética	Doutor
02	Cálculo Diferencia e Integral; Probabilidade	Graduado
03	Estatística	Especialista
04	Álgebra Linear	Mestre
05	Fundamentos de Aritmética; Fundamentos de Geometria; Prática de Ensino de Matemática e Tendências do Ensino de Matemática	Mestre
06	Álgebra I e II	Mestre
07	Geometria Analítica; Complementos de Matemática	Especialista
08	Cálculo Diferencial e Integral	Especialista
09	Informática Aplicada à Educação	Especialista
10	Álgebra II	Mestre
11	Prática de Ensino; Álgebra	Especialista
12	Matemática Financeira	Especialista
13	Análise Matemática	Doutor
14	Física	Mestre
15	Estatística; Fundamentos da Aritmética; Metodologia do Ensino de Matemática	Mestre
16	Cálculo Numérico	Doutor
17	Geometria I	Especialista
18	Cálculo Numérico	Graduado
19	Geometria II	Especialista
20	Geometria Desc.	Doutor
21	Laboratório de Ensino de Matemática	Mestre

Fonte: Entrevista com os professores

Tabela 17: Caracterização dos professores da instituição β

Número de Identificação	**Disciplina(s)**	**Maior Titulação**
22	Cálculo Diferencial e Integral I e IV	Doutor
23	História da Matemática; Métodos Computacionais	Especialista
24	Prática de Ensino; Geometria Plana; História da Matemática	Mestre
25	Física III e IV; Matemática Financeira	Mestre
26	Introdução à Matemática Superior; Fundamentos de Álgebra	Mestre
27	Análise Matemática I e II	Doutor
28	Geometria Analítica II	Doutor
29	Geometria Plana; Geometria II; Complementos de Matemática	Especialista
30	Física I e II	Doutor
31	Métodos Computacionais; Física IV	Mestre
32	Equações Diferenciais Ordinárias	Doutor
33	Álgebra Linear I e II; Álgebra I	Doutor
34	Geometria Analítica; Equações Diferencias Ordinárias	Mestre
35	Álgebra I e II; Prática de Ensino; Laboratório de Matemática	Mestre
36	Complementos de Matemática; Complementos de Estatística	Mestre
37	Geometria Analítica I; Complementos de Matemática	Especialista
38	Matemática Financeira	Especialista
39	Métodos Computacionais; Física III	Doutor
40	Informática Aplicada à Educação	Graduado
41	Cálculo Diferencial e Integral I, III e IV; Geometria Analítica	Mestre

Fonte: Entrevista com os professores

PESQUISA PARA OBTENÇÃO DO PERFIL DOS ALUNOS

Nº____

INSTITUIÇÃO: ___________

OBSERVAÇÃO: NÃO IDENTIFIQUE SEU NOME

1) Cidade onde reside: ____

2) Data de nascimento: ____/____/_______ **3)** Sexo: ☐ **M** ☐ **F**

3) Você cursou o Ensino Fundamental (antigo 1º grau) em instituição:

☐ Pública ☐ Particular ☐ Parte na Pública/Parte na Particular

4) Fiz o Ensino Fundamental: ☐ Regular (em 8 anos) ☐ Supletivo

5) Você cursou o Ensino Médio (antigo 2º grau) em instituição:

☐ Pública ☐ Particular ☐ Parte na Pública/Parte na Particular

6) Meu Ensino Médio Foi:

☐ Regular (em 3 anos) ☐ Supletivo ☐ Técnico. Qual:_____________

7) Você já leciona? ☐ **Sim** ☐ **Não**

8) Em caso afirmativo, quais as disciplinas e as séries que leciona:

Disciplinas: _____________________________ Séries: __________ Ano:______

_____________________________ __________ ______

9) Em caso negativo, qual é a sua profissão atual? ___________________________

____

- Suponha que você queira avaliar de forma abrangente o conhecimento de alunos do Ensino Fundamental sobre **FRAÇÕES**. Para tanto, crie nos espaços abaixo questões/problemas envolvendo este assunto.
- Procure variar o máximo possível os conceitos envolvidos nas resoluções das questões/problemas que você irá formular.
- Formule questões destinadas a alunos do Ensino Fundamental (1ª a 8ª série).
- Escreva a tinta.

PERFIL DOS PROFESSORES

INSTITUIÇÃO:________

1) Data de nascimento: ______/____/19____

2) Titulação:

   Graduação: Curso:______________________________ Inst. _________________

   Especialização: Curso: ___________________________ Inst. _________________

   Mestrado: Curso: ________________________________ Inst. _________________

   Doutorado: Curso: _______________________________ Inst. _________________

   Área de pesquisa: ____

3) Disciplina(s) que leciona na Instituição pesquisada:

   Disciplina:____ Série(s):_________

   Disciplina:____Série(s): _________

   Disciplina: _______________________________________ Série(s): _________

4) Jornada de trabalho na Instituição: __________

4) Tempo de docência no Ensino Superior: ___________anos.

5) Leciona atualmente no Ensino Fundamental e/ou Médio? S ☐ N ☐

6) Em caso negativo, já lecionou?

   S ☐ N ☐

FOLHA PARA CRIAÇÃO DAS QUESTÕES/PROBLEMAS

QUESTÃO 1

QUESTÃO 2

QUESTÃO 3

QUESTÃO 4

QUESTÃO 5

QUESTÃO 6

QUESTÃO 7

QUESTÃO 8

ESPAÇO PARA A RESOLUÇÃO DAS QUESTÕES/PROBLEMAS Nº__

QUESTÃO 1

QUESTÃO 2

QUESTÃO 3

QUESTÃO 4

QUESTÃO 5

QUESTÃO 6

QUESTÃO 7

QUESTÃO 8

AVALIAÇÃO BÁSICA SOBRE NÚMEROS RACIONAIS

INSTITUIÇÃO: _______

Nº _____

INSTRUÇÕES:

- Resolver as questões a tinta.
- Nas questões discursivas, explique o melhor possível suas idéias.

1) O que é um número racional?

2) Dizemos que o conjunto dos números racionais possui uma estrutura de corpo. O que isto quer dizer?

3) Seja a fração $\frac{3}{5}$. Escreva o máximo possível de situações diferentes que ela pode representar. Se necessário faça desenhos para auxiliar sua explicação. Exemplo: $\frac{3}{5}$ pode representar uma **divisão**, como 3 pizzas divididas entre 5 pessoas.

(cont. da questão 2)

4) Em cada situação abaixo escreva a fração que representa a parte hachurada em relação ao todo.

a)

RESP.

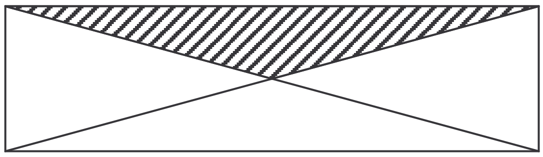
b)

RESP.

c)

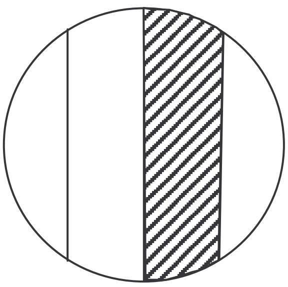
RESP.:

d)



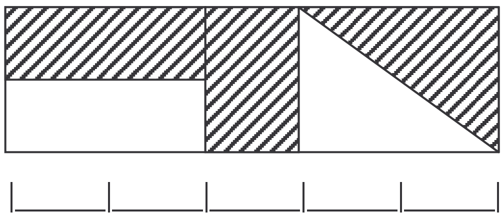
RESP.:

e)



RESP.:

f)



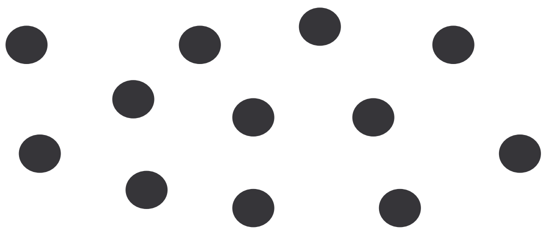
RESP.:

5) $\frac{3}{7}$ de um tambor de óleo corresponde a 36 litros. Quantos litros corresponderá:

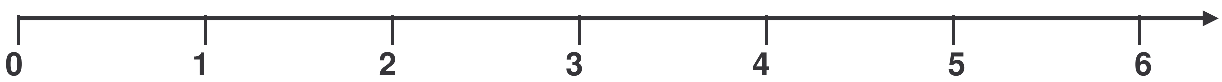
a) $\frac{3}{4}$ do tambor de óleo? R:___________

b) o tambor inteiro? R:___________

6) Contorne com a caneta a quantidade correspondente a $\frac{3}{4}$ do total de bolas de gude representadas abaixo:



7) Marque na semi-reta numerada abaixo a localização <u>aproximada</u> dos pontos correspondentes a: $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{6}{4}$; $\frac{15}{4}$; $2\frac{3}{4}$.



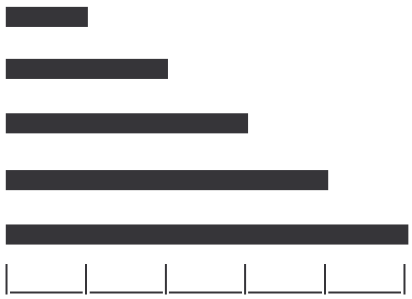
8) Complete os numeradores ou denominadores que estão faltando nas frações abaixo.

$$\frac{24}{80} = \frac{\quad}{40} = \frac{6}{\quad} = \frac{\quad}{10}$$

9) Pretendemos dividir 5 barras de ouro idênticas entre 9 pessoas. Qual a porção (expressa em fração) destinada a cada pessoa? Explique seu raciocínio com o auxilio de um desenho.

10) Observe as réguas abaixo e responda as perguntas.

Régua 1:
Régua 2:
Régua 3:
Régua 4:
Régua 5:



a) Quanto mede a régua 2 tomando-se a régua 1como unidade? Resp.:______

b) Quanto mede a régua 1 tomando-se a régua 4 como unidade? Resp.:______

c) Quanto mede a régua 3 tomando-se a régua 5 como unidade? Resp.:______

d) Quanto mede a régua 4 tomando-se a régua 3 como unidade? Resp.:______

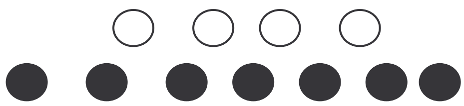
11) Qual é a decimal (com 5 casas após a virgula) correspondente a fração $\frac{2}{7}$?

Resp.: _____________

12) Um carro A percorre a distância de 4 Km em 9 minutos. Um carro B percorre a distância de 3 Km em 8 minutos Qual dos carros é mais veloz?

Resp.: __________

13) Qual a razão entre o número de bolas brancas para o de bolas pretas?



Resp.: ____________

14) Para fazer refresco de caju, Paulo utilizou três vidros de concentrado de caju para cada 4 vidros de água. Com base nestas informações, responda:

a) qual a razão entre o concentrado de caju e a água no refresco? R:________

b) o concentrado de caju corresponde a que fração do refresco? R:_________

c) a quantidade de água corresponde a que porcentagem do refresco? R?________

15) Por que ao efetuarmos a adição ou subtração de frações com denominadores diferentes nós, normalmente, encontramos o MMC dos denominadores?

16) Você deseja explicar a operação $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ para uma classe de ensino fundamental. Como você pode fazer isto utilizando desenhos, como, por exemplo, barras de chocolate?

17) Da mesma forma que na questão anterior utilize recursos geométricos para explicar a operação: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$.

18) Ao dividirmos 2 por $\frac{1}{2}$, encontramos como resposta 4.

a) Explique o que significa o resultado: 4.

b) Por que o resultado (4) deu maior do que o divisor (2)?

19) Explique a operação $\frac{3}{4} \div \frac{1}{8}$ utilizando barras de chocolate.

20) Um aluno fez a divisão de frações utilizando a seguinte regra: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a:c}{b:d}$.

Comente este procedimento.

PROTOCOLO BÁSICO UTILIZADO NA ENTREVISTA INTERATIVA COM OS PROFESSORES DOS CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

INSTITUIÇÃO:________________

1. O estudo dos números racionais faz parte do seu plano de curso para os alunos da Licenciatura em Matemática? Em qual série?
2. (em caso afirmativo) Quais aspectos sobre os números racionais o Sr/Sra aborda em sala de aula?
3. Vamos falar agora sobre o currículo do ensino fundamental. O que o Sr/Sra julga que deve ser ensinado da 1ª a 8ª série e, também, no Ensino Médio para que os alunos tenham uma boa compreensão sobre os números racionais? (Em especial as operações com frações; a abordagem de diferentes contextos que incluem frações etc.) Quais aspectos sobre o ensino dos números racionais/frações no Ensino Fundamental são abordados em suas aulas, visando a preparação dos futuros professores?
4. No processo de formação inicial de professores de Matemática, quais aspectos o Sr/Sra julga que o currículo deve contemplar, no que se refere a preparação dos futuros professores para o ensino de números racionais/frações de uma maneira satisfatória?
5. Na sua opinião, a preparação dos futuros professores para ensino dos números racionais deve merecer atenção especial no currículo dos cursos de licenciatura em Matemática ou trata-se de um assunto fácil para os alunos e não merece tratamento especial?
6. É possível o Sr/Sra nos relatar quais são as maiores dificuldades dos seus alunos no trato com os números racionais?
7. De forma geral o Sr/Sra considera que o currículo desta Faculdade/Universidade propicia uma boa formação aos alunos para o ensino dos números racionais?