ROSANA NOGUEIRA DE LIMA

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NO ENSINO MÉDIO:

Uma Jornada por Diferentes Mundos da Matemática

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2007

ROSANA NOGUEIRA DE LIMA

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NO ENSINO MÉDIO:

Uma Jornada por Diferentes Mundos da Matemática

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob a orientação da Professora Doutora Siobhan Victoria (Lulu) Healy.

PUC/SP

São Paulo

2007

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ______________________________ **Local e Data:** _________________

Um Matemático, eu acredito, disse que o prazer não está na descoberta da verdade, mas, sim, na busca por ela.

Leo Tolstoy (Anna Karenina)

AGRADECIMENTOS

À professora Dra. Lulu Healy, pela orientação, dedicação, discussões e questionamentos, que possibilitaram a realização deste trabalho, e pela amizade, incentivo e apoio, sempre.

À Profa. Dra. Tânia Maria Mendonça Campos, pelos quase três anos de orientação, pelo apoio, amizade, confiança, e por estar sempre presente, mesmo de longe.

Ao professor Dr. David Tall, por me receber na University of Warwick, por compartilhar comigo suas idéias e teorias, sem as quais esse trabalho não seria possível.

Aos professores Dr. Saddo Ag Almouloud e Dr. Victor Giraldo, pelas valiosas contribuições a este trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da PUC/SP, em especial, aos professores Dra. Silvia Dias Alcântara Machado e Dr. Benedito Antonio da Silva, pelas críticas e sugestões.

Ao Mathematics Education Research Center da University of Warwick, Reino Unido, na figura do diretor, Dr. Dave Pratt, e do ex-diretor, Adrian Simpson, pela estrutura acadêmica proporcionada durante o estágio que lá realizei.

Ao Warwick SUMINER Group, pelas discussões e colaborações.

À Direção das escolas em que esta pesquisa foi realizada, por autorizarem a aplicação dos instrumentos de coleta de dados, e aos alunos que participaram.

Aos professores colaboradores desta pesquisa, pela ajuda, pela dedicação, e por estarem sempre dispostos a buscar o que julgam ser melhor para os alunos.

Aos meus pais, Helena e Rosalvo, a minha irmã, Andréa, e ao meu cunhado, Luiz, por terem me acompanhado por todo o caminho, sempre incentivando e apoiando todos os meus passos. Ao meu pai e a minha irmã, pela paciência de ler e de corrigir este texto.

A minha família, que sempre torceu por mim.

À Vera, pelas discussões, pelo companheirismo, e por ter participado, direta ou indiretamente, de todos os momentos deste trabalho.

À Ana, Juliana e Mércia, por terem lido, ouvido, sugerido e apoiado, e por estarem sempre presentes.

A Alessandro e Armando, pelos momentos de estudo e pelos de descontração.

Aos companheiros de Coventry, Melda, Matthew e Pablo, pelos cafés, chás, cinemas e jantares.

A Ana Maria, Célia e Cristina, pelo constante incentivo.

À CAPES, pela bolsa de estágio de doutorando no Reino Unido, de julho de 2005 a junho de 2006, que foi fundamental para a realização deste trabalho.

RESUMO

Apresentamos, neste trabalho, um estudo sobre as concepções de equações apresentadas por alunos de primeira e segunda séries do Ensino Médio. Trabalhamos com cinco professores de Matemática, que colaboraram na confecção dos instrumentos de coleta de dados: um mapa conceitual, um questionário, uma atividade de resolução de equações e entrevistas. Dois desses professores, ainda, foram responsáveis pela aplicação dos instrumentos às turmas de alunos para as quais lecionavam: uma turma de primeira e uma de segunda séries do Ensino Médio, de uma escola pública, e uma turma de segunda série do Ensino Médio de uma escola particular, ambas as escolas localizadas na Grande São Paulo. Os dados coletados foram analisados à luz do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (Tall, 2004a, 2004b). Esta análise teve como enfoque, principalmente, os mundos corporificado e simbólico, e os “já-encontrados” e os “a-encontrar” que interferem no trabalho, com equações, feito pelos alunos.

Os resultados obtidos indicam que a concepção de equação como conta é a mais evidente entre os sujeitos desta pesquisa. A incógnita e o sinal de igual não parecem ser considerados como características importantes de uma equação, e os principais “já-encontrados” usados são provenientes da Aritmética com números inteiros e da Álgebra. A fórmula de Bhaskara é o único método de resolução de equações quadráticas usado com sucesso, e age como “a-encontrar” no trabalho de alguns alunos com equações lineares.

Evidências mostram que a resolução de equações é feita com o uso de técnicas desconectadas do princípio matemático de efetuar a mesma operação em ambos os membros. Os alunos criam seus próprios meios de trabalho, derivados dessas técnicas, e acabam por usar corporificações procedimentais, tratando os símbolos como entidades físicas que são movimentadas de um lado a outro da equação.

Palavras-Chave: Equações, Corporificação procedimental, Três Mundos da Matemática, “Já-encontrados”, “A-encontrar”.

ABSTRACT

This thesis presents a study on the conceptions of equations held by students from first and second years of High School. Five mathematics teachers collaborated in the design of the instruments for data collection: a concept map, a questionnaire, an equation solving task and interviews. Two of these teachers were also responsible for the application of the instruments with their classes: one of first year students and one of second year students from a public school, and one of second year students from a private school, both from the Greater São Paulo area. The data collected was analysed in the light of the theoretical framework of the Three Worlds of Mathematics (Tall, 2004a, 2004b). This analysis is mainly focused on the embodied and symbolic worlds, and the met-befores and met-afters that interfere in the students work with equations.

Results indicate that the most evident conception of equation among these students is equation as a calculation. The unknown and the equals sign do not seem to be important characteristics of an equation, and the main met-befores used by the students are from Arithmetic, with integer numbers, and from Algebra. The quadratic formula is the only solving method for quadratic equations that is used successfully, and it acts as a met-after in the work of some students with linear equations.

The analysis shows that the students use techniques to solve equations which are disconnected from the mathematical principle of performing the same operation in both sides. The students create their own ways of working and end up using procedural embodiments, treating the symbols as physical entities that can be moved from one side to the other of the equation.

Keywords: Equations, Procedural Embodiment, Three Worlds of Mathematics, met-befores, met-afters.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Os Três Mundos da Matemática e o Cálculo 81
Figura 2: Os Três Mundos da Matemática e a Álgebra 82
Figura 3: O relacionamento entre a teoria de Bruner e os Três Mundos da Matemática...83
Figura 4: Uso do modelo geométrico para resolver uma equação. 95
Figura 5: Resposta do aluno [GU119] para a Questão 1 144
Figura 6: Resposta do aluno [SP212] para a Questão 1 145
Figura 7: Resposta do aluno [GU107] para a Questão 1 145
Figura 8: Resposta do aluno [GU117] para a Questão 1 145
Figura 9: Resposta do aluno [GU214] para a Questão 1 146
Figura 10: Resposta do aluno [SP219] para a Questão 1 147
Figura 11: Resposta do aluno [GU211] para a Questão 1.............................. 147
Figura 12: Resposta do aluno [GU209] para a Questão 1.............................. 148
Figura 13: Resposta do aluno [SP217] para a Questão 1 148
Figura 14: Resposta do aluno [GU208] para a Questão 1.............................. 149
Figura 15: Resposta do aluno [SP208] para a Questão 1 149
Figura 16: Resposta do aluno [GU128] para a Questão 1.............................. 150
Figura 17: Resposta do aluno [SP209] para a Questão 1 152
Figura 18: Resposta do aluno [SP211] para a Questão 1 152
Figura 19: Resposta do aluno [GU114] para a Questão 2.............................. 154
Figura 20: Resposta do aluno [SP215] para a Questão 2 154
Figura 21: Resposta do aluno [SP206] para a Questão 2 155
Figura 22: Resposta do aluno [GU104] para a Questão 2.............................. 155
Figura 23: Resposta do aluno [SP218] para a Questão 2 156
Figura 24: Resposta do aluno [GU204] para a Questão 2.............................. 156
Figura 25: Resposta do aluno [GU131] para a Questão 2.............................. 156
Figura 26: Resposta do aluno [GU225] para a Questão 2.............................. 156
Figura 27: Resposta do aluno [GU214] para a Questão 2.............................. 157
Figura 28: Resposta do aluno [SP207] para a Questão 2 158
Figura 29: Resposta do aluno [GU223] para a Questão 3.............................. 159
Figura 30: Resposta do aluno [SP201] para a Questão 3 160
Figura 31: Resposta do aluno [SP219] para a Questão 3 160
Figura 32: Resposta do aluno [GU110] para a Questão 3.............................. 160
Figura 33: Resposta do aluno [SP206] para a Questão 3 161
Figura 34: Resposta do aluno [GU206] para a Questão 3.............................. 162
Figura 35: Resposta do aluno [GU225] para a Questão 3.............................. 162
Figura 36: Resposta do aluno [SP211] para a Questão 3 162
Figura 37: Resposta do aluno [GU213] para a Questão 3.............................. 163
Figura 38: Resposta do aluno [GU103] para a Questão 3.............................. 163
Figura 39: Resposta do aluno [GU130] para a Questão 3.............................. 163
Figura 40: Resposta do aluno [GU113] para a Questão 4.............................. 166
Figura 41: Resposta do aluno [SP213] para a Questão 4 166
Figura 42: Resposta do aluno [SP214] para a Questão 4 166
Figura 43: Resposta do aluno [GU211] para a Questão 4.............................. 166
Figura 44: Resposta do aluno [SP217] para a Questão 4 167
Figura 45: Resposta do aluno [GU202] para a Questão 4.............................. 167
Figura 46: Resposta do aluno [SP210] para a Questão 4 168

Figura 47: Resposta do aluno [GU128] para a Questão 4 168
Figura 48: Resposta do aluno [SP203] para a Questão 4 169
Figura 49: Resposta do aluno [SP205] para a Questão 3 171
Figura 50: Resposta do aluno [GU205] para a Questão 3 173
Figura 51: Resposta do aluno [GU103] para a Questão 3 173
Figura 52: Resposta do aluno [GU225] para a Questão 3 174
Figura 53: Resposta do aluno [GU201] para a Questão 3 175
Figura 54: Resposta do aluno [SP204] para a Questão 1 178
Figura 55: Resposta do aluno [GU215] para a Questão 1 179
Figura 56: Resposta do aluno [SP201] para a Questão 2 179
Figura 57: Resposta do aluno [SP209] para a Questão 2 180
Figura 58: Resposta do aluno [SP211] para a Questão 4 181
Figura 59: Resposta do aluno [SP206] para a Questão 3 182
Figura 60: Resposta do aluno [GU122] para a Questão 3 183
Figura 61: Resposta do aluno [GU126] para a Questão 3 185
Figura 62: Resposta do aluno [GU129] para a Questão 3 186
Figura 63: Resposta do aluno [SP209] para a Questão 3 188
Figura 64: Resposta do aluno [GU213] para a Questão 5 189
Figura 65: Resposta do aluno [SP208] para a Questão 5 190
Figura 66: Resposta do aluno [SP207] para a Questão 5 191
Figura 67: Resposta do aluno [GU202] para a Questão 5 192
Figura 68: Resposta do aluno [GU211] para a Questão 5 193
Figura 69: Resposta do aluno [SP215] para a Questão 5 193
Figura 70: Resposta do aluno [SP210] para a Questão 5 194
Figura 71: Resposta do aluno [SP206] para a Questão 5 195
Figura 72: Resposta do aluno [GU120] para a Questão 5 195
Figura 73: Resposta do aluno [GU207] para a Questão 6 198
Figura 74: Resposta do aluno [GU211] para a Questão 6 198
Figura 75: Resposta do aluno [GU123] para a Questão 6 199
Figura 76: Resposta do aluno [SP201] para a Questão 6 200
Figura 77: Resposta do aluno [SP202] para a Questão 6 200
Figura 78: Resposta do aluno [SP212] para a Questão 6 201
Figura 79: Resposta do aluno [GU203] para a Questão 6 202
Figura 80: Resposta do aluno [GU107] para a Questão 6 203
Figura 81: Resposta do aluno [GU132] para a Questão 6 203
Figura 82: Resposta do aluno [GU122] para a Questão 6 204
Figura 83: Resposta do aluno [GU201] para a Questão 6 205
Figura 84: Resposta do aluno [GU201] para a Questão 5 211
Figura 85: Resposta do aluno [SP210] para a Questão 7 213
Figura 86: Resposta do aluno [SP217] para a Questão 7 214
Figura 87: Resposta do aluno [GU217] para a Questão 7 214
Figura 88: Resposta do aluno [GU109] para a Questão 7 215
Figura 89: Resposta do aluno [GU130] para a Questão 7 215
Figura 90: Resposta do aluno [GU132] para a Questão 7 216
Figura 91: Resposta do aluno [GU127] para a Questão 7 216
Figura 92: Resposta do aluno [GU202] para a Questão 7 216
Figura 93: Resposta do aluno [GU120] para a Questão 7 216
Figura 94: Resposta do aluno [GU225] para a Questão 7 216
Figura 95: Resposta do aluno [GU111] para a Questão 8 221
Figura 96: Resposta do aluno [GU202] para a Questão 8 221

Figura 97: Resposta do aluno [GU114] para a Questão 8 221
Figura 98: Resposta do aluno [SP211] para a Questão 8 222
Figura 99: Resposta do aluno [GU122] para a Questão 8 223
Figura 100: Resposta do aluno [SP215] para a Questão 8 223
Figura 101: Resposta do aluno [SP206] para a Questão 8 na entrevista 224
Figura 102: Resposta do aluno [SP214] para a Questão 8 225
Figura 103: Resposta do aluno [GU226] para a Questão 8 225
Figura 104: Resposta do aluno [SP204] para a Questão 8 225
Figura 105: Resposta do aluno [GU104] para a Questão 8 225
Figura 106: Resposta do aluno [GU207] para a Questão 8 226
Figura 107: Resposta do aluno [SP206] para a Questão 8 227
Figura 108: Resposta do aluno [GU206] para a Questão 8 227
Figura 109: Resposta do aluno [SP211] para a Questão 8 229
Figura 110: Resposta do aluno [GU207] para a Questão 9 232
Figura 111: Resposta do aluno [GU120] para a Questão 9 232
Figura 112: Resposta do aluno [SP211] para a Questão 9 233
Figura 113: Resposta do aluno [GU113] para a Questão 9 234
Figura 114: Resposta do aluno [GU115] para a Questão 9 234
Figura 115: Resolução do aluno [GU203] para a equação $3x-1=3+x$ 244
Figura 116: Resolução do aluno [GU119] para a equação $3x-1=3+x$ 246
Figura 117: Resolução do aluno [GU224] para a equação $2m=4m$ 249
Figura 118: Resolução do aluno [GU107] para a equação $2m=4m$ 250
Figura 119: Resolução do aluno [GU101] para a equação $3x-1=3+x$ 250
Figura 120: Resolução do aluno [SP214] para a equação $2m=4m$ 252
Figura 121: Resolução do aluno [SP210] para a equação $2m=4m$ 253
Figura 122: Resolução do aluno [GU130] para a equação $2m=4m$ 254
Figura 123: Resolução do aluno [GU104] para a equação $2m=4m$ 254
Figura 124: Resolução do aluno [GU103] para a equação $2m=4m$ 254
Figura 125: Resolução do aluno [GU101] para a equação $2m=4m$ 255
Figura 126: Resolução do aluno [GU223] para a equação $3x-1=3+x$ 255
Figura 127: Resolução do aluno [GU103] para a equação $3x-1=3+x$ 256
Figura 128: Resolução do aluno [GU203] para a equação $2m=4m$ 259
Figura 129: Resolução do aluno [GU225] para a equação $5t-3=8$ 261
Figura 130: Resolução do aluno [SP204] para a equação $r^2-r=2$ 265
Figura 131: Resolução do aluno [GU118] para a equação $3l^2-l=0$ 269
Figura 132: Resolução do aluno [GU113] para a equação $m^2=9$ 270
Figura 133: Resolução do aluno [GU225] para a equação $m^2=9$ 271
Figura 134: Resolução do aluno [GU102] para a equação $a^2-2a-3=0$ 271
Figura 135: Resolução do aluno [GU125] para a equação $a^2-2a-3=0$ 271
Figura 136: Resolução do aluno [GU107] para a equação $a^2-2a-3=0$ 272
Figura 137: Resolução do aluno [GU118] para a equação $a^2-2a-3=0$ 272
Figura 138: Resolução do aluno [SP205] para a equação $m^2=9$ 273

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Enunciado das Questões de 1 a 4 do Questionário 117
Quadro 2: Enunciado das Questões 5 e 6 do Questionário 118
Quadro 3: Enunciado da Questão 7 do Questionário 120
Quadro 4: Enunciado da Questão 8 do Questionário 121
Quadro 5: Enunciado da Questão 9 do Questionário 122
Quadro 6: Equações que compõem a atividade de resolução de equações 125
Quadro 7: Enunciado da Questão 7 do Questionário 212
Quadro 8: Enunciado da Questão 8 do Questionário 220
Quadro 9: Enunciado da Questão 9 do Questionário 230
Quadro 10: Equações lineares da atividade de resolução de equações............ 240
Quadro 11: Equações quadráticas da atividade de resolução de equações 263
Quadro 12: Respostas do aluno [SP211] às questões do questionário e perguntas feitas na entrevista 319

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Descrição das turmas 112
Tabela 2: Categorização dos mapas conceituais.. 133
Tabela 3: Categorias de respostas para a Questão 1.................................. 144
Tabela 4: Categorias de respostas para a Questão 2.................................. 153
Tabela 5: Categorias de respostas para a Questão 3.................................. 158
Tabela 6: Categorias de respostas para a Questão 4.................................. 165
Tabela 7: Categorias de respostas para a Questão 5.................................. 188
Tabela 8: Categorias de respostas para a Questão 6.................................. 197
Tabela 9: Uso da fórmula de Bhaskara nas Questões 5 e 6 206
Tabela 10: Categorias de respostas para a Questão 7 212
Tabela 11: Categorias de respostas para a Questão 8 220
Tabela 12: Categorias de respostas para a Questão 9 231
Tabela 13: Resolução das equações lineares na atividade............................ 241
Tabela 14: Resolução das equações quadráticas na atividade 264
Tabela 15: Uso da formula de Bhaskara em cada equação 267

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 16
CAPÍTULO 1: REVISÃO DE LITERATURA 20
1.1. Diferentes visões da Álgebra 21
1.2. A equação e sua estrutura 24
1.3. A resolução de equações e as mal-rules 31
1.4. Modelos concretos e corte didático 42
1.5. Considerações gerais 47
CAPÍTULO 2: EM BUSCA DE FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 52
2.1. As teorias de processo-objeto 53
2.2. Cognição Corporificada 65
2.3. Os Três Mundos da Matemática 69
2.3.1. "Já-encontrados" e "a-encontrar" 86
2.3.2. As Equações e os Três Mundos da Matemática 91
2.3.3. De volta à questão norteadora 103
CAPÍTULO 3: PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA 107
3.1. Os participantes da pesquisa 111
3.2. Mapa conceitual 114
3.3. Questionário 116
3.4. Um novo instrumento: a atividade de resolução de equações 123
3.5. Entrevistas 126
3.6. Análise dos dados 128
CAPÍTULO 4: APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS 129
4.1. Mapas conceituais 130
4.1.1. A confecção do mapa 130
4.1.2. Tempestades de idéias e frases 132
4.1.3. O que não foi dito 139
4.1.4. Reflexões sobre as concepções de equação 140
4.2. Questionário 142
4.2.1. Questão 1: O que é equação? 143
4.2.2. Questão 2: Para que serve uma equação? 153
4.2.3. Questão 3: Dê um exemplo de equação. 158

4.2.4. Questão 4: O que significa o resultado de uma equação? 164
4.2.5. Questão 5: Resolva a equação $t^2 - 2t = 0$. 188
4.2.6. Questão 6: Resolva a equação $(y-3)\cdot(y-2)=0$. 196
4.2.7. Questão 7: O "problema da cerca" 212
4.2.8. Questão 8: Discutir a resolução apresentada para a equação $(x-3)\cdot(x-2)=0$ 219
4.2.9. Questão 9: Elaboração de uma situação-problema 230
4.2.10. Sobre as diferenças entre as turmas 235
4.3. Atividade de resolução de equações 238
4.3.1. Equações lineares 240
4.3.2. Equações quadráticas 263
CONCLUSÃO 277
1. Ferramentas de análise 278
2. Principais resultados empíricos 281
3. Diferenças entre as turmas 285
4. Discutindo as questões de pesquisa 286
4.1. Significados atribuídos a equações 288
4.2. Mágica e corporificação procedimental 289
4.3. A flexibilidade dos proceitos e o pensamento "proceitual" 292
4.4. "Já-encontrados" e "a-encontrar" 294
4.5. Conexões entre os Três Mundos da Matemática 297
5. Limitações do estudo e sugestões para outras pesquisas 298
BIBLIOGRAFIA 305
APÊNDICE A - A TEMPESTADE DE IDÉIAS 309
APÊNDICE B - QUESTIONÁRIO APRESENTADO AOS ALUNOS 311
APÊNDICE C - UM EXEMPLO DE ENTREVISTA 317
ANEXO A - PALAVRAS DAS TEMPESTADES DE IDÉIAS 333
ANEXO B - MAPAS CONCEITUAIS 337

INTRODUÇÃO

É vasta a literatura em Educação Matemática que trata dos problemas que envolvam o ensino e a aprendizagem da Álgebra. Em especial, a busca de razões para as dificuldades com as quais os alunos se deparam no aprendizado de equações e da resolução delas tem sido tema de diversas pesquisas na área, há muitos anos.

Várias dessas pesquisas buscam diagnosticar os erros cometidos pelos alunos ao resolverem equações (SLEEMAN, 1984; PAYNE e SQUIBB, 1990 e FREITAS, 2000), apresentando os diferentes tipos de erros que surgem no trabalho dos alunos, muitos deles causados pelo uso inapropriado de técnicas de resolução. O próprio entendimento de o que é uma equação parece estar relacionado com essas técnicas (DREYFUS e HOCH, 2004), e não com qualquer conceito subjacente a ela, como a igualdade entre os membros.

Ao estudarmos essas pesquisas, vemos que diagnósticos dos diferentes tipos de erros já foram extensivamente realizados, mas as causas desses comportamentos permanecem nebulosas. O estudo dessas pesquisas, a observação, em nossa prática docente, do comportamento dos alunos ao resolver equações e a análise de dados coletados em pesquisas anteriores (por exemplo, LIMA, 1999 e LIMA, 2004), nos levam a questionar por que alunos de diversos países cometem os (aparentemente) mesmos erros apresentados por tantas pesquisas. As justificativas dadas para explicar tal comportamento dos alunos giram em torno apenas da má-interpretação das técnicas de resolução de equações e da falta de significado para elas e para os símbolos matemáticos presentes em uma equação (LINCHEVSKI e SFARD, 1991 e CORTÉS e KAVAFIAN, 1999).

Algumas tentativas de superar essas dificuldades envolvem o uso de modelos concretos, tais como, o modelo geométrico (FILLOY e ROJANO, 1989) e o modelo da balança (FILLOY e ROJANO, 1989, e VLASSIS, 2002). Mesmo que esses modelos não suportem situações que envolvam números negativos, eles pretendem dar significado ao sinal de igual e às técnicas de resolução de equações. Entretanto, eles são bem-sucedidos apenas num primeiro momento, com equações simples. Os alunos ainda apresentam dificuldades na resolução de equações mais sofisticadas.

Esses resultados nos fazem conjecturar que, talvez, haja mais do que a falta de significado para técnicas de resolução de equações nas dificuldades enfrentadas pelos alunos ao trabalharem com equações, e nos estimulam a investigar os fenômenos envolvidos na resolução delas.

Assim, tendo em mente buscar compreender as causas que levam os alunos a cometer os erros apresentados na literatura sobre o tema, o objetivo desse trabalho é buscar os significados dados pelos alunos a equações e aos métodos usados para resolvê-las.

Guiados por esse objetivo, levantamos uma questão norteadora:

- *Quais são os significados que os alunos atribuem a equações e aos métodos de resolução que usam, e de quais experiências esses significados surgem?*

Com o objetivo de responder esta pergunta, inicialmente, faremos uma análise dos resultados de pesquisas sobre equações, que julgamos fundamentais para nosso estudo, usando uma classificação de equações em *equações de avaliação* (LIMA e TALL, no prelo) e *equações de manipulação*. Tal classificação é derivada de outra, mais ampla, da Álgebra em *álgebra de avaliação*, *álgebra de manipulação* e *álgebra axiomática* (TALL e THOMAS, 2001). Essa análise será apresentada no **Capítulo 1: Revisão de Literatura**.

Em seguida, no **Capítulo 2: Em Busca de Fundamentação Teórica**, revisaremos algumas teorias que foram usadas para explicar as dificuldades que os alunos parecem enfrentar no aprendizado de equações. Considerando que as análises baseadas nessas teorias não nos são satisfatórias, já que trazem resultados que, julgamos, podem ser ampliados, sugeriremos a possibilidade do uso de um referencial teórico diferente para a análise dos dados coletados nesta pesquisa, os Três Mundos da Matemática. Com a descrição desse novo referencial teórico, surgirá, também a possibilidade de reformulação das questões de pesquisa levantadas.

No **Capítulo 3: Procedimentos Metodológicos da Pesquisa**, apresentaremos os sujeitos desta pesquisa, alunos de primeira e segunda séries do Ensino Médio de duas escolas, uma particular e uma pública; e os professores deles, que fazem parte da elaboração de três instrumentos de coleta de dados aplicados: mapa conceitual, questionário e entrevistas. Faremos, também, uma descrição desses instrumentos, bem como de um quarto instrumento, a atividade de resolução de equações, acrescentado posteriormente a este trabalho; da aplicação deles e de como a análise dos dados coletados será feita.

A análise dos dados, propriamente dita, será feita no **Capítulo 4: Apresentação e Análise dos Dados**. Nesse capítulo, faremos uma categorização dos dados coletados com cada um dos instrumentos, buscando relacionar esses dados com os resultados das pesquisas apresentadas no **Capítulo 1**, e com o referencial teórico dos Três Mundos da Matemática. Características de cada uma das turmas serão também levantadas, de forma que possamos elaborar um perfil de cada uma delas a partir das concepções dos alunos sobre equações.

Para finalizar, apresentaremos nossas conclusões sobre a análise que fizemos no decorrer deste trabalho, e voltaremos aos objetivos, ao quadro teórico, às questões de pesquisa e às diferenças entre as turmas. Apresentamos também as limitações desta pesquisa, assim como possibilidades de novas pesquisas que essas limitações apontam.

CAPÍTULO 1:

REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo, faremos uma distinção entre equações de avaliação (LIMA e TALL, no prelo) e equações de manipulação. Essa classificação é derivada de outra mais abrangente que divide a Álgebra em álgebra de avaliação, álgebra de manipulação e álgebra axiomática (TALL e THOMAS, 2001). A partir disso, apresentaremos diferentes relatos de pesquisas relacionadas com o estudo de equações e com a resolução delas, buscando analisar os dados apresentados com essa classificação, verificando se há diferenças de entendimento, por parte dos alunos, entre equações de avaliação e equações de manipulação. Ampliaremos essa classificação, feita inicialmente para equações lineares, para equações quadráticas, já que elas também fazem parte dos instrumentos de coleta de dados de nossa pesquisa. Por fim, com base nessa classificação, discutiremos as implicações dos resultados de pesquisa apresentados para o entendimento de equações.

1.1. *Diferentes visões da Álgebra*

Tall e Thomas (2001) buscam discutir o desenvolvimento cognitivo da Álgebra observando o significado dado aos símbolos. Desta forma, distinguiram três níveis de Álgebra: *álgebra de avaliação*; *álgebra de manipulação*; e *álgebra axiomática*.

No primeiro tipo, expressões algébricas, tais como, $4x+3$, podem ser avaliadas dando-se valores para x. Por exemplo, quando $x=3$, $4x+3$ será igual a $4\cdot 3+3$, que é igual a 15. Este tipo de avaliação permite, por exemplo, que o aluno observe a diferença entre $3+2\cdot x$ e $(3+2)\cdot x$, bem como a equivalência entre $(3+2)\cdot x$ e $5x$. É possível analisar também os diferentes processos envolvidos na avaliação de cada uma das expressões. Por exemplo, quando $x=4$, para avaliar $3+2\cdot x$, é necessário, antes de tudo, fazer a multiplicação de 4 por 2, para depois somar 3, enquanto que, para avaliar $(3+2)\cdot x$, é necessário fazer a soma $3+2$ em primeiro lugar e só depois multiplicá-la por 4. Esses dois processos são diferentes e resultam em valores diferentes. Já para avaliar $5x$, o processo usado é diferente dos outros dois, bastando multiplicar 5×4, resultando na mesma saída que $(3+2)\cdot x$.

Na álgebra de manipulação, expressões são manipuladas algebricamente e a letra assume o papel de incógnita ou variável, em situações como resolução de equações ou trabalho com funções, respectivamente. Em situações como estas, não se trabalha somente com números, mas sim com a manipulação de símbolos matemáticos, o que inclui operações com a incógnita. Por exemplo, equações como $3x-1=3+x$ não podem ser resolvidas por meio de álgebra de avaliação, sendo necessário que se manipulem símbolos, operando também com x.

Por fim, na álgebra axiomática, os sistemas algébricos, tais como, espaços vetoriais ou sistemas de equações lineares, são manuseados por meio de definições e de demonstrações. Isto acarreta uma diferenciação entre estruturas técnicas e axiomáticas.

Acreditamos que o trabalho com álgebra de avaliação possa permitir que o aluno perceba a equivalência entre diferentes expressões algébricas. Isso pode fazer com que ele tenha maior flexibilidade no trabalho com Álgebra, dando significado aos símbolos. Além disso, esse tipo de álgebra pode colaborar no entendimento de que diferentes procedimentos podem gerar o mesmo resultado.

Já a álgebra de manipulação pode permitir que o aluno compreenda igualdades como $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$, bem como a manipulação dos símbolos, necessária para chegar a um dos membros partindo do outro. Além disso, esse tipo de álgebra pode colaborar com o entendimento da manipulação e da operação com a incógnita para se obter o valor que faz da equação proposta uma sentença verdadeira.

No caso específico de equações, entendemos que esta classificação elaborada por Tall e Thomas (2001) colabora para entendermos como os três níveis de Álgebra podem se refletir no estudo de equações, classificando-as em alguns desses mesmos níveis, e para observarmos o que algumas pesquisas mostram a respeito deles.

Nessa linha, entendemos que as equações que contêm a incógnita em um único membro podem ser resolvidas desfazendo cada uma das operações até que o valor da incógnita seja obtido. Por exemplo, a equação $2x+1=5$ pode ser resolvida subtraindo-se 1 do resultado 5, obtendo-se 4. Em seguida, divide-se 4 por 2, obtendo 2, que é o valor da incógnita x. Entendemos que a expressão $2x+1$ está sendo avaliada para que o resultado 5 seja encontrado. É possível, também, que o sinal de igualdade em equações dessa forma ainda seja visto como um sinal operacional (KIERAN, 1981), em que a expressão do primeiro membro deve ser operada de forma que se obtenha o resultado que está no segundo membro. Assim, chamamos equações da forma $ax+b=c$ de *equações de avaliação* (LIMA e TALL, no prelo).

Não é possível, entretanto, resolver equações da forma $ax+b=cx+d$ desfazendo operações. Para resolvê-las, é necessário operar com a incógnita, para que haja manipulação simbólica. Chamamos estas equações de *equações de manipulação*.

A classificação que acabamos de apresentar é restrita a equações lineares. Entretanto, acreditamos que é possível fazer alguma classificação semelhante com outros tipos de equação. Por exemplo, no caso das equações quadráticas, que também farão parte dos nossos instrumentos de pesquisa, juntamente com as lineares, notamos que equações do tipo $ax^2=b$ podem ser de avaliação, já que também é possível desfazer certas operações, a partir do segundo membro, para se obter o valor de x. Até mesmo equações na forma $a(x+b)^2+c=d$ podem ter suas operações desfeitas para que as raízes sejam obtidas. Já as equações na forma $ax^2+bx+c=d$ exigem manipulações, seja por meio do uso da fórmula de Bhaskara, seja para escrevê-las na forma fatorada, isto é, na forma $a(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$, em que x_1 e x_2 são raízes da equação, ou para transformá-la em uma equação de avaliação, na forma $a(x+b)^2+c=d$, completando quadrados.

A partir dessa classificação, observaremos se esses tipos de equação mencionados estão presentes nas pesquisas apresentadas neste estudo e se eles têm alguma influência nos resultados obtidos, buscando verificar se os sujeitos dessas pesquisas revelam alguma dificuldade, além das citadas anteriormente, com algum dos tipos de equação, seja de avaliação, seja de manipulação.

1.2. A equação e sua estrutura

Nossa primeira preocupação é buscar o entendimento que alunos podem ter do conceito de equação. Nessa busca, Dreyfus e Hoch (2004) perguntam o que é equação, para alunos de Ensino Médio em Israel, procurando entender qual é o tipo de estrutura que tais alunos percebem que está presente em uma equação. Entre as respostas, encontram-se:

> "1. Um exercício no qual o objetivo é encontrar x.
> 2. Um exercício que tem uma solução, isto é, é um exercício antes de resolvê-lo, e no fim você pode fazer alguma coisa com isso e chegar na solução. Você precisa encontrar a variável.
> 3. Os x de um lado, números de outro, um sinal de igual entre eles; é preciso achar x.
> 4. Uma afirmação incluindo dois lados, um sinal de igual e um ou mais de um x.
> 5. Dois membros conectados por um sinal de igual e certas regras para resolver."
>
> (DREYFUS e HOCH, 2004, p. 153, tradução nossa[1])

Para analisar o entendimento desses alunos no que se refere à estrutura de equações, os autores levam em consideração dois aspectos: reconhecer uma equação e lidar com a estrutura interna dela. De acordo com os autores, as respostas 1, 2 e 3 são procedimentais, a 4 enfoca somente o que chamam de forma externa da equação, enquanto a resposta 5 chega perto de indicar que há uma estrutura subjacente ao dizer "certas regras".

Entendemos que as respostas 1 e 2 referem-se, principalmente, a equações de avaliação. Os alunos que apresentam tais respostas falam somente do valor para x que deve ser encontrado, enquanto que nas respostas 3 e 4 já se referem ao sinal de igual, o que pode ser classificado tanto como um entendimento de equações de avaliação quanto de equações de manipulação, já que esses alunos podem realmente entender o sinal de igual como a igualdade entre os membros e não somente como um sinal operacional. A resposta 5 já se refere ao entendimento do aluno como equação de manipulação por explicitamente mencionar as regras que devem ser usadas para resolvê-la. Isso nos mostra que é possível que os sujeitos dessa pesquisa entendam a equação como uma avaliação que se deve fazer para

[1] "1. An exercise where the aim is to find x. 2. An exercise that has a solution, that is, an exercise before you've solved it, and in the end you can do something to it and get to the solution. You need to find the variable. 3. x-s on one side, numbers on the other, an equal sign between them; need to find x. 4. A statement including two sides, an equal sign, and one or more x-s. 5. Two sides connected by an equal sign and certain rules for solving."

encontrar o valor da incógnita. Entretanto, nem todas as equações podem ser resolvidas por meio de avaliações, o que torna o entendimento do aluno limitado a apenas alguns tipos de equação.

Essas diferentes respostas levaram os autores a concluir que, para esses alunos, é fácil reconhecer uma equação, mas difícil falar sobre ela. E muitos deles não estão conscientes das propriedades matemáticas presentes em uma equação, já que não se referem à estrutura interna.

Segundo os autores, essa estrutura interna de uma equação engloba dois tipos: *estrutura real* e *estrutura potencial*. A primeira está relacionada à equação na forma que foi apresentada, enquanto a estrutura potencial refere-se ao que pode ser obtido a partir da equação, sendo relacionado à álgebra de manipulação. Dreyfus e Hoch (2004) entendem que ambos os tipos de estrutura interna não são reconhecidos por esses alunos e que o entendimento deles sobre equações está relacionado principalmente a procedimentos usados para resolvê-las.

Dessa forma, os autores afirmam que a ênfase no ensino de equações deveria ser na estrutura, pois "... reconhecer e usar essa estrutura provavelmente aumentará substancialmente o sucesso em Álgebra" (DREYFUS e HOCH, 2004, p. 155, tradução nossa[2]), e não na apresentação de métodos mecânicos de resolver equações, pois isso acarreta dificuldades para os alunos ao lidar com equações que não são padrão, isto é, não lhes são familiares.

[2] "... recognizing and using structure is likely to increase success in algebra substantially."

Acreditamos que o entendimento da estrutura interna de uma equação é importante pois, ao ser relacionado à álgebra de manipulação, esse entendimento pode colaborar para que o aluno compreenda o significado de cada um dos símbolos usados para representar uma equação, bem como a sua manipulação. Esses símbolos desempenham papel indispensável para que se tenha uma equação. Por exemplo, o sinal de igual deve representar para os alunos a igualdade entre os membros, fazendo com que todas as ações efetuadas em um dos membros sejam também efetuadas no outro.

Para obter informações sobre o entendimento que os alunos têm do sinal de igual, Kieran (1981) faz um levantamento de pesquisas que evidenciam os diferentes significados dados por alunos de escola básica. De acordo com este relato, alunos de Educação Infantil dão significado ao sinal de igual que envolve comparação entre a quantidade de elementos de dois conjuntos distintos e a quantidade de elementos da união entre dois conjuntos disjuntos. Já no Ensino Fundamental, alunos entendem o sinal de igual como uma ação a ser efetuada e as sentenças aritméticas devem ser escritas na ordem de operação, isto é, aparentemente $8=3+5$ é mais difícil de ser entendida pelos alunos do que $3+5=8$. Até este momento, temos avaliações sendo feitas em Aritmética. Se existe um início de estudo da Álgebra, este estudo provavelmente se referirá também à álgebra de avaliação, até que o trabalho com equações lineares exija a álgebra de manipulação. De acordo com o relato, é no Ensino Médio que deveria ocorrer a transição do sinal de igual como uma operação em aritmética para o sinal de igual como o que a autora chama de *equivalência* em Álgebra. Entendemos que o significado do sinal de igual, neste caso, deve ser tanto para igualdades que são válidas para qualquer valor de x, tais como, $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, quanto para igualdades válidas somente para valores específicos de x, como, por exemplo, $x^2 - 1 = 5$. Para que seja possível aos alunos ampliar seu entendimento sobre o sinal de igual, Kieran (1981) apresenta uma proposta de ensino que se inicia com o que ela chama de "igualdades aritméticas". Os alunos são instigados a escrever igualdades do tipo $2 \times 6 = 4 \times 3$ ou $2 \times 6 = 10 + 2$ para que comecem a se familiarizar com o significado de equivalência do sinal de igual. A construção de igualdades contendo mais operações em cada membro também é incentivada e, a seguir, sugere-se que um dos números seja escondido, sendo representado por um quadrado e, posteriormente, por uma letra. Com isso, é possível usar mais de uma letra para "ocultar" diferentes números e também usar a mesma letra para ocultar o mesmo número mais de uma vez na igualdade. É importante ressaltar que Kieran (1981) não considera que essa abordagem seja suficiente para conceitualizar adequadamente o processo de resolução de equações, mas sim para dar diferentes significados ao sinal de igual.

Aparentemente, alunos passam muito tempo de sua escolaridade (da Educação Infantil ao fim do Ensino Fundamental) fazendo uso do sinal de igual como um operador em que é preciso colocar depois dele o resultado da conta que está antes. Esse pode ser um fator que colabora na resolução de equações de avaliação, porém torna-se uma dificuldade para alguns alunos ao lidarem com a resolução de equações de manipulação. A falta de entendimento de que um membro da equação é igual ao outro e de que é necessário manter essa igualdade a cada passo da resolução podem acarretar que, de algum desses passos, não resulte uma equação equivalente à inicial, o que faria com que as raízes obtidas não fossem as procuradas. Desta forma, há a necessidade de buscar saber o que os alunos entendem sobre equações equivalentes.

Nesse sentido, Linchevski e Sfard (1991) analisam os resultados obtidos com a aplicação de um questionário a 280 alunos, entre 15 e 17 anos, de escolas secundárias de Jerusalém, sobre equações equivalentes. As autoras buscam descobrir se os alunos entendem que duas equações são equivalentes quando as raízes de ambas são iguais. Assim, de acordo com esta definição, equações como $4x-11=2x-7$ e $4x=2x+4$ são equivalentes, pois podem ser transformadas uma na outra efetuando-se a mesma operação em ambos os membros (no caso somando-se 11 aos membros), e possuem a mesma raiz. E equações como $4x-11=2x-7$ e $(x-2)^2=0$ também são equivalentes, pois, apesar de as autoras afirmarem que elas não são transformáveis, isto é, não é possível obter uma a partir da outra, por meio de operações algébricas, possuem a mesma raiz. É importante destacar que, mesmo que a multiplicidade da raiz dessas equações seja diferente, entendemos que elas são equivalentes por estarem coerentes com a definição dada pelas autoras, de que as equações devem ter o mesmo conjunto-verdade, isto é, os conjuntos formados pelas soluções de cada uma das equações devem ser iguais. No caso das equações $4x-11=2x-7$ e $(x-2)^2=0$, o conjunto-verdade é o mesmo: $S=\{2\}$. Esse tipo de abordagem de equações equivalentes evidencia um objeto abstrato, como afirmam as próprias autoras, e, por isso mesmo, relacionado à Matemática formal.

Os resultados obtidos com o questionário indicam que, para os sujeitos dessa pesquisa, duas equações são equivalentes somente se uma pode ser transformada na outra por meio de regras, independentemente do conjunto-verdade de ambas. Assim, acreditamos que o entendimento que esses alunos têm de equações equivalentes está intimamente relacionado à álgebra de manipulação, pois mostram a necessidade de manipular duas equações para decidir sobre sua equivalência. Isso mostra que, mais do que ligados a aspectos formais da Matemática, esses alunos devem estar ligados às ações que devem ser feitas para resolver uma equação e à transformação de uma em outra.

Uma outra conclusão à qual as autoras chegam é que, aparentemente, se a transformação de uma equação em outra é permitida ou não, é uma decisão que o aluno toma arbitrariamente, pois *"... uma equação ou inequação é apenas um conjunto de símbolos que podem ser manipulados de acordo com certas regras arbitrárias."* (LINCHEVSKI e SFARD, 1991, p.323, tradução nossa[3]). É possível que o entendimento desses alunos seja simplesmente instrumental, ligado à álgebra de manipulação, mas sem dar a essa manipulação significado relacionado a princípios algébricos.

Vemos então que a maioria dos alunos que fizeram parte dessa pesquisa não compreende a equivalência entre duas equações apenas por meio de seus conjuntos-verdade. Eles acreditam na necessidade de transformar uma equação em outra para que elas sejam equivalentes. Como afirmam Linchevski e Sfard (1991), o conjunto-verdade é um objeto abstrato que faz parte do formalismo relacionado a equações, enquanto a transformação de uma equação em outra está relacionada à manipulação de símbolos, que parece mais presente no trabalho diário do aluno

[3] "... an equation or inequality was nothing more than a string of symbols which can be manipulated according to certain arbitrary rules."

com equações. Entendemos que, como aparentemente a realidade do aluno está mais relacionada a manipulações simbólicas do que a aspectos formais de conceitos, a transformação é o método mais usado para essa verificação. Em contraposição, como os significados relacionados a essa manipulação, muitas vezes, são omitidos ou desconectados das técnicas usadas para resolução de equações, ela torna-se sem sentido. Dessa forma, é necessário observar pesquisas que analisam como os alunos se comportam ao resolver equações.

1.3. *A resolução de equações e as* **mal-rules**

Nessa busca, Cortés e Kavafian (1999), inicialmente, identificam propriedades matemáticas invariantes para a resolução de equações lineares. São elas: a *conservação da igualdade*; o *respeito à prioridade de operações* de acordo com a transformação efetuada; e o *respeito a diferentes tipos de controle* inerentes ao cálculo algébrico. Este último refere-se, por exemplo, a efetuar manipulações algébricas, como $2x+3x$ ou $(x-1)^2$.

Baseados nessas propriedades, Cortés e Pfaff (2000) levantam as justificativas dadas por alunos para as transformações por eles efetuadas em equações durante a resolução. Para isso, elaboraram um teste sobre resolução de equações lineares, aplicado a 45 alunos com idade média de 17 anos, e usaram entrevistas para compreender o significado dado pelos alunos às transformações que fazem, de acordo com as justificativas dadas.

As justificativas dadas pelos alunos para as transformações feitas foram classificadas em três categorias. A primeira é *efetuar a mesma operação*, em ambos os membros da equação, em que os alunos usavam esta propriedade matemática para justificar as transformações feitas. A segunda é o que os autores chamam de *justificativas aritméticas*, isto é, as transformações são feitas para operar com números. A terceira é *sem justificativa matemática*, em que os alunos dão justificativas que não estão ligadas a propriedades matemáticas, tais como, “passar o número para o outro lado e mudar o sinal”.

De acordo com os autores, apenas um ou dois alunos por sala se encaixam na primeira categoria, quase metade dos alunos na segunda e mais da metade na terceira categoria.

Os alunos classificados na primeira categoria usam propriedades matemáticas invariantes levantadas por Cortés e Kavafian (1999) para a resolução. Já os presentes na segunda categoria usam a transferência de números para o outro lado da equação como propriedade invariante, que é justificada por meio do uso da operação inversa. Os alunos que se comportam de acordo com a terceira e última categoria usam propriedades matemáticas invariantes que não estão evidentes para eles, pois não estão conscientes dessas propriedades por trás dos procedimentos que usam.

Apenas um dos alunos que justifica as transformações por meio de operações idênticas declara que o conjunto-verdade é conservado, enquanto os outros declaram que a igualdade entre os membros da equação é conservada. Logo, apenas a igualdade, e não a conservação do conjunto-verdade, é uma propriedade matemática invariante para grande parte dos alunos. Como vimos, esses resultados estão de acordo com os de Linchevski e Sfard (1991), que mostram que os alunos não consideram equivalentes as equações que têm o mesmo conjunto-verdade, mas não podem ser transformadas uma na outra. As justificativas aritméticas, de acordo com Cortés e Pfaff (2000), só podem ser usadas em equações do tipo $ax+b=c$, uma equação de avaliação. Por fim, ao efetuarem transformações sem qualquer justificativa matemática, os alunos que se encaixam nessa categoria não sentem necessidade de fundamentar sua ação em princípios matemáticos. Eles as descrevem por meio de frases, como "passar para o outro lado e mudar de sinal". Dessa forma, não lhes é possível checar a validade da transformação efetuada. Essas regras estão relacionadas à álgebra de manipulação e são usadas principalmente com equações de manipulação, enquanto as equações de avaliação são resolvidas desfazendo-se as operações aritméticas.

De acordo com Cortés e Pfaff (2000), então, existem certas propriedades matemáticas invariantes usadas por alunos para resolver equações. São elas: efetuar a mesma operação em ambos os membros, o que conserva também a igualdade entre eles; as operações aritméticas inversas; e as regras usadas para resolver equações, como "passa para o outro lado e muda de sinal". Para esta última, os alunos que a usam não sentem necessidade de justificativa matemática.

Tais regras, entretanto, não parecem ser confiáveis, pois elas podem ser usadas por alunos de maneira que não satisfaça a propriedade matemática que as fundamenta. Por exemplo, para resolver $ax = b$, um aluno que use regras desse tipo pode concluir que $x = \frac{b}{-a}$, pois a deve "passar para o outro lado e *mudar o sinal*". Este é um entre os erros que Freitas (2002) encontra em um levantamento e uma análise dos tipos de erros que 104 alunos da primeira série do Ensino Médio de uma escola particular de São Paulo cometem ao resolver equações. Os dados foram coletados por meio de um instrumento investigativo contendo 24 equações lineares (selecionadas a partir dos resultados obtidos com um teste piloto) e de entrevistas. Os erros encontrados foram divididos em seis categorias.

> "Categorias de erros:
>
> Alteração do sinal do coeficiente, na divisão do termo independente: $ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{-a}$;
>
> Transformação de $ax = b$ em $x = b - a$;
>
> Trocar a posição do coeficiente de x pela do termo independente na divisão: $ax = b \Rightarrow x = \frac{a}{b}$;
>
> Efetuar a transposição de termos independentes sem alterar o sinal: $ax + b = c \Rightarrow ax = b + c$;
>
> Efetuar a transposição de termos em x sem alterar o sinal: $ax = bx + c \Rightarrow ax + bx = c$;
>
> O zero como um complicador em equações em que é solução, e nas equações sem solução: $ax = 0, (a \neq 0)$ ou $0x = b\,(b \neq 0)$."
>
> (FREITAS, 2002, p. 46).

Com exceção dos dois últimos tipos de erros apresentados, todas as equações que geram esses erros são equações de avaliação. Entretanto, os sujeitos dessa pesquisa, que cometem tais erros, as estão tratando como álgebra de manipulação, pois os números estavam sendo manipulados, já que eles "aparecem" no outro membro da equação. A álgebra de avaliação, então, não se faz presente.

Além dos erros, o autor aponta que a principal dificuldade dessa população não é com o tipo de equação apresentada, mas sim com as técnicas usadas para a resolução. De acordo com Freitas, esses alunos fazem uso de técnicas mecanizadas e sem sentido para resolver equações. Essas técnicas são baseadas em frases como "isolar o x..." ou "passar e mudar de sinal". Isso reforça nossa posição de que esses alunos estão trabalhando com equações de avaliação como se fossem equações de manipulação. Além disso, esses resultados mostram que as regras levantadas por Cortés e Pfaff (2000) não são necessariamente invariantes, já que elas podem, segundo Freitas (2002), variar cada vez que uma equação do mesmo tipo for resolvida, como no exemplo citado anteriormente, em que o sinal do coeficiente de x foi modificado ao ser "transportado" para o outro membro da equação. Freitas acredita que a falta de compreensão do conceito é o principal fator para as dificuldades e os erros apresentados pelos sujeitos dessa pesquisa. Ele aponta, como sugestão para o ensino, que seja dado significado às regras usadas pelos alunos.

Esses e outros erros são detectados por Sleeman (1984), que os denominou *"mal-rules"*, isto é, regras inapropriadas. Para elaborar uma *Instrução Inteligente Auxiliada pelo Computador*[4] em Álgebra, Sleeman precisava de um modelo do comportamento dos alunos. A fim de obtê-lo e também melhorá-lo, elaborou um experimento com 24 alunos, com média de idade de 14 anos, considerados de habilidade mediana em Álgebra. Esse experimento teve duas fases. Na primeira, os alunos resolveram um conjunto de tarefas contendo equações lineares com uma incógnita, apresentadas no Leeds Modelling System (LMS-II). As equações apresentadas são tanto de avaliação quanto de manipulação. Não há qualquer referência sobre *mal-rules* sendo mais freqüentes em um ou outro tipo. Constatou-

[4] Em Inglês, *Intelligent Computer-Assisted Instruction* (ICAI).

se que muitas das dificuldades apresentadas pelos alunos não foram analisadas pelo sistema e tiveram que ser estudadas pelo investigador. Quatro meses depois, na segunda fase, foi aplicado um teste com lápis e papel e foram feitas entrevistas com alguns alunos.

No teste com lápis e papel, foi constatado que, apesar de muitos alunos terem feito os mesmos erros precedentes, em geral, eles tiveram melhor desempenho do que quatro meses antes com LMS-II. Eles deixaram muitas tarefas sem resolução, o que não era permitido no LMS-II. E ainda um aluno deu mais de um valor para x nas equações em que a incógnita aparecia mais de uma vez.

Já nas entrevistas, foi constatado que alunos buscavam um valor para a incógnita (como tentativa e erro) e isso fazia com que eles, ao resolverem, por exemplo, $3 \cdot x = 2$, dessem como resultado $x = -1$. Além disso, nas entrevistas, também ocorreram situações em que alunos davam diferentes valores para cada incógnita presente na equação, declarando que há maneiras diferentes de resolver uma mesma equação, mesmo que cada uma dessas diferentes maneiras resultem em respostas diferentes para a incógnita. Apresentaram *mal-rules* insistentes e consistentes.

Apesar desses achados, as entrevistas também mostraram alunos que foram capazes de usar regras corretas e de explicar a impossibilidade de usar as regras incorretas que eles mesmos usaram quatro meses antes. Em resumo, o experimento como um todo revela que esses alunos parecem regredir quando estão sob grande carga cognitiva, sendo muitos os tipos de erros que podem ser identificados. Além disso, alguns alunos parecem usar métodos diferentes para resolver o mesmo tipo de tarefa.

O autor acredita que classificar os erros dos alunos é importante porque permite dar a instrução corretiva apropriada. Logo, as *mal-rules* por ele encontradas foram classificadas como sendo *de manipulação*, *de análise*, *de cálculo*[5] e *aleatórias*.

Uma *mal-rule* de manipulação é "... uma variação de uma regra correta que tem um subestágio omitido ou substituído por uma operação incorreta ou inapropriada" (SLEEMAN, 1984, p. 403, tradução nossa[6]). Por exemplo, ao resolver $6x = 4(2x+3)$, um sujeito pode omitir uma multiplicação, fazendo $6x = 4x + 12$. Sleeman acredita que a omissão de passos durante uma resolução também pode acarretar *mal-rules* de manipulação.

Mal-rules de análise acontecem quando um aluno não vê ou não analisa corretamente uma equação algébrica, o que, para o autor, parece vir de problemas de entendimento da notação algébrica. Por exemplo, quando a equação $6x = 3x + 12$ é resolvida fazendo $x + x = 12 + 3 - 6$. De acordo com o autor, existe um mal-entendido com a notação algébrica, que foi analisada como soma, e não como multiplicação.

---

[5] Em Inglês, *clerical mal-rules*.

[6] "... a variant on a correct rule which has one sub stage either omitted or replaced by an inappropriate or incorrect operation"

Erros de escrita são caracterizados quando acontece o que o autor chama de *escorregões*[7]. Por exemplo, a equação $10x = 25$ é resolvida como $x = 25/18$, ou $2x = 6 \cdot 5$ resolvida como $x = 18$. Na primeira, o sujeito pode ter visto 0 como 8, enquanto que, na segunda, pode ter ocorrido algum erro aritmético. Por fim, os erros aleatórios não podem ser explicados pelas *mal-rules* até então levantadas pelo autor. Ele conclui que a generalização de regras de maneira inapropriada pode ser um fator importante para explicar esses erros em Álgebra. Além disso, o autor acredita que alunos inferem regras a partir de exemplos, e não a partir de outras regras corretas. Por exemplo, em $3x = 6$, o número maior é dividido pelo número menor, resultando em $x = 2$. Isso pode acarretar que, em exemplos, tais como, $4x = 2$, o aluno também divida o número maior pelo menor, o que resultaria em um erro, fazendo $x = \frac{4}{2}$ e, então, $x = 2$.

Numa tentativa de estender essa pesquisa, Payne e Squibb (1990) fazem uma análise dos protocolos de alunos entre 13 e 14 anos de três escolas de Lancaster (Reino Unido), com os objetivos de levantar as *mal-rules* por eles usadas, relatar seu diagnóstico, buscar quais mecanismos geram *mal-rules* e as implicações delas para os chamados *escorregões* (quando o aluno tem intenção de usar um procedimento correto mas o faz de maneira incorreta) e *erros*[8] (quando tem a intenção de usar um procedimento incorreto). Nas três escolas, foram usados dois conjuntos de atividades diferentes, compostos por equações lineares com uma incógnita, denotada por x, e com soluções inteiras. Essas equações são todas do mesmo tipo das usadas por Sleeman (1984). Os alunos que foram escolhidos

[7] Em Inglês, *slips*.
[8] Em Inglês, *mistakes*.

deveriam ser capazes de responder pelo menos metade das questões corretamente, mas não todas. Na primeira escola, os dois conjuntos de atividades foram aplicados, cada um em uma aula de 50 minutos de duração. Em um deles, os alunos deveriam responder a todas as questões, enquanto, no outro, deveriam responder somente aquelas que eles tinham certeza de que conseguiriam responder corretamente. Na segunda escola, os mesmos dois conjuntos de atividades foram aplicados em duas aulas de 50 minutos de duração cada. Em ambos os conjuntos, os alunos deveriam responder todas as questões, mostrando os passos intermediários e dando um grau de confiança para cada resposta, de 1 a 5, em que 1 representa que o aluno tem pouca confiança de que a sua resolução está correta, e 5, que o aluno está confiante de que sua resolução está correta. Foram analisados no total, os protocolos de 86 alunos.

Além de *mal-rules*, os autores usaram também duas outras categorias: os “escorregões aritméticos”, em que os alunos cometiam erros de operações aritméticas simples, e os “não-diagnosticáveis”, em que os passos da resolução não foram compreendidos.

Foram levantadas nesse estudo 99 *mal-rules*, inclusive algumas diferentes das levantadas em estudos anteriores por outros pesquisadores. Dentre as *mal-rules* apresentadas por Payne e Squibb, temos, por exemplo, que $ax+b(x+c)=dx$ é transformada em $ax\cdot(x+c)=dx-b$, ou mesmo $ax=b$ transformada em $x=b+a$. Outra *mal-rule* freqüente é a troca de membros, mas não a troca de sinais, tais como, em $ax+b=cx+d$, que é transformada em $ax+cx=b+d$.

Duas limitações desses dados foram levantadas. Uma é que *mal-rules* foram melhor diagnosticadas na escola em que os alunos tinham melhor desempenho, o que faz com que os autores conjecturem que *mal-rules* são mais poderosas para os que têm habilidades quase aprendidas do que para aqueles cujas habilidades não estão bem apreendidas. A outra é que as regras que explicam os trabalhos em cada uma das escolas têm sobreposição extremamente pequena.

Os autores concluem que os erros por eles encontrados não se classificam em escorregões ou erros, mas são uma composição de ambos. Ainda, que os erros apresentados não são simplesmente de natureza sintática, pela dificuldade de manipulação de símbolos, que, para eles, é puramente formal. Existem restrições semânticas. O significado atribuído aos símbolos interfere no uso de *mal-rules*.

Payne e Squibb (1990) concluem também que a ocorrência da mesma *mal-rule* não é freqüente. *Mal rules* são instáveis e podem não ocorrer em todos os tipos de tarefa que as suportaria. Esse resultado também contradiz os invariantes de Cortés e Pfaff (2000), no que diz respeito às regras usadas por seus sujeitos. Neste caso, o mal-uso das regras também não acontece sempre com a mesma freqüência, nem em todas as tarefas em que ele poderia ocorrer. Ainda, existem alguns alunos, chamados por Payne e Squibb (1990) de “idiossincráticos”, cujos erros não podem ser explicados por *mal-rules*.

Ambos os autores apresentados mostram exemplos de erros que não podem ser explicados por meio de *mal-rules*. Elas são efetivas para grande parte dos erros, mas não são explicação para todos os tipos de erros cometidos pelos alunos. Ao observarmos as *mal-rules*, vemos que, em muitos casos, os sujeitos que as cometem parecem estar movendo os símbolos algébricos de um membro da equação para o outro, como se fossem objetos físicos que podem ser pegos e colocados em outro lugar. Isso faria com que o aluno tivesse que usar uma regra a mais, que é a de mudar o sinal daquele símbolo que está movendo para o "outro lado". Entretanto, dependendo da movimentação que ele faz, o sinal é ou não trocado. Em situações como $3x = 6$, o coeficiente 3 "passa" para o outro lado "embaixo" do 6 e não muda de sinal. Essas regras podem se tornar confusas para o aluno que não as relaciona com princípios algébricos que as geraram. Esse exemplo mostra que equações de avaliação não foram resolvidas por meio de desfazer operações aritméticas. Resolver a equação $3x = 6$ como $x = \frac{3}{6}$ é uma *mal-rule* que demonstra isso.

É possível que ambos os tipos de equações que determinamos, de avaliação e de manipulação, estejam sendo resolvidas por meio de manipulação algébrica, como se os símbolos fossem entidades físicas que podem se mover de um membro para o outro da equação, porém tendo que se respeitar uma outra transformação: a mudança ou não de sinais. Se essa mudança não for respeitada por algum motivo, ocorrem erros como os que Freitas (2002), Sleeman (1984) e Payne e Squibb (1990) apresentaram. A diferença, então, entre equações de avaliação e de manipulação não é considerada pelos sujeitos nessas pesquisas. Entretanto, há pesquisas que afirmam que esses dois tipos de equações carregam dificuldades diferentes.

1.4. Modelos concretos e corte didático

Filloy e Rojano (1989), por exemplo, determinam dois tipos diferentes de equações: as aritméticas, em que a incógnita ocorre em apenas um dos membros da equação e, por isso mesmo, podem ser resolvidas desfazendo-se as operações aritméticas (as que chamamos de equações de avaliação); e as equações não-aritméticas, em que a incógnita ocorre em ambos os membros e é necessário operar com ela (as que chamamos de manipulação). O nível crescente de dificuldade em resolver essas equações foi chamado de "corte didático" por Filloy e Rojano (1989). Esse corte é baseado nas mudanças ocorridas na história da álgebra simbólica. Os autores afirmam que seria mais difícil para alunos encontrar o valor requerido, porque eles agora têm que operar com a incógnita e não apenas com números, como eles podem ter feito com equações aritméticas. A mesma operação precisa ser efetuada em cada membro para que a igualdade se mantenha e para que, ao simplificar a equação, o sujeito possa se mover em direção a uma solução.

Filloy e Rojano (1989) também apresentam o uso de duas abordagens de ensino por meio de modelos concretos, discutidos em entrevistas com alguns alunos de segundo ano de uma escola secundária experimental na Cidade do México: o modelo geométrico de comparação de áreas de figuras planas (retângulos); e o modelo da balança, que é baseado em uma balança de dois pratos, em que cada prato representa um dos membros da equação, e o equilíbrio entre os pratos representa a igualdade. Em ambos, foram usadas equações não-aritméticas que, com a ajuda do modelo, foram transformadas em equações aritméticas, cuja solução era conhecida pelos alunos. Os autores observaram, entre outras considerações, a perda temporária de habilidade para resolver equações aritméticas, a fixação no modelo e a presença de obstáculos peculiares a cada um deles, tais como, o uso de números não inteiros no modelo geométrico e o uso de números negativos no modelo da balança. Além disso, a automatização com os modelos acarretou erros associados à sintaxe algébrica, como, por exemplo, somar ou subtrair coeficientes de incógnitas com graus diferentes.

Ambos os modelos usam entidades físicas ou representações associadas a elas. Esses modelos concretos podem dar algum tipo de significado físico para os símbolos algébricos a eles associados. Equações, tanto de avaliação quanto de manipulação, podem ser discutidas e ensinadas por meio deles. Muitos são, entretanto, os pesquisadores que enaltecem ou refutam esse tipo de modelo. Para analisar vantagens e desvantagens de um deles, Vlassis (2002) faz uma revisão de artigos que aceitam ou refutam o modelo da balança para o ensino de resolução de equações. Como as pesquisas mostram resultados conflitantes, Vlassis apresenta uma sugestão de ensino com o uso dessa abordagem e seus resultados.

A proposta de ensino apresentada é composta por duas fases. Na primeira, são trabalhadas equações cuja incógnita aparece em apenas um membro (equações aritméticas, no sentido de Filloy e Rojano (1989), que podem também ser vistas como equações de avaliação), em que os alunos usam seu próprio conhecimento aritmético para resolver. Na segunda fase, são introduzidas equações em que a incógnita ocorre em ambos os membros, por meio de três situações diferentes. A primeira situação é um problema em que dois personagens tomam o mesmo número, fazem operações diferentes com ele e obtêm o mesmo resultado, que é dado. Os alunos devem tentar descobrir qual é o número com o qual ambos começaram os cálculos. Para isso, eles usaram o método de tentativa e erro, que se mostrou complicado e não eficiente, gerando a necessidade de outro método.

A segunda situação apresenta uma balança desenhada, contendo pesos cuja massa é desconhecida, e os alunos devem descobri-la, dando assim oportunidade para que eles criem o novo método de que precisam. Para resolver a situação, os alunos usam três tipos diferentes de método: *métodos não-formalizados*, em que o próprio desenho é utilizado e os pesos retirados dos pratos, mantendo o equilíbrio; *métodos aritméticos*, em que o método não-formalizado é usado até que o aluno obtenha uma equação aritmética cuja resolução ele conhecia; e *métodos algébricos*, utilizados por três alunos que fazem uma representação algébrica da figura da balança e retiram quantidades algebricamente, e não no desenho. Entendemos que a álgebra de manipulação é usada neste último método em que os alunos manipulam símbolos e não os pesos. Já nos outros dois métodos, podemos ver a álgebra de avaliação quando as equações recaem em uma equação de avaliação e um método de movimentação de pesos na balança, como se a álgebra de manipulação tivesse um estágio anterior em que objetos físicos são manipulados, o que pode acarretar uma posterior álgebra de manipulação, mas também uma movimentação física de símbolos, sem dar a eles significado relacionado à álgebra de manipulação.

A terceira e última situação envolvia equações contendo incógnita em um ou nos dois membros para serem resolvidas. Essa foi a situação de maior dificuldade para os alunos. Mas, de acordo com a autora, *todos* os alunos entenderam o princípio da balança, isto é, efetuar a mesma operação em ambos os membros. Entretanto, ocorreram erros na resolução, como, por exemplo, dividir o segundo membro pelo coeficiente da incógnita antes de cancelar o termo independente e não considerar números negativos ou ter dificuldade na subtração para cancelá-los.

Entrevistas feitas oito meses depois, com cinco alunos, mostram que eles ainda relacionavam a resolução da equação com o modelo da balança e ainda tinham problemas com números negativos. Vlassis (2002), então, conjectura que o corte didático, sugerido por Filloy e Rojano (1989), não se refere à ocorrência da incógnita nos dois membros da equação, nem mesmo à necessidade de operar com a incógnita, mas sim com o grau de abstração da equação. A autora lembra, ainda, que equações na forma $ax + bx + c = d$ também exigem operações com a incógnita, e não oferecem o mesmo grau de dificuldade que as equações com a incógnita em ambos os membros. O corte didático sugerido por Vlassis (2002), então, refere-se à possibilidade ou não de relacionar à equação um modelo concreto. Assim, as equações podem ser divididas em equações aritmética concretas, em que a incógnita ocorre uma única vez, e somente números naturais são envolvidos; equações aritméticas abstratas, em que a incógnita ocorre apenas em um membro e exige-se manipulação algébrica de números negativos; equações pré-algébricas, em que a incógnita está presente em ambos os membros mas a equação pode ser baseada em um modelo; e, por fim, equações algébricas, que não podem ser conectadas a um modelo, e só têm sentido em um contexto algébrico.

Vlassis (2002) mostrou que o modelo da balança foi uma metáfora útil para todos os alunos darem significado ao sinal de igual como uma igualdade entre os dois membros da equação, bem como compreenderem o método de efetuar a mesma operação em ambos os membros. Entretanto, o modelo falha em ser significativo para muitos alunos, em situações mais gerais, envolvendo subtrações e números negativos. Fazer relação com um modelo concreto pode claramente ser suporte em situações em que ele é diretamente aplicável, mas pode causar um impedimento quando ele não mais se aplica em um contexto diferente.

Tanto Filloy e Rojano (1989) quanto Vlassis (2002), ao citarem modelos concretos, geométrico e da balança, não levam em consideração equações lineares do tipo $ax+b=0$. Elas não podem ser representadas por nenhum desses modelos, já que não há como construir uma figura geométrica plana cuja área seja igual a zero, nem é possível equilibrar pratos de uma balança colocando pesos apenas de um lado. Na realidade, das equações de avaliação, apenas equações do tipo $ax+b=c$, com $c>b$ (a, b e c naturais, a e c não nulos), podem ser representadas por esses modelos. No que se refere a equações de manipulação, do tipo $ax+b=cx+d$, com coeficientes naturais, não nulos, uma de duas condições deve ocorrer: $a>c$ e $b<d$ ou $a>c$ e $b>d$. Acreditamos que pode haver dificuldade também com equações do tipo $ax+b=0$, e que o corte didático e suas variações deveriam levar tais dificuldades em consideração.

1.5. Considerações gerais

No início da escolaridade, o aluno depara-se com o sinal de igual como um sinal de avaliação. Isso pode colaborar com o estudo de equações de avaliação se a resolução for feita por meio de desfazer as operações envolvidas. Entretanto, esse sinal precisa ser também visto como de manipulação para que seja possível trabalhar com equações de manipulação.

Pesquisas como as de Filloy e Rojano (1989) e Vlassis (2002) mostram equações de avaliação sendo resolvidas por meio de desfazer as operações aritméticas envolvidas, enquanto as equações de manipulação são resolvidas, inicialmente, por meio do uso de modelos concretos e, mais tarde, por manipulação de símbolos. Essa distinção pode vir a acarretar grandes dificuldades, levantadas por esses pesquisadores na transição entre equações de avaliação e de manipulação. Seja porque as equações de manipulação exigem que se opere com a incógnita, seja porque a maioria delas não se relaciona com qualquer modelo concreto. Entretanto, nem todas as pesquisas mostram essa dificuldade. As pesquisas que levantaram *mal-rules*, por exemplo, não mostram que os sujeitos resolvem equações de avaliação desfazendo operações aritméticas, mas sim usando regras que, de acordo com Freitas (2002), estão ligadas a frases como “muda de lado, muda de sinal”. Assim, equações de avaliação e de manipulação são resolvidas com o uso dos mesmos métodos. Essas frases, usadas dessa forma, no nosso entendimento, não estão mais ligadas aos princípios algébricos a partir dos quais elas foram geradas. Elas já se tornaram desligadas de qualquer significado matemático. Dessa forma, entendemos que os alunos ocasionalmente as relacionam a qualquer significado que eles entendem como correto, o que os leva a erros relacionados ao mau uso que, também ocasionalmente, fazem dessas frases, gerando *mal-rules*. Desse modo, tanto equações de avaliação quanto de manipulação carregam o mesmo tipo de dificuldade, negando o corte didático.

Uma outra maneira de ver essas *mal-rules* é que elas podem ter sido geradas a partir da movimentação dos símbolos algébricos, como se eles fossem entidades físicas que podem ser “pegadas” e “colocadas” do outro lado. Essa movimentação física deve vir seguida de um outro procedimento que é a troca de sinal de um termo que “passa para o outro lado, subtraindo (ou somando)” ou “passa para o outro lado, debaixo do termo que lá está”, isto é, dividindo. O interessante é que existe uma posição para o termo que está sendo movimentado, colocado em outro lugar da equação. Todas essas regras podem ser confundidas e acarretar erros nessa movimentação. Por outro lado, esses procedimentos também podem ser usados de maneira apropriada e garantir o sucesso do aluno. Esse sucesso, apesar de enganoso, permite que ele complete as tarefas dadas pelo professor de maneira aparentemente satisfatória.

Talvez uma maneira de impedir que alunos criem técnicas não ligadas a princípios algébricos seja o uso de modelos concretos em abordagens de ensino, como, por exemplo, o modelo geométrico (FILLOY e ROJANO, 1989) e o modelo da balança (FILLOY e ROJANO, 1989, e VLASSIS, 2002). Entretanto, é preciso lembrar que tais modelos não suportam todo e qualquer tipo de situação algébrica. De acordo com Vlassis (2002), o modelo da balança é apropriado para desenvolver a idéia de igualdade entre os membros e até mesmo o princípio de efetuar a mesma operação em ambos os membros da equação. Porém, é necessário lembrar que esse modelo não tem como objetivo discutir outros tipos de equações que não se encaixam nele, tais como, aquelas em que números negativos são envolvidos. Equações da forma $ax + b = 0$, por exemplo, e todas as que recaem nessa forma, não podem ser representadas pela balança, pois não há possibilidade física de se obter equilíbrio com um prato vazio e outro com pesos. Não há como representar quantidades negativas com pesos. Por isso, esse não é o objetivo da balança e ela não é apropriada para todos os tipos de equações. Da mesma forma, ela não se presta a discutir a equivalência entre equações por meio da comparação de seus conjuntos-verdade, o que faz com que a equivalência entre equações fique relacionada somente à álgebra de manipulação. A balança, entretanto, traz um subestágio para a álgebra de manipulação. Nas equações de manipulação que podem ser representadas pela balança, a manipulação inicial dá-se por meio de pesos, ou de símbolos vistos como pesos da balança, e não como símbolos por eles mesmos. Isso pode dificultar o trabalho com equações que não possam ser representadas por modelos concretos. O aluno poderia não entender como manipular símbolos ou mesmo não dar significado aos símbolos que não se encaixam nesse modelo.

Em vista do que foi apresentado até o momento, a álgebra axiomática não está presente no trabalho de grande parte dos alunos com equações. Isso pode ser visto, por exemplo, no fato de que o princípio algébrico de efetuar a mesma operação em ambos os membros, para manter a igualdade, não é considerado, e a equivalência entre equações não é considerada por meio do conjunto-verdade, mas sim por meio da possibilidade de transformar ou não uma equação na outra.

A álgebra de avaliação é pouco enfatizada na resolução de equações de avaliação, isto é, os alunos não resolvem este tipo de equação desfazendo as operações efetuadas sobre a incógnita ou fazendo tentativas para encontrar um valor numérico que satisfaça a equação. A álgebra de avaliação, a nosso ver, é importante porque pode colaborar com o entendimento do aluno de que ele está, ao resolver uma equação, à procura de um número que satisfaça a sentença matemática inicial. Esse entendimento é fundamental também para a álgebra de manipulação, pois assim o aluno pode compreender também por que a igualdade entre membros e a equivalência entre passos da resolução são essenciais para se obter o valor da incógnita.

No que diz respeito à álgebra de manipulação, aparentemente, ela é usada pelos alunos em qualquer tipo de situação, isto é, os alunos manipulam os símbolos algébricos para resolver qualquer tipo de equação, sejam de avaliação ou de manipulação, mesmo quando a situação é mais adequada para ser resolvida com procedimentos próprios da álgebra de avaliação. Os procedimentos usados pelos alunos são o único aspecto que está em foco quando eles trabalham com equação. Isso também aparece na maior parte das pesquisas por nós apresentadas neste estudo, no qual a principal característica do trabalho dos alunos é a ação efetuada por eles em uma equação. O processo usado para resolver equações é o mais enfatizado no trabalho. Por exemplo, Tall e Thomas (2001) classificam diferentes álgebras por meio dos processos usados pelos alunos, isto é, pela maneira que eles *agem* sobre objetos da Álgebra, seja avaliando a expressão algébrica, seja manipulando-a, seja usando propriedades algébricas para discutir os conceitos subjacentes aos símbolos.

Até mesmo para definir equações, procedimentos são mencionados, como nos mostram Dreyfus e Hoch (2004). Os sujeitos da pesquisa feita por eles explicitam a necessidade de encontrar o valor de x (a incógnita), alguns inclusive citando que existem regras para isso. Além disso, o sinal de igual pode ser visto como indicativo para obter o resultado de um processo (KIERAN, 1981), e equações equivalentes só o são se existir um processo que transforme uma em outra (LINCHEVSKI e SFARD, 1991). Logo, processos são de extrema importância, para alunos, no entendimento de uma equação e da resolução delas. A principal dificuldade, entretanto, parece-nos ser dar significado a esses processos. Eles tornam-se regras mal usadas, como mostram Sleeman (1984) e Payne e Squibb (1990). Payne e Squibb também mostram que o que foi considerado como propriedades matemáticas invariantes para Cortés e Pfaff (2000) podem ser inconstantes e desligadas do significado algébrico.

Frente a esses resultados, entendemos a necessidade de buscar teorias que pretendem entender o significado dado aos símbolos algébricos. No próximo capítulo, analisamos as perspectivas desenvolvidas por diferentes pesquisas e descrevemos um quadro teórico emergente, os Três Mundos da Matemática, no qual tentamos unificar elementos de outros estudos na construção de um quadro teórico que dê conta da diversidade de dificuldades enfrentadas pelos alunos no trabalho com equações.

CAPÍTULO 2:

EM BUSCA DE FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No capítulo anterior, apresentamos algumas pesquisas sobre equações que usam, para a análise dos dados, teorias principalmente voltadas para a maneira pela qual os indivíduos passam de entender um processo para entender o objeto matemático a ele relacionado. Essas teorias são chamadas teorias de *processo-objeto*.

Vimos que modelos concretos para o ensino de equações podem colaborar com o entendimento do sinal de igual como a igualdade entre os membros da equação e também com o entendimento do princípio algébrico de efetuar a mesma operação nos dois membros para manter essa igualdade. Por isso, entendemos que é importante também analisarmos teorias de *cognição corporificada* que defendem o aprendizado por meio de experiências físicas e sensório-motoras.

Neste capítulo, visitaremos brevemente algumas teorias de processo-objeto: a teoria APOS (DUBINSKY, 1991), teoria da reificação (SFARD, 1991), a fim de verificar como elas discutem a passagem de um processo para um objeto, contrastando suas diferenças. Descreveremos, também, a noção de "proceitos" (GRAY e TALL, 1994) e a dualidade processo-conceito dos símbolos matemáticos, comparando essa noção com as teorias APOS e da reificação.

Em seguida, faremos uma descrição da perspectiva da cognição corporificada (LAKOFF e JOHNSON, 1980; LAKOFF e NÚÑEZ, 2000) e do que é considerado como uma corporificação. Analisaremos a necessidade de ampliar os tipos de corporificação a serem usados para o ensino e a aprendizagem de equações.

Finalmente, apresentaremos os Três Mundos da Matemática (TALL, 2004a, 2004b), um quadro teórico ainda em desenvolvimento, que busca explicar a aprendizagem, a longo prazo, da Matemática. Características das equações lineares e quadráticas de avaliação e de manipulação em cada um dos mundos serão levantadas, bem como características de seus respectivos métodos de resolução.

2.1. As teorias de processo-objeto

As teorias de processo-objeto conjecturam que o aprendizado se dá por meio da *encapsulação* (DUBINSKY, 1991) ou *reificação* (SFARD, 1991) de um processo em um objeto. Diz-se que um indivíduo encapsulou ou reificou um processo em um objeto quando ele é capaz de analisar um processo, refletir sobre ele e sobre o uso que se faz dele, conectando-o a diferentes processos. Essa transformação de um processo em um objeto é explicada de diferentes maneiras por diferentes teorias.

De acordo com a teoria APOS[9] (DUBINSKY, 1991), existem três tipos de conhecimento matemático: *ações*; *processos*; e *objetos*, que, por sua vez, são organizados em estruturas, os *esquemas*. Uma ação é qualquer transformação, física ou mental, que um indivíduo possa efetuar sobre um objeto matemático, a fim de transformá-lo em outro. Para Dubinsky (1991), o produto de uma ação resulta em um objeto diferente do inicial. Além disso, ações diferentes resultam em objetos diferentes. Como exemplo disso, completar quadrados para iniciar a resolução de uma equação quadrática, de acordo com Dubinsky (1991), é uma ação, que resulta em uma outra equação, que é um objeto matemático diferente da equação inicial. Quando um indivíduo é capaz de ver as ações que está efetuando como um todo, isto é, sem precisar do passo anterior para engatilhar a próxima ação, então esse indivíduo entende tal conjunto de ações como um processo. Por exemplo, a equação $x^2 - 2x - 5 = 0$ pode ser resolvida completando quadrados, obtendo $(x^2 - 2x + 1) - 5 - 1 = 0$ e, em seguida, escrevendo $(x-1)^2 - 6 = 0$, que pode ser resolvida fazendo $(x-1)^2 = 6$, $x - 1 = \pm\sqrt{6}$, e portanto $x = \pm\sqrt{6} + 1$. Cada uma dessas passagens são consideradas como uma ação. E, quando o indivíduo é capaz de ver esse desenvolvimento como uma única ação, ela é considerada um processo. Ao ter controle sobre esse processo, isto é, quando o indivíduo é capaz de analisá-lo e coordená-lo com outros, então ele encapsulou esse processo em um objeto. Seguindo o exemplo citado anteriormente, quando o indivíduo é capaz de analisar esse processo, percebe, por exemplo, a relação dele com a fórmula de Bhaskara, sendo possível usá-lo em outras equações e em situações que exigem a resolução de uma equação quadrática. Então, ele é um objeto para tal sujeito. Por

[9] A sigla APOS se refere às iniciais, em Inglês, de Ação, Processo, Objeto e Esquema (*Action*, *Process*, *Object*, *Scheme*).

fim, ao unir ações, processos e objetos relacionados a um mesmo objeto em um esquema, o indivíduo é capaz de acionar esses processos e objetos quando se depara com uma situação em que eles são necessários para que a solução seja encontrada. O objetivo maior da teoria APOS é servir de base para a estruturação da *decomposição genética* de um conceito, isto é, descrever a matemática envolvida nesse conceito e como os indivíduos podem vir a compreendê-lo.

Já a teoria da reificação (SFARD, 1991) trata de dois tipos de conhecimento matemático, as *concepções estruturais* e as *concepções operacionais*, que se comparam respectivamente ao objeto e ao processo, na teoria APOS. As concepções operacionais são aquelas relacionadas a descrições de noções matemáticas por meio de processos, algoritmos e ações, enquanto as estruturais descrevem essas noções por meio de objetos abstratos. De acordo com Sfard (1991), a primeira concepção a ser desenvolvida, pela maioria das pessoas, no aprendizado de novos conceitos matemáticos é a operacional, enquanto as concepções estruturais são muito difíceis de serem alcançadas. A transição de uma para outra tem três fases: *interiorização*, *condensação* e *reificação*. A interiorização é uma fase anterior à ação em que o indivíduo toma contato com operações efetuadas no objeto. Neste caso, o indivíduo vai analisar a situação e a ação para compreender o ato, sem efetuá-lo de fato. A fase de condensação inicia-se quando a ação é efetuada e transformada em processo. As seqüências complexas de ações serão comprimidas em um único processo e compreendidas pelo aprendiz, que não necessita mais analisar o procedimento usado em detalhes. Por fim, a reificação ocorre quando o processo é transformado em um objeto e o indivíduo é capaz de dar significado para essa nova entidade matemática, sem relacioná-la ao processo.

Assim, as fases dessa transição entre a concepção operacional e a concepção estrutural podem ser relacionadas com a teoria APOS, pois a interiorização é a fase anterior à ação. A condensação acontece entre ação e processo, enquanto a reificação se dá de processo para objeto. Voltando ao exemplo apresentado anteriormente, da resolução da equação $x^2 - 2x - 5 = 0$, analisar essa equação é uma das possíveis ações a serem efetuadas é a fase de interiorização. Analisar e entender essa resolução como um processo são a fase de condensação, enquanto a familiarização com esse processo e o entendimento de que ele é o mesmo da fórmula de Bhaskara, bem como seu uso em outras situações, são a fase da reificação. De acordo com essa teoria, um estágio não pode ser alcançado sem que o anterior o seja. Ainda, seu desenvolvimento baseia-se no fato de que "... mesmo que um novo conceito seja introduzido estruturalmente, o aluno interpretará inicialmente a definição de maneira operacional" (SFARD, 1991, p. 23, tradução nossa[10]).

Especificamente no caso das equações, Linchevski e Sfard (1991) apresentam dados que mostram que a impossibilidade de o aluno pensar por meio de objetos abstratos leva-o a desenvolver percepções pseudo-estruturais, que são caracterizadas pelo uso de símbolos por si próprios, faltando-lhes significado relacionado a concepções estruturais. Quando os sujeitos dessa pesquisa não reconhecem a equivalência entre duas equações que não podem ser transformadas

[10] "... even if a new concept is introduced structurally, the student would initially interpret the definition in an operational way."

uma na outra, mas apenas entre duas que podem, eles apresentam um tipo de concepção que está próxima da estrutural, mas na realidade é operacional, está ligada ao processo de transformar uma equação na outra, e não, realmente, à estrutura da equação e ao seu conjunto-verdade. Por isso é uma concepção pseudo-estrutural. Desta forma, vê-se a concepção operacional sendo desenvolvida antes da estrutural.

Na teoria da reificação, os símbolos representam a dualidade entre o processo e o objeto. É enfatizado o processo que se faz para resolver um problema na concepção operacional, enquanto que, na concepção estrutural, o foco está no objeto abstrato, em suas propriedades e na estrutura ligada a ele.

Essa dualidade também é destacada por Gray e Tall (1994), que entendem que os símbolos da Matemática são uma dualidade entre *pro*cesso e con*ceito*, (reunidos em uma palavra) um *"proceito"*. Em geral, conceitos matemáticos são representados por símbolos, que podem ser manipulados. Essa manipulação sintetiza as ações exercidas sobre os conceitos matemáticos. Assim, os símbolos representam não só os conceitos, mas também as ações exercidas sobre os objetos e o produto dessas ações. Em vista dessa ambigüidade, Gray e Tall (1994) entendem que existe também uma dualidade dos símbolos que comprimem os conceitos matemáticos de *pro*cessos para con*ceitos*. Inicialmente, *"Proceitos" elementares* são definidos como "... o amálgama de três componentes: um *processo*, que produz um *objeto* matemático, e um *símbolo* que é usado para representar tanto o processo quanto o objeto." (GRAY e TALL, 1994, p. 120, tradução nossa[11]). Eles podem ser vistos como diferentes procedimentos que resultam em uma mesma saída. Por exemplo, $2+3$, $3+2$, $1+4$ são “proceitos” elementares de um mesmo processo, pois resultam no mesmo conceito, o número 5. Ao entender que qualquer um dos diferentes procedimentos que dão o mesmo resultado pode ser usado em uma situação, o indivíduo vê esses procedimentos como um mesmo *processo*. Por fim, ao entender que esses processos também podem ser vistos como conceito (a soma ou o seu resultado, no caso dos exemplos anteriores), o indivíduo tem um pensamento “proceitual”: “Caracterizamos *pensamento ‘proceitual’* como a habilidade de manipular flexivelmente o simbolismo como processo ou conceito, trocando livremente simbolismos diferentes para o mesmo objeto.” (GRAY e TALL, 1994, p. 121, tradução nossa[12]). Assim, símbolos em Matemática são “proceitos” quando eles carregam consigo a possibilidade de serem vistos tanto como o procedimento, quanto como o conceito que eles representam. Entender os símbolos de forma ambígua permite que conceitos matemáticos sejam comprimidos de forma a permanecerem por mais tempo na memória de curto prazo, o que faz com que eles possam ser facilmente trazidos para a atividade matemática em jogo, quando necessário.

Dessa forma, a ambigüidade dos símbolos em Matemática é vista como uma dualidade entre processos e conceitos. O indivíduo é capaz de passar de um processo a um conceito de maneira flexível quando a situação requerer, bem como entender que qualquer um dos diferentes procedimentos pode ser usado por resultarem na mesma saída. Levantamos a hipótese (LIMA, 2006) de que essa

[11] “… the amalgam of three components: a *process* which produces a mathematical *object*, and a *symbol* which is used to represent either process or object.”
[12] “We characterize *proceptual thinking* as the ability to manipulate the symbolism flexibly as process or concept, freely interchanging different symbolisms for the same object.”

flexibilidade pode se referir também à capacidade que um indivíduo tem de escolher o procedimento mais adequado para uma determinada situação, dentre aqueles que, ele compreende, resultam na mesma saída.

Uma das hipóteses de Gray e Tall (1994) é a de que os indivíduos que compreendem a dualidade dos símbolos, e têm a flexibilidade de passar de um processo para um conceito, quando necessário, isto é, têm um pensamento "proceitual", são mais bem-sucedidos em Matemática do que os que não possuem esse tipo de pensamento. É importante notar que os autores usam a palavra *procedimento* no sentido de

> "... uma seqüência específica de passos desenvolvidos, um passo de cada vez. O termo *processo* é usado num sentido mais amplo para incluir qualquer número de procedimentos que essencialmente 'tenham o mesmo efeito'."
> (TALL, et al, 2001, p. 87, tradução nossa[13])

Podemos observar o mesmo efeito em expressões algébricas, tais como, $a^2 - b^2$ e $(a-b)\cdot(a+b)$, quando elas são avaliadas tomando os mesmos valores para a e b em cada uma das expressões. As equações $x^2 - 5x + 6 = 0$ e $(x-2)\cdot(x-3) = 0$ também produzem o mesmo efeito. Os exemplos anteriores mostram expressões iguais e equações equivalentes que têm o mesmo efeito. Queremos, com eles, enfatizar que as ações efetuadas, seja em expressões algébricas iguais, ou em equações equivalentes, são diferentes. Porém, o *efeito* que delas obtemos é o mesmo e esse efeito é o ponto importante a ser enfatizado, pois, se o indivíduo percebe que pode usar qualquer procedimento para solucionar um problema, ele terá um pensamento flexível e não se prenderá a procedimentos cujo significado

[13] "...a specific sequence of steps carried out a step at a time. The term *process* is used in a more general sense to include any number of procedures which essentially 'have the same effect'."

esteja desconectado de princípios matemáticos. Por exemplo, podemos notar o caso apresentado por Sleeman (1984), em que alunos declaram que existe mais de um procedimento para resolver a mesma equação, mas que cada um deles pode resultar em uma solução diferente. A esses alunos falta a compreensão de que os procedimentos usados resultam no mesmo efeito, já que são todos "proceitos" elementares de um mesmo "proceito". Se eles compreendessem os símbolos, tanto como processos quanto como conceitos, compreenderiam que o conceito com o qual estão lidando deve ser o mesmo, bem como o resultado do processo.

A diferença entre os indivíduos bem-sucedidos em lidar com a Matemática e os que não o são é chamada *divisão "proceitual"*[14]. Ao trabalhar com Aritmética, Gray e Tall (1994) observaram que os que foram bem-sucedidos nos trabalhos por eles propostos usavam métodos mais flexíveis de relacionar os números e seus símbolos, enquanto que os que não tinham pensamento "proceitual" enfrentaram dificuldades para resolver problemas.

Dependendo do domínio matemático em que os símbolos são usados, eles carregam consigo diferentes características que devem ser levadas em consideração. Por exemplo, em Aritmética, o processo envolvido em um "proceito", como, por exemplo, $3+2$, pode ser efetuado de maneira direta. Já em Álgebra, existem símbolos, tais como, $3x+2$, que só podem ser avaliados se o valor de x for conhecido, isto é, por meio de álgebra de avaliação. Logo, esse "proceito" tem apenas o *potencial* de ser operado. Isso pode trazer dificuldades para alunos que estão habituados a obter resultados quando efetuam uma operação. Por

[14] Em Inglês, *proceptual divide*.

exemplo, Collis (1974, apud KIERAN, 1981) apresenta evidências de que crianças entre 6 e 10 anos de idade não aceitam como resposta expressões contendo uma variável, como $2x-1$, porque ainda há uma operação a ser feita. Acreditamos que essa dificuldade é gerada principalmente pela falta de pensamento "proceitual" e que o entendimento de que símbolos representam não só um processo a ser efetuado, mas também o conceito por trás desse processo, pode colaborar com a superação dessa dificuldade por parte do aluno.

Como vimos no **Capítulo 1: Revisão de Literatura**, o sinal de igualdade também pode acarretar dificuldades quando usado em Álgebra, já que, em Aritmética, ele é visto como um sinal de "fazer alguma coisa" (KIERAN, 1981), em que o resultado de uma operação é colocado do lado direito desse sinal. Nesse sentido, o sinal de igual é um "proceito", pois engloba tanto o processo de instigar o cálculo de um resultado quanto o conceito de igualdade. Entendemos que o sinal de igual deve passar de um sinal operacional, numa álgebra de avaliação, para um sinal que representa uma igualdade, numa álgebra de manipulação. Essa passagem representa um aspecto importante da passagem da Aritmética para a Álgebra e modifica o significado que pode ser dado para o sinal de igual, que vai de "proceito" em Aritmética para um "proceito" que envolve outros "proceitos" com o potencial de serem avaliados. Novamente, o pensamento "proceitual" poderia colaborar para que esses significados não fossem confundidos. Já equações como $4x-11=2x+4$ e $(x-2)^2=0$ também podem ser vistas como "proceitos" elementares de um mesmo "proceito" por resultarem no mesmo conjunto-verdade. Vale destacar, entretanto, que a definição de equações equivalentes por meio do conjunto-verdade é uma concepção estrutural, no sentido de Sfard (1991), já que é um conceito abstrato que precisa ser compreendido como tal.

Da mesma forma, outras dificuldades podem ocorrer ao usarmos “proceitos” em Cálculo. Neste caso, os fatores que podem causar dificuldade estão relacionados aos processos *potencialmente infinitos* inerentes aos símbolos, por exemplo, do conceito de limite. Nesse estágio, os indivíduos precisam lidar com quantidades arbitrariamente grandes ou pequenas em que os processos são diferentes daqueles usados na Álgebra ou na Aritmética. Muitas vezes, o uso de regras substitui essa dificuldade, mas pode não colaborar no entendimento daquele conceito pelo indivíduo.

A teoria APOS apresenta uma seqüência ação-processo-objeto-esquema, pela qual o indivíduo precisa passar para adquirir aprendizado, não tendo foco específico os símbolos matemáticos. Já na teoria da reificação, os símbolos são vistos como uma dualidade entre processo e objeto, mas é necessário que o indivíduo passe por fases que o levam de uma concepção operacional para uma concepção estrutural, isto é, indo de processo para objeto. Já Dreyfus e Hoch (2004) conjecturam que o aprendizado de equações deveria visar primeiro sua estrutura interna que é principalmente relacionada à concepção estrutural, apesar de também envolver a manipulação de símbolos para depois trabalhar a estrutura externa. Assim, existe uma contradição entre os dois estudos que divergem na apresentação inicial no estudo de equações.

A dualidade vista na teoria da reificação está presente na noção de "proceito" de Gray e Tall (1994), que representa uma ambigüidade entre processo e conceito. Entretanto, Gray e Tall (1994) não pretendem restringir o aprendizado em uma seqüência que exige que se passe pelo processo para chegar ao objeto, mas sim que haja flexibilidade para que o aprendizado possa ocorrer, tanto partindo do processo para chegar ao conceito, quanto partindo do conceito para chegar ao processo. Dessa forma, conceitos podem ser criados a partir de si mesmos, e não simplesmente por meio de um processo que os gere. Por exemplo, estruturas, como grupos, anéis e corpos, podem ser aprendidas por meio de suas propriedades, definições e teoremas, podendo, posteriormente, gerar processos. Assim, não haveria a necessidade de desenvolver *primeiramente* um ou outro aspecto de um conceito, seja operacional, como Sfard (1991) propõe, ou estrutural, como desejam Dreyfus e Hoch (2004). Ambos os aspectos podem ser trabalhados concomitantemente, possibilitando ao sujeito que desenvolva ambas as concepções, de forma que elas se desenvolvam juntas como uma dualidade, tornando provável a não necessidade de posterior reconstrução.

Tanto APOS quanto a teoria da reificação são restritas a desenvolvimentos cognitivos que passam do processo para o conceito, enquanto a noção de "proceitos" amplia essa idéia para a possibilidade de desenvolver aprendizagem no sentido oposto, isto é, de conceito para processo. Isso faz com que a encapsulação (ou reificação), presente nas teorias APOS e da reificação, não seja uma fase necessária ao entendermos símbolos como "proceitos". Os símbolos, nessa perspectiva, representam uma dualidade e uma ambigüidade, e não uma "transformação" de processo para objeto. Essa característica da noção de “proceito” amplia as possibilidades de explicar o aprendizado de conceitos matemáticos, também por meio dos próprios objetos, como é o caso da Topologia e da Análise, por exemplo.

Especificamente no caso das equações, acreditamos que o pensamento “proceitual”, isto é, compreender os símbolos matemáticos como a ambigüidade entre processos e conceitos, é de grande importância porque, durante a resolução de uma equação, não há como fazer relações entre as passagens a serem efetuadas com qualquer outro significado que possa ser dado aos símbolos, a não ser o de processo ou o de conceito. Exceções são feitas somente a casos de equações de avaliação que não envolvam números negativos e cujos passos da resolução podem ser relacionados à retirada de pesos dos pratos de uma balança. É importante ver os símbolos como processos e conceitos simultaneamente para que não se perca a relação entre os procedimentos e os princípios algébricos ligados à resolução, e não sejam criadas *mal-rules*, como as apresentadas por Sleeman (1984) e Payne e Squibb (1990).

Da mesma forma, as teorias APOS e da reificação podem explicar como indivíduos podem passar do processo de resolver uma equação para o conceito de equação. Entretanto, pesquisas mostram que alunos podem prender-se mais aos procedimentos do que ao objeto matemático em questão. Por exemplo, Freitas (2002) apresenta evidências de que alunos ficam presos a frases derivadas de procedimentos usados para resolver equações ao invés de lidarem com conceitos algébricos a elas relacionados. Sleeman (1984) mostra que esses procedimentos acabam por se tornar regras inadequadas para a resolução de equações (*mal-rules*) que são usadas indiscriminadamente pelos alunos. Payne e Squibb (1990) acrescentam ainda que essas *mal-rules* são inconstantes e numerosas, o que leva o aluno ao erro.

Além disso, nenhuma das três perspectivas apresentadas, APOS, reificação ou “proceitos”, considera abordagens que englobam percepções, observações e análises de um objeto físico ou de experiências mentais com o uso desse objeto, como acontece com o uso dos modelos concretos apresentados anteriormente, o geométrico (FILLOY e ROJANO, 1989) e o da balança (VLASSIS, 2002). Essas pesquisas indicam que é importante levar esse tipo de abordagem em consideração, pois ela, mesmo que restrita, pode colaborar para que o aluno entenda a igualdade entre os membros de uma equação, possibilitando que ele tenha também domínio sobre equações de manipulação, e não somente equações de avaliação. Dessa forma, entendemos que se faz necessária uma breve análise de uma teoria que considere experiências físicas, como a cognição corporificada.

2.2. Cognição Corporificada

O termo cognição corporificada[15] refere-se a teorias de cognição que priorizam experiências corpóreas como fonte de significado conceitual. Na literatura, podemos encontrar várias perspectivas diferentes, mas, no campo da Educação Matemática, o mais conhecido é o trabalho de Lakoff e seus colegas

[15] Em Inglês, *embodied cognition*.

(LAKOFF e JOHNSON, 1980; LAKOFF e NÚÑEZ, 2000). Lakoff e Núñez (2000) afirmam que "Idéias humanas, em uma grande extensão, são baseadas em experiências sensório-motoras" (LAKOFF e NÚÑEZ, 2000, p. xii, tradução nossa[16]). O raciocínio abstrato da Matemática também é uma idéia humana e, como tal, também é baseado nesse tipo de experiência.

Eles argumentam que a relação entre o raciocínio da Matemática e as experiências corpóreas é feita por meio de uma *metáfora conceitual*, que "é um mecanismo cognitivo para permitir que nós raciocinemos sobre um tipo de coisa como se ela fosse outra." (LAKOFF e NÚÑEZ, 2000, p. 6, tradução nossa[17]) e é por meio delas que se dá o aprendizado de *todos* os conceitos matemáticos.

De acordo com Núñez et al (1999), metáforas conceituais são mapeamentos de um *domínio fonte* para um *domínio alvo*, e um indivíduo compreende as noções presentes no domínio alvo por meio de relações que faz com noções do domínio fonte. Essas relações, na maioria das vezes, são inconscientes e, portanto, os aspectos abstratos da Matemática podem permanecer inconscientes.

Entendemos que um exemplo de metáfora conceitual para equações seja o modelo da balança. Ele seria o domínio fonte, enquanto a equação matemática seria o domínio alvo. Ao retirarmos pesos iguais de ambos os pratos da balança, mantemos o equilíbrio dos pratos. Isso é, então, relacionado com a ação de retirar

[16] "Human ideas are, to a large extent, grounded in sensory-motor experience."
[17] "Conceptual metaphor is a cognitive mechanism for allowing us to reason about one kind of thing as if it were another."

números iguais de ambos os membros da equação a fim de manter a igualdade entre eles.

A corporificação, nessa perspectiva, parece estar fundamentalmente relacionada a situações vivenciadas pelo indivíduo na sua realidade física e em como essas experiências desenvolvem todas as idéias humanas. Ou seja, toda a cognição, para estes autores, tem raízes em experiências que envolvem o corpo.

As ações, nessa perspectiva, são de fundamental importância, assim como para a teoria APOS. Entretanto, o foco da ação em ambas as teorias nos parece diferente, pois a ação para a cognição corporificada restringe-se àquelas efetuadas pelo corpo, enquanto na teoria APOS, ações podem ser efetuadas, por exemplo, em símbolos matemáticos, a fim de manipulá-los.

Ao enfatizar as experiências corpóreas, a cognição corporificada deixa de lado aspectos presentes nas teorias de processo-objeto apresentadas neste trabalho, como, por exemplo, as concepções estruturais da Matemática, os significados relacionados aos símbolos por eles mesmos, bem como os processos não relacionados a experiências corpóreas. Em resumo, a dualidade processo-objeto, ou processo-conceito, e os aspectos inerentes aos símbolos matemáticos parecem ser deixados de lado por esta perspectiva.

Especificamente sobre os símbolos, entendemos que dar significado a eles somente por meio de metáforas conceituais pode acarretar uma visão dos símbolos como entidades físicas, que podem ser movimentadas numa equação, sendo transportadas de um membro a outro, e colocadas em lugares que podem parecer adequados, porém sem que princípios matemáticos sejam levados em consideração. Esse tratamento dos símbolos como entidades físicas pode acarretar o tipo de erro apresentado por Freitas (2002) e explicado por Sleeman (1984) e Payne e Squibb (1990) como *mal-rules* no trabalho com a Álgebra.

Corporificações como as apresentadas por Vlassis (2002) e Filloy e Rojano (1989), podem ser de grande utilidade para o aprendizado de equações, se forem usadas de acordo com os aspectos que elas objetivam. Entretanto, é importante que se faça a relação entre esses aspectos com os símbolos usados em equações, para que se possa tentar evitar (ou superar) problemas relacionados às situações em que essas corporificações não suportam, como, por exemplo, a introdução de números negativos.

Além disso, outros tipos de corporificações devem ser levadas em conta, não somente as que se relacionam aos sentidos físicos, mas também as relacionadas a experimentos mentais, em que objetos físicos permitem a reflexão sobre conceitos que não são físicos, como no caso dos elementos da Geometria; ou à visualização, como acontece na análise de gráficos, por exemplo.

Existem, então, vantagens e desvantagens tanto nas teorias de processo-objeto, quanto na perspectiva da cognição corporificada. Entretanto, entendemos que a todas faltam aspectos importantes que devem ser considerados no aprendizado de equações. Acreditamos que seja importante fazer uso dos aspectos essenciais para equações, presentes em teorias que enfatizam o processo de resolução de equação, e os conceitos por trás dessa resolução e dos símbolos que compõem uma equação, bem como de aspectos corporificados que engatilham significados essenciais dos símbolos algébricos e das equações.

2.3. Os Três Mundos da Matemática

Dado o que vimos até o presente momento, as teorias APOS e da reificação visam explicar o aprendizado da Matemática por meio de uma única categoria: a transformação de processos em objetos. A noção de "proceitos" enfatiza a dualidade dos símbolos como processo e conceito, mas, como as outras, não faz menção a outras categorias. A cognição corporificada também enfoca um único aspecto: o das experiências corpóreas. Entendemos que, separadamente, a transformação de processos em objetos ou a ênfase em experiências corpóreas não são suficientes para caracterizar a aprendizagem da Matemática.

Podemos voltar ao caso de que as teorias APOS e da reificação não consideram a possibilidade de aprendizado partindo do objeto para chegar no processo, como acontece com estruturas como anéis e corpos. Nesse sentido, a noção de "proceitos" é mais ampla do que essas duas teorias de processo-objeto por abrir essa possibilidade. Mesmo assim, ela é restrita ao trabalho com os símbolos, não considerando as corporificações que colaboram no aprendizado de equações. Por outro lado, a perspectiva da cognição corporificada, ao enfocar experiências corpóreas, não as relaciona com os símbolos usados em uma equação.

Quando o faz, é de maneira restrita, dando a eles significados que não podem ser extrapolados para todas as situações possíveis, como é o caso das metáforas da balança e do modelo geométrico.

Frente à dificuldade de uma categorização única, Gray e Tall (2001) propõem a existência de pelo menos três tipos diferentes de conceitos em Matemática: os *objetos corporificados*, os *"proceitos" simbólicos* e os *conceitos axiomáticos*. Os objetos corporificados, tais como, os elementos da Geometria, gráficos e outros, podem, inicialmente, ser fisicamente manipulados e, posteriormente, concebidos como objetos mentais. Os *"proceitos" simbólicos* são conceitos matemáticos que necessitam de símbolos para serem representados, como números ou equações algébricas. Por fim, os *conceitos axiomáticos* são axiomas, definições, teoremas, usados para servir de base para o sistema axiomático com o qual desenvolvemos a Matemática formal. Em vista disso, necessita-se da elaboração de um quadro teórico que tenha pelo menos três diferentes meios de categorizar a aprendizagem da Matemática.

Assim como Lakoff e Núñez (2000), Gray e Tall (2001) também enfatizam a existência de um tipo de conceito matemático que é fisicamente manipulado, os objetos corporificados. No entanto, eles não são o único meio de se desenvolver aprendizado matemático e nem são relacionados somente a objetos físicos. Gray e Tall (2001) ao admitirem pelo menos três tipos de conceitos matemáticos, descartam a necessidade de que o aprendizado seja construído por meio de metáforas conceituais. Elas parecem ser, para eles, apenas um aspecto dentre os relacionados aos objetos corporificados e, além disso, os “proceitos” simbólicos e os conceitos axiomáticos não necessariamente emergem de metáforas conceituais.

Relacionadas a esses três tipos diferentes de conceitos estão as atividades humanas de percepção, ação e reflexão. Baseando-se nelas, Piaget (2001) afirma que existem duas maneiras de operar no mundo exterior. Uma com o foco nas propriedades dos objetos observados – *abstração empírica* – e outra com o foco na ação que se faz sobre os objetos – *abstração pseudo-empírica*. Esses dois tipos de abstração podem gerar dois tipos diferentes do que chamamos de *conceitos pensáveis*, termo usado “... para nos referirmos a algum fenômeno que foi nomeado de forma que podemos falar e pensar sobre ele”. (GRAY e TALL, 2007, p. 2, tradução nossa[18]). O primeiro tipo é o formado pelos conceitos pensáveis construídos com base na corporificação conceitual de objetos que nós percebemos, observamos e descrevemos. O segundo, os construídos com base no efeito que nossas ações têm sobre o objeto em questão, que são representadas pelo simbolismo matemático.

Um terceiro tipo de abstração é também definido por Piaget (2001), a *abstração reflexiva*, com foco na reflexão, tanto no sentido de reconstrução cognitiva, quanto no sentido de projetar os conhecimentos de um nível mais baixo para um nível mais elevado. Entendemos que a abstração reflexiva está relacionada principalmente aos conceitos axiomáticos, mas ela não pode ser desvinculada dos outros dois tipos de conceito, já que é somente por meio da reflexão (da abstração reflexiva, segundo Piaget, 2001) que se dá o aprendizado.

[18] “... to refer to some phenomenon that has been named so that we can talk and think about it.”

Outro pesquisador importante na busca por entender a natureza do desenvolvimento intelectual é Bruner (1966), explicando que os indivíduos armazenam as informações obtidas com experiências anteriores, ou os conceitos pensáveis, de três diferentes maneiras: pela *ação*, por *imagens* e pela *linguagem*. Esses três meios de armazenar informações compõem três sistemas de representação: *encenado*, *icônico* e *simbólico*[19].

Fazem parte do sistema de representação encenado aquelas experiências para as quais é difícil de se obter imagens ou palavras. É preciso fazer uso da ação para mostrá-las e para ensiná-las. O sistema de representação icônico "... depende de organizações visuais ou outras organizações sensórias, e do uso de imagens resumidas." (BRUNER, 1966, p. 10, tradução nossa[20]), enquanto o simbólico refere-se ao uso de símbolos e da linguagem.

Ao sistema de representação simbólico é dada extrema importância, pois ele tem regras, que devem ser seguidas para que se formem sentenças; por ser compacto, isto é, por permitir que conceitos e propriedades sejam comprimidos em poucas palavras ou símbolos; e, principalmente, porque a linguagem (ou os símbolos) pode ser usada como instrumento de pensamento.

Esses três sistemas desenvolvem-se de forma hierárquica, iniciando pelo sistema encenado, em que os indivíduos precisam das ações para compreender uma situação. Em seguida, os sistema icônico, em que imagens resumem as ações efetuadas sobre os objetos, e, por fim, o sistema simbólico, para comunicação e

---

[19] Em Inglês, *enactive*, *iconic* e *symbolic*.
[20] "... depends upon visual or other sensory organization and upon the use of summarizing images."

raciocínio. Ainda, os três sistemas podem co-existir, isto é, um indivíduo pode fazer uso dos três sistemas para armazenar informações.

A criação de diferentes tipos de conceitos pensáveis (PIAGET, 2001) e seu armazenamento (BRUNER, 1966) estão relacionados a experiências anteriores, advindas das atividades de percepção, ação e reflexão, e nos guia ao desenvolvimento de diferentes mundos da Matemática. O primeiro deles é o *mundo conceitual corporificado* das percepções. Nele, observamos, descrevemos e pensamos sobre as propriedades que nos foi possível perceber em um objeto. O segundo, é o *mundo "proceitual" simbólico* dos símbolos usados não só para representar e efetuar ações, mas também para representar o produto que é o resultado dessas ações, numa dualidade representada pelos "proceitos". O terceiro mundo é denominado *mundo formal axiomático*, das definições, axiomas e teoremas que constroem o sistema axiomático da Matemática. Esses mundos englobam os diferentes tipos de conceitos e formam o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (TALL, 2004a, 2004b).

Esse quadro teórico visa explicar como se dá o aprendizado da Matemática do recém-nascido ao matemático profissional. Ele foi desenvolvido a partir de críticas às teorias de processo-objeto (DUBINSKY, 1991; SFARD, 1991, GRAY e TALL, 1994) e de corporificação (LAKOFF e NÚÑEZ, 2000), ao afirmar que não é possível caracterizar esse aprendizado fazendo uso somente de uma categoria, pois são necessárias categorias que englobem os diferentes tipos de pensamento matemático.

O mundo conceitual corporificado coordena percepções e ações que efetuamos, tanto em objetos físicos quanto em objetos mentais. Percebemos propriedades matemáticas nesses diferentes objetos e agimos sobre eles para entender o que elas significam. Criamos idéias a respeito de um conceito matemático a partir de seus aspectos corporificados. Um indivíduo que está fazendo relações entre aspectos presentes nesse mundo, pode dar significado corporificado ao conceito matemático relacionado a esses aspectos. Por exemplo, ao buscarmos a medida x de um dos lados de uma figura geométrica, cuja área é igual à de uma outra figura que tem um dos lados também de medida x, estaremos relacionando uma equação com a igualdade entre as áreas, e dando significado para os símbolos que seja relacionado com a corporificação de figuras geométricas. Os símbolos de uma equação podem ser associados com figuras conhecidas pelos alunos, o que pode contribuir para seu entendimento da igualdade entre os membros.

No que diz respeito ao uso da palavra “corporificação” dentro do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, entendemos que ela se refere a experiências que envolvam objetos físicos e observação, descrição, ação e reflexão sobre eles, mas não se trata somente do uso de objetos físicos. Ela refere-se, também, a experiências mentais, em que o indivíduo não precisa, necessariamente, da manipulação física de um objeto, pois ele pode manipulá-lo em seu pensamento, de forma a analisá-lo e a levantar conjecturas sobre propriedades do objeto ou de uma situação. É claro que essas experiências também podem ser representadas no papel e simbolizadas de alguma forma. Por exemplo, figuras geométricas podem ser desenhadas ou construídas com ajuda de softwares que permitam sua visualização. Da mesma forma, imagens de gráficos podem ser usadas como corporificações, para que sejam analisadas e suas propriedades observadas e compreendidas. Por fim, abordagens de ensino que levem em conta esses e outros fatores da visualização, bem como o uso de objetos físicos ou representações deles para o aprendizado são por nós consideradas como corporificadas.

Assim, quando falamos em aspectos presentes no mundo corporificado, não estamos somente nos referindo a experiências corpóreas, mas também à manipulação de objetos físicos, como no caso de representar uma equação como uma balança. Podemos pensar sobre esses objetos e fazer as experiências em nossas mentes, ou mesmo representá-las no papel, ao fazer o desenho da balança, ou usar símbolos algébricos e números no lugar do desenho. Essas experiências mentais, ou mesmo os registros feitos, também estão relacionadas ao mundo corporificado, bem como imagens, como gráficos de diversos tipos, figuras geométricas, etc. Nesse sentido, a corporificação, no mundo corporificado, engloba não só as experiências corpóreas, como o faz a cognição corporificada, mas também todas as outras corporificações que essa perspectiva descarta, ampliando, assim, as possibilidades de corporificação e, ainda, tornando-as mais sofisticadas, com a possibilidade de fazer experiências mentais.

A validação nesse mundo dá-se pela visualização e pela intuição. Pode-se ver que a balança está em equilíbrio em uma dada situação, ou que as diagonais de um quadrado são perpendiculares entre si, bem como podemos intuir o que é preciso fazer para deixar a balança em equilíbrio, ou intuir que nem todos os quadriláteros planos têm diagonais perpendiculares. O indivíduo, ao validar suas afirmações, não sente necessidade de qualquer tipo de demonstração ou justificativa para o que está vendo, justamente por estar *vendo*. A linguagem usada é uma linguagem comum, no sentido de que objetos podem ser relacionados a conceitos matemáticos e o indivíduo fala do que está observando, sem se preocupar com nomes apropriados e formalismos.

No mundo "proceitual" simbólico é necessário mais do que a percepção de que algo é verdade. Quando se lida com os símbolos que habitam esse mundo, é preciso que se façam cálculos com números e/ou manipulação simbólica para que se "mostre" que algo é verdade. O mundo simbólico é composto por símbolos que representam as ações e as percepções que estão presentes no mundo corporificado. Com eles, representamos também os significados que foram dados aos conceitos matemáticos pela corporificação, ampliando esse significado, por exemplo, para englobar números negativos. No caso do estudo da equação por meio de uma balança ou do uso de figuras geométricas de mesma área, não é possível representar quantidades negativas para a incógnita. Por exemplo, equações do tipo $ax+b=0$ não podem ser representadas na balança de dois pratos, pois não é possível o equilíbrio colocando pesos em apenas um dos pratos, o que exige uma ampliação do significado dado no mundo corporificado, que é feita dando significado presente no mundo simbólico. Os símbolos têm uma poderosa capacidade de comprimir conceitos pensáveis, englobando uma diversidade de situações que não são sempre possíveis de se representar por meio de corporificações. Essa é uma característica, também, do sistema simbólico de Bruner (1966).

A compressão que os símbolos proporcionam é de grande importância pois, de acordo com Miller (1956), o cérebro humano não consegue reter no foco de atenção um grande número de informação. Só é possível reter sete, mais ou menos dois (7 ± 2), “fragmentos”[21] de informação de uma vez na memória de curto-prazo. Assim, faz-se necessário que os conceitos pensáveis sejam comprimidos de forma a poderem ser reutilizados com facilidade quando for preciso.

A compressão se faz de várias maneiras. A mais simples é pela repetição de um procedimento, várias vezes, até que ele se torne mecânico. Essa repetição faz com que um indivíduo, ao usar um procedimento, acabe por não precisar pensar no próximo passo olhando para o anterior, e sim entendendo esse procedimento como um todo, tornando-o um processo.

Maneiras mais sofisticadas de comprimir um fenômeno são dar um nome a ele e usar símbolos matemáticos para representá-lo. Por exemplo, ao dizer “quadrado”, sabemos que, nessa palavra, comprimem-se conceitos da Geometria e estamos falando de um quadrilátero plano de lados e ângulos congruentes. Todas essas características estão comprimidas em uma só palavra. No que se refere ao uso de símbolos matemáticos, por exemplo, $3+2=5$ comprime o conceito de adição e a ação de somar os dois números para obter um resultado.

Dessa forma, vemos que os símbolos representam o significado dado tanto aos conceitos pensáveis quanto às ações que são efetuadas. Logo, no mundo simbólico, os símbolos devem ser vistos como “proceitos” (GRAY e TALL, 1994),

[21] Em Inglês, *chunks*.

destacando a ambigüidade que eles caracterizam, mas também ampliando sua dualidade para a percepção de que diferentes procedimentos resultam no mesmo *efeito* (WATSON, 2002; WATSON, SPIROU e TALL, 2003). Por exemplo, para resolver a equação $(x-3)\cdot(x-2)=0$, é possível igualar cada um dos fatores a zero para obter as raízes 3 e 2, ou multiplicar os fatores, resultando na equação $x^2-5x+6=0$ e usar a fórmula de Bhaskara para obter as raízes 3 e 2. Em ambos os casos, não importa o procedimento usado, o *efeito* é o mesmo: a obtenção das raízes 3 e 2. Dessa forma, a ênfase está no resultado obtido pelo procedimento, e não no procedimento em si. Esse fato deve ser percebido pelo indivíduo, que, dessa forma, pode trabalhar de maneira flexível, tendo, à disposição, diferentes "proceitos" a serem usados, que resultarão no mesmo efeito. Essa mudança do foco de atenção da ação para o efeito também pode ser considerada como uma compressão.

Enfocar o efeito, e não a ação, é uma contraposição em relação à teoria APOS, que afirma que diferentes ações resultam em objetos diferentes. Ao enfatizar a noção de efeito, fazemos com que diferentes ações que possam ser efetuadas sobre os símbolos não sejam o foco essencial para o indivíduo, mas sim o produto dessas ações, que é justamente o que permite a flexibilidade, não só de ver os símbolos como um processo e como um conceito, mas também de escolha de um procedimento que seja, de acordo com o indivíduo, o mais apropriado para a situação em jogo.

Essas características do mundo simbólico exigem uma linguagem um pouco mais precisa do que aquela usada no mundo corporificado. Os símbolos têm significados precisos, que devem ser respeitados tanto ao serem ditos quanto ao serem escritos. Logo, a linguagem nesse mundo deve levar em conta os termos apropriados para as manipulações simbólicas e os cálculos a serem usados para validações.

Diferentemente dos outros dois, o trabalho no mundo formal axiomático é caracterizado pelo uso de linguagem formal, o uso de definições formais para conceitos, a partir das quais são feitas deduções e demonstrações. O mundo formal é composto pelos axiomas, definições e teoremas que formam o sistema axiomático da Matemática e é principalmente considerado quando se estuda Matemática pura em nível universitário. Isso se dá pois ele pressupõe a construção de um sistema axiomático para a Matemática, com uso de axiomas e propriedades para demonstrar teoremas que também serão posteriormente usados na demonstração de outros teoremas e, assim, comporão o sistema axiomático requerido.

Esse tipo de construção não é freqüentemente realizado em nível de Ensino Básico. Nesse nível, podemos dizer que há o uso de algumas características desse mundo, em dados momentos, como, por exemplo, quando o aluno se depara com demonstrações, em que ele precisa compreender o desencadeamento dos passos nelas efetuados, ou mesmo ao se deparar com definições, propriedades ou princípios da Matemática ao realizar alguma manipulação algébrica ou alguma generalização. Por exemplo, como o conjunto dos números reais é um anel de integridade, se o produto de dois fatores for zero, então um dos fatores deverá ser necessariamente zero. Alunos no Ensino Básico não conhecem anéis de integridade, nem sabem o que isso significa, já que estruturas algébricas não fazem parte do currículo brasileiro nesse nível. Entretanto, é possível que eles consigam perceber (mas não demonstrar) a validade dessa propriedade dos números reais por meio de cálculos ou mesmo num raciocínio de buscar valores que a e b podem assumir no caso em que $a \cdot b = 0$. Logo, é possível que alunos conheçam alguns princípios ou teoremas presentes no mundo formal, mas não que eles possam trabalhar livremente com a totalidade do mundo formal. Dessa forma, em nossa pesquisa, esse mundo não estará em destaque exatamente por nossos sujeitos de pesquisa serem alunos do Ensino Médio.

Ao englobar três diferentes tipos de conceitos pensáveis, e considerando suas inter-relações, entendemos que os Três Mundos da Matemática têm o potencial de cobrir os aspectos que as teorias apresentadas anteriormente não enfocam, o que pode vir a colaborar com nosso estudo sobre os significados atribuídos pelos alunos para equações e para a resolução delas.

Assim como os sistemas de representação de Bruner (1966) são hierárquicos e co-existentes, também os Três Mundos da Matemática apresentam essas qualidades. Apesar de cada um dos mundos ter características, linguagem, métodos de validação diferentes, isto é, de operarem diferentemente, eles são inter-relacionados, pois é possível usar características de um mundo para compreender aspectos do outro. Há uma hierarquia entre mundos, no sentido de que o mundo formal não é usualmente discutido em estágios anteriores ao nível universitário, portanto só é tratado depois dos mundos corporificado e simbólico. Já estes últimos podem co-existir e serem relacionados de maneira intrínseca. Quando o mundo formal está em jogo, ele também se relaciona aos outros mundos intrinsecamente. A **Figura 1** (TALL e MEJÍA-RAMOS, 2004) mostra um exemplo de como esses mundos podem se desenvolver em paralelo no estudo do Cálculo.

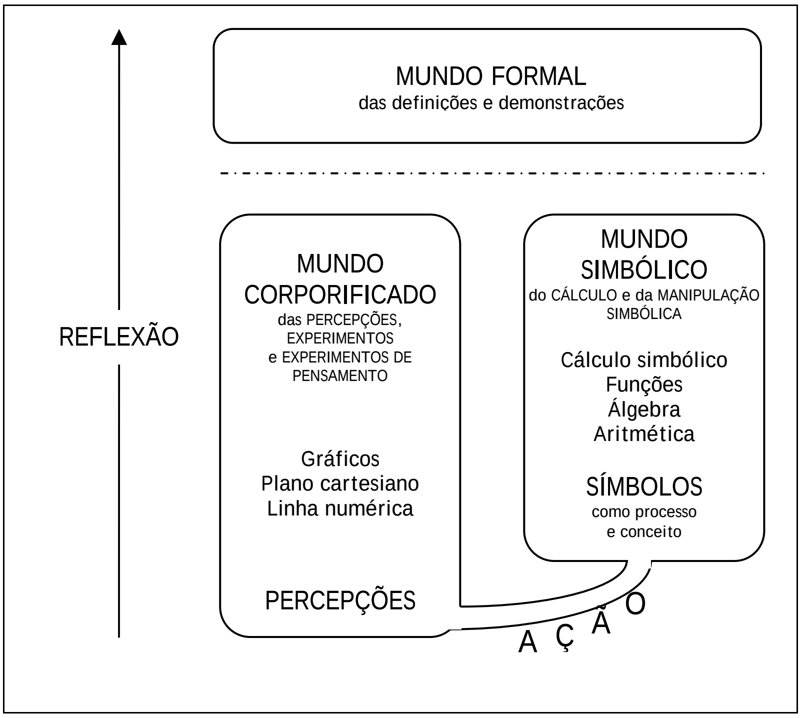


Figura 1: Os Três Mundos da Matemática e o Cálculo

Fonte: Tall e Mejía-Ramos, 2004

A partir da **Figura 1**, elaboramos a **Figura 2**, em que a abordagem da balança, a abordagem geométrica e contas com números inteiros são tomadas como formas de corporificação para equações. A Aritmética, a Álgebra e as próprias equações são parte do mundo simbólico, e os símbolos são vistos como “proceitos”, envolvendo o processo de operá-los e também o conceito resultante dessa operação. As ações efetuadas nas corporificações relacionam-se às ações efetuadas nos símbolos, conectando ambos os mundos e proporcionando a possibilidade de desenvolvimento de significado, tanto corporificado quanto simbólico, para os símbolos.

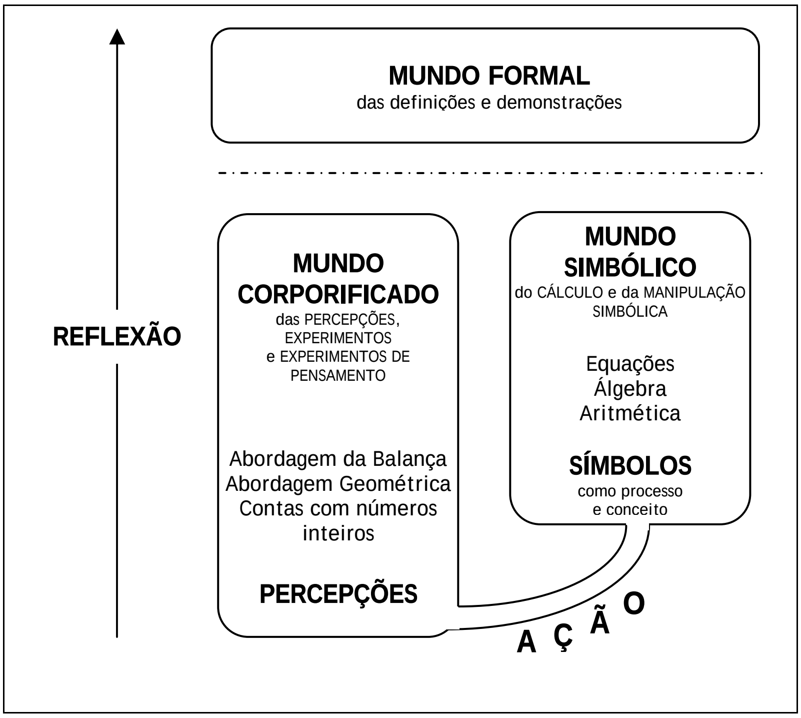


Figura 2: Os Três Mundos da Matemática e a Álgebra
(Adaptado de Tall e Mejía-Ramos, 2004)

Por meio da ação, as percepções do mundo corporificado podem ser simbolizadas. Esses símbolos representam tanto os processos quanto os conceitos relacionados, por exemplo, com a manipulação simbólica. A partir das percepções e ações realizadas com aspectos do mundo corporificado, são dados significados a conceitos matemáticos que devem ser traduzidos por símbolos no mundo simbólico. Ao compreender o mundo formal como um todo, e não só algumas características dele, é possível também que um indivíduo faça uso de aspectos corporificados, bem como de cálculos e manipulação simbólica, para chegar a conclusões de como encaminhar a demonstração de um teorema, o que mostra também uma inter-relação do mundo formal com os outros dois. Um exemplo de aspectos corporificados, que ajudam a desenvolver uma demonstração, pode ser visto com o uso do software Cabri-géomètre para explorar uma dada situação geométrica, a fim de obter propriedades da figura que possam ser posteriormente demonstradas, obtendo a demonstração final. Já no que se refere ao uso de cálculos ou manipulação simbólica, podemos lembrar que, para se fazer uma demonstração pelo Princípio de Indução Finita, é necessário, a princípio, calcular um valor para desencadear a demonstração, a fim de que ela seja válida, mostrando, assim, que o conjunto de valores para os quais a propriedade é válida, não é vazio, o que permite que ela seja verdadeira para valores posteriores.

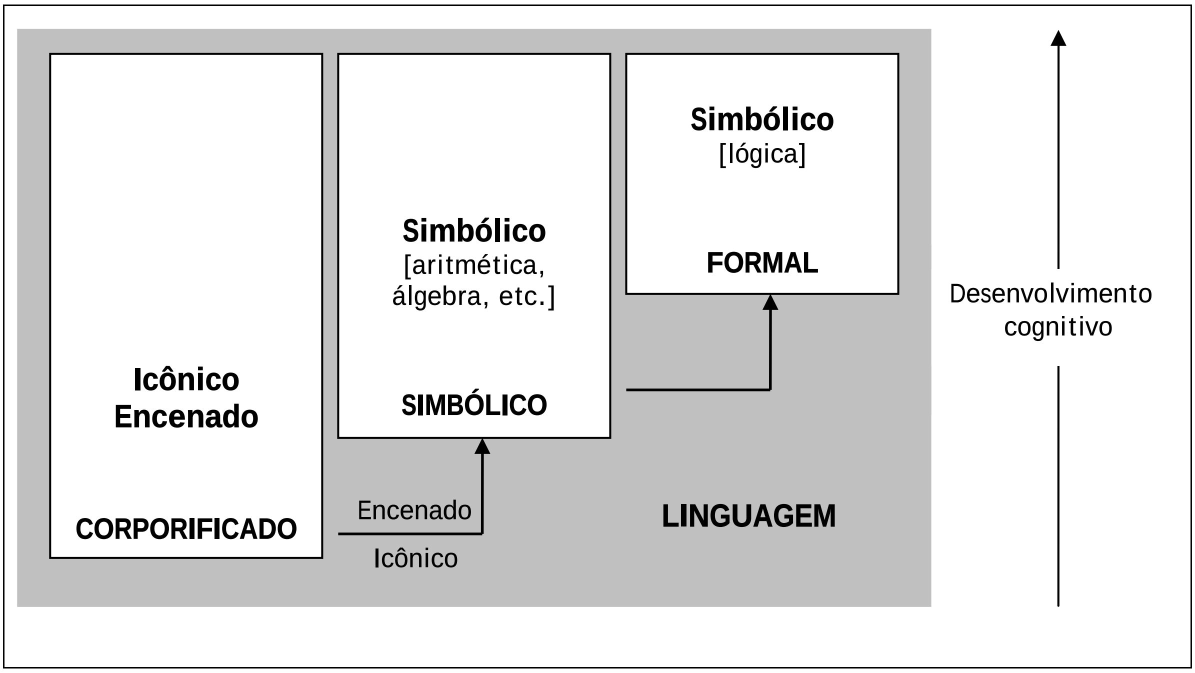


Figura 3: O relacionamento entre a teoria de Bruner e os Três Mundos da Matemática

Fonte: Tall, 2004c.

Os Três Mundos da Matemática e os sistemas de representação de Bruner (1966) se relacionam como apresentado na **Figura 3**. Ambos os sistemas, encenado e icônico, estão presentes no mundo corporificado, pois representam ações e imagens. Já o sistema simbólico, pode ser relacionado tanto ao mundo simbólico quanto ao mundo formal. No primeiro caso, quando o sistema simbólico representa operações em aritmética e manipulação simbólica em Álgebra; no segundo caso, quando os símbolos são aqueles usados na lógica, em axiomas, definições e na demonstração de teoremas.

O entendimento de que há pelo menos três diferentes tipos de conceitos matemáticos, e portanto, diferentes desenvolvimentos cognitivos, nos leva a conjecturar (LIMA e TALL, 2006) que existem também três diferentes maneiras de dar significado a conceitos matemáticos: *significado corporificado*, *significado simbólico* e *significado formal*.

Inicialmente, pode ser dado significado referente ao mundo corporificado, relacionando percepções, observações e descrições de objetos com as propriedades matemáticas que eles carregam consigo, como no caso do equilíbrio entre os pratos da balança, que representam a igualdade entre os membros da equação. Nesse caso, a incógnita e os números que formam uma equação têm significado físico, isto é, são relacionados com entidades físicas. A manipulação algébrica é feita tendo como base a manipulação de objetos e a compreensão do sinal de igual como o equilíbrio, que deve ser mantido, entre os pratos.

Ao relacionar esse significado com o mundo simbólico, por exemplo, relacionando a colocação e retirada de pesos nos pratos da balança a efetuar a mesma operação em ambos os membros da equação, bem como o equilíbrio entre os pratos com a igualdade entre os membros, é dado, também, significado aos símbolos usados para representar as propriedades percebidas na corporificação. As incógnitas e os números não mais são representados por pesos, mas pelos símbolos da Álgebra. Dessa forma, pode-se dar valores negativos ou não-inteiros para a incógnita, que pode ser vista como o processo de se buscar o valor e como o conceito de número. A compreensão de qual operação deve ser feita, para obter o valor da incógnita, torna-se mais sofisticada com o uso de números negativos e símbolos algébricos.

Por fim, ao lidar com o mundo formal, é importante relacionar ambos os significados corporificado e simbólico com axiomas, definições e teoremas, obtendo, assim, significado formal. Em equações, esse tipo de significado pode ser encontrado quando elas são relacionadas a estruturas algébricas, como anéis e corpos.

Este quadro teórico pretende usar uma linguagem acessível a professores e alunos, de forma que eles possam conversar sobre características formais, simbólicas ou corporificadas do conteúdo em aprendizagem, bem como sobre as experiências de aprendizagem dos alunos, usando termos simples, que podem ser encarados com naturalidade também pelos alunos.

Faremos, então, uso do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática para analisar os dados coletados nesta pesquisa. Mesmo o estudo de equações sendo apenas um tópico dentro do aprendizado que esse quadro visa explicar, ele é ponto essencial, pois comporta características presentes em todos os três mundos, mostrando que são possíveis inter-relações entre eles.

2.3.1. "Já-encontrados" e "a-encontrar"

A percepção e o entendimento de características de cada um dos mundos variam de indivíduo para indivíduo. Nem todos fazem a mesma jornada pelos mundos da Matemática. Cada um passa por caminhos diferentes, enfrenta dificuldades diferentes, de acordo com experiências que tiveram anteriormente, seja na escola ou fora dela, desenvolvendo sua própria imagem de conceito, que é definida por Tall e Vinner (1981) como

> "... a estrutura cognitiva total que é associada com o conceito, que inclui todas as figuras mentais e propriedades e processos a eles associados. Ela é desenvolvida durante os anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece."
>
> (TALL e VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa[22])

Essas experiências anteriores são de fundamental importância no aprendizado de um conceito matemático, pois elas afetam esse aprendizado de alguma forma. Chamaremos essas experiências anteriores de *"já-encontrados"*[23] (TALL, 2004b), e as definiremos como "... um construto mental que um indivíduo usa em um dado momento, baseado em experiências que ele encontrou anteriormente." (LIMA e TALL, no prelo, p. 6, tradução nossa[24]). Eles são parte da imagem de conceito de um indivíduo.

---

[22] "... the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures."

[23] Em Inglês, *met-befores*.

[24] "... a mental construct that an individual uses at a given time based on experiences they have met before."

Tais experiências são trazidas à tona pelo indivíduo quando ele se depara com alguma situação semelhante àquela que já lhe é familiar. Ele usa, em uma nova situação, um conhecimento ou um procedimento que já conhece, tomando-o como válido para o momento atual. Por exemplo, experiências anteriores com expressões algébricas podem interferir no trabalho com equações.

"Já-encontrados" podem influenciar o aprendizado tanto de maneira positiva quanto negativa. Por exemplo, um indivíduo pode ter visto anteriormente, em Aritmética, que $3+4=7$ e, ao deparar-se com a expressão algébrica $3x+4x$, pode concluir que essa soma é igual a $7x$, usando um fato conhecido. Entretanto, um indivíduo também pode deparar-se com a expressão $3+4x$ e concluir, enganosamente, que ela é igual a $7x$. Nesse sentido, a experiência anterior com Aritmética tornou-se um *obstáculo* para o aluno. O conceito de obstáculo foi descrito por Brousseau (1997), no contexto da Educação Matemática, como um conhecimento que é válido dentro de um certo domínio, mas que falha ao ser usado fora desse domínio de validade. Ele aparenta ser um erro persistente, mas não é aleatório. Ele é fruto de um aprendizado local que trouxe sucesso anteriormente, mas que, ao ser usado em outro contexto, falha e resulta em erros. Tal conhecimento deve ser readaptado para a nova situação, a fim de que seu domínio de validade seja ampliado.

"Já-encontrados" podem vir a ser obstáculos para aprendizados futuros, quando usados fora de seu domínio de validade, mas nem sempre o são. "Já-encontrados" podem ser tanto negativos, isto é, causar dificuldades, erros ou obstáculos para o aprendizado, quanto positivos, vindo a exercer influência benéfica no aprendizado corrente. Por exemplo, o entendimento de que $2a$ e $9a$ são termos semelhantes, é um "já-encontrado" que pode colaborar com o posterior aprendizado de equações lineares como $3x+x-1=8$, em que o aluno percebe a possibilidade de somar $3x$ e x, de forma a obter uma equação mais simples que a anterior, facilitando a resolução.

Assim, um "já-encontrado" é toda e qualquer experiência anterior a um certo aprendizado, considerada como construto mental, presente na imagem de conceito do aluno, que possa interferir no aprendizado em questão, seja de forma positiva ou negativa.

Não apenas experiências anteriores afetam ou interferem no aprendizado de novos conceitos, mas também novas experiências podem interferir em aprendizados anteriores. Por exemplo, a resolução de equações quadráticas na forma $x^2=a$, com $a\neq 0$, quando abordada por meio de um procedimento que a transforma em $x=\pm\sqrt{a}$, pode vir a fazer com que alunos passem a concluir que $\sqrt{b^2}=\pm b$, ao lidarem com números reais. "Usamos o termo *'a-encontrar'*[25] para denotar uma experiência encontrada posteriormente que pode afetar a memória de conhecimentos anteriores." (LIMA e TALL, no prelo, p. 7, tradução nossa[26]).

Entendemos que os conhecimentos anteriores que foram afetados de maneira negativa pelos "a-encontrar" não estavam bem estruturados na mente do indivíduo e necessitavam de reconstrução. O próprio indivíduo pode não estar

[25] Em Inglês, *met-after*.

[26] "We use the term 'met-after' to denote an experience met at a later time that affects the memories of previous knowledge."

consciente dessa necessidade, até que uma interferência num sentido negativo ocorra. Ainda, é possível que somente com a ajuda de um professor ou de um mentor o aluno perceba que “já-encontrados” ou “a-encontrar” estão interferindo de maneira negativa no aprendizado.

Assim como os “já-encontrados”, os “a-encontrar” podem também influenciar aprendizados anteriores de maneira positiva. Isso acontece quando a experiência atual faz com que um indivíduo reflita sobre o seu aprendizado anterior, revendo seus conceitos e até mesmo reconstrua conhecimentos anteriores de modo a superar dificuldades. Dessa forma, os “a-encontrar” podem contribuir para a reorganização e a ampliação da imagem de conceito do indivíduo.

Os “já-encontrados” são construtos mentais que fazem parte da imagem de conceito de um indivíduo; “a-encontrar” são experiências que podem não ser ainda parte da imagem de conceito, mas podem tanto modificá-la quanto vir a fazer parte dela. Neste último caso, eles acabam tornando-se “já-encontrados”.

Ao fazerem parte da imagem de conceito de um indivíduo, os “já-encontrados”, e também os “a-encontrar”, podem ser de grande importância para colaborar no entendimento das concepções que os alunos têm, no nosso caso, de equações e da resolução delas. Com eles, podemos formar um quadro substancioso sobre conceitos que interferem positiva ou negativamente no aprendizado de equações por parte dos alunos, compreendendo, assim, quais os fatores que colaboram ou não na aprendizagem de equações e dos métodos de resolução.

As experiências com as quais os alunos podem se deparar durante o aprendizado são de fundamental importância para o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, pois elas determinam como os alunos podem transitar pelos mundos, já que são os tipos de experiências – corporificadas, simbólicas ou formais – que possibilitarão que os alunos inter-relacionem aspectos dos diferentes mundos e desenvolvam conceitos pensáveis cada vez mais sofisticados.

É importante enfatizar também que os termos "já-encontrado" e "a-encontrar" pretendem ser simples, de forma que possam ser usados pelo professor, ao conversar com os alunos sobre as dificuldades com as quais eles se deparam e sobre as experiências que interferem de alguma forma na aprendizagem.

"Já-encontrados" e "a-encontrar" explicam a influência que experiências anteriores exercem sobre a aprendizagem que as teorias de processo-objeto e a perspectiva da cognição corporificada não conseguiram explicar.

"Já-encontrados" associados ao currículo escolar

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN – Brasil, 1998) sugerem que, ao iniciarem o quarto ciclo do Ensino Fundamental, os alunos já tenham trabalhado com números naturais, inteiros e racionais, bem como com operações entre esses números, incluindo potenciação, raízes quadradas e cúbicas, e que tenham dado significado a essas operações. Além disso, que tenham familiaridade com a representação algébrica, para fazer generalizações e para entender a variável como uma relação de dependência entre duas grandezas.

Durante o quarto ciclo do Ensino Fundamental, o trabalho com números deve ser estendido a números irracionais. No que se refere à Álgebra, devem ser estudadas as expressões algébricas e a equivalência entre elas; fatoração e simplificação. Situações-problemas devem ser traduzidas em equações ou inequações, e as raízes encontradas devem ser analisadas de acordo com a situação. Equações quadráticas devem ser resolvidas por meio de fatorações e sistemas de equações lineares devem ser trabalhados tanto algebricamente quanto por meio de resolução gráfica.

Supõe-se então que os alunos, ao iniciarem o Ensino Médio, como é o caso dos sujeitos de nossa pesquisa, tenham familiaridade com operações aritméticas, números reais, expressões algébricas, equações lineares e quadráticas. Dessa forma, espera-se que esses conteúdos ajam como “já-encontrados” no trabalho deles com equações, assim como habilidades para a resolução de problemas e a construção e a interpretação de gráficos.

2.3.2. As Equações e os Três Mundos da Matemática

O conceito de equação é muito amplo. Ele pode ser usado na resolução de problemas de aritmética, em que a incógnita é um número natural, e até mesmo em situações em que a incógnita é uma função, uma matriz ou mesmo um conjunto. Nem todas essas situações são familiares aos sujeitos de nossa pesquisa pelo nível de escolaridade em que eles se encontram. Até então, seu trabalho com equações restringe-se a equações algébricas.

Neste trabalho pretendemos ver como os Três Mundos da Matemática podem colaborar para que possamos compreender o significado de um tema específico da Matemática: Equações. Precisamos, então, buscar as características desse conteúdo presentes em cada um dos mundos.

Quando um indivíduo aprende a contar, ele faz uso de objetos, ou mesmo de seus dedos, como auxílio na contagem. As primeiras contas que faz podem ser associadas com a manipulação de objetos físicos e podem envolver ações de "pegar" uma coleção de objetos e, fisicamente, uni-la a outra coleção, para obter o total de objetos contidos na união de ambas as coleções, o que representa a soma de dois números. O indivíduo pode, também, "tirar" uma quantidade de objetos de uma coleção, para observar quantos sobram, representando, com esta ação, a subtração entre dois números. Aos poucos, ele desenvolve diferentes maneiras de contar, e acaba por criar "fatos conhecidos"[27] (GRAY e TALL, 1994), que o auxiliam em outros cálculos. Assim, o ato de fazer contas inicia-se no mundo corporificado e torna-se mais sofisticado quando um indivíduo passa a usar fatos conhecidos, como, por exemplo, usar o fato de que três mais cinco são oito para concluir que 23 mais cinco são 28.

Essa ação de fazer contas pode envolver cálculos com números racionais, cuja representação é feita por frações ou por números escritos na forma decimal,

[27] Em Inglês, *known facts*.

ou mesmo com números irracionais, que são, muitas vezes, representados por símbolos, tais como, $\sqrt{3}$ ou π. Quando isso acontece, não é mais necessário (nem mais possível) relacionar esses cálculos com a contagem de números naturais e, então, o indivíduo trabalha com aspectos presentes no mundo simbólico. Ele percebe, por exemplo, que representa o dobro de $\sqrt{3}$ por $2 \cdot \sqrt{3}$, sem precisar efetuar a operação para compreender o número. Dessa forma, é possível relacionar contas tanto com o mundo corporificado quando com o mundo simbólico.

Quando estamos trabalhando com contas, o sinal de igual é tomado como um sinal operacional (KIERAN, 1981), que apresenta o resultado da conta efetuada. Este tipo de interpretação para o sinal de igual é encontrado tanto em contas que são parte do mundo corporificado quanto nas que são parte do mundo simbólico. Em ambos os casos, o sinal de igual é colocado entre a conta a ser efetuada e o resultado dela obtido.

Ao lidarmos com uma equação, o sinal de igual deve ser visto como a igualdade entre os dois membros. Essa igualdade pode ser representada pelo equilíbrio entre os pratos de uma balança ou pela igualdade entre áreas, quando a equação é trabalhada por meio de alguma dessas corporificações. Ao usarmos uma equação do mundo simbólico, isto é, com o uso de símbolos e números que não podem ser representados por pesos ou áreas, o sinal de igual representa essa igualdade entre os membros.

No contexto das equações, a ação de resolvê-las pode, também, iniciar-se no mundo corporificado quando, por exemplo, a abordagem da balança é usada. Nesta abordagem, uma balança de dois pratos é usada para representar cada um dos membros de uma equação; o equilíbrio entre os pratos é tomado como a igualdade entre esses membros e são usados pesos de massa desconhecida para representar a incógnita e pesos cuja massa é conhecida para representar os números.

Outra abordagem que usa corporificações para a resolução de equações é aquela baseada no modelo geométrico, em que as áreas de duas figuras geométricas planas devem ser comparadas, para que se obtenha a medida de um dos lados de alguma das figuras (ou de ambas) – a incógnita. Figuras geométricas podem ser construídas, analisadas e observadas como uma corporificação para equações, e o aluno pode manipular tanto objetos físicos quanto representá-los por meio de desenhos.

Assim, a equação pode ser resolvida, por exemplo, por meio de decomposições das figuras, excluindo partes de mesma área de cada uma delas, restando áreas cujo cálculo recai em equações de avaliação, que são ditas (FILLOY e ROJANO, 1989) mais simples de resolver. Por exemplo, na **Figura 4** (extraída de FILLOY e ROJANO, 1989), a equação $Ax + B = Cx$ pode ser resolvida traduzindo-a para o modelo, como apresentado no Primeiro Passo, e comparando as áreas das duas figuras, como no Segundo Passo, obtendo, assim, uma nova equação, $(C - A)x = B$, uma equação de avaliação.

Não é possível usar pesos em uma balança ou áreas de figuras para representar todos os números que podem ser usados em uma equação, como números negativos e irracionais. Nestes casos, é necessário que os símbolos matemáticos passem a ser usados e uma equação torne-se um elemento do mundo simbólico. A incógnita é, então, representada por uma letra e é manipulada para que seu valor numérico seja encontrado.

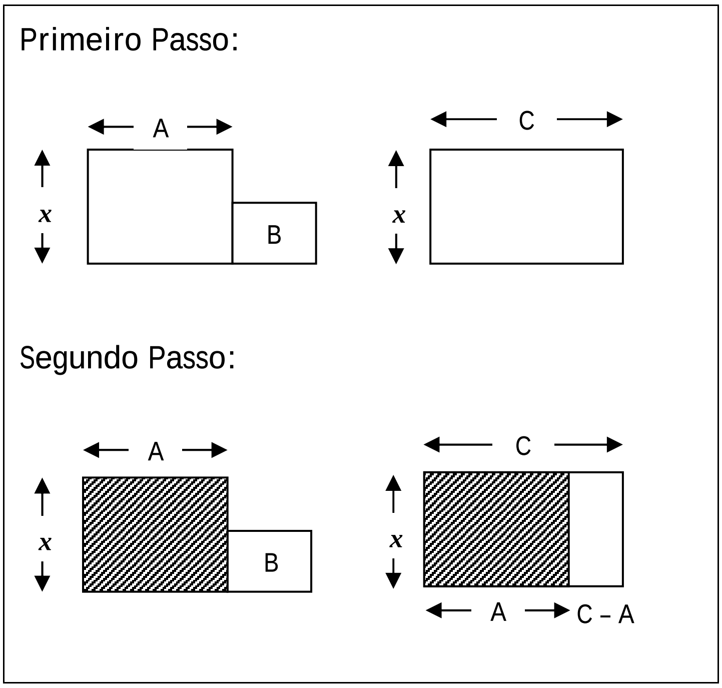


Figura 4: Uso do modelo geométrico para resolver uma equação.

Fonte: Filloy e Rojano (1989), p. 21.

Dessa forma, o estudo da resolução de uma equação pode iniciar-se no mundo corporificado e, depois, ser relacionado ao mundo simbólico, de forma que a incógnita, o sinal de igual e as operações efetuadas tenham significado simbólico. Alternativamente, a ação de resolver equações pode iniciar-se já no mundo simbólico, com um enfoque em operações inversas ou com explorações associadas a efetuar a mesma operação em ambos os membros. Devemos deixar claro que, para que abordagens mais simbólicas, como essas, sejam efetivas, é preciso que os alunos tenham uma certa familiaridade com o mundo simbólico.

Considerando os diferentes tipos de equações lineares, a resolução de equações de avaliação baseada em operações inversas, isto é, em desfazer as operações efetuadas sobre a incógnita, também aparenta ser baseada em contas, que são vistas como uma corporificação. Num primeiro momento, essa relação com contas é especialmente evidente em equações da forma $x+b=c$, com b e c naturais, ou mesmo em atividades em que a resolução pode ser feita por meio de um raciocínio de desfazer operações, mas não são necessariamente escritas fazendo uso de incógnitas, como, por exemplo, “Carla tinha alguns doces. Ela jogou um jogo e ganhou 2 doces. Agora ela tem 12 doces. Quantos doces ela tinha?”[28]. Nesses casos, o uso de fatos conhecidos também pode levar ao sucesso.

Quando as equações de avaliação são mais complexas, por exemplo, da forma $ax+b=c$, com a, b e c naturais, para resolvê-las com uso de operações inversas, é necessário reconhecer a ordem em que as operações foram efetuadas na incógnita, e, portanto, é necessário uma compreensão dessas operações que esteja relacionada com o mundo simbólico. É claro que esse tipo de equação também pode ser resolvida efetuando-se a mesma operação em ambos os membros, mas tal resolução não parece ocorrer naturalmente nesses casos, pois o hábito de desfazer operações é algo mais familiar, relacionado à resolução de contas sem a incógnita.

Em equações de manipulação, resoluções feitas efetuando a mesma operação em ambos os membros da equação se fazem necessárias. Mesmo fazendo uso da metáfora da balança, ou do modelo geométrico, esse tipo de resolução

---

[28] Extraído de Nunes et al (2001), p. 40.

precisa ser rapidamente associado ao mundo simbólico, pois a manipulação de símbolos, como a incógnita, é necessária. Além disso, é também essencial que se entenda que a incógnita é um número, para que se possa efetuar operações sobre ela e obter este valor, e que o sinal de igualdade representa a igualdade entre o primeiro e o segundo membros.

É importante salientar que, a nosso ver, esse princípio algébrico de efetuar a mesma operação em ambos os membros da equação tem suas raízes no mundo formal, porque ele é relacionado ao fato de o conjunto dos números reais ser um anel. Além disso, ele garante que as equações que compõem a resolução sejam equivalentes, isto é, tenham as mesmas raízes, e, portanto, garante também que as soluções encontradas sejam as da equação inicial.

Porém, a resolução de equações nem sempre é feita com base em um princípio algébrico. Muitas vezes, são usadas técnicas de resolução como “passar para o outro lado e mudar o sinal” e “passar para o outro lado dividindo”. Essas técnicas são procedimentos ligados ao mundo simbólico, que representam uma compressão de propriedades matemáticas, que pode ter ocorrido por meio da repetição. Quando o aluno entende essas propriedades, as técnicas podem se tornar parte de “proceitos”, permitindo uma abordagem flexível para a resolução de equações. Entretanto, para o aluno que ainda depende principalmente de atividades associadas ao mundo corporificado, como os “já-encontrados” vindos do contexto de contas, estas técnicas não são “proceitos”, elas não são vistas como procedimentos que são comprimidos em um processo compreendido como um todo para se resolver uma equação. São procedimentos usados linha a linha da resolução. Além disso, nem sempre há relação dessas técnicas com conceitos matemáticos ligados à resolução de equações, como a igualdade entre os membros. Assim, os procedimentos usados nas resoluções baseadas no uso das técnicas citadas não têm características nem de processo nem de conceito. Esse uso não colabora para que o aluno compreenda os métodos de resolução de equações como "proceitos" e, portanto, impede que ele tenha pensamento "proceitual".

Apesar de essas regras serem parte do mundo simbólico, pois símbolos são usados, as pesquisas discutidas no **Capítulo 1: Revisão de Literatura** sugerem que, freqüentemente, não é dado significado simbólico a essas regras. Aparentemente, a manipulação dos símbolos tem algum significado para o aluno, mas não aquele ligado ao mundo simbólico. Linchevski e Sfard (1991) sugerem que os alunos usam "regras sem razão", fazendo uma manipulação indiscriminada dos símbolos. Sleeman (1984) relaciona o uso de *mal-rules* à falta de significado aos símbolos algébricos e Freitas (2002) levanta a hipótese de que os alunos cometem erros ligados a frases como, por exemplo, "tirar de um lado e passar para o outro". Quando tais frases são examinadas, os verbos que as formam são associados com o mundo físico e com a resolução de contas simples. Esse pensamento é apropriado, por exemplo, na aprendizagem do princípio de subtração com números naturais, em que os alunos, literalmente, tiram um número de itens de uma coleção. Conjecturamos que os alunos que ainda não atribuíram significado do mundo simbólico para os procedimentos que usam verbos de ação têm a tendência de utilizar interpretações mais associadas com o mundo físico. Essa tendência poderia ser exatamente o fator que resulta uma grande diversidade de *mal-rules* e a alta freqüência com que elas são usadas.

Para a resolução de equações quadráticas de avaliação, também é possível desfazer as operações nela contida. Por exemplo, em equações da forma $x^2 = b$, com b real, o valor da incógnita pode ser obtido observando que os valores que satisfazem essa equação são $\sqrt{b}$ e $-\sqrt{b}$. Equações um pouco mais complexas, da forma $ax^2 = b$, com $a \neq 0$ e a e b reais, e da forma $a(x+b)^2 + c = d$, com $a \neq 0$ e a, b, c e d reais, exigem que seja observada a ordem das operações a serem desfeitas, mas o mesmo princípio pode ser usado.

No que se refere à resolução de equações quadráticas de manipulação, ela pode ser feita, por exemplo, por meio da fórmula de Bhaskara. Esta fórmula envolve o reconhecimento dos coeficientes de cada um dos termos da equação na forma chamada *desenvolvida*, $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ e a, b e c reais. Após esse reconhecimento, são feitos cálculos que envolvem tais coeficientes, para que seja encontrado o valor da incógnita.

A fórmula de Bhaskara é um procedimento do mundo simbólico, pois envolve a análise da equação, a transformação dela na forma desenvolvida, a identificação dos coeficientes numéricos com os símbolos que os representam e o cálculo das operações para a obtenção do valor procurado. Além disso, não é possível fazer relações dessa fórmula com o mundo corporificado. Mesmo as contas efetuadas ao usar esse procedimento estão no mundo simbólico.

Para que se compreenda a validade da fórmula de Bhaskara, é necessário fazer uma pequena demonstração, que envolve o procedimento conhecido como “completar quadrados”, a fim de obter um quadrado perfeito envolvendo os termos com a incógnita, e efetuar operações inversas (ou efetuar a mesma operação em ambos os membros) para “isolar” a incógnita e escrevê-la em função dos valores dos coeficientes a, b e c da equação escrita na forma desenvolvida. Por ser uma demonstração, ela envolve o mundo formal, usando um encadeamento lógico de idéias, que usam os procedimentos citados e levam à conclusão de que o valor da incógnita é igual a $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Equações quadráticas de avaliação podem ser resolvidas pela fórmula de Bhaskara, se forem manipuladas para serem escritas na forma desenvolvida. Por outro lado, equações quadráticas de manipulação podem ser resolvidas desfazendo-se as operações. Para isso, porém, é preciso que elas sejam manipuladas para que se obtenha equações na forma $a(x-u)^2 + v = 0$, que chamamos *canônica*, em que u e v são as coordenadas do vértice da parábola.

Essa manipulação também envolve o procedimento de completar quadrados. Esse termo deve ser somado nos dois membros, ou somado e subtraído de um mesmo membro da equação, para que a igualdade permaneça válida. Alternativamente, pode-se buscar as coordenadas do vértice da parábola e substituir na forma canônica, o que requer outra fórmula, a usada para encontrar as coordenadas do vértice. Feito isso, a equação, agora de avaliação, pode ser resolvida desfazendo-se as operações.

Essa transformação de uma equação de manipulação em uma equação de avaliação é parte do mundo simbólico, em que procedimentos são usados para modificar uma equação de forma que ela possa ser analisada de outro ponto de vista. É importante ressaltar que a manipulação feita é enraizada no mundo formal, pois ela só é válida pelas propriedades de anel que o conjunto dos números reais satisfaz.

Equações quadráticas escritas na forma fatorada, isto é, na forma $(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$, em que x_1 e x_2 são as raízes da equação, podem ser resolvidas pela fórmula de Bhaskara, se a multiplicação entre os parênteses for feita, mas podem também ser resolvidas de forma mais direta, fazendo cada um dos fatores da multiplicação igual a zero, o que resultaria em $x-x_1=0$ ou $x-x_2=0$, para obter as raízes $x=x_1$ e $x=x_2$. Esse procedimento, a nosso ver, está relacionado tanto com o mundo simbólico quanto com o mundo formal. Com o mundo simbólico, porque a manipulação de símbolos é necessária; com o mundo formal, porque esse procedimento é válido pela qualidade de o conjunto dos números reais ser um anel de integridade.

No Ensino Médio, o conjunto dos números reais não é estudado como um anel de integridade, mas a idéia de que uma multiplicação só pode ser igual a zero se um dos fatores for igual a zero é discutida. Acreditamos que esse é um entendimento ligado ao mundo formal, e, por isso mesmo, pode ser de grande dificuldade para os alunos.

Uma equação de manipulação pode ser rapidamente escrita na forma fatorada se as raízes forem inteiras ou racionais e se for possível encontrar dois números cuja soma é o oposto do coeficiente da incógnita linear e o produto seja igual ao coeficiente independente, isto é, $x^2 - (a_1 + a_2) \cdot x + a_1 \cdot a_2 = 0$. Esses números, a_1 e a_2 são as raízes da equação. Este também é um procedimento que é parte do mundo simbólico.

Quando um aluno enfrenta uma situação-problema, com características do mundo real, é possível analisar os dados do problema e traduzi-los com símbolos matemáticos e, então, construir uma equação cujas raízes sejam solução do problema. Dessa forma, estão fazendo uma transferência de informações do mundo corporificado para o mundo simbólico. A equação, então, fará o papel de ferramenta para a resolução da situação, traduzindo o problema por meio de símbolos.

É importante notar que, feita essa tradução, a relação com o mundo corporificado é suspensa, isto é, a resolução da equação é feita sem qualquer relação com a situação que a gerou. Ao obter as raízes da equação, é necessário que se volte para o problema, a fim de analisar se elas são ou não válidas como resposta.

Esses três momentos diferentes de resolver um problema ligado a uma situação real – a tradução dele em uma equação, a resolução da equação e a volta ao problema para dar a solução – podem acarretar dificuldades ao aluno, principalmente pelo fato de o segundo momento ser completamente desconectado do problema em si. Nenhuma das passagens da resolução da equação pode ser interpretada com base no problema ou em outros tipos de corporificação.

É nosso interesse analisar se os alunos percebem alguma dessas diferentes características de uma equação e se atribuem a ela significados presentes em algum dos mundos da Matemática, bem como se fazem relações entre as diferentes características e significados. Dessa forma, a questão norteadora desta pesquisa é revista, à luz dos Três Mundos da Matemática, no sentido de adaptá-la a este quadro teórico.

2.3.3. De volta à questão norteadora

Neste Capítulo, descrevemos os Três Mundos da Matemática, contrastando-os com algumas teorias de processo-objeto e com a perspectiva da cognição corporificada, justificando nossa escolha pela primeira. Analisamos as características de equações lineares e quadráticas presentes em cada um dos mundos, bem como nos diferentes métodos de resolução delas.

Com a escolha desse quadro teórico, juntamente com a análise das características de equações presentes nos mundos, vemos a necessidade de retomar a questão norteadora dessa pesquisa, apresentada na Introdução (página 18), a fim de também analisá-la considerando os Três Mundos da Matemática. Faremos, então, uma releitura dela, destacando características do quadro teórico que sejam relevantes a ela.

Quais são os significados que os alunos atribuem a equações e aos métodos de resolução que usam, e de quais experiências esses significados surgem?

Ao revisitarmos esta questão, precisamos considerar que estamos trabalhando com três diferentes mundos da Matemática e que supomos poder atribuir significado relacionado a cada um deles para conceitos matemáticos. Dessa forma, entendemos que os alunos podem dar significados a equações ou para os métodos de resolução que tenham raízes em algum dos três mundos da Matemática. Pretendemos, então, analisar não só qual ou quais significados os alunos atribuem a equações, mas que tipo de significado é atribuído. Isso nos conduz às seguintes questões:

- *Quais são os significados atribuídos à equação, ligados a cada um dos mundos corporificado, simbólico e formal?*
- *Quais são os significados atribuídos aos métodos de resolução de equações, ligados a cada um dos mundos corporificado, simbólico e formal? E como esses significados interferem na resolução de equações?*

Poderemos, assim, comparar os significados atribuídos à equação e os significados atribuídos aos métodos de resolução usados pelos alunos, a fim de verificar se são relacionados.

Em relação aos métodos de resolução de equações, nos interessa também observar se eles são vistos como "proceitos" pelos alunos ou não. Isso nos leva à seguinte questão de pesquisa:

- *Os métodos de resolução usados pelos alunos são compreendidos por eles como "proceitos"?*

Dessa forma, poderemos verificar se os alunos têm pensamento proceitual ao lidarem com a resolução de equações.

Para compreendermos de quais experiências surgem os significados dados tanto a equações quanto aos métodos de resolução usados pelos alunos, buscaremos os "já-encontrados" e os "a-encontrar" presentes no trabalho deles com equações e analisaremos como essas experiências atuam.

- *Qual é a interferência que os "já-encontrados" e os "a-encontrar" têm no trabalho dos alunos com equações?*

Com esta questão, podemos levantar influências positivas e negativas que "já-encontrados" e "a-encontrar" podem ter no aprendizado de equações, bem como durante a resolução delas.

Finalmente, ao analisarmos os significados dados a equações e aos métodos de resolução referentes aos Três Mundos da Matemática, bem como "já-encontrados" e "a-encontrar" que influenciam tanto os significados dados quanto o uso dos métodos de resolução, pretendemos analisar também relações feitas pelos alunos entre as diferentes características presentes em cada um dos mundos da Matemática e as inter-relações feitas pelos alunos. Dessa forma, temos uma última questão de pesquisa:

- *Quais conexões são feitas pelos alunos entre os Três Mundos da Matemática ao trabalharem com equações?*

Entendemos que conceitos matemáticos têm características que habitam todos os três mundos da Matemática e, conseqüentemente, é de grande importância que os alunos compreendam todas essas características e saibam conectá-las de forma a construir uma imagem de conceito mais rica e consistente.

A reinterpretação da questão norteadora com base no quadro teórico a ser usado gera nossas questões de pesquisa e possibilita que a análise dos dados seja direcionada à busca de respostas para elas. Isso será feito por meio de instrumentos de coleta de dados contendo tanto questões dissertativas, em que os alunos poderão se expressar sobre suas concepções de equação, da resolução de equações, bem como resolver equações, apresentando os métodos que usam e interpretar problemas que possam ser resolvidos com equações.

No próximo capítulo, **Procedimentos Metodológicos da Pesquisa**, apresentamos esses instrumentos e como eles foram concebidos, em colaboração com professores de Matemática de escolas públicas da Grande São Paulo, participantes de um projeto de formação de professores, e aplicados aos alunos desses professores, cursando a primeira e a segunda séries do Ensino Médio.

CAPÍTULO 3:

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

A elaboração dos instrumentos de coleta de dados para esta pesquisa foi parte integrante dos trabalhos de um projeto de pesquisa mais amplo, desenvolvido por um grupo de pesquisadores em Educação Matemática de uma universidade particular de São Paulo/SP. Este projeto, em andamento desde 2000, tem por objetivo a formação de professores de Matemática. Cinco professores da rede pública estadual de São Paulo e dois alunos de primeiro ano de cursos de Licenciatura em Matemática da Grande São Paulo participavam de encontros semanais com o grupo de pesquisadores que conta com um formador, encarregado de desenvolver a atividade do dia, e dois observadores, cujo papel é de coletar informações que serão analisadas pelo grupo de pesquisadores do projeto, a fim de gerenciar o andamento das atividades, o desenvolvimento do professor e da prática dele, e de buscar novas atividades e discussões, de acordo com o requerimento e desenvolvimento dos participantes. Durante os encontros semanais, são discutidos conteúdos que esses professores ensinam, do ponto de vista da Matemática, estratégias de ensino desses conteúdos, dificuldades que os alunos enfrentam no aprendizado, entre outros.

No momento em que iniciamos nosso trabalho, esses professores manifestaram interesse em encontrar meios de compreender as dificuldades que muitos alunos enfrentavam no aprendizado da Matemática e de ajudá-los a tentar superá-las. Isso se refletiu num interesse, por parte desses professores, de participar ativamente de uma pesquisa. Em vários momentos, nos trabalhos realizados anteriormente, os professores mencionaram problemas que seus alunos pareciam ter, no que diz respeito à resolução de equações e nas dificuldades que eles próprios encontravam em ensinar equação e a resolução dela, de modo a ajudar os alunos a superar esses problemas. Assim, o presente trabalho foi proposto e prontamente aceito pelos professores participantes do projeto, que passaram a ser professores colaboradores desta pesquisa.

A inserção de nossa pesquisa no projeto visava engajar os professores no processo de construção de instrumentos de coleta de dados, a fim de que eles pudessem fazer parte do desenvolvimento de uma pesquisa, bem como melhor entender os problemas que eles declaravam detectar nos alunos a respeito da resolução de equações, e buscar fazer dos alunos, para os quais eles lecionavam, os sujeitos desta pesquisa. Portanto, nossos objetivos foram diferentes dos outros trabalhos realizados junto ao mesmo grupo de professores, como, por exemplo, Manrique (2003), que visava levantar concepções desses professores sobre conceitos ligados à Geometria, e Rossini (2006) e Silva (2005), que buscavam fazer uma formação de professores por meio da elaboração de seqüências didáticas a serem trabalhadas com os alunos dos professores. Esta é a primeira oportunidade deles de se tornarem colaboradores de uma pesquisa.

Considerando que o quadro teórico que nos propomos usar para fazer a análise dos dados pretende trazer uma linguagem que possa ser livremente usada por professores e alunos de forma clara e simples, entendemos que a participação dos professores colaboradores na confecção dos instrumentos e na coleta de dados é de grande importância para nosso trabalho.

Durante sete encontros, em novembro e dezembro de 2004, discutimos equações e as resoluções delas sob pontos de vista tanto pedagógico quanto matemático, incluindo a discussão de relatos de pesquisa sobre o tema (DREYFUS e HOCH, 2004; FREITAS, 2002; LINCHEVSKI e SFARD, 1991), dando a eles oportunidade de estudar relatos de pesquisa pela primeira vez. A partir desse trabalho, os professores colaboraram com a elaboração dos instrumentos e na coleta de dados, tendo os próprios alunos como sujeitos. Durante as duas oficinas finais, em que os instrumentos foram decididos e elaborados, os dois alunos de cursos de licenciatura que participavam das oficinas não compareceram, portanto os instrumentos foram elaborados apenas por professores colaboradores e pesquisadora.

Juntos, decidimos elaborar três instrumentos de coleta de dados: um mapa conceitual (NOVAK, 1998), um questionário e entrevistas com alunos a serem selecionados. Esses instrumentos seriam trabalhados com as turmas de alunos de Ensino Médio que os professores colaboradores tivessem no início do ano letivo de 2005. Dois professores colaboradores – P1 e P2 – prontificaram-se a levar o trabalho para suas escolas: uma particular, na periferia de São Paulo/SP, e uma pública, em Guarulhos/SP.

Durante todo percurso do projeto pelo qual os professores colaboradores passaram, o início, e muitas vezes também o final, de um novo trabalho foram marcados pela aplicação de um mapa conceitual. Essa prática incentivou os professores colaboradores a se interessar em executar tal atividade com seus alunos, logo esta foi a primeira sugestão deles para o trabalho sobre equações.

De acordo com Novak (1998), o mapa conceitual é uma ferramenta que permite compreender conceitos e avaliar o entendimento deles pelos alunos. Assim, concordamos com os professores colaboradores que o mapa conceitual poderia servir como um instrumento pertinente para buscar as concepções dos alunos sobre equações.

Ao levantar palavras para elaborar o mapa, os alunos poderiam manifestar diferentes características, presentes em suas imagens de conceitos, que eles relacionam com equações e que não se refiram somente ao processo de resolução em si, ou aos elementos de uma equação, mas também a diferentes aspectos, como eventuais relacionamentos com a balança ou outras corporificações.

O segundo instrumento de coleta de dados sugerido pelos professores colaboradores foi um questionário que conteria questões em que os alunos poderiam expressar seu entendimento sobre equações de maneira geral, resolver algumas e usá-las para resolver problemas. Entendemos que este tipo de instrumento, composto por questões dissertativas, nos proporcionaria o registro do trabalho dos alunos, permitindo-nos verificar métodos de resolução por eles usados e sugerir dificuldades que eles possam ter. Nesse questionário, como as questões são abertas, acreditamos que seja possível levantar, também, caracteristicas presentes nos trabalhos dos alunos que sejam relacionados a cada um dos mundos da Matemática.

Por fim, entendemos que poderia ser necessário entrevistar alguns alunos a fim de melhor compreender o trabalho apresentado por eles no questionário, caso este gerasse dúvidas. Nas entrevistas, seguiríamos cada uma das questões do questionário, pedindo que os alunos explicassem seus procedimentos e argumentos com mais clareza. Outras questões também poderiam ser feitas no decorrer das entrevistas, a fim de levantarmos mais informações sobre o aprendizado do aluno no que diz respeito a equações e à resolução delas.

3.1. Os participantes da pesquisa

Para determinar as turmas com as quais o trabalho seria desenvolvido, e para discutir a aplicação dos instrumentos de coleta de dados, foram realizadas, em fevereiro de 2005, mais três oficinas com os professores colaboradores.

Dos cinco professores colaboradores que fizeram parte da elaboração dos instrumentos, dois haviam se mostrado interessados em fazer a coleta de dados com suas turmas, os professores mencionados neste trabalho como P1 e P2.

Como o professor P2 não lecionaria para alunos de Ensino Médio naquele ano, ele convidou para participar das oficinas outro professor, que chamaremos P3, que trabalha na mesma escola que P2. O professor P3 prontificou-se em coletar os dados nas turmas com as quais trabalharia naquele ano. Foram, então, escolhidas três turmas, como mostra a **Tabela 1**: a do professor P1, de segunda série do Ensino Médio de uma escola particular situada em São Paulo/SP, com 20 alunos, que indicaremos como SP2; e duas do professor P3, uma de primeira e outra de segunda série do Ensino Médio de uma escola pública de Guarulhos/SP, que chamaremos respectivamente GU1, com 32 alunos e GU2, com 28 alunos. Vale destacar, como indicado na **Tabela 1**, que, no ano anterior, o professor P1 não foi o professor da turma SP2, o professor P2 lecionou Física para os alunos da turma GU2 e o professor P3 trabalhou com a turma GU1. Como cada um dos instrumentos foi aplicado em dias diferentes, o número de alunos presentes variou. O número apresentado na **Tabela 1** representa o total de alunos em cada turma.

Tabela 1: Descrição das turmas

Turma	Cidade	Série	Professor anterior	Professor atual	Quantidade de alunos
GU1	Guarulhos	1ª série	P3	P3	32
GU2	Guarulhos	2ª série	P2 (Física)	P3	28
SP2	São Paulo	2ª série	Edineide, não participa do projeto	P1	20

A turma SP2 é de uma escola particular da periferia de São Paulo, cujo diretor e alguns professores mostram-se preocupados com os problemas que os alunos da escola enfrentam, tanto de aprendizagem quanto de disciplina. A turma SP2 conta com alunos que estudam na escola desde o Ensino Fundamental e também com alunos recém-transferidos de escolas públicas. O nível de aproveitamento deles, segundo os resultados obtidos com uma avaliação feita pela escola, é mediano. No ano anterior, o grupo era formado por 40 alunos, divididos em duas turmas, e causava problemas de disciplina para os professores. Por esta razão, os alunos foram, de acordo com o professor P1, “pressionados” por alguns professores para não fazer matrícula no ano seguinte. Deles, restaram os 20 alunos que compõem a turma SP2.

As turmas GU1 e GU2 são de uma mesma escola pública, em Guarulhos/SP, que já foi escola modelo na comunidade. O rendimento de ambas as turmas, em Matemática, de acordo com o professor P3, é mediano. Os alunos da turma GU1, em sua maioria, são alunos do professor P3, nessa mesma escola, desde a sétima série do Ensino Fundamental. Os alunos de ambas as turmas freqüentam esta ou alguma escola pública desde as primeiras séries do segundo ciclo do Ensino Fundamental. Em particular, a turma GU2 estava tendo problemas de disciplina com o professor P3 porque, de acordo com esse professor, eles estavam acostumados com métodos de trabalho diferentes, em que eles deveriam apenas “seguir o modelo”, e rejeitaram as mudanças instituídas pelo professor P3, que tinha hábito de levar aos alunos atividades de questionamento e discussão.

A aplicação dos instrumentos foi feita logo no primeiro mês de aula, sendo assim, sem influência do trabalho desenvolvido nas séries em que os alunos estavam. Os professores colaboradores P1 e P3 ficariam encarregados de desenvolver todo o trabalho de aplicação dos instrumentos nas turmas que lecionariam.

3.2. Mapa conceitual

O primeiro dos instrumentos de coleta de dados executado pelos professores foi o mapa conceitual. A sessão ocorreu em uma aula de 100 minutos e foi gerenciada pelo professor da sala, que instruía-os a como proceder em cada uma das fases do mapa conceitual. Estavam presentes 32 alunos na turma GU1, 28 na turma GU2 e 18 na turma SP2. A pesquisadora e outro pesquisador do projeto participaram como observadores, a fim de colher as palavras ditas pelos alunos e observar a confecção de um mapa conceitual por um grupo de alunos. Outros professores colaboradores do projeto também participaram como observadores, para que pudessem acompanhar o trabalho e discutir suas impressões posteriormente, nos encontros. Para nos referirmos aos mapas conceituais elaborados, usaremos um código contendo o código da turma, a letra M e o número do subgrupo da turma. Por exemplo, o mapa conceitual do subgrupo 3 da turma SP2 é decodificado como SP2M3.

O processo de elaboração do mapa conceitual é constituído de cinco fases.

Fase 1: Tempestade de idéias[29]

Na primeira fase, o professor que está gerenciando o trabalho escreve uma palavra na lousa, no nosso caso “EQUAÇÃO”, e pede que cada aluno diga pelo menos uma palavra que lhe vem à mente quando ele a lê. Todas as palavras que os alunos dizem são escritas na lousa, em posições aleatórias. Esta coleta só termina

[29] Em Inglês, *brainstorming*.

quando o professor garante que todos os alunos contribuíram com pelo menos uma palavra. Tal exigência garante que a tempestade de idéias seja representativa do grupo todo. Notamos que não só a palavra que a inicia, mas também as que são ditas posteriormente influenciam os alunos em sua escolha.

Depois dessa fase, os alunos são separados em grupos de quatro ou cinco para desenvolverem todas as outras fases do mapa conceitual. Os alunos só têm conhecimento do que devem fazer na próxima fase quando finalizam a que estão executando.

Fase 2: Categorização

As palavras que estão na lousa devem ser separadas em pelo menos três categorias diferentes. Todas as palavras devem ser usadas e cada uma deve pertencer a exatamente uma categoria.

Fase 3: Denominação

Cada uma das categorias deve ser nomeada, de acordo com a escolha das palavras presentes em cada uma delas.

Fase 4: O Mapa

Elaboração de um esquema ou fluxograma relacionando os nomes dados para cada categoria com a palavra Equação.

Fase 5: Texto

Elaboração de uma frase ou pequeno texto que explique o esquema elaborado na Fase 4.

O mapa conceitual descrito neste trabalho não segue as fases exatamente da mesma forma em que foram sugeridas por Novak (1998), mas é a versão do mapa conceitual usada pelo projeto de pesquisa, desde 2000, tendo sido, inclusive, principal instrumento de coleta de dados em Manrique (2003).

3.3. Questionário

O questionário foi elaborado com o objetivo de que os alunos explicassem o entendimento que eles têm de equações, do resultado e da utilidade delas; que fosse possível observar o trabalho dos alunos ao resolver equações e problemas que as envolvessem. As questões foram elaboradas ou escolhidas principalmente pelos professores colaboradores, com o auxílio da pesquisadora.

No início do trabalho com os professores sobre equações, foi pedido que eles respondessem quatro questões, apresentadas no **Quadro 1**.

Essas questões foram inspiradas, principalmente, no relato de pesquisa de Dreyfus e Hoch (2004), em que eles perguntam o que é uma equação a alunos de Ensino Médio. Entendemos que essas questões seriam pertinentes no trabalho com os professores, para que eles fizessem uma reflexão sobre o próprio entendimento de equações, o uso que delas fazem e como trabalham esse conteúdo em sala de aula.

Questão 1:	O que é equação?
Questão 2:	Para que serve uma equação?
Questão 3:	Dê um exemplo de equação.
Questão 4:	O que significa o resultado de uma equação?

Quadro 1: Enunciado das Questões de 1 a 4 do Questionário

A **Questão 1** foi apresentada aos professores colaboradores para que eles explicitassem a própria concepção de equação e refletissem sobre ela e sobre os diversos tipos de equação, inclusive os que não são foco no Ensino Médio. A **Questão 2**, para que eles discutissem o uso de equações como ferramentas para a resolução de problemas. As respostas para a **Questão 3** poderiam mostrar com quais equações esses professores usualmente trabalham em suas aulas. Por fim, a **Questão 4** poderia trazer uma discussão sobre o significado do resultado da equação estar ligado ao problema de onde ela foi gerada; como analisar os resultados obtidos para decidir qual é a solução para o problema, por exemplo quando a solução representa uma área e a equação tem duas raízes, sendo uma descartada por ser negativa; ou então quando a solução deve ser um número natural, mas a raiz da equação não é, e deve ser analisada para responder o problema.

Os professores colaboradores sugeriram que essas mesmas questões fizessem parte do questionário, pois acreditavam que elas seriam úteis para obter dos alunos o que eles expressam entender por equação. Em resumo, tínhamos por objetivo verificar como o aluno descreve seu entendimento de equação, como vê sua utilidade, seu resultado e se o exemplo dado seria de equação e se estaria de acordo com a resposta da primeira questão. Entendemos que talvez não fosse possível alcançar os mesmos objetivos que durante o trabalho com os professores, principalmente para a Questão 4 "O que significa o resultado de uma equação?", por não ter sido planejada uma discussão com os alunos, como foi o caso com os professores colaboradores. Porém, como eles eram os principais responsáveis pela elaboração das questões, decidimos aceitar a sugestão, que poderia trazer dados pertinentes para esta pesquisa.

Essas questões poderiam, inclusive, trazer dados que mostrassem se os alunos observam a existência de características de equações que fazem parte, pelo menos, dos mundos corporificado e simbólico. Ou ainda, se relacionam o conceito de equação ao procedimento de resolvê-la, como encontrado por Dreyfus e Hoch (2004).

Questão 5:	Resolva a equação $t^2 - 2t = 0$, no conjunto dos números reais, explicando como você chegou ao resultado.
Questão 6:	Resolva a equação $(y-3)\cdot(y-2) = 0$, no conjunto dos números reais, explicando como você chegou ao resultado.

Quadro 2: Enunciado das Questões 5 e 6 do Questionário

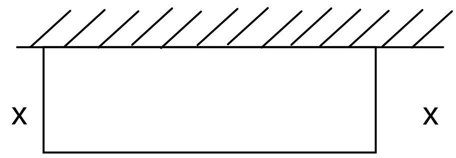
As **questões 5 e 6** apresentam equações a serem resolvidas, como apresentado no **Quadro 2**.

Como as turmas a serem escolhidas para participar do experimento seriam de Ensino Médio, os professores colaboradores sugeriram incluir no questionário duas equações quadráticas para que pudéssemos observar os métodos usados pelos alunos para sua resolução. Com base nos relatos de pesquisa discutidos durante as oficinas e em experiências anteriores da pesquisadora com estudos sobre a resolução de equações, escolhemos uma equação que poderia ser fatorada, de forma a obter uma multiplicação igual a zero, e outra equação que já estaria nessa condição. Verificaríamos, assim, se os alunos usariam, em ambas as situações, a idéia de que, quando uma multiplicação é zero, um dos fatores é necessariamente igual a zero. Essa idéia é uma característica de equações, presente no mundo formal, que pode também ser vista como um procedimento, muitas vezes familiar aos alunos. Logo, gostaríamos de saber se esse procedimento lhes é familiar e se a ele é relacionado significado simbólico ou se é apenas um tipo de procedimento usado em situações como essa.

Outros tipos de resolução para essas equações poderiam ser apresentados pelos alunos, o que nos possibilitaria observar quais seriam eles e quais significados seriam dados pelos alunos aos diferentes procedimentos de resolução de equações quadráticas que eles usariam. E mais, poderíamos buscar subsídios para concluir se os métodos usados são vistos como “proceitos” que resultam no mesmo efeito ou se são apenas procedimentos sem significado, que devem ser seguidos, como afirmam Linchevski e Sfard (1991).

Para a **Questão 7**, os professores colaboradores sugeriram um problema que pudesse ser resolvido por uma equação quadrática, a fim de observarmos como o aluno resolveria esse problema, se montaria essa equação e, em caso afirmativo, como a resolveria. Para isso, foi escolhido por eles um problema conhecido como o "problema da cerca"[30], apresentado no **Quadro 3**.

Questão 7: Ulisses gosta de cultivar flores. Como no quintal de sua casa há um espaço disponível, junto ao muro do fundo, ele deseja construir um pequeno canteiro retangular e, para cercá-lo, pretende utilizar os 40 m de tela de arame que possui. Como ainda está indeciso quanto às medidas, fez o seguinte desenho:



Quais as medidas dos lados do canteiro para que sua área seja de 200 m^2?

Quadro 3: Enunciado da Questão 7 do Questionário

Esta questão apresenta uma situação real que deve ser representada por meio de uma equação e só então resolvida. Por isso, entendemos que ela pode trazer elementos tanto do mundo corporificado quanto do mundo simbólico, podendo ser de grande dificuldade para os alunos, pois exige a tradução da situação real em símbolos da Matemática, a manipulação desses símbolos, sem qualquer ligação com a situação da qual eles foram desencadeados, e a volta ao problema, para analisar a solução de acordo com ele. Nas estratégias dos alunos, buscaremos indícios de se e como eles fazem a relação entre esses mundos.

[30] Extraído de *Experiências Matemáticas*, 6ª série, p. 327.

Como os professores acreditavam que os alunos usariam a fórmula de Bhaskara para resolver ambas as equações das questões 5 e 6, e gostaríamos de observar o entendimento deles a respeito do princípio de multiplicação por zero, sugerimos que fosse incluída a **Questão 8**, em que é dada uma resolução e pede-se ao aluno que a discuta e comente, como apresentado no **Quadro 4**.

Questão 8: Para resolver a equação $(x-3)\cdot(x-2)=0$ no conjunto dos números reais, Joãozinho respondeu em uma linha:
“ $x=3$ ou $x=2$ ”
A resposta está correta? Analise e comente a resposta de Joãozinho.

Quadro 4: Enunciado da Questão 8 do Questionário

Esta questão é específica para uma situação, em que pretendíamos verificar se os alunos compreendem os conceitos matemáticos subjacentes a um determinado procedimento usado para resolver este tipo de equação.

Mesmo assim, com ela, poderíamos, também, obter informações sobre como os alunos compreendem a resolução apresentada, se eles realmente dão prioridade à fórmula de Bhaskara, como afirmam os professores, ou se veriam tal resolução como um “proceito” cujo resultado tem o mesmo efeito que o uso da fórmula.

A resposta para essa questão exigiria, também, que o aluno analisasse a resolução apresentada, questionasse o que foi feito e buscasse meios para justificar a validade da resolução ou propriedades matemáticas que a invalidassem. Sendo assim, poderíamos observar se o meio de validação usado seria o de algum dos Três Mundos da Matemática.

Por fim, sugerimos uma última questão, que envolveria a elaboração, pelos alunos, de uma situação-problema que pudesse ser resolvida com uma equação. Os professores colaboradores sugeriram que os alunos pudessem escolher entre as equações que eles resolveriam nas questões 5 e 6. Ela é apresentada no **Quadro 5**.

Questão 9:	Escolha uma das equações $t^2 - 2t = 0$ ou $(y-3)\cdot(y-2)=0$, no conjunto dos números reais, e "bole" uma situação-problema que possa ser resolvida com ela.

Quadro 5: Enunciado da Questão 9 do Questionário

Essa questão visa motivar a inter-relação entre os mundos corporificado e simbólico, porém, de forma inversa à da Questão 7. Nela, os alunos deveriam encontrar uma situação que pudesse ser representada pela equação que eles já possuíam e já haviam resolvido.

Essa questão, assim como a Questão 7, poderia mostrar o quão familiares os alunos são com situações-problema que podem ser resolvidas por meio de equações quadráticas e com relações entre os mundos corporificado e simbólico.

Vale destacar que nenhum dos professores colaboradores expressou interesse ou necessidade de resolver as questões do questionário antes de levá-lo para os alunos. Dessa forma, eles não observaram de antemão que ambas as equações apresentadas na questão são compostas por um produto igual a zero, e que seria muito difícil encontrar uma situação real cujo objetivo fosse obter um produto nulo.

Cada uma das questões do questionário foi apresentada separadamente para os alunos, em folhas de tamanho A5, como apresentado no **Apêndice B**, página 311. A intenção foi de evitar que eles modificassem suas respostas, baseando-se nas questões posteriores, como, por exemplo, a Questão 8, que poderia influenciar a resolução da Questão 6.

A aplicação foi feita pelo professor da turma, em uma aula de 100 minutos. Estavam presentes 32 alunos na turma GU1, 26 na turma GU2 e 19 na turma SP2. Os alunos de cada sala foram colocados em ordem alfabética para que recebessem um número nessa ordem. Dessa forma, vamos nos referir ao aluno número 8 da turma GU1 como aluno GU108. Tal decodificação é usada para todos os instrumentos de coleta de dados, menos para o mapa conceitual, em que não há necessidade de nos referirmos a um aluno específico, já que o trabalho foi feito em grupos.

3.4. Um novo instrumento: a atividade de resolução de equações

Após a aplicação dos questionários, fizemos uma análise preliminar das respostas dadas àquelas questões pelos alunos, a fim de escolhermos os que participariam das entrevistas. Vimos, nessa análise, que grande parte dos alunos não resolvem as equações, mas, sim, fazem tentativas de explicar por que o primeiro membro da equação $t^2 - 2t = 0$ deveria ser igual a zero e por que o produto $(y-3)\cdot(y-2)=0$ é igual a zero (veja **Capítulo 4: Apresentação e Análise dos Dados**, páginas 190 e 204). Por isso, entendemos que as questões de resolução de equações que constavam no questionário não eram suficientes para que pudéssemos fazer um levantamento dos métodos usados pelos alunos para resolver equações quadráticas, suas possíveis dificuldades ou erros cometidos. Principalmente, não era possível levantar os "já-encontrados" que esses alunos usam em suas resoluções.

Além disso, as equações quadráticas do questionário não eram diversificadas o suficiente para obtermos evidências de como os alunos resolveriam qualquer tipo de equação quadrática, isto é, se espontaneamente resolveriam buscando uma multiplicação igual a zero, se usariam a fórmula de Bhaskara ou qualquer outro meio que eles conhecessem.

Ainda, o questionário continha apenas equações quadráticas, que, muitas vezes, são resolvidas apenas por meio de fórmulas, o que dificultaria verificar se os alunos as compreendem como "proceitos" ou somente como procedimentos que devem ser usados naquela situação.

Elaboramos, então, uma *atividade de resolução de equações*, contendo equações quadráticas, mas também lineares, pois, dessa forma, poderíamos observar também os métodos usados pelos alunos para resolver estas últimas, e se esses métodos influenciam os de resolução de quadráticas, isto é, se serviriam como "já-encontrados" para outro tipo de equação.

Escolhemos as equações, de forma que as raízes fossem inteiras ou racionais, para que as possíveis dificuldades em lidar com números não tivessem grandes interferências nem impedissem que os alunos completassem a atividade, que era constituída de três equações lineares e quatro quadráticas, apresentadas no **Quadro 6**.

$5x-3=8$	que pode ser resolvida desfazendo as operações.
$3x-1=3+x$	por conter a incógnita em ambos os membros.
$2m=4m$	sugerida pelo professor P1 como de grande dificuldade entre os alunos dele.
$a^2-2a-3=0$	uma equação completa, "pronta" para o uso da fórmula de Bhaskara.
$r^2-r=2$	uma equação completa, mas que não está escrita na forma usual para a aplicação da fórmula.
$3l^2-l=0$	com o termo independente nulo.
$m^2=9$	com o termo linear nulo, o que nos ajudaria a verificar se a fórmula é usada também em situações desse tipo.

Quadro 6: Equações que compõem a atividade de resolução de equações

Com esta atividade, temos por objetivo fazer um levantamento dos diferentes métodos de resolução de equações, tanto lineares quanto quadráticas, usados pelos alunos, e verificar os "já-encontrados" e os "a-encontrar" que possam surgir durante o uso desses métodos. Além disso, pretendemos analisar se tais métodos são compreendidos pelos alunos como “proceitos”, possibilitando flexibilidade de uso.

Esta atividade também foi aplicada pelo professor da turma, numa aula de 100 minutos. Estavam presentes 18 alunos na turma SP2, 22 na turma GU2 e 28 na turma GU1.

3.5. Entrevistas

Analisando as respostas dadas pelos alunos ao questionário e à atividade de resolução de equações, escolhemos, para as entrevistas, aqueles cujas respostas precisavam de esclarecimentos, ou cujas resoluções para as equações foram idiossincráticas, e gostaríamos de entender como foram feitas e por que os alunos acreditavam que elas eram válidas. Foram escolhidos oito alunos da turma GU1, cinco alunos da turma GU2 e sete alunos da turma SP2.

Caracterizamos as entrevistas como semi-estruturadas pois seguimos cada uma das questões do questionário e equações da atividade, pedindo que os alunos explicassem os procedimentos usados, bem como os motivos pelos quais eles acreditavam que aqueles procedimentos eram válidos e poderiam ser usados naquela equação específica. Além disso, perguntamos aos alunos se eles se lembravam de como foi o aprendizado que tiveram de equações e como o professor explicou a resolução de equações. Com isso, poderíamos obter alguns indícios sobre "já-encontrados" que esses alunos usaram ao aprender equações.

As entrevistas ocorreram em dia letivo, durante o horário de aula. O aluno entrevistado foi retirado da aula que assistia para participar da entrevista. Cada uma delas teve duração de aproximadamente 30 minutos. As entrevistas foram áudio-gravadas e estavam presentes apenas o aluno entrevistado, a pesquisadora, que fazia as questões e pedia explicações mais detalhadas, e um observador, também pesquisador do projeto, que faria anotações a serem usadas como auxílio na transcrição e na análise das entrevistas. Quando apresentamos trechos delas, **A** refere-se à fala do aluno e **PR**, à fala da pesquisadora.

As entrevistas foram guiadas de acordo com as respostas que os alunos deram para as questões do questionário e para as resoluções apresentadas na atividade de resolução de equações. Em geral, foi pedido a eles que explicassem melhor suas respostas para as questões de 1 a 4 e cada uma das passagens da resolução das equações das questões 5 e 6 bem como da atividade de resolução de equações. Na Questão 7, foi pedido que o aluno explicasse o raciocínio que o levou àquela resolução e por que ele acreditava que ela era válida. Nas questões 8 e 9, pedia-se que ele justificasse sua resposta, caso não o tivesse feito na folha. Por fim, foi pedido ao aluno que contasse como foi o seu aprendizado de equações e da resolução delas, caso ele lembrasse. Como exemplo, apresentamos, no **Apêndice C**, página 317, as respostas do aluno SP211, com as questões que fizemos em cada uma.

3.6. *Análise dos dados*

Para analisar os dados coletados, faremos, inicialmente, um levantamento dos tipos de respostas dadas pelos alunos para cada instrumento. Nos mapas conceituais, observaremos principalmente as palavras vindas das tempestades de idéias, bem como as frases que explicam o mapa conceitual. No questionário, observaremos os diferentes tipos de resposta para as questões e os métodos de resolução apresentados para as equações, da mesma forma que para a atividade de resolução de equações.

Após fazer um levantamento dos tipos de respostas, faremos uma classificação delas, a partir dos dados coletados. Essa classificação será analisada, inicialmente, fazendo uma comparação com os dados obtidos nas diferentes pesquisas que compõem nossa **Revisão de Literatura**. Em seguida, faremos uma análise à luz do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, observando diferentes características que possam aparecer no trabalho dos alunos. Por fim, levantaremos possíveis "já-encontrados" e "a-encontrar" que permeiam as respostas e métodos de resolução de equações apresentados.

CAPÍTULO 4:

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Apresentamos neste capítulo a análise das respostas dos alunos para cada um dos instrumentos de coleta de dados, feita à luz dos Três Mundos da Matemática, destacando os diferentes procedimentos usados pelos alunos para resolver as equações e as justificativas dadas por eles para o uso desses procedimentos. Procuramos também levantar os "já-encontrados" e os "a-encontrar" que podem ter influenciado o trabalho desses alunos de alguma forma.

Os dados coletados com as entrevistas servem de suporte para elucidar dúvidas que surgem durante a análise dos dados ou mesmo em relação às respostas dos alunos. Em alguns momentos, apresentamos trechos dessas entrevistas, a fim de exemplificar ou esclarecer nossas afirmações. A cada questão, relacionamos o trabalho dos alunos nela apresentados com as análises das questões anteriores, caso entendamos que elas se complementam.

4.1. Mapas conceituais

O mapa conceitual em nossa pesquisa serve como um meio de buscarmos entender as concepções dos alunos participantes sobre equação. Ao levantar palavras que consideram relacionadas à equação e organizá-las em categorias, eles nos mostram características que associam com uma equação, seus elementos e possíveis relações com outras situações.

Como os alunos são livres para apresentar quaisquer palavras que julgarem relacionadas à equação, na sessão do mapa conceitual, acreditamos que é possível levantar características que podem estar presentes nas imagens de conceito de equação de grande parte desses alunos. Para levantar essas características, analisaremos, principalmente, as palavras que surgiram nas tempestades de idéias das três classes e as frases que resumem os mapas conceituais. Traremos, também, alguns dados sobre a categorização feita de algumas palavras dentro dos subgrupos, quando for necessário, para analisarmos a interpretação feita dessas palavras pelos alunos.

4.1.1. A confecção do mapa

Durante a sessão do mapa conceitual, as regras de cada uma das fases foram apresentadas para os alunos pelo professor da sala, que gerenciava a sessão. Muitas vezes, entretanto, os alunos acabavam por não segui-las, dando ao mapa características próprias do grupo.

A categorização das palavras deveria ser feita usando todas as palavras da tempestade de idéias, de forma que cada palavra estivesse em exatamente uma categoria. Isso nem sempre ocorreu. Em muitos subgrupos, nem todas as palavras vindas da tempestade de idéias foram usadas. Há subgrupos que não usam algumas palavras, talvez pela dificuldade de obtê-las todas da lousa, ou por não terem percebido a falta delas (veja no **Apêndice A**, página 309, um exemplo de como a lousa pode ficar depois da tempestade de idéias). Há, também, subgrupos que usam algumas palavras mais de uma vez.

No que se refere ao mapa, alguns subgrupos escolheram por fazer desenhos ou símbolos matemáticos ao invés de elaborar um mapa que contivesse os nomes das categorias. As frases, algumas vezes, ao invés de serem textos sobre as categorias e ligações apresentadas no mapa, explicam a elaboração do mapa ou a categorização das palavras.

Essas alterações são interpretações dos próprios alunos para a atividade que estavam realizando. Muitas vezes, elas trouxeram informações auxiliares, que mostram dúvidas, preocupações ou mesmo outros conhecimentos adquiridos pelos alunos. Assim, entendemos que as modificações efetuadas por cada subgrupo acrescentam características próprias dos alunos e da concepção deles sobre equação.

4.1.2. Tempestades de idéias e frases

Ao analisarmos as tempestades de idéias das três turmas, vemos algumas similaridades no que diz respeito às palavras que foram ditas pelos alunos. Em alguns casos, as mesmas palavras ocorrem nas três tempestades de idéia; em outros, sinônimos de palavras que surgem em uma turma aparecem nas outras. As listas das palavras obtidas em cada turma estão no **Anexo A**, página 333.

Tanto as palavras quanto as frases elaboradas pelos alunos nos mapas conceituais podem ser classificadas em quatro categorias gerais: *Equação como conta*, *A Matemática e a Escola*, *Sentimentos* e *Outros*. A **Tabela 2** apresenta a distribuição, em cada uma das categorias, das frases apresentadas pelos subgrupos nos mapas conceituais. Os mapas conceituais de cada turma estão no **Anexo B**, página 337.

Equação como conta

Nas tempestades de idéias das três turmas surgem palavras como "adição", "multiplicação", "potenciação", que representam operações a serem efetuadas durante a resolução de uma equação. Surgem também palavras que representam a incógnita e o resultado de uma equação, como, por exemplo, "incógnita", "letra", "x e y", "variável" e "valores numéricos". Vale destacar que "letra" aparece nas três turmas, enquanto "incógnita" aparece apenas na turma SP2, "x e y" na GU1 e "variável" na turma GU2.

Tabela 2: Categorização dos mapas conceituais

Categoria	**Mapa**	
Equação como conta	GU1M3	GU2M3
	GU1M4	
A Matemática e a Escola	GU1M1	GU1M7
	GU1M2	GU2M2
	GU1M6	GU2M1
Sentimentos	SP2M1	SP2M4
	SP2M2	SP2M5
	SP2M3	GU2M6
Outros	GU1M5	GU2M5
	GU1M8	GU2M7
	GU2M4	GU2M8

As frases dos mapas que formam a categoria *Conta* indicam que alguns dos alunos participantes dessa pesquisa têm uma concepção de equação como contas, operações. Por exemplo, a frase do subgrupo 3 da turma GU1 explicita o entendimento deles de equações da seguinte forma:

> "Quando nossos pais vão fazer as compras escolares: <u>caderno</u>, <u>lápis</u>, <u>borracha</u>. Eles sempre usam alguma EQUAÇÃO, como: <u>divisão</u>, <u>subtração</u> e <u>adição</u>. (...) Uma coisa é certa, toda <u>equação</u> tem <u>soma</u> e <u>resultado</u>."
> (Parte da frase do mapa conceitual GU1M3. Veja mapa completo na página 340)

Como vemos nessa frase, esses alunos entendem que equações podem ser uma operação, como divisão, subtração e adição. Essa concepção de equação é diferente daquelas levantadas por Dreyfus e Hoch (2004), pois não há qualquer indício de que esse grupo enfatiza algum tipo de estrutura presente em uma equação. A ênfase, nesse caso, é nas operações e no resultado.

A presença, nas tempestades de idéias, de palavras como “incógnita” e “letra” sugerem que existem alunos, entre esses, que percebem também a existência de uma incógnita em equações. Este dado é importante porque, do ponto de vista de que a resolução de equações representa a busca de um valor para a incógnita que torne a equação verdadeira, a incógnita é um fator essencial em uma equação. Entretanto, ela não é enfatizada nas frases apresentadas com o mapa conceitual.

Ao observar as categorias em que os subgrupos separam as palavras que representam a incógnita, vemos que, de forma geral, essas palavras estão dentro de categorias denominadas “Símbolos”, “Sinais”, “Elementos de uma equação”, “Sistema”, “Teoremas” ou “Matemática”. Exceções são feitas na turma GU2, em que um subgrupo coloca a palavra “variável” na categoria “Física” e outro na categoria “Grupo de palavras de outras matérias”, talvez unindo a variável à Física, em que as funções são usadas com freqüência. Ao posicionarem a incógnita em categorias chamadas “Símbolos”, esses alunos podem estar dando a ela uma característica do mundo simbólico, tomando-a como um símbolo presente em equação. Como as outras palavras dessa categoria são, na maior parte das vezes, por exemplo, “colchetes”, “chaves” ou “parênteses”, acreditamos que eles podem estar vendo a incógnita como um símbolo, mas não dando a ela significado simbólico. Além disso, ao relacioná-la, e também a variável, a outras disciplinas, entendemos que ela pode ter status de “já-encontrado” em outras disciplinas, não só na Matemática. É possível, inclusive, que a própria equação seja “já-encontrado” em outras disciplinas.

Na turma GU2, a palavra "letra" foi colocada na categoria "Grupo de palavras não aproveitáveis" por um dos subgrupos, talvez porque os alunos desse subgrupo tomaram a palavra não como a incógnita, mas como as letras que são discutidas em aulas como as de Português.

A Matemática e a Escola

Outra característica comum às tempestades de idéias das três turmas é o aparecimento de palavras relacionadas a conteúdos da Matemática aprendida na escola. As palavras que aparecem em cada turma não são necessariamente as mesmas. Por exemplo, "cosseno", "gráficos" e "regra de três", na turma SP2; "aritmética", "circunferência" e "expressão", na turma GU1; e "fatoração", "homotetia" e "matrizes", na turma GU2 (veja todas as palavras de cada uma das turmas no **Anexo B**, página 337). Nem todas essas palavras estão intimamente ligadas à equação, mas podem ter sido trazidas à tona porque os alunos vêem alguma relação delas com equação, ou com alguma palavra dita anteriormente.

Mesmo assim, algumas das frases apresentadas nos mapas conceituais enfatizam a equação como conteúdo específico da Matemática, como, por exemplo, a apresentada por um subgrupo de alunos da turma GU1:

> "SÍMBOLOS
> Os símbolos vem sendo usados desde a época dos homens antigos todos os símbolos representam alguma coisa e são usados diariamente na matemática principalmente em contas.
> MATÉRIA
> A matéria é usada na nossa vida é tão importante se a gente quiser ser alguêm [sic] na vida.
> SINAIS
> Sinais pertencem a matemática e tambem [sic] em quase tudo, servem quando você for comprar alguma coisa e soma de contas."
> (Frase do mapa GU1M2. Veja mapa completo na página 339)

Apesar de esta frase apresentar cada uma das categorias criadas pelos alunos para a confecção do mapa, ela descreve elementos da Matemática, e não uma equação, ao dizer que símbolos e sinais são usados na Matemática. É importante notar, também, que “conta” aparece nessa frase tanto em “Símbolos” quanto em “Sinais”. Como esses são os nomes das categorias que os alunos criaram para dividir as palavras relacionadas à equação, é possível que eles também tenham uma concepção de equação como uma conta, uma operação. O mapa foi classificado na categoria *Matemática* porque sugere uma associação de contas principalmente com a Matemática e não apenas com equações.

Especificamente sobre a escola, podemos encontrar, nas tempestades de idéias, palavras como “alunos”, “professor”, “exercícios”, “pesquisa”, “sala de aula”, “avaliação”, “nota”, entre outras, e até mesmo objetos, tais como “borracha”, “carteira” e “lousa”. Isto nos mostra que equação, para esses alunos, pode ser um conteúdo estritamente relacionado à escola, à Matemática escolar, a exercícios que são feitos em sala de aula, que serão, posteriormente, avaliados pelo professor, por meio de uma nota.

Seis mapas conceituais compõem a categoria *A Matemática e a Escola*. Quatro deles são da turma GU1 e os outros dois, da turma GU2. É possível que os alunos dessas duas turmas vejam uma equação como um conteúdo da Matemática, talvez sem utilidade fora da escola.

Sentimentos

A tempestade de idéias da turma SP2 é caracterizada por palavras relacionadas à escola, à avaliação e, principalmente a sentimentos e habilidades. “Atenção”, “concentração”, inteligência” e “paciência” estão entre as palavras ditas por esses alunos. Os sentimentos incluem “felicidade” e “prazer”, mas a maioria é de “medo”, “choro” ou “desespero”. A turma GU2 também cita sentimentos. São eles “pavor” e “medo”. Entretanto, apenas um dos mapas conceituais dessa turma dá ênfase ao sentimento.

Os sentimentos em relação a equações apresentados nas tempestades de idéias dão a entender que o trabalho com equações foi difícil e frustrante, principalmente na turma SP2, cujas frases de todos os subgrupos são relacionadas a eles. A frase do subgrupo SP2M1, em especial, apesar de citar Bhaskara e incógnita, descreve o sentimento de um dos alunos ao estudar equações. Apesar de ressaltar a experiência de um aluno do subgrupo (e ter sido escrita por ele), a frase foi aprovada por todos os participantes do subgrupo e foi apresentada no mapa.

> “Quando eu vi a professora Edineide entra na sala gritando peguem as suas calculadoras escreveu na lousa “Equação”.
>
> A sala toda fica em silêncio e eu pensei meu deus o que é isso? Então ela começou a colocar sinais colchetes,... e outros meios abstratos, fiquei em pânico sem exagero todos os sentimentos da matemática me vieram a tona.
>
> Quando ela que eu não estava fazendo os exercícios do livro, ela já soltou um berro “Fabioooo sua apostila e ache as resoluções dos problemas, pensei que tinha parado por aí. Mas a lembrança continua e ela começou a falar em vários adjetivos que um aluno deve ter, com dedicação e esforço fiquei com medo, toda vez que eu ouvia ela dizer baskara, tangente, cosseno,... minha cabeça se enchia de dúvidas quando ela me falava sobre incógnita minha cabeça dava num nó. Então abria uma excessão [sic] e falei “melhor parar por aí” Lembrei que poderia ficar de recuperação, então me recordei da minha capacidade de raciocínio, peguei o lápis, a borracha e outros instrumentos e meios de trabalho e começei [sic] a fazer exercícios.”
>
> (Frase do mapa SP2M1. Veja mapa completo na página 354)

Apenas um mapa dos seis que compõem a categoria *Sentimentos* é da turma GU2. Os outros cinco mapas são da turma SP2. Todos os subgrupos dessa turma enfatizam, em seus mapas, os sentimentos que têm em relação à equação. Durante a tempestade de idéias, surge, inclusive, o nome da professora com quem aprenderam a resolver equações. Nessa turma, vemos as dificuldades enfrentadas ao trabalharem com equações e a preocupação com o aprendizado.

Outros

Na categoria *Outros*, apresentada na **Tabela 2**, estão os mapas conceituais de quatro subgrupos da turma GU2 e de dois da turma GU1. As frases apresentadas nesses mapas não enfatizam qualquer das características levantadas nas palavras das tempestades de idéias, como contas, Matemática ou sentimentos. Duas delas dão uma explicação do mapa conceitual e dos procedimentos de elaboração, como, por exemplo, a frase do subgrupo GU1M5:

> "1º nós fizemos uma lista com os nomes que estavam na lousa e colocamos em ordem de acordo com os nomes: Equação, Matemática e Materiais. Em seguida colocamos nesta cartolina as palavras que estavam na lista e nisto colocamos uma palavra ao lado da outra, classificando suas funções."
>
> (Frase do mapa GU1M5. Veja mapa completo na página 342)

As frases dos outros três mapas, todos de subgrupos da turma GU2, não enfatizam uma característica de equações nem seus sentimentos. Por exemplo, *"Na matemática, equação é alimento para a mente, comida rica em vitaminas anti-besteiras"* (Frase do mapa [GU2M5]. Veja mapa completo na página 350).

Metade dos subgrupos da turma GU2 estão na categoria *Outros*. É possível que o trabalho deles, nessa sessão do mapa conceitual, não tenha sido feito com seriedade. A turma, na época da coleta de dados, fazia queixas do professor que gerenciou a sessão, questionando a postura dele de não dar um método, mas incentivar que os alunos buscassem meios para resolver os problemas. Acreditamos que alguns alunos nessa classe podem ter negligenciado a atividade como uma afronta ao professor. Isso acarretou palavras como “Teletubbies” ou “Hepatite” na tempestade de idéias.

4.1.3. O que não foi dito

Palavras não encontradas nas tempestades de idéias também podem nos dizer algo sobre o entendimento que esses alunos têm sobre equações. Por exemplo, o sinal de igual. Este sinal é considerado por nós como característica essencial de uma equação, pois é ele quem determina a igualdade entre membros, que deve ser mantida, qualquer que seja a manipulação algébrica efetuada. Entretanto, ele é citado apenas em uma das tempestades, da turma GU1, em que um aluno disse “igual”. Não é mencionada qualquer outra palavra relacionada à igualdade ou ao equilíbrio (como uma balança, por exemplo) entre membros de uma equação.

Fomos, então, olhar mais de perto como “igual” foi categorizado nos subgrupos da turma GU1. Cinco dos oito subgrupos formados nessa turma usaram a palavra “igual” em suas categorizações. As categorias em que ela se encontra são denominadas “Símbolos”, “Sinais” ou “Operações”, o que nos faz conjecturar que o sinal de igual é interpretado apenas como um símbolo usado em equações, ou como um sinal operacional (KIERAN, 1981), mas não como uma igualdade que deve ser mantida durante a resolução da equação. Com isso, é possível que os alunos não dêem significado simbólico também para o sinal de igual, como uma igualdade que deve ser mantida entre os membros de uma equação.

Não foram também lembradas palavras como “equivalência” ou qualquer outra que indique entendimento, por parte dos alunos, de que os passos de uma resolução devem ser equações equivalentes, a fim de que as raízes da equação inicial sejam encontradas.

4.1.4. Reflexões sobre as concepções de equação

No que se refere aos conhecimentos sobre o conceito de equação e a resolução dela, alguns pontos levantados na análise dos mapas conceituais merecem ser destacados. Por exemplo, as frases que tentam oferecer alguma definição de equação a enfatizam principalmente como uma conta, sem destacar o sinal de igual ou a incógnita. Entendemos que esta ênfase representa uma visão de equação presente no mundo corporificado, em que a Aritmética com números inteiros baseia-se em contagem e em operações envolvendo objetos físicos.

Uma concepção de equação em que a incógnita é característica principal é considerada como presente no mundo simbólico. O entendimento da incógnita como símbolo para um número que se pretende encontrar faz parte do significado simbólico dado a equações. Nos dados coletados com os mapas conceituais, a incógnita, quando aparece, é categorizada como um símbolo. Isto pode ser um indício de que ela não é vista, por esses alunos, como um número, mas apenas como um símbolo que deve ser manipulado e, portanto, não tem significado simbólico.

A ausência do sinal de igual no mapa conceitual de duas das três classes evidencia que a igualdade entre os membros pode não ser uma característica que esses alunos consideram importante em uma equação. O sinal de igual é categorizado, na maior parte dos subgrupos, como um símbolo (assim como a incógnita), ou uma operação. Se relacionado a operações, é possível que os alunos, que assim o classificam, façam uso dele apenas como um sinal operacional (KIERAN, 1981), isto é, que exige um resultado, e não um sinal que representa uma igualdade, como é exigido no caso de uma equação.

Os fatos de o sinal de igual ser visto como um sinal operacional e de a incógnita não ser característica relevante de uma equação justificam a concepção de equação como uma conta. Sem o entendimento, por parte do aluno, de que a incógnita é um número cujo valor deve ser procurado, de forma que a igualdade permaneça, os alunos acabam enfocando somente as operações que efetuam, dando a uma equação o status de conta.

Consideramos que, quando os alunos concentram-se em contas, as imagens de conceito deles, sobre equações, têm alguma ligação com o mundo corporificado: eles enfatizam principalmente as contas efetuadas, e não as relações entre os elementos relacionados a esses cálculos. As menções à incógnita e ao sinal de igual talvez sejam evidências de que os alunos que consideram esses símbolos façam relações entre as contas presentes no mundo corporificado e os símbolos de uma equação que são parte do mundo simbólico. Entretanto, essa relação não parece ser completa. Aparentemente, eles estão manipulando símbolos com características do mundo simbólico, mas relacionam essa manipulação com corporificações feitas durante contagens e cálculos com números inteiros.

4.2. Questionário

Com o questionário, buscamos levantar informações sobre as concepções dos alunos a respeito do conceito de equação e da resolução dela. Além disso, pretendemos analisar os diferentes meios de resolução de equações quadráticas usados, para verificar se são compreendidos pelos alunos como “proceitos”, o que evidenciaria pensamento “proceitual”. Inicialmente, fazemos um levantamento das respostas para cada uma das questões, o que gera uma classificação, apresentada no início de cada questão. As categorias são explicadas e as de maior freqüência destacadas. Essa classificação é útil para identificarmos, também, os “já-encontrados” e “a-encontrar” presentes no trabalho dos alunos e a interferência que eles causam.

Os dados das questões de 1 a 4 são analisados conjuntamente, pois observamos as mesmas características nas respostas apresentadas para cada uma delas. O mesmo acontece com as questões 5 e 6, que se referem à resolução de equações quadráticas.

Ao final de cada questão, apresentamos uma análise das diferenças entre cada uma das turmas, observando o comportamento delas e as características de cada um dos mundos que parecem estar presentes no trabalho da turma, em geral. Alguns trechos das entrevistas efetuadas são apresentados como evidência para nossas afirmações. Em seguida, discutimos as características de cada um dos mundos apresentadas no trabalho dos alunos. Os "já-encontrados" e os "a-encontrar" são destacados, assim como as interferências, positivas ou negativas, que eles exercem nesse trabalho. Ao final da análise dos dados coletados com o questionário, retomaremos as diferenças entre cada turma, tentando traçar um perfil delas, a respeito da concepção de equação e dos meios de resolução de equações quadráticas usados.

4.2.1. Questão 1: O que é equação?

Para analisarmos o que os alunos de cada uma dessas turmas entendem sobre equação, fizemos um levantamento dos tipos de respostas dadas por eles e as classificamos em sete categorias, *Conta/Cálculo/Operação*, *Busca de um valor desconhecido*, *Fórmulas/Regras*, *Foco na estrutura*, *Parte da Matemática*, *Sentimentos* e *Outros*. Este levantamento é apresentado na **Tabela 3**. Algumas respostas se encaixam em mais de uma categoria por conterem características diversas. Por isso, a soma dos totais na **Tabela 3** não corresponde à quantidade de alunos que responderam ao questionário.

Tabela 3: Categorias de respostas para a Questão 1

Resposta	*GU1*	*GU2*	*SP2*	*Total*
Conta/Cálculo/Operação	21	6	9	36
Busca de um valor desconhecido	4	6	6	16
Fórmulas/Regras	–	3	4	7
Foco na estrutura	–	11	2	13
Parte da Matemática	2	4	3	9
Sentimentos	–	–	7	7
Outros	6	2	–	8

O tipo de resposta mais freqüente para a primeira questão foi a de que uma equação é uma conta, ou um cálculo, ou alguma das (ou todas) operações elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão). Essas respostas estão na categoria *Conta/Cálculo/Operação* e foram apresentadas por 36 dentre os 77 alunos. Dentre essas respostas, estão, por exemplo, as apresentadas na **Figura 5** e na **Figura 6**.

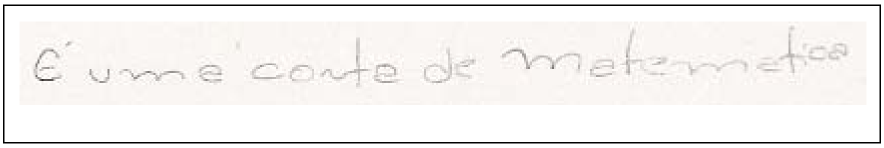
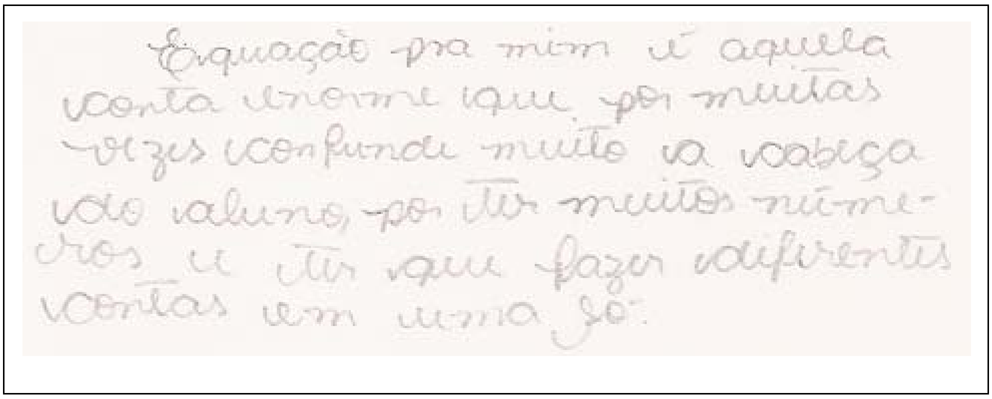


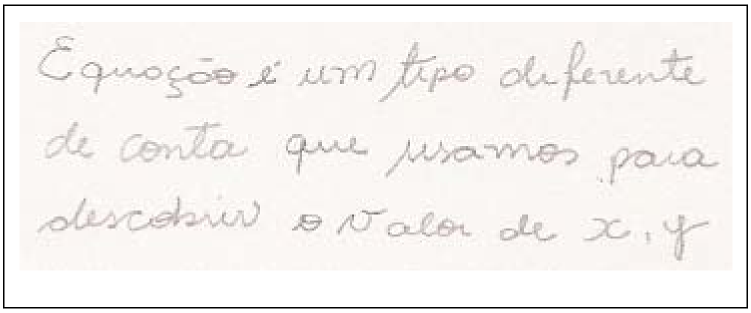
Figura 5: Resposta do aluno [GU119] para a Questão 1



Equação pra mim é aquela conta enorme que por muitas vezes confunde muito a cabeça do aluno, por ter muitos núme-ros e ter que fazer diferentes contas em uma só.

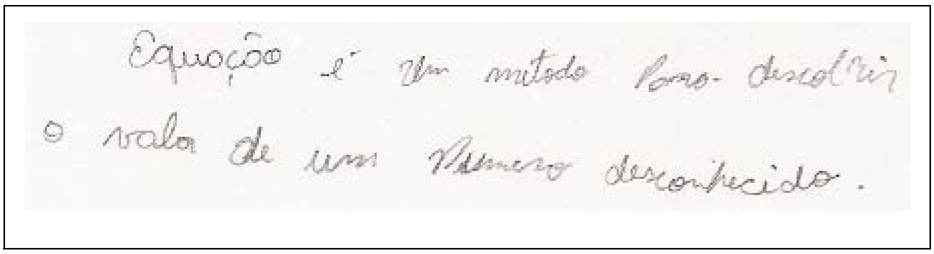
Figura 6: Resposta do aluno [SP212] para a Questão 1

A categoria *Busca de um valor desconhecido* é formada por respostas que enfatizam uma equação como uma forma de buscar um valor para a incógnita (ou para um número desconhecido). Dezesseis alunos deram respostas com essa característica, como, por exemplo, na **Figura 7** e na **Figura 8**.



Equação é um tipo diferente de conta que usamos para descobrir o valor de x, y

Figura 7: Resposta do aluno [GU107] para a Questão 1



Equação é um método para descobrir o valor de um número desconhecido.

Figura 8: Resposta do aluno [GU117] para a Questão 1

Essas duas categorias de respostas estão condizentes com as encontradas por Dreyfus e Hoch (2004). Os autores afirmam que as respostas apresentadas por alunos israelitas são procedimentais, pois enfatizam o que deve ser feito. O mesmo acontece com os dados obtidos com esta questão, em que os procedimentos também parecem ser o foco de atenção. Na categoria *Conta/Cálculo/Operação*, as próprias operações são enfatizadas, enquanto na categoria *Busca de um valor desconhecido*, o centro da atenção é a explicitação da necessidade de encontrar o valor da incógnita.

As outras categorias apresentam respostas que enfatizam alguma característica de equações levantada pelos alunos. Por exemplo, a categoria *Fórmulas/Regras* engloba respostas que põem em evidência as fórmulas ou as regras usadas pelos alunos durante a resolução de uma equação, explicitando que uma equação *"é um conjunto de fórmulas"* [GU214], (**Figura 9**) ou dizendo que *"podem ser resolvidas com vários tipos de fórmulas"* [SP219] (**Figura 10**). Respostas assim foram dadas por sete alunos. Nesta categoria, também há foco no procedimento, que é representado pelas fórmulas e regras que devem ser usadas.

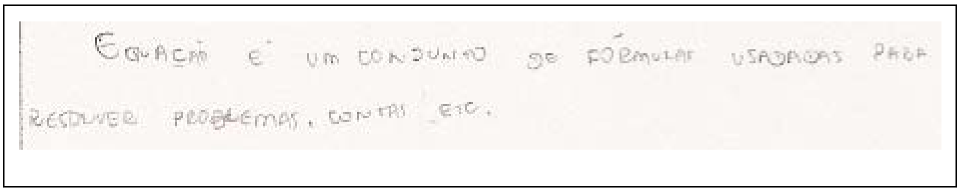

EQUAÇÃO É UM CONJUNTO DE FÓRMULAS USADAS PARA RESOLVER PROBLEMAS, CONTAS ETC.

Figura 9: Resposta do aluno [GU214] para a Questão 1

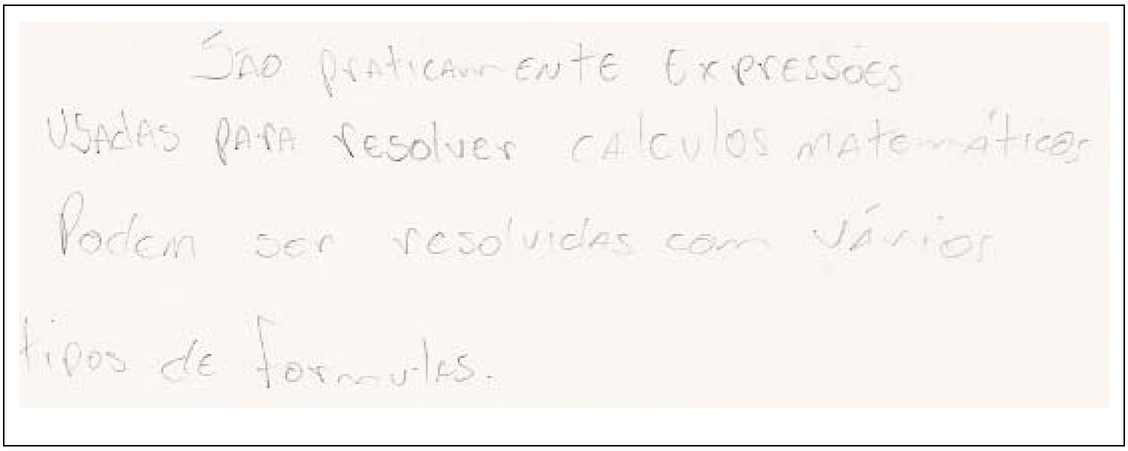

São praticamente expressões usadas para resolver calculos matemáticos Podem ser resolvidas com vários tipos de formulas.

Figura 10: Resposta do aluno [SP219] para a Questão 1

Respostas na categoria *Foco na estrutura* mencionam os membros ou o grau de uma equação, ou mesmo a presença da incógnita. Esta categoria relaciona-se ao que Dreyfus e Hoch (2004) chamam de estrutura externa de uma equação, isto é, o reconhecimento de uma equação e dos elementos dela. Em geral, respostas com alguma dessas características são raras; três alunos citam os membros de uma equação, dois citam o grau, e cinco citam a incógnita. Três outros alunos mencionam *variável*; um deles, aparentemente, como sinônimo de incógnita, como mostra a **Figura 11**:

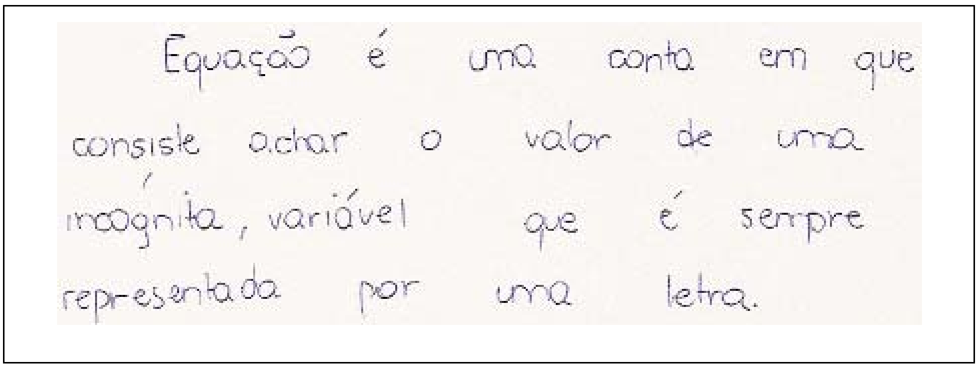

Equação é uma conta em que consiste achar o valor de uma incógnita, variável que é sempre representada por uma letra.

Figura 11: Resposta do aluno [GU211] para a Questão 1

Uma resposta que engloba todas essas características foi apresentada por um aluno da turma GU2 (**Figura 12**):

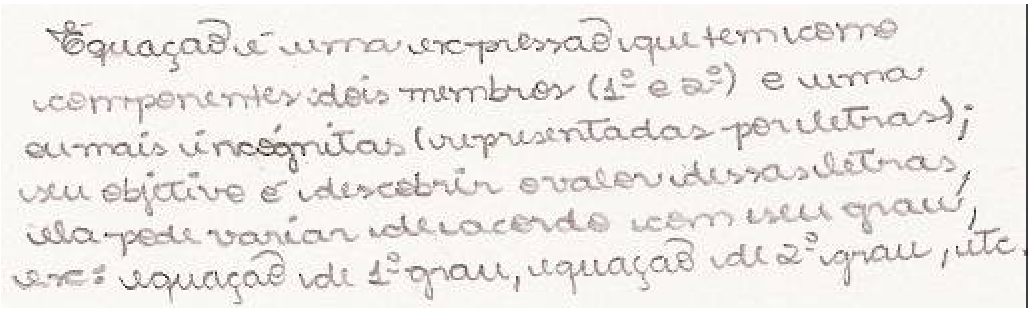

Equação é uma expressão que tem como
componentes: dois membros (1º e 2º) e uma
ou mais incógnitas (representadas por letras);
seu objetivo é descobrir o valor dessas letras,
ela pode variar de acordo com seu grau,
ex: equação de 1º grau, equação de 2º grau, etc.

Figura 12: Resposta do aluno [GU209] para a Questão 1

A categoria *Parte da Matemática* engloba as respostas de nove alunos que citam a Matemática como característica principal de uma equação. Nessa categoria, foram incluídas respostas, como *"Equação é um estudo da matemática"* [SP217] (**Figura 13**) ou *"A equação é a base de tudo na matemática"* [GU208] (**Figura 14**).

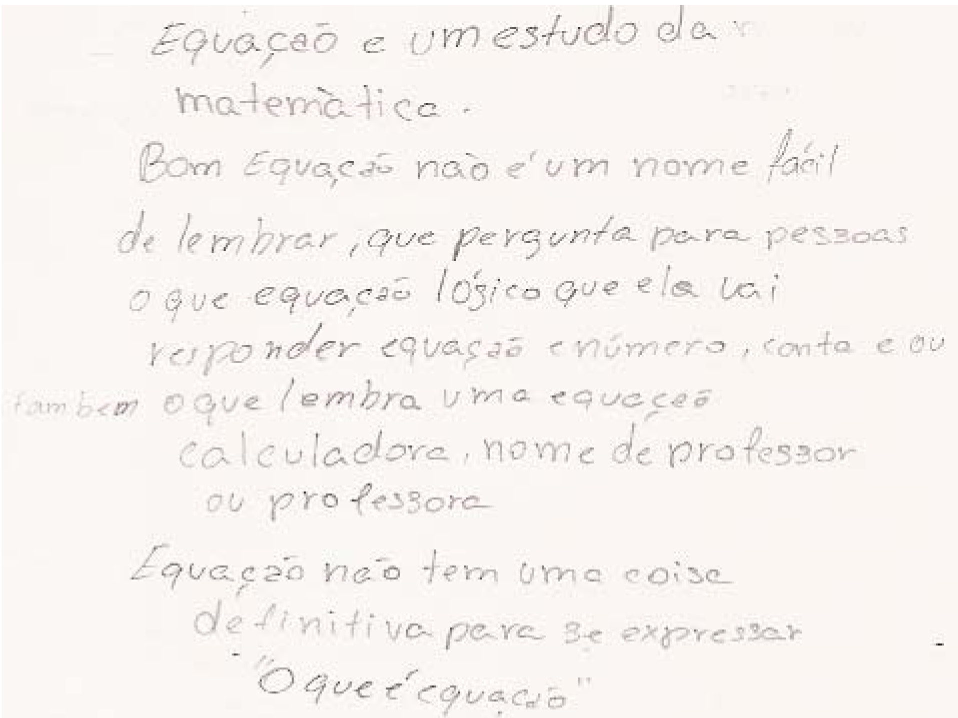

Equação e um estudo da
matemàtica.
Bom Equação não é um nome fácil
de lembrar, que pergunta para pessoas
o que equação lógico que ela vai
responder equação é número, conta e ou
também o que lembra uma equação
calculadora, nome de professor
ou professora
Equação não tem uma coisa
definitiva para se expressar
"O que é equação"

Figura 13: Resposta do aluno [SP217] para a Questão 1

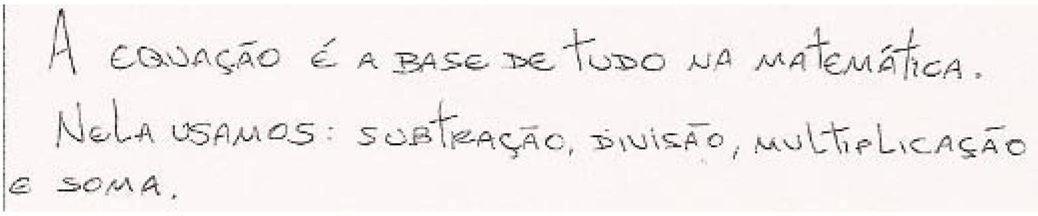

A EQUAÇÃO É A BASE DE TUDO NA MATEMÁTICA.
NELA USAMOS: SUBTRAÇÃO, DIVISÃO, MULTIPLICAÇÃO
E SOMA.

Figura 14: Resposta do aluno [GU208] para a Questão 1

As respostas da categoria *Sentimentos*, dadas por sete alunos, explicitam as dificuldades que eles têm com relação a equações, como, por exemplo, na **Figura 15**.

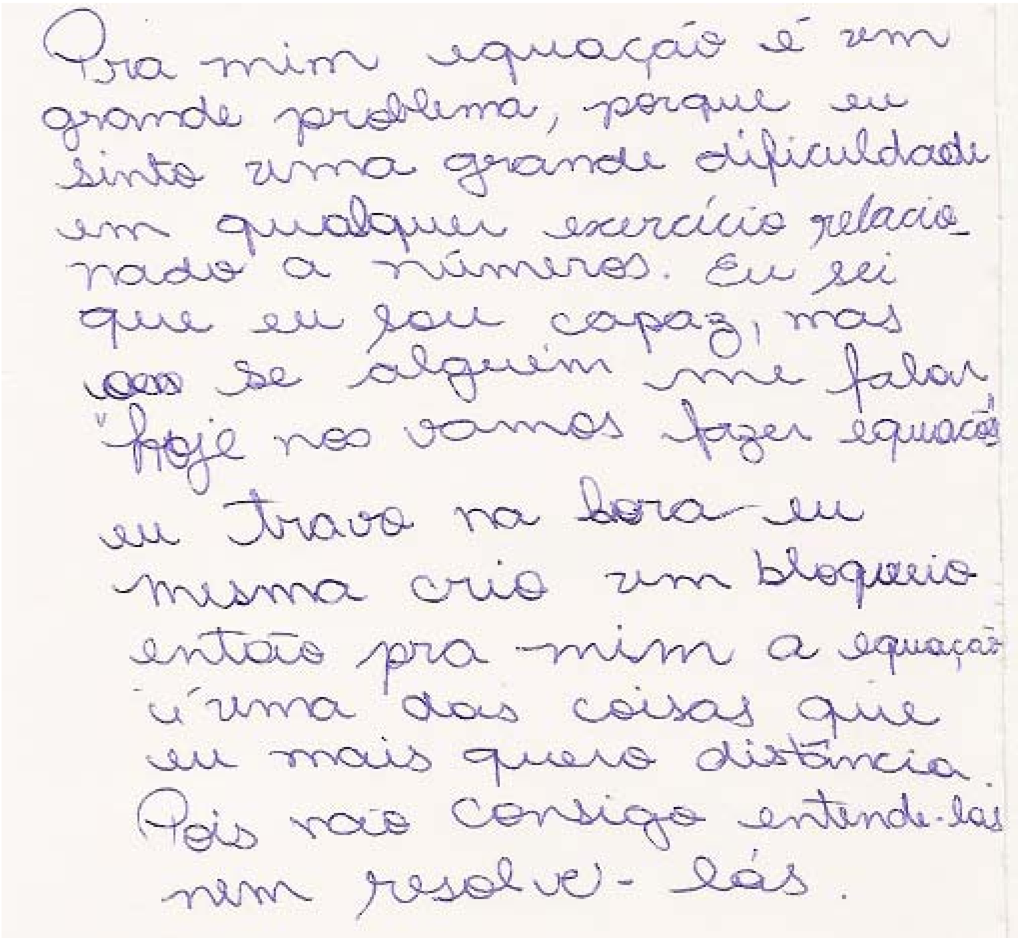

Pra mim equação é um
grande problema, porque eu
sinto uma grande dificuldade
em qualquer exercício relacio_
nado a números. Eu sei
que eu sou capaz, mas
se alguém me falar
"hoje nos vamos fazer equações"
eu travo na hora eu
mesma crio um bloqueio
então pra mim a equação
é uma das coisas que
eu mais quero distância.
Pois não consigo entende-las
nem resolve-lás.

Figura 15: Resposta do aluno [SP208] para a Questão 1

Por fim, na categoria *Outros* estão oito diferentes respostas, que não apresentam qualquer uma das características enfatizadas nas outras categorias. A **Figura 16** é um exemplo de respostas classificadas nessa categoria. Não há, também, nessas respostas, outras características de equação que sejam relevantes.

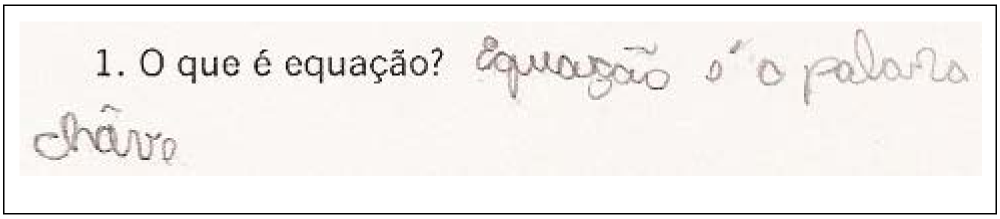


Figura 16: Resposta do aluno [GU128] para a Questão 1

Diferenças entre as turmas

Apesar de a resposta mais freqüente nas três turmas ser a mesma – a de que uma equação é uma conta –, os alunos de cada uma delas enfatizam aspectos diferentes.

A turma GU1 tem o maior número de respostas que explicam uma equação como uma conta. Vinte e um dos 32 alunos dessa turma dão tal resposta, enquanto apenas quatro explicitam que existe a incógnita nesse *"tipo diferente de conta"* [GU107]. O grande número de alunos que têm uma concepção de equação como uma conta evidencia que eles, provavelmente, não consideram nem a incógnita nem a busca de um valor para ela como características principais de uma equação. Este, talvez, seja um estágio da Álgebra que é anterior ao da álgebra de avaliação, porque as respostas limitam-se a dizer "soma", "multiplicação", entre outras operações, e não há qualquer menção a desfazer as operações presentes em uma equação de avaliação. Buscaremos nas outras questões do questionário, ou mesmo em outros instrumentos de coleta de dados, evidências para esta afirmação.

Já os alunos da turma GU2 citam equação como um item da Matemática (quatro alunos, dentre os 26 da turma) cuja resolução é feita com fórmulas e regras (três alunos), que possui membros (três alunos), incógnita (três alunos) ou variável (três alunos), e, ainda, que equações podem ser de graus diferentes (dois alunos). Dessas características, apenas o fato de uma equação ser um item da Matemática é mencionado pelas duas outras turmas, enquanto o fato de ela possuir incógnita é citado apenas por dois alunos da turma SP2. Nenhum aluno da turma GU1 menciona a incógnita. Todas as outras características estão presentes apenas na turma GU2, cujos alunos são os únicos a escreverem sobre aspectos ligados ao que Dreyfus e Hoch (2004) chamam de estrutura externa de uma equação.

Finalmente, os alunos da turma SP2 são os únicos a destacar sentimentos relacionados à equação nas respostas a essa questão. Sete alunos expressam os sentimentos que norteiam o trabalho deles com equações. A maioria se depara com sentimentos ruins, como o aluno que diz que equação *“envolve atenção, raiva”* [SP209] (**Figura 17**), apesar de um aluno acrescentar que acha *“equação fácil, muito diferente dos outros que acham que é um bicho de sete cabeças”* [SP211] (**Figura 18**). Essa mesma característica, de levantar sentimentos em relação a equações, ficou evidente nos mapas conceituais dessa turma.

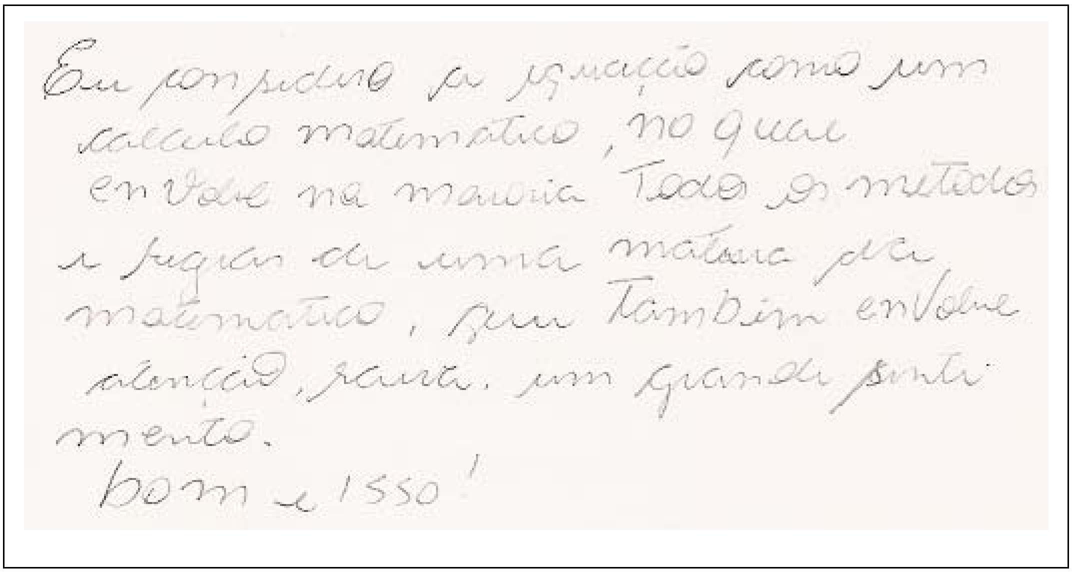

Eu considero a equação como um
calculo matematico, no qual
envolve na maioria Todos os metodos
e regras de uma materia de
matematico, que Tambem envolve
atenção, raiva. um grande senti
mento.
bom e isso!

Figura 17: Resposta do aluno [SP209] para a Questão 1

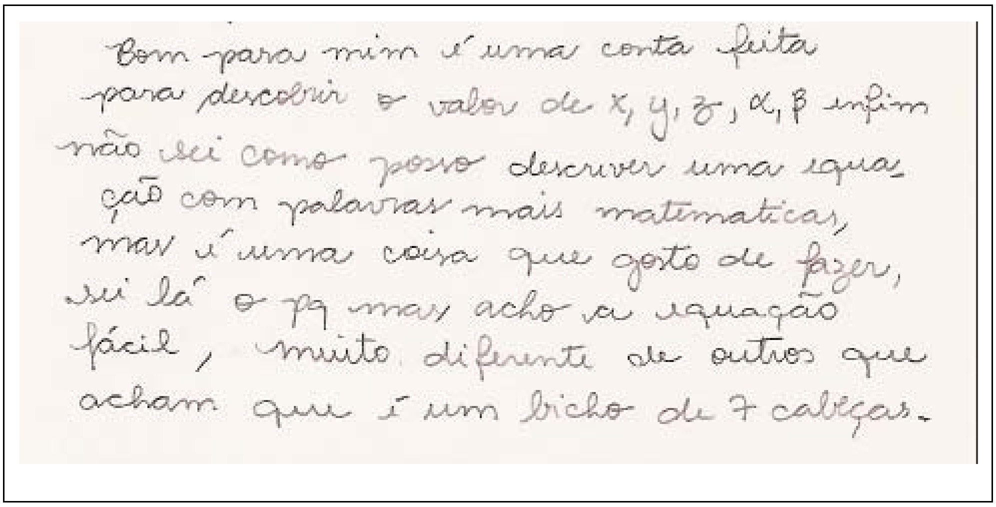

Bom para mim é uma conta feita
para descobrir o valor de x, y, z, α, β enfim
não sei como posso descrever uma equa
ção com palavras mais matematicas,
mas é uma coisa que gosto de fazer,
sei lá o pq mas acho a equação
fácil, muito diferente de outros que
acham que é um bicho de 7 cabeças.

Figura 18: Resposta do aluno [SP211] para a Questão 1

Vale destacar que somente nesta turma foi citado o uso de uma equação fora da aula de Matemática. Dois alunos declararam que uma equação *"não tem finalidade no dia-a-dia"*. Isso sugere que eles podem não ter o hábito de modelar uma situação com o uso de equações.

4.2.2. Questão 2: Para que serve uma equação?

Para essa questão, foram levantadas cinco categorias: *Encontrar um valor*, *Fazer contas*, *Resolver problemas*, *Não sei* e *Outros*. Elas estão relacionadas na **Tabela 4**. Um aluno, da turma SP2, responde que uma equação serve tanto para resolver problemas quanto para fazer contas, o que acarreta uma intersecção entre as categorias *Fazer contas* e *Resolver problemas*. Todas as outras respostas fazem parte de uma única categoria.

Tabela 4: Categorias de respostas para a Questão 2

Resposta		*GU1*	*GU2*	*SP2*	*Total*
Encontrar um valor para:	**incógnita**	3	10	3	26
	número	7	–	3	
Fazer contas		9	10	2	21
Resolver problemas		4	–	2	6
Outros		10	6	6	22
Não sei		–	–	3	3

A resposta mais freqüente na Questão 2 é a de que uma equação é útil para encontrar um número ou um valor. Vinte e seis alunos dão respostas desse tipo. Dentre eles, dez mencionam apenas descobrir um número (**Figura 19**) e 16 citam explicitamente descobrir o valor da incógnita (**Figura 20**).

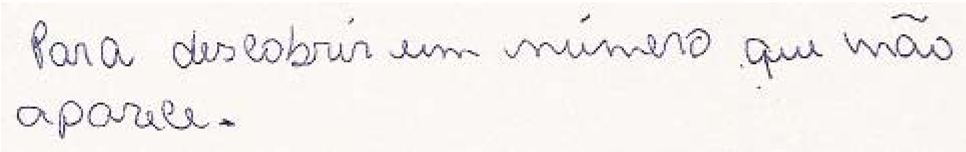


Figura 19: Resposta do aluno [GU114] para a Questão 2

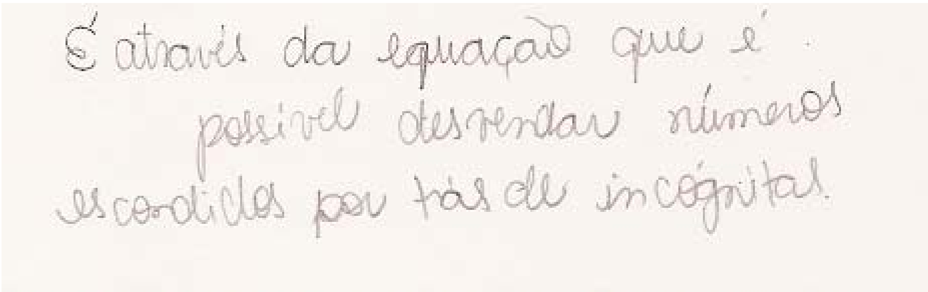
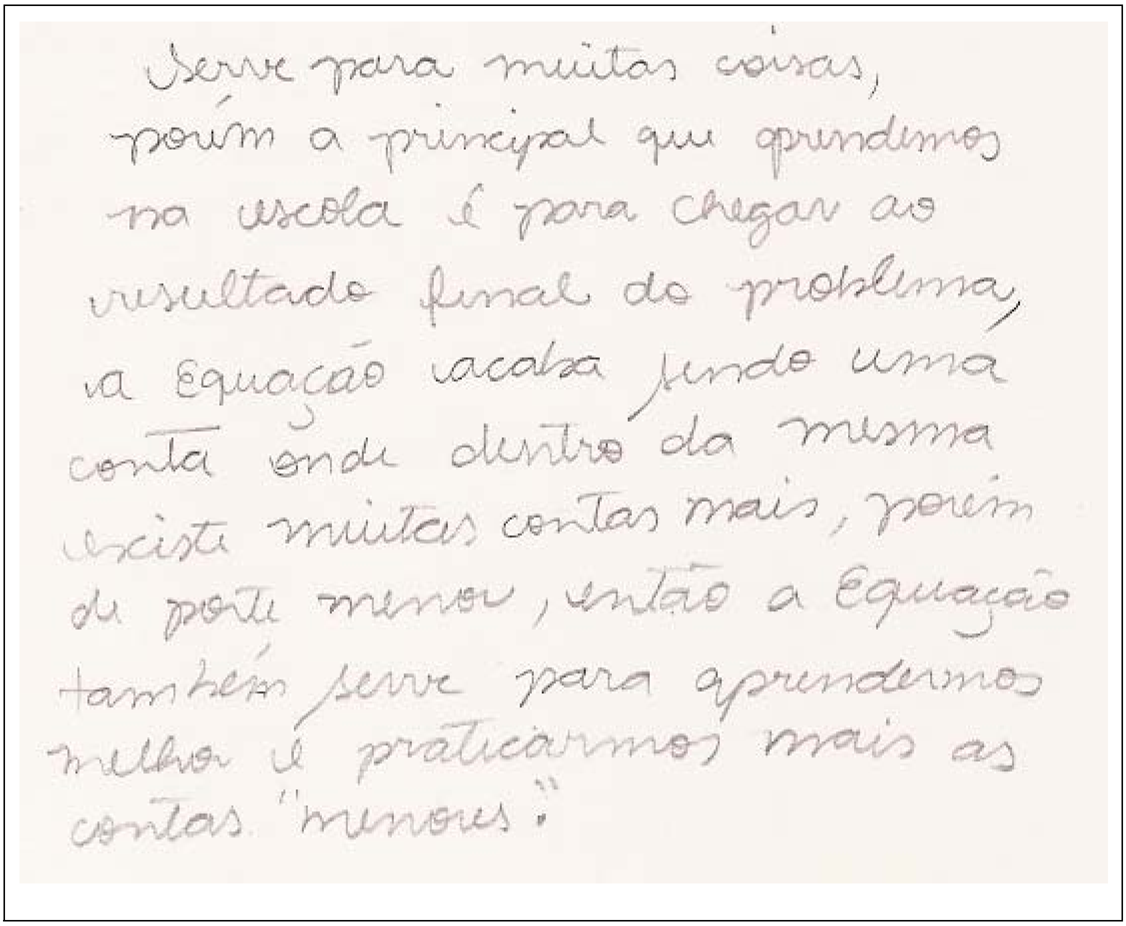


Figura 20: Resposta do aluno [SP215] para a Questão 2

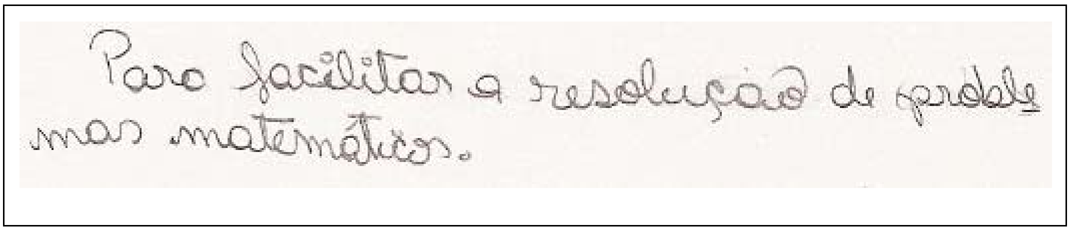
Na categoria *Fazer contas* estão as respostas de outros 21 alunos que declaram que uma equação serve para *"fazer contas"*, já que, reforçando o que foi dito na primeira questão, *O que é equação*?, uma equação *é* uma conta para eles. Um aluno, inclusive, volta a afirmar na Questão 2 que uma equação é uma conta, depois de explicar que ela serve para resolver problemas (**Figura 21**). Nesta resposta, são destacadas duas das principais idéias que esses alunos mostram ter sobre equação: ela é uma conta e serve para descobrir um número.

A categoria *Resolver problemas* é formada pelas respostas de seis alunos que declaram que equações servem para resolver problemas. Respostas como a da **Figura 22** mostram que os problemas aos quais eles se referem são essencialmente relacionados com a Matemática.



Serve para muitas coisas, porém a principal que aprendemos na escola é para chegar ao resultado final do problema, a Equação acaba sendo uma conta onde dentro da mesma existe muitas contas mais, porém de parte menor, então a Equação também serve para aprendermos melhor e praticarmos mais as contas "menores".

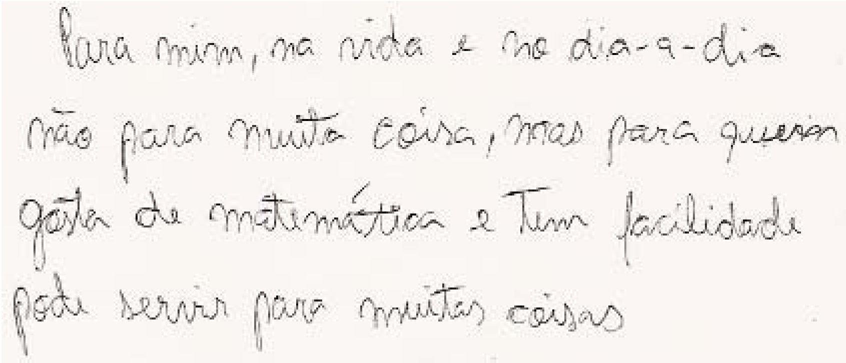
Figura 21: Resposta do aluno [SP206] para a Questão 2



Para facilitar a resolução de proble mas matemáticos.

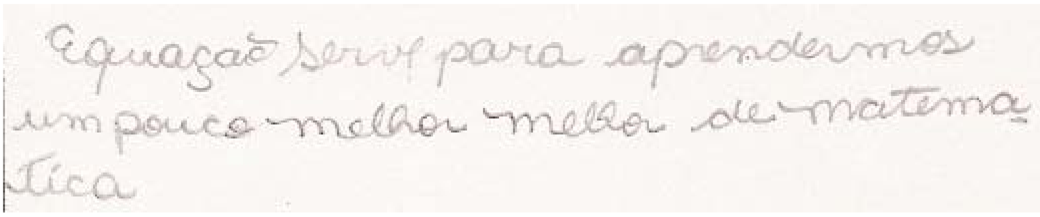
Figura 22: Resposta do aluno [GU104] para a Questão 2

Já as respostas relacionadas na categoria *Outros* são numerosas. Vinte e dois alunos apresentam respostas que não enfatizam uma característica relevante ou relacionada às outras categorias. Os tipos de respostas são diversos, como, por exemplo, as que descartam o uso de equações em situações do cotidiano (**Figura 23**), ou que relacionam equações essencialmente com a Matemática (**Figura 24**). Há também os que vêem equação como um conteúdo importante *"Para o nosso* *aprendizado"* [GU131] (**Figura 25**) e *"para nosso desenvolvimento"* [GU225] (**Figura 26**).



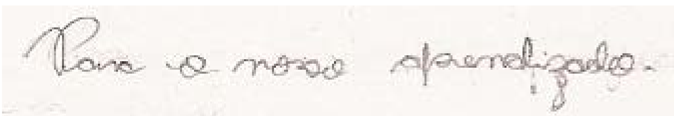
Para mim, na vida e no dia-a-dia
não para muita coisa, mas para quem
gosta de matemática e tem facilidade
pode servir para muitas coisas

Figura 23: Resposta do aluno [SP218] para a Questão 2



Equação serve para aprendermos
um pouco melhor melhor de matema
tica

Figura 24: Resposta do aluno [GU204] para a Questão 2



Para o nosso aprendizado.

Figura 25: Resposta do aluno [GU131] para a Questão 2

Serve para nosso desenvolvimento.

Figura 26: Resposta do aluno [GU225] para a Questão 2

Os 22 alunos cujas respostas são classificadas nessa categoria parecem dar ênfase às dificuldades que enfrentam no aprendizado ou ao fato de a aula de Matemática ser o momento principal de estudo de equações, e não no uso que fazem de equações para resolver um problema.

Diferenças entre as turmas

Aparentemente, as características apresentadas por cada uma das turmas na Questão 1 permanecem evidentes na Questão 2.

A turma GU1 continua enfatizando as contas e os números presentes em uma equação. Apenas três alunos nessa turma falam da incógnita.

Na turma GU2, dez alunos declaram que uma equação serve para fazer contas (**Figura 27**). Outros dez alunos dessa turma mencionam que uma equação serve para buscar o valor da incógnita (ou *x*). Novamente, esta turma apresenta características referentes à estrutura externa de uma equação, características estas não levantadas pelas outras turmas.

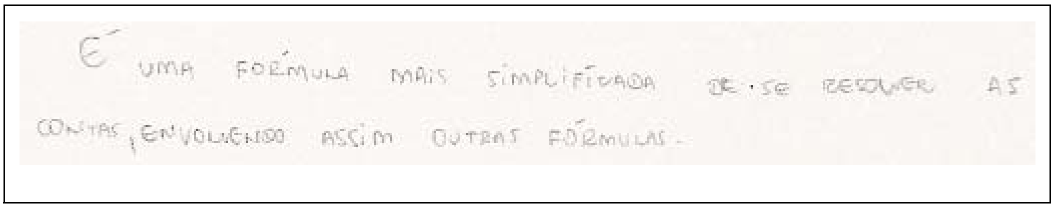


Figura 27: Resposta do aluno [GU214] para a Questão 2

A turma SP2 é, novamente, a única que se refere a seus sentimentos ou dificuldades com o conceito. Por exemplo, como mostra a **Figura 28**, um aluno declara que:

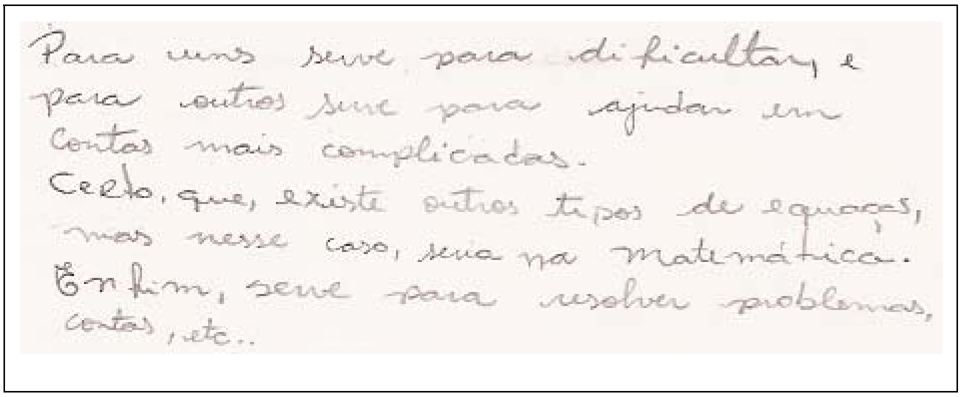

Para uns serve para dificultar, e
para outros serve para ajudar em
Contas mais complicadas.
Certo, que, existe outros tipos de equações,
mas nesse caso, seria na Matemática.
Enfim, serve para resolver problemas,
contas, etc..

Figura 28: Resposta do aluno [SP207] para a Questão 2

4.2.3. Questão 3: Dê um exemplo de equação.

Tabela 5: Categorias de respostas para a Questão 3

Resposta	*GU1*		*GU2*		*SP2*		*Total*
	CR	*SR*	*CR*	*SR*	*CR*	*SR*	
Equação linear com uma incógnita	17	3	18	–	–	–	38
Equação quadrática com uma incógnita	1	–	1	–	1	3	6
Equação com mais de uma incógnita	–	1	–	–	–	2	3
Expressão algébrica	2	–	–	–	–	1	3
Expressão numérica/Conta	1	–	6	–	–	–	7
Igualdade	3		–		3		6
Outros	2	3	–	1	–	5	11
Não sei/Não lembro	–		2		4		6

Legenda: **CR**: Com resolução; **SR**: Sem resolução

Para a terceira questão, elaboramos uma classificação contendo oito categorias. São elas: *Equação linear com uma incógnita*, *Equação quadrática com uma incógnita*, *Equação com mais de uma incógnita*, *Expressão algébrica*, *Expressão numérica/Conta*, *Igualdade*, *Outros* e *Não sei/Não lembro*. Elas são apresentadas na **Tabela 5**. Somente há intersecção entre as categorias *Equação linear com uma incógnita* e *Expressão numérica/Conta*, já que três alunos apresentaram um exemplo de cada nesta questão.

Quarenta e quatro dos 77 alunos apresentaram uma equação com uma incógnita como resposta. Elas são seis equações quadráticas e todas as outras lineares, sendo esta última a resposta mais freqüente. Três desses alunos apresentam, além de uma equação linear com uma incógnita, uma conta, escrita horizontalmente ou mesmo na forma vertical, como exemplos de equações, como apresentado na **Figura 29**.

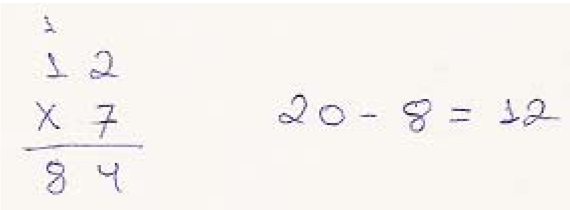


Figura 29: Resposta do aluno [GU223] para a Questão 3

Três alunos apresentam equações com duas incógnitas, como, por exemplo, na **Figura 30** e na **Figura 31**. É interessante notar que esta última tem conjunto-verdade vazio, mas não houve tentativa, pelo aluno, de resolvê-la.

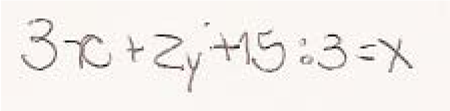


Figura 30: Resposta do aluno [SP201] para a Questão 3

Figura 31: Resposta do aluno [SP219] para a Questão 3

Os outros 30 alunos apresentam igualdades, expressões algébricas, expressões numéricas, contas, entre outras respostas.

Na categorização apresentada na **Tabela 5**, chamamos de *Igualdade* as sentenças matemáticas cujo conjunto-verdade é formado por todos os números reais, como, por exemplo, $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ (este não é um exemplo dado pelos alunos). Nas igualdades, o primeiro membro é igual e também equivalente ao segundo. Isso não acontece com equações. Por exemplo, na equação $3x-1=3+x$, o primeiro membro, $3x-1$, é igual ao segundo, $3+x$, quando x for 2, mas não é equivalente a ele. É justamente por isso que o conjunto-verdade de uma equação pode não ser formado por todos os números reais.

Seis alunos apresentam igualdades. Dentre elas, as da **Figura 32**, talvez, devido ao hábito do professor P3 de explicar aos alunos que $x+x$ é igual a $2x$ e que $x \cdot x$ é x^2.

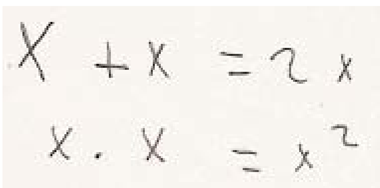


Figura 32: Resposta do aluno [GU110] para a Questão 3

Por expressões algébricas, entendemos aquelas expressões que são compostas de termos contendo uma variável (ou mais de uma), que pode ou não ser manipulada para obter uma expressão mais simples, mas que não representa a busca de um valor para uma incógnita, já que não é composta pela igualdade entre dois membros e qualquer valor real pode substituir a variável.

Três expressões algébricas foram apresentadas como resposta para essa questão, por exemplo, a da **Figura 33**.

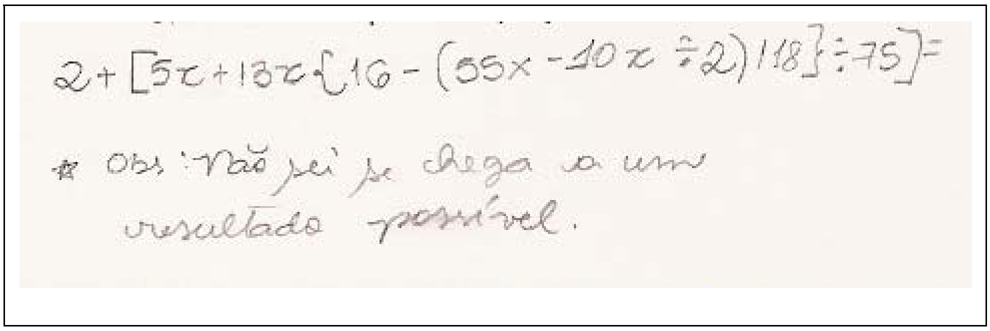


Figura 33: Resposta do aluno [SP206] para a Questão 3

Em entrevista, quando perguntado por que esse exemplo, tão grande, o aluno respondeu *"Ah, porque pra mim a equação é muito grande, é uma coisa muito confusa, muito complexa."*. São poucos os alunos que apresentam expressões algébricas como exemplo de equação (veja **Tabela 5**), mas elas estão coerentes com a definição dada por eles na Questão 1, de que equações são formadas por muitas contas e possuem uma incógnita. Neste caso, os números são inteiros e há um grande número de operações a serem feitas.

A diferença que estamos fazendo, neste trabalho, entre *expressões numéricas* e *contas* é que as primeiras são formadas de várias operações a serem efetuadas, como no exemplo dado por um aluno na **Figura 34**, enquanto as contas são formadas por apenas uma operação, como na **Figura 35**. Novamente, como equações são ditas como sendo “contas pequenas dentro de outra maior”, uma expressão numérica é uma equação na visão desse aluno.

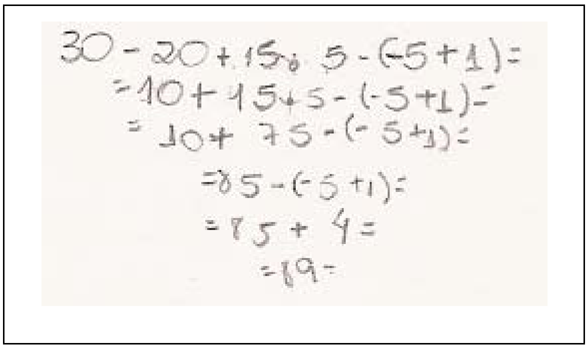


Figura 34: Resposta do aluno [GU206] para a Questão 3

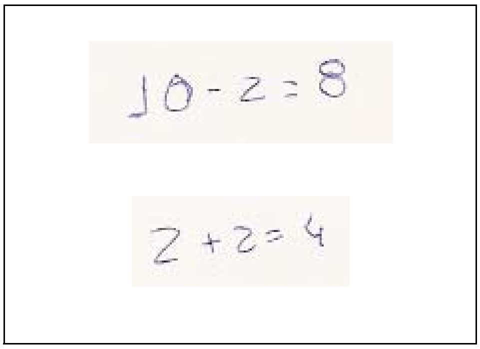


Figura 35: Resposta do aluno [GU225] para a Questão 3

As respostas desses alunos apresentam algumas características interessantes, sejam elas equações, expressões ou contas. Observamos, em alguns momentos, a escolha de coeficientes, feita pelos alunos, de forma que as raízes da equação sejam inteiras e positivas. Por exemplo, um aluno da turma SP2 apresenta a equação e resolução como na **Figura 36**, em que o número 36 é um quadrado perfeito. Vale ressaltar que a raiz negativa dessa equação não foi encontrada pelo aluno. O mesmo acontece com todas as equações do tipo $ax^2 + c = 0$ apresentadas nessa questão.

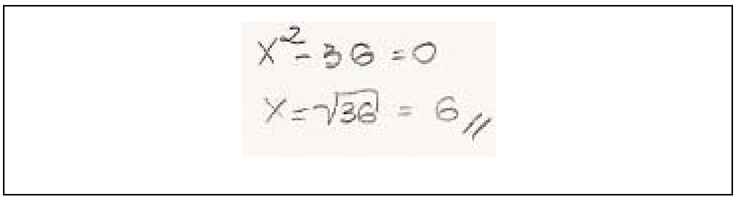


Figura 36: Resposta do aluno [SP211] para a Questão 3

Outra característica refere-se ao resultado da equação. Apenas dois alunos apresentam exemplos resolvidos cujas raízes não são números inteiros: um da turma GU2 (**Figura 37**) e um da turma GU1 (**Figura 38**).

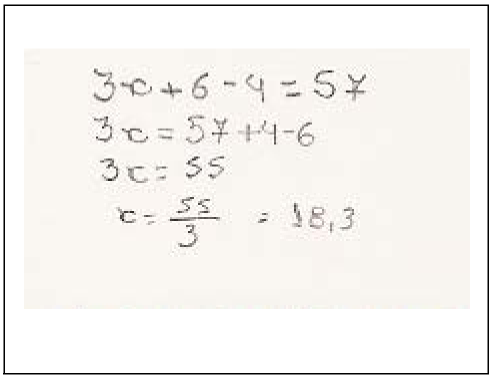


Figura 37: Resposta do aluno [GU213] para a Questão 3

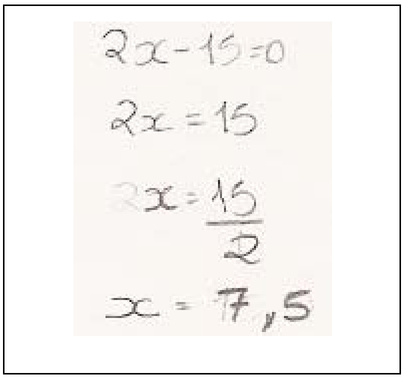


Figura 38: Resposta do aluno [GU103] para a Questão 3

Apesar de não citarem o sinal de igual ou qualquer relação com igualdade, são poucos os alunos cujos exemplos não constam desse sinal. São eles aqueles que não dão um exemplo e aqueles que apresentam contas escritas na forma vertical, como na **Figura 39**.

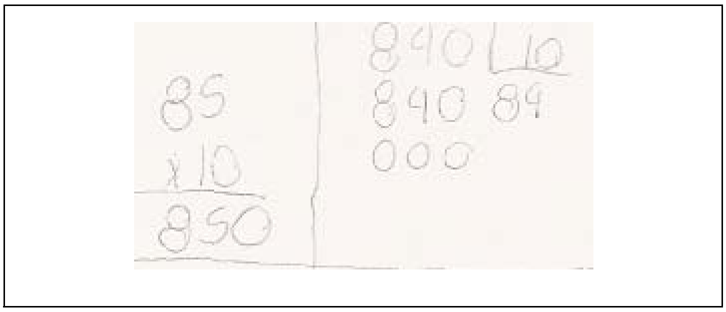


Figura 39: Resposta do aluno [GU130] para a Questão 3

Todas as outras expressões, igualdades ou equações apresentadas possuem o sinal de igual. Talvez, apesar de não o terem mencionado, esses alunos considerem esse sinal como elemento parte de uma equação ou de uma conta.

Vale destacar que 47 alunos resolvem a equação, expressão algébrica, expressão numérica ou conta apresentada, embora não fosse pedido na questão, sendo que 27 deles resolvem de maneira satisfatória.

Diferenças entre as turmas

Nessa questão, as três turmas apresentam similaridades. As turmas GU1 e GU2 têm como resposta mais freqüente uma equação linear com uma incógnita. Além disso, a freqüência de resolução dos exemplos apresentados é alta em todas as três turmas.

Também é interessante observar que a incógnita usada é sempre x, com raras exceções em que y é usado. No caso das equações com duas incógnitas, elas são x e y.

4.2.4. Questão 4: O que significa o resultado de uma equação?

Como explicitado na descrição dos instrumentos de coleta de dados (página 117), o intuito desta questão é de verificar como o aluno interpreta o número que obtém quando termina de resolver uma equação, isto é, se ele volta a analisar o problema que estava resolvendo, a fim de dar uma resposta apropriada, ou se somente apresenta o resultado da equação. Não há, nesta questão, um problema a ser resolvido com uma equação. Por isso, não nos será possível avaliar se o aluno volta ao problema para dar a resposta, a não ser que ele mencione o resultado de uma equação como referente à resposta de um problema. Dessa forma, é possível que o objetivo acabe por não ser alcançado. Mesmo assim, talvez possamos obter respostas que nos levem a algumas sugestões de como os alunos interpretam o resultado de uma equação. Vale também ressaltar que esta questão foi escolhida por ter sido apresentada aos professores colaboradores no início das oficinas sobre equações. O intuito, nas oficinas com os professores, era a discussão dos conceitos envolvidos na equação e na resolução de equações. Por isso acreditamos que a questão pode ser mais adequada no contexto com os professores do que no trabalho com os alunos, em que não haveria discussões. Os professores, como colaboradores, entretanto, fizeram a escolha de incluí-la no instrumento de coleta de dados com os alunos.

As respostas a essa questão foram classificadas em cinco categorias: *Resposta relacionada à conta*, *O valor da incógnita*, *O resultado foi encontrado*, *Sentimentos* e *Outros*. A freqüência em que cada uma ocorre é apresentada na **Tabela 6**.

Tabela 6: Categorias de respostas para a Questão 4

Resposta	*GU1*	*GU2*	*SP2*	*Total*
Resposta relacionada à conta	14	8	5	27
O valor da incógnita	8	14	3	25
O resultado foi encontrado	3	2	5	10
Sentimentos	-	-	5	5
Outros	7	2	3	12

Respostas na categoria *Resposta relacionada à conta* são as mais freqüentes, dadas por 27 alunos, e referem-se às que especificam o resultado como um número obtido com um cálculo, uma conta. Elas são como a **Figura 40** ou a **Figura 41**.

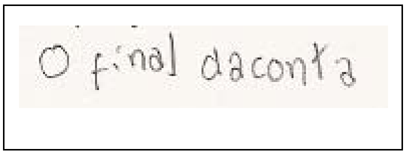

O final daconta

Figura 40: Resposta do aluno [GU113] para a Questão 4


Significa tudo que você somou, dividiu etc...

Figura 41: Resposta do aluno [SP213] para a Questão 4

A categoria *O valor da incógnita* refere-se às respostas que explicitam, de alguma forma, a incógnita, por exemplo a **Figura 42** ou ainda a **Figura 43**. Esse tipo de resposta está presente no trabalho de 25 alunos.

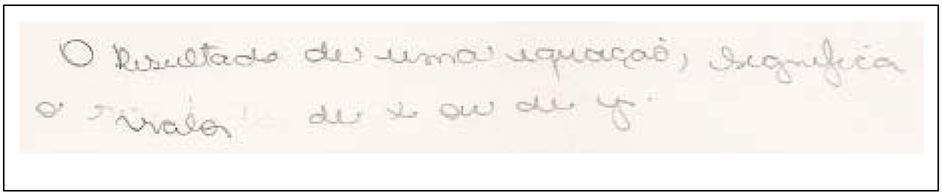

O Resultado de uma equação, significa o valor de x ou de y.

Figura 42: Resposta do aluno [SP214] para a Questão 4

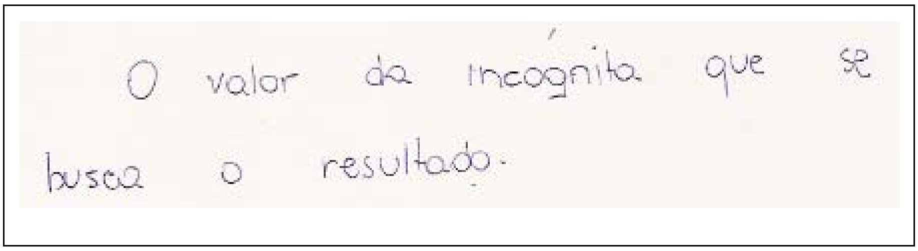

O valor da incógnita que se busca o resultado.

Figura 43: Resposta do aluno [GU211] para a Questão 4

É interessante notar que a incógnita é lembrada por 25 alunos nessa questão, enquanto apenas cinco a mencionam na Questão 1, *"O que é equação"*, e 16 na Questão 2, *"Para que serve uma equação"*. Aparentemente, o significado do resultado de uma equação é a própria incógnita, mas ela não é relevante para ser mencionada ao se definir uma equação.

Dez alunos não citam a incógnita na resposta dada, mas sim o próprio resultado da equação, por exemplo, a **Figura 44** e a **Figura 45**. Essas respostas estão na categoria *O resultado foi encontrado*, e são consideradas dessa forma, e não na categoria *Resposta relacionada à conta*, porque elas não mencionam uma conta, não há indicação de que o resultado é vindo de uma conta, mas sim que ele existe.

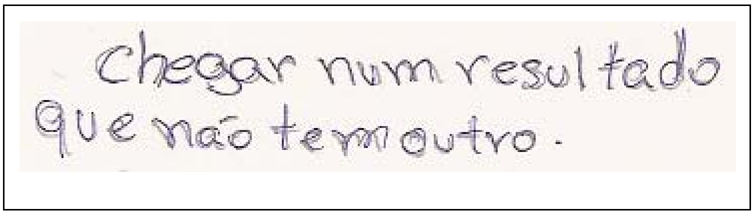


Figura 44: Resposta do aluno [SP217] para a Questão 4

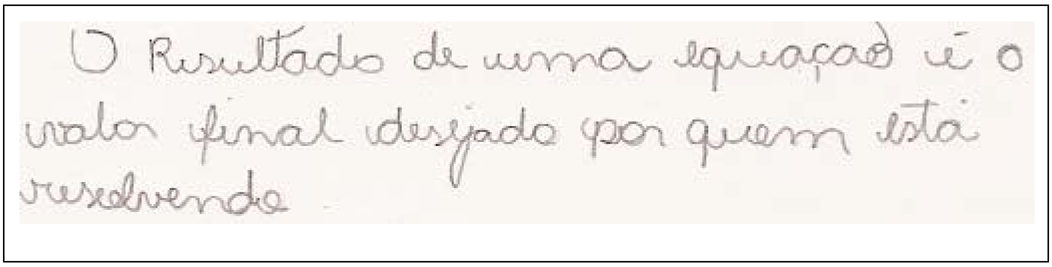


Figura 45: Resposta do aluno [GU202] para a Questão 4

A categoria *Sentimentos*, com cinco respostas, é formada pelas que expressam os sentimentos dos alunos (**Figura 46**).

Finalmente, a categoria *Outros*, com 12 respostas, engloba as que não se encaixam em nenhuma das outras ou não apresentam qualquer outro aspecto relevante para ser discutido, como, na **Figura 47**.

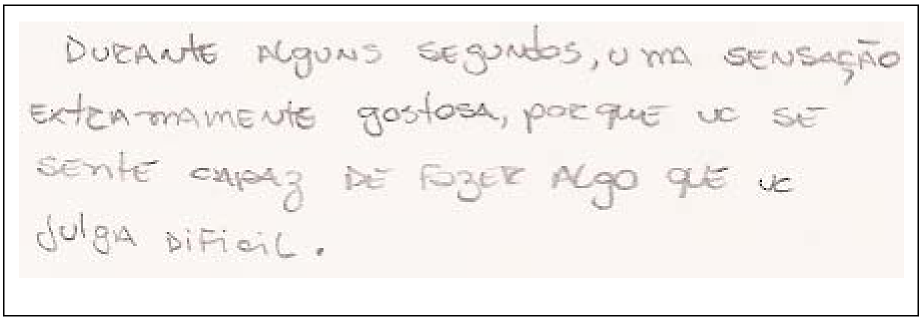

Durante alguns segundos, uma sensação extra-mamente gostosa, porque vc se sente capaz de fazer algo que vc julga dificil.

Figura 46: Resposta do aluno [SP210] para a Questão 4

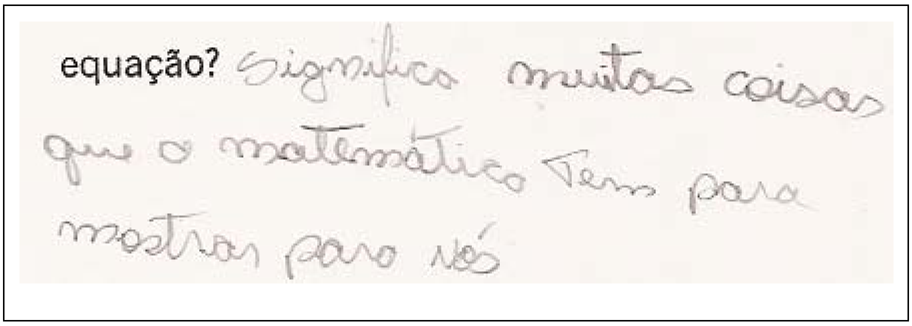

equação? Significa muitas coisas que a matemática tem para mostrar para nós

Figura 47: Resposta do aluno [GU128] para a Questão 4

Diferenças entre as turmas

Observando as respostas dos alunos de cada uma das turmas, vemos que a turma GU1 continua mostrando que uma equação é uma conta, e que o resultado é o fim dessa conta. Para eles, o mais importante é mesmo que se efetuem ações sobre números para alcançar um resultado final. A incógnita e a manipulação simbólica não parecem ser importantes para eles, assim como o sinal de igual.

A turma GU2 enfatiza o resultado como o valor da incógnita. Entendemos que esta turma já é capaz de lidar com os símbolos de uma equação, mas não temos ainda dados suficientes para discutir se há significado simbólico nessa manipulação ou se apenas estão movimentando os símbolos de acordo com alguma técnica.

Novamente, alunos da turma SP2 mostram seus sentimentos em relação à equação, como na **Figura 48**. Essa turma apresenta, também, respostas que relacionam o resultado de uma equação tanto a uma conta quanto à resolução de um problema.

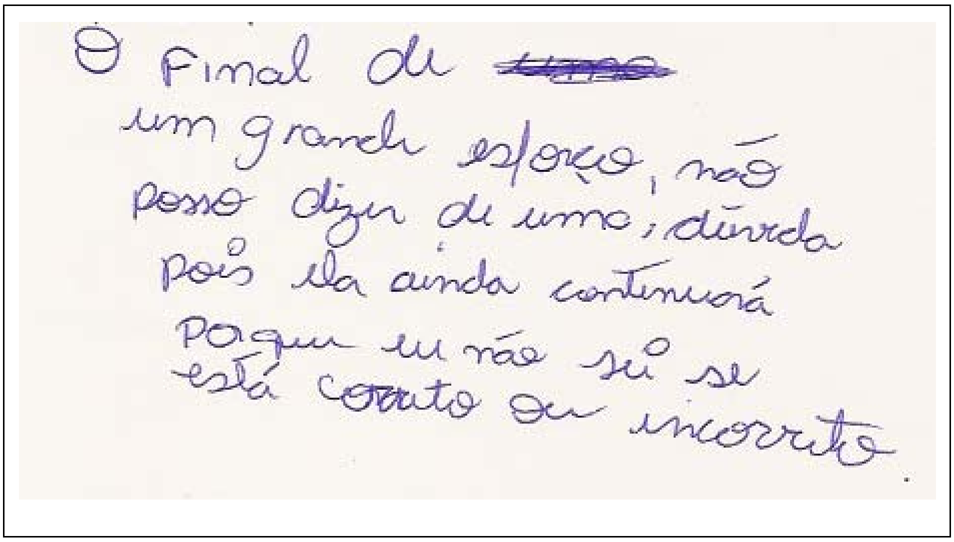


Figura 48: Resposta do aluno [SP203] para a Questão 4

Reflexões à luz dos Três Mundos da Matemática

Analisando os resultados obtidos com as questões de 1 a 4 do questionário, observamos a existência de três grupos distintos de alunos. Um grupo, formado, principalmente, por alunos da turma GU1, que apresenta uma concepção de equação como uma conta, como adição ou multiplicação; um grupo, formado, principalmente, por alunos da turma GU2, que apresenta uma concepção de equação como um "tipo de conta", que envolve uma incógnita; e um grupo, com o menor número de alunos, também formado, principalmente, por alunos da turma GU2, que, além de tomar uma equação como a busca da incógnita, apresenta outras características, dando ênfase à estrutura externa de uma equação, no sentido de Dreyfus e Hoch (2004).

O primeiro grupo, dos que têm uma concepção de equação como uma conta, é o grupo com maior quantidade de alunos. Se olharmos a **Tabela 3** (página 144), a **Tabela 4** (página 153) e a **Tabela 6** (página 165), vemos que respostas que apresentam equação como uma conta são as mais numerosas. Exceção feita somente nas respostas para a Questão 3 (**Tabela 5**, página 158), em que apenas sete alunos apresentam contas ou expressões numéricas como exemplos de equação. Essa mesma concepção, de que uma equação é uma conta, emergiu, inclusive, da análise dos mapas conceituais elaborados por esses alunos.

Os alunos desse primeiro grupo parecem dar atenção somente às operações que devem ser efetuadas, e não a símbolos, como a incógnita e o sinal de igual. Eles trabalham com a manipulação de símbolos, mas não parecem compreender a diferença entre operar com números no mundo corporificado e operar com símbolos no mundo simbólico. Por isso, conjecturamos que esse grupo usa símbolos mas não dá significado simbólico a equações, mas apenas significado às operações com números referentes à aritmética de números inteiros, que têm estreita relação com o mundo corporificado.

O grupo que tem uma concepção de equações ligada à incógnita também é coerente em suas respostas. Quando esta concepção é apresentada pelo aluno na

Questão 1, as respostas para as outras três questões também fazem referência à incógnita. Nesse caso, a utilidade de uma equação é relacionada a encontrar um valor para a incógnita, e o resultado é esse valor. Nesse sentido, os alunos começam a relacionar as "contas" com o mundo simbólico, talvez percebendo que uma equação envolve operações (contas) que já não possuem características exclusivas do mundo corporificado, mas também possuem elementos que devem ser considerados, tais como, a incógnita e a manipulação dos símbolos, presentes no mundo simbólico. Em resumo, conjecturamos que esses alunos começam a perceber algumas características do mundo simbólico, como a existência de símbolos em equações, mas não necessariamente dando significado simbólico a eles.

Juntamente com a incógnita, os alunos que fazem parte do terceiro grupo citam os dois membros de uma equação e a existência de equações de primeiro ou segundo grau. Um exemplo é visto em uma entrevista, em que um aluno que apresenta a equação da **Figura 49** como exemplo na Questão 3.

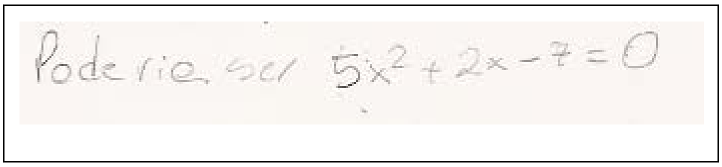


Figura 49: Resposta do aluno [SP205] para a Questão 3

Ao perguntarmos, em entrevista, por que esta é uma equação, este aluno responde que é *"porque eu lembrei que esta é do segundo grau"*. A percepção desses aspectos é tida por Dreyfus e Hoch (2004) como a percepção da estrutura externa de uma equação. Fazer referência a como uma equação se parece e quais são seus elementos faz parte dessa percepção. Entretanto, os autores levantam a hipótese de que a ênfase somente na estrutura externa pode não colaborar para que os alunos compreendam os conceitos envolvidos em uma equação e na resolução dela, porque essa ênfase negligencia o estudo das características da estrutura interna de uma equação, que estão ligadas à análise da equação e de possíveis resoluções e soluções. Essa hipótese de que entender a estrutura externa não é suficiente significa que ter consciência da existência de símbolos em uma equação não é suficiente para garantir que seja dado significado simbólico a esses símbolos, e, portanto, não é suficiente para que um aluno compreenda os conceitos subjacentes à resolução de equações. Logo, os alunos desse terceiro grupo, que mencionam a incógnita e outros aspectos da estrutura externa de uma equação, podem não ter compreendido o significado simbólico desses aspectos e, portanto, a estrutura interna de uma equação. Isso pode ser evidenciado pelo trabalho apresentado, por exemplo na resolução das equações dadas como exemplo na Questão 3.

Dentre as 38 equações lineares com uma incógnita apresentadas (veja **Tabela 5**, página 158), 35 são resolvidas, bem como três das seis equações quadráticas. Não há explicação de cada um dos passos da resolução em nenhuma delas. As soluções corretas para equações lineares são similares, no sentido de que elas apresentam as passagens, mostrando os termos serem transpostos de um lado a outro, como, por exemplo, na **Figura 50**.

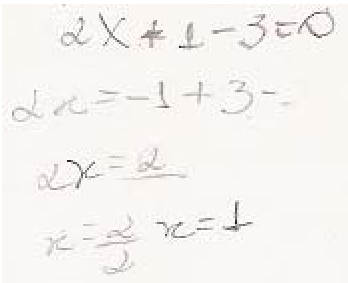


Figura 50: Resposta do aluno [GU205] para a Questão 3

Vale destacar que apenas três alunos apresentam equações lineares em que há ocorrência da incógnita em ambos os membros. Todas as outras são equações de avaliação. Existe a possibilidade de que este e outros alunos efetuem a mesma operação em ambos os membros da equação, mostrando apenas a passagem em que o termo já foi cancelado em um membro e está evidente no outro. Entretanto, esse princípio algébrico não é mencionado por nenhum desses alunos em qualquer dessas quatro questões, nem mesmo nas entrevistas que realizamos. Nelas, os alunos descrevem as técnicas que usam. Por exemplo, um aluno deu como exemplo a equação $2x - 15 = 0$ e a resolveu como apresentado na **Figura 51**.

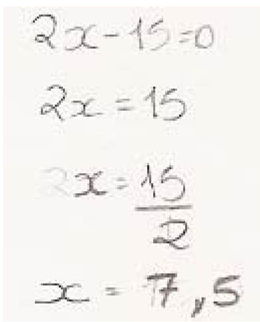


Figura 51: Resposta do aluno [GU103] para a Questão 3

Ao pedirmos para que ele explicasse as passagens de resolução, o aluno explica da seguinte forma:

"**A**: Primeiro eu coloquei, tipo, $2x - 15 = 0$. Depois, eu coloquei na frente $2x$ e coloquei igual a 15.
PR: Por que? O que você fez da primeira para a segunda [passagem]?
A: Eu tirei o zero.
(...)
PR: E fez o que com o 15?
A: O 15 eu coloquei na frente como igual, porque depois tem que dividir pelo dois do $2x$.
(...)
PR: Por que você divide pelo dois?
A: Porque eu chego no resultado, tipo, $7{,}5$."
(Trecho da entrevista com aluno [GU103] da turma GU1)

O trecho de entrevista acima mostra que o aluno apenas conta o que faz e não explica por que esse procedimento é válido. Acreditamos que esses alunos provavelmente não levam em consideração a estrutura interna de uma equação, principalmente por não dar significado simbólico aos símbolos que a representam. Eles não estão fazendo uso de procedimentos como "proceitos" por não estarem relacionando o processo com o conceito que permite que ele seja feito. Na realidade, aparentemente, eles não conhecem os conceitos subjacentes ao procedimento usado.

Em outro exemplo, um aluno resolve a equação $x + 1 = 3$ [GU225] que apresenta na Questão 3 como mostra a **Figura 52**.

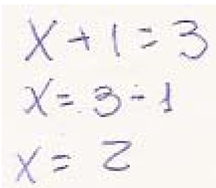


Figura 52: Resposta do aluno [GU225] para a Questão 3

Na entrevista, explica *"eu coloquei x mais um igual a 3, aí eu passei o x pra cá e esse número, como ele ta depois do número de igual, passei ele pra frente e o pra cá ta negativo, ó, que ta positivo vem pra cá negativo. Aí depois é só subtrair."*, mostrando que move um número para o outro lado do sinal de igual, acrescentando uma modificação que nele ocorre quando "passa" este sinal.

Ao resolver os exemplos dados, alguns alunos apresentam erros relatados por outros pesquisadores, tais como, Freitas (2002) ou Sleeman (1984). A nosso ver, esses erros estão relacionados ao uso das técnicas de "passar para o outro lado", que acabam por transformar-se em meios de trabalho[31] (LIMA e TALL, no prelo) desses alunos. Por exemplo, um aluno da turma GU2 apresenta três equações (**Figura 53**).

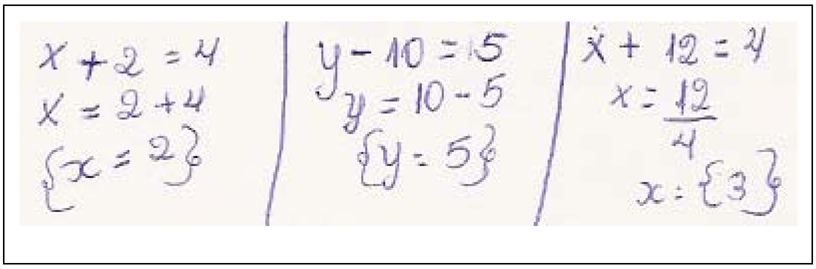


Figura 53: Resposta do aluno [GU201] para a Questão 3

Todas as três são equações de avaliação com o coeficiente da incógnita igual a 1. No primeiro exemplo, o aluno faz a transposição do número 2 para o segundo membro, mas não "muda o sinal". Na segunda equação, o aluno transpõe 10 para o segundo membro, mas muda o sinal tanto desse quanto do número que já estava no segundo membro. Por fim, na equação $x+12=4$, o aluno coloca 12 no segundo membro sem mudar o sinal e ainda o divide pelo número que estava no segundo

[31] Em Inglês, *ways of working*.

membro, invertendo o que seria o denominador pelo numerador, caso 12 estivesse multiplicando, e não somando a incógnita.

É evidente que este aluno não está efetuando a mesma operação em ambos os membros, já que, em cada equação, ele comete um erro diferente, nenhum deles relacionado ao princípio algébrico. Essas três soluções diferentes para o mesmo tipo de equação, as do tipo $x+b=c$, de avaliação, com b e c inteiros, mostram, como afirmam Payne e Squibb (1990), que as *mal-rules* não são consistentes. Conjecturamos que esse aluno, e outros que cometem erros como esse, não conhece um conceito matemático. É possível que eles tenham se deparado com uma técnica, por exemplo, “passar o termo para o outro membro e mudar o sinal”, mas como ela não está relacionada ao princípio algébrico que a criou, o aluno a modificou, criando seus próprios meios de trabalho.

O mau uso das técnicas e dos meios de trabalho derivados delas, mostra que os alunos provavelmente não dão significado simbólico para os procedimentos que usam para resolver equações. Aparentemente, esses alunos não têm pensamento “proceitual”, isto é, os procedimentos não são compreendidos como um processo e o conceito relacionado ao processo não é visto como o produto desse processo. Ainda mais, as técnicas são usadas linha a linha, pois a cada movimentação de um termo para o outro lado do sinal de igual, elas devem ser novamente usadas. Dessa forma, o aluno tem que analisar qual é a próxima ação a efetuar a cada passo da resolução, não vendo, assim, a resolução como um todo, o que o impede de ver seu procedimento como um processo e torna impossível a construção de um pensamento “proceitual”.

A ênfase dada por esses alunos, na resolução de equações, parece ser nos procedimentos, e isso pode ser fruto de uma abordagem de ensino com foco nos passos da resolução, ao invés de nas justificativas matemáticas que a fundamentam. Por mais de uma vez, os alunos entrevistados dizem que o professor com quem aprendeu equações ensinou regras, como pode ser visto na fala de um aluno [SP211] da turma SP2:

> "... quando eu vi isso, no começo era complicado, aí a professora foi resolvendo exercícios, aí ela foi explicando, assim, 'Aqui, nesse caso, você vai colocar *x* aqui, você vai resolver com o sinal de igualdade, você passa pra cá', coisa e tal. Foi desse jeito, sabe, ela não explicou por que que é *x*, porque que é isso, sabe, ela simplesmente pegou um exercício assim e foi explicar. 'Olha só nesse exercício é isso e isso, nos outros vocês vão jogando dessa mesma forma, vocês colocam o sinal de igualdade aqui e vão resolvendo assim'."
>
> (Trecho da entrevista com aluno [SP211] da turma SP2)

Nessa entrevista, também há aparentes movimentos dos termos de uma equação, quando o aluno diz *"passa pra cá"*, indicando que ia mudar a posição de um termo na equação. Tal movimentação pode ter se originado devido à maneira na qual a técnica é referida, isto é, a dizer "passa para lá e muda o sinal", e parece-nos uma corporificação ligada a procedimentos efetuados para resolver equações.

Tomar uma equação como uma conta e movimentar símbolos de um lado a outro do sinal de igual são as únicas características do mundo corporificado que podemos observar nos dados obtidos com as quatro primeiras questões do questionário. Eles não fazem, em nenhum momento, alusão, por exemplo, a uma abordagem corporificada para a introdução de equações, como a metáfora da balança. Acreditamos que esse tipo de abordagem não foi usada de maneira geral e a idéia de igualdade entre os dois membros de uma equação não é utilizada pelos alunos.

Um momento em que consideramos mais provável que algum tipo de corporificação emergisse era no uso de equações para a resolução de situações-problemas. Não há, porém, evidências de que esses alunos usam equações como uma ferramenta para resolução de problemas. A equação parece ser um tópico de trabalho da escola, sem qualquer ligação com assuntos do cotidiano. Dois alunos da turma SP2 deixam isso claro ao dizerem, por exemplo, que uma equação *"Não tem uma finalidade útil para o dia-a-dia, mas é importante no período escolar"* [SP204] (**Figura 54**), enquanto um aluno da turma GU2 afirma que *"a equação é muito importante na matemática e para nós e para os professores"* [GU215] (**Figura 55**), talvez implicando que essa não é uma ferramenta matemática interessante para pessoas que não estejam dentro da sala-de-aula.

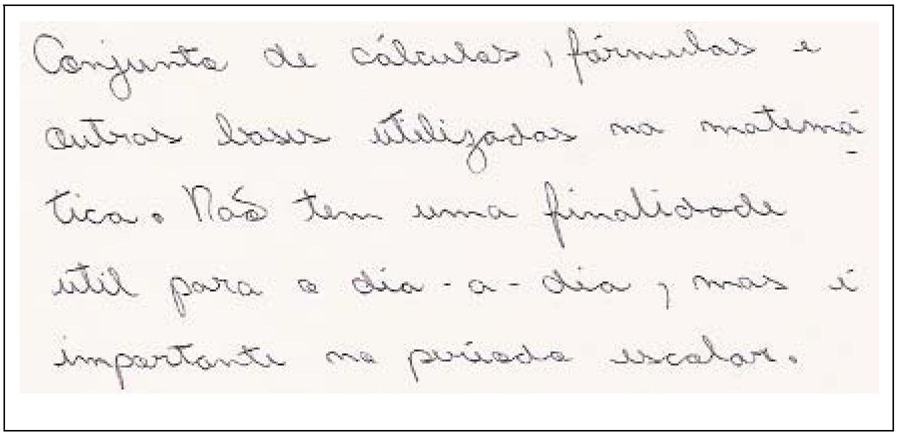
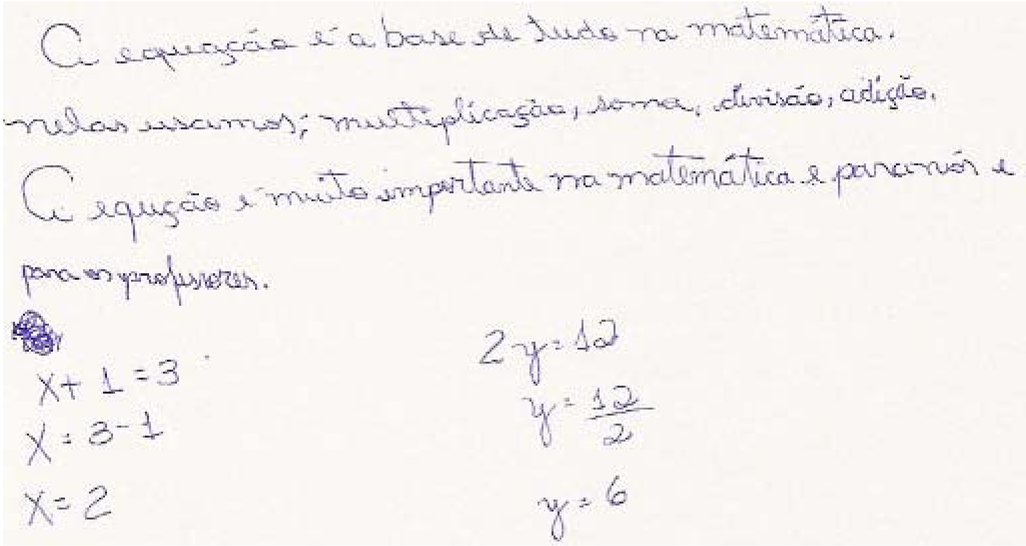

Conjunto de cálculos, fórmulas e
outras bases utilizadas na matemá-
tica. Não tem uma finalidade
útil para o dia-a-dia, mas é
importante no período escolar.

Figura 54: Resposta do aluno [SP204] para a Questão 1


A equação é a base de tudo na matemática.
nelas usamos; multiplicação, soma, divisão, adição.
A equação é muito importante na matemática e para nós e
para os professores.

$x + 1 = 3$
$x = 3 - 1$
$x = 2$

$2y = 12$
$y = \frac{12}{2}$
$y = 6$

Figura 55: Resposta do aluno [GU215] para a Questão 1

O uso de equações para a resolução de situações-problema não parece ser natural ou imediato, para ser efetuado pelo próprio aluno, sem a intervenção de um professor, por isso julgamos que é provável que abordagens de ensino que fazem uso de situações cotidianas não tenham sido usadas.

Sete alunos declaram que é possível que uma equação sirva para *"alguma coisa"* no cotidiano, como, por exemplo, *"Para alguma coisa muito importante no futuro ela há de servir."* [SP201] (**Figura 56**).

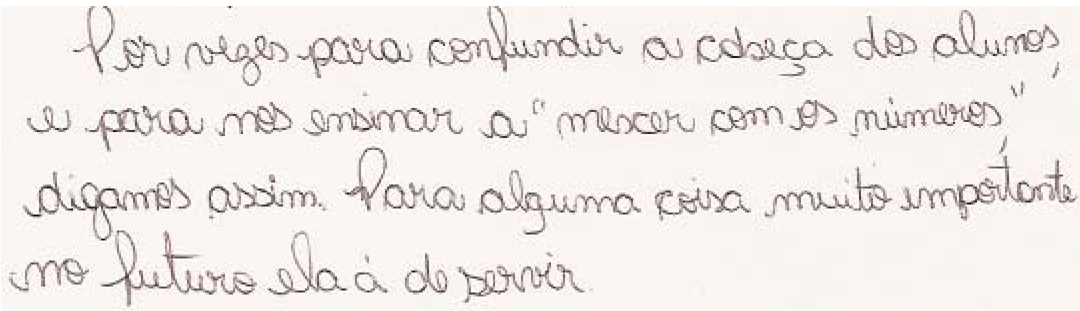

Por vezes para confundir a cabeça dos alunos,
e para nos ensinar a "mexer com os números",
digamos assim. Para alguma coisa muito importante
no futuro ela á de servir

Figura 56: Resposta do aluno [SP201] para a Questão 2

Nenhum aluno, nem os que dizem que ela serve para alguma coisa no cotidiano, dá exemplos, nem no questionário nem nas entrevistas, de como ela pode ser usada fora da escola. Um aluno da turma SP2 que respondeu a Questão 2, *Para que serve uma equação?*, como na **Figura 57**, em entrevista, disse que *"acho que não, né? Eu menti aí!"*, ao perguntarmos qual poderia ser uma aplicação para equações a qual ele estava se referindo.

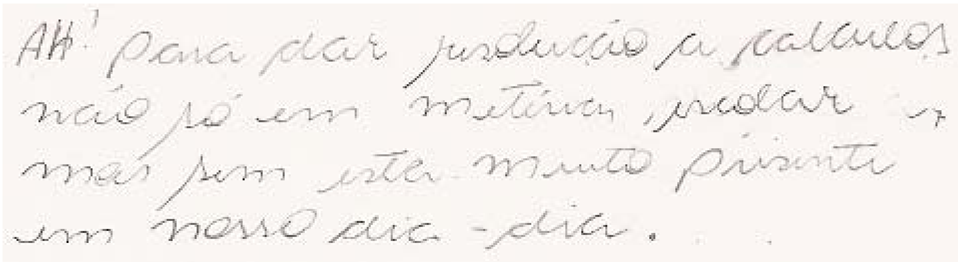
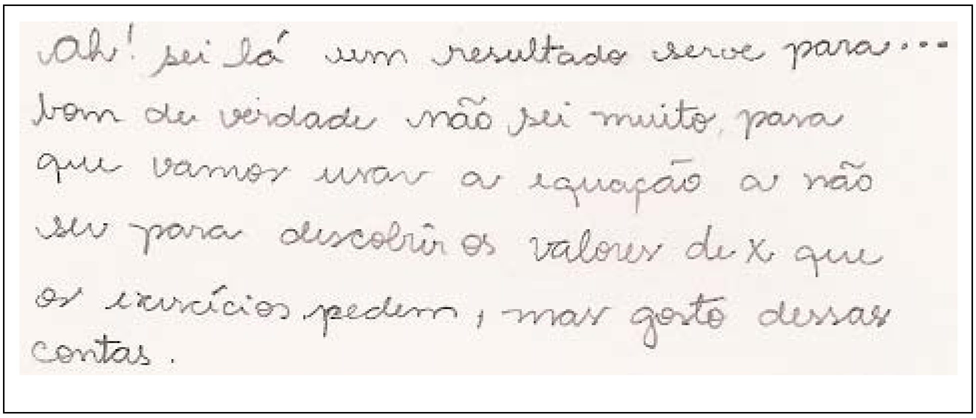

Ah! Para dar produção a calculos
não só em metéria, escolar,
mas sim esta muito presente
em nosso dia-dia.

Figura 57: Resposta do aluno [SP209] para a Questão 2

A falta de conexão entre os mundos corporificado e simbólico também é evidenciada quando os alunos dizem que o resultado de uma equação é o valor da incógnita, e em respostas como na **Figura 58**. Nessa resposta, vemos que é possível que a abordagem de ensino tenha sido principalmente em exercícios nos quais é necessário descobrir o valor de x, mas não necessariamente em situações em que o "x" tem algum significado fora do contexto matemático.



Ah! sei lá um resultado serve para...
bom de verdade não sei muito para
que vamos usar a equação a não
ser para descobrir os valores de x que
os exercícios pedem, mas gosto dessas
contas.

Figura 58: Resposta do aluno [SP211] para a Questão 4

O sinal de igual

De acordo com Kieran (1981), ao lidar com contas, os alunos usam o sinal de igual para apresentar o resultado ou para indicar uma operação a ser efetuada. Com essas características, esse sinal é tido como operacional. Já no contexto das equações, é preciso que ele tenha o que a autora chama de significado de equivalência na Álgebra, isto é, que ele represente a igualdade entre os membros de uma equação. Como vimos, uma equação, para a maioria dos alunos sujeitos dessa pesquisa, pode ser vista como uma conta, o que acarretaria uma visão do sinal de igual como operacional.

O sinal de igual não é mencionado em nenhuma das respostas para as quatro primeiras questões do questionário, mas apenas em entrevistas, quando dois alunos fazem menção a ele. Um deles explica que existem alguns tipos de sinal em equação:

> "**A**: positivo, negativo e igual.
> **PR**: Se não tiver um desses sinais muda alguma característica?
> **A**: ah, eu acho que fica mais complicado."
>
> (Trecho de entrevista com aluno [SP207] da turma SP2)

Porém, como vemos no trecho da entrevista, a ausência do sinal de igual, em alguma conta que o aluno julga como sendo uma equação, só faz com que aumente a dificuldade, mas não deixa de ser equação para ele.

Já outro aluno dessa mesma turma diz, em entrevista, que *"toda equação tem uma incógnita e o sinal de igualdade"* [SP211]. Este foi o único aluno que mencionou a necessidade do sinal de igual para que a "conta" seja uma equação. Não há qualquer outra menção de que há uma igualdade entre primeiro e segundo membros, nem mesmo pelos alunos que os citam. Além disso, a equivalência entre as equações que formam os passos da resolução também não foi lembrada.

Acreditamos que, como esses alunos parecem ver uma equação como uma conta, o sinal de igual acaba não tendo um papel de relevância na situação, o suficiente para ser citado. Em entrevista, o aluno que deu como exemplo de equação a expressão algébrica da **Figura 59** diz que o sinal de igual no fim *"é porque tem que chegar no resultado, no produto final"*, mostrando que, para ele, este sinal é operacional.

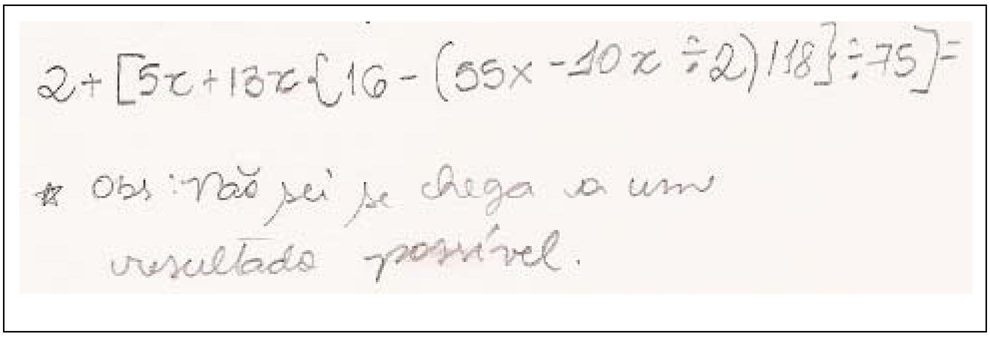


Figura 59: Resposta do aluno [SP206] para a Questão 3

O significado do sinal de igual como operacional não é compatível com o significado que deve ser dado a ele no contexto das equações. Ao ser usado como operacional, ele pode gerar dificuldades na resolução de equações. Por exemplo, um aluno da turma GU1 apresenta a resolução apresentada na **Figura 60** para a equação que dá como exemplo.

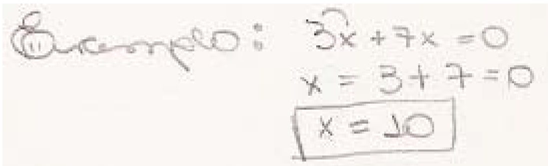


Figura 60: Resposta do aluno [GU122] para a Questão 3

No caso do exemplo da **Figura 60**, o coeficiente da incógnita nos dois termos é transportado para o segundo membro, mas "igual a zero" permanece. Acreditamos que o primeiro sinal de igual faz o papel de operacional, apresentando o resultado da conta, enquanto o segundo pode estar representando o sinal de igual que deve existir em uma equação, tendo um "zero" depois dele. Esse exemplo é evidência de que o sinal de igual não representa a igualdade entre primeiro e segundo membros. Isso nos parece ser devido à interferência do entendimento de uma equação como uma conta, bem como à não transição do significado dado a ele, no contexto de conta, para o significado que ele deve ter no trabalho com equações.

Já-encontrados

Como pode ser visto na **Tabela 5** (página 158), 38 alunos apresentaram, como exemplo, uma equação linear. Sugerimos que isso pode indicar que a concepção de equação, como equação linear, é um "já-encontrado" para esses alunos. Como eles, provavelmente, têm mais experiência com esse tipo de equação do que com quadráticas, eles podem tê-las usado para garantir que estejam dando um exemplo válido de equação, bem como de que a resolução esteja correta.

Além disso, o uso de "x" como a incógnita também é um "já-encontrado". Todos os alunos apresentam exemplos em que a incógnita é nomeada "x". Raras exceções são encontradas nas respostas que apresentam mais de uma equação como exemplo na Questão 3, e o segundo exemplo dado tem "y" como incógnita, ou quando a equação tem duas incógnitas, e elas são x e y. Vale ressaltar que, na tempestade de idéias da turma GU1, os alunos disseram "x e y" para se referirem à incógnita.

Um outro possível "já-encontrado" presente no trabalho desses alunos está associado com operações efetuadas durante o trabalho com expressões algébricas. Por exemplo, um aluno apresenta como exemplo de equação a **Figura 61**, fazendo apenas os passos da resolução em que as somas e multiplicações foram efetuadas, sem terminar a resolução da equação. É possível que "resolver primeiro as operações que estão entre parênteses" seja um "já-encontrado" para esse aluno, bem como a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição, apesar de ele ter multiplicado o fator 2, em evidência, somente pelo primeiro termo dentro dos colchetes.

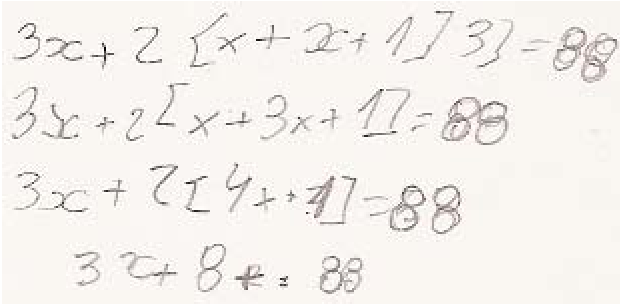


Figura 61: Resposta do aluno [GU126] para a Questão 3

Além disso, em uma expressão algébrica, o resultado é sempre uma expressão equivalente, que foi escrita de forma simplificada, obtida fazendo-se todas as operações elementares nela envolvidas. Talvez seja essa a idéia do aluno no momento da resolução, e esse “já-encontrado” permitiu que ele parasse sua resolução, não encontrando o valor da incógnita.

O fato de 37 alunos resolverem o exemplo de equação, linear ou quadrática, apresentado, mostra que os procedimentos de resolução também podem ter status de “já-encontrados” no trabalho desses alunos. Durante a resolução de equações, técnicas de resolução, tais como, as citadas por Freitas (2002), de “passar para o outro lado e trocar o sinal” ou “passar para o outro lado dividindo”, parecem estar subjacentes aos procedimentos. Por isso, acreditamos que também essas técnicas fazem o papel de “já-encontrados” na resolução de equações.

Com a análise dessas quatro primeiras questões, acreditamos que esses procedimentos e técnicas, já encontradas em situações anteriores, por esses alunos, não são usadas como “proceitos”, mas sim como procedimentos que não têm significado relacionado ao princípio algébrico de efetuar a mesma operação em ambos os lados. São procedimentos sem significado simbólico, assim como as expressões numéricas, que são equações na concepção deles. Esses procedimentos parecem ter significado no mundo corporificado, porque os termos de uma equação movimentam-se de um lado para o outro do sinal de igual, como se fossem entidades físicas, em uma corporificação procedimental[32], e ainda carregam uma certa “mágica” (LIMA e TALL, no prelo) de mudar o sinal ou ser colocado embaixo do termo que está no outro membro.

A-encontrar

Um último exemplo de resolução que merece ser destacado apresenta uma importante situação: uma tentativa de resolver uma equação linear por meio da fórmula de Bhaskara. Um aluno da turma GU1 escolhe valores para a, b e c (coeficientes de uma equação quadrática na forma $ax^2+bx+c=0$) para calcular o discriminante, obtendo o que apresentamos na **Figura 62**.

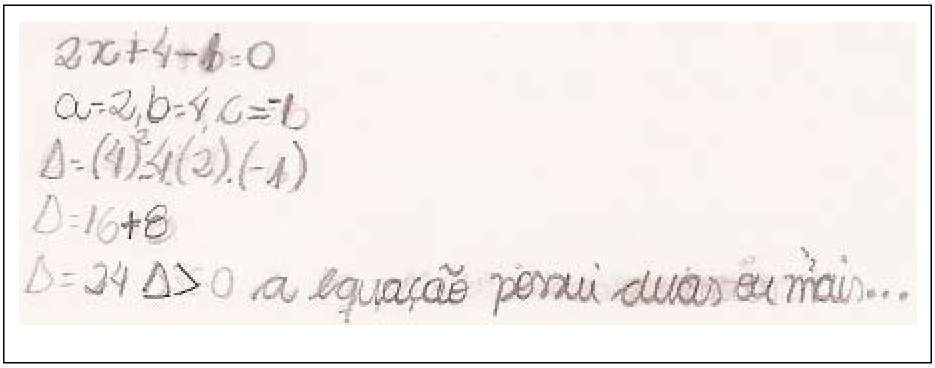


Figura 62: Resposta do aluno [GU129] para a Questão 3

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), os alunos sujeitos dessa pesquisa estudaram equações lineares desde o início do quarto ciclo

[32] Em Inglês, *procedural embodiment*.

do Ensino Fundamental. Teoricamente, as equações lineares já fazem parte das imagens de conceito desses alunos sobre equação. As equações quadráticas são estudadas na última série do quarto ciclo ou no início do Ensino Médio (PCN) e, de acordo com os professores participantes, as equações quadráticas são principalmente resolvidas em sala de aula por meio da fórmula de Bhaskara. Se as sugestões dos PCN foram seguidas, os alunos sujeitos dessa pesquisa haviam terminado recentemente o aprendizado de equações quadráticas.

Como vimos no exemplo em que o aluno resolveu uma equação linear com um método para resolver equações quadráticas, o aprendizado da fórmula de Bhaskara influenciou um aprendizado anterior, o da resolução de equações lineares. Por isso, entendemos que a fórmula de Bhaskara agiu como "a-encontrar" no trabalho desse aluno. Esse é o primeiro "a-encontrar" que obtivemos em nossa pesquisa. Acreditamos que as concepções que esse aluno estava criando sobre a fórmula de Bhaskara influenciaram o aprendizado anterior de maneira negativa. É possível, também, que o aluno não tenha feito ainda inter-relações entre os "já-encontrados" relacionados a equações lineares presentes em sua imagem de conceito e as experiências com equações quadráticas que começavam a modificá-la.

Um aluno da turma SP2 apresenta $\Delta = b^2 + 4 \cdot A \cdot C$ [SP209] (**Figura 63**) como exemplo de equação. Entendemos que tal exemplo enfatiza a possibilidade de a fórmula de Bhaskara estar sendo vista como um "a-encontrar", que interfere nos "já-encontrados", desse aluno, que confunde a fórmula com o conceito.

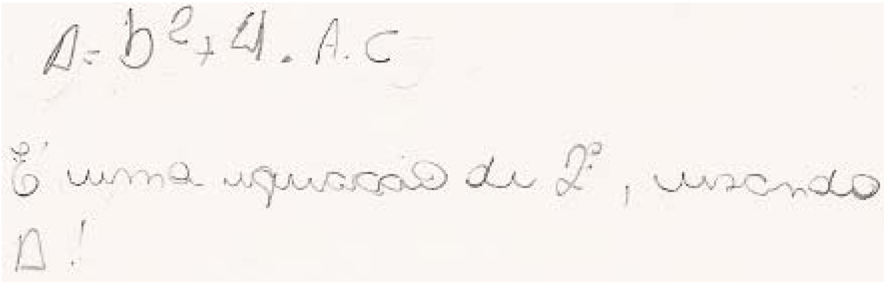


Figura 63: Resposta do aluno [SP209] para a Questão 3

4.2.5. Questão 5: Resolva a equação $t^2 - 2t = 0$.

Para classificar as resoluções apresentadas para a equação $t^2 - 2t = 0$, levantamos seis categorias: *Resolve corretamente*, *Cita Bhaskara/usa Bhaskara incorretamente*, *Incógnita como expressão*, *Transforma em equação linear*, *Não sei/Não lembro* e *Outros*. Cada uma das respostas foi classificada em apenas uma das categorias, apresentadas na **Tabela 7**.

Tabela 7: Categorias de respostas para a Questão 5

Resposta	*GU1*	*GU2*	*SP2*	*Total*
Resolve corretamente	–	6	–	6
Transforma em equação linear	19	8	5	32
Cita Bhaskara/usa Bhaskara incorretamente	2	5	7	14
Incógnita como expressão	1	–	2	3
Não sei/Não lembro	–	5	4	9
Outros	10	2	1	13

Nenhum dos 77 alunos que responderam a essa questão colocou t em evidência de modo a obter $t \cdot (t-2) = 0$ para resolver a equação sem precisar usar a fórmula de Bhaskara. Aparentemente, o fato de que, se um produto é igual a zero, um dos fatores é zero, não é conhecido pelos alunos. Alternativamente, é possível que os alunos já estejam familiarizados com a fatoração, mas como, de acordo com os professores colaboradores, à fórmula é dado o principal enfoque para a resolução de equações, os alunos podem ter dado mais atenção a ela e deixado de lado a possibilidade de usar a fatoração, que, de acordo com os PCN, deveria ser um “já-encontrado” para esses alunos. Isso implicaria que o uso da fórmula de Bhaskara é “forte” o suficiente para fazer com que um “já-encontrado” se esvaeça.

Somente seis alunos compõem a categoria *Resolve corretamente*, apresentando uma resolução satisfatória para a equação da Questão 5. Todos eles usam a fórmula de Bhaskara e trocam a incógnita t por x quando escreveram a fórmula completa, como faz um aluno da turma GU2 (**Figura 64**).

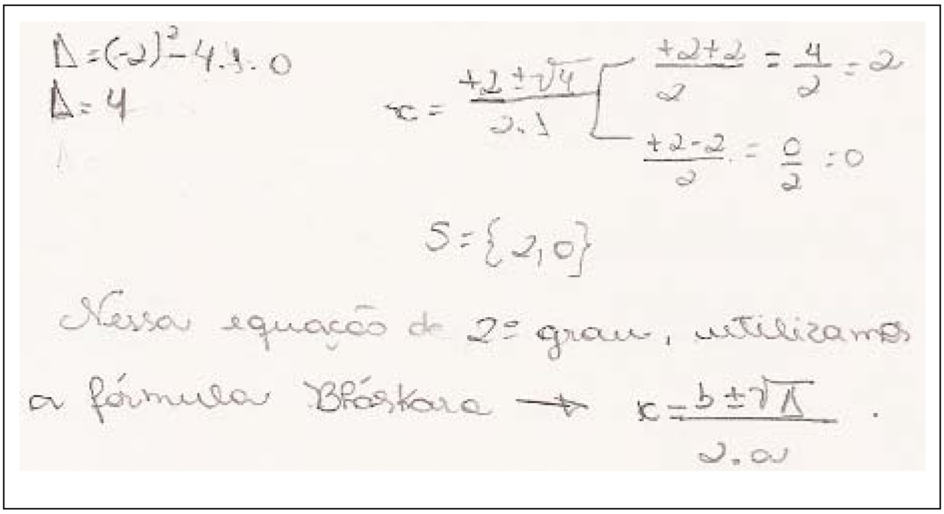


Figura 64: Resposta do aluno [GU213] para a Questão 5

A categoria de maior freqüência é *Transforma em equação linear*. Nessa categoria, estão 32 alunos que, de alguma forma, fazem com que o termo com a incógnita ao quadrado desapareça. Dezesseis alunos nessa categoria substituíram t^2 por $2t$ na equação $t^2 - 2t = 0$. Esse fato chamou-nos atenção porque os alunos que assim fizeram pareciam estar buscando um meio de explicar por que o primeiro membro é igual a zero ao invés de buscar o valor da incógnita. A explicação mais freqüente é a apresentada na **Figura 65**, isto é, para esses alunos, t^2 é o mesmo que $t \cdot t$, que eles entendem como igual a $2t$. Isso faz com que a equação torne-se $2t - 2t = 0$, e, assim, eles concluem que é verdade que o primeiro membro é igual ao segundo. Este foi um dos principais motivos de introduzirmos a atividade de resolução de equações.

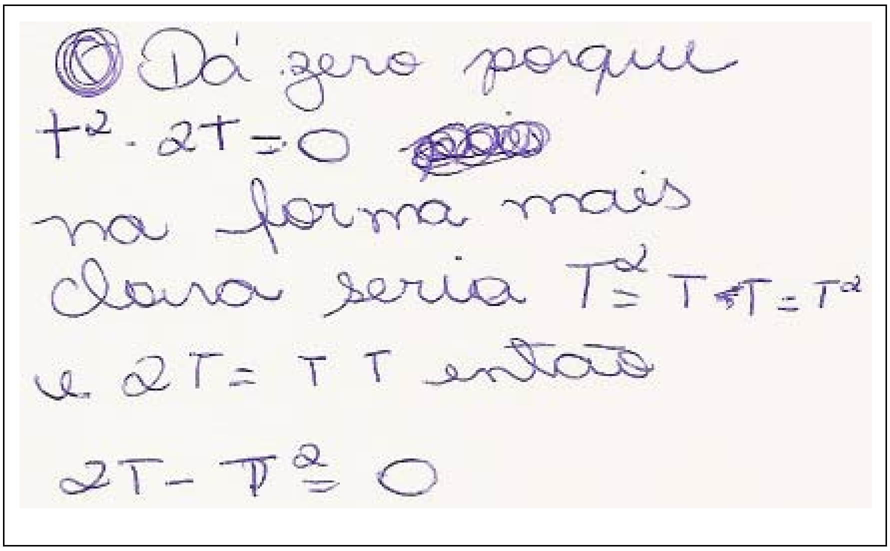


Figura 65: Resposta do aluno [SP208] para a Questão 5

Os outros 16 alunos dessa categoria tentaram eliminar o termo com a incógnita ao quadrado de formas diferentes. Desses alunos, um acabou por obter um termo com a incógnita ao cubo, enquanto todos os outros obtiveram somente termos com a incógnita linear. Por exemplo, um aluno da turma SP2 resolve $t^2 - 2t = 0$ como na **Figura 66**.

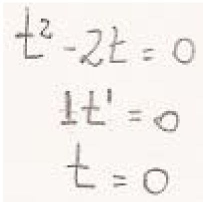


Figura 66: Resposta do aluno [SP207] para a Questão 5

Em entrevista, o aluno explica como obteve a segunda linha de sua resolução.

> "**A**: eu acho que eu subtraí t^2 menos $2t$.
> **PR**: que deu?
> **A**: deu $1t^1$.
> **PR**: e como você subtraiu esse [t^2] desse [$2t$] para chegar nesse [$1t^1$]?
> **A**: ah, eu imaginei o 1 aqui [no coeficiente de t^2] e o 1 aqui [no expoente de t em $2t$] em cima, já que ele não aparece, aí eu subtraí."
> (Trecho de entrevista com aluno [SP207] da turma SP2)

Como vemos no trecho da entrevista, o aluno faz a subtração não só dos coeficientes (na continuação, o aluno percebe que o coeficiente de t na segunda linha deveria ser -1 para que a subtração ficasse correta), mas também os expoentes das incógnitas são subtraídos, e o aluno obtém uma equação linear, que lhe é familiar.

Uma equação linear também é obtida neste outro exemplo, em que um aluno da turma GU2 escreve a explicação do que fez, juntamente com a resolução na resposta para esta questão (**Figura 67**). Neste caso, foi por meio da subtração

$0 - t^2$ sendo igual a zero que o aluno obteve uma equação linear. Observamos, ainda, que a explicação dos passos feitos para obter a resposta é estritamente procedimental.

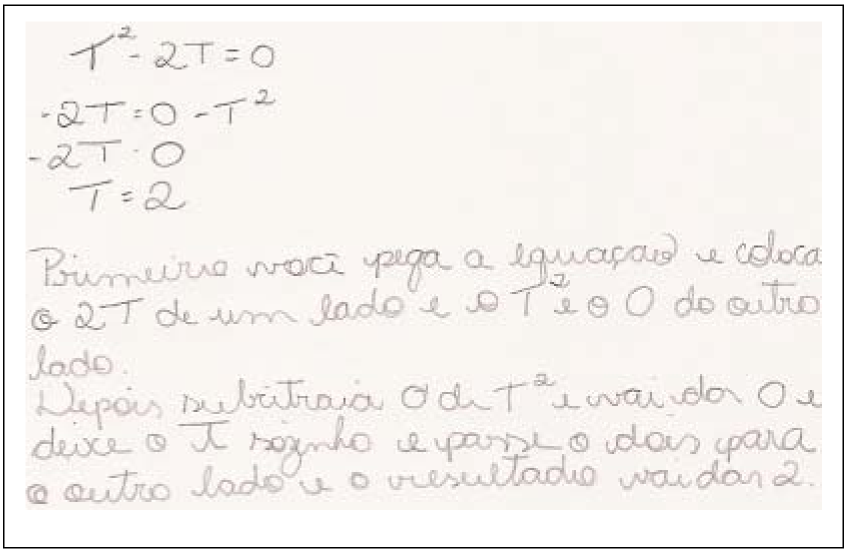

$T^2 - 2T = 0$
$-2T = 0 - T^2$
$-2T \cdot 0$
$T = 2$
Primeiro você pega a equação e coloca o 2T de um lado e o T^2 e o 0 do outro lado.
Depois subtraia 0 de T^2 e vai dar 0 e deixe o T sozinho e passe o dois para o outro lado e o resultado vai dar 2.

Figura 67: Resposta do aluno [GU202] para a Questão 5

A categoria *Cita Bhaskara/usa Bhaskara incorretamente* é formada por 14 alunos, três dos quais mencionam a fórmula mas não apresentam os cálculos efetuados, e 11 usam a fórmula incorretamente, seja calculando apenas o discriminante, seja usando a fórmula toda.

Dos que apenas citam a fórmula, temos respostas, por exemplo, como na **Figura 68**. Este aluno apenas diz que usou a fórmula, mas não apresenta os cálculos, enquanto outro aluno sugere que a fórmula seria a maneira de resolver, como na **Figura 69**, mas também não apresenta cálculos.

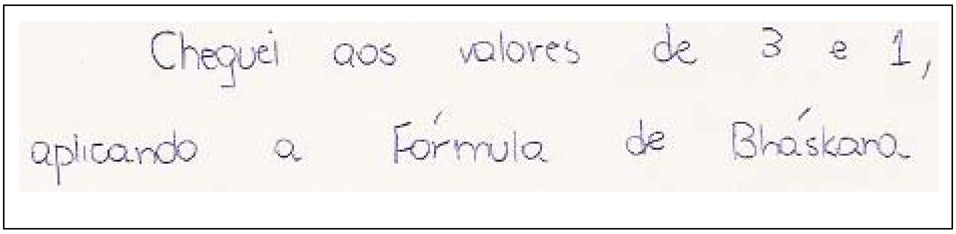
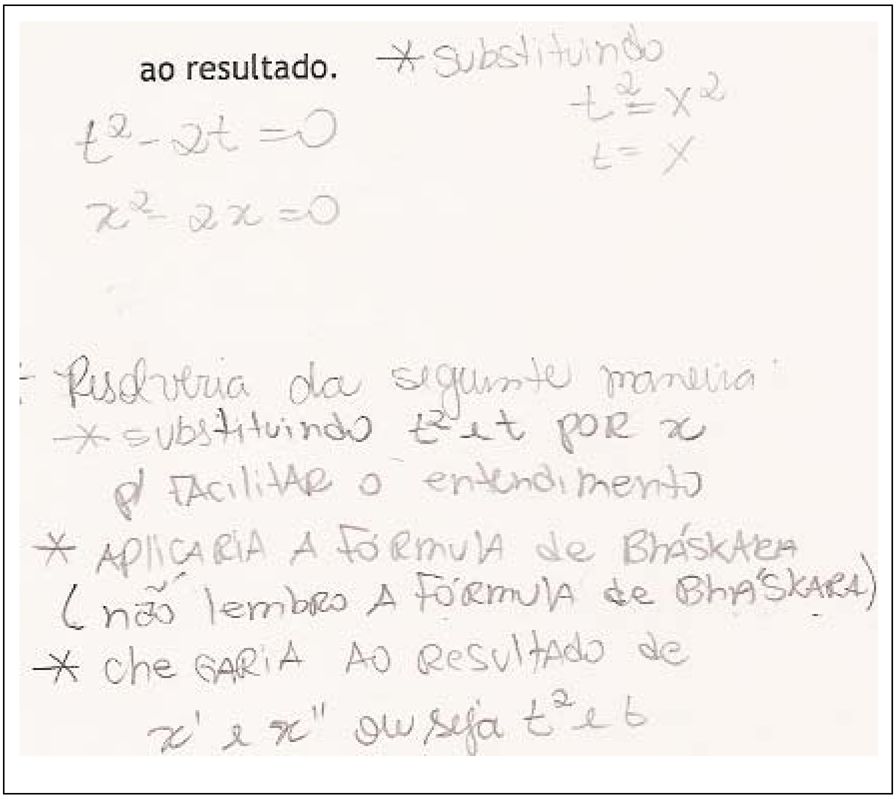

Chequei aos valores de 3 e 1, aplicando a Fórmula de Bháskara

Figura 68: Resposta do aluno [GU211] para a Questão 5


ao resultado. * substituindo

$t^2 = x^2$

$t = x$

$t^2 - 2t = 0$

$x^2 - 2x = 0$

: Resolveria da seguinte maneira:

* substituindo t^2 e t por x

p/ facilitar o entendimento

* aplicaria a fórmula de Bháskara

(não lembro a fórmula de Bháskara)

* chegaria ao resultado de

x' e x'' ou seja t^2 e t

Figura 69: Resposta do aluno [SP215] para a Questão 5

Dentre os alunos que fazem uso da fórmula de maneira incorreta, temos, por exemplo, um aluno da turma SP2, que apresenta a solução da **Figura 70**:

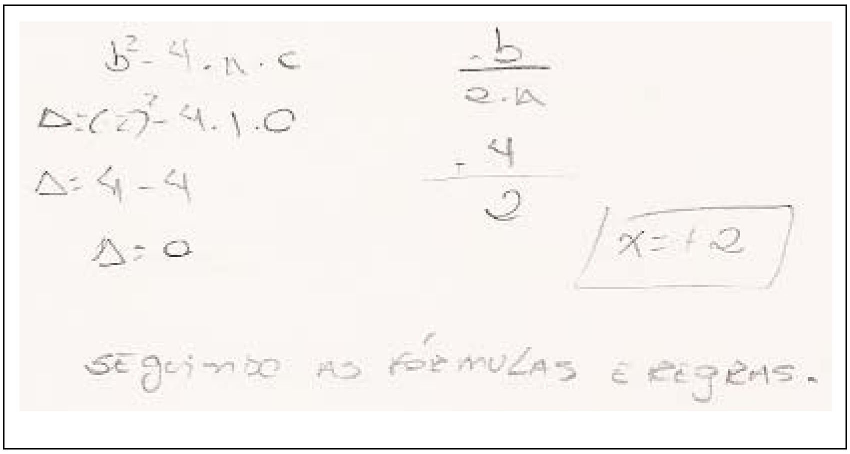
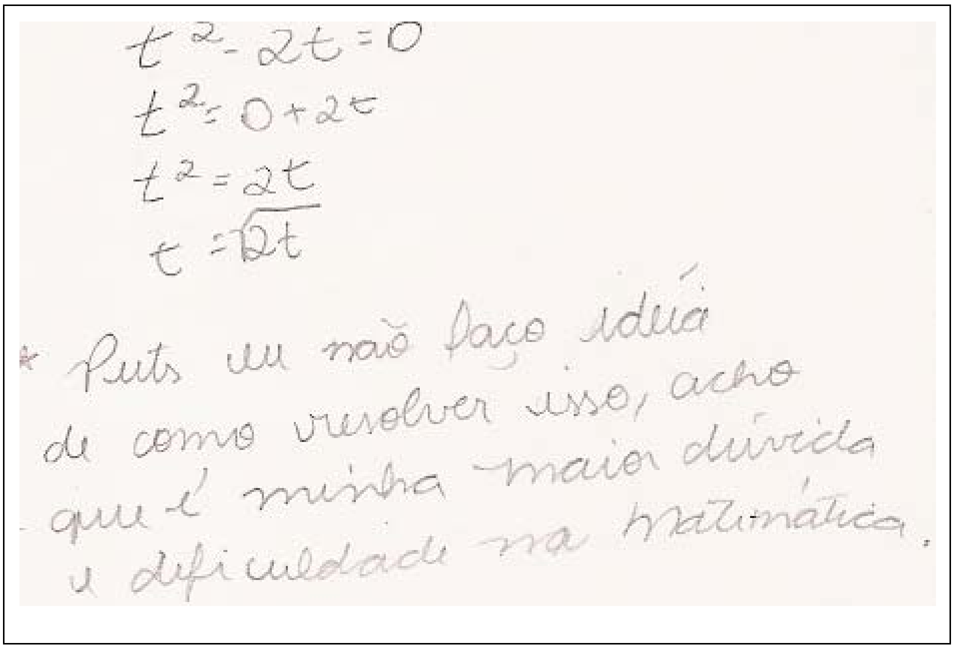


Figura 70: Resposta do aluno [SP210] para a Questão 5

A categoria *Incógnita como expressão* refere-se a três alunos cujos procedimentos resultam em uma resposta para a incógnita que não é um valor numérico, mas sim uma expressão contendo a própria incógnita. Respostas como essa foram obtidas por meio de técnicas de resolução de equação, como, por exemplo, feito por um aluno da turma SP2, como mostra a **Figura 71**. Nesse exemplo, o aluno não encontrou um valor numérico para a incógnita, apesar de ter usado técnicas de resolução de equações, tais como, uma tentativa de isolar a incógnita. Ele ainda se mostra insatisfeito com a resposta dada, talvez exatamente pelo fato de ter obtido uma expressão e não um número no final, como afirma Collis (1974, apud KIERAN, 1981).


$t^2 - 2t = 0$

$t^2 = 0 + 2t$

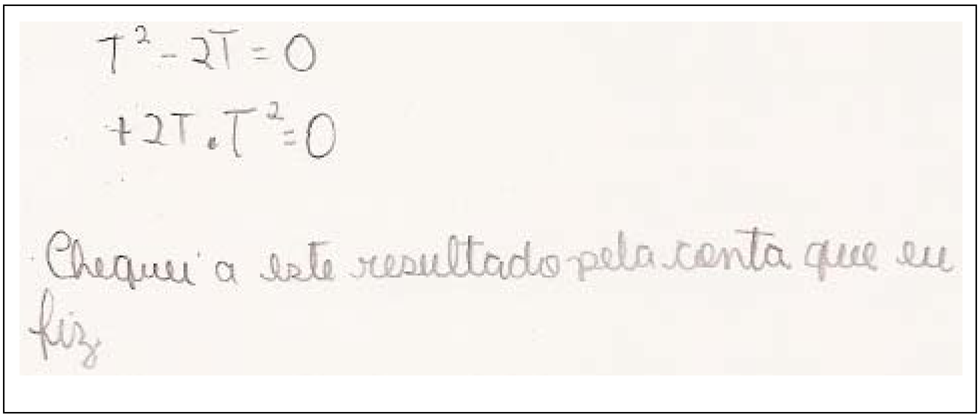
$t^2 = 2t$

$t = \sqrt{2t}$

* Puts eu não faço idéia de como resolver isso, acho que é minha maior dúvida e dificuldade na matemática.

Figura 71: Resposta do aluno [SP206] para a Questão 5

A categoria *Outros*, formada por 13 respostas, contém aquelas que não se encaixam em qualquer das outras categorias e não apresentam dados relevantes para serem discutidos. Por exemplo, a resolução de um aluno da turma GU1, (**Figura 72**), que não apresenta explicação de suas passagens, nem uma resolução em que se chega a um valor para a incógnita.


$T^2 - 2T = 0$

$+2T \cdot T^2 = 0$

Chequei a este resultado pela conta que eu fiz

Figura 72: Resposta do aluno [GU120] para a Questão 5

Diferenças entre as turmas

Ao analisarmos cada uma das turmas, vemos que os alunos da turma GU2 são os que mais usam a fórmula de Bhaskara para resolver essa equação. São dessa turma os seis alunos que apresentam resoluções corretas.

Os alunos da turma GU1 têm como principal característica, nessa questão, a "transformação" da equação dada em uma linear. Isso é coerente com o trabalho deles até então, porque eles vêem equação como conta, e transformam a equação quadrática em linear por meio de operações entre os expoentes das incógnitas. Já a turma SP2 mostra pouca habilidade com a fórmula, mas também não apresenta outras maneiras de resolver a equação $t^2 - 2t = 0$.

4.2.6. Questão 6: Resolva a equação $(y-3)\cdot(y-2)=0$.

As respostas apresentadas nessa questão foram divididas em sete categorias: *Resolve corretamente*, *Cita ou usa a Fórmula de Bhaskara*, *Cita ou usa distributiva*, *y2 desaparece*, *"Tira" parênteses*, *Não sei/Não lembro* e *Outros*. As respostas dos alunos podem estar em mais de uma categoria, pois, por exemplo, um aluno pode citar a fórmula e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, ou então aplicar essa propriedade e depois continuar a resolução de forma que a incógnita ao quadrado se perca. Essas categorias estão apresentadas na **Tabela 8**.

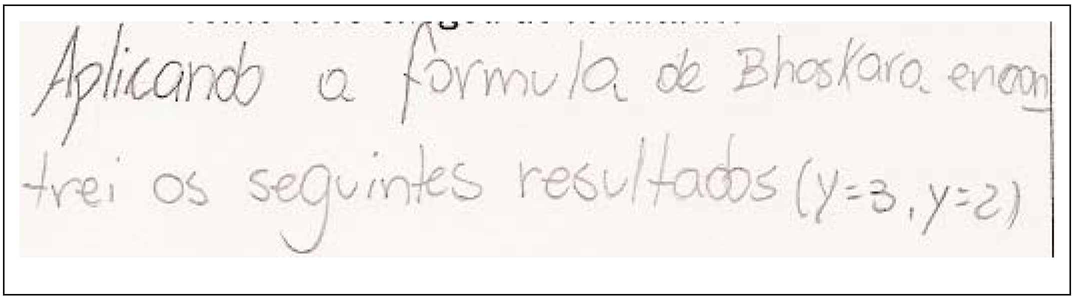
Tabela 8: Categorias de respostas para a Questão 6

Resposta	*GU1*	*GU2*	*SP2*	*Total*
Resolve corretamente	–	7	–	7
Cita ou usa a Fórmula de Bhaskara	2	5	4	11
Cita ou usa distributiva	4	5	10	19
y^2 desaparece	–	4	4	8
“Tira” parênteses	7	1	1	9
Não sei/Não lembro	1	2	3	6
Outros	18	7	2	27

É importante observar que nenhum aluno resolveu a equação $(y-3)\cdot(y-2)=0$ fazendo $y-3=0$ ou $y-2=0$ para obter as raízes 3 e 2. Tal fato corrobora nossa sugestão de que esses alunos não conhecem a propriedade dos números reais de que, se um produto é zero, algum fator deve ser igual a zero.

As resoluções corretas apresentadas para essa equação formam a categoria *Resolve corretamente*. Somente sete alunos fazem parte dessa categoria e todos eles usam a fórmula de Bhaskara para obter a resposta.

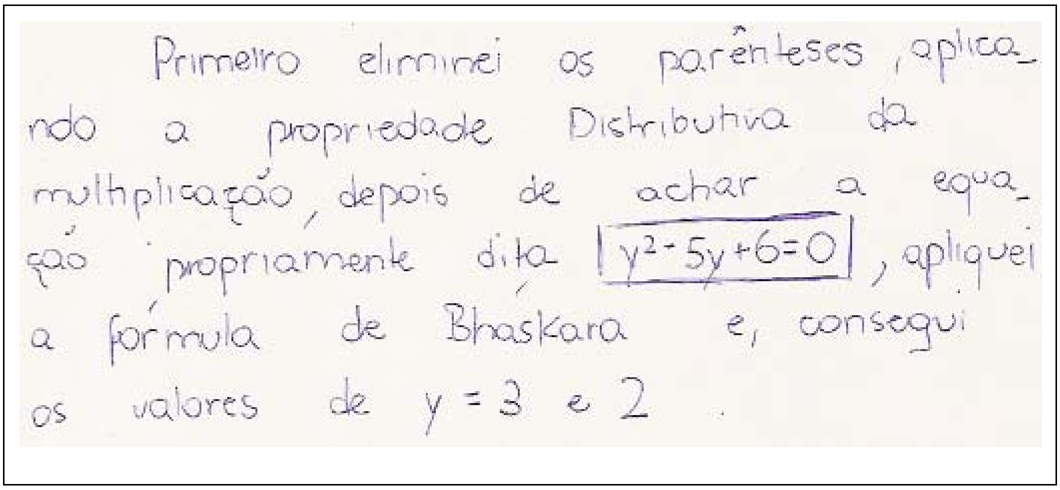
Onze alunos mencionam ou usam a fórmula de Bhaskara. As respostas desse tipo estão na categoria *Cita ou usa a Fórmula de Bhaskara*. Quatro desses alunos dizem que as raízes da equação podem ser obtidas pela fórmula, como na **Figura 73**, que diz ter aplicado a fórmula, mas não apresenta os cálculos com os resultados.



Aplicando a fórmula de Bhaskara encon
trei os seguintes resultados (y=3, y=2)

Figura 73: Resposta do aluno [GU207] para a Questão 6

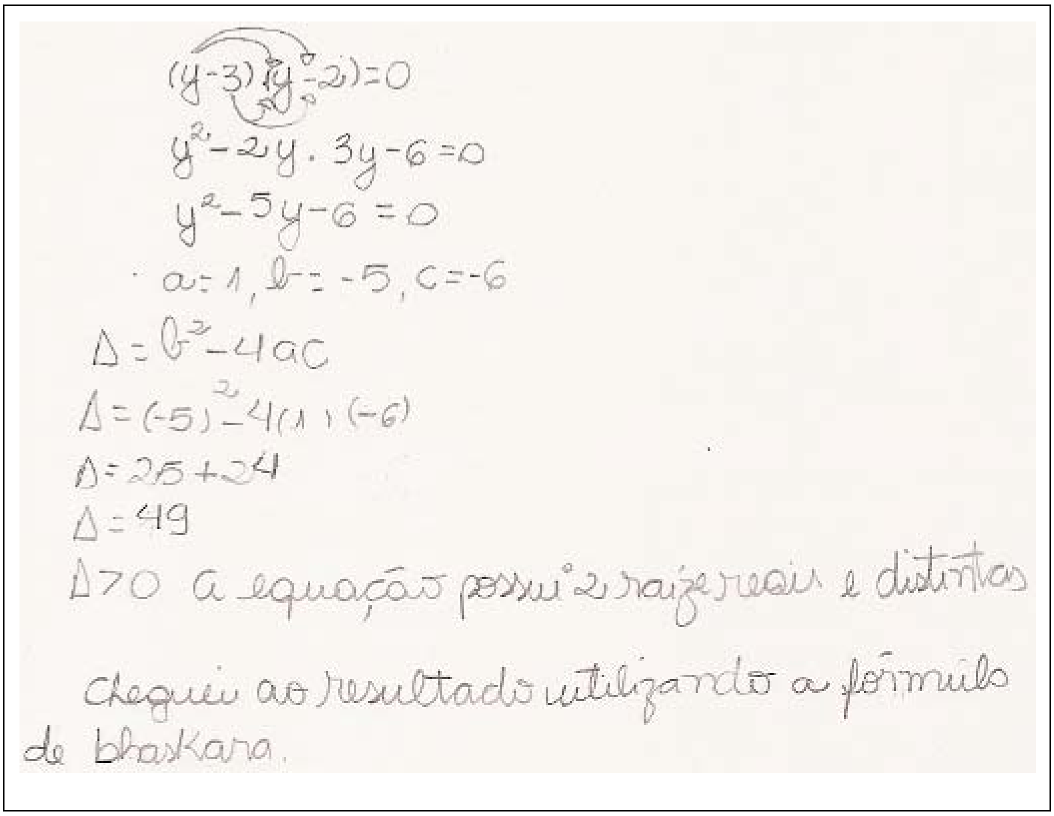
Outro aluno ainda menciona distributiva e fórmula, respondendo como na **Figura 74**.



Primeiro eliminei os parênteses, aplica_
ndo a propriedade Distributiva da
multiplicação, depois de achar a equa_
ção propriamente dita $\boxed{y^2-5y+6=0}$, apliquei
a fórmula de Bhaskara e, consegui
os valores de y = 3 e 2 .

Figura 74: Resposta do aluno [GU211] para a Questão 6

Outros sete alunos usam a propriedade distributiva para obter uma equação na forma $ax^2+bx+c=0$ e, em seguida, fazem uso da fórmula de Bhaskara para a resolução, por exemplo, a **Figura 75**.



$(y-3)(y-2)=0$

$y^2-2y \cdot 3y-6=0$

$y^2-5y-6=0$

$a=1, b=-5, c=-6$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(-5)^2-4(1)(-6)$

$\Delta=25+24$

$\Delta=49$

$\Delta>0$ a equação possui 2 raizes reais e distintas

Chegui ao resultado utilizando a formula de bhaskara.

Figura 75: Resposta do aluno [GU123] para a Questão 6

Na categoria *Cita ou usa distributiva* estão respostas, como a **Figura 76**, dadas por quatro alunos, que expressam a possibilidade de fazer a multiplicação dos fatores, mas não o fazem. Além dessas, há 15 alunos que usam essa propriedade, incorretamente (11 alunos) ou corretamente (quatro alunos), e continuaram a resolução da equação sem o uso da fórmula de Bhaskara. Um exemplo do uso da propriedade distributiva, incorretamente, pode ser visto na **Figura 77**, enquanto a resolução da **Figura 78** apresenta um uso correto da propriedade e, na continuação da resolução, a incógnita perde o expoente.

Eu tô começando a ficar nervosa, de agitada mas é que dá a impressão, que eu estou sob pressão e não consigo raciocinar.

$(y-3).(y-2)=0$

Eu até pensei em fazer distributiva mas eu não consigo terminar de construir

Figura 76: Resposta do aluno [SP201] para a Questão 6

você chegou ao resultado. Porque eu sei resolver dessa maneira

$(y-3)\cdot(y-2)=0$

$y^2-2y-3y-6=0$

$y^2-5y-6=0$

$6-0=y^2+5$

$6=y^2+5$

$y^2=5-6$

$y^2=-1\;(-1)$

$y^2=1$

$y=\pm\sqrt{1}$

Figura 77: Resposta do aluno [SP202] para a Questão 6

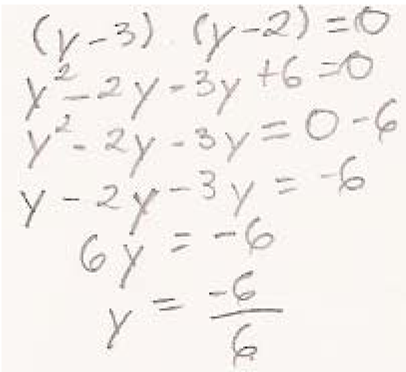
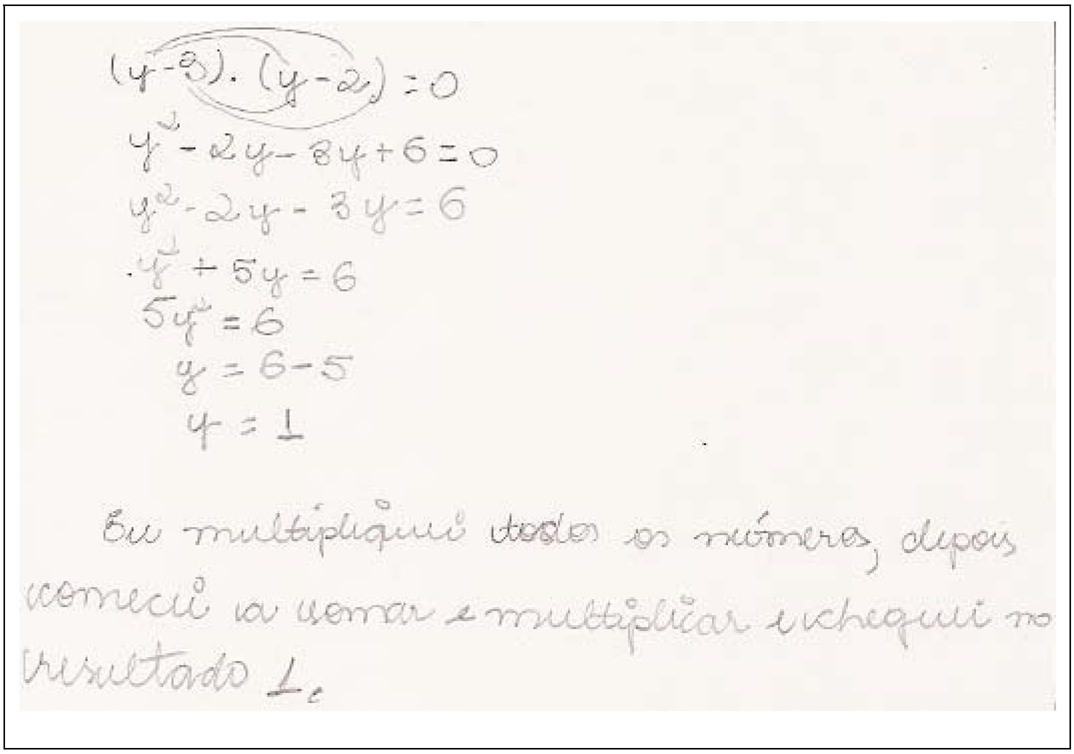


Figura 78: Resposta do aluno [SP212] para a Questão 6

Observando as categorias *Cita ou usa a Fórmula de Bhaskara* e *Cita ou usa distributiva*, vemos que a primeira tentativa de 29 alunos é de multiplicar as expressões entre parênteses, fazendo o que chamamos de “aplicar a propriedade distributiva”. Dentre eles, 13 o fizeram corretamente. Depois de aplicar a distributiva, 14 desses 29 alunos recorreram ao uso da fórmula de Bhaskara e sete foram bem-sucedidos em usá-la. Vale destacar que 5 alunos foram bem-sucedidos em usar a fórmula nas duas questões, 5 e 6.

As respostas de oito alunos, dentre os que aplicaram a propriedade distributiva, formam a categoria *y2 desaparece*. Nas resoluções apresentadas por eles, a incógnita ao quadrado se perde em alguma passagem, a maior parte delas, quando o aluno soma termos não semelhantes, como também ocorreu na Questão 5. Um exemplo disso pode ser visto na resolução apresentada por um aluno da turma GU2 (**Figura 79**).



$(y-3).(y-2)=0$
$y^2-2y-3y+6=0$
$y^2-2y-3y=6$
$y^2+5y=6$
$5y^2=6$
$y=6-5$
$y=1$

Eu multipliquei todos os números, depois comecei a somar e multiplicar e cheguei no resultado 1.

Figura 79: Resposta do aluno [GU203] para a Questão 6

Professores de Matemática, usualmente dizem que "vamos tirar os parênteses" para se referirem à multiplicação dos fatores que estão dentro dos parênteses. O uso de frases como essa, de acordo com Freitas (2002), pode acarretar erros na resolução de equações. Além disso, acreditamos que esse uso possa indicar uma associação com movimento físico ao invés de relação com símbolos matemáticos. No caso da resolução da equação $(y-3)\cdot(y-2)=0$, as nove respostas presentes categoria *"Tira" parênteses* refere-se exatamente às resoluções que seguem essa frase literalmente. Nove alunos tiram os parênteses, obtendo resoluções como na **Figura 80**. Entendemos que retirar os parênteses dessa forma é também uma forma de fazer corporificações procedimentais, em que os parênteses são tratados como entidades físicas que podem ser descartados da equação.

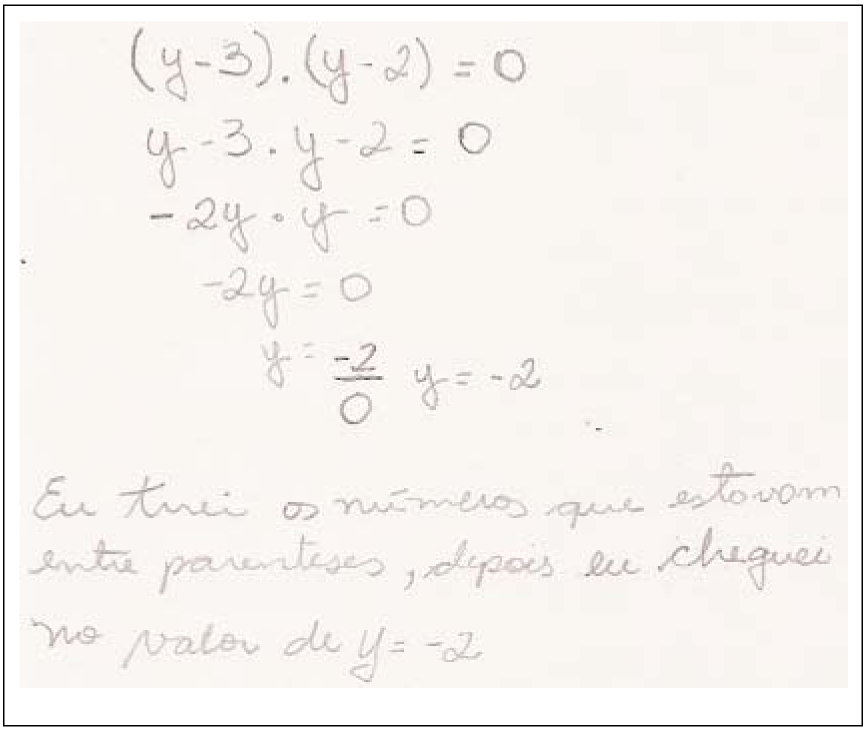


Figura 80: Resposta do aluno [GU107] para a Questão 6

A última categoria, *Outros*, é formada por respostas que não possuem as características das outras categorias. Elas são numerosas, principalmente pela quantidade da alunos da turma GU1 que apresentam respostas numéricas para essa equação. Por exemplo, eles fazem alguma multiplicação dos parênteses, como na **Figura 81,** ou substituem as incógnitas por números, como na **Figura 82**.

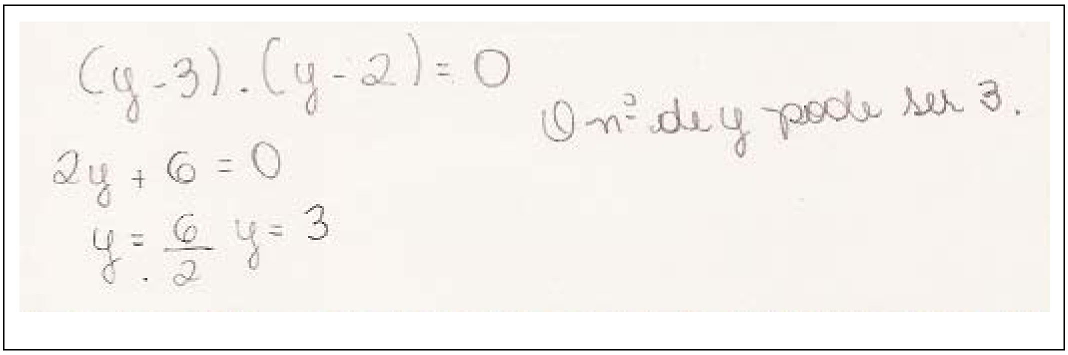
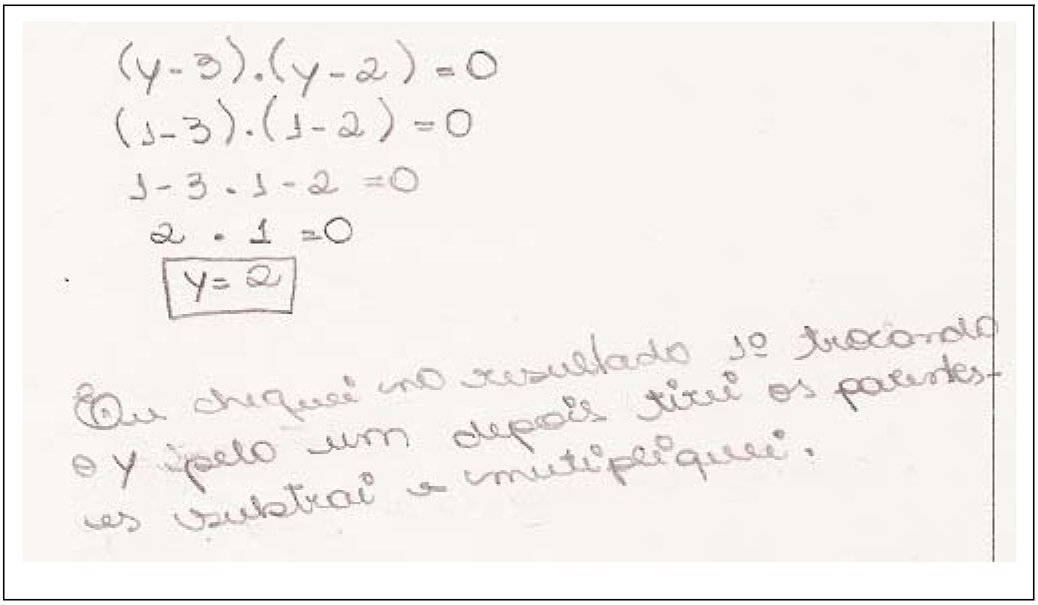


Figura 81: Resposta do aluno [GU132] para a Questão 6



$(y-3).(y-2)=0$
$(1-3).(1-2)=0$
$1-3.1-2=0$
$2.1=0$
$\boxed{y=2}$

Eu cheguei no resultado 1º trocando o y pelo um depois tirei os parentes-es subtraí e multipliquei.

Figura 82: Resposta do aluno [GU122] para a Questão 6

De maneira similar ao ocorrido com a Questão 5, também é possível observar que, na Questão 6, alguns alunos buscam maneiras de explicar o porquê de o segundo membro ser igual a zero, ao invés de procurar valores para y que satisfaçam a equação dada. Seis alunos tentam dar valores para y e explicam que procuram como fazer para que o resultado seja zero. Este também foi um comportamento dos alunos que nos incentivou a incluir a atividade de resolução de equações como instrumento adicional de coleta de dados.

Como exemplo disso, vemos um aluno da turma GU2, que faz a resolução apresentada na **Figura 83**. Aparentemente, o valor para a incógnita na resolução desse aluno é zero, sendo, assim, o que ele chama de “o resultado que pediu”. Logo, entendemos que ele busca um meio de obter $y=0$. Nesse caso, o sinal de igual, na primeira linha, apresenta um significado operacional, porque diz ao aluno qual é o resultado que ele deve perseguir. Na segunda linha, um deles parece ser operacional, mostrando o cálculo a ser feito, e o segundo parece um sinal que deve ser apresentado em equações. Na terceira e na quarta linhas, ele pode ser um sinal operacional, mostrando o resultado da operação efetuada.

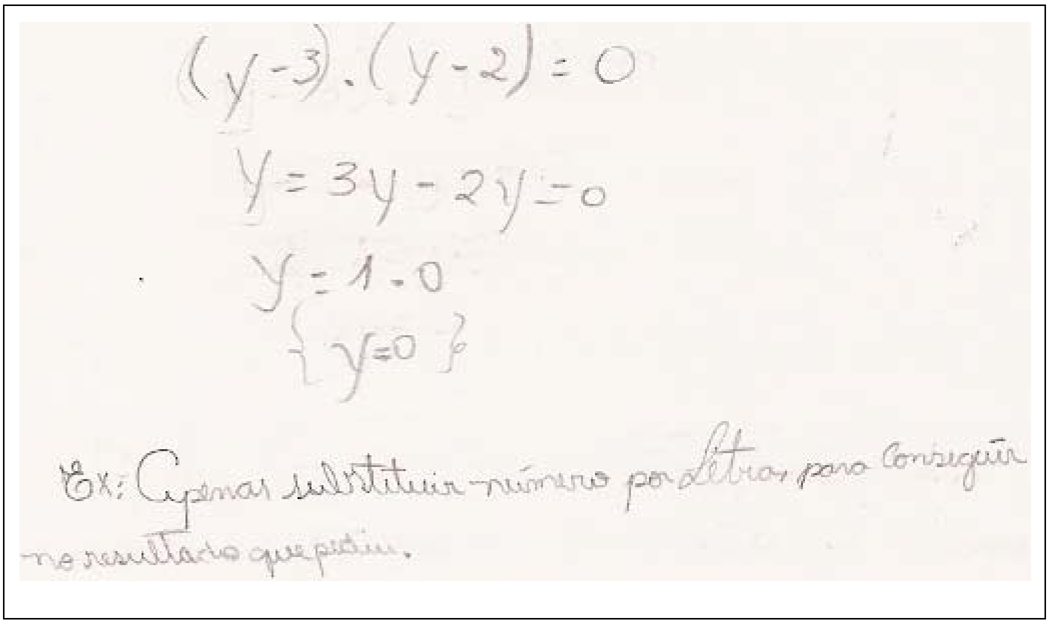


Figura 83: Resposta do aluno [GU201] para a Questão 6

Diferenças entre as turmas

Em ambas as turmas GU2 e SP2, os alunos procuram multiplicar os fatores entre parênteses da equação $(y-3)\cdot(y-2)=0$ e aplicar a fórmula de Bhaskara. Os alunos da turma GU2 são os únicos que obtêm resultados satisfatórios.

Quanto aos alunos da turma GU1, a maioria de suas respostas usa contas, de acordo com a concepção que eles têm de equação. Eles substituem a incógnita por um valor numérico e fazem alguns cálculos, a fim de obter algum valor como resultado.

Reflexões à luz dos Três Mundos da Matemática

Como vimos nas questões 5 e 6, os alunos, em geral, resolvem as equações pela fórmula de Bhaskara, ou pela soma de termos não semelhantes, em busca de um resultado. Desses, o único método que gerou resoluções satisfatórias para ambas as questões foi a fórmula de Bhaskara. Mesmo assim, somente seis alunos encontram as raízes corretas da equação $t^2 - 2t = 0$ e sete as da equação $(y-3)\cdot(y-2)=0$. As outras tentativas de resolução apresentadas não são matematicamente válidas. A **Tabela 9** apresenta a quantidade de alunos que usou correta ou incorretamente a fórmula de Bhaskara nas questões 5 e 6.

Tabela 9: Uso da fórmula de Bhaskara nas Questões 5 e 6

Equação	$t^2 - 2t = 0$	$(y-3)\cdot(y-2)=0$
Correto	6	7
Incorreto	10	6
Total	16	13

O fato de a fórmula de Bhaskara ter sido o único método válido de resolução de equações quadráticas usado por esses alunos, e ainda, o fato de eles não terem resolvido as equações usando a multiplicação igual a zero são evidências de que, provavelmente, os alunos dessas três turmas não estão familiarizados com diferentes métodos de resolução de equações quadráticas. Lembramos que os professores colaboradores dessa pesquisa sugeriram que a fórmula de Bhaskara é o principal método adotado por eles para o trabalho com equações quadráticas em sala de aula, visando resoluções bem-sucedidas. Esse sucesso, em nossa pesquisa, não foi alcançado. Além disso, ao trabalharem somente com um método de resolução, esses alunos não mostraram flexibilidade em resolver equações quadráticas. Eles estão presos ao método, que não foi assimilado por aqueles que não o usam, e nem mesmo por alguns dentre os que o usam. Portanto, os alunos, provavelmente, não percebem que o fator mais importante não é o procedimento a ser usado, mas sim o *efeito* que ele causa, isto é, no caso das equações, qualquer procedimento de resolução devidamente aplicado resultará nas mesmas raízes para a equação.

Além disso, em alguns casos, os alunos não estão usando a fórmula de Bhaskara como um processo, compreendendo-o como um todo. Há casos em que a resolução não é terminada, pois os alunos calculam somente o discriminante, sem fazer qualquer referência ao valor da incógnita. O procedimento usado não parece ser visto como “proceito”, não só por não ser um processo, mas também por não termos obtido evidências de que esses alunos compreendem os conceitos subjacentes à fórmula de Bhaskara.

Essa falta de pensamento flexível, bem como de compreensão de um procedimento como processo e conceito, um “proceito”, é fator que nos leva a acreditar que eles não tenham pensamento “proceitual”. Isso implica que, mesmo o trabalho desses alunos com equações estando restrito ao mundo simbólico, com a fórmula de Bhaskara, não há evidências de que eles dêem aos símbolos e aos procedimentos usados algum significado relacionado ao mundo simbólico.

Já-encontrados

Durante a entrevista, um aluno da turma SP2 declara que, ao ver uma equação quadrática, a primeira coisa que pensa em fazer é usar a fórmula de Bhaskara.

> “olha, muitas [das equações] aí eu já olhei e pensei em Bhaskara, eu não sei por que. Pode tá até errado, eu não sei, né, mas eu olhei e pensei. Porque, assim, a outra professora que eu tive, ela colocava muito assim, fórmulas, que nem Bhaskara, né. Eu olhava e ela falava assim, ‘ó, você olhou para isso daqui, você já tem que pensar na fórmula de Bhaskara’. (...) eu lembro que a professora disse que Bhaskara precisava ter um ao quadrado, aqui o a, aí aqui o b, que seria o número com o t, no caso, e o número sozinho.”
>
> (Trecho da entrevista com aluno [SP211] da turma SP2)

A fórmula, aparentemente, tem status de “já-encontrado” no trabalho desses alunos com equações quadráticas, porque ela é o único método usado quando é necessário resolver uma equação desse tipo. O trecho da entrevista com o aluno da turma SP2 mostra, ainda, que esse aluno lembra de um padrão a ser seguido: buscar quem são os coeficientes de cada um dos termos da equação quadrática. Entretanto, ela é vista apenas como um procedimento a ser seguido, sem compreensão do porquê ela ser válida.

Na Questão 3, essa mesma fórmula agiu como “a-encontrar” ao ser usada para resolver uma equação linear, interferindo em um aprendizado anterior. Dessa forma, ela apresenta-se com diferentes status em diferentes situações. Entretanto, não a consideramos como um método que traz o sucesso, como os professores esperavam, pois a fórmula não é sempre usada de maneira apropriada, o que nos leva a conjecturar que ela não foi compreendida pelos alunos, não foi dado a ela significado simbólico, em que a fórmula pode ser explicada para que o aluno entenda como ela funciona. Se foi feita uma demonstração da validade da fórmula, essa demonstração não colaborou para que os alunos dessem sentido para o uso que fazem da fórmula, nem mesmo para que eles pudessem usar o princípio algébrico por trás dessa fórmula.

No caso dos alunos que "desaparecem" com termos com a incógnita ao quadrado, vemos que um dos fatores que os leva a tal comportamento é a soma de termos não-semelhantes. Essa soma pode estar ligada à soma de termos semelhantes, feita por eles no contexto de expressões algébricas. Por isso, da mesma forma que o trabalho com expressões algébricas interferiu como "já-encontrado" na Questão 3, conjecturamos que também nas questões 5 e 6 ele tem o status de um "já-encontrado" que, talvez, não tenha sido totalmente compreendido, durante o aprendizado de expressões algébricas, e foi transportado para as equações.

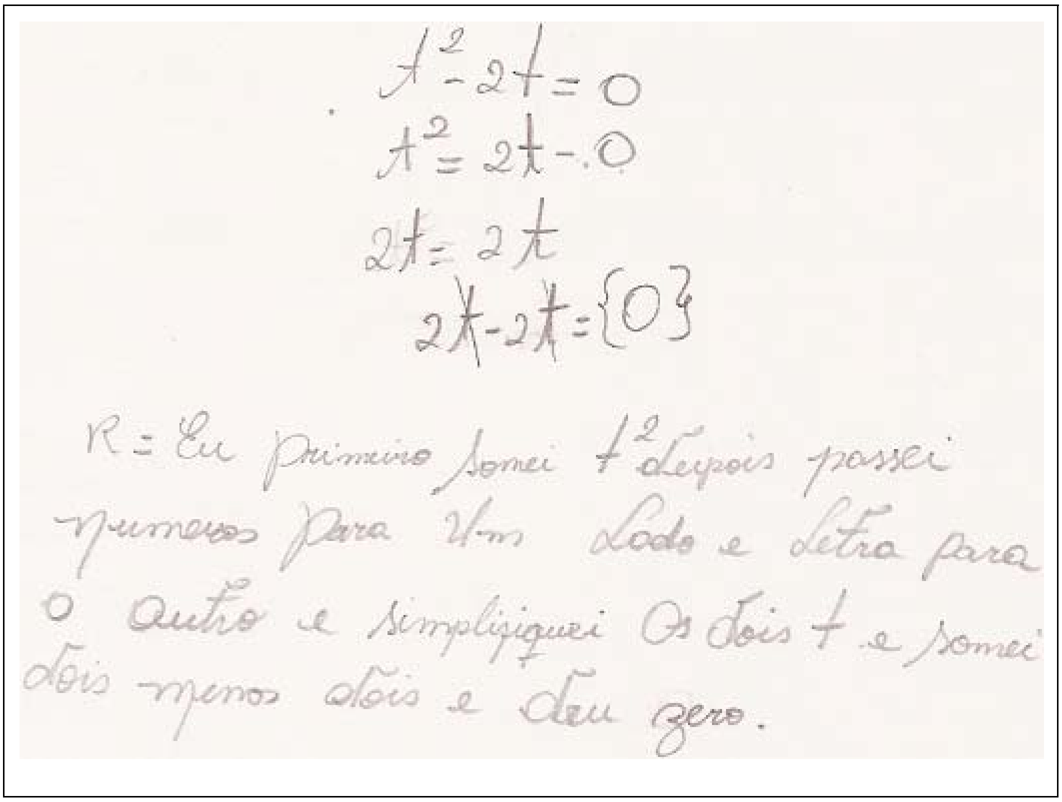
Esse uso inapropriado colaborou para que o aluno transformasse uma equação quadrática em outra linear, mais familiar a ele, e, assim, pudesse aplicar os conhecimentos que detém sobre a resolução dessa. A equação linear, então, bem como algumas das técnicas de resolução de equações lineares, como "passar um termo para o outro lado", seja "mudando o sinal", seja "dividindo", assumem status de "já-encontrados" durante o trabalho com equações quadráticas.

No que se refere à equação $(y-3)\cdot(y-2)=0$, também a propriedade distributiva assume papel de "já-encontrado". Associada a ela, entretanto, está uma técnica de "tirar" os parênteses, o que acabou por causar erros na resolução apresentada pelos alunos que formam a categoria *"Tira" parênteses* na **Tabela 8**.

Entendemos que essa ação de tirar os parênteses é relacionada ao mundo corporificado, pois trata-se de uma corporificação procedimental, em que os parênteses são vistos como entidades físicas que podem ser extraídos da equação. Essa corporificação procedimental não tem significado simbólico ligado à propriedade distributiva, ela é apenas uma tradução literal da frase "tirar os parênteses" que é usada quando se quer fazer referência a multiplicar os fatores dentro dos parênteses.

Os alunos que escrevem a incógnita em função dela mesma, na Questão 5, também podem estar usando as técnicas de resolução de equações lineares como "já-encontrados", transpondo termos e encontrando um valor para a incógnita, mesmo este não sendo numérico. Além disso, a necessidade de "isolar" a incógnita, expressa por alguns alunos em entrevistas, pode ter influenciado o trabalho desses alunos, agindo como um "já-encontrado".

Quando os alunos dão respostas que se encaixam na categoria *Transforma em equação linear*, da **Tabela 7** (página 188), especificamente dizendo que $t \cdot t = 2t$, na Questão 5, o comportamento deles pode estar sendo influenciado por alguma forma de trabalho com os símbolos da Álgebra, talvez por se tratarem de "dois t". Uma continuação do uso dessa afirmação por um aluno da turma GU2 pode mostrar outro possível "já-encontrado" interferindo no trabalho desse aluno com equações. Depois de transpor $2t$ para o segundo membro da equação, na segunda linha, ele transforma t^2 em $2t$ na terceira e explica os outros passos de sua resolução na resposta à questão, apresentada na **Figura 84**.



$t^2 - 2t = 0$

$t^2 = 2t - 0$

$2t = 2t$

$2t - 2t = \{0\}$

R = Eu Primeiro Somei t^2 depois passei numeros Para Um Lado e Letra para o Outro e Simplifiquei Os dois t e Somei dois menos dois e deu zero.

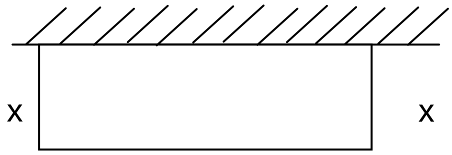
Figura 84: Resposta do aluno [GU201] para a Questão 5

As justificativas que dá para a resolução mostram que ele "simplificou t". Em expressões algébricas da forma $\frac{ax}{bx}$, quando o valor da incógnita é diferente de zero, ela pode ser "cancelada", obtendo $\frac{a}{b}$, pois divide-se numerador e denominador pelo mesmo valor. Em equações, também pode haver procedimento semelhante, quando temos, por exemplo $x(ax+b) = x(cx+d)$. Se x é não nulo, as raízes de $ax+b = cx+d$ serão as mesmas que da equação inicial, por isso, o "cancelamento" da incógnita é válido. É possível que os conceitos relacionados a esse tipo de trabalho com equações tenham agido como "já-encontrados" para este aluno, quando ele se viu com a equação na forma $2t - 2t = 0$, o que acarretou o cancelamento da incógnita, para obter $2 - 2 = 0$, o que justificaria a igualdade, em que o sinal de igual é visto como um sinal operacional.

4.2.7. Questão 7: O “problema da cerca”

O **Quadro 7** apresenta o enunciado da Questão 7.

Ulisses gosta de cultivar flores. Como no quintal de sua casa há um espaço disponível, junto ao muro do fundo, ele deseja construir um pequeno canteiro retangular e, para cercá-lo, pretende utilizar os 40 m de tela de arame que possui. Como ainda está indeciso quanto às medidas, fez o seguinte desenho:



Quais as medidas dos lados do canteiro para que sua área seja de 200 m^2?

Quadro 7: Enunciado da Questão 7 do Questionário

Tabela 10: Categorias de respostas para a Questão 7

Resposta	*GU1*	*GU2*	*SP2*	*Total*
Resposta correta	–	–	1	1
Forma uma equação usando um ou ambos os dados	3	3	1	7
Usa um dos dados do problema	5	2	5	12
Usa os dois dados do problema	11	–	2	13
Não sei/Não lembro/Branco	1	9	6	16
Outros	12	12	4	28

As respostas para a Questão 7 foram classificadas em seis categorias. São elas: *Resposta correta*, *Usa um dos dados do problema*, *Usa os dois dados do problema*, *Forma uma equação usando um ou ambos os dados*, *Não sei/Não lembro/Branco* e *Outros*. Cada uma das respostas foi posicionada em apenas uma categoria. A **Tabela 10** apresenta essas categorias.

Nenhuma das respostas apresentadas pelos alunos para esta questão mostra indícios de que eles tentam resolvê-la com o uso de uma equação quadrática.

A categoria *Resposta correta* refere-se ao único aluno que deu uma resposta correta para essa questão (**Figura 85**). Em sua resposta, o aluno coloca as medidas no desenho apresentado na questão e não dá qualquer explicação de como chegou a esse resultado. Em geral, os alunos que tentam resolver o problema proposto na Questão 7 usam, de alguma maneira, os dados apresentados no enunciado.

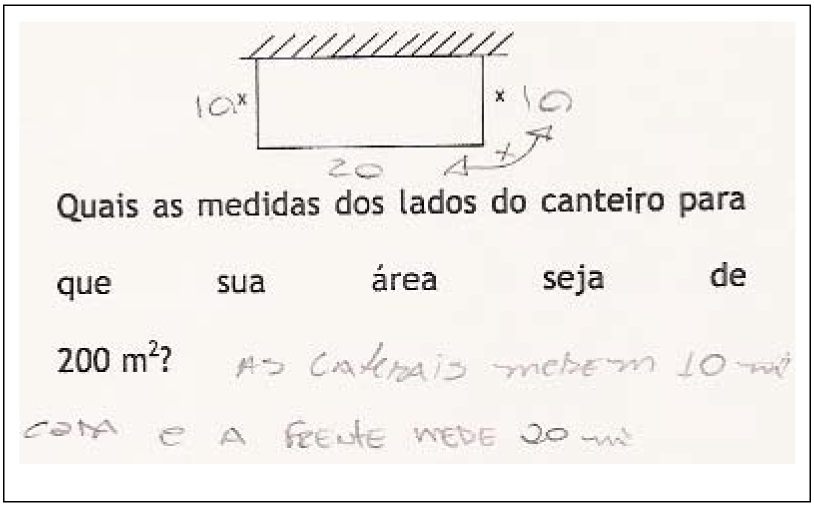


Figura 85: Resposta do aluno [SP210] para a Questão 7

Apesar de nenhum aluno escrever uma equação quadrática para resolver essa questão, sete alunos escrevem uma equação linear a fim de buscar a solução. As respostas deles formam a categoria *Forma uma equação usando um ou ambos os dados*. Um aluno da turma SP2 usa somente *40* na equação que apresenta (**Figura 86**). É possível que esse aluno tenha entendido que os lados maiores do “canteiro” medem *40* e os lados menores medem “x”.

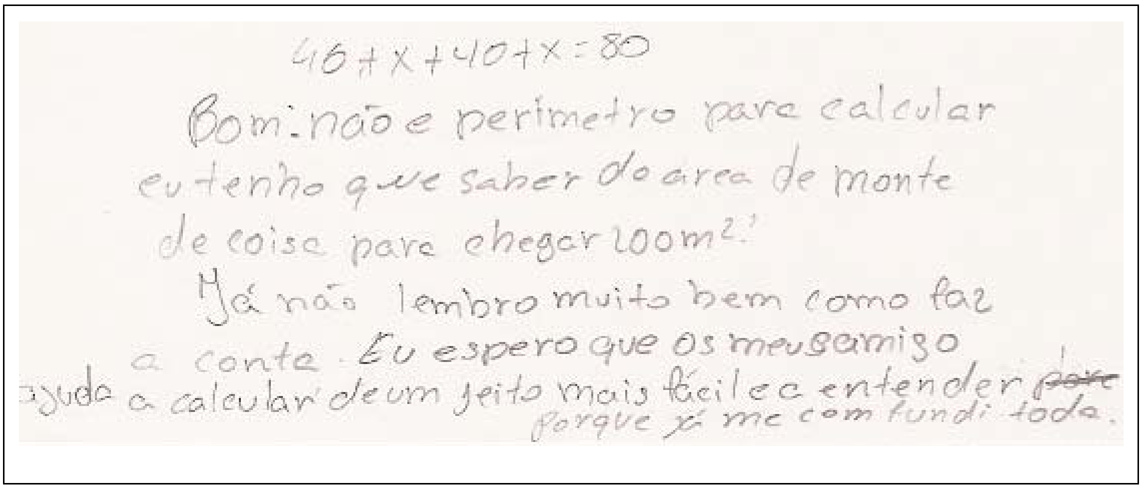

40+x+40+x=80
Bom: não e perimetro para calcular
eu tenho que saber da area de monte
de coisa para chegar 200m²?
Já não lembro muito bem como faz
a conta. Eu espero que os meu amigo
ajuda a calcular de um jeito mais fácil e a entender ~~por~~
porque já me confundi toda.

Figura 86: Resposta do aluno [SP217] para a Questão 7

Os outros seis alunos nessa categoria apresentam equações com ambos os valores, tais como, a resposta da **Figura 87**. Essa resolução é apresentada por três alunos da turma GU2.

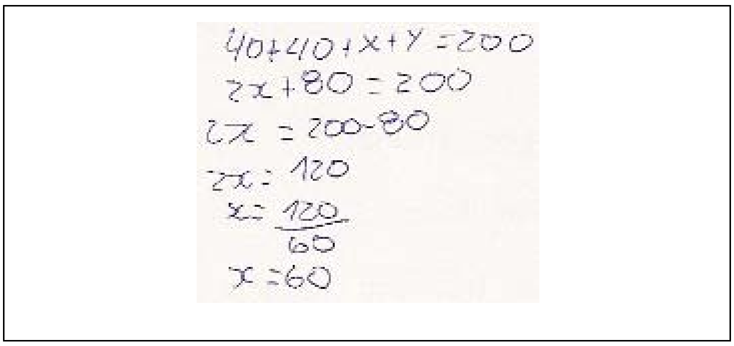

$40+40+x+y=200$
$2x+80=200$
$2x=200-80$
$2x=120$
$x=\frac{120}{60}$
$x=60$

Figura 87: Resposta do aluno [GU217] para a Questão 7

Na categoria *Usa um dos dados do problema*, estão as respostas dos alunos que usam um dos dois números apresentados no enunciado do problema, 40 ou 200. São 12 os alunos que assim fazem, apresentando resoluções como a da **Figura 88**, usando somente os 200 m^2 de área que a figura deveria ter, ou o aluno que escreve na figura que os lados menores devem medir 5 m e o lado maior deve medir 15 m, usando os 40 m de arame (**Figura 89**).

Figura 88: Resposta do aluno [GU109] para a Questão 7

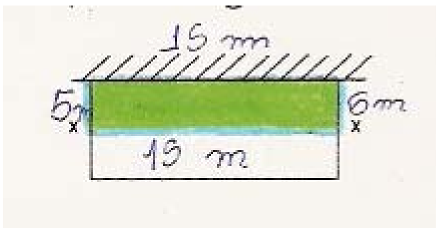


Figura 89: Resposta do aluno [GU130] para a Questão 7

Nessa categoria, então, os alunos não estão relacionando ambos os dados do problema, a fim de analisar como distribuir 40 metros de cerca para cercar três lados de uma área de 200 m^2. Em algumas respostas, os 40 metros de cerca são divididos entre os quatro lados do retângulo, em outras são os 200 m^2 que são tomados como parte perímetro ou o perímetro todo. Além disso, existem também alunos que percebem que só precisam cercar três lados da figura, já que há um muro no quarto lado, enquanto outros querem cercar os quatro lados.

Já as respostas na categoria *Usa os dois dados do problema* apresentam cálculos em que ambos os números 40 e 200 são usados, como, por exemplo, na **Figura 90** ou na **Figura 91**. Entretanto, em nenhuma resposta os dois valores foram usados como parte do perímetro ou área da figura.

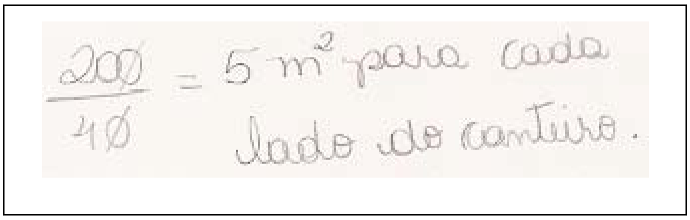


Figura 90: Resposta do aluno [GU132] para a Questão 7

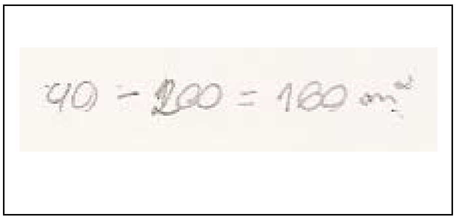


Figura 91: Resposta do aluno [GU127] para a Questão 7

A categoria *Outros* engloba 28 respostas pois é formada, entre outras, por aquelas que apresentam apenas valores incorretos para as medidas e não explicam como os obtiveram. Desses, seis alunos da turma GU2 respondem que *"As medida são 80 de largura e 20 de altura"* [GU202] (**Figura 92**) e quatro da turma GU1 respondem apenas *"160 m²"* [GU120] (**Figura 93**). Este último, pode ter sido uma subtração entre 200 e 40, mas não há explicação em nenhuma dessas respostas. Acreditamos que esse tenha sido o caso porque outros alunos apresentaram essa subtração e esse resultado, tendo sido classificados na categoria *Usa os dois dados do problema*.

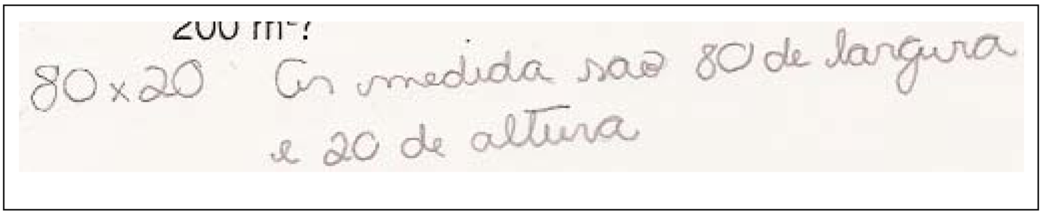


Figura 92: Resposta do aluno [GU202] para a Questão 7

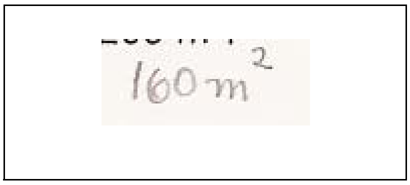


Figura 93: Resposta do aluno [GU120] para a Questão 7

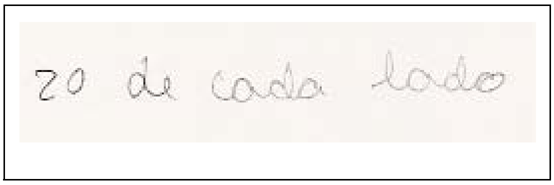


Figura 94: Resposta do aluno [GU225] para a Questão 7

Uma outra resposta que foi categorizada em *Outros* é a de um aluno da turma GU2, que escreve apenas *"20 de cada lado"* [GU225] (**Figura 94**), sem explicar o raciocínio feito para obter esse resultado. Em entrevista, entretanto, ele explica *"ah, porque ele tinha quarenta metros aí eu pensei 20, é 20 aqui e 20 aqui dava 40 metros"*, mostrando que ele só analisou o dado referente ao perímetro da figura.

Diferenças entre as turmas

Grande parte das respostas das três turmas está entre as categorias *Não sei/Não lembro/Branco* e *Outros*. Entretanto, podemos observar que a turma GU1 é a que apresenta maior número de ocorrência de respostas nas categorias *Usa um dos dados do problema* ou *Usa os dois dados do problema*, seguida pela turma SP2, enquanto os alunos da turma GU2 formam equações com os dados.

Essas são respostas coerentes com as dadas nas outras questões. Se os alunos da turma GU1 têm concepção de equação como sendo uma conta, é natural que eles busquem algum cálculo para fazer com os números apresentados no enunciado do problema.

Já a turma GU2, que tem uma concepção de equação envolvendo a incógnita, busca escrever uma equação, apesar de não relacionada ao enunciado do problema.

A turma SP2 continua apresentando respostas que envolvam suas dificuldades com equações.

Reflexões à luz dos Três Mundos da Matemática

Essa questão apresenta uma situação em que o aluno deveria inter-relacionar os mundos corporificado e simbólico, pois há um problema envolvendo aspectos do cotidiano que pode ser resolvido por meio de uma equação, presente no mundo simbólico. Mesmo que esse seja um problema comum, freqüentemente usado, acreditamos que ele possa ser útil para analisarmos se os alunos inter-relacionam esses mundos e, em caso afirmativo, como isso ocorre.

Novamente os alunos mostram que precisam efetuar operações para resolver problemas e encontrar um resultado. Essa ação de efetuar operações está, nesse caso, relacionada aos números que aparecem no enunciado e também ao desenho que o acompanha, pois, os alunos tentam, de alguma forma, usar os números tendo o desenho como base.

Há alguma relação entre os mundos para alguns alunos que observam o desenho para escrever suas equações, como fazem os que escrevem $x+x+40+40=200$, talvez porque há dois x no desenho. Entretanto, não há relação entre os símbolos usados pelos alunos e o conceito que os números dados no enunciado representam – área e perímetro.

Entendemos que esses alunos buscam apenas fazer uso dos números que estão no enunciado, como um efeito do contrato didático[33], pois, já que os

[33] "Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor... Esse contrato é o conjunto de regras que determinam, uma pequena parte explicitamente mas sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro" (BROUSSEAU (1986) apud SILVA (1999), p. 43).

números são dados, eles devem ser utilizados para que a resposta ao problema seja obtida. É interessante notar porém que, mesmo os alunos sabendo que estávamos fazendo uma pesquisa sobre equações e que todas as outras questões do questionário envolviam equações, 70 alunos não buscam usar esse conteúdo na resolução da questão. Apenas sete alunos tentam escrevem uma equação. Por isso, entendemos que isso não fez parte do contrato didático.

Já-encontrados

O principal "já-encontrado" presente nas respostas dos alunos para a Questão 7 está relacionado com experiências prévias em resolver problemas. Os alunos devem usar, logicamente, os dados do problema. Entretanto, nesse caso, os dados são tomados de alguma forma, não necessariamente relacionada ao significado dos dados, resultando em algum cálculo que gerou resultados, mas não válidos.

O trabalho com equações lineares também pode ser considerado "já-encontrado" para aqueles alunos que tentaram escrever uma equação desse tipo para resolver o problema.

4.2.8. Questão 8: Discutir a resolução apresentada para a equação $(x-3)\cdot(x-2)=0$.

O **Quadro 8** apresenta o enunciado da Questão 7.

Para resolver a equação $(x-3)\cdot(x-2)=0$ no conjunto dos números reais, Joãozinho respondeu em uma linha:
“ $x=3$ ou $x=2$ ”
A resposta está correta? Analise e comente a resposta de Joãozinho.

Quadro 8: Enunciado da Questão 8 do Questionário

Para analisar as respostas dadas pelos alunos para a Questão 8, formamos nove categorias: *Sim*, *Não*, *Resolve e compara resultados*, *Substitui os valores apresentados*, *Joãozinho não resolveu*, *Joãozinho usou Bhaskara*, *Apresenta uma resolução*, *Não sei/Branco* e *Outros*. Essas categorias são apresentadas na **Tabela 11**. Cada resposta foi classificada em apenas uma categoria.

Tabela 11: Categorias de respostas para a Questão 8

Resposta	*GU1*	*GU2*	*SP2*	*Total*
Sim	9	6	3	18
Não	12	1	1	14
Resolve e compara resultados	3	3	2	8
Substitui os valores apresentados	2	–	1	3
Joãozinho não resolveu	3	5	3	11
Joãozinho usou Bhaskara	1	1	1	3
Apresenta uma resolução	2	3	2	7
Outros	–	3	2	5
Não sei/Branco	–	4	4	8

Nas respostas para essa questão, nenhum aluno que aceita a resolução dada por “Joãozinho”, isto é, a resolução apresentada na questão, justificando que ela está certa porque um dos fatores deve ser zero já que o produto entre eles é zero.

As categorias *Sim* e *Não* compreendem os alunos que responderam apenas se Joãozinho está ou não certo ao resolver a equação da forma apresentada, sem qualquer justificativa ou sem justificativa matemática para a resposta. Dezoito alunos respondem *Sim* e 14, *Não*. Como exemplos dessas respostas, temos a da **Figura 95** ou a da **Figura 96** para a categoria *Sim*, e a da **Figura 97** para a categoria *Não*.

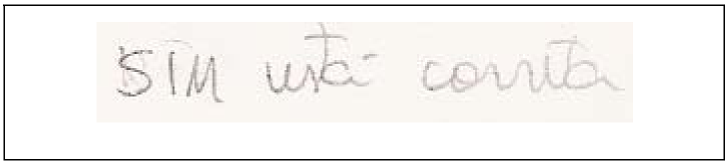


Figura 95: Resposta do aluno [GU111] para a Questão 8

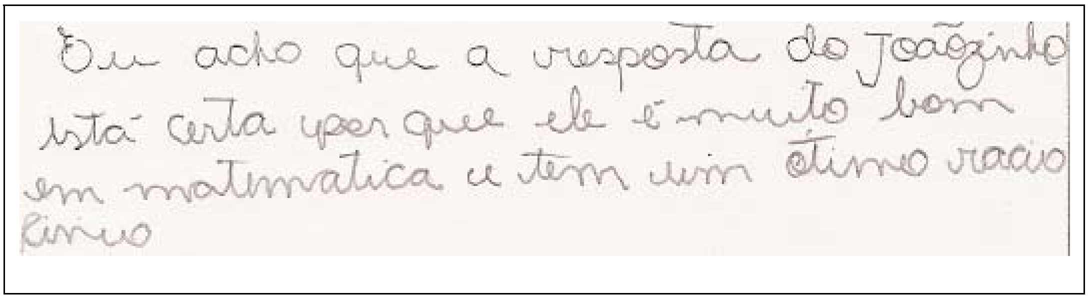


Figura 96: Resposta do aluno [GU202] para a Questão 8

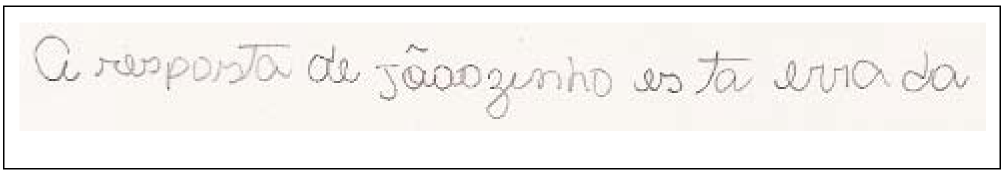


Figura 97: Resposta do aluno [GU114] para a Questão 8

A categoria *Resolve e compara resultados* é formada por oito alunos que, ao responderem a Questão 8, resolvem a equação dada no enunciado, $(x-3)\cdot(x-2)=0$, e comparam os resultados que obtêm com os resultados apresentados na questão. Um exemplo disso é a resposta de um aluno da turma SP2, que resolve a equação (incorretamente) pela fórmula de Bhaskara, como na **Figura 98**, talvez querendo explicar que a fórmula deveria ser usada para resolver a equação. Esse tipo de resposta mostra o uso de validação por meio do cálculo das raizes, isto é, uma validação caracteristica do mundo simbólico.

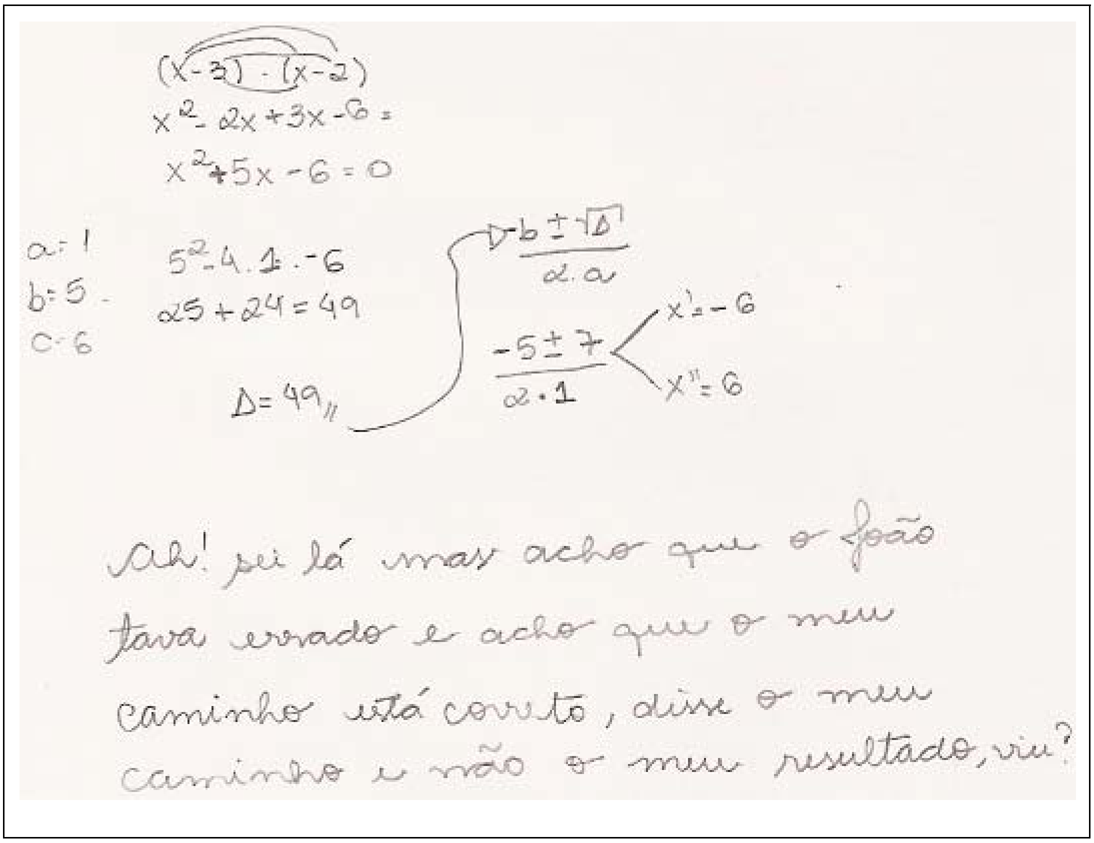


Figura 98: Resposta do aluno [SP211] para a Questão 8

A categoria *Substitui os valores apresentados* envolve as respostas dos alunos que substituem, na equação $(x-3)\cdot(x-2)=0$, os valores de x apresentados no enunciado da questão: $x=3$ e $x=2$, e chegam a alguma conclusão baseados no que obtêm com os cálculos que fazem. Essas respostas apresentam algum entendimento de equação que não havia sido apresentado até então, o de que as raízes devem satisfazer a equação inicial. Apenas três alunos respondem dessa forma. Um deles escreve que *“colocando* $x = 3$ *ou* $x = 2$ *dá o número 0.”* [GU122] (**Figura 99**). Os outros dois, entretanto, substituem os dois valores de uma vez só na equação, como na **Figura 100**. Apesar de este aluno mostrar que compreende que substituir as raízes na equação original resulta em uma afirmação verdadeira, ele parece achar que cada um dos resultados deve ser substituído em uma parte da equação, e não nela toda.

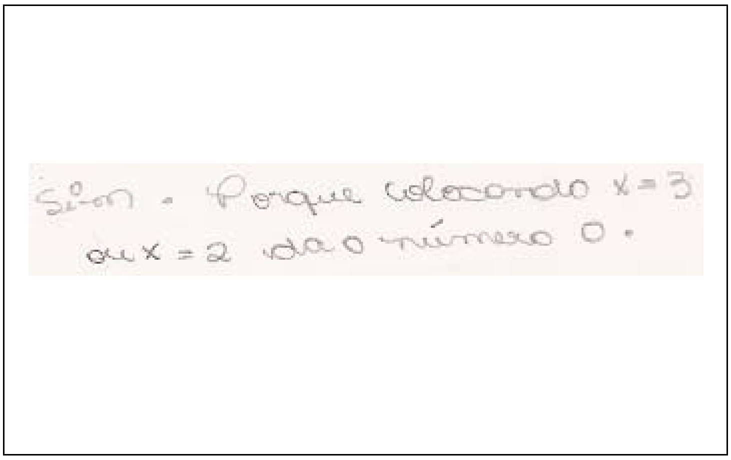


Figura 99: Resposta do aluno [GU122] para a Questão 8

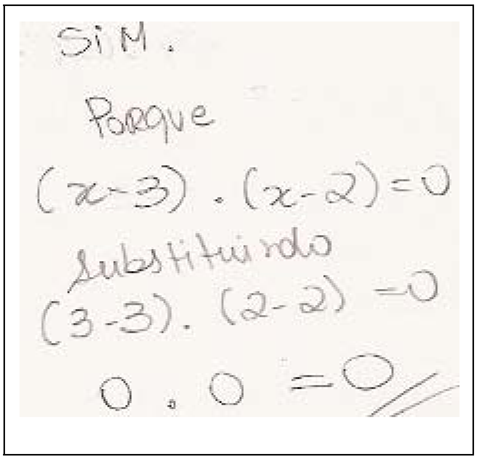


Figura 100: Resposta do aluno [SP215] para a Questão 8

Um aluno que não havia dado esse tipo de resposta no questionário, em entrevista, substitui um valor de cada vez na equação inicial, mostrando compreensão do significado das raízes obtidas na resolução:

> “**A**: pra saber se a resposta estava certa, eu acho que deveria ter colocado três aqui [no lugar de x em $(x-3)$], três aqui [no lugar de x em $(x-2)$], e visto que resultado que dava, ou depois fazer uma outra conta substituindo com o 2.
> [O aluno escreve o que é apresentado na **Figura 101**.]

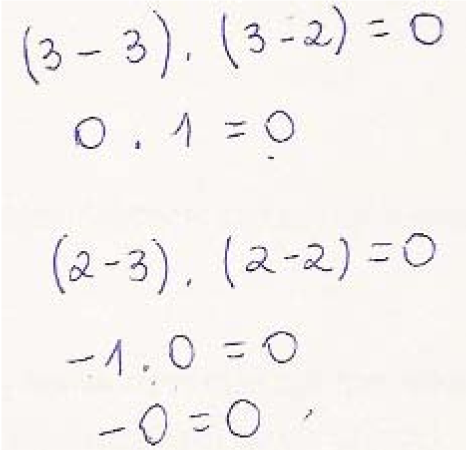
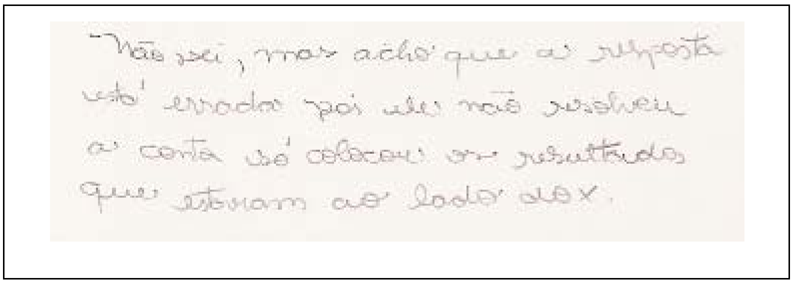


Figura 101: Resposta do aluno [SP206] para a Questão 8 na entrevista

> (...)
> **PR**: e por que que você pôs o 3 no lugar do x e depois o 2 no lugar do x?
> **A**: porque aqui está falando que x é igual a 3, então se o x é 3, então eu substituí os números para ver o que dá.
> **PR**: e quando der o resultado igual ao que tem lá?
> **A**: é porque o x é, não é? Se aqui deu zero é porque o x é 3."
> (Trecho da entrevista com aluno [SP206] da turma SP2)

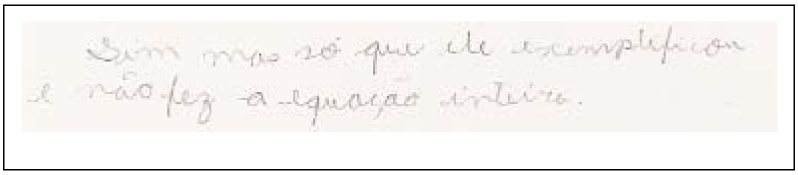
Apesar de apenas três alunos apresentam esse tipo de resposta, além do aluno que fez esse mesmo raciocínio na entrevista, um problema desse tipo, que raramente aparece em materiais didáticos, é interessante para que possamos discutir características de equações que não são freqüentemente analisadas.

A categoria *Joãozinho não resolveu* é formada pelas respostas que questionam se Joãozinho, o personagem que resolveu a equação da maneira apresentada na questão, realmente resolveu ou não a equação, ou as respostas que declaram que ele resolveu a equação de alguma forma não apresentada. Dentre as respostas dos 11 alunos que formam essa categoria, estão a da **Figura 102**, a da **Figura 103** ou ainda a da **Figura 104**.



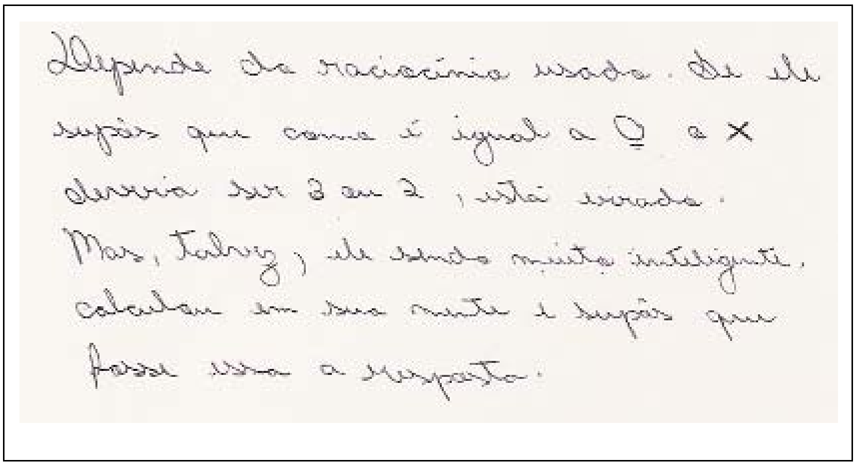
Não sei, mas acho que a resposta está errada pois ele não resolveu a conta só colocou os resultados que estavam ao lado do x.

Figura 102: Resposta do aluno [SP214] para a Questão 8



Sim mas só que ele exemplificou e não fez a equação inteira.

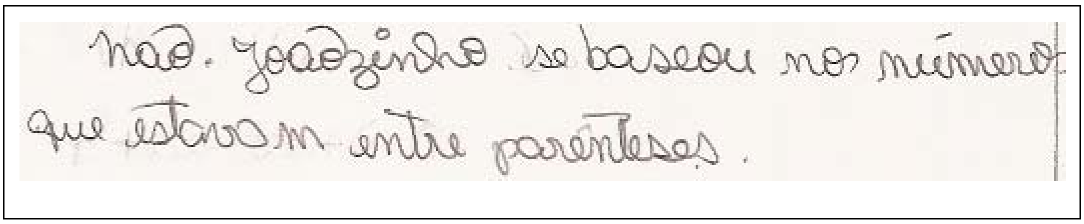
Figura 103: Resposta do aluno [GU226] para a Questão 8



Depende do raciocínio usado. Se ele supôs que como é igual a 0 o x deveria ser 3 ou 2, está errado. Mas, talvez, ele sendo muito inteligente, calculou em sua mente e supôs que fosse essa a resposta.

Figura 104: Resposta do aluno [SP204] para a Questão 8

Em entrevista, um aluno ainda explica acreditar que o Joãozinho não resolveu a equação. A resposta desse aluno para a Questão 8 foi (**Figura 105**):



não. Joãozinho se baseou nos números que estavam entre parênteses.

Figura 105: Resposta do aluno [GU104] para a Questão 8

E explica:

> "**A**: é, ele colocou x igual a 3 e x igual a 2. Ele colocou, em vez de resolver, ele só colocou o que tava aqui.
> **PR**: e não pode?
> **A**: não, acho que não é assim, 3 e 2 não é a conta. Aqui ele colocou o que tava lá.
> **PR**: ta. E se fosse resolver?
> **A**: acho que daria x vezes x, depois x vezes 2, igual àquela conta, 3 vez x, e 3 vez 2."
>
> (Trecho da entrevista com aluno [GU104] da turma GU1)

Este exemplo mostra que esse aluno conhece apenas um meio de resolver a equação, multiplicando os fatores entre parênteses e aplicando a fórmula de Bhaskara. Quando ele diz "igual àquela conta" na entrevista, ele está se referindo à Questão 6, em que ele resolveu a equação apresentada usando a fórmula de Bhaskara.

Já a categoria *Joãozinho usou Bhaskara* inclui os alunos que dizem que a resolução apresentada foi feita com o uso da fórmula de Bhaskara, mas os cálculos com a fórmula não foram apresentados. São três os alunos que dão essa resposta, um deles dizendo que (**Figura 106**):

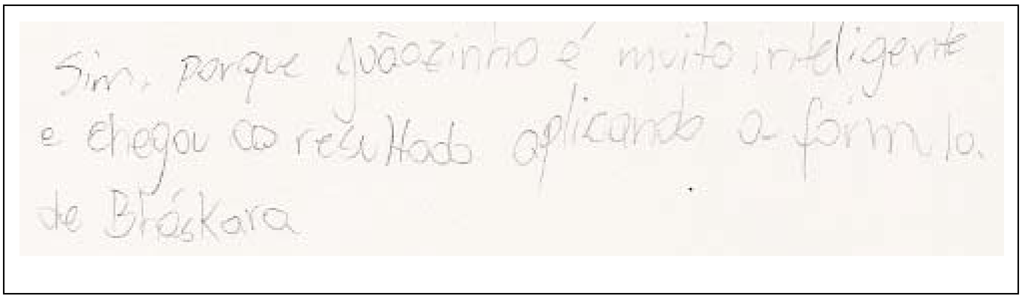

Sim, porque Joãozinho é muito inteligente
e chegou ao resultado aplicando a formula
de Bháskara

Figura 106: Resposta do aluno [GU207] para a Questão 8

Na categoria *Apresenta uma resolução*, estão as respostas em que os alunos resolvem a equação, ou tentam resolvê-la, mas nada concluem. Um exemplo disso é a resposta de um aluno da turma SP2 (**Figura 107**):

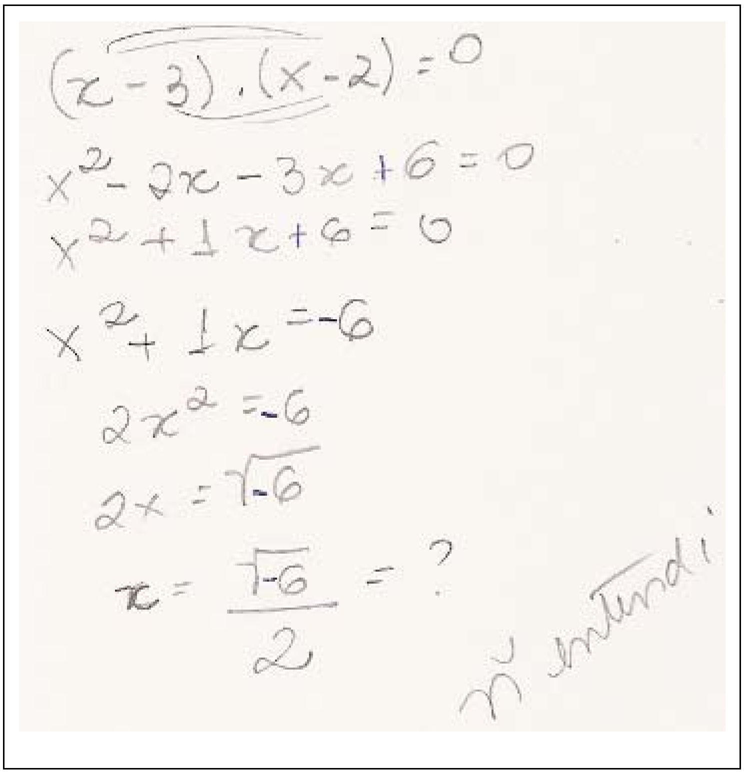


Figura 107: Resposta do aluno [SP206] para a Questão 8

Por fim, a categoria *Outros*, contendo cinco respostas, relaciona as que não se encaixam nas outras categorias e não trazem outras características relevantes, como apresentado na **Figura 108**:

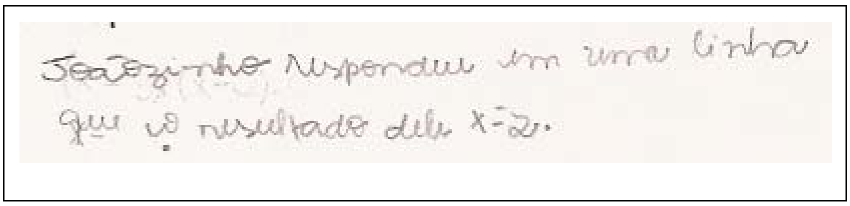


Figura 108: Resposta do aluno [GU206] para a Questão 8

Diferenças entre as turmas

As três turmas, nessa questão, não apresentam uma característica marcante. As respostas de todas estão distribuídas entre as categorias. A turma GU2 é a única cujos alunos não apresentam respostas na categoria *Substitui os valores apresentados*, o que é interessante notar, pois, nas outras questões, os alunos dessa turma saem-se melhor comparados aos das outras turmas. A maior freqüência de ocorrência de respostas em todas as turmas é nas categorias *Sim* e *Não*.

Reflexões à luz dos Três Mundos da Matemática

Para discutir a resolução apresentada na Questão 8 para a equação $(x-3)\cdot(x-2)=0$, nenhum aluno se referiu explicitamente ao fato de que o produto de dois fatores é igual a zero, portanto um deles deve também ser zero. Vimos que esse procedimento não foi usado pelos alunos também nas questões 5 e 6.

Entendemos que este procedimento está relacionado com o mundo formal, pois estamos lidando com uma propriedade do conjunto dos números reais que o caracteriza como anel de integridade, e que pode não ser familiar aos alunos. Talvez por isso a resolução tenha sido rejeitada. A propriedade relacionada ao mundo formal não é conhecida pelos alunos nem mesmo como um procedimento do mundo simbólico.

O fato de um aluno dizer que *"eu acho que o meu caminho* [a fórmula de Bhaskara] *está certo e não o do Joãozinho"* [SP211] (**Figura 109**) mostra a falta de flexibilidade dele em perceber que diferentes resoluções podem resultar no mesmo conjunto-verdade, isto é, diferentes "proceitos" resultam no mesmo efeito. Este aluno explicitamente rejeita o procedimento de resolução apresentado na questão, sugerindo que ele não o reconhece como válido e que lhe falta flexibilidade com o uso dos símbolos e dos procedimentos de resolução de quadráticas.

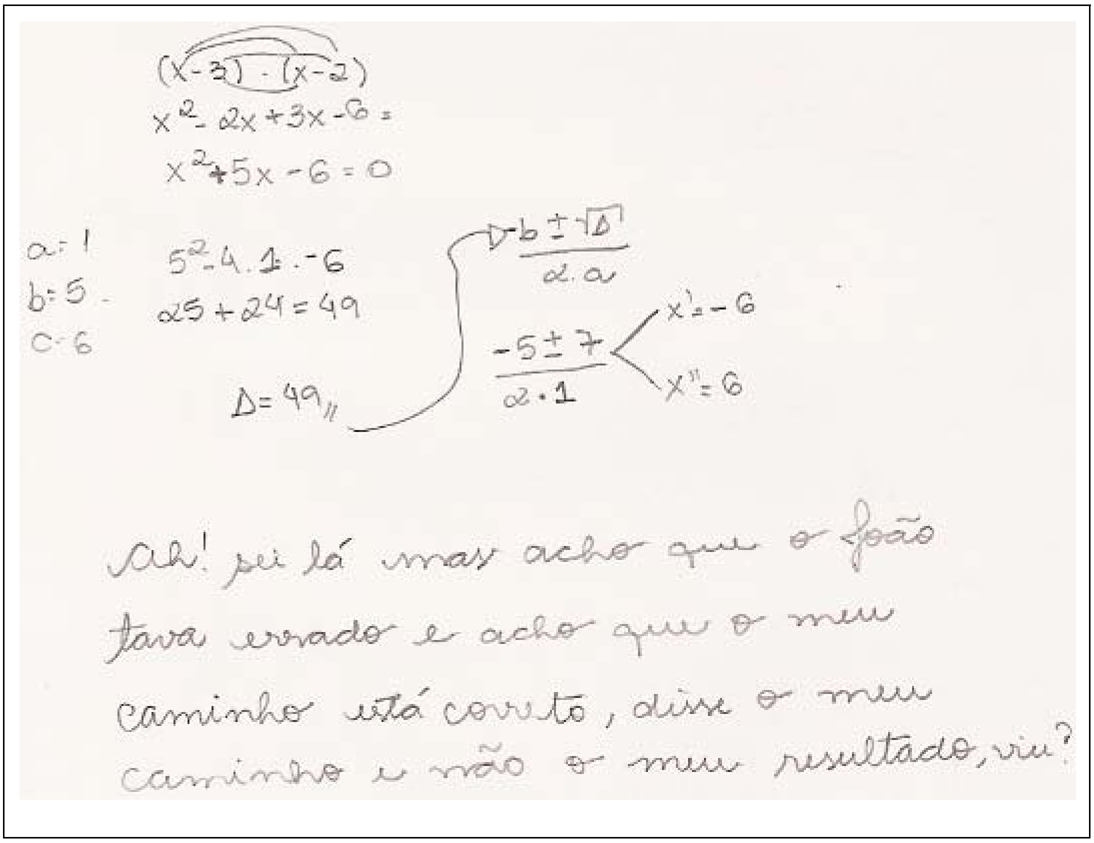


Figura 109: Resposta do aluno [SP211] para a Questão 8

Já-encontrados

Novamente, a fórmula de Bhaskara aparece no trabalho de alguns desses alunos, assumindo, por eles, status de “já-encontrado”. Ela é usada por cinco alunos para resolver a equação, estejam eles apenas apresentando a resolução ou resolvendo para comparar resultados. Ela ainda é mencionada como meio de se resolver equações quadráticas, que não foi usado por “Joãozinho”.

É interessante notar, entretanto, que nenhum dos alunos que resolvem a equação e encontram os mesmos valores para x que Joãozinho, questiona o método usado na questão. Eles apenas afirmam que Joãozinho está correto. Talvez esses alunos tenham algum entendimento de que o importante é o efeito que o procedimento causou, isto é, as raízes obtidas, e não o procedimento que deve ser usado. Se isso for verdade, esses alunos provam ter uma das características presentes no pensamento "proceitual".

O fato de três alunos terem substituído os valores apresentados na equação inicial é evidência de que eles, possivelmente, têm como "já-encontrado" o entendimento de que os valores resultantes da resolução de uma equação devem satisfazer a equação inicial.

4.2.9. Questão 9: Elaboração de uma situação-problema.

O enunciado da Questão 9 é apresentado no **Quadro 9**.

Escolha uma das equações $t^2-2t=0$ ou $(y-3)\cdot(y-2)=0$ no conjunto dos números reais e "bole" uma situação-problema que possa ser resolvida com ela.

Quadro 9: Enunciado da Questão 9 do Questionário

Ao analisar os resultados da Questão 9, em que era pedido para que o aluno elaborasse uma situação-problema que pudesse ser resolvida usando uma das equações $t^2 - 2t = 0$ ou $(y-3)\cdot(y-2)=0$, percebemos que não seria possível – ou seria de grande dificuldade – encontrar uma situação problema que nelas se encaixasse pelo fato de que, em ambas, o produto de dois fatores é igual a zero. Durante a confecção dos instrumentos, esse fato não foi percebido nem por nós nem pelos professores colaboradores, que sugeriram o uso das mesmas equações das questões 5 e 6, mas não sugeriram qualquer solução para a questão. Mesmo assim, achamos que, com os dados obtidos, podemos analisar o que os alunos entendem por uma situação-problema e como eles buscam uma resposta para a questão.

As categorias levantadas para essa questão são *Apresenta um problema*, *Resolve uma das equações*, *Apresenta uma questão envolvendo a equação*, *Não sei/Branco* e *Outros*. Elas não apresentam intersecção entre si e estão apresentadas na **Tabela 12**.

Tabela 12: Categorias de respostas para a Questão 9

Resposta	*GU1*	*GU2*	*SP2*	*Total*
Apresenta um problema	5	5	1	11
Resolve uma das equações	8	2	–	10
Apresenta uma questão envolvendo a equação	10	7	7	24
Não sei/Branco	4	12	10	26
Outros	5	–	1	6

Nenhum aluno é bem-sucedido em apresentar uma situação-problema que possa ser resolvida com uma das duas equações. De acordo com Chae e Olive

(2006), esta é realmente uma tarefa difícil de ser executada, mesmo para aqueles que são bem-sucedidos em resolver situações-problema que exigem o uso de uma equação.

Na categoria *Apresenta um problema* estão as respostas em que os alunos tentam escrever um problema que se encaixe de alguma forma em uma das equações. Os problemas apresentados por eles têm por objetivo trazer uma situação do cotidiano para ser resolvida por uma equação. Dez alunos apresentam respostas com essa característica, como, por exemplo, a da **Figura 110** ou a da **Figura 111**.

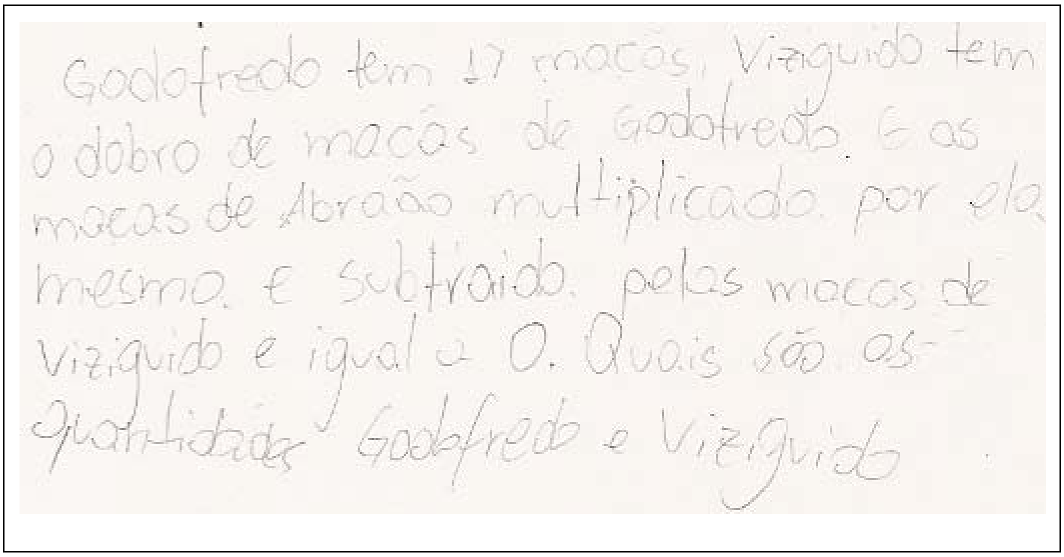

Godofredo tem 17 maças, Viziguido tem o dobro de maças de Godofredo. E as maças de Abraão multiplicado por ele mesmo e subtraido pelas maças de Viziguido e igual a 0. Quais são as quantidades Godofredo e Viziguido

Figura 110: Resposta do aluno [GU207] para a Questão 9

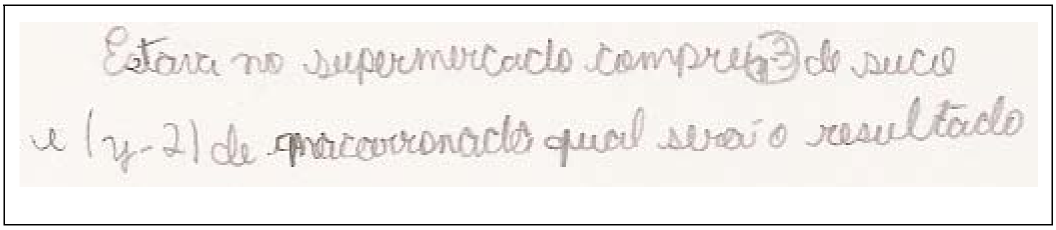

Estava no supermercado comprei 3 de suco e (y-2) de macarronada qual será o resultado

Figura 111: Resposta do aluno [GU120] para a Questão 9

Em ambos os exemplos, os alunos tentaram apresentar uma situação do cotidiano. No primeiro, o aluno tenta usar características de uma das equações, quando parece querer escrever a incógnita ao quadrado, em “multiplicado por ela mesma” e o resultado ser “igual a zero”. Entretanto, não é possível escrever nenhuma das duas equações com base no enunciado dado pelo aluno. No segundo exemplo, os dados do problema apresentado pelo aluno são partes de uma das duas equações, mas, nem assim é possível obter a equação $(y-3)\cdot(y-2)=0$ a partir dele.

Outra categoria criada é denominada *Resolve uma das equações*. Nela estão as 13 respostas em que os alunos escolhem uma das equações e simplesmente a resolvem, sem apresentar um problema.

O tipo de resposta mais freqüente para a Questão 9, com 25 ocorrências, foi categorizado como *Apresenta uma questão envolvendo a equação*. Nessa categoria, estão as respostas em que os alunos elaboram uma questão em que se pede para resolver uma das equações. Por exemplo, **Figura 112** e **Figura 113**.

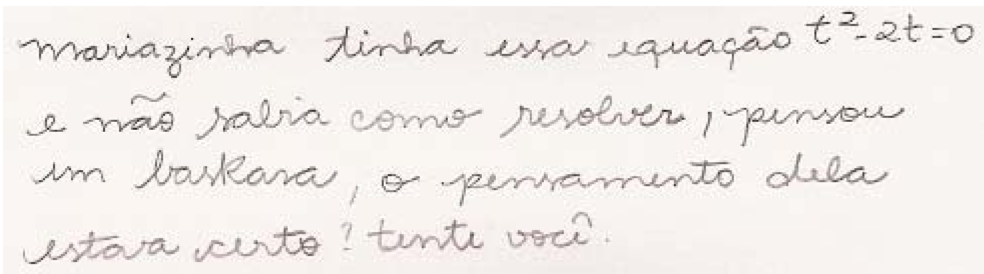


Figura 112: Resposta do aluno [SP211] para a Questão 9

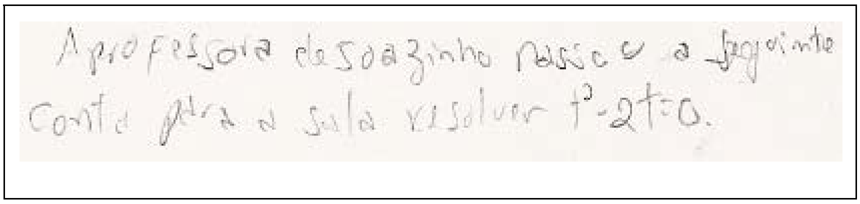


Figura 113: Resposta do aluno [GU113] para a Questão 9

Em *Outros*, estão respostas não relacionadas com a pergunta, como na **Figura 114**.

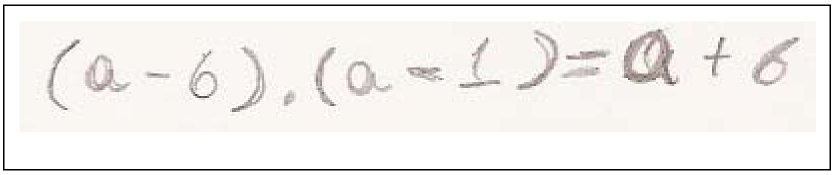


Figura 114: Resposta do aluno [GU115] para a Questão 9

Diferenças entre as turmas

Uma das categorias de maior freqüência entre as três turmas é *Apresenta uma questão envolvendo a equação*. É possível que esses alunos tenham apresentado um problema desse tipo por falta de familiaridade com situações cotidianas em que o uso de uma equação é necessário para resolvê-las.

Os alunos da turma GU1 também apresentam muitas respostas em que uma das equações é resolvida, enquanto os alunos da turma GU2 deixam a questão em branco e os da turma SP2 escrevem que não sabem como resolvê-la.

Reflexões à luz dos Três Mundos da Matemática

Esta é outra questão em que há inter-relação entre os mundos corporificado e simbólico, pois uma situação-problema deve ser criada a partir de uma equação, mas com um resultado igual a zero. Novamente, os alunos parecem não conseguir fazer conexões entre esses mundos que envolvam significado simbólico e corporificado.

Nessa questão, os alunos não mencionam a dificuldade de encaixar uma situação-problema a uma das equações dadas, como deveria ser o caso, já que levantamos a dificuldade de se obter uma situação real em que uma multiplicação fosse zero. Aparentemente, eles não conseguem analisar as equações para gerar uma situação-problema que as envolva.

Já-encontrados

Essa questão mostra que a resolução de equações é um "já-encontrado" no trabalho desses alunos de duas formas. Uma como a resolução em si mesma, pois os alunos se põem a resolver a equação, sem analisar o que lhes foi pedido. A outra, como um tipo de exercício familiar a eles, o de resolver equações. Assim, eles apresentam um problema em que se deve resolver uma equação ao invés de elaborarem uma situação-problema cuja solução é encontrada a partir da resolução de uma equação.

4.2.10. Sobre as diferenças entre as turmas

Durante a análise dos dados coletados com o questionário, pudemos perceber algumas características marcantes de cada uma das turmas. Essas características permeiam o trabalho dos alunos em todas as questões e, a partir delas, levantamos um perfil das turmas.

A principal característica apresentada pela turma GU1 é a concepção de uma equação como conta. Em todas as questões, os alunos dessa turma apresentam respostas que envolvam a idéia de conta. Até mesmo nas questões 5 e 6, em que equações quadráticas devem ser resolvidas, muitos deles atribuem valores para a incógnita, o que os leva a efetuar uma conta.

Conjecturamos que esses alunos podem estar em uma fase anterior à da álgebra de avaliação, porque, aparentemente, eles ainda não estão fazendo avaliações em Álgebra, mas estão buscando meios de fazer contas com números e desprezando a incógnita presente em uma equação.

Esses alunos, a nosso ver, ainda não estão trabalhando no mundo simbólico, pois não consideram a incógnita como parte essencial de uma equação, não lidam com os símbolos que compõem uma equação e nem os manipulam. Aparentemente, eles trabalham, principalmente, no mundo corporificado, com contas que são parte da aritmética de números inteiros.

Não há qualquer indício, nessa turma, de que eles entendem aspectos da estrutura externa de uma equação, no sentido de Dreyfus e Hoch (2004), a começar pela desconsideração da incógnita. A única questão em que ela é considerada é a Questão 3, em que os alunos apresentam equações lineares com uma incógnita como exemplos de equação.

Como a concepção de equação dessa turma é voltada à idéia de conta, os procedimentos de resolução de equações quadráticas por eles usados baseiam-se em dar um valor para a incógnita e fazer as contas que resultam dessa substituição. Dessa forma, não nos parece que os alunos dessa turma compreendem os procedimentos de resolução de equações quadráticas e, portanto, estes não são vistos como “proceitos”.

Uma outra possibilidade de resolução de equações quadráticas, apresentada pelos alunos da turma GU1, é a de transformá-la em uma equação linear, com a qual eles parecem mais familiares. Mesmo nesse caso, os procedimentos usados parecem ser somente regras que devem ser seguidas, e não “proceitos” que representam o processo e o conceito por trás dos símbolos matemáticos.

Já a turma GU2 apresenta certas características de compreensão da estrutura externa de uma equação. No trabalho deles há evidências de que eles trabalham com alguns fatores presentes no mundo simbólico, tais como, compreender a importância da incógnita e a necessidade de buscar o valor dela por meio da manipulação simbólica, mas não nos parece que eles dêem significado simbólico para as equações e para os métodos de resolução que usam.

Mesmo sendo esta a única turma que apresenta resoluções satisfatórias para equações quadráticas, todas elas são feitas por meio da fórmula de Bhaskara. Ao observarmos o uso dessa fórmula, acreditamos que ela é apenas um procedimento (talvez o único conhecido), que deve ser efetuado para que as raízes da equação sejam obtidas. Não há qualquer evidência de que os alunos da turma GU2 a vejam como um “proceito”, principalmente porque ela parece ser uma fórmula decorada, sem qualquer significado matemático para eles.

Apesar de esses alunos terem compreendido algumas características do mundo simbólico, presentes em equações, eles não necessariamente lidam livremente com esse mundo. Eles ainda apresentam dificuldades em trabalhar com procedimentos como “proceitos”.

Os sentimentos e as preocupações com o aprendizado são as principais características que norteiam o trabalho dos alunos da turma SP2. Alguns deles apresentam uma concepção de equação como uma conta que possui uma incógnita, mas não usam procedimentos válidos para resolver as equações quadráticas das questões 5 e 6. De forma geral, eles compreendem a necessidade da incógnita em uma equação, mas também não trabalham no mundo simbólico completamente.

4.3. Atividade de resolução de equações

A análise das questões 3, 5, 6 e 8 do questionário nos trouxe algumas informações sobre os meios usados por esses alunos para resolver equações. Na Questão 3, em que se pedia um exemplo de equação, podemos obter informações, principalmente, dos métodos de resolução de equações lineares usados por esses alunos, já que a maioria das equações apresentadas (e resolvidas) são desse tipo. As resoluções corretas, aparentemente, são feitas por meio da transposição de termos de um membro para o outro; transposição essa provavelmente baseada em técnicas de resolução de equações do tipo “passar um termo para o outro lado da equação”.

Já com as questões 5 e 6, obtivemos dados sobre os métodos de resolução usados por esses alunos para resolver equações quadráticas. Todas as resoluções corretas foram feitas por meio da fórmula de Bhaskara. Entretanto, como vimos, muitos alunos, nessas questões, buscam, não os valores da incógnita, mas uma justificativa para o fato de o primeiro membro de cada uma das equações ser zero.

A Questão 8 trata de uma resolução específica para uma equação, e serve para levantar dados sobre o conhecimento ou não daquele tipo de resolução pelos alunos.

Assim, percebemos a necessidade de analisar as resoluções de equações lineares que esses alunos fariam, a fim de verificar se elas seriam realmente guiadas pela transposição de termos e por técnicas de resolução. Quanto às equações quadráticas, também acreditamos que é importante verificar, com o uso de equações em diferentes formas, quais os métodos de resolução usados.

A atividade de resolução de equações foi, então, introduzida como mais um instrumento de coleta de dados, constando de equações lineares e quadráticas, que serão analisadas separadamente. Vale destacar que 68 dos 77 alunos que responderam o questionário resolveram essa atividade, devido à ausência de um aluno na turma SP2, quatro na turma GU2 e quatro na turma GU1.

4.3.1. Equações lineares

As equações lineares desse instrumento de coleta de dados são as apresentadas no **Quadro 10**.

$5t-3=8$	que pode ser resolvida desfazendo as operações.
$3x-1=3+x$	por conter a incógnita em ambos os membros.
$2m=4m$	sugerida pelo professor P1 como de grande dificuldade entre os alunos dele.

Quadro 10: Equações lineares da atividade de resolução de equações

Vinte e oito dos 68 alunos resolvem a primeira equação corretamente. Todas as resoluções apresentadas são da seguinte forma: de $5t-3=8$, os alunos escrevem $5t=8+3$, fazendo, em seguida, a soma do segundo membro, $5t=11$, e, por fim, encontrando $t=\frac{11}{5}$. Para a equação $3x-1=3+x$, todos os 22 alunos que a resolvem satisfatoriamente escrevem $3x-x=3+1$, efetuam as somas, obtendo $2x=4$, dividem por dois, $x=\frac{4}{2}$, e encontram o resultado $x=2$. Por fim, a terceira equação é resolvida corretamente apenas por cinco alunos, que o fazem da seguinte forma: $2m=4m$ é transformada em $2m-4m=0$. Fazendo a adição no primeiro membro, obtém-se $-2m=0$. A próxima passagem é feita da seguinte forma: $m=\frac{0}{-2}$ e só então $m=0$. Essa passagem de $-2m=0$ para $m=\frac{0}{-2}$ nos parece interessante porque mostra que o aluno pode não ter observado que o único número que pode tornar a sentença $-2m=0$ verdadeira é o zero. Ele apenas segue o procedimento de resolução que conhece, sem analisar a passagem em questão.

A **Tabela 13** apresenta a quantidade de alunos que resolveram essas três equações corretamente, incorretamente ou deixaram em branco a questão.

Tabela 13: Resolução das equações lineares na atividade

Equação	$5t-3=8$	$3x-1=x+3$	$2m=4m$	*Turmas*
Correto	13 7 8	10 7 5	1 4 –	**GU1** **GU2** **SP2**
Total	28	22	5	
Incorreto	15 8 2	17 10 8	23 6 8	**GU1** **GU2** **SP2**
Total	25	35	37	
Branco	1 7 7	1 5 5	4 13 10	**GU1** **GU2** **SP2**
Total	15	11	27	

A primeira equação apresentada na **Tabela 13**, $5t-3=8$, é uma equação de avaliação, que não pode ser representada em uma balança, por conter um número negativo no primeiro membro. As outras duas são equações de manipulação. As equações de avaliação são ditas por Filloy e Rojano (1989) como as de resolução mais simples do que as de manipulação, já que as operações sobre a incógnita podem ser desfeitas para que o valor dela seja encontrado, evitando que os alunos operem com a incógnita.

Na Questão 3, 34 alunos apresentam uma equação linear de avaliação como exemplo e apenas quatro apresentam uma equação linear de manipulação. É possível que os alunos participantes dessa pesquisa tenham mais facilidade com equações de avaliação.

A **Tabela 13** mostra também que a diferença entre a quantidade de alunos que resolveram corretamente cada uma das duas primeiras equações não é grande, já que 22 alunos resolveram corretamente a equação $3x-1=3+x$, e 28 a equação $5t-3=8$. A diferença é grande entre a quantidade de respostas satisfatórias para as duas primeiras equações e a terceira, $2m=4m$. Apenas quatro alunos resolveram satisfatoriamente essa equação. Vemos, então, grande dificuldade, por parte dos alunos, em resolver essa última equação, como previa o professor P1, e vale destacar que nenhum dos alunos desse professor resolveu tal equação corretamente.

Filloy e Rojano (1989) explicam as dificuldades que os alunos têm em resolver equações, cuja incógnita aparece em ambos os membros, por meio do *"corte didático"*. Este corte acontece pela dificuldade que os alunos têm de operar com a incógnita. Como a quantidade de soluções corretas, para a primeira equação, não é significativamente maior do que para a segunda, acreditamos que a principal dificuldade em trabalhar com a equação $2m=4m$, enfrentada por esses alunos, não é a mesma referente ao corte didático, mas sim a dificuldade em operar com zero, relatada por Freitas (2002).

Outra conjectura que fazemos (LIMA e TALL, no prelo) é que a corporificação da Álgebra também pode não colaborar para o entendimento de equações como $2m = 4m$. Usualmente, a incógnita representa alguma coisa, tal como uma medida ou uma quantidade, que não é nula, ou que não deveria ser nula aos olhos do aluno. Assim, pode não fazer sentido que duas vezes uma quantidade seja igual a quatro vezes a mesma quantidade, ou ainda, se a incógnita representa algo físico, o aluno pode não compreender como essa entidade física pode ser zero (ou não existir, na concepção do aluno).

Diferenças entre as turmas

Apesar de a maioria dos alunos da turma GU1 ter resolvido as três equações incorretamente, esta foi a turma que apresentou também maior freqüência de resoluções corretas para as equações $5t - 3 = 8$ e $3x - 1 = 3 + x$. Em relação à equação $2m = 4m$, é a turma GU2 que tem a maior freqüência de acertos, apesar de somente quatro alunos dessa turma a terem acertado. Os alunos da turma SP2 tem a maior freqüência de respostas em branco para as três equações.

Princípios e técnicas de resolução de equações

As resoluções corretas, apresentadas para qualquer das três equações lineares da atividade, não são acompanhadas por explicações de cada uma das passagens efetuadas. As resoluções apresentadas para a equação de avaliação da atividade podem ser interpretadas como a ação de desfazer as operações efetuadas sobre a incógnita, já que mostram, no segundo membro, uma operação inversa à que se encontrava no primeiro membro. Uma outra interpretação possível para as resoluções, tanto da equação de avaliação quanto das de manipulação, é do uso do princípio algébrico de “efetuar a mesma operação em ambos os membros”.

Não foi observado, em nenhuma das resoluções apresentadas, um uso explícito desse princípio, isto é, nenhum dos alunos mostrou alguma solução fazendo, por exemplo, $5x-3+3=8+3$. Existe a possibilidade de esses alunos não apresentarem passagens desse tipo, por já terem comprimido o procedimento em um processo, sem necessidade de escrever todas as passagens. Entretanto, não há, também, menção desse tipo de pensamento em qualquer das questões do questionário ou na resolução das equações da atividade de resolução. Em entrevistas, perguntamos aos alunos os motivos pelos quais eles acreditam que os métodos que usaram estão corretos. Uma explicação, comum nas entrevistas, foi dada por um aluno da turma GU2 para a equação $3x-1=3+x$, que foi resolvida por ele como apresentado na **Figura 115**.

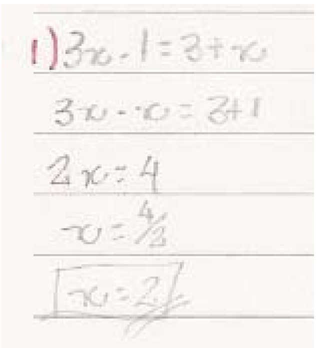


Figura 115: Resolução do aluno [GU203] para a equação $3x-1=3+x$

Em entrevista, o aluno explica:

"**A**: eu copiei o $3x$, passei o x que estava desse lado para o outro lado da, do sinal, aí ficou, tava positivo, ficou negativo.

PR: por que?

A: porque quando troca de lado, muda o sinal. Aí eu copiei o sinal de igual, passei o um pra esse lado, tava negativo ficou positivo. Aí, já tava o 3, eu copiei de novo.

PR: deixa só eu perguntar, por que que quando muda de lado muda de sinal?

A: não sei, a professora falou que muda, só que eu não sei explicar porque. Aí, $3x$ menos x deu $2x$ igual a 4. Aí x igual a 4 sobre 2, deu x igual a 2.

PR: por que você pôs x igual a 4 sobre 2?

A: porque quando tem o 4 aqui [como coeficiente da incógnita], o dois passa pra cá [o segundo membro], passa dividindo.

PR: é, agora mesmo, o 'passa pra lá' não mudava o sinal?

A: é tem algumas que eu acho que passa, só que não sei se todas passam.

PR: ta, esse dois aqui não passa?

A: não.

PR: não muda o sinal quando passa?

A: não.

PR: você sabe por que?

A: porque, não sei te explicar não."

(Trecho de entrevista com aluno [GU203] da turma GU2)

A explicação dada por esse aluno envolve apenas a transposição de termos de um membro a outro da equação, sugerindo o uso de técnicas como "passa para o outro lado da equação mudando o sinal" ou "passa para o outro lado da equação dividindo". Essas técnicas não estão mais relacionadas ao princípio algébrico de efetuar a mesma operação em ambos os membros. Como vimos no trecho da entrevista, o aluno não dá qualquer justificativa matemática para a resolução que apresenta, mas acrescenta que *"a professora falou que muda"*. Outro aluno diz ainda que *"por que, eu não sei! Que eu lembro era assim!"* [SP212]. A nosso ver, essas técnicas que "passam um termo para o outro membro" podem ser vistas pelo aluno como uma "mágica", sem explicação matemática, que deve ser seguida para que a resolução seja obtida (LIMA e TALL, no prelo).

Corporificação procedimental

Essa mudança de um termo de um membro para outro, acrescida de uma mágica de mudança de sinal ou de posição, é, muitas vezes, mencionada pelos alunos, durante as entrevistas, como uma movimentação dos termos, como se eles fossem entidades físicas, que *"passam do sinal de igual"* [GU107], como explica um aluno.

Isso pode ser visto, por exemplo, na fala dos alunos durante as entrevistas. Por exemplo, para iniciar a resolução da equação $3x-1=3+x$, um aluno diz *"eu separei o que tem x pra um lado e o que não tem pro outro"* [SP207]. Essa "separação" de termos com a incógnita pode ser comparada a separar fisicamente objetos com características distintas. Essa mesma separação é explicada de outra forma por um aluno: *"acho que joguei tudo para cá e igualei a zero"* [SP209]. E ainda, na resolução da mesma equação, um aluno explica a existência do termo $3x$ na segunda linha porque *"eu desci o $3x$"* [GU112].

Um dos alunos entrevistados explica todas as suas resoluções com corporificações procedimentais. Para a equação $3x-1=3+x$, este aluno apresentou a resolução da **Figura 116**:

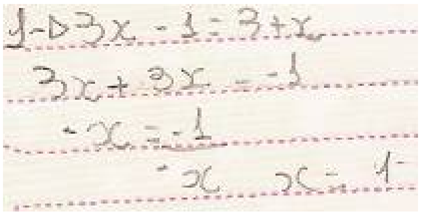


Figura 116: Resolução do aluno [GU119] para a equação $3x-1=3+x$

E explica da seguinte forma:

> "eu coloquei os que tem x de um lado e o que não tem do outro. $3x$, e $3x$ é 3 mais x. Aí eu coloquei o $3x$, é, inverti o sinal, coloquei mais, peguei o 3 mais x que tava do outro lado, coloquei x, fiz $3x$, que é ingual [sic] menos 1. Coloquei o sinal que ta lá, menos 1. Aí eu ... aí eu tirei, acabei deixando tudo mais, era pra eu ter feito 3 mais 3, aí eu coloquei ingual [sic] menos $1\ x$. É, x sobre 1, não, 1 sobre x, quer dizer, que deu x. Ingual [sic] a 1."
>
> (Trecho de entrevista com aluno [GU119] da turma GU1)

Apesar de a explicação do aluno não estar totalmente clara, podemos ver que ele "separou" termos com incógnita de termos sem incógnita, "pegou" um número, "colocou" um sinal, e "tirou" outro, que "veio" do outro lado. Todos esses movimentos, a nosso ver, estão relacionados com uma corporificação que esse e outros alunos parecem fazer com os símbolos em equações. Entendemos que eles estão usando corporificações procedimentais (LIMA e TALL, no prelo), tratando os símbolos como entidades físicas que podem ser fisicamente movimentadas, colocadas e retiradas.

Esse tipo de procedimento parece coerente com a concepção, que muitos desses alunos mostraram, tanto nos mapas conceituais quanto no questionário, de equação como contas com números inteiros, que têm estreita relação com o mundo corporificado, por serem derivadas da contagem, feita com objetos físicos. Como o aluno tem uma concepção corporificada de equação e das operações que faz com os números, ele também relaciona essa corporificação aos procedimentos simbólicos, acarretando, assim, uma corporificação procedimental.

Técnicas e meios de trabalho

As técnicas de resolução de equações são desconectadas do princípio algébrico de efetuar a mesma operação em ambos os membros, o que acarreta a necessidade de o aluno memorizar dois procedimentos diferentes. Essa memorização pode acabar por não colaborar para que os procedimentos sejam comprimidos, fazendo com que os alunos os confundam, ou derivem seus próprios meios de trabalho (LIMA e TALL, no prelo) desses procedimentos.

Em muitos casos, o uso de técnicas, ou dos meios de trabalho gerados a partir delas, acaba por ajudar na resolução de equações, cuja incógnita ocorre somente em um membro ou em ambos. Por isso não há diferença aparente de dificuldades na resolução de equações de avaliação ou de manipulação e, portanto, o corte didático, se existe, não é aparente.

Quando os meios de trabalho interferem de maneira negativa na resolução de equações, eles geram *mal-rules*. Dentre eles estão, por exemplo, os erros apresentados por Freitas (2002), Sleeman (1984) e Payne e Squibb (1990). É interessante notar que alunos que apresentam erros podem fazer uso das técnicas de resolução de equações em um momento e, em outro, usar seus próprios meios de trabalho. Por exemplo, um aluno pode começar a solução da primeira equação da seguinte forma:

$$\begin{aligned}&3x-1=3+x\\&3x-x=3+1\\&2x=4\end{aligned}$$

Neste exemplo, o aluno transporta os termos de maneira apropriada, fazendo as somas posteriormente. Entretanto, diferentes alunos apresentaram a próxima passagem de diferentes formas: um aluno escreve $x=4-2$; outro, $x=\frac{4}{-2}$ e outros dois $x=\frac{2}{4}$. Se observarmos tanto as questões do questionário, em que os alunos resolvem equações, quanto as outras equações dessa atividade, veremos que o primeiro tipo de erro é cometido por 11 alunos, o segundo por 4 e o terceiro por 14, num total de 27, entre 68 alunos, cometendo tais erros (dois alunos cometeram dois desses erros).

Em cada um desses erros, a técnica de passar um número para o outro lado é modificada pelos meios de trabalho dos alunos. No primeiro caso, o número que multiplica a incógnita é transportado para o outro membro, como se estivesse somando a incógnita; no segundo, ele é transportado “para baixo” do segundo membro, mas seu sinal é trocado; enquanto no terceiro ocorre a inversão entre numerador e denominador.

Outro tipo de *mal-rule*, que pode ocorrer devido ao uso de meios de trabalho, é a inversão de numerador com denominador, que acontece em exemplos, como o de um aluno da turma GU2, que desconsiderou a incógnita no segundo membro (**Figura 117**).

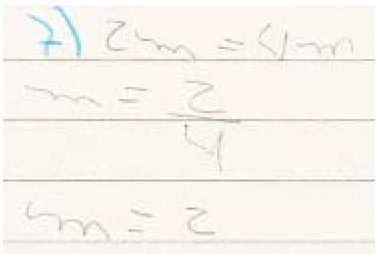


Figura 117: Resolução do aluno [GU224] para a equação $2m = 4m$

Essa inversão também aparece em resoluções para a equação $2m = 4m$ apresentadas por três alunos. Como vemos na **Figura 118**, as primeiras passagens são idênticas às efetuadas nas resoluções corretas apresentadas até a terceira linha. A partir daí, esses três alunos concluem que $m = \frac{-2}{0}$ e, portanto, $m = -2$. Temos, então, dois aspectos importantes nessa resolução: o uso de meios de trabalho, incorretamente derivados das técnicas de resolução de equações, e a divisão por zero.

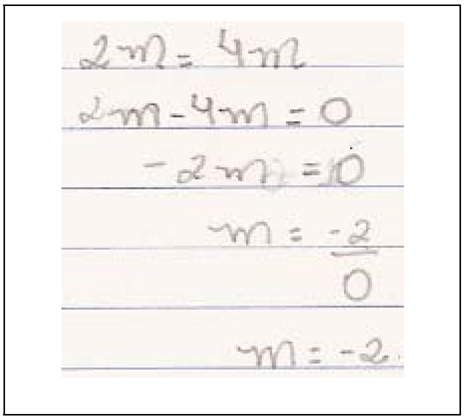


Figura 118: Resolução do aluno [GU107] para a equação $2m = 4m$

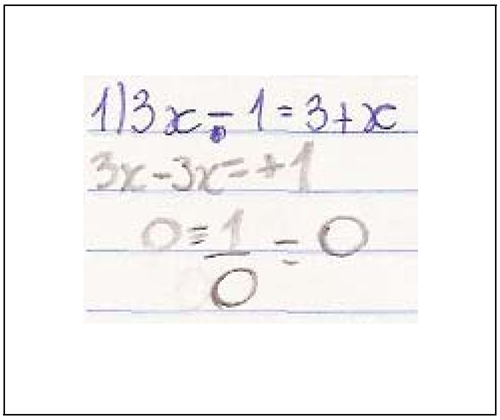


Figura 119: Resolução do aluno [GU101] para a equação $3x - 1 = 3 + x$

As técnicas de resolução de equações, bem como os meios de trabalhos delas derivados, podem acabar sendo usados de maneira indiscriminada pelos alunos. Por exemplo, um aluno da turma GU1, que apresentou para a equação $3x - 1 = 3 + x$ a resolução da **Figura 119**. Na segunda linha, o aluno transportou -1 para o segundo membro, obtendo $+1$, mas $3 + x$ acabou por ser transportado para o primeiro membro como $-3x$. Este aluno somou $3 + x$ e obteve $3x$ como resultado. Nesta conta, pode ter havido confusão entre multiplicação e adição, ou mesmo com a notação algébrica. Na próxima linha, o aluno provavelmente somou $3x - 3x$, obtendo zero. Entretanto, isso não o impediu de continuar a resolução. Acreditamos que ele fez duas passagens em uma única linha, fazendo $0 = 1$, e, como zero, nessa resolução, é o coeficiente de x, o aluno fez a sua transposição para o outro membro, obtendo $\frac{1}{0}$, que concluiu ser igual a zero. É importante notar, primeiro, que o aluno continuou a sua resolução mesmo quando a incógnita já não “existia”; segundo, que não interrompeu a sua resolução quando chegou a um resultado contraditório, como $0=1$. Talvez isso tenha ocorrido porque o aluno estava efetuando mais de uma operação simultaneamente, ou então porque estava tão preso ao procedimento que estava usando, que não percebeu que ele o estava guiando a um resultado incorreto.

Acreditamos que alguns alunos desenvolvem meios de trabalho nos quais confiam como verdadeiros e, justamente por isso, pensam que não é necessário raciocinar sobre o que estão fazendo pois, se seguirem o procedimento, obterão a resposta correta. O fato de confiarem em um procedimento não significa que irão usá-lo consistentemente, pois, como seus meios de trabalho não têm significado ligado ao princípio algébrico, eles podem não ter sido comprimidos e, então, os alunos não se lembram deles, mas sim de alguma coisa parecida com eles.

Dar respostas desse tipo mostra que tais alunos não compreendem o significado matemático de uma equação, que é ligado ao mundo simbólico. Eles, aparentemente, não compreendem que o importante é buscar um valor numérico, que satisfaça a sentença matemática quando substituído na incógnita. Essas características são evidências de que, possivelmente, esses alunos, apesar de trabalharem com os símbolos de uma equação, isto é, apesar de trabalharem no mundo simbólico, não o fazem de forma significativa. Não há significado simbólico no trabalho deles. O uso que fazem de aspectos do mundo simbólico parece restrito a efetuar procedimentos, sejam eles técnicas, meios de trabalhos ou corporificações procedimentais. O significado necessário para a total compreensão de uma equação, no mundo simbólico, não está presente no trabalho desses alunos, e, portanto, eles não usam pensamento "proceitual".

O sinal de igual

Nos dados obtidos com a aplicação do questionário, o sinal de igual é visto por esses alunos principalmente como um sinal operacional. Uma outra forma de o sinal de igual exercer o papel de "fazer alguma coisa" é apresentado por um aluno da turma SP2, que resolve a equação $2m = 4m$ como na **Figura 120**.

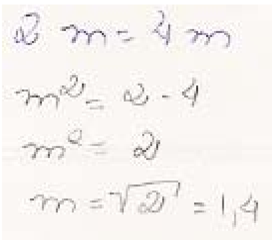


Figura 120: Resolução do aluno [SP214] para a equação $2m = 4m$

Provavelmente é o sinal de igual que instiga o aluno a multiplicar as incógnitas, obtendo m^2 no primeiro membro (isso também ocorre com outro aluno, da mesma turma). O segundo membro mostra como o aluno usa as técnicas de resolução de equações, mudando o sinal do número que permaneceu no segundo membro, e não do que foi transportado para lá. Talvez ele tenha imaginado o transporte de $4m$ para o primeiro membro, já que alguns alunos declaram nas entrevistas que é preciso *"colocar tudo o que é x em um lado, o que não é de outro"*, mas acabou por fazer outro transporte. Em seguida, o aluno acaba por dar um resultado positivo a $2 - 4$. Isso pode ser tanto relacionado a problemas com operações com números inteiros quanto com o fato de que os números trocam de sinal em uma equação. Por fim, a raiz quadrada é extraída para se obter o valor da incógnita. Entretanto, nessa resolução (e em todas as situações em que tal possibilidade ocorreu) o aluno não encontrou a raiz negativa como solução.

Tanto no questionário como na atividade de resolução de equações, há também momentos em que esse sinal assume significados que não são relacionados nem à operação nem à igualdade entre dois membros. Na resolução dada por um aluno da turma SP2, o sinal de igual aparece e desaparece (**Figura 121**):

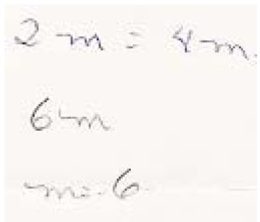


Figura 121: Resolução do aluno [SP210] para a equação $2m = 4m$

Essa resolução também foi apresentada por um aluno da turma GU1. O sinal de igual parece agir como o de "fazer alguma coisa", já que o aluno soma os termos presentes nos dois membros. Ao fazer isso, o sinal de igual parece não ser mais necessário e não é usado na segunda linha da resolução. Entretanto, esta é uma equação e, portanto, deve haver um sinal de igual entre a incógnita e seu resultado. Assim, o sinal de igual reaparece, como se ele existisse na linha anterior e o segundo membro fosse zero. Talvez devido a um meio de trabalho desenvolvido por esses alunos, a incógnita, então, é igual ao oposto de seu coeficiente.

O sinal de igual nem sempre é desconsiderado. Dois alunos da turma GU1 buscam maneiras de fazer com que o primeiro membro seja igual ao segundo. As resoluções apresentadas são a da **Figura 122** e a da **Figura 123**. Na primeira, o aluno quer igualar $2m$ a 2^2m, como se eles fossem a mesma coisa. Na segunda, o aluno, aparentemente, busca um resultado para m, concluindo que esse valor é 2, já que $2 \cdot 2 = 4$, e m acabou por permanecer no segundo membro.

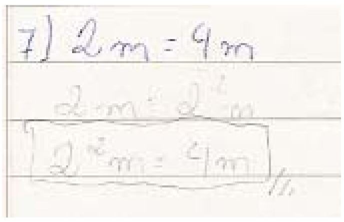


Figura 122: Resolução do aluno [GU130] para a equação $2m = 4m$

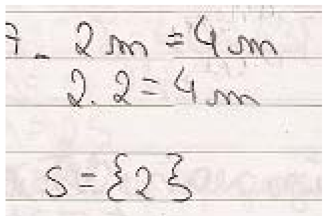


Figura 123: Resolução do aluno [GU104] para a equação $2m = 4m$

Alguns alunos parecem expressar entender a necessidade de uma igualdade quando eles se deparam com esse sinal. Isso se evidencia, por exemplo, no trabalho de um aluno da turma GU1 (**Figura 124**), que explica na entrevista: *"bem, como é $2m$ igual a $4m$, eu coloquei dois ao quadrado que resultaria em $4m$"*, dando um entendimento do sinal de igual como igualdade. Entretanto, ele não parece dar significado simbólico para o sinal de igual, dentro de uma equação, porque ele não busca o valor da incógnita para que ocorra a igualdade entre membros, mas ele efetua uma operação no primeiro membro para que fique igual ao segundo.

Figura 124: Resolução do aluno [GU103] para a equação $2m = 4m$

Os diferentes significados dados ao sinal de igual, pelos sujeitos dessa pesquisa, fazem com que a equação mude de status. A equação passa a ser uma expressão algébrica, ou até mesmo uma expressão numérica. Ao aplicar seus meios de trabalho, alunos acabam por ignorar o sinal de igual, ou mesmo por tratá-lo de maneiras que mostram algum tipo de igualdade, mas não entre os dois membros da equação.

Por exemplo, ao resolver a equação $2m = 4m$, um aluno da turma GU1 transforma uma equação em uma expressão algébrica ao fazer a resolução apresentada na **Figura 125**. O aluno parece usar um meio de trabalho que diz que $4m$ deve ser transposto para o outro lado do sinal de igual com o sinal alterado. Dessa forma, o papel do sinal de igual parece também ter sido cumprido, por isso ele não mais precisa ser apresentado na segunda linha, o que torna a equação uma expressão algébrica. Por fim, a operação $2m - 4m$ parece ter sido efetuada como se fosse $4m - 2m$, para obter a expressão algébrica da terceira linha. A necessidade de buscar um valor para a incógnita não mais existe. Já na segunda linha o aluno não está mais lidando com uma equação, mas sim com uma expressão algébrica.

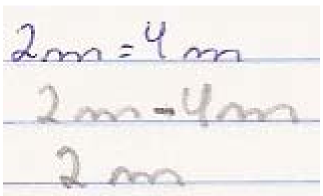


Figura 125: Resolução do aluno [GU101] para a equação $2m = 4m$

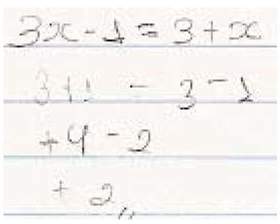


Figura 126: Resolução do aluno [GU223] para a equação $3x - 1 = 3 + x$

Uma equação também pode se tornar uma expressão numérica. Para isso, é necessário que as incógnitas presentes adquiram algum valor numérico. Em entrevista, um aluno apresenta um de seus meios de trabalho, dizendo que *"sempre que a letra não tem um valor, seu valor é 1"*. Alguns alunos apenas substituem a incógnita por 1, quando o coeficiente dela é 1, enquanto outros também usam esse valor para todas as incógnitas, como na **Figura 126**. Dessa forma, a equação torna-se uma expressão numérica, mesmo que alguns meios de trabalho relacionados à equação permaneçam, como, por exemplo, na terceira linha, em que -2 é, provavelmente, o resultado de $3-1$ da segunda linha, que mudou de sinal ao ser transportado para um primeiro membro que não mais existe.

Já a soma de termos não semelhantes acaba por fazer com que alunos transformem uma equação em uma expressão algébrica. Por exemplo, um aluno da turma GU1 resolve a equação $3x-1=3+x$ como na **Figura 127**.

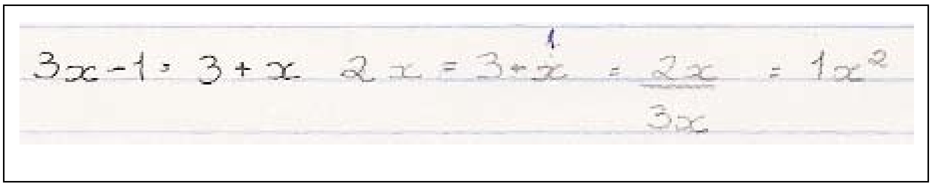


Figura 127: Resolução do aluno [GU103] para a equação $3x-1=3+x$

O primeiro membro da equação foi somado, resultando em $2x$ na segunda linha, enquanto $3+x$ é apenas escrito na linha de baixo, sem que qualquer operação seja efetuada. O sinal de igual, então, não é mais usado com o mesmo significado que ele suporta em equações. Ele é colocado depois de $3+x$ como se as "contas" continuassem uma atrás da outra. Como em equações tem-se um "já-encontrado" relacionado a dividir um número, que está em um lado do sinal de igual, por outro que está do outro lado, o próximo passo do aluno, depois do sinal de igual, é fazer a divisão entre o que, aparentemente, é o primeiro membro e o que deve ser o segundo membro modificado, pois $3+x$ tornou-se $3x$. Nesse ponto, a equação já está escrita como uma expressão algébrica, e seu resultado também. Entretanto, frações algébricas não parecem ser familiares a esse aluno, ou seus meios de trabalho interferiram no aprendizado obtido em experiências anteriores, pois $\frac{2x}{3x}=1x^2$, que pode ter se originado fazendo com que $\frac{2}{3}$ seja igual a 1 e $\frac{x}{x}$ ser x^2. Neste segundo exemplo, o aluno multiplicou, e não dividiu, numerador e denominador. Vale notar que a resposta $1x^2$ talvez seja evidência de que este aluno não compreenda que $1x^2$ é o mesmo que x^2, o que reforça a possibilidade de ele não compreender que não é o valor da incógnita que é 1, mas sim o valor do coeficiente.

É possível que o sinal de igual signifique, realmente, igualdade para esses alunos, e não apenas uma operação. Isso pode ser evidenciado nas resoluções acima, em que os alunos mostram alguma igualdade entre partes de uma passagem com a passagem anterior. Entretanto, esse significado não está relacionado com a igualdade entre membros de uma equação, isto é, com o significado que o sinal de igual deve ter em equações, a fim de que se possa compreender os princípios algébricos que governam a resolução de uma equação. A falta de coordenação entre uma equação e o significado dado para o sinal de igual, dentro dessa situação, é evidência de que não há significado ligado ao mundo simbólico, tanto para o sinal de igual quanto para a incógnita que, muitas vezes, não é tratada como um número que se deve encontrar.

Os procedimentos são demasiadamente enfatizados no trabalho desses alunos. Eles levam em consideração somente o que fazer, e não levam em consideração o significado simbólico presente na situação, movendo símbolos de um membro a outro, em corporificações procedimentais. Existe também uma evidente falta de significado baseado em aspectos corporificados que podem suportar a igualdade característica do sinal de igual. Como este sinal não sustenta tal significado, não é possível esses alunos agirem sobre a equação de forma que o efeito seja mantido. Eles apenas operam sobre ela para obter um resultado, que pode, ou não, ser relacionado com a equação que eles estão resolvendo.

Já-encontrados

As resoluções apresentadas para equações lineares, nessa atividade, envolvem, de alguma forma, as técnicas de resolução de equações de passar um termo para o outro lado do sinal de igual, com a adicional mágica de trocar o sinal ou de passar dividindo. Essas técnicas, como vimos também em algumas questões do questionário, atuam como "já-encontrados" para esses alunos, sendo os mais comuns no trabalho com equações lineares.

Com os dados obtidos com a atividade de resolução de equações, vemos pelos menos mais duas técnicas sendo usadas e atuando como "já-encontrados". Uma delas é a de "multiplicar a equação por -1 quando a incógnita for negativa". Muito provavelmente tendo em vista essa regra, três alunos apresentaram uma resolução para a equação $2m = 4m$ como na **Figura 128**:

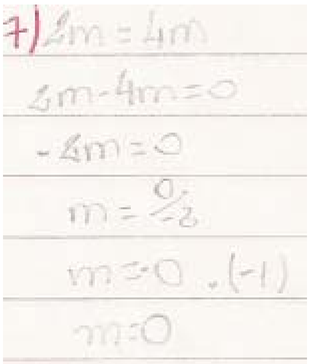


Figura 128: Resolução do aluno [GU203] para a equação $2m = 4m$

Um deles explica em entrevista:

> "eu passei o quatro m para esse lado, tava positivo ficou negativo, aí eu coloquei igual a zero. Aí, dois m menos $4m$ deu menos $2m$ igual a zero. Aí fiz m igual a zero sobre menos dois que passei para cá dividindo. Aí deu m igual a menos zero, aí eu acho que não podia ficar negativo, eu fiz vezes menos um e deu m igual a zero"
>
> (Trecho de entrevista com aluno [GU203] da turma GU2)

Nesse exemplo, o aluno usa técnicas de resolução de equações, mas também uma outra técnica, a de *"multiplicar um número negativo por -1 para obter um número positivo"*. Os três alunos que assim fazem, nesta equação, não se preocupam com o significado da equação como um todo, mas somente com o fato de um termo estar negativo e eles acreditarem que é necessário escrevê-lo positivo. Dessa forma, eles usam o que provavelmente é um "já-encontrado" para eles na resolução de equações, que é o fato de que, usualmente, multiplica-se a *equação toda* por esse fator negativo, quando a incógnita tem coeficiente negativo, a fim de torná-lo positivo. Conjecturamos que esse uso é feito porque os alunos não compreendem o sinal de igual da equação como um símbolo que representa a igualdade entre os dois membros, bem como porque eles não reconhecem mais o princípio algébrico de efetuar a mesma operação em ambos os membros.

É importante notar que, se o aluno compreendesse o sinal de igual como igualdade, ou equivalência, como o chama Kieran (1981), ele teria meios de analisar e refletir sobre os passos da resolução que faz. Inclusive, observaria a necessidade de efetuar a mesma operação em ambos os membros. Entretanto, a falta desse entendimento o leva a aceitar seus meios de trabalho, derivados das técnicas, sem qualquer questionamento.

O sinal de igual, como um sinal operacional, também se faz presente como um "já-encontrado" no trabalho desses alunos. Muitas vezes, ele instiga os alunos a efetuarem uma operação e, em seguida, é descartado, ou assume novamente seu papel de igualdade. Além disso, a igualdade, apesar de ser praticamente desconsiderada no trabalho desses alunos, faz o papel de um "já-encontrado" em alguns momentos em que ela, de uma forma ou outra, é lembrada.

O sinal de igual, ao fazer o papel de "transformador" de uma equação em uma expressão algébrica ou uma expressão numérica, traz à tona o trabalho desses tipos de expressão, que assume status de "já-encontrado" nesses casos. Assim como ocorrido em algumas questões do questionário, os alunos mostram que já se depararam com esses tipos de expressão e usam os conhecimentos relacionados a elas.

No que diz respeito às expressões algébricas, o trabalho dos alunos, incluindo "letras", influencia a resolução de equações, quando regras, tais como, *"a regra de não poder juntar um, por exemplo, uma incógnita com outro número que não tem incógnita"* [SP206] são usadas. Essas regras impedem o aluno de adicionar termos não semelhantes em equações, mas falham em dar qualquer significado simbólico às expressões.

Já o trabalho com expressões numéricas pode ter acarretado o uso de técnicas de operações com números naturais, que foram usadas inapropriadamente com números inteiros, como, por exemplo, quando o resultado de $2m-4m$ é $2m$, positivo.

A-encontrar

Da mesma forma que vimos na Questão 3, a fórmula de Bhaskara também influenciou pelo menos três alunos na resolução de equações lineares. Por exemplo, para resolver a equação $5t-3=8$, um aluno [GU225] tomou $a=5t$, $b=3$ e $c=8$, e usou a fórmula $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ para achar um valor para t. Apesar ter tomado não somente o coeficiente, mas também a incógnita como valor de a, esta incógnita não é usada para o cálculo usando a fórmula, como apresentado na **Figura 129**:

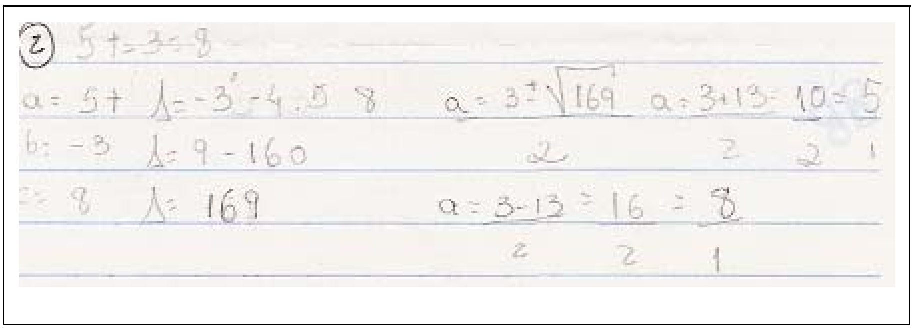


Figura 129: Resolução do aluno [GU225] para a equação $5t-3=8$

Por esta resolução, vemos que o aluno não tem domínio da adição de números inteiros, o que acarreta alguns erros. Entretanto, o aluno encontra duas raízes para a equação, assim como faz quando a equação é quadrática. Em entrevista, para justificar esse uso, ele diz *"ah porque eu achei que seria a forma mais fácil de resolver"*, talvez como proposto pelos professores colaboradores dessa pesquisa.

Como os alunos sujeitos dessa pesquisa já haviam estudado equações quadráticas, e esse foi o último estudo deles, relacionado com equação, antes do início da coleta de dados, acreditamos que a fórmula de Bhaskara, nesse exemplo, está agindo como um "a-encontrar", influenciando o trabalho desses alunos com equações lineares. A fórmula de Bhaskara foi aprendida por eles após o ensino de equações lineares e agora está sendo usada para a resolução delas. Isso mostra que um aprendizado atual está interferindo em aprendizado anterior, como um "a-encontrar". Isso pode nos dizer algumas coisas sobre tais alunos. Primeiro, que o aprendizado que eles tiveram de equações lineares pode não ter sido suficiente para que eles compreendessem o que é uma equação linear, para dar significado a ela e aos símbolos. Além disso, eles parecem não compreender a diferença entre equações lineares e quadráticas, já que usam o mesmo procedimento para resolver ambas.

4.3.2. Equações quadráticas

As equações quadráticas, que formam esse instrumento, são apresentadas no **Quadro 11**.

$a^2 - 2a - 3 = 0$	uma equação completa, "pronta" para o uso da fórmula de Bhaskara.
$r^2 - r = 2$	uma equação completa, mas que não está escrita na forma usual para a aplicação da fórmula.
$3l^2 - l = 0$	com o termo independente nulo.
$m^2 = 9$	com o termo linear nulo, o que nos ajudaria a verificar se a fórmula é usada também em situações desse tipo.

Quadro 11: Equações quadráticas da atividade de resolução de equações

Cinco alunos resolvem a equação $a^2 - 2a - 3 = 0$ corretamente, e outros três a equação $3l^2 - l = 0$. Todas as resoluções corretas para ambas as equações são feitas por meio da fórmula de Bhaskara. A primeira está escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, própria para o uso dessa fórmula, o que talvez tenha sugerido esse uso aos alunos. A segunda equação poderia ter sido resolvida por meio da fatoração $l \cdot (3l - 1) = 0$, para tornar a resolução mais imediata. Entretanto, tal procedimento não foi feito por nenhum dos alunos, como foi também observado nas equações do questionário, questões 5 e 6. Esses dados encontram-se na **Tabela 14**.

Tabela 14: Resolução das equações quadráticas na atividade

Equação	$a^2-2a-3=0$	$r^2-r=2$	$3l^2-l=0$	$m^2=9$	*Turmas*
Correto	1	1	–	–	**GU1**
	3	2	2	1	**GU2**
	1	–	1	–	**SP2**
Total	5	3	3	1	
Uma das raízes	–	4	–	5	**GU1**
	–	2	–	4	**GU2**
	–	3	–	6	**SP2**
Total	–	9	–	15	
Incorreto	24	19	22	18	**GU1**
	10	7	9	4	**GU2**
	6	5	9	5	**SP2**
Total	40	31	40	27	
Branco	3	4	5	3	**GU1**
	9	11	10	16	**GU2**
	10	9	9	8	**SP2**
Total	22	24	24	24	

Para a equação $r^2-r=2$, são apresentadas três soluções corretas, em que os alunos obtêm as duas raízes usando a fórmula Bhaskara. Entretanto, nove alunos apresentaram $r=2$ como resolução, e um aluno, da turma SP2, responde como na **Figura 130**. Este aluno parece compreender que a incógnita é um número que satisfaz a equação.

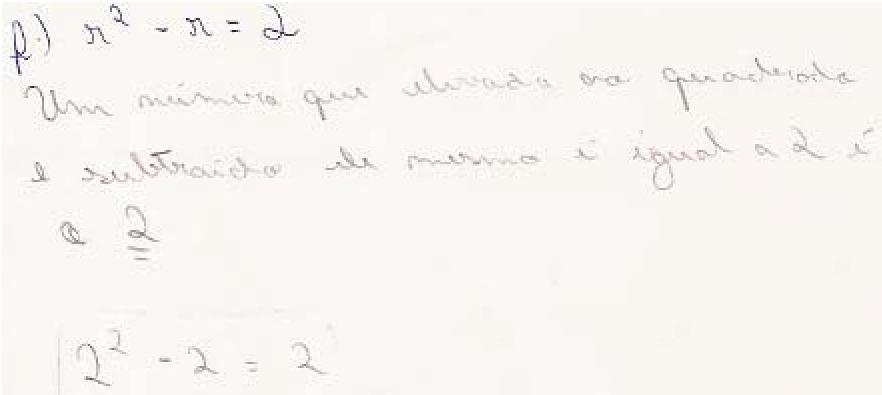


Figura 130: Resolução do aluno [SP204] para a equação $r^2 - r = 2$

Para a equação $m^2 = 9$, apenas um aluno obtém as duas raízes da equação e o faz com a fórmula de Bhaskara. Outros oito alunos obtêm uma das raízes, ao fazer $m = \sqrt{9}$ e, então, $m = 3$. Além deles, outros seis escrevem que $3^2 = 9$ e, portanto, $m = 3$, enquanto um aluno escreve somente que $m = 3$. No total, 15 alunos apresentam apenas 3 como raiz dessa equação.

Poucos alunos parecem dar algum tipo de significado simbólico para equações quadráticas. Três alunos dão como resposta para a equação $r^2 - r = 2$ que $r = 2$, sem apresentar qualquer justificativa ou outro passo de resolução. Um deles escreve que *"um número para a segunda potência que subtraído de si mesmo é igual a dois é o próprio dois"*. Outros seis alunos explicam que m é igual a 3 em $m^2 = 9$ e um deles disse, em entrevista, que é *"porque 3 vezes 3 é igual a 9"*. Em ambos os casos, o raciocínio feito também poderia ter colaborado para a obtenção das duas raízes nas equações $r^2 - r = 2$ e $m^2 = 9$. Entretanto, nenhum aluno que apresenta esse raciocínio obtém a raiz negativa (-1, no primeiro caso e -3, no segundo) de alguma das equações.

Esses alunos podem ter um entendimento de que, se a incógnita é substituída por um número, no primeiro membro da equação, o resultado da operação, com ele, precisa dar o mesmo efeito no segundo membro, resultando em um significado simbólico para a equação e para o resultado obtido. Parece ter-lhes faltado, neste caso, motivação para buscar outra raiz. Já que eles são muito familiares com equações lineares, eles podem não pensar que é possível achar outro número que seja adequado para a situação, e se satisfazem com apenas uma raiz.

Diferenças entre as turmas

Da mesma forma que nas equações lineares, a turma GU1 tem maior freqüência de resoluções incorretas dentre as três turmas. A turma GU2 é a que apresenta maior freqüência de resoluções corretas. Os alunos da turma SP2 também deixam as equações quadráticas em branco e há apenas duas resoluções corretas entre os alunos dessa turma: uma para a equação $a^2 - 2a - 3 = 0$ e outra para a equação $3l^2 - l = 0$.

Fórmula de Bhaskara

Observamos que, dentre as equações quadráticas da atividade de resolução de equações, a maior ocorrência de tentativas de uso da fórmula de Bhaskara ocorre nas equações completas. Ela é usada, também, nas outras equações e não necessariamente traz resultados satisfatórios. A **Tabela 15** apresenta a quantidade de alunos que usam a fórmula de Bhaskara correta ou incorretamente em cada equação, dentre os 68 alunos que as resolveram.

Tabela 15: Uso da formula de Bhaskara em cada equação

Equação	$a^2 - 2a - 3 = 0$	$r^2 - r = 2$	$3l^2 - l = 0$	$m^2 = 9$
Correto	4	2	3	1
Incorreto	6	5	3	2
Total	10	7	6	3

Os professores colaboradores explicaram que eles queriam enfatizar um procedimento que pode ser usado em todas as situações, garantindo que os alunos seriam bem-sucedidos. De acordo com Thorpe (1989), a fórmula de Bhaskara tem valor pedagógico, já que nos guia diretamente a números complexos, mas apresenta soluções que podem não ser significativas para o aluno, tais como, $1+\sqrt{6}$ e $1-\sqrt{6}$, e é um método que não permite generalização para uso em equações polinomiais de grau diferente de dois. Mesmo sendo o desejo dos professores que os alunos alcancem sucesso com a fórmula, o uso dela é raro entre esses alunos e, quando usada, nem sempre produz bons resultados. A ênfase em um único método de resolução pode ter impedido os alunos de desenvolverem pensamento flexível e eles podem estar restritos a apenas uma maneira de resolver esse tipo de equação.

Nós levantamos a hipótese de que a flexibilidade dos “proceitos” não é apenas a de ver um símbolo, tanto como um procedimento quanto como um conceito, mas também ser capaz de escolher, entre os procedimentos que dariam o mesmo efeito, o que seja melhor para uma dada tarefa (LIMA, 2006). No caso daquelas equações, tal flexibilidade se traduz em escolher um método de resolução que seja o mais adequado para a maneira que a equação é apresentada, e que resulte na solução correta. A busca do procedimento mais adequado para cada equação também mostraria pensamento “proceitual”, já que significa entendimento de símbolos e sua manipulação.

Transformação de equações quadráticas em linares

Os alunos que apresentam métodos diferentes da fórmula de Bhaskara para resolver as equações quadráticas dessa atividade não são bem-sucedidos. Eles usam métodos que acabam por transformar equações quadráticas em lineares.

Nove alunos substituem m^2, r^2 ou a^2 por m, r ou a, respectivamente, excluindo, assim, o expoente. Dois alunos substituem a^2 por 1 na equação $a^2-2a-3=0$ e um deles explica em entrevista que é *“porque a letra sempre vale 1”* [GU103].

Outros três alunos adicionam os termos não semelhantes a^2 e $-2a$ na equação $a^2-2a-3=0$, obtendo um termo linear. Em entrevista, um desses alunos explicou que é necessário adicionar também as potências, o que nos leva a entender que esses alunos, da mesma forma que nas questões 5 e 6, estão subtraindo expoentes para obter um termo linear.

Outras operações com os coeficientes e expoentes também são efetuadas para transformar uma equação quadrática em linear. Um exemplo disso é apresentado por três alunos que fazem a solução para a equação $3l^2-l=0$ que mostramos na **Figura 131**.

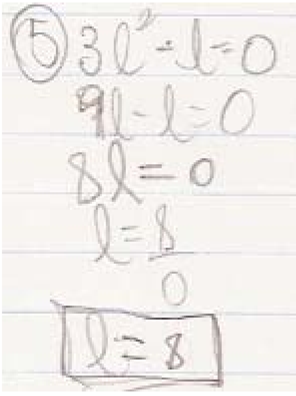


Figura 131: Resolução do aluno [GU118] para a equação $3l^2 - l = 0$

As operações realizadas na segunda e na terceira linhas da resolução são explicadas por um aluno, em entrevista, da seguinte forma: *"é três vezes três, e então é nove, menos um, então é oito"*. Tal explicação mostra que este aluno está usando a potência da incógnita no coeficiente. A passagem de $8l = 0$ para $l = \frac{0}{8}$ evidencia que esses alunos podem não estar avaliando o valor da incógnita para encontrar as raízes, mas simplesmente aplicando meios de trabalho com equações lineares, que, de acordo a experiência deles, os levam ao resultado procurado. O zero também parece ser um fator de dificuldade para alguns alunos que avaliam $l = \frac{0}{8}$ como $l = 8$.

Outro exemplo de transformação de uma equação quadrática em linear foi apresentado por nove alunos com a solução da **Figura 132**. Aparentemente, estes alunos entendem que $m \cdot m$ é o mesmo que $2m$.

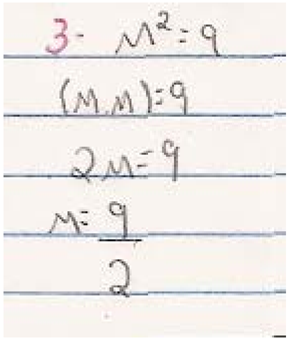


Figura 132: Resolução do aluno [GU113] para a equação $m^2 = 9$

Em alguns casos, os alunos não fazem a passagem de m^2 para $m \cdot m$ para decidir que m^2 é o mesmo que $2m$. Eles parecem usar o expoente da incógnita como se fosse o coeficiente, substituindo m^2 por $2m$ (12 alunos) e a^2 por $2a$ (nove alunos). O mesmo aconteceu com r^2 que foi substituído por $2r$ (sete alunos).

Acreditamos que a falta de opções de métodos para resolver equações quadráticas faz com que esses alunos procurem um meio de escrever a equação que lhes é familiar. Ao transformarem as quadráticas em lineares, os alunos podem usar as técnicas e meios de trabalho que confiam e obter alguma solução para o exercício apresentado.

Técnicas e meios de trabalho

Em um exemplo dado anteriormente, um aluno transforma o expoente de m, na equação $m^2 = 9$, em coeficiente de m e, em seguida, usa a técnica de “passar o número para o outro lado dividindo”. Este é o procedimento que ele conhece para fazer a resolução do que, agora, é uma equação linear. Dessa forma, ele pode cometer os mesmos erros vistos anteriormente. Um exemplo do mau uso de técnicas em equações quadráticas que se tornam lineares é dado por um aluno da turma GU2 que resolveu a equação $m^2 = 9$ como na **Figura 133**.

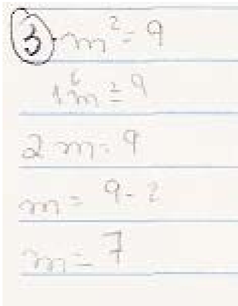


Figura 133: Resolução do aluno [GU225] para a equação $m^2 = 9$

Na segunda linha, a potência da incógnita torna-se coeficiente da incógnita e o aluno obtém uma equação linear. Na terceira linha, o aluno usa a técnica de "mudar de lado, mudar de sinal", inapropriadamente, já que o coeficiente da incógnita foi transposto para o outro membro com sinal trocado, e não dividindo o termo.

Outro exemplo do uso de técnicas é apresentado no trabalho de dois alunos da turma GU1 como na **Figura 134**.

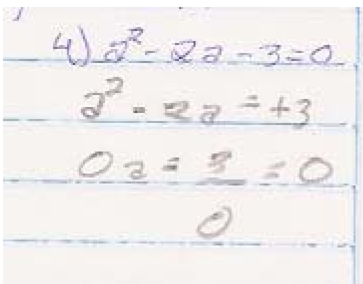


Figura 134: Resolução do aluno [GU102] para a equação $a^2 - 2a - 3 = 0$

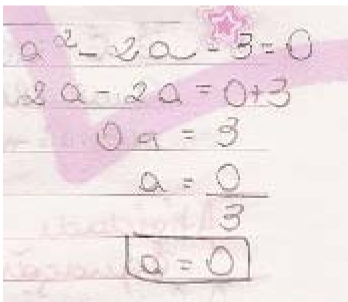


Figura 135: Resolução do aluno [GU125] para a equação $a^2 - 2a - 3 = 0$

Primeiramente, o aluno faz com que a potência da incógnita torne-se coeficiente dela. Depois, ao somar os termos semelhantes, ele obtém um coeficiente nulo para a incógnita, o que não o impede de continuar usando os meios de trabalho, criados por ele, para terminar a resolução. Acreditamos que, na terceira linha, o aluno dividiu o segundo membro da equação (o termo que na resolução dele encontra-se entre os dois sinais de igual) pelo coeficiente da incógnita – zero – e obteve zero como resultado, depois do segundo sinal de igual.

Outro aluno faz a resolução como na **Figura 135**. Dois outros alunos, a partir dessa mesma resolução, concluem que $a = 3$, e a não zero. Outro aluno escreve $a = \frac{3}{0}$ ao invés de $a = \frac{0}{3}$ e conclui que $a = 0$ [GU107] (**Figura 136**) e outro usa o próprio meio de trabalho e faz $a = 0 + 3$ para concluir que $a = 3$ [GU118] (**Figura 137**). Todos eles usam seus meios de trabalho inapropriadamente.

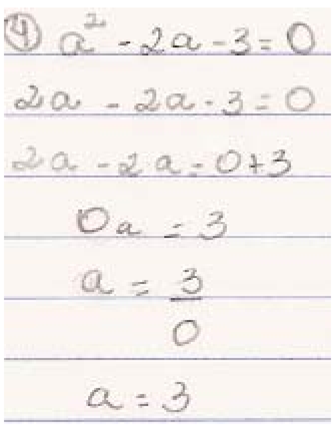


Figura 136: Resolução do aluno [GU107] para a equação $a^2 - 2a - 3 = 0$

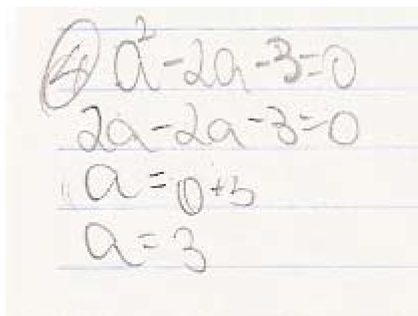


Figura 137: Resolução do aluno [GU118] para a equação $a^2 - 2a - 3 = 0$

Acreditamos que a confiança que os alunos têm nas técnicas e meios de trabalho que usam faz com que eles não percebam a inconsistência do método queestão usando. Seus meios de trabalho estão ligados às técnicas e não aos princípios matemáticos de onde as técnicas são derivadas. Por isso, eles acabam ficando sem significado matemático para os alunos, e estes dão, aos meios de trabalho que usam, significados ligados a uma corporificação procedimental, e não conceitual, o que os leva a erros como as *mal-rules*.

Corporificação procedimental

Assim como nas equações lineares, também observamos o uso de uma corporificação procedimental no trabalho desses alunos com equações quadráticas. Essa corporificação acontece com a potência da incógnita. Para resolver a equação $m^2 = 9$, nove alunos fazem como na **Figura 138**.

Figura 138: Resolução do aluno [SP205] para a equação $m^2 = 9$

A explicação para o procedimento feito na segunda linha é dada por um aluno em entrevista: *"a potência dois passa para o outro lado como raiz quadrada"* [SP206]. Neste exemplo, como nas equações lineares, o movimento do expoente de "passar para o outro lado" carrega consigo uma mágica, uma mudança adicional: ele é *transformado em uma raiz quadrada*. Apesar de esse procedimento resultar em uma das raízes da equação, ele é totalmente desprovido de significado matemático. O aluno simplesmente transforma a potência da incógnita em um membro, em uma raiz quadrada do número que está no outro membro. Esta é uma corporificação efetuada dentro de um procedimento, porém sem significado simbólico. Ao analisarmos o trabalho dos alunos, na atividade de resolução de equações e nas entrevistas, observamos que nenhum deles parece perceber a falta de uma das raízes dessa equação. Acreditamos que o trabalho deles com equações lineares pode tê-los influenciado a se satisfazerem com uma única solução, já que estão acostumados a achar apenas uma em equações lineares.

Já-encontrados

O único já encontrado, usado por esses alunos, que é ligado a equações quadráticas é a fórmula de Bhaskara. Ela não é freqüentemente usada e nem sempre acarreta sucesso na resolução. Nenhum outro meio válido de resolver equações quadráticas foi usado.

Alguns alunos acabam transformando as equações quadráticas em lineares, o que faz com que estas últimas tenham status de “já-encontrado” para eles durante o trabalho com equações quadráticas. Ainda, nesta transformação, muitos “já-encontrados”, vindos do trabalho com equações lineares, são usados. Por exemplo, as técnicas de “passar para o outro lado e mudar o sinal” ou “passar para o outro lado dividindo”, bem como os meios de trabalho delas derivados.

Além disso, os alunos, provavelmente, estão habituados a ter, como resultado de uma equação linear, uma única raiz. Isso pode ser “já-encontrado” no trabalho deles com equações quadráticas, fazendo com que eles aceitem apenas uma raiz como solução desse tipo de equação, não buscando a segunda raiz, por exemplo, no caso das equações $m^2 = 9$ e $r^2 - r = 2$. No caso específico de $m^2 = 9$, $\sqrt{9}$ também é um "já-encontrado", visto que o aluno sabe que esta raiz é igual a 3, e portanto, m deve ser 3.

"Já-encontrados", vindos do trabalho desses alunos com Álgebra, podem ser vistos quando eles confundem $m \cdot m$ com $2m$. Talvez essa confusão seja derivada do fato de que existem dois m na expressão $m \cdot m$, ou mesmo uma confusão entre as operações de soma e multiplicação com expressões algébricas. Há, também, o caso em que é feita a soma de termos não semelhantes, também um "já-encontrado" relacionado à expressões algébricas.

Além disso, o fato de que, quando a incógnita está "sozinha", seu coeficiente é igual a 1, pode ser um "já-encontrado" que foi modificado pelos meios de trabalho de alguns alunos, que dizem que a incógnita assume o valor 1 nesses casos.

Por fim, o uso de "já-encontrados" vindos da Aritmética também estão presentes no trabalho desses alunos com equações, quando o expoente da incógnita é usado no coeficiente dela.

Neste capítulo, apresentamos os resultados associados com a aplicação de vários instrumentos. Em nossas análises, tentamos identificar como "já-encontrados" e "a-encontrar" associados aos Três Mundos da Matemática que estão presentes nas imagens de conceito dos alunos, ou que nelas interferem, contribuíram para o desenvolvimento de meios de trabalho inconsistentes e muitas vezes errôneos evidenciados nas respostas dos alunos.

A seguir, refletimos sobre os resultados obtidos nesta análise, as características de cada um dos mundos da Matemática que foram levantadas, buscando articular respostas para cada uma das questões de pesquisa que motivaram nosso estudo. Tal reflexão nos remete de volta ao nosso principal objetivo, de ir às raízes dos significados dados pelos alunos a equações e aos métodos de resolução usados por eles, a fim de compreender por que eles cometem erros ao resolverem equações.

CONCLUSÃO

Esta pesquisa está inserida no grande corpo de pesquisas que mostram as dificuldades com as quais os alunos se deparam, ao trabalhar com equações, que vão desde a compreensão da própria equação, do significado dela e dos símbolos que a compõem, como o sinal de igual e a incógnita, até a compreensão dos métodos de resolução de equações. Observa-se que, apesar de essas pesquisas terem sido realizadas em diversos países, desde o começo dos anos 80, os resultados são similares e continuam se repetindo até hoje. Os alunos parecem cometer os mesmos erros ao resolver equações, independente do país de origem.

Nossa principal preocupação não é apenas levantar os erros e as dificuldades dos alunos, mas, sim, entender como podemos estudar as origens dessas dificuldades e por que elas emergem tão insistentemente. Em vista disso, nosso objetivo nesta pesquisa é buscar as raízes dos significados que os alunos atribuem a equações e aos métodos de resolução que usam.

A nosso ver, precisamos compreender todos os fatores que influenciam os significados construídos para equações e para os métodos de resolução, qualquer que seja a atividade humana em que estes significados estejam enraizados, seja na atividade de percepção, na de ação ou na de reflexão. Estas atividades incluem não só o estudo dos símbolos matemáticos e das experiências sensório-motoras, mas, também, experiências físicas e mentais e características formais da Matemática. Dessa forma, entendemos que é necessário um quadro teórico que possibilite esta visão mais ampla dos resultados obtidos, permitindo que diferentes tipos de conceitos pensáveis sejam trazidos à tona e que experiências provenientes deles sejam consideradas.

Buscamos teorias que pudessem colaborar com este objetivo e identificamos nelas uma tendência de enfoque em uma única característica. No caso das teorias de processo-objeto, por exemplo, o foco está nos símbolos matemáticos, enquanto na perspectiva da cognição corporificada, o foco está nas experiências sensório-motoras.

1. Ferramentas de análise

Um quadro teórico que, a nosso ver, permite considerar todos os tipos de conceitos pensáveis e de experiências vivenciadas pelos alunos, durante o aprendizado de equações, ou anteriormente a ele, é o quadro dos Três Mundos da Matemática e, em particular, as noções de “já-encontrados” e “a-encontrar” incorporadas a ele.

De acordo com este quadro teórico, existem pelo menos três diferentes tipos de desenvolvimento cognitivo da Matemática, que habitam três diferentes mundos da Matemática. O primeiro é o mundo conceitual corporificado das percepções e ações. O segundo é o mundo "proceitual" simbólico dos símbolos usados para representar conceitos em Matemática e para agir sobre eles. O terceiro é o mundo formal axiomático dos axiomas, definições e teoremas.

Entendemos que este seria um quadro teórico adequado para nossa pesquisa pois, com ele, teríamos condições de analisar, não só o uso que os alunos fazem dos símbolos matemáticos presentes em equações, mas, também, a existência de corporificações e de características formais fundamentando o trabalho deles.

Este quadro teórico também parece apropriado para suprir nosso desejo de que este estudo possa contribuir, não só para a comunidade de pesquisadores em Educação Matemática, mas, também, para professores de Matemática, porque ele pretende usar linguagem e termos simples, que possam ser usados por professores, até mesmo quando se dirigem aos alunos. Este desejo influenciou nossa pesquisa em dois momentos: nas opções metodológicas e na escolha dos instrumentos de coleta de dados. Tivemos como colaboradores desta pesquisa cinco professores de Matemática da rede pública estadual da Grande São Paulo, com quem trabalhávamos desde 2000 em um projeto de formação de professores. Três instrumentos de coleta de dados, o mapa conceitual, o questionário e as entrevistas foram elaborados em conjunto, por professores e pesquisadora, e um deles, a atividade de resolução de equações, somente pelas pesquisadora. Todos os instrumentos foram aplicados pelos professores a uma turma de primeira e a outra de segunda séries do Ensino Médio de uma escola pública de Guarulhos/SP e a uma turma de segunda série do Ensino Médio de uma escola particular de São Paulo/SP, com o intuito de levantarmos as concepções dos alunos sobre equações, os métodos usados por eles para resolver equações lineares e quadráticas, e as experiências anteriores que interferem positiva ou negativamente no trabalho deles com equações.

Utilizando o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, analisamos o conceito de equação e os métodos de resolução de equações lineares e quadráticas que poderiam ser usados pelos alunos, a fim de detalhar como eles seriam vistos em cada um dos mundos da Matemática e quais características seriam consideradas como parte do mundo corporificado, do mundo simbólico ou do mundo formal. Este exercício colaborou para que pudéssemos analisar os dados com mais clareza e objetividade.

“Já-encontrados” são construtos mentais criados a partir de experiências anteriores, vivenciadas pelo aluno e que já são parte da imagem de conceito dele. “A-encontrar” são experiências atuais que interferem no aprendizado anterior, podendo modificar a imagem de conceito do aluno. Ao determinarmos quais são os “já-encontrados” e os “a-encontrar” que emergem dos dados coletados, obtemos quais são as experiências que esses alunos tiveram, ou que estão tendo, que interferem no trabalho deles com equações. Além disso, eles revelam como é essa interferência e como podem ser as imagens de conceito dos alunos.

Em particular, acreditamos que "já-encontrados" e "a-encontrar" são importantes para os professores porque, com eles, é possível identificar as experiências que ainda precisam ser estruturadas nas imagens de conceitos dos alunos. Além disso, "já-encontrados" e "a-encontrar" são assim denominados exatamente para que professores possam discutir com os alunos sobre as dificuldades ou as experiências de aprendizagem que tiveram, usando termos que são auto-explicativos e de simples compreensão.

Os dados coletados foram, então, analisados, tendo em vista o que consideramos como característica de cada um dos mundos da Matemática, e buscando os "já-encontrados" e os "a-encontrar" presentes no trabalho dos alunos.

2. Principais resultados empíricos

Ao analisarmos os dados coletados, obtivemos alguns resultados empíricos que consideramos de grande relevância e que mostram a concepção dos alunos sobre o conceito de equação e as conseqüências dessa concepção no trabalho deles com equações.

Da mesma forma que os sujeitos de outras pesquisas, muitos dos alunos sujeitos desta pesquisa têm uma concepção de equação como uma conta a ser efetuada, que é comparada a qualquer uma das quatro operações elementares: adição, subtração, multiplicação ou divisão. Nesta concepção, a incógnita não está em evidência, isto é, ela não é característica importante de uma equação e o sinal de igual é visto como um sinal operacional. Como a equação é apenas uma conta (ou várias contas em uma), o sinal de igual não tem o significado necessário em equações, o de igualdade entre primeiro e segundo membros, que deve ser mantida. Dessa forma, os alunos não percebem a necessidade de efetuar a mesma operação em ambos os membros. O que parece ser importante para eles é efetuar as operações existentes, de forma a obter um resultado.

O entendimento do sinal de igual como um sinal operacional parece ter duas conseqüências: os alunos não usam o princípio algébrico de efetuar a mesma operação em ambos os membros da equação e não obtêm equações equivalentes nas passagens da resolução. Ao usarem técnicas de resolução, ao invés de um princípio matematicamente válido, os alunos criam seus próprios meios de trabalho, que têm algum significado para eles, mas não necessariamente significado matemático. Dessa forma, as *mal-rules* aparecem e eles aceitam que os passos da resolução não sejam equivalentes, porque julgam estar usando uma técnica correta.

Vemos, então, que os alunos usam apenas técnicas como, por exemplo, “passar um termo para o outro lado” para resolver equações, que trazem sucesso quando elas são adequadamente aplicadas, mas que não garantem que os alunos que as usam compreendam o que elas significam e os motivos pelos quais elas são válidas.

O uso dessas técnicas em equações lineares pode ter sido o principal motivo pelo qual os alunos não tiveram dificuldades maiores com equações, cuja incógnita aparece em ambos os membros, do que com aquelas em que a incógnita ocorre apenas no primeiro membro, contrariando o corte didático (FILLOY e ROJANO, 1989), descrito no **Capítulo 1: Revisão de Literatura**, página 42. A equação de avaliação da atividade de resolução de equações não foi resolvida desfazendo-se as operações para obter o valor da incógnita. Isso também não aconteceu com os exemplos de equação de avaliação dados e resolvidos pelos alunos. Percebemos que desfazer as operações efetuadas na incógnita para encontrar o valor dela não é um hábito familiar a esses alunos, como julgávamos ser. Todas as equações lineares apresentadas, sejam de avaliação ou de manipulação, foram resolvidas com as técnicas de resolução. Não há diferenciação entre os métodos de resolução de equações de avaliação e equações de manipulação e, portanto, não há ocorrência do corte didático em nosso trabalho.

Conjecturamos que ensinar equações com base no princípio algébrico de efetuar a mesma operação em ambos os membros da equação pode colaborar para que o corte didático não ocorra. Outra possibilidade de ensino é não fazer diferenciação entre a resolução de equações de avaliação e de manipulação. Ao trabalharmos com os significados por trás dos métodos de resolução desses dois tipos de equação, e não, simplesmente, com procedimentos, talvez possamos relacioná-los e enfatizar suas semelhanças, de forma a amenizar as dificuldades com equações de manipulação evidenciadas por Filloy e Rojano (1989). Ou seja, nossos resultados não apontam conclusivamente para a existência ou não deste corte didático.

Vale ressaltar que os alunos parecem estar bastante familiarizados com as equações lineares. Elas são em maior número quando os alunos apresentam exemplos de equação e têm a maior freqüência de acerto entre as da atividade de resolução de equações. Por isso, entendemos que as equações lineares estão presentes como “já-encontrado” nas imagens de conceito desses alunos de maneira mais consistente do que as quadráticas.

Aparentemente o “já-encontrado” da equação linear é tão forte que, ao se depararem com uma equação quadrática, os alunos procuram maneiras de transformá-las em lineares, por meio de alguma operação com o expoente da incógnita. Por exemplo, o aluno subtrai o expoente da incógnita ao quadrado do expoente da incógnita linear, obtendo uma incógnita linear, ou ainda, o aluno opera o expoente da incógnita ao quadrado no coeficiente desta incógnita e não sobre a própria incógnita.

O único método, matematicamente válido, usado para resolver equações quadráticas é a fórmula de Bhaskara. Os professores colaboradores desta pesquisa declaram que usam esta fórmula porque ela é um procedimento que traz sucesso qualquer que seja a equação quadrática. Este não é o caso com os alunos sujeitos desta pesquisa. Apesar de ser o único recurso disponível, poucos deles usam a fórmula e nem todos são bem-sucedidos.

Como este procedimento para resolução de equações não garantiu o sucesso esperado pelos professores, os alunos acabaram buscando outras maneiras de resolver equações quadráticas, com base em “já-encontrados” de equações lineares. No entanto, essas maneiras mostram-se inválidas para a resolução pretendida.

3. Diferenças entre as turmas

Mesmo que os alunos não tenham tido desempenho satisfatório nas tarefas que propusemos a eles, e tenham criado diferentes meios de trabalho para resolver equações, é possível notar coerência nas respostas apresentadas por eles. Fica claro em nossa pesquisa que cada uma das turmas apresenta um perfil diferente em relação ao trabalho que fazem com equações lineares e quadráticas. Essa diferença se faz presente também nas duas turmas que são da mesma escola. Acreditamos que isso se deve ao fato de que as três turmas tiveram professores diferentes, o que resultou em diferentes abordagens de ensino, e cada uma delas possibilitou o desenvolvimento de "já-encontrados" e de "a-encontrar" próprios.

Os alunos da turma GU1, que, de maneira geral, têm uma concepção de equação como conta, estão sempre operando com os números que têm em mãos e sempre buscando transformar a situação em uma que lhes seja familiar. Eles fazem contas com os números de um problema para tentar resolvê-lo, fazem contas com os números que formam uma equação para encontrar as raízes e operam com os expoentes das incógnitas para tornar a equação quadrática uma linear, obtendo uma situação familiar.

Os “já-encontrados” presentes no trabalho dos alunos da turma GU1 com equações parecem estar relacionados somente com a ação de efetuar operações com os números, o que pode ter gerado a concepção de equação como conta.

Os alunos da turma GU2 apresentam maior freqüência de resoluções corretas nos instrumentos de coleta de dados, devido à presença de alguns que parecem perceber a estrutura externa de uma equação. No entanto, o padrão apresentado por esta turma é baseado no uso de procedimentos que acarretam sucesso. Eles apresentam pensamento procedimental, não atribuindo significado simbólico para os métodos de resolução que usam. Os “já-encontrados” que eles carregam são, em sua maioria, procedimentos a serem efetuados.

As características permanentes no trabalho dos alunos da turma SP2 são a preocupação deles com o aprendizado e os sentimentos negativos em relação a equações. A maioria das questões são deixadas em branco por esses alunos, mostrando a falta de conhecimento deles, até mesmo dos procedimentos que podem ser usados. É possível também que a preocupação – ou mesmo medo – que têm em aprender os impeça de simplesmente arriscar usar qualquer método.

4. Discutindo as questões de pesquisa

Com exceção do uso de “já-encontrados” de equações lineares para a resolução de equações quadráticas, todos os dados empíricos apresentados são similares aos evidenciados nas pesquisas anteriores sobre o tema. Eles mostram como os alunos agem perante uma equação linear ou quadrática. Ao analisarmos os dados sob o olhar dos Três Mundos da Matemática, visamos explorar as possíveis raízes dos erros cometidos pelos alunos e interpretar os fenômenos envolvidos na resolução de equações. Nossas atividades de pesquisa tinham como objetivo buscar resposta para a seguinte questão norteadora:

Quais são os significados que os alunos atribuem a equações e aos métodos de resolução que usam, e de quais experiências esses significados surgem?

A partir dela, elaboramos questões de pesquisa mais específicas e fundamentadas no quadro teórico a ser usado como ferramenta de análise dos dados. A estreita relação entre o quadro teórico e as questões de pesquisa foi essencial para que a análise dos dados contivesse subsídios que nos possibilitem responder essas questões e, com elas, atingir nosso objetivo.

A questão norteadora levanta alguns pontos que foram considerados em relação aos Três Mundos da Matemática: o significado atribuído à equação e aos métodos de resolução, em relação a cada um dos mundos da Matemática; a visão dos alunos sobre os métodos de resolução como "proceitos"; a qualidade do pensamento dos alunos como "proceitual" e as experiências anteriores que influenciam o trabalho com equações na qualidade de "já-encontrados" ou "a-encontrar". A partir desses pontos, retomaremos as questões de pesquisa, discutindo-as de acordo com a análise dos dados à luz dos Três Mundos da Matemática, subsidiada pelos "já-encontrados" e "a-encontrar".

4.1. Significados atribuídos a equações

A primeira questão de pesquisa que surge da questão norteadora diz respeito aos significados, relacionados aos mundos da Matemática, que foram atribuídos pelos alunos à equação:

- *Quais são os significados atribuídos à equação, ligados a cada um dos mundos corporificado, simbólico e formal*?

A concepção mais evidente de equação apresentada por esses alunos é a de equação como conta. Ela é relacionada ao mundo corporificado, pois tem suas origens na Aritmética de números inteiros. Dessa forma, o principal significado dado a equações por esses alunos é corporificado.

Em muitos momentos, alguns alunos também citam a necessidade de buscar o valor da incógnita com regras e fórmulas. Tais alunos definem equação por meio dos procedimentos usados para resolvê-las. Esses procedimentos são parte do mundo simbólico, pois são efetuados por meio da manipulação simbólica. Entretanto, não parece ser atribuído a eles significado simbólico, mas sim significado procedimental. É o procedimento que define a equação, e não o significado simbólico subjacente a esse procedimento.

A nosso ver, não há significado simbólico para equações, nem para a incógnita nem para o sinal de igual. É dado significado corporificado a equações, como contas, e também ao sinal de igual, como sinal operacional relacionado a essas contas com números inteiros. A incógnita também é, muitas vezes, vista como uma corporificação. Os alunos manipulam-na como se ela fosse uma entidade física, que pode mover-se de um lado para o outro do sinal de igual.

Não há também vestígios de significado formal para equações, no trabalho desses alunos. O mundo formal não é amplamente discutido no nível de escolaridade desses alunos, por isso, não se espera que eles apresentem concepções de equações que tenham suas raízes nesse mundo, mas talvez que algumas características formais possam ser encontradas no discurso ou nas respostas escritas, o que não acontece. Provavelmente, o enfoque nas operações efetuadas para resolver equações é um fator que contribui para esse quadro.

4.2. Mágica e corporificação procedimental

Os métodos de resolução de equações lineares e quadráticas estão presentes nas concepções e significados dados a equações pelos alunos, já que eles definem equações, principalmente, pelas ações que devem efetuar para resolvê-las. Por isso, é importante que analisemos os significados dados a esses métodos de resolução, o que gera outra de nossas questões de pesquisa.

- *Quais são os significados atribuídos aos métodos de resolução de equações, ligados a cada um dos mundos corporificado, simbólico e formal? E como esses significados interferem na resolução de equações?*

Ao analisarmos os dados coletados com a presente pesquisa, entendemos que há uma manipulação de símbolos, que não é fundamentada em significado matemático, e é conectada a frases como "passar para o outro lado". Mais uma vez, conjecturamos que a manipulação de símbolos, feita pelos alunos, tem significado para eles, mas não um significado ligado ao mundo simbólico. Esses alunos dão significado *corporificado* à manipulação simbólica que fazem. A frase "passar para o outro lado", por exemplo, traduz uma corporificação de pegar um símbolo de um lado do sinal de igual e colocá-lo do outro. Tal procedimento ainda carrega, pelo menos às vezes, uma "mágica" adicional de "mudar o sinal" ou de "dividir" após ter "passado para o outro lado". Esse procedimento e a mágica que o sucede formam uma *corporificação procedimental* (LIMA e TALL, no prelo), em que o aluno dá um significado corporificado para o procedimento que está usando. Em equações quadráticas, pode ocorrer uma corporificação procedimental, quando o aluno pega o expoente dois da incógnita e "passa-o para o outro lado", com a mágica de transformá-lo em raiz quadrada.

Dessa forma, as corporificações procedimentais estão ligadas às técnicas de resolução de equações, já que são derivadas de "passar" termos de um lado para o outro da equação, quando o aluno toma essas frases literalmente. O significado simbólico usado em equações acaba por se perder, e o aluno apenas movimenta termos de um membro da equação para o outro, adicionando "toques mágicos" a essa movimentação.

A corporificação procedimental pode trazer resoluções corretas, mas não há significado matemático relacionado a ela, o que impede que o aluno dê significado simbólico, ou mesmo formal, à manipulação simbólica. Ao tratar os símbolos de uma equação dessa forma, *"pegando"* um termo e colocando-o no outro membro, os alunos acabam por desconectar o procedimento do princípio algébrico que governa a resolução de equações. Assim, eles podem não dar mais significado matemático ao procedimento feito. A movimentação física dos termos de um membro para outro precisa ser acompanhada de modificações adicionais. É necessário que o sinal do termo que está somado à incógnita seja "trocado" no outro membro ou que o termo multiplicando a incógnita seja posicionado "embaixo" dos termos que estão no outro membro. Essas são as "mágicas" adicionais, aceitas pelos alunos, como se, em Matemática, elas pudessem existir sem necessidade de justificativa.

De fato, as próprias corporificações procedimentais são as justificativas dadas pelos alunos para as resoluções que apresentam. Não há qualquer justificativa ligada ao mundo formal ou ao mundo simbólico. Os métodos de resolução usados para resolver equações lineares, então, têm significado corporificado, mas a validação se dá por meio dos procedimentos, não porque é possível ver que é assim, mas porque o procedimento foi seguido, logo deve estar certo.

As resoluções apresentadas para equações quadráticas mostram que os alunos também não atribuem significado formal para os métodos que usam. A fórmula de Bhaskara é vista como um procedimento de cálculo, com o qual se obtém o valor de x, e que não tem significado simbólico nem formal. Outros meios de resolução de equações quadráticas, que exigem compreensão de características formais, não são usados e nem mesmo considerados como válidos.

Esses significados atribuídos aos métodos de resolução usados exercem uma influência ambígua no trabalho com equações. De um lado, o aluno pode ter sucesso com o uso de corporificações procedimentais, pois eles podem obter a resposta correta por meio dessas corporificações. Por outro lado, essas respostas corretas escondem um desconhecimento dos conceitos matemáticos que validam os procedimentos usados, e os alunos não compreendem que eles não são mágicas sem explicação, mas que são técnicas derivadas de princípios algébricos fundamentados por características do mundo formal. O sucesso aparente é frágil e irreal.

4.3. A flexibilidade dos proceitos e o pensamento “proceitual”

Um segundo tipo de análise sobre os métodos de resolução de equações faz-se necessária. Além de observarmos os significados dados a eles, é importante saber se esses métodos são vistos como a dualidade entre processo e conceito, representada pelos “proceitos”. Dessa forma, a próxima questão de pesquisa foi elaborada para saber se:

- *Os métodos de resolução usados pelos alunos são compreendidos por eles como "proceitos"?*

Como as técnicas de resolução de equações são desconectadas de justificativa matemática, o aluno acaba precisando memorizar dois procedimentos diferentes – "passar para o outro lado trocando o sinal" e "passar para o outro lado dividindo", que são, ambos, procedimentos a serem aplicados a cada linha da resolução, o que impede o aluno de ter a compreensão da resolução como um todo. Isso implica que a compressão desses procedimentos em processos precisa ser feita por meio da repetição, e não pelo significado matemático envolvido. Dessa forma, os alunos não vêem os procedimentos que usam como processos, mas sim como procedimentos efetuados passo a passo da resolução.

Além disso, essa falta de justificativa matemática para tais procedimentos pode acarretar um uso inapropriado dos mesmos. Essencialmente, os alunos acabam, então, por criar seus próprios *meios de trabalho* (LIMA e TALL, no prelo) para lidar com princípios algébricos, que são relacionados às técnicas de resolução, ou à própria corporificação procedimental, mas não ao princípio algébrico de efetuar a mesma operação em ambos os membros. Conjecturamos que são esses meios de trabalho que geram *mal-rules*, no sentido de Sleeman (1984), que aparentam ser aleatórias, como afirmam Payne e Squibb (1990) mas podem ser uma indicação da fragilidade do conhecimento de quem os usa. Por não conhecerem os conceitos matemáticos subjacentes aos procedimentos que usam, os alunos também não os vêem como conceitos. Dessa forma, não há a dualidade dos "proceitos" no significado dado aos métodos de resolução de equações usados.

O falso sucesso obtido com o uso de corporificações procedimentais mascara a falta de pensamento “proceitual” e a falta de compreensão de características dos mundos simbólico e formal que estão presentes na resolução de equações.

Os métodos de resolução de equações quadráticas apresentados evidenciam que a falta de pensamento “proceitual” não está somente na ausência de dualidade entre processo e conceito representada pelos símbolos matemáticos. A flexibilidade de analisar a situação em mãos, e escolher o procedimento mais adequado para ela, também está ausente. Como vimos, a fórmula de Bhaskara é o único método aceito por esses alunos para resolver equações quadráticas. Quando só se conhece um meio de resolver a equação, não é possível ser flexível para escolher métodos adequados.

Sem esta flexibilidade, os alunos também são privados de compreender que o efeito que um procedimento causa é o mesmo que qualquer outro procedimento válido para a situação em mãos também causaria. É o efeito resultante importa, e não o meio pelo qual ele foi obtido. O aluno, tendo como “já-encontrado” apenas um tipo de procedimento, dará importância a ele, e não ao efeito que dele resulta.

4.4. “Já-encontrados” e “a-encontrar”

Os significados atribuídos a equações e aos métodos de resolução podem ter sido engatilhados por experiências anteriores, ou atuais, desses alunos com conceitos que, de alguma forma, interferem na resolução de equações. Essas experiências são traduzidas em "já-encontrados" e "a-encontrar", trazendo-nos para outra questão de pesquisa:

- *Qual é a interferência que os "já-encontrados" e os "a-encontrar" têm no trabalho dos alunos com equações?*

Durante a análise dos dados, levantamos os "já-encontrados" e os "a-encontrar" presentes no trabalho desses alunos. Eles são, principalmente, relacionados com a Aritmética e a Álgebra.

No caso da Aritmética, as operações com números inteiros são os "já-encontrados" mais freqüentes nos dados obtidos. Elas têm significado corporificado, assim como a concepção de conta atribuída à equação. No que se refere à Álgebra, estão evidentes "já-encontrados" vindos do trabalho com expressões algébricas e também com equações. Os significados atribuídos a eles são procedimentais, quando são procedimentos a serem efetuados, ou corporificados, vindos de corporificações procedimentais.

Uma característica comum a grande parte dos "já-encontrados" é a qualidade de procedimento que eles carregam. Todos eles parecem relacionados a uma regra ou técnica que deve ser aplicada em uma dada situação. Dessa forma, os "já-encontrados" não apresentam significado simbólico ou formal.

Em nossa pesquisa, observamos, como “a-encontrar”, somente a fórmula de Bhaskara (novamente, um procedimento). Isso ocorreu principalmente porque estávamos lidando com equações lineares e quadráticas e as quadráticas foram as últimas com as quais os alunos trabalharam. A fórmula, sendo o principal método usado para resolver esse tipo de equação, seria também uma experiência recente, que poderia influenciar ou modificar as imagens de conceito dos alunos. Acreditamos que o uso da fórmula de Bhaskara teve um efeito negativo sobre o trabalho anterior com equações lineares, pois foi usada erroneamente para resolvê-las. Esse uso inadequado mostra uma necessidade de reconstrução dos conceitos pensáveis e dos “já-encontrados” relacionados à resolução de equações lineares, presentes nas imagens de conceitos dos alunos, pois a fórmula de Bhaskara exerceu influencia maior do que os “já-encontrados” de equações lineares que os alunos tinham disponíveis.

Como vimos, “já-encontrados” e “a-encontrar” interferem tanto positiva quanto negativamente na resolução de equações. O fato de eles serem sempre relacionados a procedimentos que não carregam consigo significado matemático faz com que mesmo a influência positiva dos “já-encontrados” e dos “a-encontrar” (isto é, quando eles trazem sucesso ao aluno) seja falsa, porque, apesar de o resultado correto ter sido obtido, o aluno não verdadeiramente conhece o motivo real pelo qual obteve esse resultado correto.

4.5. Conexões entre os Três Mundos da Matemática

Após analisarmos os dados e observarmos características de cada um dos mundos da Matemática, nas concepções que os alunos têm de equações, nos métodos de resolução que usam e nos "já-encontrados" e "a-encontrar" que eles têm disponíveis, precisamos analisar se há alguma relação entre as características dos diferentes mundos, o que nos leva à última questão de pesquisa:

- *Quais conexões são feitas pelos alunos entre os Três Mundos da Matemática ao trabalharem com equações?*

Os significados dados a equações e aos métodos de resolução são corporificados ou procedimentais. Se há qualquer conexão entre os três mundos, ela é feita por meio de corporificações procedimentais. Entretanto, apesar de estas corporificações serem feitas no mundo simbólico, por envolverem manipulação de símbolos, elas não têm significado simbólico, o que restringe as conexões entre os mundos corporificado e simbólico a conexões entre corporificações e procedimentos.

Levantamos a hipótese de que é necessário haver conexões entre características de todos os mundos da Matemática, ou, neste nível de escolaridade, pelo menos conexão entre os mundos corporificado e simbólico, para que a imagem de conceito do aluno seja abrangente. As experiências que caracterizam "já-encontrados" e "a-encontrar" devem ser as mais diversas possíveis, de forma que o aluno possa compreender todas as facetas de um conceito e usá-lo adequada e flexivelmente.

Aparentemente, os erros cometidos pelos alunos, na resolução de equações, são devidos ao fato de que o significado que eles dão a essa resolução não é relacionado a conceitos matemáticos, mas, sim, a corporificações procedimentais, cujo significado é relacionado apenas à movimentação de símbolos de um lado ao outro do sinal de igual, como entidades físicas, e não como símbolos algébricos que devem ser manipulados de acordo com princípios algébricos.

Conjecturamos que abordagens de ensino, com enfoque somente em procedimentos de resolução de equações, não colaboram para o desenvolvimento de significados presentes nos mundos corporificado ou simbólico e impedem que o aluno tenha a compreensão de que os procedimentos que usa têm validação matemática e não são mágicas sem sentido que devem ser seguidas.

5. Limitações do estudo e sugestões para outras pesquisas

Toda pesquisa tem características próprias que acabam por gerar limitações ao estudo. Tais limitações podem abrir portas para outras pesquisas. Isso não é diferente no nosso caso. A pesquisa que apresentamos tem aspectos que a restringem, mas também que sugerem estudos que a ampliam.

Uma de nossas escolhas metodológicas foi trabalhar com professores colaboradores, dando a eles poder de decisão, por exemplo, de quais seriam os instrumentos de coleta de dados usados. Acreditamos que esse trabalho com os professores permitiu que tivéssemos acesso a informações sobre como se dá o estudo de equações nas séries e escolas nas quais aplicamos os instrumentos de coleta de dados. Dessa forma, os instrumentos foram elaborados de acordo com o que parecia ser o rendimento desses alunos em Matemática. Os professores puderam colaborar, sugerindo questões que eles acreditavam ser interessantes para esta pesquisa, mas também razoáveis para o grau de instrução dos alunos.

A presença dos professores colaboradores permitiu também que tivéssemos a nosso dispor as turmas com as quais eles estavam trabalhando naquele momento, bem como a participação efetiva deles na coleta dos dados. Sendo o professor da turma responsável por gerenciar ou aplicar os instrumentos, a pesquisadora poderia ausentar-se, deixando a atmosfera da sala de aula inalterada e os alunos à vontade para comportarem-se como em uma aula comum.

Como tivemos acesso a diferentes turmas, foi possível notar uma tendência a variações entre elas no que diz respeito às concepções dos alunos, que parecem estar associadas ao ensino vivenciado por eles. Esta característica não foi detalhadamente explorada nesta pesquisa, mas poderia ser foco de outra. Apesar de algumas diferenças, estas turmas supostamente compartilham características em comum já que todas seguem planos de estudo relacionados com os PCN. Assim, é interessante notar que nenhuma das turmas apresentou todos os "já-encontrados" associados ao currículo escolar sugeridos por esses parâmetros, sugerindo uma distância entre o currículo planejado e o efetivo. Ou seja, mesmo que alguns “já-encontrados” sejam parte do currículo, julgamos mais efetivo analisar os “já-encontrados” reais, isto é, as imagens de conceito dos alunos a fim de fundamentar neles a estratégia de ensino a ser usada e não somente em competências e habilidades que supõe-se que os alunos devem ter desenvolvido.

Os professores não estavam familiarizados com o quadro teórico que usamos para esta pesquisa, então os instrumentos por eles elaborados não necessariamente estavam intrinsecamente relacionados aos Três Mundos da Matemática. Como o mapa conceitual é uma ferramenta que possibilita que diferentes aspectos das concepções dos alunos emerjam da tempestade de idéias, consideramos que dele obteríamos características corporificadas presentes nessas concepções. O questionário e a atividade de resolução de equações levantariam características do mundo simbólico e também do mundo formal, quando o aluno apresentasse as justificativas matemáticas das resoluções apresentadas.

Ao analisarmos os dados, percebemos que o mapa conceitual não trouxe características corporificadas, que poderiam estar presentes no trabalho dos alunos com equações, como planejávamos. A falta de um instrumento específico para o mundo corporificado pode ter sido uma das razões pelas quais não pudemos observar outros tipos de corporificações, além das corporificações procedimentais na resolução de equações. Conjecturamos que a total ausência de menção, por parte dos alunos, de características corporificadas que poderiam ser base de conexão de natureza mais conceitual entre os mundos corporificado e simbólico, e de uma preocupação, dos professores, em elaborar um instrumento que as evidencie, podem significar que as abordagens de ensino comumente usadas não enfatizam esse tipo de característica presente nas equações e, portanto, mesmo um instrumento de coleta de dados específico não modificaria nossos resultados. Para verificar a validade dessa conjectura, sugerimos que seja elaborado um instrumento, que possa levantar características específicas do mundo corporificado, a igualdade como balança, por exemplo, e que tal instrumento seja trabalhado com alunos das mesmas séries do Ensino Médio, para comparar resultados e observar se é possível obter alguma outra forma de corporificação, no trabalho dos alunos com equações, que não seja a corporificação procedimental.

Sendo a corporificação procedimental o único meio de corporificação presente nos resultados obtidos com essa pesquisa, questionamos se ela pode ocorrer em outros conteúdos da Matemática. No caso desta pesquisa, a corporificação procedimental é fruto do uso de procedimentos e de como nos referimos a esses procedimentos. Novas pesquisas poderiam ser realizadas na direção de descobrir se as causas da ocorrência dela em outros conceitos são as mesmas, ou se ela pode derivar-se de outras características do conceito em questão. Sugerimos ainda que a busca por corporificações procedimentais seja feita, não só em conceitos relacionados à Álgebra, mas também à Geometria, ramo da Matemática em que se discute a adequação de uso das teorias de processo-objeto.

Por um lado, os resultados desta pesquisa mostram a importância de experiências corporificadas na construção de significados matemáticos. Por outro, os “já-encontrados” associados com este mundo não parecem contribuir para o desenvolvimento de corporificações conceituais. Este fato pode ser uma explicação para a ausência de pensamento “proceitual”.

A questão que surge então é se é possível desenvolver abordagens de ensino que favoreçam este tipo de pensamento. Sugerimos que sejam elaboradas seqüências didáticas, para o ensino e a aprendizagem de equações, baseadas no quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, com o intuito de colaborar para que o aluno tenha contato com experiências relacionadas aos diferentes mundos da Matemática, principalmente o mundo corporificado e o mundo simbólico, e que ainda possa efetuar conexões entre eles, observar, analisar e refletir sobre essas conexões, buscando construir uma imagem de conceito ampla e diversificada, que o ajude a superar as dificuldades relacionadas à aprendizagem de equações.

A importância do efeito que resulta de diferentes procedimentos também deve ser destacada nessa seqüência, a fim de colaborar com o desenvolvimento de um pensamento “proceitual”.

É importante salientar que o mundo formal não estará presente nessa seqüência didática, em toda a sua totalidade, justamente porque o nível de escolaridade dos alunos, quando se inicia o trabalho com equações, é tal que não é possível fazer a construção do conceito de equação baseado em axiomas, definições e teoremas. Pretendemos que algumas características formais, presentes nesse mundo, sejam discutidas com os alunos, de forma que eles possam compreender conceitos subjacentes à resolução de equações. Entretanto, também seria interessante que fossem feitas pesquisas em nível universitário, a fim de incluir o mundo formal e analisar o desenvolvimento cognitivo dos elementos deste mundo relacionados a equações, ampliando as imagens de conceito dos alunos.

É importante também que sejam feitas pesquisas sobre as dificuldades que os alunos enfrentam com conteúdos da Álgebra que são anteriores ao ensino de equações. Com tais pesquisas, podemos analisar os significados atribuídos aos símbolos usados em Álgebra desde o primeiro contato do aluno com eles. Acreditamos que intervenções de ensino, baseadas nos Três Mundos da Matemática, criariam situações favoráveis para que os alunos dêem significados corporificado e simbólico aos símbolos algébricos, de forma a amenizar as dificuldades encontradas no trabalho com equações.

Além disso, tomando como base que equações podem ser “já-encontrados” para inequações e para funções, estes seriam dois conteúdos que poderiam ser tomados para a continuação desta pesquisa. Com eles, é possível que encontremos outros “a-encontrar” relacionados à equação.

Os Três Mundos da Matemática formam um quadro teórico novo, que abre perspectivas para a análise tanto do desenvolvimento cognitivo de conceitos matemáticos quanto do ensino e da aprendizagem desses conceitos. A nosso ver, este quadro teórico foi de fundamental importância para atingirmos nosso objetivo, pois possibilitou que analisássemos diferentes tipos de concepções e experiências que interferem no trabalho dos alunos com equações, que outras teorias não parecem comportar. É essencial que continuemos a desenvolver esse quadro, por meio de novas pesquisas nele fundamentadas, para que possamos buscar novos relacionamentos entre conceitos e entre características dos Três Mundos da Matemática, presentes nesses conceitos, e melhor compreender o desenvolvimento das imagens de conceito dos alunos.

Pesquisas envolvendo tanto outros ramos da Matemática, como a Geometria quanto a Estatística ou a Física colaborariam para o contínuo desenvolvimento desse quadro teórico, sustentando-o como importante ferramenta no estudo dos fenômenos que caracterizam a Educação Matemática.

BIBLIOGRAFIA

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, DF, 1998.

BROUSSEAU G. *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. The Netherlands: Kluwer, 1997.

BRUNER, J. S. *Toward a Theory of Instruction*. USA: Harvard University Press, 1966.

CHAE, J. L.; OLIVE, J. Making meaning for algebraic symbols: procepts and referential relationships. In: SIMPSON, A. (Ed). *Retirement as process and concept: A Festschrift for Eddie Gray and David Tall*. Prague: Karlova Univerzita, 2006. p. 37-44.

CORTÉS, A.; KAVAFIAN, N. Les principes qui guident la pensée dans la résolution des equations. *Petit X*, Université Joseph Fourier, Grenoble, v. 51, p. 47-73, 1999.

CORTÉS, A.; PFAFF, N. Solving equations and inequations: operational invariants and methods constructed by students. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 24., 2000, Hiroshima, Japão. *Proceedings*... Hiroshima, 2000. v. 2, p. 193-200.

DREYFUS, T.; HOCH, M. Equations – a structural approach. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., 2004, Bergen, Norway. *Proceedings*... Bergne, 2004. v. 1, p. 152-155.

DUBINSKY, E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Ed) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic, 1991. p. 95-123.

FILLOY, E.; ROJANO, T. Solving equations, the transition from arithmetic to algebra, *For the Learning of Mathematics*, Canada, v. 9, n. 2, p. 19-25, 1989.

FREITAS, M. A. de. *Equação do primeiro grau: métodos de resolução e análise de erros no ensino médio*. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

GRAY, E.; TALL, D. O. Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic, *The Journal for Research in Mathematics Education*, NCTM, v. 26, n. 2, p. 115–141, 1994.

GRAY, E.; TALL, D. O. Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25., 2001, Ultrecht. *Proceedings*... Ultrecht, 2001. v. 2, p. 65-72.

GRAY, E.; TALL, D. O. Abstraction as a natural process of mental compression. *Mathematics Education Research Jornal*. No prelo.

KIERAN, C. Concepts associated with the equality symbol, *Educational Studies in Mathematics*. Dordercht, v. 12, p.317–326, 1981.

LAKOFF, G.; JOHNSON, M. *Metaphors we live by*. Chicago: University of Chicago Press, 1980.

LAKOFF, G.; NUNEZ, R. *Where Mathematics Comes From.* New York: Basic Books, 2000.

LIMA, R. N. de. *Resolução de equações de terceiro grau através de cônicas"*. 1999. 154 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1999.

LIMA, R. N. De. Resolução de equações: um estudo com o software CHIC. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2004, São Paulo. *Anais...* São Paulo: Universidade de São Paulo, 2004. Disponível em <http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Comunicacoes_Orais/co0040.doc>.

LIMA, R. N. de. The flexibility of symbols: The case of quadratic equations. In: JONES, I.; MEJÍA-RAMOS, J. P. (Eds). *Working papers of the Warwick SUMINER Group*, 2006. v. 2, p. 133-140.

LIMA, R. N. de.; TALL, D. What does equation mean? A brainstorm of the concept. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE TEACHING OF MATHEMATICS at undergraduation level, 3., 2006, Istanbul. *Proceedings...* Istambul, Turkey, 2006.

LIMA, R. N. de.;TALL, D. Procedural embodiment and magic in linear equations. *Educational Studies in Mathematics*. Dordercht, No prelo.

LINCHEVSKI, L.; SFARD, A. Rules without reasons as processes without objects – The case of equations and inequalities. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 15., 1991, Assisi, Italy. *Proceedings*... Assisi, 1991. v. 2, p. 317– 324.

MANRIQUE, A. L. *Processo de Formação de Professores em Geometria: Mudanças em Concepções e Práticas*. 2003. Tese (Doutorado em Psicologia da Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

MILLER, G. A. The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, APA, v. 63, p. 81-97, 1956.

NOVAK, J. D. *Learning, Creation, and using knowledge – Concept Maps™ as facilitative tools in schools and corporations*. New Jersey, EUA: Lawrence Erlbaum Associates, Inc, Publishers, 1998.

NÚÑEZ, R.; EDWARDS, L. D.; MATOS, J. F. Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*. Dordercht, v. 39, p. 45-65, 1999.

NUNEZ, T., et al. *Introdução à Educação Matemática – Os números e as operações numéricas*. São Paulo: Proem Editora, 2001.

PAYNE, S. J.; SQUIBB, H. R. Algebra Mal-Rules and Cognitive Accounts of Error, *Cognitive Science*. Austin, v. 14, p. 445–448, 1990.

PIAGET, J. *Studies in Reflecting Abstraction*. EUA: Tradução, do original em francês (1977) para o Inglês, por Robert L. Campell. Psychology Press Ltd, 2001.

ROSSINI, R. *Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias*. 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática), – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação, Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Experiências Matemáticas*. 6ª série. São Paulo: SE/CENP, p. 327, 1994.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, v. 22, p. 1–36, 1991.

SILVA, B. A. da. Contrato didático. In: Machado, S. et al. *Educação Matemática – Uma Introdução.* São Paulo: EDUC, p. 43-64, 1999.

SILVA, M. J. F. *Investigando saberes de Professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série*. 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática), – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SLEEMAN, D. An attempt to understand students' understanding of basic algebra. *Cognitive Science*. Austin, v. 8, p. 387-412, 1984.

TALL, D. O. The three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics*. Canada, v. 23, n. 3, p. 29–33, 2004a.

TALL, D. O. Thinking through three worlds of mathematics. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., 2004, Bergen, Norway. *Proceedings*... Bergen, 2004. v. 4, p. 281–288, 2004b.

TALL, D. O. *Mathematical Growth: from Child to Mathematician*. 2004. Disponível em www.davidtall.com. 2004c.

TALL, D. O. et al. Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*. Canada, v. 1,p. 81–104, 2001.

TALL, D. O.; MEJÍA-RAMOS, J. P. Reflecting on Post-Calculus Reform. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICS EDUCATION, 2004, Copenhagen, DK. *Proceedings...* Plenary for Topic Group 12: Calculus. Copenhagen, DK, 2004.

TALL, D. O.; THOMAS, M. O. J. The long-term cognitive development of symbolic algebra. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICAL INSTRUCTION, Melbourne, 2001, v. 2, p. 590-597.

TALL, D. O.; VINNER, S. Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, v. 12, p. 151-169, 1981.

THORPE, J. A. Algebra: What should we teach and how should we teach it?. In: WAGNER, S.; KIERAN, C. (eds). *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. EUA: NCTM, 1989. v. 4, p. 11-24.

VLASSIS, J. The balance model: hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. v. 49, p.341–359, 2002.

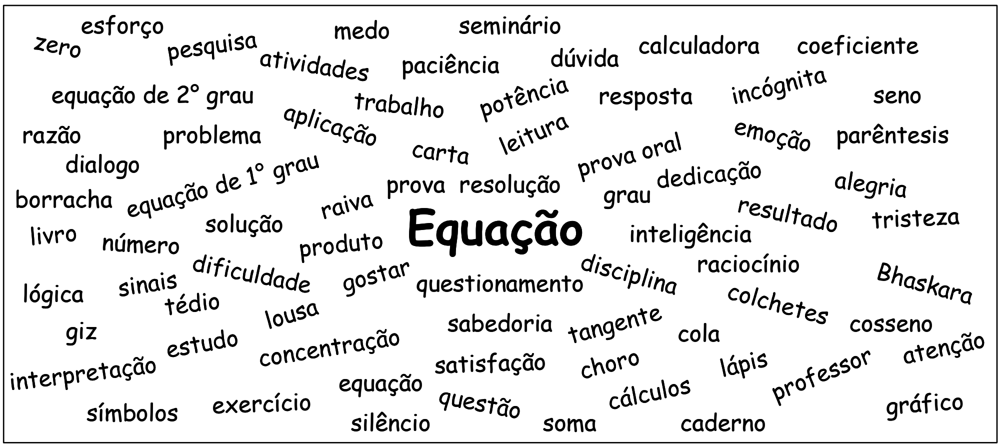
WATSON, A. Embodied action, effect, and symbol in mathematical growth. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 26., 2002, Norwich, UK. *Proceedings...* Norwich, 2002. v. 4, p. 369–376.

WATSON, A.; SPYROU, P.; TALL, D. O. The Relationship between Physical Embodiment and Mathematical Symbolism: The Concept of Vector. *The Mediterranean Journal of Mathematics Education*. v. 1, n. 2, p. 73–97, 2003.

APÊNDICE A -

A TEMPESTADE DE IDÉIAS

Esta figura representa a lousa de uma aula após a tempestade de idéias. As palavras ficam todas espalhadas pela lousa, o que pode dificultar a coleta para a posterior classificação.



APÊNDICE B –

QUESTIONÁRIO APRESENTADO AOS ALUNOS

Nome: ______________________________ Turma: ____

1. O que é equação?

Nome: ______________________________ Turma: ____

2. Para que serve uma equação?

Nome: ______________________________ Turma: _____

3. Dê um exemplo de equação.

Nome: ______________________________ Turma: _____

4. O que significa o resultado de uma equação?

Nome: ______________________________ Turma: _____

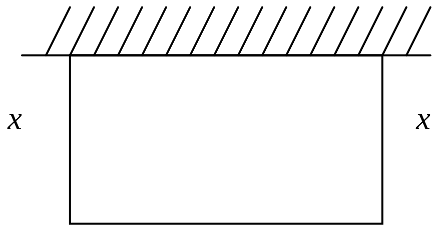
5. Resolva a equação $t^2 - 2t = 0$ no conjunto dos números reais explicando como você chegou ao resultado.

Nome: ______________________________ Turma: _____

6. Resolva a equação $(y - 3)(y - 2) = 0$ no conjunto dos números reais explicando como você chegou ao resultado.

Nome: ______________________________ Turma: _____

7. Ulisses gosta de cultivar flores. Como no quintal de sua casa há um espaço disponível, junto ao muro do fundo, ele deseja construir um pequeno canteiro retangular e, para cercá-lo, pretende utilizar os 40 m de tela de arame que possui. Como ainda está indeciso quanto às medidas, fez o seguinte desenho:



Quais as medidas dos lados do canteiro para que sua área seja de 200 m^2?

Nome: ______________________________ Turma: _____

8. Para resolver a equação $(x - 3)(x - 2) = 0$ no conjunto dos números reais, Joãozinho respondeu em uma linha:

"$x = 3$" ou "$x = 2$"

A resposta está correta? Analise e comente a resposta de Joãozinho.

Nome: ______________________________________ Turma: _____

9. Escolha uma das equações $t^2 - 2t = 0$ ou $(y - 3)(y - 2) = 0$ no conjunto dos números reais e “bole” uma situação-problema que possa ser resolvida com ela.

APÊNDICE C –

UM EXEMPLO DE ENTREVISTA

Para melhor exemplificar como foram feitas as entrevistas, apresentaremos, neste Apêndice, as respostas dadas pelo aluno SP211 às questões do questionário, bem como as questões feitas a ele durante a entrevista. Em seguida, apresentaremos a transcrição dessa entrevista. Nela, vamos nos referir ao aluno como **A**, à pesquisadora que o entrevistou como **PR** e ao observador presente na entrevista como **OR**.

Questões	Respostas	Questões na entrevista
1	Bom para mim é uma conta feita para descobrir o valor de x, y, z, α, β enfim não sei como posso descrever uma equação com palavras mais matematicas, mas é uma coisa que gosto de fazer, sei lá o pq mas acho a equação fácil, muito diferente de outros que acham que é um bicho de 7 cabeças.	Quem são x, y, z, α, β...?
2	Bom como já disse na 1ª questão é uma conta para descobrir uma incognita sendo x, y, z, α, β.	Como são essas contas? O que é incógnita?
3	$x^2 - 36 = 0$ $x = \sqrt{36} = 6$	Por que este exemplo? Por que a resolução e explique as passagens da resolução.
4	Ah! sei lá um resultado serve para ... bom de verdade não sei muito para que vamos usar a equação a não ser para descobrir os valores de x que os exercícios pedem, mas gostos dessas contas.	
5	$a = 1 \quad b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ $b = 2 \quad 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$ $c = 1 \quad 4 - 4 = 0$ Bom acho que está errada, mas foi a primeira coisa que veio na minha cabeça "baskara".	O que é Bhaskara? De onde vieram esses valores? Que contas são essas?
6	$(y-3)\cdot(y-2) = 0$ $y^2 - 2y + 3y - 6 = 0$ $y^2 + 5y - 6 = 0$ $a = 1 \quad b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ $b = 5 \quad 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$ $c = 6 \quad 25 - 24 = 1$ Bom cheguei a esse resultado, mas acho que a visão de distributiva está só me confundi um pouco com os sinais.	Explique cada uma das passagens. Que contas são essas? Distributiva?

7	Sem a página.	Qual o entendimento do enunciado? Resolveria hoje?
8	$(x-3)\cdot(x-2)$ $x^2-2x+3x-6=$ $x^2+5x-6=0$ $a=1 \quad 5^2-4\cdot1\cdot-6$ $b=5 \quad 25+24=49$ $c=6 \quad \Delta=49$ $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$ $\frac{-5\pm7}{2\cdot1}$ $x'=-6$ $x''=6$ Ah! sei lá mas acho que o João tava errado e acho que o meu caminho está correto, disse o meu caminho e não o meu resultado, viu?	Explique cada uma das passagens. Por que o caminho do Joãozinho está errado? Por que o seu caminho está correto?
9	Mariazinha tinha essa equação $t^2-2t=0$ e não sabia com resolver, pensou em baskara, o pensamento dela estava certo? Tente você. "Bom acho que o pensamento de vocês ao fazer essa questão não foi esperando esse tipo de resposta mas desculpa foi a única coisa que eu consegui".	Hoje responderia diferente?

Quadro 12: Respostas do aluno [SP211] às questões do questionário e perguntas feitas na entrevista

Entrevista Aluno SP211

PR: bom, vamos lá. Na primeira questão, "O que é equação?", você disse que é uma "conta feita para descobrir o valor de x, y, z, α, β" muito bem, o que é x, y, z, α, β?

A: ah, pra mim, eu coloquei assim como se fosse para descobrir uma incógnita.

PR: ta.

A: que toda equação tem uma incógnita então eu coloquei como exemplo que muitas tem x, y, z, β, como também tem graus e coisas assim.

PR: ta.

PR: você falou que toda equação tem uma incógnita. Fora ter uma incógnita tem mais alguma coisa que você acha que diferencia uma equação de qualquer outra coisa?

A: tem o sinal de igualdade, ah, não sei, tem uma incógnita e o sinal de igualdade.

PR: "não sei como posso descrever uma equação com palavras mais matemáticas, mas é uma coisa que gosto de fazer, sei lá o porque mas acho a equação fácil, muito diferente de outros que acham que é um bicho de 7 cabeças." Então, pra você é fácil, é simples fazer equação.

A: eu tenho uma certa facilidade, não em todas, mas eu acho que tenho mais facilidade.

PR: você gosta de fazer?

A: gosto, gosto muito de matemática.

PR: legal.

OR: que que os meninos falam que você fala, como é que é, um bicho de sete cabeças.

A: é, é um bicho de sete cabeças para eles.

OR: mas por que eles falam?

A: ah, não sei, acho que eles se assustam só de olhar, eles não, não sei eles não se interessam, acho que as outras pessoas, até mesmo na sala muitas pessoas me olham diferente por eu gostar.

OR: o que quer dizer eles se assustam só de olhar?

A: não sei, eu acho que quando a professora expôs isso é equação, eles já, sei lá eles têm uma certa dificuldade de entender, não sei, eles vêem isso como um bicho de sete cabeças que pra mim não é. Eu vejo isso com uma facilidade, assim, eu olho consigo resolver, sabe, pra mim é fácil, quando eles olham e falam assim, eu não sei e travam, parece. Eu não sei e...

OR: e não sabem nem o que fazer?

A: não, não sabem nem o que fazer. Eles olham e pra eles...

PR: você falou assim que você olha e consegue resolver. Quando você olha uma equação assim, você já pensa em fazer o que?

A: olha, muitas aí eu já olhei e pensei em Bhaskara, eu não sei por que. Pode ta até errado, eu não sei, né, mas eu olhei e pensei. Porque assim, a outra professora que eu tive ela colocava muito assim, fórmulas, que nem Bhaskara, né. Eu olhava e ela falava assim, ó, você olhou para isso daqui, você já tem que pensar na fórmula de Bhaskara. Entendeu, que nem agora, eu estou aprendendo muito com o Alexandre, porque eu pensava que eu sabia equação. E eu acho que eu não sabia tanto quanto eu achava. Que nem agora ele está tentando mostrar um outro, uma outra forma de ver equação, que não é só olhar, que nem Bhaskara, olhar só aquela fórmula e jogar. Você tem que estar entendendo, você tem que saber. Que nem quando você quando vocês falaram o que é equação, eu levei muito tempo para responder isso, sabe, eu fiquei pensando muito, falei assim, ai meu deus o que eu vou responder, fiquei nervosa na hora, né. E quando eu vejo uma equação que eu olho e não sei como resolver me dá um desespero. Eu acho que é isso que eles sentem. Quando eles olham uma equação assim e eles não sabem resolver, eu sinto isso, e penso puts eu não sei resolver isso, eu preciso resolver, sabe e você fica nervosa.

OR: mas por que isso?

A: por que eu acho que eu, acho que eu coloquei isso na minha cabeça que eu sei sabe, que nem agora que eu tava te falando, quando a professora dava exercício eu fazia todos, eu sempre fui muito bem. Aí o Alexandre começou a expor umas outras coisas que eu falei assim, puts eu não sei tudo. Eu preciso correr atrás e preciso ver o que eu perdi lá atrás. Aí começa a me dar esses desesperos, falo assim, nossa, equação parecia ser tão simples e eu não sei fazer.

PR: o desespero é porque você não sabe fazer?

A: porque eu não sei fazer! Aí começa a me dar.

PR: e precisa saber fazer?

A: eu às vezes eu acho que eu tenho que saber fazer. Às vezes eu coloco essa obrigação, digo, Juliana isso é uma obrigação sua, sabe? Às vezes é isso.

PR: e aproveitando que você começou a falar lá o que você aprendeu antes, você lembra como é que você aprendeu a resolver equações?

A: olha, eu lembro que pra mim era muito difícil, talvez porque antes de você ver x, você fica assim, o que é x? Quanto vale x? e não tem um valor exato. Então quando eu vi isso, no começo era complicado, aí a professora foi resolvendo exercícios, aí ela foi explicando, assim, aqui nesse caso você vai colocar x aqui, você vai resolver com o sinal de igualdade, você passa pra cá, coisa e tal. Foi desse jeito, sabe, ela não explicou por que que é x, porque que é isso, sabe, ela simplesmente pegou um exercício assim e foi explicar. Olha só nesse exercício é isso e isso, nos outros vocês vão jogando dessa mesma forma, vocês colocam o sinal de igualdade aqui e vão resolvendo assim.

PR: ta, o passa pra cá e passa pra lá, né?

A: é.

PR: então você aprendeu algumas regras.

A: regras, é. Ela explicava muitas regras. Que nem assim, outro dia eu estava conversando, o Alexandre chegou e colocou um negócio na lousa, uma fração. E perguntou assim, o que é isso? Sabe, é uma fração, o que é isso. Aí ele começou assim, ta mas como eu cheguei nisso? Aí ele voltou naquele negócio da pizza, que todo professor fica na pizza, pedaços de pizza, sabe uma coisa que era pra você ter desenvolvido, sabe, e a gente olha e fala assim peraí, a professora passou isso pra gente e disse isso aqui é uma fração. Por que é uma fração? É uma fração, é uma fração e acabou, sabe. Eu não tinha ido atrás disso e eu sinto falta disso agora. Sabe, que nem na equação, eu acho que a professora podia ter explorado muito mais isso, sabe, pra gente guardar. Isso mesmo, porque acho que teve muitas respostas na sala de o que é equação que você olhou e tinha não sei, não gosto, sabe podia ser diferente, porque não é assim, não sei não gosto, né? Às vezes a pessoa não gosta é porque não sabe fazer, porque não aprendeu direito. Porque às vezes poderia gostar.

PR: vamos para a segunda questão. Segunda questão: "Para que serve uma equação?". "Como já disse na 1ª questão é uma conta para descobrir uma incógnita sendo x, y, z, α, β." Como é que é essa conta. Eu acho que você já falou um pouco, mas vamos só... você disse que é uma conta para descobrir o valor da incógnita. Como que é essa conta.

A: olha, essa daqui eu acho que foi uma das mais difíceis pra mim. Eu não sei porque na verdade eu não sei mesmo pra que serve uma equação. Sei que ela tem uma incógnita e tem que descobrir a incógnita. Tem o sinal de igualdade, aí tem aquelas regrinhas básicas para você resolver. Mas para que que ela serve. Eu olhava assim pra pergunta, aí pensava bom, num tal exercício, ela serve para descobrir uma coisa, no outro pra descobrir outra coisa. Ah, a única coisa que ela serve é pra descobrir ou x ou y, ou qualquer outra incógnita e ela tem o sinal de igualdade.

PR: ta. Você consegue dar um exemplo, porque você falou que num exercício serve para uma coisa e no outro serve pra outra. Você consegue dar um exemplo de um exercício, assim um pra que que serve em algum exercício específico?

A: tem exercícios que nem você precisa descobrir o ângulo, outros você precisa, você tem x ao quadrado, você tem que resolver, ah, não sei, assim, são diferentes coisas, como tem exercício que tem x, y, e α e β e ângulos, uma coisa assim.

PR: aí, a terceira questão era "Dê um exemplo de equação." Você fez lá $\begin{array}{l} x^2 - 36 = 0 \\ x = \sqrt{36} = 6 \end{array}$. Não sei se você saberia responder, mas por que você pôs esse exemplo lá?

A: sabe, assim, ó, eu olhei e pensei tem que dar um exemplo de uma coisa fácil, né, porque eu não vou colocar uma coisa difícil depois não saber resolver, né? Aí eu pensei puts vou colocar o que, né, eu tinha colocado acho que mais aqui, aí eu pensei puts mas se eu colocar mais aqui, vai passar pra lá menos, aí eu falei não tem que colocar menos, pra passar pra lá mais. Aí eu coloquei e fiquei pensando aqui, 36, peguei e coloquei.

PR: por que que teria que passar pra lá mais?

A: pra tirar a raiz quadrada.

PR: pra tirar a raiz quadrada. E se fosse menos?

A: eu não sei se está certo, mas eu acho que teria que multiplicar por menos um. A professora sempre falava, se passou pra lá e ficou negativo, multiplica por menos um. Então acho que foram essas coisas que sempre ficaram na minha cabeça.

PR: e o que aconteceria se fosse mais, você passasse pra lá menos e multiplicasse por menos 1.

A: ele ficaria positivo, aí eu poderia tirar a raiz quadrada.

PR: e o x quadrado?

A: então, eu tiraria a raiz quadrada.

PR: ta. Escreve lá pra mim o que você faria só pra eu ver. X quadrado...

(o aluno escreve $\begin{array}{l} x^2 + 36 = 0 \\ x^2 = -36 \end{array}$)

A: ta. Colocaria x quadrado que é igual a menos 36. Ah, ta, ele ficaria negativo.

PR: e daí?

A: aí eu não saberia resolver.

PR: ta bom.

A: aí eu não sei o que faria.

PR: e aí, por que que você pensou numa coisa que você tinha que saber resolver?

A: não sei.

PR: acho que a minha pergunta é mais assim, por que você achou que tinha que mostrar a resolução?

A: eu não sei, acho que eu entendi que teria colocar, agora lendo eu percebi que poderia colocar somente a equação eu tinha entendido que tinha que colocar a equação e resolver.

PR: ta bom.

PR: bom e aí vem para “O que significa o resultado de uma equação?”. Então você disse que na verdade não sabia muito, só pra descobrir o valor de x. E acho que você já falou um pouco, eu não tinha exatamente uma pergunta específica pra lhe perguntar, mas se você quiser falar alguma coisa a respeito.

A: não acho que é isso mesmo que eu te falei. Eu não sei realmente para que serve, acho que em cada exercício é uma coisa, não faço idéia.

PR: ta bom. Na quinta questão, tinha uma equação para você resolver. E aí você disse que a primeira coisa que veio na sua cabeça era Bhaskara. Que que é Bhaskara?

A: nossa, o que é Bhaskara! É uma boa pergunta. Olha, eu vou ser bem sincera, a professora falou assim: Bhaskara. Bhaskara é isso e jogou a fórmula na lousa.

PR: e como é que é a fórmula, você lembra?

A: olha

PR: não sei se você quer escrever, ou falar, tanto faz.

A: eu sempre lembro daquela fórmula delta é igual, ai, acho que é melhor eu escrever. Acho que é b ao quadrado, menos quatro vezes a vezes c.

PR: isso é o que?

A: pra achar delta, né?

PR: pra achar delta.

A: isso. Aí depois você usa é...

A: raiz quadrada de delta, mais ou menos... não, menos b mais ou menos raiz quadrada de delta dividido por dois a.

PR: ta. E o que que você fez aqui.

A: então, eu olhei isso daqui e aí eu peguei e falei assim, puts eu não sei se eu sei resolver isso, né? Aí eu peguei e fiz assim eu lembro que a professora disse que Bhaskara precisava ter um ao quadrado, aqui o a, aí aqui o b, que seria o número com o t no caso, e o número sozinho. E não tem o número sozinho, e a professora disse que quando não tivesse o número sozinho ele é um.

PR: ta, quando não tem o número sozinho ele é um?

A: aí eu peguei e coloquei isso, porque eu falei, ai, não sei fazer assim

PR: ta. E o que que você calculou aqui?

(o calculo feito pelo aluno: $\begin{array}{ll} a=1 & b^2-4\cdot a\cdot c \\ b=2 & 2^2-4\cdot 1\cdot 1 \\ c=1 & 4-4=0 \end{array}$)

A: eu peguei a, b e c, aí eu joguei na fórmula. Mas eu tenho certeza que está tudo errado. Porque aí eu precisava jogar na fórmula de lá, pelo menos eu acho.

PR: ta, e se você jogasse na fórmula de lá, qual seria o resultado? Você não quer colocar lá pra gente só pra gente ver?

(o aluno escreve $\frac{-2\pm\sqrt{0}}{2}=\left\langle \begin{array}{l} \frac{-2}{2}=-1 \\ \frac{2}{2}=1 \end{array}\right.$)

A: ficaria menos dois, mais ou menos, aí ficaria raiz quadrada de zero, por isso que eu achei que não, não daria.

PR: ta. Dividido?

A: por dois.

PR: ta.

A: aí eu peguei e fiz assim é, dois menos zero. Aí a professora falava assim pra gente porque um eu igualo com esse, aí tinha que tirar a raiz quadrada de zero. Que não existe.

PR: ta.

A: aí por isso que eu parei. Porque aí daqui pra cá eu não saberia resolver.

PR: não existe raiz quadrada de zero.

A: não.

PR: ta bom. Que que é raiz quadrada?

A: raiz quadrada é quando você tem duas vezes aquele mesmo número. Pra dar aquele resultado. Eu não sei explicar, mas por exemplo, 36 é 6 vezes 6 é igual a 36.

PR: ta. E pra ter raiz quadrada de zero, precisaria ter o que?

A: dois números multiplicados pra dar zero.

PR: e tem?

A: zero vezes zero zero.

PR: tem ou não?

A: tem.

PR: você consegue terminar?

A: dois menos zero dois, dois mais zero dois, acho que é isso.

PR: ta.

A: ah, mas tem que dividir por dois.

PR: ta.

PR: e essa, o que foi que você fez? Explica pra mim as passagens.

(resolução do aluno no questionário:
$$\begin{array}{ll} (y-3)\cdot(y-2)=0 & \\ y^2-2y+3y-6=0 & \\ y^2+5y-6=0 & \\ a=1 & b^2-4\cdot a\cdot c \\ b=5 & 5^2-4\cdot 1\cdot 6 \\ c=6 & 25-24=1 \end{array}$$
)

A: olha, eu não sei porque eu fiz isso. Eu apliquei a distributiva pra saber, é... Bom, eu olhei isso daqui aí eu pensei em distributiva. Por causa dos parênteses. Aí fiz a distributiva com o sinal de igualdade para poder resolver pra achar o valor de y. Aí eu cheguei nisso, aí eu caí naquela mesma coisa. Um termo ao quadrado, um número com o termo e um número sozinho. Aí eu peguei e fui resolver. Aí eu parei aqui de novo. Aí quer que eu resolva de novo?

PR: você quer continuar? Vai lá.

(o aluno escreve: $\frac{-5\pm 1}{2}=\left\langle \begin{array}{l} -2 \\ 3 \end{array}\right.$)

A: eu acho que era isso.

PR: o que você fez ali, só pra saber?

A: eu tinha posto menos 5 mais 1, que daria menos 4, e dividi pelo 2. Aí 6 dividido por dois 3.

PR: se eu te desse isso hoje, você resolveria da mesma forma?

A: sim.

PR: só perguntei porque você falou que o Alexandre falou mais coisas. Ta bom.

PR: e aqui,

OR: deixa eu te perguntar uma coisa?

PR: pode falar.

OR: vê se você lembra por que que você achou que tinha que aplicar a distributiva.

A: foi quando eu vi os dois entre parênteses, aí eu lembrei da distributiva.

OR: é.

A: é, agora que eu estou vendo, na minha matéria eu to vendo binômio de Newton, e eu faço mas quando não tem o zero, quando não tem o sinal de igualdade. E acho que eu pensei nisso porque quando tem parêntese é, quando tem o sinal de igualdade é uma equação, e quando não tem é binômio de Newton. Aí eu confundi tudo na minha cabeça aí eu comecei a fazer isso.

OR: você achou que era uma equação por causa do igual.

A: isso.

OR: e pra resolver essa equação, você achou que tinha que multiplicar.

A: eu achei.

OR: você não pode aplicar Bhaskara aqui?

A: eu não saberia aplicar Bhaskara direto assim.

OR: pra aplicar Bhaskara você acha que tem que ter

A: assim.

OR: assim.

PR: só pra deixar claro. Essa multiplicação, essa distributiva, como é que você fez, você multiplicou o que?

A: ah, eu peguei y com y, y ao quadrado, y com 2, dois y, é aquela velha coisa, primeiro termo ao quadrado, duas vezes o primeiro termo vezes o segundo termo, que eu te falei que eu acho que não usaria aqui porque aqui é uma equação. Isso eu usaria no binômio de Newton.

PR: ta

A: aí veio isso na minha cabeça, eu peguei e usei.

PR: ta. Aí você multiplicou y por y, y, continue.

A: y com 2. Aí depois 3 com y e 3 com 2.

PR: ta.

PR: então aqui era isso, né, o Joãozinho resolveu numa linha só então você acha que ele está errado porque você acha que o seu caminho está correto. Qual a diferença entre o caminho que o Joãozinho fez e o seu caminho, se é que existe alguma.

A: não sei.

PR: qual foi o caminho de Joãozinho?

A: olha, não sei.

PR: e o seu caminho?

A: novamente eu usei Bhaskara, mas é como eu te falei, eu caí nessa mesma coisa que eu fiz aqui.

PR: e aqui você se lembrou de fazer isso aqui, ou?

A: é eu acho que eu lembrei de fazer isso aqui, porque, que nem eu te falei, a fórmula, eu tenho que pensar um pouquinho, viu que até demorei pra mostrar.

PR: você acha que é por isso que você não fez nas outras, porque você esqueceu da fórmula e aqui você lembrou.

A: por causa disso, é.

PR: você teria alguma outra explicação, eu estou inventando uma explicação para você?

A: não. Porque eu lembrava claramente dessa daqui, b ao quadrado menos quatro vezes a vezes c. E da outra que nem eu até demorei pra fazer aqui porque eu não...

PR: agora explica pra nós o que é distributiva.

A: x vezes x, x vezes 2, 3 vezes x, 3 vezes 2.

PR: e aí deu x quadrado, menos 2x, mais 3x, menos 6.

A: isso, mas acho que aqui no caso era menos, né porque 3, menos 3x.

PR: ta.

PR: e daqui pra cá como é que veio x quadrado mais 5x menos 6 igual a zero?

A: eu somei esses dois aí ficou 5x porque os dois são x, eu peguei e somei. Achei a, b, c, aí joguei na fórmula. Também não sei se usei os sinais certos.

PR: bom, aqui eu acho que é mais pra gente perguntar assim, você teria alguma outra resposta pra ela hoje?

A: eu ri muito quando eu respondi essa questão. Eu respondi e dava risada sozinha porque bateu o sinal e eu inventei qualquer coisa.

PR: eu vou ler aqui para ela aproveitar. Então escolha uma das equações para bolar uma situação problema. Ela disse "Mariazinha tinha essa equação $t^2 - 2t = 0$ e não sabia com resolver, pensou em Bhaskara, o pensamento dela estava certo? Tente você."

PR: Achei legal que ela pôs embaixo "acho que não era bem isso que vocês queriam, mas..."

A: então eu lembro até que bateu o sinal e a aula do Alexandre é uma antes e uma depois do intervalo e ele "vamos, Juliana, vamos" porque eu estava bem atrasada porque eu fiquei horas pensando em algumas, né? Aí eu peguei e pensei assim, caramba, eu tenho que fazer isso rápido e eu acho que não vou atingir o que elas querem mas vamos lá. E eu escrevi isso e saí da sala rindo e contei pras minhas amigas. Elas disseram Juliana eu não acredito que você fez isso, eu disse eu fiz, mas eu ri muito. Porque eu fiz isso. E sei lá, porque eu, eu acho que eu não soube resolver, aí eu pensei em Bhaskara, aí eu peguei e inventei isso daí. Mas eu acho que não atingi o que vocês queriam.

PR: não tem problema. E assim, só, será que hoje você colocaria uma outra resposta?

A: não. Seria essa mesma!

PR: bom, aí eu pedi pra vocês resolverem trocentos quilos, né? Eu só queria que você explicasse o que você fez daqui pra cá, o que você fez daqui pra cá, ta? Só isso em todas elas.

(resolução do aluno: $\begin{array}{l} 3x-1=3+x \\ 3x-1=3x \\ 3x+3x=1 \\ 6x=1 \\ x=\dfrac{1}{6}=1{,}6 \end{array}$)

PR: a primeira aqui é 3x menos 1 igual a 3 mais x.

A: Aí eu peguei somei aqui, né, ficou 3x, aí a professora ensinou que tem que colocar x para um lado e número para o outro. Eu passei, e depois esse daqui que estava multiplicando passa dividindo.

PR: ta e o x igual a um sobre seis fica igual a um vírgula seis.

A: isso.

PR: ta.

PR: 5t menos oito igual a oito. O que que você fez aqui?

(resolução do aluno: $\begin{array}{l} 5t-8=8 \\ 5t=8+8 \\ 5t=16 \\ t=\dfrac{16}{5}=3{,}2 \end{array}$)

A: eu deixei t pra cá e passei números pra lá. O que era menos passou mais, ficou 5t igual, a oito mais oito, aí eu somei os dois ficou 16, e 16 dividido por 5

PR: ficou 3 vírgula 2.

A: isso.

PR: m quadrado igual a 9.

(resolução do aluno: $\begin{array}{l} m^2=9 \\ m=\sqrt{9} \\ m=3 \end{array}$)

A: eu passei raiz quadrada porque toda vez que tem o quadrado tem que tirar a raiz quadrada.

PR: a quadrado menos 2a menos 3 igual a zero.

(resolução do aluno: $\begin{array}{l} a^2-2a-3=0 \\ a=1\ b=-2\ \ c=-3 \\ 2^2-4\cdot 1\cdot(-3) \\ 4+12=16 \\ \dfrac{2\pm 4}{2} \left\langle \begin{array}{l} 3 \\ -1 \end{array}\right. \end{array}$)

A: É a mesma coisa que eu te falei. Eu olhei um ao quadrado, olhei um número com a letra e depois o número sozinho e resolvi.

PR: ta. Um pouquinho mais.

A: eu peguei a, b, e c, joguei na fórmula, aí eu achei o delta, depois eu peguei o delta e coloquei na fórmula.

PR: $3L$ quadrado menos L igual a zero.

(resolução do aluno: $\begin{array}{l} 3L^2-L=0 \\ a=3\ \ b=-1\ \ c=1 \\ 1^2-4\cdot 3\cdot 1 \\ 1-12=-11 \end{array}$)

A: esse daqui eu também tirei o a, o b e o c, aí eu joguei na fórmula mas esse daqui eu não terminei.

PR: não terminou, você quer terminar?

A: esse daqui eu não terminei porque deu menos 11.

PR: você não terminou porque deu menos 11, e?

A: não. Deu 11.

PR: deu 11 ou deu menos 11?

A: deu menos 11. Aí é o que eu te falei da raiz quadrada negativa. Aí eu pensei assim, hi, Juliana, ta tudo errado, pára aí mesmo. Aí eu peguei e parei aqui.

PR: r quadrado menos r igual a dois.

(resolução do aluno: $\begin{array}{l} r^2-r=2 \\ r^2-r+2=0 \\ a=1\ \ \ b=1\ \ c=2 \\ 1^2-4\cdot 1\cdot 2 \\ 1-8=-7 \end{array}$)

A: aí eu caí na mesma coisa daquele, achei a, b e c e fui resolvendo. Aí eu joguei na fórmula e tudo só que quando chegou aqui, eu peguei e parei. Porque seria a mesma coisa daquele, então parei por aqui.

PR: ta. Dois m igual a $4m$

(resolução do aluno: $\begin{array}{l} 2m = 4m \\ 2m + 4m = 0 \\ 6m = 0 \\ m = 6 \end{array}$)

A: eu coloquei o $4m$ para esse lado e coloquei o sinal de igualdade igual a zero, né? Peguei e somei e achei m igual a 6.

PR: como 6m é igual a zero, o m tem que ser 6?

A: é.

PR: ta.

PR: mais alguma coisa?

A: não.

PR: obrigada, foi muito legal.

A: você tinha que me colocar de primeira, né, to até gelada!

PR: passou o nervoso?

A: passou.

ANEXO A –

PALAVRAS DAS TEMPESTADES DE IDÉIAS

Tempestade de idéias – Turma GU1

θ	Cubo	Mais que	Números
Adição	Delta	Matemática	Números ímpares
Alfa	Divisão	Medição	Números inteiros
Aluno	Ed. Artística	Régua	Números irracionais
Ao cubo	Ed. Física	Resultado	Números naturais
Ao quadrado	Elementos	Sala de aula	Números negativos
Aritmética	Escola	Símbolos	Números pares
Bhaskara	Exponenciação	Sinais	Números positivos
Biologia	Expressão	Sistema	Números primos
Borracha	Filosofia	Soma	Números romanos
Cadeira	Física	Subtração	Formas geométricas
Caderno	Fórmula	Menor que	Parênteses
Caneta	Geometria	Menos que	Potenciação
Carteira	História	Multiplicação	Raiz cúbica
Chaves	Igual	Pertence	Raiz quadrada
Ciências	Inglês	Pontuação	Teorema de Pitágoras
Circunferência	Lápis	Professor	Teorema de Thales
Colchete	X e y	Quadrado	Trabalho
Conjunto	Lápis de cor	Quadriláteros	Valores numéricos
Conjunto unitário	Letra	Química	Porcentagem
Conjunto vazio	Potência	Raiz	Maior ou menor
Conta	Lousa	Maior que	Mais ou menos
Contém	Triângulo	Português	

Tempestade de idéias – Turma GU2

Equalizar	Rosquinha de coco	Matrizes
Pavor	Fórmula	Número
Equador	Variável	Atenção
Qualificação	Mulheres nuas	Homotetia
Operação	Divisão	Medo
Biologia	Matemática	MRU
Raciocínio	Radiciação	Teletubies
Resolução	Raízes	Avaliação
Soma	Pensamento	Bháskara
Multiplicação	Delta	Letras
Fatoração	Ômega	Número irracional
Solução	Alfabeto grego	Algarismo romano
Subtração	Tabuada	Calculação
Hepatite	Toucinho frito	Logaritmo

Tempestade de idéias – Turma SP2

Número	Problema	Estudo	Aplicação
Raiz	Raiva	Pesquisa	Exame
Cálculos	Tristeza	Trabalho	Recuperação
Letras	Concentração	Esforço	Seminário
Símbolos	Prova	Dedicação	Zero
Potenciação	Cola	Atenção	Nota
Resultado	Exercícios	Silêncio	Chamada oral
Colchete	Atividade	Lápis	Equação do 1º grau
Sinais	Lógica	Borracha	Equação do 2º grau
Razão	Interpretação	Lousa	Melhor parar por aí
Parênteses	Prazer	Giz	Seno
Incógnita	Gostar	Pergunta	Cosseno
Produto	Inteligência	Resposta	Tangente
Bhaskara	Raciocínio	Medo	Edineide
Coeficiente	Emoção	Resolução	Adição
Regra de três	Professor	Desespero	Produto
Dificuldade	Paciência	Pânico	Leitura
Dúvida	Sabedoria	Mmc	Diálogo
Solução	Disciplina	Gráficos	Livros
Chato	Apostila	Choro	
Calculadora	Caderno	Felicidade	

ANEXO B –

MAPAS CONCEITUAIS

Mapas conceituais da turma GU1

GU1M1

Frase

Em tudo na vida precisa-se de equação, desde a compra do material escolar até as matérias em sala de aula.

GU1M2

Frase

SÍMBOLOS

Os símbolos vem sendo usados desde a época dos homens antigos todos os símbolos representam alguma coisa e são usados diariamente na matemática principalmente em contas.

MATÉRIA

A matéria é usada na nossa vida é tão importante se a gente quiser ser alguêm na vida.

SINAIS

Sinais pertencem a matemática e tambem em quase tudo, servem quando você for comprar alguma coisa e soma de contas.

GU1M3

Frase

Quando nossos pais vão fazer as compras escolares: caderno, lápis, borracha. Eles sempre usam alguma EQUAÇÃO, como: divisão, subtração e adição.

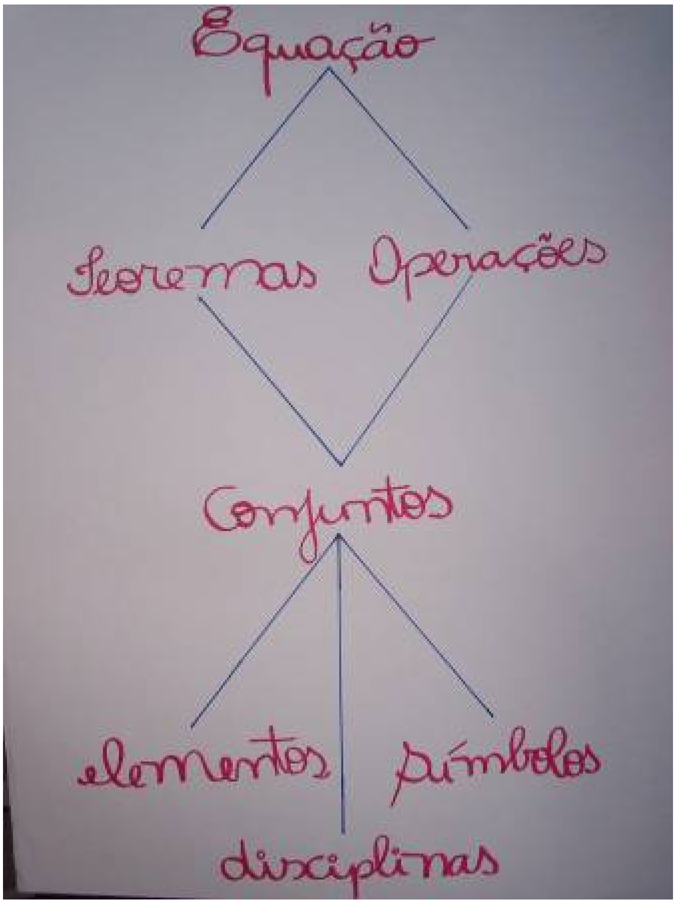
Nós usamos EQUAÇÕES, em quase todas as matérias diciplinadas da escola, como: Física, Matemática, Aritmetica e Ciências.

Em matemática por exemplo nós usamos varios tipos de sinais: mais ou menos, raiz quadrada, igual, x, y, mais que, menos que e etc... Também usamos vários tipos de números como: números primos, números inteiros, números positivos e negativos, números pares, números impares, números romanos e etc...

Já em Física, usamos muitas formas geométricas como: triângulo, quadrado, cubo, etc...

Uma coisa é certa, toda equação tem soma e resultado.

GU1M4



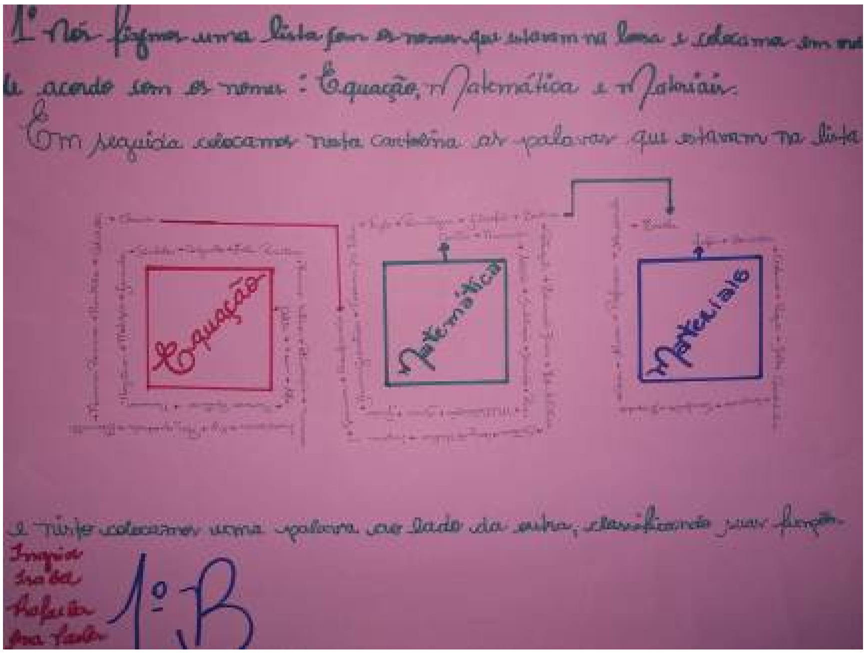
Frase

Descobrimos que na matemática para resolvermos uma equação, necessitamos de várias operações, símbolos e conjuntos e uma das partes fundamentais são os elementos, pois sem eles é impossível um teorema resolvido.

Dando nomes aos grupos formados percebemos que as palavras ligavam-se umas as outras então em uma equação utilizamos um pouquinho de cada coisa que aprendemos no decorrer dos anos em matemática!

Ligamos equação aos teoremas que acabou ligada com o nosso conjuntos de operações. E o nosso grupo conjuntos ligou-se formando conjunto de elementos conjunto de símbolos e os conjuntos das disciplinas.

GU1M5

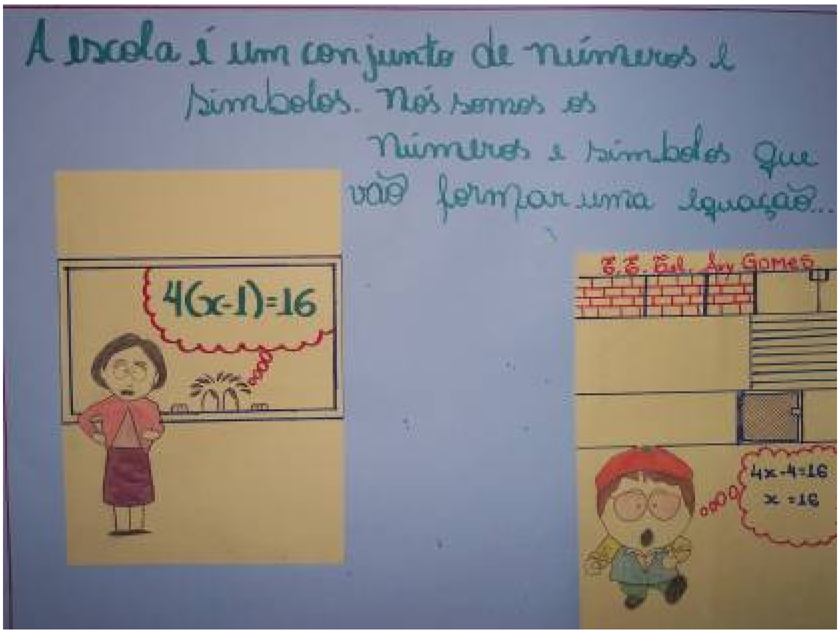


Frase

1º nós fizemos uma lista com os nomes que estavam na lousa e colocamos em ordem de acordo com os nomes: Equação, Matemática e Materiais.

Em seguida colocamos nesta cartolina as palavras que estavam na lista e nisto colocamos uma palavra ao lado da outra, classificando suas funções.

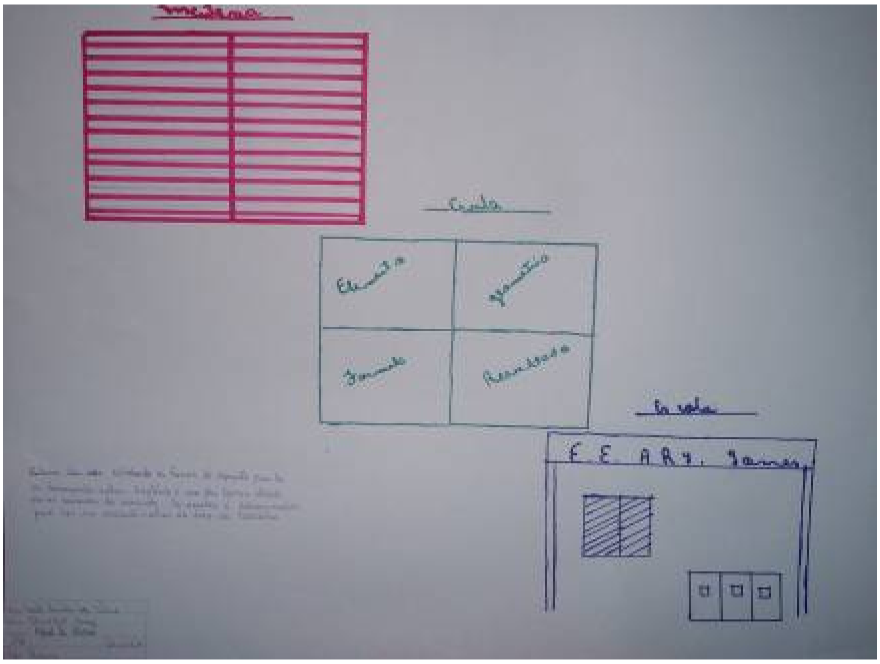
GU1M6



Frase

A escola é um conjunto de números e símbolos. Nós somos os números e símbolos que vão formar uma equação.

GU1M7



Frase

Estamos nas aulas estudando as formas de equação para ter um desempenho melhor. A matéria é uma das formas devida parar aprender de ocasiões. As escolas é sobravimentos para ter uma educação melhor na área de trabalho.

GU1M8

Frase

(não tem)

Mapas conceituais da turma GU2

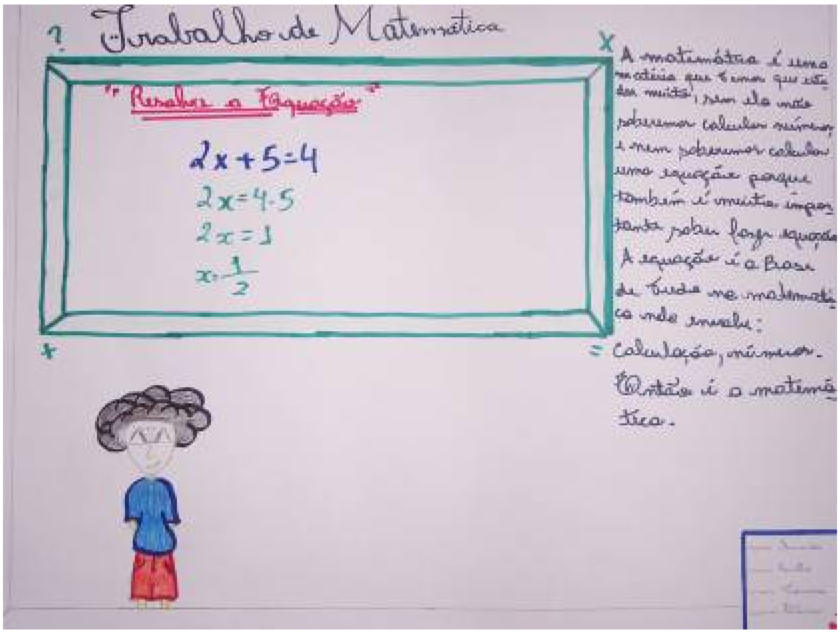
GU2M1

Frase

Este diagrama nos mostra que a equação está ligada c/ o grupo tudo a vê, porque todas as palavras que contém nesse grupo fazem parte da matemática como operações, fórmulas e etc.

Os outros 2 grupos ñ estão ligados a equação pois seu conteúdo ñ estão relacionados c/ o assunto que estamos abordando.

GU2M2



Frase

A matemática é uma matéria que temos que estudar muito sem ela não saberemos calcular os números, e nem saberemos calcular uma equação porque também é muito importante saber fazer equação.

A equação é a base de tudo na matemática nela envolve:

Calculação

Número

Matemática

Exemplo

$2x + 5 = 4$

$2x = 4 - 5$

$2x = 1$

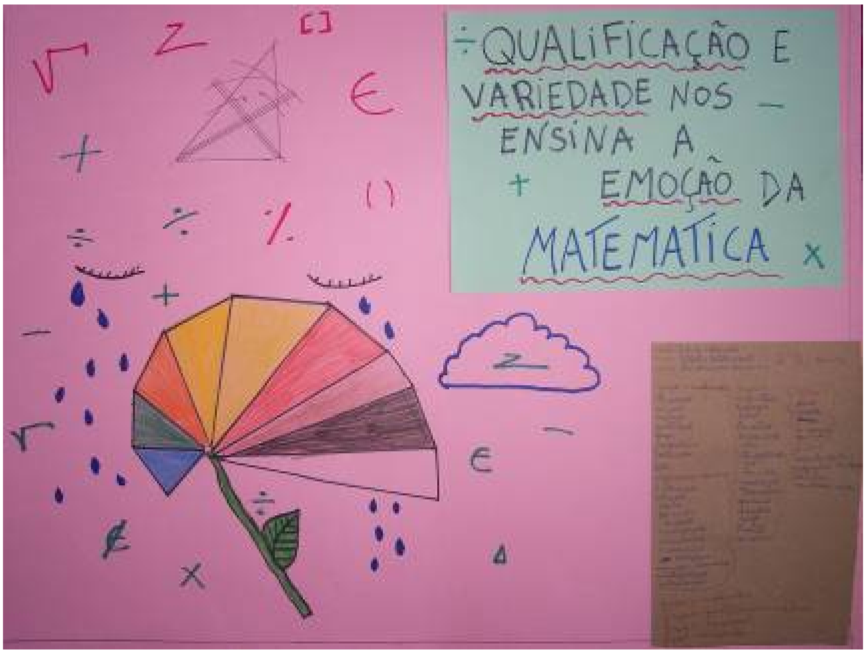
$\frac{1}{2}$

GU2M3

Frase

A Equação é a base de tudo na matemática. Nela envolvem: soma, divisão, subtração, multiplicação, número, resolução, e, acima de tudo, raciocínio.

GU2M4



Frase

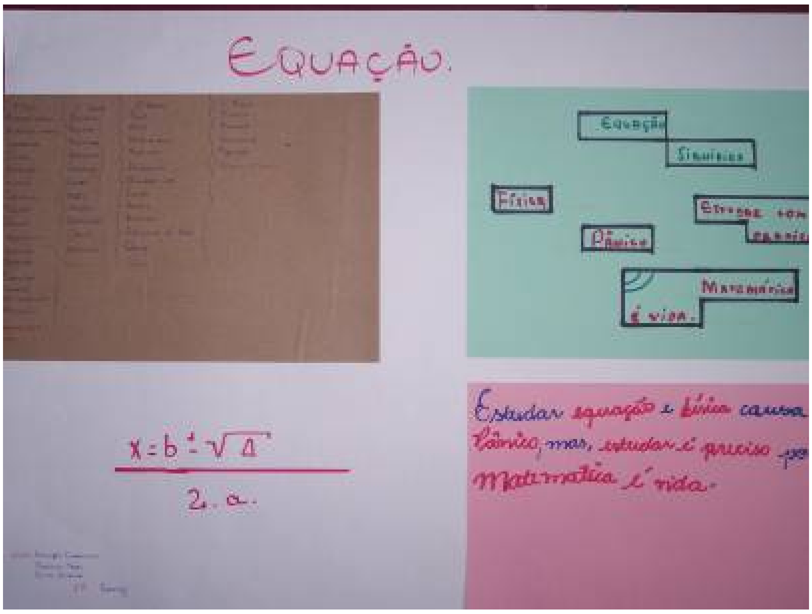
Qualificação e variedade nos ensina a emoção da matemática.

GU2M5

Frase

Na matemática, equação é alimento para a mente, comida rica em vitaminas anti-besteiras.

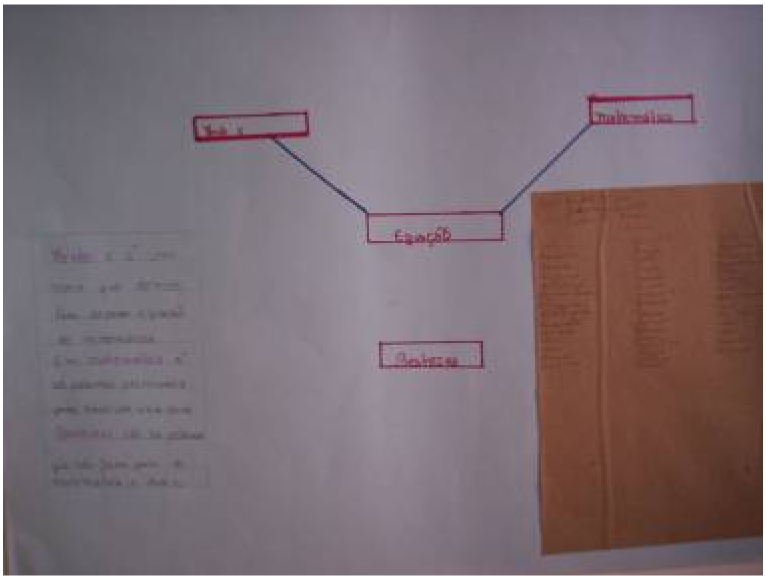
GU2M6



Frase

Estudar equação e física causa pânico, mas, estudar é preciso porque matemática é vida.

GU2M7



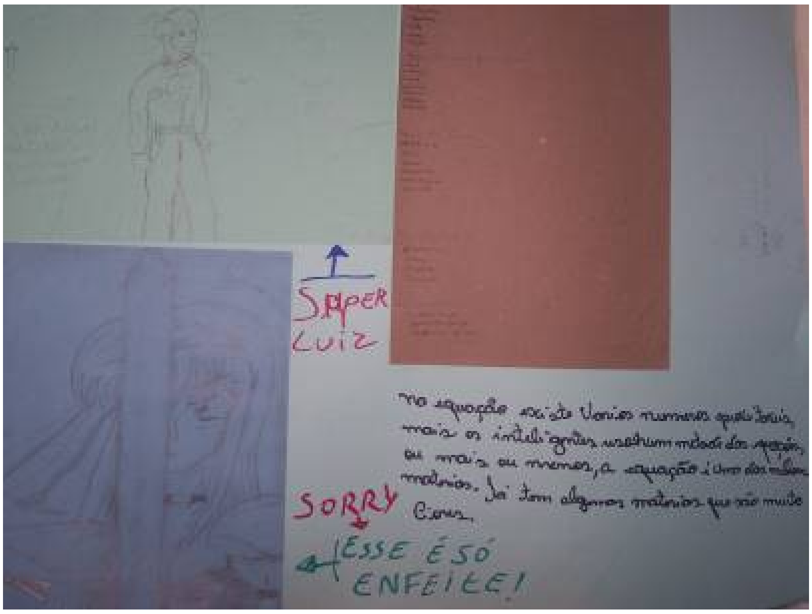
Frase

PONTO X: é um nome que demos para separar equação de matemática.

EM MATEMÁTICA é as palavras principais para resolver uma conta.

BESTEIRAS são as palavras que não fazem parte de Matemática e Ponto X.

GU2M8

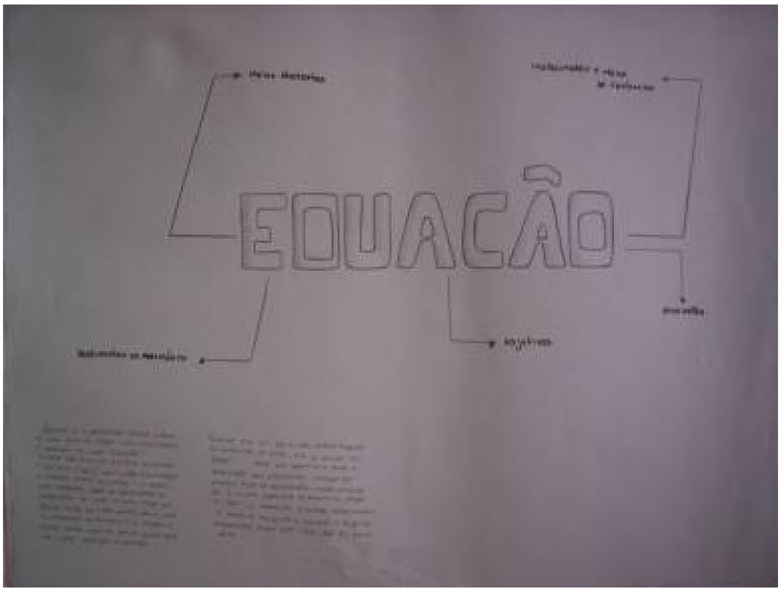


Frase

Na equação existe vários números aproveitáveis, mais os inteligentes resolvem metade das equações, ou mais ou menos, a equação é uma das melhores matérias. Já tem algumas matérias que são muito piores.

Mapas conceituais da turma SP2

SP2M1



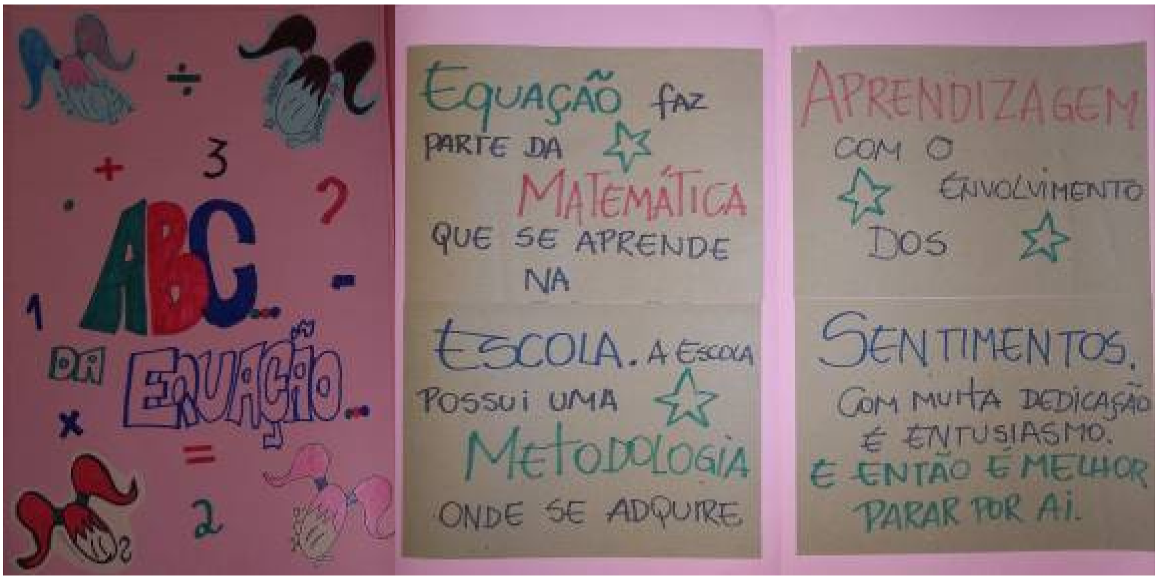
Frase

Quando vi a professora Edneide entrar na sala gritando peguem suas calculadoras e escreveu na lousa “Equação”!

A sala toda ficou em silencio, eu pensei “meu Deus o que é isso” então ela começou a colocar sinais, colchetes,... e outras sem exagerar, todos os sentimentos da matemática me vieram à tona. Fiquei em pânico pensei que tinha parado por ali, mas a lembrança continuou e ela começou a falar vários adjetivos que um aluno deve ter, como dedicação e esforço.

Quando ela viu que eu não estava fazendo os exercícios do livro, ela já soltou um berro “abre sua apostila e ache a resolução dos problemas. Lembrei que poderia ficar de recuperação, então me recordei da minha capacidade de raciocínio, peguei o lápis, a borracha e outros instrumentos de trabalho e comecei a fazer os exercícios. Fiquei com medo, toda vez que eu devia

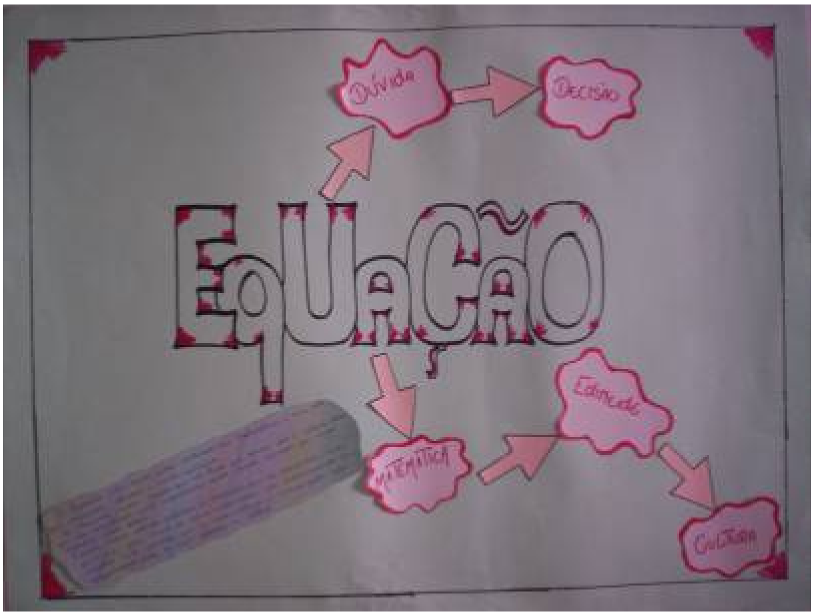
SP2M2



Frase

EQUAÇÃO faz parte da MATEMÁTICA que se aprende na ESCOLA. A escola possui uma METODOLOGIA onde se adquire APRENDIZAGEM com o envolvimento dos SENTIMENTOS. Com muita dedicação e entusiasmo E ENTAO É MELHOR PARAR POR AÍ.

SP2M3



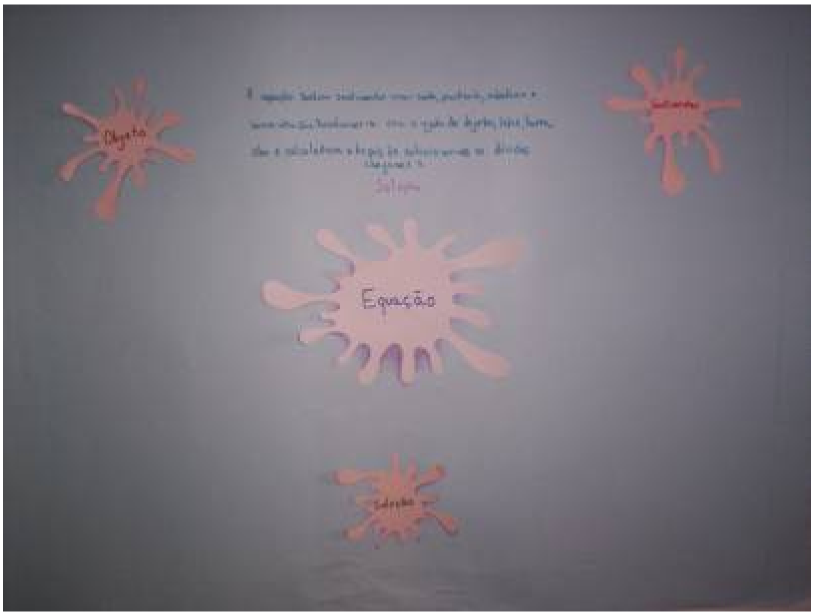
Frase

A Equação entre tantos outros conteúdos da Matemática, é um dos que ocasionam dúvidas e muito raciocínio.

A Paciência é uma decisão que nós temos que tomar, pois é através dela que nos concentramos e nos empenhamos, sendo pessoas aplicadas pois disso dependerá nosso futuro.

Edneide nossa última professora de Matemática que nos acompanhou desde a 5ª série até o 1º ano do ensino médio, acabou nos proporcionando um resultado muito proveitoso, que foi nosso interesse e aprendizado, nos proporcionando cada vez mas sabedoria e Cultura.

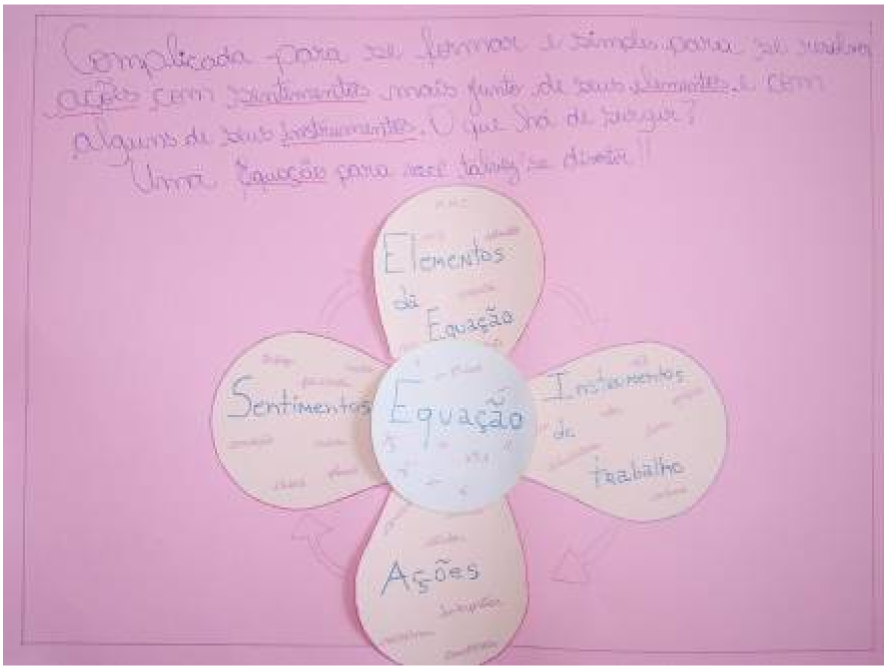
SP2M4



Frase

A equação mistura sentimentos como: medo, paciência, sabedoria e concentração. Resolvemos-a com a ajuda de objetos, lápis, borracha e calculadora e depois de solucionarmos as dúvidas chegamos a solução.

SP2M5



Frase

Complicada para se formar e simples para se resolver ações com sentimentos mais junto de seus elementos e com alguns de seus instrumentos. O que há de surgir?

Uma equação para você talvez se divertir!!