ALESSANDRO JACQUES RIBEIRO

EQUAÇÃO E SEUS MULTISIGNIFICADOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES DE UM ESTUDO EPISTEMOLÓGICO

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2007

ALESSANDRO JACQUES RIBEIRO

EQUAÇÃO E SEUS MULTISIGNIFICADOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES DE UM ESTUDO EPISTEMOLÓGICO

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de DOUTOR ***EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Professora Doutora Silvia Dias Alcântara Machado.***

PUC/SP

São Paulo

2007

Banca Examinadora

D E D I C A T Ó R I A

A Deus

Grandes foram as lutas, maiores as vitórias.
Muitas vezes pensei que este momento jamais chegaria.
Queria recuar, parar; mas você sempre esteve comigo, na alegria e na tristeza, fazendo da derrota uma vitória, da fraqueza uma força.
Com tua ajuda venci, mas não cheguei ao fim, e sim, ao início de uma longa caminhada.

Aos meus pais, Antonio e Madalena (in memoriam)

A vocês que sonharam antes de mim.
A vocês que iluminaram os caminhos obscuros com afeto e dedicação.
A vocês que muitas vezes renunciaram seus sonhos para que eu pudesse realizar os meus.
A vocês que acompanharam meu crescimento, pais por opção e amor.
A minha homenagem, a minha saudade, o meu amor e a minha eterna gratidão.
Fiquem em paz.

A G R A D E C I M E N T O S

À *Professora Dra. Silvia Dias Alcântara Machado*, pelo incentivo, orientação e confiança depositados no meu trabalho.

Às *Professoras Dra. Helena de Noronha Cury, Dra. Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão* e aos *Professores Dr. Dario Fiorentini e Dr. Benedito Antonio da Silva*, que gentilmente aceitaram participar da Banca Examinadora, e que de forma inestimável, com suas críticas e sugestões, colaboraram para a realização deste trabalho.

À Professora Dra. Tânia Maria Mendonça Campos, pelas orientações e apoio desde a graduação.

À Coordenação e aos professores do Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, por me abrirem novos horizontes e contribuírem de forma significativa com a minha formação.

À minha família, em especial à minha *irmã Ilza*, que sempre esteve presente, colaborando e me incentivando nos momentos mais difíceis.

À *CAPES,* que colaborou e possibilitou com a bolsa concedida à concretização deste sonho.

Aos *colegas do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica – GPEA*, que sempre apresentaram sugestões e críticas oportunas ao meu trabalho.

Aos *colegas de curso*, em especial, aos a*migos Armando, Rosana e Vera*, pelo companheirismo e dedicação nos momentos de estudo.

Ao grande amigo *Professor Ruben Alexander Pela*, por suas valiosas contribuições e sugestões apresentadas durante o desenvolvimento desta pesquisa.

À *Professora Teresa Helena Buscato Martins*, pelo empenho dedicado à revisão ortográfica do trabalho.

A todos os *amigos* que não citei diretamente, mas que sempre souberam compreender minha ausência e me apoiar nos momentos difíceis.

R E S U M O

O presente estudo tem por objetivo investigar os significados da noção de equação no ensino de Matemática. A relevância desse tema é justificada pela importância que o ensino de equações tem na Educação Matemática Básica. A partir das necessidades apontadas por pesquisas na área de Educação Matemática em relação à *significação* de conceitos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, o presente trabalho pretende colaborar com a Educação Algébrica, no sentido de fornecer elementos que sirvam de base para futuras pesquisas com preocupações semelhantes. Desenvolvida na perspectiva de um ensaio teórico, a presente pesquisa analisa o desenvolvimento epistemológico da noção de equação, relacionando-o com um estudo bibliográfico feito no âmbito do ensino de Matemática, sob a luz das teorias de *Registros de Representação Semiótica*, de Raymond Duval e da *Transposição Didática*, de Yves Chevallard. Nos resultados finais são apresentados os multisignificados para a noção de equação, os quais foram concebidos, por um lado, levando-se em conta a noção de equação enquanto um objeto de estudo – como aparece ao longo da história da Matemática – e, por outro, a concepção de equação como um algoritmo – como aparece em livros didáticos, artigos científicos, dentre outros. É discutida ainda, a importância de conceber equação, num primeiro momento, sem se preocupar com definições ou formalismos, mas, simplesmente, concebendo-a como uma noção primitiva, que pode ser utilizada de maneira intuitiva e com forte apelo pragmático. Como considerações finais são levantadas indicações sobre como os resultados deste estudo podem ser utilizados em novas pesquisas que tenham objetivos convergentes aos apresentados neste estudo.

Palavras-Chave: Equação. Educação Algébrica. Significado. Estudo Epistemológico.

A B S T R A C T

The present study has the aim to investigate the meanings of the notion of equation in the teaching of Mathematics. The relevance of this subject is justified by the importance that the teaching of equations has in the Basic Mathematical Education. From the necessities pointed on researches in the area of Mathematical Education in relation to the meanings of mathematical concepts in the education process and learning of Mathematics, the present study intends to collaborate with the Algebraic Education, with the aim of supplying elements that can be used as basis for future researches with similar concern. Developed in the perspective of a theoretical essay, the present research analyzes the epistemological development of the notion of equation, relating it to a bibliographical study in Semiotics Representation Registers by Raymond Duval and Didactic Transposition, by Yves Chevallard. On the final results the multimeanings for the equation notion which had been conceived are presented, on one hand, taking into account the notion of equation while a study object - as it appears throughout the history of the Mathematics - and, for another one, the conception of equation as an algorithm - as it appears in didactic books, scientific articles, amongst others. It is still discussed the importance to conceive equation, at a first moment, without the concern about definitions or formalisms , but simply conceiving it as a primitive notion, that can be used in an intuitive way and with a strong pragmatic appeal. On the final considerations it is suggested that the results of this study can be used in new researches that have convergent objectives as the ones presented on this study.

Keywords: Equation. Algebraic Education. Meaning. Epistemological Study.

R É S U M É

Cette étude a pour objectif rechercher attentivement les sens de la notion de l' équation dans l' enseignement des Mathématiques. L' importance de ce thème est justifiée par la force que l' enseignement d' équations a dans l' Education des Mathématiques de Base. A partir des besoins mentionnés par des recherches dans le domaine de l' Education des Mathématiques, concernant la signification de concepts mathématiques, lors du processus de l' enseignement et de l' apprentissage des Mathématiques, ce travail a l' intention de collaborer avec l' Education Algébrique, dans le sens de fournir des éléments qui servent de base aux recherches futures ayant des soucis semblables.

Développée dans la perspective d' un essai théorique, cette recherche analyse le développement épistémologique de la notion de l' équation, le mettant en rapport avec une étude bibliographique faite dans le cadre de l' enseignement des Mathématiques, sous la lumière des théories des Enregistrements de Représentation Sémiotique de Raymond Duval et de la Transposition Didactique, d' Yves Chevallard. Lors des derniers résultats, les multisignifications sont présentées pour la notion d' équation, lesquelles ont été conçues, d' un côté, tenant compte de la notion d' équation en tant qu'objet d' étude – comme il apparaît au cours de l' histoire des Mathématiques – et, de l' autre côté, la conception d' équation comme algorithme – comme il apparaît dans des livres didactiques, des articles scientifiques, parmi d' autres.

Il est mis en question encore, l' importance de concevoir l' équation, dans un premier moment, sans se soucier des définitions ou des formalismes, mais, simplement, la concevant comme une notion primitive, qui peut être utilisée de manière intuitive et à un fort appel pragmatique.Comme dernières réflexions des indications sont rélevées sur les manières dont les résultats de cette recherche peuvent être utilisés dans de nouvelles recherches, qui portent sur les objectifs convergents à ceux-ci présentés par cette étude.

Mots Clés: Equation. Education Algébrique. Signification. Etude Epistémologique.

S U M Á R I O

Apresentação

O presente trabalho insere-se na linha de pesquisa "História, Epistemologia e Didática da Matemática" do Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Foi desenvolvido no âmbito do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica – GPEA e tem por objetivo investigar os significados da noção de equação no ensino de Matemática.

A relevância desse tema é justificada pela importância que o ensino e aprendizagem da Álgebra ocupa na Educação Matemática Básica, principalmente no que se refere ao tema equações, noção que ocupa papel central no desenvolvimento desta pesquisa.

Pesquisas na área de Educação Matemática apontam para a necessidade de investigações que tenham em seu bojo a preocupação sobre a significação de conceitos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Aliado à preocupação de investigar como se dá o processo de construção de significados para conceitos matemáticos, seja ao longo da história da Matemática ou ao longo da história do ensino de Matemática, o presente trabalho tornar-se-á relevante para a Educação Algébrica, no sentido de fornecer elementos teóricos para pesquisas futuras com preocupações convergentes.

Assim, com essas duas preocupações em mente – investigar a construção de significados para conceitos matemáticos, no caso as equações e poder servir de base para pesquisas futuras relacionadas ao ensino e a aprendizagem de Álgebra, a presente pesquisa é desenvolvida na perspectiva de um ensaio teórico, analisando o desenvolvimento epistemológico da noção de equação e, posteriormente, a partir dos significados depreendidos dessa investigação, analisar obras literárias de diferentes naturezas, que abordem, direta ou indiretamente, a noção de equação.

Com isso, a partir do objetivo e temática da presente pesquisa, aliado ao método cientifico escolhido, surge a hipótese de pesquisa: investigando o desenvolvimento epistemológico da noção de equação é possível conceber seus significados no ensino de Matemática, e o argumento de pesquisa: embora não seja um objeto do saber, a noção de equação possui vários significados e deve tomar lugar junto aos objetos de ensino – os quais se tornaram o fio condutor deste trabalho.

Posto os principais elementos desta tese, anuncio que ela está dividida em cinco capítulos, identificados por: construindo a problemática; elaborando a fundamentação teórico-metodológica; investigando o desenvolvimento epistemológico da noção de equação; discutindo o argumento de pesquisa e apresentando os mutisignificados da noção de equação.

No primeiro capítulo, apresento um memorial descritivo de minha formação acadêmico-profissional, com a finalidade de ilustrar as origens de minha preocupação com o ensino e aprendizagem da Álgebra. Discuto e analiso pesquisas na área da Educação Matemática mundial, as quais, de certa forma, corroboram as indicações delineadas no memorial apresentado.

Na seqüência, relacionando o memorial e as pesquisas que compuseram a construção da problemática, apresento o objetivo de pesquisa e questão de pesquisa, elucidando suas relações com a hipótese levantada e apresentada ainda nesse capítulo.

O segundo capítulo tem por finalidade discutir os pressupostos teóricos que fundamentaram a presente pesquisa, bem como apresentar os procedimentos metodológicos desenvolvidos e utilizados na construção deste trabalho. Nesse capítulo discuto a *significação* de conceitos matemáticos e sua relação com a importância de investigar diferentes significados para a noção de equação.

No capítulo seguinte, sob a forte influência da hipótese de pesquisa anunciada, desenvolvo um estudo epistemológico da noção de equação ao longo da história da Matemática, investigando as diferentes maneiras de conceber equação pelos povos da antiguidade – Babilônios, Egípcios e Gregos, chegando até o Renascimento – com os Europeus, passando pelos povos árabes e hindus. A partir desse estudo foi possível observar as diferentes formas utilizadas por cada um desses povos em relação à noção de equação, emergindo assim diferentes significados para essa idéia matemática.

No capítulo quatro, utilizando-me dos resultados obtidos com a investigação epistemológica desenvolvida no capítulo anterior, passo a:

- Estudar e analisar obras bibliográficas de diferentes naturezas, como livros de fundamentos da Matemática, dicionários matemáticos e etimológicos, e livros didáticos, com a finalidade de levantar como a noção de equação é tratada nestas obras;
- Buscar relações entre a maneira como essa noção é tratada, ou não, nessas obras, e as diferentes formas de conceber a noção de equação obtidas no estudo epistemológico;
- Identificar ainda outras formas de conceber equação, não contempladas anteriormente ao longo da história.

Finalmente, no último capítulo, exponho os multisignificados para a noção de equação, significados esses que levam em conta, por um lado, a concepção de equação enquanto um objeto de estudo, como aparece ao longo da história da Matemática, e, por outro, a concepção de equação como um algoritmo, como aparece em livros didáticos, artigos científicos, dentre outros.

Nas considerações finais apresento indicações sobre como os resultados desta pesquisa podem ser utilizados futuramente na elaboração e desenvolvimento de novas pesquisas, que tenham objetivos convergentes aos apresentados neste estudo. Discuto ainda a importância de conceber equação, num primeiro momento, sem me preocupar com definições ou formalismos, mas, simplesmente, concebendo-a como uma noção primitiva, que pode ser utilizada de maneira intuitiva e com forte apelo pragmático.

Capítulo I

Construindo a problemática

1.1 Introdução

Iniciei minha carreira no magistério ainda como estudante de graduação, ministrando aulas nos antigos 1º e 2º graus, hoje Ensino Fundamental e Médio, de escolas públicas no Estado de São Paulo.

Desde aquela época me recordo que sempre pairou em mim uma tendência e preferência pelos conteúdos de Álgebra, aliás, fato que me faz lembrar de tempos ainda mais longínquos, quando ainda estudante de 5ª ou 6ª séries do já extinto 1º grau.

Acredito que essa minha característica pode ter sido reflexo das mudanças que o ensino de Matemática sofreu com o Movimento da Matemática Moderna. Assim, destaco aqui a importância que foi dada ao ensino da Álgebra após esse Movimento, importância essa que acabou conduzindo a Álgebra a um lugar de destaque dentro do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, porém, observa-se que:

> Após o ganho de importância nos anos 60 – adquirido graças à valorização do formalismo, próprio do Movimento da Matemática Moderna –, a Álgebra pré-universitária veio paulatinamente perdendo espaço e é freqüentemente vista hoje como um amontoado de símbolos de valor indiscernível (MARANHÃO et al 2004, p.4).

Miguel, Fiorentini e Miorim, em artigo de 1992, apontam também a ênfase que foi dada à Álgebra por ocasião do Movimento da Matemática Moderna. Nesse artigo – *Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo* – os autores discutem a unificação da Matemática por meio, principalmente, da Álgebra, destacando que seria *"pela introdução de elementos unificadores, tais como a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas e as relações que, acreditava-se, constituiriam a base para a construção lógica do novo edifício matemático"* (MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992, p. 45).

Os mesmos autores ainda refletem sobre a importância que a Álgebra viria a desempenhar, dentro do Movimento da Matemática Moderna, expressando a visão fundamentalista que a Matemática passa a ter:

> De fato, a Álgebra viria a desempenhar um lugar de destaque não apenas em sua concepção tradicional, mas, sobretudo, em sua concepção moderna. Isto porque, os grandes avanços da Matemática, nos dois últimos séculos, deram-se graças ao processo de algebrização da Matemática Clássica, tornando-a mais rigorosa, precisa e abstrata e, portanto, assim, pensava-se, mais aplicável. Associava-se a isso a crença de que o ensino de 1º e 2º graus deveria refletir o “espírito” dessa Matemática contemporânea (MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992, p. 45-46).

Além das modificações que pairavam sobre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática nas décadas de 70 a 90 do século passado, e algumas delas influenciadas pelo ainda presente Movimento da Matemática Moderna, outras indicações começavam a surgir, as quais tinham como fundamentação as Propostas Curriculares dos anos 80 e os Parâmetros Curriculares Nacionais publicados no final dos anos 90.

Particularmente, no Estado de São Paulo, ocorreu a implementação das Propostas Curriculares para o Ensino de 1º e 2º graus, sendo que uma das principais indicações em relação à Álgebra versava sobre a necessidade de substituir o ensino dessa por tópicos como, por exemplo, noções de cálculo literal, por meio dos quais se utilizaria uma nova abordagem para se reduzir a extensão, monotonia e tempo gasto com esses estudos até então.

No final dos anos 90, a elaboração e adoção dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – trouxeram à tona uma reflexão sobre os programas curriculares no Brasil, com o intuito de adequar o trabalho escolar a uma nova realidade, que era marcada pela crescente presença da Matemática em diversos campos do conhecimento.

Esses documentos enfatizavam e ainda enfatizam que para o desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno é importante que se trabalhe com atividades que envolvam todas essas perspectivas, destacando a necessidade de se conceber a Álgebra como:

> ‘aritmética generalizada’, ‘funcional’, ‘equações’ e ‘estrutural’, segundo se considerem as letras respectivamente como: ‘generalizações do modelo aritmético’, ‘variáveis para expressar relações e funções’, ‘incógnitas’,

> ‘símbolos abstratos’” (PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS, 1998, p.116).

Assim, continuando a construção deste memorial, que tem por finalidade conduzir essa problemática ao objetivo de minha pesquisa, disserto sobre meus estudos em nível de pós-graduação, período no qual continuei com essa minha preferência e interesse em relação à Álgebra, sempre dirigindo minhas leituras, minhas tarefas e meus trabalhos para esse campo da Matemática.

1.2 Revisando a literatura rumo ao objetivo da pesquisa

Durante o período em que estive cursando o mestrado em Educação Matemática na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, comecei a participar de projetos de formação continuada de professores de Matemática da rede pública de São Paulo, onde tive a oportunidade de iniciar minhas atividades, ainda em situações bastante tímidas, de investigações mais sistemáticas sobre questões relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem de Álgebra.

Nesses projetos de formação continuada que participei, sempre busquei observar e compreender as idéias e concepções de equação que esses professores em formação traziam em seus discursos ou demonstravam quando realizavam alguma tarefa. Percebi muitas vezes a ênfase que era dada, por esses professores-alunos, na busca da solução da equação, na aplicação de métodos e técnicas para a sua resolução.

Antes de prosseguir com a construção desta problemática, acredito ser de suma importância para o andamento e compreensão do meu trabalho, esclarecer e fundamentar em que sentido estou usando, e usarei durante todo o trabalho, termos como: *idéia, noção, conceito, concepção*. Para isso recorro a Anna Sfard (1991), que em seu artigo *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on process and objects as different sides of the same coin*, traz essa discussão:

> … a palavra “conceito” (às vezes substituída por “noção”) será mencionada sempre que uma idéia matemática é concebida na sua forma “oficial” – como uma construção teórica dentro “do universo formal do conhecimento ideal”; o conjunto todo das representações e associações internas evocado pelo conceito – a contrapartida do conceito no “universo do conhecimento humano” subjetivo e interno – será referido como uma “concepção”. (SFARD, 1991, p. 3)

Com isso, imagino poder esclarecer ao leitor, que uso os termos *idéia e noção* como sinônimos de *conceito*, cujo sentido assume o mesmo apresentado acima por Sfard. O termo *concepção* também é assumido no mesmo sentido dessa autora. Em relação ao que entendo e como assumo o termo significado, pretendo esclarecer logo no início do próximo capítulo, quando discutirei os pressupostos teóricos que dão suporte à minha pesquisa.

Dando continuidade a elaboração desta problemática, retomo as discussões de minha prática enquanto professor-formador, prática essa que contribuiu de maneira efetiva nas preocupações que estou aqui declarando.

Outro ponto que me chamava atenção eram as atitudes demonstradas e observações levantadas com freqüência pelos professores-alunos, e também aquelas demonstradas outrora por meus alunos, pois sempre encontrava indícios e constatações sobre o que a literatura versava a respeito da forma como o assunto era tratado.

Posso apresentar como exemplos dessas situações os trabalhos de Kieran (1992), que levantam o fato de se trabalhar em demasia com o aspecto processual da Álgebra; nos trabalhos de Booth (1984), que discutem a presença constante e excessiva da idéia de Álgebra como Aritmética generalizada; ou ainda nas pesquisas desenvolvidas por Rojano (1995), que apresentam iniciativas que eram tomadas no sentido de se dar um caráter menos formal e estrutural à Álgebra, tentando destacar o seu grande valor como um potente meio para resolução de problemas; entre outras iniciativas.

Aliando minha trajetória enquanto estudante no ensino básico e superior, aos meus primeiros anos de estudo no mestrado e as minhas primeiras experiências no mundo da pesquisa, a Álgebra, que era a minha maior paixão em relação à Matemática, tomou um lugar de destaque em minhas expectativas de pesquisa.

Assim, o estudo da Álgebra levou-me a refletir – reflexões essas acompanhadas de dúvidas e incertezas – sobre o verdadeiro papel e sobre a verdadeira identidade do que pode ser o processo de ensino e aprendizagem de Álgebra. Fez-me refletir ainda, sobre como esse processo pode auxiliar na compreensão e utilização de conhecimentos algébricos para resolver problemas dentro e fora da Matemática, ou seja, como utilizar a Álgebra como uma poderosa ferramenta intra e extra Matemática.

Além das observações que obtinha nas experiências citadas acima, os resultados de avaliações diagnósticas de exames como o SARESP[1], SAEB[2] e ENEM[3], por exemplo, apontavam para resultados pouco animadores nessas macro-avaliações, no que tange questões que envolviam conhecimentos elementares de Álgebra, dentre eles, as equações.

Com essas turbulentas experiências invadindo minha mente, decidi em minha pesquisa de mestrado (RIBEIRO, 2001), analisar o desempenho de estudantes de faixa etária entre 13-14 anos, de escolas públicas do estado de São Paulo, em relação às questões de Álgebra elementar, mais especificamente, questões relacionadas às equações.

Nesta minha pesquisa, observei que vários desses alunos obtiveram um resultado pouco expressivo quando estavam trabalhando com questões envolvendo equações, tanto em situações contextualizadas, ou seja, aquelas que envolvem o equacionamento de problemas verbais, como em situações não-contextualizadas, nas quais as equações são dadas e o que se exige basicamente são procedimentos de resolução.

---

[1] Sistema de Avaliação e Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
[2] Sistema de Avaliação da Educação Básica
[3] Exame Nacional do Ensino Médio

Continuando minha trajetória acadêmico-profissional, comecei a dar aulas em cursos de Licenciatura em Matemática e em outros cursos superiores nos quais a Matemática é usada como ferramenta de apoio para outras disciplinas, além de continuar minha atuação em cursos de Formação Continuada de Professores.

Com as inquietações resultantes de meu ingresso no ambiente científico, e com os primeiros resultados obtidos em minha pesquisa de mestrado, meu foco direcionou-se mais especificamente em observar como os alunos de cursos superiores e professores em formação continuada concebiam e trabalhavam com a idéia de equação.

Nesse sentido, procurei sempre observá-los e investigá-los acerca de seus conhecimentos, procedimentos e estratégias quando se deparavam com questões matemáticas que envolviam a idéia de equação, tanto em situações contextualizadas como em situações não-contextualizadas.

Senti assim, a necessidade de aprofundar os meus estudos e as minhas investigações de forma mais sistemática para que pudesse compreender certas situações que apareciam em minha vida profissional e obter elementos e fundamentos teóricos que possibilitassem uma intervenção no emaranhado de idéias e concepções em relação à noção de equação.

Nesse momento comecei a participar do grupo de pesquisa “Educação Algébrica”, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, que tem como preocupação maior *investigar qual a Álgebra a ser ensinada em cursos de licenciatura em Matemática*, grupo cujo objetivo ia ao encontro de minhas necessidades, pois esse projeto tinha justamente em seu bojo preocupações semelhantes as minhas.

A partir da participação nesse grupo de pesquisa, passei a ter condições de analisar e compreender as dúvidas, anseios e contradições nos discursos e ações de meus alunos de graduação e dos professores em formação com os quais trabalhava. Dessa forma, comecei a perceber e reconhecer neles as mesmas situações vividas por outros pesquisadores em seus trabalhos a respeito do tema.

Para ilustrar situações semelhantes às que eu encontrava em minha prática e em minhas primeiras experiências de pesquisa, apresento a seguir alguns trabalhos desenvolvidos na área da Educação Matemática que vieram reforçar minhas conjecturas sobre a relevância desta minha pesquisa.

Sophie René de Cotret (1997) em sua pesquisa sobre os problemas e dificuldades que surgem no equacionamento de problemas escritos, discute a pertinência e adequação das equações que são usadas para modelar problemas intra e extra Matemática.

Em sua pesquisa, reconhece que muitas vezes não sabemos justificar a escolha de um determinado modelo de equação para representar um certo problema, a não ser pela resolução e pela busca da resposta do problema. Descreve em seu trabalho que as pessoas não sabem justificar por que escolheram tal modelo e nem se esse modelo é o mais eficaz naquela situação, a não ser, recorrendo à resolução da equação.

Nesse sentido, Cotret levanta uma reflexão muito pertinente ao meu trabalho, uma vez que apresenta uma discussão sobre o fato de se considerar – ou não – a resolução de equações como sendo um saber matemático e que, em se considerando assim, se é importante então que se observe isso – a resolução de equações – do ponto de vista do processo de modelização (ou modelagem).

Outra pesquisa considerada por mim nessa revisão bibliográfica, e que vai ao encontro de minhas expectativas é a de Kieran (1992), que em seus estudos questiona o que os alunos devem fazer para entender, finalmente, o aspecto estrutural da Álgebra e discute a importância de se considerar que o desenvolvimento da Álgebra é feito num ciclo processual-estrutural e que a mesma, ao ser ensinada nas escolas, passa por uma série de ajustes processuais e estruturais.

A autora acima citada observa que quando os alunos começam a estudar expressões e equações algébricas, deve-se tomar um certo cuidado para que eles não fiquem muito tempo interpretando essas entidades como operações aritméticas sobre algum número, mas sim, que consigam percebê-las como objetos por si próprios, sobre os quais é perfeitamente possível realizar diversas operações.

Nesse sentido, espera-se poder capacitá-los para perceber que os objetos trabalhados são as expressões e equações algébricas, por exemplo, e não mais os números. Além disso, capacitá-los a perceber que as operações que podem ser efetuadas sobre esses objetos são as de simplificar, fatorar, racionalizar o denominador, dentre outras, mais do que simplesmente adicionar, subtrair, multiplicar e dividir, como se fazia, basicamente, em Aritmética.

Ainda dentro do aspecto estrutural da Álgebra, é de grande importância as representações simbólicas de relações numéricas ao se traduzir situações-problema em equações algébricas. Essas equações são representações estruturais que envolvem uma perspectiva não-aritmética, não só quanto à natureza das operações que são representadas, mas também quanto ao uso do sinal de igualdade. Nota-se que, ao passar de uma perspectiva aritmética para uma algébrica, podemos estar nos movimentando de uma concepção processual para uma estrutural.

Apresento também os resultados da pesquisa de Dreyfus & Hoch (2004), que discutem uma abordagem estrutural para as equações, destacando o trabalho realizado com alunos israelenses considerados acima da média em seu desempenho em Matemática, e de escolaridade similar aos alunos do ensino médio brasileiro,

Nesse trabalho era solicitado aos alunos que dissertassem sobre o que eles pensavam sobre equação, cujos resultados levaram os autores a concluir que eles não são capazes de reconhecer a estrutura interna da equação, pois apresentavam respostas que caracterizam a idéia de equação enquanto um processo de resolução, ou seja, relacionando a equação à sua resolução.

Uma outra conclusão importante a que os autores dessa pesquisa chegaram refere-se ao fato de que os alunos, por não reconhecerem a estrutura interna da equação, apresentam dificuldades em utilizar esse conhecimento matemático para resolver problemas, bem como, raramente são capazes de resolver equações não-triviais.

Continuando a apresentação desta problemática, apresento os resultados de Ponte (2004) em seu trabalho – *As equações nos manuais escolares* – que traz uma importante contribuição para as análises que serão feitas em minha pesquisa, principalmente quando discute como a idéia de equação é tratada em manuais escolares portugueses de quatro períodos distintos: um do final do século XIX, outro de meados do século XX, outro da época da Matemática Moderna e outro da atualidade (anos 90).

Nesses quatro manuais o autor observou uma evolução muito significativa no ensino das equações, tanto do ponto de vista da faixa etária dos alunos com os quais ele trabalha essa noção matemática – que vai decrescendo dos 15 para os 12 anos –, como em relação à abordagem utilizada para discuti-la – passando das abordagens mais formais e abstratas para aquelas mais simples e contextualizadas.

Por fim, o autor ressalta que, se por um lado essa evolução na apresentação do tema mostra transformações consideráveis no sentido de tornar esse conceito mais compreensível e atraente, por outro, a preocupação com a simplificação e atratividade da mensagem, podem ter levado, por fim, a uma excessiva esquematização e profusão de elementos decorativos.

Ponte ainda argumenta, ao final do trabalho, sobre a importância de se observar, mais profundamente, a reflexão levantada acima, bem como estudar se essa evolução ocorreu, e em que proporção, nos manuais em outros países.

Uma vez que já observamos, com os exemplos de pesquisas apresentados acima, como a noção de equação é concebida e tratada por alunos e também em livros didáticos, discuto a seguir uma pesquisa que apresenta as idéias que professores têm sobre a noção de equação.

Attorps (2003) desenvolveu uma pesquisa com 10 professores secundários – equivalentes aos nossos professores de 6ª série do ensino fundamental à 3ª série do ensino médio – sobre suas concepções de equação. Nessa pesquisa a autora usa a concepção no mesmo sentido em que eu a uso em minha pesquisa, ou seja, num sentido mais amplo do que simplesmente o conceito universalmente aceito sobre determinado objeto matemático.

O trabalho *Teachers' Images of the 'Equation' Concept*, da pesquisadora acima citada traz resultados muito importantes e contributivos para o desenvolvimento de minha pesquisa, uma vez que discute algumas concepções de equação que estão presentes entre os professores pesquisados. Retomarei essa discussão, sob o ponto de vista de analisar como esses professores concebem equação, no capítulo em que analiso o desenvolvimento da noção de equação no ensino da Matemática.

No momento, restrinjo-me a apresentar algumas de suas conclusões, as quais são pertinentes ao desenvolvimento desta problemática. Uma delas refere-se à insegurança que alguns professores têm em associar equação à identidade, como, por exemplo, a não concepção de $\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$ como sendo uma equação. Numa outra situação, eles não reconhecem, por exemplo, $2x + 5y = \sqrt{a}$ como uma equação, pois não sabem como encontrar a solução.

Complementando essas situações Attorps observou que, em grande parte, os professores têm uma concepção de equação muito ligada à questão procedimental – as técnicas e procedimentos para sua resolução. Situações já encontradas e apresentadas anteriormente, tanto em outras pesquisas como as citadas acima, como nos relatos de minha prática enquanto professor e formador.

Outra questão relevante à temática apresentada aqui está no fato da pesquisadora (op.cit), durante as entrevistas, ter observado que muito do que havia sido apresentado nos questionários e nos discursos de seus professores, em relação às suas concepções de equação, tinha como origem a forma como eles aprenderam – suas experiências enquanto alunos – a trabalhar com o processo de resolução de equações.

Num outro sentido, contribuindo ainda mais para o fortalecimento de minhas angústias, o grupo de pesquisa ao qual pertenço – Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica – GPEA – incitava-me e, ao mesmo tempo me incentivava, a debruçar-me na busca de compreender e desemaranhar toda a teia de idéias, conceitos e concepções presentes toda vez que o termo equação vem à tona.

Assim, minhas leituras, minha experiência acadêmico-profissional, bem como minha participação no grupo de pesquisa conduziram-me na busca de tentar compreender o porquê de uma idéia aparentemente tão simples, como a idéia de equação, gerar tantas dúvidas e dificuldades entre os estudantes, e mesmo entre os professores.

1.3 Apresentando o Objetivo, Questão e Hipótese da Pesquisa

Após essa primeira apresentação e contextualização, insiro neste momento, o objetivo principal desta minha pesquisa de doutoramento:

Investigar os significados da noção de equação no processo de ensino da Matemática.

Com base nas leituras, estudos e discussões apresentados no cenário da Educação Matemática mundial no que se refere ao ensino e aprendizagem de Álgebra e com o objetivo postulado acima para a minha pesquisa, algumas questões vieram à tona, as quais me deram base para construir essa problemática e contribuíram, efetivamente, para o desenvolvimento desta pesquisa.

Dentre as questões que nortearam meus estudos, aquela que está diretamente relacionada ao objetivo apresentado anteriormente e que declaro como minha questão de pesquisa é:

Quais os significados concebidos no ensino de Matemática para a noção de equação?

Além do objetivo e questão de pesquisa anunciados acima, gostaria de apresentar aqui a hipótese que levanto nesta minha pesquisa, conjectura essa que, certamente contribuiu para as escolhas teórico-metodológicas que desenvolvo e utilizo nesse trabalho:

Investigando o desenvolvimento epistemológico da noção de equação é possível conceber seus significados no ensino da Matemática.

Nesse momento, após a construção da problemática, apresentação do objetivo, questão e hipótese de pesquisa, meu trabalho será conduzido a um estudo de caráter teórico, discutindo e analisando o desenvolvimento da noção de equação, do ponto de vista epistemológico-histórico e no ensino da Matemática.

Capítulo II

Elaborando a Fundamentação Teórico-Metodológica

2.1 Introdução

Levando-se em conta os estudos desenvolvidos nesta pesquisa, passo agora a discutir os pressupostos teórico-metodológicos que foram utilizados para a construção do argumento da pesquisa, bem como os preceitos utilizados para as análises e conclusões deste estudo.

A presente pesquisa germinou de um projeto mais amplo, desenvolvido no âmbito do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica – GPEA, do Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, o qual tem por objetivo investigar qual a Álgebra a ser ensinada nos cursos de Licenciatura em Matemática.

Nesse sentido, esta pesquisa visa contribuir com o projeto citado, identificando, levantando e discutindo pressupostos teóricos que servirão de base para investigações relacionadas ao estudo das equações em todos os níveis de ensino.

Levando-se em conta essas premissas e considerando o objetivo desta pesquisa – investigar os significados da noção de equação no ensino da Matemática – acho importante descrever a forma como, do ponto de vista metodológico, o presente estudo foi construído e desenvolvido.

2.2 Alguns Procedimentos Metodológicos Desenvolvidos

Iniciei esta pesquisa com um levantamento bibliográfico no qual selecionei algumas pesquisas nacionais e internacionais na área da Educação Matemática, como Kieran (1992), Cotret (1997), Ribeiro (2001), Attorps (2003), Dreyfus & Hoch (2004), Maranhão et al (2004), Teles (2004), dentre outras. Esse levantamento considerou a produção científica de estudos relacionados, direta ou indiretamente, com a noção de equação.

Prosseguindo na leitura, análise e fichamento desse material, bem como considerando reflexões sobre minha prática como professor e pesquisador em formação, identifiquei um ponto importante e significativo que está relacionado às diferentes idéias e concepções que são apresentadas para a noção de equação. Esse fato acabou por direcionar meus estudos e investigações pontuais no sentido de buscar compreender o que a comunidade acadêmico-científica *entende* por equação.

Com isso, partindo dessas primeiras reflexões e das questões que iam surgindo, senti a necessidade de buscar, dentro da história e epistemologia da Matemática, um caminho que pudesse trazer novos elementos que me ajudassem a desvendar e compreender os diferentes significados que eram concebidos para a noção de equação, dentro daquilo que já havia sido investigado.

Assim, levantando e investigando fontes bibliográficas históricas, como Bourbaki (1976), Boyer (1978), Eves (2004), Dahan-Dalmedico & Peiffer (1986), dentre outros, consegui identificar e trazer para compor o cenário de minha pesquisa, importantes elementos contributivos para a busca dos diferentes significados para a noção de equação, que anuncio como sendo o objetivo principal desta pesquisa.

Nesse ponto da pesquisa, percebia que a questão principal da investigação estava se confundindo com as questões secundárias e, ao mesmo tempo, gerava outras dúvidas que pareciam ameaçar o rumo da pesquisa. Porém, aos poucos, ia percebendo que esses momentos fazem parte do processo de investigação, como bem lembra Pietropaolo em sua tese de doutoramento:

> A trajetória pela busca de compreensões em uma pesquisa inicia-se, geralmente, com a formulação das questões que o pesquisador pretende investigar. Ainda que essas questões possam – talvez devam – ser posteriormente reformuladas ou delimitadas, elas são necessárias, pelo menos inicialmente, para nortear escolhas, seja em relação à metodologia, seja em relação à fundamentação teórica. (PIETROPAOLO, 2005, p. 36)

Após o estudo epistemológico-histórico feito, estudo que me permitiu compreender como a noção de equação foi concebida ao longo do desenvolvimento da Matemática percebi que se fazia necessário um estudo matemático da noção de equação, o qual poderia me trazer novas idéias e concepções sobre a noção de equação e seriam de extrema importância para verificar, mais uma vez, os significados atribuídos para essa noção.

Com isso, prossegui minhas investigações elaborando um estudo com obras de diferentes naturezas, como: livros de fundamentos da Matemática, dicionários matemáticos e da língua portuguesa, artigos científicos na área da Educação Matemática e livros didáticos nacionais e internacionais, de diferentes épocas, sempre buscando compreender como são apresentadas as "idéias" relacionadas à noção de equação.

Compõem essa parte da pesquisa, os seguintes autores: Caraça (2003 – 1ª edição 1941), Garding (1997), Rogalski (2001); James (1943), Chambadal (1969), Warusfel (1969), Süggakai (1977); Ferreira (1999), Houaiss & Villar (2001); Miguel, Fiorentini e Miorim (1992); Attorps (2003), Ponte (2004); Bos (1893), Bourdon (1897), van der Waerden (1991 – 1ª edição 1935), Bourbaki (1970), Tsipkin (1985), Giovanni e Giovanni Jr (2000), Di Piero Neto e Soares (2002), Imenes e Lellis (2002), e Pires, Curi e Pietropaolo (2002).

Nessas obras, investiguei onde aparecia, explicita ou implicitamente, a idéia de equação, investigação essa que buscou levantar se as idéias apresentadas consideravam a noção de equação como um objeto de estudo[4] ou como uma ferramenta matemática[4].

Assim, conforme ia estudando uma nova obra, podia perceber que, à medida que se mudava o campo de atuação da obra analisada, o período

[4] Os termos ferramenta e objeto estão sendo utilizados no sentido que Régine Douady discute em sua teoria *Dialética Ferramenta-Objeto* (1986). Nessa teoria, um saber matemático pode revestir-se de dois aspectos – ferramenta ou objeto. Uma certa noção (ou teorema) matemática quando utilizada para resolver problemas, interpretar novas situações, novas questões está assumindo o papel de *ferramenta*. Quando uma certa noção (ou teorema) matemática é identificada como elemento de um corpo de conhecimento cientifica e socialmente reconhecido, utilizada para formular definições, enunciar teoremas desse corpo e demonstrá-los, dizemos então que essa noção assume o estatuto de *objeto*.

histórico de sua publicação ou a área de formação do autor, mudava também a idéia apresentada sobre equação. Essas idéias divergiam tanto na linguagem utilizada, como na concepção dos autores a respeito da noção de equação.

Nesse momento, percebi que meus estudos precisariam de novos elementos, pois estava sentindo a necessidade de contribuições teóricas que pudessem me auxiliar na compreensão do que estava encontrando nessas obras, tanto no sentido de compreender a maneira como esses autores apresentavam a idéia de equação, quanto na maneira como eles próprios concebiam essa idéia.

Passei então a buscar pressupostos teóricos que me fornecessem um embasamento para compreender e refletir sobre:

- Por um lado, os diferentes significados que identifiquei no estudo epistemológico-histórico desenvolvido;
- Por outro, as diferentes formas de conceber a noção de equação que eram apresentadas nas obras analisadas no estudo matemático feito.

Assim, encontrei em Duval – *Sobre as noções de Registros de Representação Semiótica* (1993) e em Chevallard – *Sobre a noção de Transposição Didática* (1991) –, algumas idéias que puderam fundamentar e me auxiliar na compreensão das reflexões acima.

Nesse ponto da pesquisa, já tinha ficado claro para mim que o estudo que eu estava desenvolvendo se tratava de um ensaio teórico, pois o meu objetivo de pesquisa e os meus procedimentos desenvolvidos até então, mostravam que o que eu estava desenvolvendo era um diálogo entre diversos autores, na busca de se compreender quais os significados podem ser atribuídos para a noção de equação no ensino da Matemática.

Em Severino (2002) pude compreender que um ensaio teórico é um trabalho cientifico que se constitui de uma *exposição lógica e reflexiva e em* *argumentação rigorosa com alto nível de interpretação e julgamento pessoal.* (SEVERINO, 2002, p. 153).

Ele ainda ressalta que nesse tipo de trabalho científico:

> (...) há uma maior liberdade por parte do autor, no sentido de defender determinada posição sem que tenha de se apoiar no rigoroso e objetivo aparato de documentação empírica e bibliográfica (...) são encontradas teses de livre-docência e mesmo de doutorado, com características de ensaio teórico que são bem aceitas devido a seu rigor e à maturidade do autor. De fato, o ensaio não dispensa o rigor lógico e a coerência de argumentação e por isso exige grande informação cultural e maturidade intelectual. (SEVERINO, 2002, p. 153)

2.3 Pressupostos Teóricos Assumidos

Considerando-se o objetivo desta pesquisa, acredito ser importante apresentar e discutir algumas considerações levantadas por pesquisadores na área da Educação Matemática a respeito de suas idéias sobre a construção e significação do conhecimento matemático.

Muitas são as pesquisas e estudos em Educação Matemática, como em outras áreas do conhecimento, que levantam questões acerca da natureza cognitiva dos conceitos matemáticos e de que forma se dá o processo de construção de significados para esses conceitos.

Em D´Amore (2005), encontrei algumas colocações a respeito dessas questões, as quais apresento a seguir, com a finalidade de conduzir uma discussão, objetivando elucidar as escolhas feitas por mim em relação aos fundamentos teóricos utilizados ao longo desta pesquisa.

De maneira geral, e mais especificamente em Matemática, sabe-se que a utilização de uma linguagem própria é de extrema importância para a construção do conhecimento. Em relação à importância da linguagem para a construção do significado, destaco:

> Uma teoria do significado é uma teoria da compreensão. Isso quer dizer que tudo aquilo a respeito do qual uma teoria do significado deve prestar contas é o que se conhece quando se conhece a linguagem, isto é, quando se conhecem os significados das expressões e dos discursos da linguagem. (DUMMETT, 1991 apud D´AMORE, 2005, p. 24)

Ainda em relação à importância da construção do significado, destaco a importância deste para a apreensão do conceito, observando o que diz Sierpinska:

> Compreender o conceito será (...) concebido como o ato de apreender o seu significado. Tal ação provavelmente será uma ação de generalização e de síntese de significados em relação a elementos particulares da 'estrutura' do conceito (a 'estrutura' do conceito é a rede de significações dos enunciados que foram considerados). Esses particulares significados devem ser apreendidos com ações de compreensão. (...) A metodologia dessas ações de compreensão preocupa-se principalmente com o processo de construção do significado dos conceitos. (SIERPINSKA, 1990 p. 26)

Quando falo em construção do conhecimento matemático e sobre a natureza do termo *significado* em Matemática, acho relevante trazer à tona uma discussão que esclareça minha posição quanto a conceber o *significado*, para então, ter sentido falar em *construção do significado*.

Chevallard (1992) em sua "teoria do conhecimento" destaca a importância, na construção do conhecimento, de se deslocar o foco de interesse da noção de *significado do objeto* em si próprio para aquela que considera a relação ou referência ao objeto, posição adotada por esse autor em sua "teoria do conhecimento".

Então, verifica-se que o papel central se volta para a pessoa (ou instituição, enquanto conjunto de pessoas) que se coloca em relação ao objeto, e não o objeto em si:

> Um objeto existe a partir do momento em que uma pessoa X ou uma instituição I reconhece o objeto como *existente* (para si). Mais exatamente, dir-se-á que o objeto O *existe para* X (respectivamente, *para* I) se existe um objeto, representado por R(X,O) (respectivamente $R_I(O)$), que eu chamo *relação pessoal de X a O* (respectivamente *relação institucional de I a O*). (CHEVALLARD, 1992, p. 86)

Tendo em vista que, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, entrar em contato com novos objetos matemáticos pode ser entendido, primeiramente como um contato pessoal de cada estudante com esses objetos, tal contato traz à tona os instrumentos semióticos por meio dos quais se dá a relação Matemática – Estudante.

Contudo, entendendo o processo de *significação* como a construção de significado de objetos matemáticos por intermédio de uma relação pessoal, a principio, entre o individuo e o objeto matemático, quando de sua utilização e manipulação. É importante que se discuta o paradoxo apresentado por Duval (1993), no qual ele evidencia que:

> (...) de um lado, a apreensão dos objetos matemáticos só pode ser uma apreensão conceitual e, por outro lado, somente por meio de representações semióticas é possível uma atividade sobre os objetos matemáticos. Esse paradoxo pode constituir um verdadeiro circulo vicioso para a aprendizagem. Como sujeitos, em fase de aprendizagem, poderiam deixar de confundir os objetos matemáticos com suas representações semióticas se eles apenas podem estabelecer relações com as representações semióticas? A impossibilidade de um acesso direto aos objetos matemáticos, a não ser por meio de representação semiótica, torna a confusão praticamente inevitável. E, ao contrário, como podem esses indivíduos adquirir o domínio dos tratamentos matemáticos, necessariamente ligados às representações semióticas, se ainda não possuem uma apreensão conceitual dos objetos matemáticos representados? Esse paradoxo é ainda mais forte ao se identificar atividade matemática e atividade conceitual e ao considerar as representações semióticas como secundárias ou extrínsecas. (DUVAL, 1993 p. 38)

Para Duval, a noção de conceito, preliminar ou mesmo prioritária em vários outros autores, torna-se secundária, uma vez que no percurso traçado por ele, aquilo que assume caráter prioritário é o par (*signo, objeto*), destacando-se que ao se considerar um registro de representação semiótica, Duval faz referência a um sistema de signos que permite cumprir as funções de comunicação, tratamento e objetivação.

Dessa forma, nota-se que nesse ponto de vista, um sistema semiótico não é um instrumento, porém é constitutivo do próprio funcionamento do pensamento e do conhecimento.

Para D´Amore (2005) o paradoxo apresentado por Duval deve ser considerado e ter um tratamento especial no processo de ensino e aprendizagem da Matemática:

> (...) de um lado, o estudante não sabe que está aprendendo signos que estão no lugar de conceitos e que deveria estar aprendendo conceitos; de outro lado, se o professor nunca refletiu sobre o assunto, acreditará que o estudante está aprendendo conceitos, enquanto ele está, na realidade, "aprendendo" apenas a utilizar signos. (D´AMORE, 2005, p. 52)

Assim, com esses elementos em mãos, faz-se necessário um estudo mais profundo das idéias de Duval, uma vez que os registros de representação semiótica são essenciais na construção de significado para os objetos matemáticos.

Num outro aspecto, reporto-me a Chevallard para dar suporte à discussão sobre objetos do saber e objetos do ensino, bem como para compreender e justificar a posição de se poder, ou não, conceber a idéia de equação como uma noção matemática.

2.3.1 A Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Quando falamos em Matemática, certamente precisamos nos lembrar que a aquisição conceitual de um objeto passa necessariamente pela aquisição de uma ou mais representações semióticas desse objeto, pois, como sabemos, os objetos estudados – conceitos, propriedades, estruturas, relações, etc – são abstratos e não são diretamente acessíveis à nossa percepção ou observáveis por meio de instrumentos, a não ser pelo uso de suas representações.

Nesse sentido, trago a seguir uma discussão sobre a teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida por Raymond Duval (1993), teoria que vem sendo amplamente utilizada em pesquisas por ser seu objeto discutir a aquisição do conhecimento ou a organização de situações de aprendizagem.

Em sua teoria, Duval ressalta a importância primordial das representações semióticas na atividade matemática. Destaca ainda que, do ponto de vista histórico, é possível se observar como o pensamento matemático evoluiu rapidamente à medida que as representações semióticas de objetos matemáticos também iam se desenvolvendo.

Podemos dizer que as representações semióticas, dentro de um sistema semiótico específico, *são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e funcionamento*. (DUVAL, 1993 apud DAMM, 2000, p. 143)

Para se ilustrar a importância do papel das representações semióticas na construção do conhecimento matemático pelo sujeito que apreende, Duval destaca que é por meio das representações semióticas que se torna possível efetuar certas funções cognitivas essenciais ao pensamento humano. Ele dá o nome de *semiosis* à representação realizada por meio de signos e o nome de *noesis* à aquisição conceitual de um objeto. Em suma, parafraseando o próprio Duval: **não existe *noesis* sem *semiosis***.

A aquisição conceitual de um objeto matemático está fortemente ligada a *noesis*, caracterizada principalmente pelos seguintes fatos:

(1) o uso de diversos tipos de registros de representação semiótica é típico do pensamento humano;
(2) a criação e o desenvolvimento de novos sistemas semióticos são marcos (históricos) de progresso do conhecimento.

Por meio dessas considerações podemos verificar como é estreita a dialética entre *noesis* e *semiosis* e como se transita de uma para a outra. Reforçando a citação acima podemos mesmo perceber que não existe *noesis* sem *semiosis*, mas, vale ressaltar, que a *semiosis* é assumida como sendo uma característica necessária para que se garanta um primeiro passo na direção de se obter a *noesis*.

A grande variedade de representações semióticas utilizadas em Matemática – sistemas de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas, língua natural – ressalta a necessidade de se “agrupar” esses diferentes tipos de representação em diferentes tipos de “registros”, o que acaba dando origem à idéia de “registros de representação semiótica”.

Nesse sentido, Duval procura agrupar esses registros de representação semiótica em quatro tipos muito diferentes:

- <u>Registros multifuncionais</u>: aqueles cujos tratamentos não são algoritmizáveis. Podem ser de representação discursiva: **língua natural**, ou de representação não discursiva: **figuras geométricas** planas ou em perspectivas;
- <u>Registros monofuncionais</u>: aqueles cujos tratamentos são, principalmente, algoritmizáveis. Podem ser divididos também em, os de representação discursiva: são os **sistemas de escritas** – numérica, algébrica, simbólica e os cálculos, e os de representação não discursiva: **gráficos cartesianos**.

Um dos pontos mais relevantes à originalidade da atividade matemática baseia-se no fato de se poder mobilizar, simultaneamente, ao menos dois registros de representação semiótica ao mesmo tempo, ou na possibilidade de se trocar, a todo o momento, de registros de representação. Aliás, segundo Duval, a apreensão conceitual de objetos matemáticos se dá no momento em que somos capazes de mobilizar e coordenar diferentes tipos de registros de representação desse objeto matemático.

Quando falamos em mobilizar e coordenar diferentes registros de representação de um mesmo objeto, precisamos levantar e discutir os dois diferentes tipos de transformações de representações semióticas apresentados por Duval em sua teoria: o **tratamento** e a **conversão**:

- Tratamento é uma transformação que ocorre nas representações semióticas dentro de um mesmo registro, ou seja, o tratamento é uma transformação interna ao registro, por exemplo: resolver uma equação;
- Conversão é uma transformação de representações semióticas que constitui em mudar de registro conservando-se os mesmo objetos denotados, ou seja, a conversão é uma transformação externa ao registro, por exemplo: passar da escrita algébrica de uma equação para a sua representação gráfica.

Em sua teoria, Duval atribui uma posição de destaque para a transformação de conversão em relação à de tratamento, posição contrária ao ponto de vista matemático de muitos autores, que atribuem essa posição de destaque ao tratamento. Pode-se levantar, ao menos, três motivos distintos para essa valorização da conversão, dentro da teoria de Duval:

- A conversão está muito próxima aos fenômenos de não-congruência[5], os quais não são de maneira alguma conceituais. Esses fenômenos de não-congruência podem gerar o obstáculo mais estável observável na aprendizagem da Matemática;
- A conversão permite definir variáveis cognitivas independentes, tornando possível de se construir observações e experimentações relativamente precisas e delicadas. Essas variáveis podem, a partir daí, logicamente após uma validação por intermédio de pesquisas metódicas, serem utilizadas como variáveis didáticas;
- A conversão, em casos de não-congruência, pressupõe uma coordenação entre os dois registros de representação mobilizados, a qual não é dada de inicio e nem é construída de modo espontâneo, mas sim, por meio de atividades matemáticas didaticamente "interessantes". É importante lembrar aqui que, o que é denominado por "conceitualização" somente começa a se efetivar a partir do momento

[5] Fenômenos de congruência são aqueles em que a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação. Por outro lado, quando isso não ocorre, dizemos que o fenômeno é não-congruente.

em que, mesmo num nível intermediário, conseguimos colocar em ação a coordenação desses dois registros distintos de representação.

Evidenciando ainda a questão do tratamento de conversão para a apreensão dos objetos matemáticos, Duval chama a atenção para o terrível engano de se imaginar que converter a representação de um objeto de um registro para o outro seja uma operação simples e local. Normalmente associa-se a conversão a uma idéia pré-estabelecida entre nomes e figuras, ou ainda, costuma-se reduzir essa conversão a uma “codificação”.

Dentro dessa perspectiva atribui-se à conversão o status de um tratamento simples, sendo suficiente a aplicação de regras de correspondência para se “traduzir” um registro em outro. Segundo Duval, essa visão é superficial, enganadora e simplista, pois uma regra de codificação permite somente uma leitura pontual das representações, enquanto que o que se deseja na apreensão de um objeto matemático é justamente uma visão global e qualitativa do mesmo.

Ao não se trabalhar com a conversão como uma simples codificação, evoca-se a necessária articulação entre as variáveis cognitivas específicas do funcionamento de cada um dos registros utilizados. Essas variáveis então, podem determinar quais unidades de significados são pertinentes, e devem ser levadas em consideração em cada um dos registros de representação manipulados na conversão. Assim, a conversão das representações, independente dos registros considerados, é irredutível a um tratamento.

Analisando a atividade de conversão, do ponto de vista cognitivo, sua própria natureza nos leva a considerar dois tipos de fenômenos: as variações de congruência e de não-congruência, e a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão.

Nesse sentido, é importante que se destaque o fato de que nem sempre a conversão se efetua naturalmente quando se invertem os registros de partida e de chegada e, na verdade, essa inversão pode mesmo conduzir a contrastes muito fortes de acerto na manipulação desses registros.

Nota-se que, na maioria das vezes, o que acontece no ensino de Matemática é o fato de se privilegiar um sentido da conversão imaginando-se que o outro pode ser efetuado automaticamente pelos estudantes, o que até acontece algumas vezes em casos de congruência, casos esses que não são os mais freqüentes no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

A compreensão em Matemática, segundo a teoria de Duval, implica a capacidade de mudarmos de registros de representação sem perder de vista o objeto matemático em questão e é essa articulação entre os registros que se faz necessária, porém não suficiente, para a compreensão da Matemática.

No processo de ensino e aprendizagem da Matemática, Duval lembra:

> (...) uma das características mais importantes da atividade matemática é a diversidade dos registros de representação semiótica que ela mobiliza obrigatoriamente. No entanto, essa diversidade raramente é levada em conta no ensino. Ora, se se quer analisar as dificuldades de aprendizagem em matemática, é preciso estudar prioritariamente a conversão das representações e não os tratamentos. Naturalmente, para poder estar em posição de observá-la, é preciso começar por distinguir bem esses dois tipos de transformação das representações, o que é raramente ou jamais feito, seja porque se estima que a conversão é somente uma forma particular de tratamento, seja porque se acredita que ela depende de uma compreensão conceitual, isto é, de uma atividade "puramente mental", quer dizer, a-semiótica. (DUVAL, 2003, p. 30)

Duval insiste que a conversão é o caráter central em sua teoria, aliás, ele destaca que é esse o fato que diferencia verdadeiramente sua teoria dos registros de representação semiótica de tudo aquilo que se discute em relação a signos e *semiosis*.

2.3.2 As idéias de "Objetos do Saber" e "Outros Objetos" na Transposição Didática

As discussões propostas por Chevallard (1991), trazem à tona questões referentes aos objetos do saber e outros objetos, principalmente os objetos a ensinar. Chevallard destaca que *um "objeto do saber" somente passa a existir como tal, no campo da consciência dos agentes do sistema de ensino, se a sua inserção no sistema dos "objetos a ensinar" parece útil à economia do sistema didático"*. (CHEVALLARD, 1991, p. 49)

Porém, isso não quer dizer que um objeto do saber seja somente identificado e designado como objeto a ensinar, a partir do momento em que a transposição didática esteja potencialmente concluída, pois, na verdade, essa continua mesmo depois da introdução didática do objeto do saber.

Mas, de fato, o que é um objeto do saber? Para o professor de matemática, por exemplo, é necessário que se coloque nessa categoria certamente as noções matemáticas, como a adição, o círculo, a derivação, as equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes, entre outros, lembrando-se que esses exemplos fazem sentido numa mesma comunidade de professores de matemática.

Contudo, ao lado das noções matemáticas se colocam as que Chevallard chama de **noções paramatemáticas**, como, por exemplo, a noção de parâmetro, a **noção de equação**, a noção de demonstração. Essas noções são úteis para a atividade matemática, mas não são normalmente objetos de estudo para o matemático.

É importante, que fique bem entendido, que não há uma divisão absoluta entre os dois domínios: a noção de equação e a noção de demonstração são hoje objetos matemáticos em lógica matemática, por exemplo, e essa distinção então deve sempre se referir à uma prática de ensino precisa (nível do curso, lugar, tempo, setor da matemática, etc.).

Em geral, as noções matemáticas são construídas e sua construção pode tomar a forma de uma definição ou de uma construção propriamente dita, seguida de uma demonstração. Além dessa construção – que é muitas vezes uma definição – as noções matemáticas têm propriedades e têm também aplicações intra e extra matemáticas.

A propósito, Chevallard chama a atenção para:

> (...) *dos objetos do saber* que são as *noções matemáticas*, o professor espera que o aluno saiba (eventualmente):
> - dar a *definição* (ou retraçar a construção);
> - dar as *propriedades* (“principais”), as *demonstrar*;
> - *reconhecer* um certo número de *ocasiões de emprego*;
> - etc. (CHEVALLARD, 1991, p. 51)

Ele afirma ainda que somente os objetos do saber podem vir a se tornar objetos de ensino, e que as noções paramatemáticas não se tornam objetos de ensino, mas sim, são objetos de saber auxiliares, as quais são necessários no processo de ensino e aprendizagem dos objetos matemáticos propriamente ditos. Ele diz: *“Eles devem ser ‘aprendidos’ (ou ainda:’conhecidos’), mas eles não são ’ensinados’ (segundo o plano de ensino das noções matemáticas)*. (CHEVALLARD, 1991, p. 51)

Outro ponto importante que Chevallard toca se refere ao fato de que, normalmente, somente as noções matemáticas são objetos de uma avaliação direta por parte do professor. Vejamos na citação abaixo, exemplos dessa afirmação:

> O professor solicitará, por exemplo, ao aluno para “resolver a equação: $x^2 - 8x + 9 = 0$”. As noções paramatemáticas são normativamente excluídas de uma avaliação direta. O aluno que não consegue responder à questão: “Resolver e discutir a equação $x^2 - \lambda x + (\lambda + 1) = 0$”, o professor poderá concluir que o aluno “não compreendeu a noção de *parâmetro*”. Em um outro nível, ele dirá, por exemplo, que o aluno “não compreendeu a noção de *demonstração*”. O professor de matemática que, numa festa mundana, encontra um convidado que lhe declara: “Ah, você é professor de matemática! Eu, eu nunca compreendi porque $ax^2 + bx + c = 0$”, poderá concluir que este último “não compreendeu a noção de *equação*”. (CHEVALLARD, 1991, p. 51)

Além das noções matemáticas e das noções paramatemáticas existe uma camada mais profunda de noções, que são mobilizáveis implicitamente pelo contrato didático[6], que Chevallard chamou de noções protomatemáticas, como, por exemplo, a noção de padrão.

Por fim, as noções matemáticas, as noções paramatemáticas e as noções protomatemáticas constituem camadas cada vez mais profundas e complexas no funcionamento didático do saber. Faz-se necessária uma profunda análise didática que leve em conta as diferenças de natureza cognitiva existentes entre essas noções:

> (...) é assim que a análise da transposição didática de tal noção matemática (por exemplo, a identidade $a^2 – b^2 = (a+b) (a-b)$) supõe a consideração de noções paramatemáticas (por exemplo, as noções de *fatoração* e de *simplificação*), que por sua vez devem ser vistas à luz de certas noções protomatemáticas (a noção de “padrões”, de “simplicidade”, etc.). (CHEVALLARD, 1991, p. 55)

Segundo o próprio Chevallard (1992), as primeiras análises propostas em sua Teoria da Transposição Didática – publicada em 1991, mas que foi inicialmente concebida nos anos 80:

> (...) limitavam-se a distinguir objetos matemáticos, paramatemáticos e protomatemáticos. O alargamento do quadro, levado a cabo por necessidades de análise, conduziu-me a propor uma teorização em que qualquer objeto pudesse aparecer. (...) Assim se passa de uma máquina restrita para pensar um universo didático *restrito* para uma maquinaria de mais vasto alcance, apta, em principio, a permitir-nos situar imediatamente a *didática no seio da antropologia*. (CHEVALLARD, 1992, p. 86-87)

Com isso, é importante compreender em que sentido Chevallard caracteriza e diferencia as noções matemáticas e as noções paramatemáticas. Pode-se notar que, em algumas situações, é necessário que se eleve, a um certo nível superior de explicitação, certas noções paramatemáticas, como, por exemplo, a noção de equação ou de demonstração, as quais podem ser objetos de definição precisa em lógica matemática. Assim, uma certa noção paramatemática pode se tornar, num discurso didático explícito, uma noção matemática.

---

[6] Segundo Brousseau (1986), contrato didático é o conjunto de comportamentos do professor esperados pelos alunos e dos alunos esperados pelo professor em relação ao saber.

Contudo, é necessário notar que, à vista dos objetivos de uma análise didática, esse processo de explicitação pode comprometer o significado da noção matemática em jogo, uma vez que essa pode reduzir o sentido didático dos objetos àquilo que se pode condensar no discurso didático ou matemático.

Com isso, considerando as idéias de Duval sobre os registros de representação semiótica e, as de Chevallard, sobre os objetos do saber e os objetos do ensino, tive condições de ampliar e aprofundar minha visão acerca dos diferentes significados que a noção de equação assume no ensino da Matemática.

Capítulo III

Investigando o Desenvolvimento Epistemológico da Noção de Equação

3.1 Introdução

Considerando o meu objetivo nesta pesquisa – investigar os significados da noção de equação no processo de ensino da Matemática, faz-se necessário nesse momento a elaboração de um estudo epistemológico-histórico dessa noção.

É possível considerar que, algumas características que aparecem no processo de ensino e também de aprendizagem da Matemática nos dias atuais, no que se refere ao estudo das equações, podem ter origem epistemológico-histórica. Exemplo disso está na ênfase que é dada aos procedimentos e técnicas de resolução, quando se está trabalhando com as equações.

Assim, procuro desenvolver aqui um estudo epistemológico-histórico da noção de equação, buscando na literatura nacional e internacional o caminho percorrido pelos matemáticos e estudiosos, em diversas épocas históricas, no que diz respeito a essa idéia matemática.

As equações sejam de que tipo for, sempre foram e continuam sendo tópicos atraentes de estudo e um assunto central e de grande importância dentro da Matemática e das suas aplicações. Inúmeros problemas e processos da Ciência e da Tecnologia, e mesmo de nossa vida cotidiana, podem ser descritos ou modelados por meio de equações.

Este estudo epistemológico-histórico, que tem por objetivo principal identificar possíveis significados atribuídos à noção de equação ao longo do desenvolvimento dessa idéia dentro da história da Matemática, inicia-se pela investigação da Matemática dos Babilônios e Egípcios, dos Gregos, em seguida traz as descobertas dos Árabes e Hindus, e, finalmente, as contribuições que os Europeus trouxeram para um dos maiores problemas que permearam a Matemática até o século XIX – a busca pela resolução das equações quínticas.

3.2 Babilônios e Egípcios

A Babilônia foi fundada cerca de 2300 a.C. e por sua privilegiada localização geográfica, tornou-se uma verdadeira metrópole do Oriente.

Os babilônios desenvolveram uma forma de escrita bastante particular, com seus símbolos abstratos. Eles utilizavam tabletes de barro cozido, através dos quais muita informação chegou até os dias atuais.

Estima-se que aproximadamente 400 tabletes, dentre quase meio milhão que foram encontrados, sejam estritamente matemáticos, contendo tábuas e inúmeros problemas matemáticos.

A astronomia foi a ciência que mais progresso teve entre os babilônios, tendo fortes evidências de que eles já utilizavam o calendário como nós o fazemos nos dias atuais, dividindo o dia em 24 horas, a hora em 60 minutos, o minuto em 60 segundos e o círculo em 360 partes iguais.

Muitos dos tabletes mais antigos apresentam situações que deixam claro o alto grau de habilidade computacional utilizado por eles, como também evidenciam que o sistema sexagesimal já estava ali presente. Os babilônios utilizavam símbolos cuneiformes para o 1, para o 60 e para o 3600.

Uma marca bastante forte e presente nesses tabletes refere-se a uma geometria de caráter puramente algébrico, com problemas expressos em terminologia geométrica, mas que não passavam de problemas algébricos não triviais. Vejamos um exemplo de problema desse tipo: *"Uma determinada área A, que é a soma de dois quadrados, tem o valor 1000. O lado de um dos quadrados é igual a 2/3 do lado do outro menos 10. Quanto mede os lados dos quadrados?"* (STRUIK 1992, p.58)

Esse problema nos conduz, em notação moderna[7], às equações $x^2 + y^2 = 1000$ e $y = \frac{2}{3}x - 10$, cuja solução pode ser encontrada resolvendo-se a equação quadrática $\frac{13}{9}x^2 - \frac{40}{3}x - 900 = 0$, que tem solução positiva, x = 30.

Por volta do ano 2000 a.C. a aritmética babilônica parecia já ter evoluído para uma álgebra retórica desenvolvida. Eles resolviam equações lineares e quadráticas com duas incógnitas, tanto pelo método equivalente ao de substituição numa fórmula geral, como pelo método de completar quadrados. Aliado a isso, um problema sempre presente na álgebra dos babilônios constituía-se em saber que um número x adicionado ao seu recíproco 1/x daria um determinado número.

Nesse sentido, o que eles buscavam era resolver uma equação em x, do tipo x + 1/x = b, que nos leva à equação quadrática em x: $x^2 - bx + 1 = 0$. Buscando-se a solução através do método de completar quadrados, temos: Adiciona-se $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ em ambos os membros da igualdade, obtendo: $x^2 - bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1$, fazemos então: $\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1$, e então encontramos as raízes da equação como sendo: $\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1}$ e $\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1}$, idéias empregadas também, séculos mais tarde, por al-Khwarizmi para se chegar à fórmula geral bem conhecida por todos nós para a resolução das equações de 2º grau.

Os babilônios também já discutiam a resolução de algumas equações cúbicas e biquadráticas. Foi encontrado um tablete que fornece, além de uma

[7] Serão utilizadas, salvo quando mencionado o contrário, sempre a notação moderna da simbologia algébrica. Entende-se aqui como notação moderna àquela que está presente nos textos atuais de Álgebra.

tábua de quadrados e de cubos inteiros de 1 a 30, também a seqüência de valores de $n^3 + n^2 = a$, que eram usados, segundo parece, para resolver equações cúbicas do tipo $x^3 + x^2 = a$.

Um exemplo dessa situação é a busca por uma raiz da equação $x^3 + 2x^2 - 3136 = 0$, encontrado nesse mesmo tablete. Acredita-se que os babilônios tinham uma capacidade desenvolvida em reduzir uma equação cúbica à forma $x^3 + x^2 = a$, embora não haja nenhuma evidência até agora de que eles o fizessem .

Foram encontrados, ainda, alguns problemas não resolvidos envolvendo equações simultâneas que levam à equações biquadráticas. Vejamos um exemplo disto: $xy = 600$, $150(x - y) - (x + y)^2 = - 1000$. Um outro exemplo encontrado nesses mesmos tabletes, refere-se ao par de equações da forma $xy = a$, $b\frac{x^2}{y} + c\frac{y^2}{x} + d = 0$, que leva à uma equação de grau seis em x, mas é quadrática em x^3.

Enfim, naquela época a matemática babilônica já tinha alcançado um nível de desenvolvimento elevado em relação a outros povos. Eles desenvolveram questões aritméticas, eram notáveis com as propriedades dos números e tinham técnicas de cálculo bastante avançadas para a época.

A álgebra naquela época era utilizada para resolver problemas por meio de equações que ainda, nos dias de hoje, requerem uma considerável habilidade numérica; e nota-se ainda que os babilônios eram infatigáveis construtores de tábuas de cálculos, calculistas extremamente hábeis *e certamente mais fortes em álgebra do que em geometria*. (EVES, 2004, p. 63)

Juntamente com a Babilônia, destacarei o Egito, berço de uma das mais antigas civilizações da humanidade. Os egípcios desenvolveram conhecimentos em medicina e iniciaram investigações matemáticas, mais tarde aprofundadas pelos gregos. Diferentemente dos babilônios, os egípcios utilizavam o papiro e uma grande parte de seus escritos se conservaram graças ao clima seco. Dentre os documentos matemáticos mais antigos que chegaram aos dias atuais, talvez os mais famosos sejam justamente os papiros egípcios.

Dois desses papiros são chamados de: *Papiro de Rhind* (ou Ahmes), datado aproximadamente de 1.650 a.C., e o *Papiro de Moscou* (ou Golenischev), de 1.850 a.C.

Acredita-se que o *Papiro de Rhind* contenha material mais antigo em relação ao de 1.650 a.C. e recebeu esse nome por ter sido adquirido por A. Henry Rhind. Esse papiro também é chamado de *Papiro de Ahmes*, em homenagem ao escriba que o copiou – e que se tornou o primeiro nome conhecido na história da Matemática.

Os papiros de Rhind e de Moscou juntos contêm 110 problemas e são uma das nossas maiores fontes de conhecimento sobre a Matemática egípcia. Descrevem métodos utilizados pelos egípcios para a multiplicação e divisão, o uso de frações unitárias, o emprego da regra da falsa posição, uma solução para o problema da determinação da área de um círculo e muitas aplicações da Matemática a problemas práticos.

A maioria dos problemas apresentados nos papiros era de origem prática, com questões sobre pão, cerveja, o balanceamento de rações para o gado e aves. Muitos desses problemas eram resolvidos por uma equação linear com uma incógnita, utilizando-se de um método que, mais tarde na Europa, ficou conhecido por regra da falsa posição.

Assim, para resolver uma equação do tipo $x+\frac{x}{7}=24$, assumia-se um valor conveniente para x, digamos x=7, e assim $7+\frac{7}{7}=8$, e não 24. Como 8 deve ser multiplicado por 3 para se obter 24, o valor correto para x também deve ser multiplicado por 3, ou seja, o valor correto de x é 21.

Além de problemas de origem prática, os egípcios também apresentavam alguns problemas de natureza teórica, como este, que contempla idéias de progressão aritmética e geométrica: *"Uma dada superfície de 100 unidades de área deve ser representada como a soma de dois quadrados cujos lados estão entre si como 1:3/4".* (EVES 2004, p. 74)

Nesse caso temos $x^2+y^2 = 100$ e $x = \frac{3}{4}y$, eliminando-se x, temos uma equação quadrática em y. Resolvendo-se pelo método da falsa posição, tomemos y=4, obtemos x=3 e $x^2 + y^2 = 25$ em vez de 100. Por conseguinte, devemos então fazer a correção de x e y dobrando-se os valores iniciais de cada um, e aí sim, obtemos a solução x=6 e y=8.

Como vimos nos exemplos acima, os problemas eram normalmente simples e não iam além das equações lineares com uma incógnita, a qual eles representavam por *hau* ou *aha*. Suas soluções não exigiam grandes métodos e raciocínios, sendo que o mais empregado, o da falsa posição, assemelha-se bastante com o conhecido hoje em dia por todos nós, como "método das tentativas".

Outro fato importante a se destacar é que nos papiros encontrados, as resoluções de equação eram sempre seguidas de instruções do tipo "faça isto", "faça aquilo", "este é o resultado", sem qualquer tipo de justificativa lógica, algo que muitas vezes ainda reconhecemos nos dias atuais quando se trata de uma perspectiva de ensino-aprendizagem baseada na manipulação de regras e algoritmos sem muita preocupação com a discussão dos significados das idéias matemáticas.

Até onde se tem notícia nos dias de hoje, a Matemática egípcia tinha objetivos muito limitados, embora com alguma sofisticação dentro dos limites da época, contudo estava muito aquém daquela praticada na Babilônia.

Pode-se concluir então que nesse período, basicamente se trabalhava com equações originárias de problemas de ordem prática – como aqueles ligados à agricultura e divisão de terras.

A **noção de equação** utilizada por essas civilizações, principalmente pelos egípcios, tinha um **caráter pragmático** e procurava, de **forma intuitiva**, igualar duas quantidades, com a finalidade de encontrar o valor da quantidade desconhecida.

Percebe-se durante essa fase da história das equações, que na maior parte das vezes, a busca pelas soluções relacionava-se à equações particulares, para resolver problemas específicos. Os métodos utilizados, em sua maior parte, estavam ligados à idéias aritméticas e não tinham como preocupação a busca por soluções gerais para esses tipos de equações.

3.3 Gregos

Por volta do século V a.C., com o declínio das civilizações egípcia e babilônica, outros povos como os hebreus, os assírios, os fenícios e os gregos passaram a dominar a economia, a política e a cultura da época.

Dentre esses povos destacaremos aqui a influência da civilização grega no desenvolvimento da Matemática, pois foi a partir daí que questões do tipo "como", começaram a perder importância para as questões do tipo "por quê", por exemplo: "*Por que* os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?", ou: "*Por que* o diâmetro de um círculo divide este círculo ao meio?". Assim, a Matemática, no sentido moderno da palavra, nasceu numa atmosfera de racionalismo e assumiu uma feição dedutiva.

Durante esse período surgiram relatos sobre um grande número de matemáticos preocupados com os problemas que trouxeram desenvolvimento para a geometria. Tratava-se do período da "Idade Heróica da Matemática" em que a álgebra aritmética era substituída por uma álgebra geométrica.

Em sua álgebra geométrica, os gregos utilizavam dois métodos principais para a resolução de equações lineares e quadráticas – o método das proporções e o da aplicação de áreas; métodos esses que parecem ter suas origens nos pitagóricos.

O método das proporções permite que se construa um segmento de reta x, dado por $a: b = c: x$ ou por $a: x = x: b$, em que a, b, c são segmentos de reta dados. Esse método fornece soluções geométricas para equações do tipo $ax = bc$ e $x^2 = ab$.

Em relação ao método da aplicação de áreas, pode-se recorrer aos *Elementos de Euclides*, e por intermédio da Proposição 44[8] do Livro I, pode-se chegar à solução geométrica para a equação linear $ax = bc$ e, através das Proposições 28[9] e 29[10] do livro VI, às soluções geométricas das equações quadráticas do tipo $x^2 – ax + b^2 = 0$ e $x^2 – ax – b^2 = 0$, respectivamente.

Os gregos normalmente distinguiam grandezas de dimensões diferentes – uma, duas ou três. Suas discussões giravam em torno de situações em que surgia a necessidade de se adicionar tais grandezas, pois isso somente poderia ocorrer entre grandezas de mesma dimensão. Tais discussões demandavam de problemas originados da pergunta: Como encontrar o segmento x em equações do tipo: $x^2 = a^2 + b^2$; $ax = bc$; $x^2 = ab$.

Os três primeiros séculos da matemática grega, começando com os esforços de Tales por uma geometria demonstrativa e culminando com os Elementos de Euclides, constituíram um período de grandes realizações para a matemática em geral, com contribuições para a álgebra e para as equações.

---

[8] Construir um dado segmento de reta AB um paralelogramo de área dada e ângulos da base dados. (EVES 2004, p. 110)

[9] Construir um dado segmento de reta AB um paralelogramo AQRS de área igual a uma dada figura retilínea F, e ficando aquém por um paralelogramo QBCR semelhante a um paralelogramo dado, não excedendo a área de F a do paralelogramo descrito sobre a metade de AB e semelhante à deficiência QBCR. (EVES 2004, p. 110)

[10] Construir um dado segmento de reta AB um paralelogramo AQRS de área igual a uma figura retilínea F, e excedendo por um paralelogramo QBCR semelhante a um paralelogramo dado. (EVES 2004, p. 111)

Contudo, é imprescindível destacar a importância que teve a proposição dos três famosos problemas matemáticos propostos nessa época:

- A duplicação do cubo: problema que consiste em se construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo dado;
- A trisecção do ângulo: problema que consiste em se dividir um ângulo arbitrário dado em três partes iguais;
- A quadratura do círculo: problema que consiste em se construir um quadrado com área igual à de um círculo dado.

A importância desses problemas reside no fato de que embora eles não pudessem ser resolvidos com régua e compasso, eles puderam ser resolvidos por meio de métodos algébricos.

Dentre as descobertas matemáticas resultantes da busca pela solução desses três problemas, um capítulo muito interessante é justamente o desenvolvimento de parte da teoria das equações ligadas a domínios de racionalidade, números algébricos e teoria dos grupos. Baseando-se nesses resultados foi que, somente no século XIX, quase 2000 anos depois, se estabeleceu a impossibilidade de tais construções.

Após o III século antes de Cristo segue-se um longo período de declínio interrompido apenas entre 250 a 350 d.C. em que surge o maior algebrista grego - Diofanto de Alexandria. Pouco se sabe acerca da vida de Diofanto, que provavelmente nasceu cerca de 200 d.C. e morreu no ano 284 d. C. Contudo, isso são apenas suposições. O que se tem de mais concreto em relação à sua vida e que teria vivido 84 anos. Esse dado nos é fornecido numa coleção chamada “Antologia Grega”, que apresenta o seguinte problema:

> Deus lhe concebeu ser um menino pela sexta parte de sua vida, e somando uma duodécima parte a isto cobriu-lhe as faces com penugem; Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após o seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! Infeliz criança tardia; depois de chegar à medida de metade da vida de seu pai, o Destino frio o levou.

> Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números ele terminou sua vida. (BOYER 1978, p. 130)

Se esse enigma é historicamente exato, a equação resultante: $\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\left(\frac{1}{7}x+5\right)+\left(\frac{1}{2}x+4\right)=x$, mostra que Diofanto viveu 84 anos. Contudo, o que é interessante ressaltar é que esse tipo de problema não deve ser tomado como típico problema diofantino, pois ele pouco se dedicou às equações do primeiro grau.

Diofanto escreveu uma importante obra intitulada *Arithmética*, obra essa formada por quinze volumes, dos quais apenas seis sobreviveram ao fogo que ocorreu na grandiosa Biblioteca de Alexandria. Essa obra traz enormes contribuições para o desenvolvimento da álgebra, principalmente no que se refere à simbologia, e também serviu de grande influência para que os europeus posteriormente desenvolvessem a teoria dos números.

Vejamos um problema normalmente abordado por Diofanto para encontrar o valor de dois números: *"Proposto que a soma de dois números forma 20 unidades e que seu produto forma 96 unidades..."* (DAHAN-DALMEDICO & PEIFFER 1986, p. 79).

Para resolvê-lo, Diofanto procedia da seguinte maneira: supunha que a diferença entre eles fosse duas *arithmés* (esse termo designava a incógnita), dita 2*d*. Os dois números são 10+*d* e 10-*d*. Fazendo-se (10+*d*) . (10-*d*) = 96, temos $100 - d^2 = 96$ e d = 2. Assim, os dois números são 12 e 8.

Utilizando-se uma representação e um tratamento moderno, podemos escrever:

$$x + y = 20,$$
$$xy = 96,$$
$$x - y = 2d,$$

então,

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = 10 + d \ ,$$

$$y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = 10 - d\ .$$

De onde se obtém: xy = 100 - d^2 = 96, d^2= 4. Considerando-se, como se fazia naquela época, somente a raiz positiva, temos d = 2. Chegando-se aos valores já constatados, 12 e 8.

Aqueles tipos de problemas em que se devam encontrar apenas as soluções racionais tornaram-se conhecidos como *problemas diofantinos*, aliás, hoje em dia essa terminologia refere-se geralmente à busca pelas soluções inteiras.

Partindo desses problemas, ele fez nascer as chamadas equações diofantinas, que são equações que podem assumir a forma: $ax + by = c$ onde *a, b, c* são conhecidos e *x*, *y* são desconhecidos.

A obra *Arithmética* de Diofanto supõe uma grande familiaridade com as propriedades dos números inteiros e racionais não-inteiros, e implica o domínio sobre certas técnicas de natureza algébrica, como: transformações de expressões, substituição, eliminação, etc., mesmo que implícitas.

A matemática grega representou essencialmente algo de novo no que estava sendo desenvolvido na época, tanto em termos de conteúdos como em relação aos métodos, trazendo uma ruptura com os métodos geométricos tradicionais. Entretanto, as últimas contribuições, no que se refere ao simbolismo herdado dos gregos, acrescido das influências de Diofanto, perduraram ainda por muito tempo.

Desse período podemos concluir que as equações eram significativamente concebidas de maneira diferente dos babilônios e egípcios, pois os gregos não estavam procurando resolver equações que tinham sido originadas de problemas de ordem prática.

A **noção de equação** utilizada pelos gregos contemplava um **caráter geométrico** e, de **forma dedutiva**, suas resoluções repousavam em manipulações geométricas, como percebemos no método das proporções, por exemplo.

Outro ponto importante a se destacar é a diferença na concepção de equação, pois, enquanto para os babilônios e egípcios as equações eram concebidas como uma igualdade entre duas quantidades, isso era inconcebível para os gregos, pois as operações com segmentos e figuras geométricas não permitiam que se igualassem grandezas de dimensões diferentes.

Por outro lado, percebemos que mesmo com a **mudança de concepção** acerca da álgebra nesse período – de **aritmética**, nos **babilônios e egípcios**, para **geométrica**, nos **gregos** – a busca pelas soluções ainda estavam relacionadas à equações particulares e não a métodos gerais.

3.4 Árabes e Hindus

Perante as enormes turbulências vividas na história da humanidade com a queda do Império Romano, os centros das investigações matemáticas se deslocaram para a região da Índia e para as regiões conquistadas pelos árabes.

Com a expansão do império árabe e do islamismo chegou-se a imaginar, talvez até de forma preconceituosa, que surgiria uma época de obscuridade nas ciências e na cultura, porém, ocorreu exatamente o contrário.

Durante os reinados dos califas al-Mansur e Harun-al-Rashid as bibliotecas tornaram-se numerosas e começaram a realizar as traduções de inúmeras obras gregas, como as de Euclides, Arquimedes, Apolônio, Diofanto, dentre outros.

A matemática árabe se desenvolveu a partir de muitos problemas relacionados ao comércio, à arquitetura, à astronomia, à geografia, à ótica; tendo como característica presente, a relação entre a solução desses problemas e um trabalho teórico intenso.

Nessa mesma época, foi enviado para Bagdá um astrônomo indiano incumbido de ajudar os sábios maometanos a traduzir para a língua árabe algumas tabelas matemáticas hindus.

Essas tabelas eram usadas em várias obras de engenharia e nos cálculos astrológicos e foi, a partir delas, que o mundo árabe tomou conhecimento da simbologia dos números que atualmente usamos. Naquela época foram apresentados os algarismos de 1 a 9, visto que o zero foi introduzido posteriormente.

Esse novo sistema de numeração foi posteriormente utilizado por um dos maiores árabes da cultura científico–matemática que surgiu na escola de Bagdá, Mohammed Ibn Musa al-Khwarizmi, que desenvolveu seus trabalhos juntamente com um grupo de matemáticos e astrônomos na chamada *Casa da Sabedoria*, na Academia de Bagdá.

al-Khwarizmi escreveu duas importantes obras sobre aritmética e álgebra. Na primeira delas, *De numero hindorum* (sobre a arte hindu de calcular), ele explica e apresenta ao mundo árabe como pronunciar os números representados pelos algarismos hindus e como utilizar as noções de unidade, dezena, centena ....

Foi a partir dessa obra que a Europa posteriormente tomou conhecimento desse sistema de numeração, que na verdade teve sua origem na Índia, com Brahmagupta, mas acabou sendo difundido como *algarismi, algarismo* ou *algoritmo*, em homenagem a al-Khwarizmi.

Outra obra importante de al-Khwarizmi, escrita na primeira metade do séc. IX, é *Ilm al-Jabr Wa al Muqabalah*, que pode ser entendida como "restauração por transposição de termos de um lado da equação para o outro". Foi a obra que mais trouxe contribuições para o objeto desta pesquisa sobre equações.

Nesse livro aparecem pela primeira vez regras para resolver equações de 1º e 2º graus a coeficientes numéricos. Pode-se dizer que essas regras são semelhantes àquelas utilizadas hoje em dia para resolver as equações do 1º grau.

A álgebra de al-Khwarizmi, presente na obra *Ilm al-Jabr Wa al Muqabalah*, nos deixa como herança duas expressões que tomaram significados muito fortes e presentes na resolução de equações: *al-Jabr* e *al Muqabalah*.

Para resolver alguns tipos de equações al-Khwarizmi utilizava duas operações fundamentais *al-jabr* e *al muqabalah*, que significam:

- *al-jabr* é a operação que soma a ambos os membros da equação termos iguais;
- *al muqabalah* é a operação que reduz ou elimina termos iguais de ambos os membros da igualdade.

Todas as equações tratadas por ele podiam ser reduzidas a seis tipos, em sua forma canônica:

1) $ax^2 = bx$	4) $ax^2 + bx = c$
2) $ax^2 = c$	5) $ax^2 + c = bx$
3) $bx = c$	6) $bx + c = ax^2$

A titulo de ilustração, vejamos um exemplo de como podemos resolver uma equação, utilizando as operações al-jabr e al muqabalah, e as formas canônicas acima apresentadas:

$$2x^2 + 100 - 20x = 58$$

$$\text{por al-jabr } 2x^2 + 100 - 20x + 20x = 58 + 20x$$
$$2x^2 + 100 = 58 + 20x$$
$$\text{por al muqabalah } 2x^2 + 100 - 58 = 58 - 58 + 20x$$
$$2x^2 + 42 = 20x$$
$$\text{por al muqabalah } \frac{2x^2}{2} + \frac{42}{2} = \frac{20x}{2}$$
$$x^2 + 21 = 10x$$

Chegando nesse ponto, na forma canônica e que corresponde ao tipo 5 das que ele trabalhava, eram utilizadas transformações geométricas como já feitas anteriormente pelos gregos.

Esse tipo de procedimento também era utilizado para se resolver as equações do tipo 5 e 6. Na resolução de equações do tipo $ax^2 = bx$ (tipo 1), al-Khwarizmi as tratava como uma equação linear $ax = b$, negligenciando a solução zero, que será retomada mais tarde, no século XVII.

Ainda examinando essa obra de al-Khwarizmi, podemos ver que a representação do que é necessário para resolver os problemas se faz mediante dois instrumentos distintos:

- Os "tipos de números que aparecem nos cálculos" – tesoros (*mâl*, valores em dinheiro ou tesouros), raízes (*jidr*) e números simples (*adad mufrad*, um certo número de *dirhams*, a moeda árabe). A conceitualização das equações escritas por al-Khwarizmi, em forma retórica na língua árabe, tratam de transações comerciais, relações geométricas ou qualquer outra coisa;
- Além dessas três terminologias utilizadas, al-Khwarizmi usava o termo *shay´* (cosa) para designar uma quantidade desconhecida de um problema em uma equação, permitindo assim que se expresse, de forma retórica, operações aritméticas com o desconhecido.

Como vimos, a *cosa*, por um lado, e *tesoro*, *raiz* e *número simples*, por outro, estão representando elementos de natureza diferente: a *cosa* serve para representar quantidades desconhecidas (e para poder operar com ela) e, *tesoro*, *raiz* e *números simples*, representam tipos ou espécies de números. Essa distinção não se fazia, por exemplo, na álgebra babilônica.

Percebe-se na obra de al-Khwarizmi uma preocupação na busca pelas formas canônicas possíveis para se resolver qualquer tipo de equação quadrática.

Embora ele não dispusesse de uma linguagem simbólica, como temos atualmente, al-Khwarizmi conseguiu elaborar um catálogo com as formas canônicas utilizando-se unicamente de linguagem natural e algumas figuras geométricas.

Certamente a obra de al-Khwarizmi foi a que mais contribuiu para o desenvolvimento da teoria das equações na Idade Média. Como indicado anteriormente, a própria palavra Álgebra deriva de uma de suas principais operações.

Outro matemático árabe que contribuiu para a teoria das equações foi Omar Khayyam, que encontrou uma solução geométrica para a equação cúbica do tipo $x^3 + ax = b$ utilizando a intersecção do círculo $x^2 + y^2 = qx$ com a parábola $x^2 = py$. Ele também trabalhou com a cúbica do tipo $x^3 = ax + b$ utilizando a intersecção da parábola $x^2 = \sqrt{a}y$ com a hipérbole eqüilátera $x\left(\frac{b}{a} + x\right) = y^2$.

Dentre outros tipos de situação que ele abordou, Kayyam sempre considerava o método de resolução geométrico, utilizando-se de curvas geométricas.

No ano 746, com a queda do Império Romano, nascia Aryabhata, autor de um dos mais antigos textos matemáticos, o *Aryabhatiya.* Trata-se de uma escrita em versos, composta por 123 estrofes metrificadas, que discorre sobre as regras de cálculo usadas na Astronomia e na Matemática.

A matemática Hindu era freqüentemente descrita como uma matemática intuitiva. Os matemáticos indianos tinham uma predileção em trabalhar com números nas operações aritméticas ou na resolução de equações, utilizando freqüentemente os métodos da falsa posição ou de inversão, no qual se trabalha "de trás para frente", a partir dos dados do problema.

Vejamos um exemplo de um problema que os hindus resolviam utilizando-se do método de inversão:

> Linda donzela de olhos resplandecentes, uma vez que entendeis o método de inversão correto, dizei-me qual é o número que multiplicado por 3, depois acrescido de ¾ do produto, depois dividido por 7, diminuído de 1/3 do quociente, multiplicado por si mesmo, diminuído de 52, pela extração da raiz quadrada, adição de 8 e divisão por 10 resulta no número 2? (EVES 2004, p. 255)

Pelo método de inversão começamos com o número 2 e operamos para trás. Assim, temos: $[(2).(10)-8]^2+52=196; \sqrt{196}=14; \left[\dfrac{(14).\left(\dfrac{3}{2}\right).(7).\left(\dfrac{4}{7}\right)}{3}=28\right]$,

sendo 28 a resposta para o problema. Observa-se que onde a instrução do problema manda que se divida, multiplicamos; onde manda que se subtraia, somamos; e assim por diante, ou seja, é a substituição de cada operação pela sua inversa.

Percebe-se aí uma semelhança com o que se faz atualmente quando se resolve uma equação numa situação análoga, ou seja, se fossemos escrever e resolver esse problema nos dias atuais poderíamos chegar a:

$$\frac{\sqrt{\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{7}{4}\right).(3x)}{7}\right]^2 - 52 + 8}}{10} = 2$$

E resolveríamos essa equação *multiplicando* ambos os membros por 10, depois *subtrairíamos* 8 de cada membro, em seguida *elevaríamos ao quadrado* cada membro ... e assim por diante ... até chegarmos à solução da equação.

Grandes contribuições foram dadas à Álgebra e em especial à Teoria das Equações por dois matemáticos hindus muito conhecidos na História da Matemática: Brahmagupta e Bháskara.

Brahmagupta, matemático hindu, que viveu em 628 na Índia central, encontrou soluções gerais das equações quadráticas, determinando duas raízes, inclusive sendo uma delas negativa.

Pode-se observar uma influência da Matemática grega em Brahmagupta. Ele foi o primeiro a encontrar *todas as soluções inteiras possíveis* para a equação linear diofantina ax+ by = c onde a, b e c são inteiros, enquanto Diofanto, em sua época, procurava *uma solução racional qualquer*.

Percebe-se também uma “sincopação” da Álgebra em seus trabalhos, pois ele, assim como outros hindus, utilizava-se da justaposição para indicar a adição; um ponto sobre o subtraendo para indicar a subtração; *bha* para indicar a multiplicação; $y\bar{a}$ para denotar a incógnita; dentre outras.

O mais importante matemático hindu do século XII foi Bháskara, que preencheu algumas lacunas na obra de Brahmagupta, e conseguiu representar, através de sua obra, um culminar das contribuições hindus anteriores.

A mais conhecida*, Lilavati,* é uma compilação de problemas de Brahmagupta dentre outros, que continha muitas atividades sobre progressões aritméticas e geométricas, equações lineares e quadráticas.

Bháskara, assim como seu antecessor Brahmagupta e outros hindus, aceitavam os números negativos e irracionais, e chegaram a duas importantes identidades,

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{\left(a + \sqrt{a^2 - b}\right)}{2}} \pm \sqrt{\frac{\left(a - \sqrt{a^2 - b}\right)}{2}},$$

as quais podem ser empregadas para encontrar a raiz quadrada de um número racional.

Utilizando-se do conhecimento deixado por outros matemáticos hindus, principalmente Brahmagupta, Bháskara unificou a solução geral das equações quadráticas pelo método de complemento de quadrados, hoje em dia conhecido por método hindu. Essa importante fórmula geral para a resolução da equação de 2º grau $ax^2+bx+c=0$, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$, é conhecida nos dias atuais como Fórmula de Bháskara.

Pudemos perceber que tanto árabes como hindus trabalhavam com equações originárias de problemas de ordem prática, assim como os babilônios e os egípcios já tinham feito, além de situações que recaiam em interpretações e manipulações geométricas, como os gregos já o faziam.

Contudo, é notório que as questões investigadas por árabes e hindus parecem dar à **noção de equação,** cada vez mais, um **caráter algébrico.** O catálogo de expressões que se sabe resolver passa do específico – constituído pela acumulação de problemas resolvidos, técnicas e procedimentos de resolução particularizadas – para um **catálogo** de **todas** as **formas canônicas** possíveis.

A álgebra babilônica não supera esse objetivo, pois, embora existissem catálogos de técnicas e problemas, esses nada têm a ver com as figuras geométricas. Os procedimentos de resolução são analíticos e reduzem as configurações a outras que se saibam resolver, ponto que também não é superado, tampouco, pela obra de Diofanto.

A **noção de equação** utilizada pelos árabes e hindus já apresenta uma **concepção** mais **estrutural**, no sentido de se observar as características e propriedades definidas em uma classe de equações e não mais em equações relacionadas a situações particulares.

Assim, com os objetivos presentes na álgebra dos árabes e hindus, percebe-se que a busca pelas formas canônicas caminha no sentido de que se elabore um catálogo, no qual seja possível resolver todas as formas canônicas Com isso, al-Khwarizmi estabelece todas as possibilidades para o que conhecemos por trinômios de grau não superior a dois.

Desta forma, podemos concluir que, antes **de al-Khwarizmi** se sabia **resolver problemas quadráticos** com **procedimentos típicos** e **depois dele**, tornou-se possível resolver **qualquer problema quadrático**.

Ao mesmo tempo, podemos notar na obra de Omar **Khayyam** uma **concepção** de **equação** mais relacionada a um **caráter geométrico**, quando ele utiliza procedimentos geométricos para interpretar as **equações e suas soluções** como a **intersecção de curvas geométricas**.

3.5 Os Europeus

O Renascimento traz ao nosso pensamento uma época rica em obras literárias, científicas e artísticas dos italianos. O interesse pela arte e pela cultura surgiu mais cedo na Itália porque ficava numa das principais rotas da cultura árabe.

No campo das ciências, mais especificamente na Matemática, sabe-se que a mais conhecida obra de Álgebra, publicada na Itália, foi escrita por um frade chamado Luca Pacioli "*A Summa de arithmetica, geométrica, proportioni et proportionalita".* Essa obra, que foi concluída em 1487, envolve aritmética, geometria, álgebra e contabilidade, sendo que na parte da Álgebra, ela discute a resolução usual de equações lineares e quadráticas.

Nessa época as letras *p* (piu) e *m* (meno) eram usadas na Itália para indicar a adição e a subtração. Pacioli usou as abreviaturas *co*, *ce* e *al* para *cosa* (incógnita), *censo* (quadrado da incógnita) e *aequalis* (igualdade), respectivamente. Pacioli estava convencido de que as equações cúbicas não podiam ser resolvidas algebricamente.

Provavelmente um dos maiores e mais extraordinários feitos matemáticos ocorridos no século XVI foi a descoberta, por matemáticos italianos, da solução algébrica das equações cúbicas e quárticas.

O primeiro Matemático que conseguiu resolver algebricamente equações cúbicas do tipo $x^3 + mx = n$, parece ter sido o bolonhês Scipione del Ferro (1425 - 1526). Por volta de 1515, baseando seu trabalho, provavelmente em fontes árabes, ele encontrou o resultado, mas acabou não o publicando. Contudo, revelou seu segredo ao discípulo Antonio Maria del Fiore.

Nicolo Fontana, mais conhecido por Tartaglia, nasceu em 1499. Possuidor de um espírito livre e ousado, Tartaglia deu grandes contribuições à matemática, defrontando-se com problemas que eram na época o centro das atenções entre os matemáticos.

Escreveu *Nova Scientia* (1537) que trata de uma aplicação da matemática à artilharia, sendo descrito no livro os novos métodos e instrumentos de balística. Foi o primeiro italiano a traduzir e a publicar *Os Elementos* de Euclides em 1543, e no ano de 1546 publicou a *Quesiti et inventioni diversi*.

Por volta de 1535, Tartaglia anunciou ter descoberto uma solução algébrica para a equação cúbica $x^3 + px^2 = n$. Apesar do costume, daquela época, de manter em segredo as descobertas científicas para que pudessem servir de vantagem sobre o adversário em torneios e disputas nos quais eram colocados problemas científicos, Tartaglia fez o anúncio de sua descoberta.

Tempos depois, Tartaglia também conseguiu resolver a equação cúbica desprovida do termo quadrático. Portanto, aí, ele já sabia resolver dois tipos de cúbicas.

Num desses torneios disputados com Fiori, cada um deles foi submetido pelo parceiro a 30 questões. Diz-se que Tartaglia teria resolvido em duas horas as questões propostas por Fiori, o qual, demasiadamente confiante em sua habilidade de resolver equações do 3ºgrau, não foi capaz de resolver nenhuma das questões propostas por Tartaglia.

Outro matemático italiano que estudou as equações de 3º grau foi Cardano, que nasceu em Pavia no ano 1501, e estudou medicina na Universidade de Pádua.

Um incidente bastante controverso marcou esse momento da história da matemática, pois, segundo algumas fontes, Cardano, sob juramento, conseguiu arrancar de Tartaglia a chave para resolver uma equação cúbica e, em 1545, publicou essa resolução em sua obra *Ars Magna*, mesmo sob os protestos de Tartaglia, que foram rebatidos por Ludovico Ferrari, o mais brilhante discípulo de Cardano, que acusava justamente Tartaglia de plágio.

Pouco depois da resolução da cúbica, encontrou-se também a resolução da equação quártica. Em 1540, o matemático italiano Zuanne de Tonini da Coi propôs um problema a Cardano que recaía numa equação quártica. Embora Cardano não tivesse conseguido resolver essa equação, seu discípulo Ferrari o fez, e Cardano publicou essa resolução também em sua obra *Ars Magna*.

Rafael Bombelli, italiano, também contribuiu significativamente para a resolução das equações cúbicas, publicando por volta de 1572 um texto em que, através do que chamou de “idéia louca”, trazia indícios de quanto seria importante futuramente o papel dos números imaginários conjugados para a resolução de equações de terceiro grau.

É indiscutível a contribuição que foi dada para a história da Matemática, particularmente no que se refere à busca pela resolução das equações, por parte dos italianos, pois foi a partir daí que se iniciou a busca pela generalização dessas soluções, ou seja, pela resolução das equações usando-se as mesmas idéias discutidas nessa época, para as equações quínticas e de grau superior a cinco.

Outro autor importante foi François Viète que nasceu em Fontenay-Le-Comte, na França, em 1540, estudou direito em Poitiers, e posteriormente foi juiz instrutor no parlamento da Bretanha. Considerado por muitos como precursor da Álgebra simbólica, foi o primeiro algebrista a demonstrar as vantagens no uso de letras para designar quantidades desconhecidas, ou incógnitas.

Viète ocupava seu tempo livre com a Matemática, para a qual trouxe importantes contribuições. Publicou em 1591 a obra *In Artem Analyticam Isagoge* – Introdução à Arte Analítica – provavelmente seu trabalho mais famoso.

Nessa obra, Viète trata o desenvolvimento do simbolismo algébrico, introduzindo uma convenção extremamente importante para a escrita das equações na forma geral, pois, para representar uma quantidade, supostamente desconhecida ou indeterminada, usava uma vogal, e para representar uma grandeza ou números supostamente conhecidos ou dados, uma consoante.

Contudo, apesar de ter adotado esta simbologia, a Álgebra de Viète consistia fundamentalmente em palavras e abreviaturas, como: x^3, Viète representava por *x cubus*; x^2, ele representava por *x quadratus*; o sinal de =, Viète representava por *aequalis*; a multiplicação, por *in*; a divisão Viète representava por /.

Sua verdadeira paixão foram as equações do 3º grau, às quais se dedicou horas a fio, sendo capaz de ficar três dias sem dormir nem abandonar a sua mesa de trabalho. Em *De numerosa potestatum resolutione*, publicada por volta de 1600, Viète traz um processo sistemático, que esteve em uso até por volta de 1680, para encontrar aproximações sucessivas de uma raiz de uma equação, porém, o método se tornou tão trabalhoso para equações de grau elevado que um matemático do século XVII o descreveu como "impróprio para um cristão".

Outro ponto merecedor de destaque na obra de Viète é a conhecida transformação que acrescenta às equações cúbicas do tipo $x^3 + 3ax = b$, uma nova quantidade desconhecida *y*, que se relaciona a *x* pela equação $y^2 + xy = a$. Com isso, a cúbica em *x* se reduz a uma quadrática em *y*, que pode ser resolvida facilmente.

Além disso, Viète também percebia algumas das relações existentes entre as raízes e os coeficientes de uma equação. Entretanto, ele foi tolhido no desenvolvimento desse estudo em virtude de não aceitar coeficientes ou raízes negativas.

Sem dúvida alguma Viète foi um excelente algebrista, aplicou a Álgebra à Trigonometria e à Geometria. Deu sua parcela de contribuição aos três problemas famosos da Antiguidade quando mostrou que tanto no problema da trisecção do ângulo como no da duplicação do cubo, pairavam idéias relacionadas à resolução de uma cúbica.

Outro matemático que contribuiu significativamente para o desenvolvimento da história das equações foi René Descartes, nascido em 1596, na França. Pode-se dizer que suas maiores contribuições deram-se na continuidade do desenvolvimento da linguagem algébrica, o que possibilitou a construção de seu método cartesiano para resolução de equações.

Esse método pode ser apresentado, resumidamente, dentro das seguintes fases:

- Leitura analítica do enunciado do problema e a redução a uma lista de quantidades e relações entre essas quantidades;
- Escolha de uma quantidade que será representa por uma letra (ou de várias quantidades e várias letras);
- Representação das outras quantidades mediante expressões algébricas que descrevam a relação (aritmética) entre essas quantidades e outras que tenham sido previamente representadas por uma letra ou por uma expressão algébrica;
- Estabelecimento de uma equação (ou várias, se for o caso) igualando-se as expressões obtidas anteriormente.

Descartes começa, a partir daí, a fazer uma outra análise sobre a “sua” Álgebra, pois passa a tomar as próprias equações não mais como um meio de organização de fenômenos, mas no sentido de propor um movimento de matematização vertical, que necessita de novos meios para sua organização.

A partir da idéia: se a é uma raiz da equação, $x - a$ divide o polinômio correspondente, Descartes explora o número de raízes das equações, o efeito que tem sobre as raízes o fato de trocar x por $y - a$, etc. Embora Cardano e Viète já tivessem se debruçado sobre tais idéias, Descartes afirmou que sua Álgebra inicia-se justamente onde parou a de Viète (em sua obra *De emendatione oequatotionum*).

Em sua obra *Geometria* Descartes retoma o método de escrever equações a partir de problemas, utilizando a idéia de supor conhecido o que é desconhecido, continuando o desenvolvimento de seu método no que diz respeito à transformação das equações.

Nesse trabalho Descartes não expõe as regras de transformações das expressões algébricas, pois as dá por conhecidas, o que ele destaca é a forma pela qual se obtém a equação canônica. A forma canônica da equação, escrita da maneira mais geral é:

$$x^n = a_{n-1}x^{n-1} \pm a_{n-2}x^{n-2} \pm \ldots \pm a_2x^2 \pm a_1x \pm a_0$$

Vimos que as formas canônicas estabelecidas por ele não apresentam um polinômio igualado a zero, o que ele o faz mais tarde somente em sua obra, quando trata do que chama "sua álgebra".

Uma diferença entre essa forma e a atual é que na forma canônica atual os monômios estão todos unidos pelo sinal de "mais", diferentemente do que ocorria com Descartes. Para ele as letras representavam coeficientes ou quantidades conhecidas e representavam sempre números positivos. Os monômios estavam unidos pelas operações de adição e subtração, as quais eram concebidas como operações distintas. Descartes admitia ainda a existência de raízes negativas ("falsas").

De forma diferente dos gregos, Descartes rompe com a vinculação geométrica dos nomes das espécies ao mostrar, logo no início de sua obra *Geometria*, que o produto de uma linha por uma linha pode ser representada por outra linha e não como uma superfície, fazendo assim com que as espécies "quadrados" ou "cubos" deixem de ser heterogêneas.

A combinação das letras de Viète – para representar as quantidades desconhecidas (e conhecidas) – com os números de Chuquet e Bombelli – para representar as espécies – foi necessária para que ambas as categorias estivessem representadas de maneira diferenciada e eficiente para o cálculo sintático, possibilitando assim que se fechasse um sistema de signos para a álgebra simbólica, sistema esse utilizado por Descartes e, posteriormente, por Euler.

Leonhard Euler nasceu na Suíça em 1707. Ao contrário de muitos outros matemáticos, ele não se importava em publicar e divulgar todas as suas descobertas, que não foram poucas. Estima-se que esse brilhante matemático tenha escrito em torno de 800 obras em vida, aventurando-se em quase todos os campos da Matemática: da Álgebra à Geometria, da Teoria dos Números à Teoria das Probabilidades, passando pelo Cálculo, Mecânica, Óptica e Topologia.

Para a Álgebra, e mais especificamente para as equações, Euler deu grandes contribuições, como:

- Suas escolhas dentre a simbologia (notação) matemática existente em sua época foram estabelecidas universalmente e suas criações, como o *ƒ(x)* para funções, e ***e*** para base dos logaritmos naturais, também;
- Partindo de um problema sobre a idéia de juros compostos, Euler chegou à conclusão que o referido problema levava ao que conhecemos hoje pelo número *e*, definido por: $e = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$;
- Em relação aos números complexos demonstrou a veracidade da fórmula: $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, que para $x = \pi$, se transforma em: $e^{i\pi} + 1 = 0$, igualdade que relaciona cinco dos mais importantes números da matemática.

Seu trabalho com os números complexos desempenhou um papel muito importante na teoria das equações algébricas, pois, quando buscava resposta à questão de como extrair uma raiz enésima de um número complexo, Euler descobriu que **qualquer número complexo não nulo (inclusive os reais) tem exatamente n raízes enésimas**.

Esse resultado aguçou os ânimos de muitos matemáticos da época, pois desde à época de Cardano já se sabia que as equações de 3º grau tinham 3 raízes e as de 4º grau, 4. Com os resultados descobertos por Euler, muitos passaram a fazer conjecturas, sem conseguir provar que as equações polinomiais de grau *n* tinham exatamente *n* raízes.

Carl Friedrich Gauss nasceu em 1777 na Alemanha e foi desde criança um apaixonado pela Matemática e notável em seus feitos. Ao estilo de outros matemáticos antigos, como Newton, Gauss não publicou praticamente nada do que descobriu em vida, contudo, sua imensa contribuição para a Matemática se deu postumamente com a publicação de um diário de 19 páginas, que continha descobertas em praticamente todas os campos da Matemática, principalmente na Teoria dos Números, a qual denominava de "a rainha das matemáticas".

Sua maior contribuição para a teoria das equações foi a primeira demonstração plenamente satisfatória que deu para o **Teorema Fundamental da Álgebra – toda equação polinomial com coeficientes reais ou complexos e de grau *n*, *n* > 0, tem pelo menos uma raiz complexa –** demonstração está produzida em sua tese de doutoramento em Matemática.

Tal demonstração tinha por trás a idéia de que, substituindo-se z na equação polinomial geral $f(z) = 0$ por $x + i\,y$, pode-se separar a equação em duas partes, real e imaginária, e a equação resultante fornece duas equações reais $g(x,y) = 0$ e $h(x,y) = 0$ nas variáveis reais x e y. Gauss mostrou que os gráficos cartesianos de $g(x,y) = 0$ e $h(x,y) = 0$ sempre têm um ponto real comum (a,b) e segue-se que $a + bi$ é uma raiz complexa de $f(z) = 0$.

A demonstração acima envolvia considerações geométricas. Assim, Gauss publicou anos depois mais três demonstrações para esse teorema, pois ele continuava na busca por uma demonstração inteiramente algébrica.

Ao demonstrar que as equações polinomiais de grau n têm ao menos uma raiz complexa, Gauss demonstrou que **elas têm exatamente *n* raízes, sendo *n* o grau do respectivo polinômio**. Utilizando-se a raiz complexa encontrada, conhecimentos de álgebra elementar, através de divisão de polinômios e números binomiais, consegue-se reescrever o polinômio original por outro de grau n-1 e aplica-se o resultado do teorema novamente, verificando-se que o polinômio original tem exatamente n raízes.

A partir da demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra podem ser deduzidas relações muito importantes entre os coeficientes e as raízes de qualquer equação algébrica, como por exemplo, que **toda equação polinomial de coeficientes reais e de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real**, pois como a equação tem exatamente n raízes e n é impar, sabendo-se que as raízes complexas sempre aparecem aos pares, pelo menos uma raiz é real.

Outro resultado importante para o estudo das equações algébricas, embasado no teorema fundamental da álgebra, foi o Teorema de Bolzano, matemático tcheco que viveu na mesma época que Gauss: **Dados uma equação algébrica de coeficientes reais em sua forma canônica, *P(x)* = 0, e dois números reais *a* e *b* (a<b), se P(a) e P(b) tiverem o mesmo sinal, o número de raízes reais da equação (eventualmente repetidas) será par dentro do intervalo (a,b); se P(a) e P(b) tiverem sinais opostos, o número de raízes reais da equação (eventualmente as repetidas) será ímpar dentro do intervalo (a,b)**.

Observa-se que, além da significativa contribuição que Gauss deu à teoria das equações, suas descobertas levaram ao progresso e desenvolvimento de outras idéias por parte de outros grandes matemáticos da época que ainda estavam por vir. Gauss morreu em 1855, na Alemanha mesmo, de onde nunca saiu sequer para divulgar suas descobertas e debater suas idéias.

Desde que as equações cúbicas e quárticas foram resolvidas no século XVI, as quínticas vinham sendo objeto de estudo e pesquisa por diversos matemáticos, desde Bombelli até Viète.

Niels Henrik Abel (1802-1829), ainda enquanto estudante na Noruega, pensou ter encontrado a solução geral das equações quínticas, contudo, ele mesmo percebeu um erro em sua demonstração e, em 1824, publicou o artigo “Sobre a resolução de equações algébricas”, no qual deu a primeira prova de que era impossível estabelecer a solução da equação quíntica por meio de radicais.

O fato de que Abel imaginou ter encontrado a solução para a equação geral quíntica acabou se tornando muito importante, pois foi a partir de uma sugestão que ele recebeu de Ferdinand Degen, matemático escandinavo para o qual sua suposta solução foi enviada para análise, que Abel se debruçou sobre o estudo das Funções Elípticas, que já haviam sido estudadas anteriormente por Legendre.

Apesar de morrer muito jovem, Abel contribuiu de maneira significativa para a Matemática, perpetuando seu nome em diversos teoremas e teorias, dentre eles, o dos grupos abelianos.

Ao mesmo tempo em que Abel buscava a solução das equações quínticas, outro grande matemático, o francês Évariste Galois (1811-1832) também o fazia. O objetivo principal das pesquisas de Galois era justamente o de determinar quando as equações polinomiais eram resolúveis por radicais.

Ainda, aos dezessete anos de idade, Galois cometeu o mesmo erro que Abel, pois imaginou ter encontrado a solução geral para as equações do 5º grau. Logo em seguida publicou o artigo "Pesquisas sobre as equações algébricas de grau primo", no qual apareciam indícios daquela que seria sua maior contribuição para a Álgebra, a Teoria dos Grupos.

Galois vislumbrou os alicerces de uma forma revolucionária de se abordar as equações algébricas. Inspirado pela prova de Abel – sobre a irresolubilidade por radicais das equações quínticas –, e nos trabalhos de Lagrange – sobre as permutações das raízes de uma equação polinomial –, Galois desenvolveu a teoria dos grupos, que permite investigar a possibilidade de resolução das equações quinticas, por meio de radicais.

A teoria de Galois fornece um método para determinar se as raízes de uma equação algébrica podem ser expressas por radicais, contudo, a ênfase dada por esse método na teoria das equações geralmente se volta mais para a estrutura algébrica do que para o tratamento de casos específicos.

Podemos concluir que nesse período da história das equações, assim como já havia ocorrido com os árabes e hindus, principalmente com al-Khwarizmi, as equações eram vistas dentro de um sistema **estrutural** com propriedades e características definidas.

A **noção de equação** nesse período, até a resolução das cúbicas e quartícas, é considerada um objeto de investigação, pois as operações são levadas a cabo sobre elas mesmas, debruçando-se na **busca** de **soluções gerais** para esses tipos de equações. Isso é uma característica que diferencia a maneira que a mesma era concebida pelos babilônios ou egípcios, por exemplo.

Percebemos que Descartes, quando da utilização de seu método cartesiano, passou a considerar as equações não mais como um meio de organização de fenômenos, mas sim como um campo de objetos que necessitava de novos meios para sua organização.

Outro momento importante ocorreu quando da descoberta das fórmulas gerais para a resolução das equações de terceiro e quarto graus, pois a partir daí, ocorreu uma modificação no rumo das investigações: a pergunta investigada deixou de ser qual era o algoritmo de resolução da forma canônica para: será que existe tal algoritmo e quais são as condições para sua existência.

Para a resposta dessa nova questão, as equações continuaram sendo tratadas com o mesmo caráter apresentado acima. Vimos em Abel e Galois, por exemplo, que o que se tornou objeto de investigação foi a estrutura do processo de resolução das equações, o que possibilitou demonstrar que não existia um algoritmo capaz de resolver, por meio de radicais, as equações de grau superior a quatro.

3.6 Um panorama geral

A história da Matemática, por um lado, foi construída por contribuições advindas da história das equações. Atualmente, as grandes áreas em que a Matemática está dividida tiveram origem, em boa parte, por problemas envolvendo a busca pela solução de equações dos tipos mais variados.

Percebemos ao longo da apresentação deste estudo epistemológico-histórico, as diferentes maneiras como a noção de equação foi concebida e tratada pelos estudiosos em cada época histórica. Resumidamente, temos:

- **Babilônios e Egípcios:** trabalhavam com **equações** que em sua maior parte eram originárias de **problemas** de **ordem prática**. A **noção de equação** tinha basicamente um **caráter pragmático**, que, de **forma intuitiva**, igualava duas quantidades, com a finalidade de encontrar o valor da quantidade desconhecida. Na maior parte das vezes, a **busca pelas soluções** estava relacionada a **equações particulares**, para resolver **problemas específicos** e os **métodos** utilizados estavam relacionados a **idéias aritméticas** sem a preocupação de se encontrar soluções gerais;

- **Gregos:** para eles as **equações** já eram concebidas de maneira diferente dos babilônios e egípcios, pois **não** estavam procurando resolver equações que tinham sido originadas de **problemas** de **ordem prática**. A **noção de equação** contemplava um caráter geométrico e de **forma dedutiva**, a resolução repousava em manipulações geométricas. Percebe-se que mesmo com a **mudança de concepção** acerca da álgebra nesse período – de **aritmética**, nos **babilônios e egípcios**, para **geométrica**, nos **gregos** – a **busca pelas soluções ainda** estavam relacionadas a **equações particulares** e não a métodos gerais;

- **Árabes e Hindus:** trabalhavam tanto com **equações originárias** de **problemas** de **ordem prática**, quanto com **situações** que recaiam em interpretações e manipulações **geométricas**. A **noção de equação** já tinha um **caráter mais algébrico**, **mais generalista**, pois passava de um catálogo de expressões que se sabe resolver para um catálogo de todas as formas canônicas possíveis. Percebemos uma **preocupação** na **busca de formas canônicas**, como fez **al-Khwarizmi** ao estabelecer todas as possibilidades para o que conhecemos por trinômios de grau não superior a dois. Por outro lado, **Khayyam** já tinha uma **concepção de equação** mais relacionada a um **caráter geométrico**, interpretando as soluções das **equações** como a intersecção de **curvas geométricas**.

- **Europeus: equações** eram vistas dentro de um sistema **estrutural** com propriedades e características bastante definidas. A equação é considerada em si própria, operando-se sobre ela mesma, com a **finalidade** de se encontrar **soluções gerais**. Após a descoberta das formulas gerais para a resolução das equações de terceiro e quarto graus, há uma modificação no rumo das investigações, a nova questão que norteia as investigações passa para: será que existe algoritmo para resolver equações com grau superior a quatro? Nessa nova direção, as equações continuaram sendo tratadas com o mesmo caráter estrutural, até que Galois encerra a discussão fornecendo condições de se decidir quando essas equações são solúveis por radicais.

O estudo das equações algébricas contribui de forma significativa para o aparecimento da chamada Álgebra Moderna (teoria dos grupos, teoria dos corpos, etc.). A preocupação com as estruturas e o surgimento de novos ramos da Álgebra, principalmente durante a segunda metade do século XIX, levaram a ampla generalização, tanto do conceito de número, quanto do conceito de Aritmética.

É possível verificar, por este estudo epistemológico-histórico, que durante muitos séculos o principal objeto de investigação em Álgebra foi o estudo das equações algébricas.

Porém, constata-se também com este mesmo estudo que, no final do século XIX, esse objeto de investigação deixou de ser o foco de atenções dos matemáticos, conforme observam FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL no trecho abaixo:

> (...) o objeto de investigação desse campo matemático ultrapassava o domínio exclusivo do estudo das equações algébricas e das operações clássicas sobre quantidades generalizadas, discretas ou contínuas, para centrar-se no estudo das operações (...) sobre objetos abstratos, (...) sobre as estruturas matemáticas tais como grupos, anéis, corpos, etc. (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL 1993, p. 78)

Assim, considerando-se que houve ao longo da história da Álgebra, uma mudança significativa na natureza do objeto de investigação desse campo de conhecimento matemático – o estudo das equações perde o foco de atenção dos matemáticos para o estudo das estruturas matemáticas – podemos dizer que tivemos dois grandes momentos históricos: antes dessa mudança tínhamos o que é denominado por Álgebra Clássica ou Elementar e, depois, o que é chamado de Álgebra Moderna ou Abstrata.

A conclusão que emana das reflexões propiciadas por esse estudo epistemológico-histórico, a qual contribui fortemente para chegar ao objetivo desta pesquisa é de que: **Após ter permanecido como objeto de investigação da Álgebra até o final do século XIX, o estudo das equações nesse período parecia enfatizar:**

- **Por um lado, os aspectos procedimentais e técnicos, quando da resolução de equações particulares;**
- **Por outro, os aspectos estruturais, quando da busca de fórmulas gerais para se resolver toda uma classe de equações.**

Nesse sentido, emerge desse estudo epistemológico-histórico, ao menos três formas diferentes de se enfocar equação: uma relacionada a um caráter pragmático, outra relacionada a um caráter geométrico e uma terceira relacionada a aspectos estruturais.

Para compreender e incorporar as idéias que surgiram do estudo epistemológico-histórico realizado, acredito que seja importante passar a um estudo da noção de equação envolvendo o ensino da Matemática. Essa etapa será desenvolvida no próximo capítulo, onde investigo *se* e *como* a noção de equação é apresentada na literatura nacional e internacional na área de Matemática e Educação Matemática.

3.7 As equações ao longo do tempo

A seguir apresento um quadro resumo da "linha do tempo" do desenvolvimento dos conhecimentos e teorias acerca da noção de equação.

Época	Fato
Por volta de 1950 a.C.	Babilônios resolvem problemas envolvendo equações quadráticas.
Por volta de 1750 a.C.	Os Babilônios compilam tabelas de raízes quadradas e cúbicas. Usam o Teorema de Pitágoras e a Matemática para ampliar o conhecimento sobre a Astronomia.
Por volta de 1650 a.C.	O Papiro de Rhind é escrito, mostrando que os Egípcios desenvolveram inúmeras técnicas para se resolver problemas equivalentes a equações e problemas geométricos envolvendo o cálculo de volumes e áreas.
575 a.C.	Tales leva o conhecimento matemático Babilônico até a Grécia.
530 a.C.	Pitágoras de Samos emigra para Crotona no sul da Itália e funda a escola pitagórica que além de ser um centro de estudos de geometria, música, filosofia e ciências naturais, era também uma irmandade estreitamente unida por ritos secretos e cerimônias.
Por volta de 400 a.C.	Os Babilônios usam um símbolo para indicar um espaço vazio no seu sistema de numeração. Não há nenhuma indicação de que este símbolo foi concebido como um número.
Ano 0	Nascimento de Jesus Cristo
250	Diofanto de Alexandria escreve *Arithmetica*, um estudo de problemas em teoria dos números em que apenas números racionais são permitidos como solução.
628	Brahmagupta escreve *Brahmasphutasiddanta* , um trabalho sobre astronomia e matemática. Ele usa o zero e números negativos, fornece métodos para resolver equações quadráticas e calcular raízes quadradas.
746	Aryabhata produz seu tratado *Aryabhatiya* sobre equações quadráticas, o valor de π e outros problemas.

Época	Fato
Por volta de 810	al-Khwarizmi escreve importantes tratados sobre aritmética, álgebra, geografia e astronomia. Em um deles, *Ilm al-jabr Wa al Muqabala* a palavra "al-jabr" é usada, posteriormente dando origem à "álgebra". De seu nome al-Khwarizmi, como uma conseqüência de seu método, originou-se a palavra "algoritmo".
Por volta de 810	A Casa da Sabedoria é construída em Bagdá, sendo lá traduzidos para o árabe, tratados de matemática grega e hindu.
1072	al-Khayyami (conhecido como Omar Khayyam) escreve tratado sobre demonstrações de problemas da Álgebra, que contém uma classificação completa das equações cúbicas com soluções geométricas encontradas por meio de interseções de seções cônicas.
Por volta de 1140	Bháskara II escreve *Lilavati* (A Beleza) sobre Aritmética e Geometria.
1515	Del Ferro descobre um método para resolver equações cúbicas.
1535	Tartaglia resolve a equação cúbica independente de del Ferro.
1540	Ferrari descobre um método para resolver equações de grau quatro.
1545	Cardan publica a *Ars Magna* fornecendo uma fórmula que resolve qualquer equação cúbica, baseado nos trabalhos de Tartaglia e uma fórmula para equações de grau quatro, descoberta por Ferrari.
1572	Bombelli publica a primeira das três partes de sua *Algebra*. Ele é o primeiro que fornece regras para calcular com complexos.
1591	Viète publica a obra *In Artem Analyticam Isagoge*, que trata do desenvolvimento do simbolismo algébrico, usando vogal e consoantes para representar quantidades.

Época	Fato
1637	Descartes publica *La Géométrie* que descreve sua aplicação da álgebra aos problemas de geometria.
1735	Euler introduz a notação f(x).
1748	Euler publica *Analysis Infinitorum,* que é uma introdução à Análise Matemática. Ele define o conceito de função e diz que a Análise Matemática é o estudo das funções. Esse trabalho tem como base a teoria das funções elementares em vez de curvas geométricas, como havia sendo feito até então. A famosa formula $e^{i\pi} = -1$ aparece pela primeira vez neste texto.
1799	Gauss prova o Teorema Fundamental da Álgebra e observa que provas anteriores incorretas desse resultado, como a de d'Alembert de 1746, poderiam ser facilmente corrigidas.
1799	Ruffini publica a primeira prova de que equações algébricas de grau maior do que quatro não são todas solúveis por radicais. O trabalho foi ignorado, assim como as provas posteriores que ele publicaria em 1803, 1808 e 1813.
1824	Abel publica sobre a resolução de equações algébricas, dá a primeira prova sobre a impossibilidade de resolver quínticas, por meio de radicais.
1829	Galois, baseando-se nos trabalhos de Abel e Lagrange, publica seu trabalho que mostra que não existe um método geral de solução para equações quínticas. Seu método, utilizando as idéias de grupos, permite investigar quando uma equação quíntica é solúvel por radicais.
1846	Liouville publica os trabalhos de Galois sobre a solução de equações algébricas em seu *journal*.
1995	Wiles demonstra o último teorema de Fermat.

Capítulo IV

Discutindo o Argumento da Pesquisa

4.1 Introdução

Tendo em vista meu objetivo nesta pesquisa – investigar os significados da noção de equação no ensino da Matemática – passo agora a desenvolver uma análise no âmbito do ensino de Matemática acerca dessa noção.

Nesse sentido, inicio o presente estudo tecendo algumas considerações a respeito da idéia que tinha até então sobre a noção de equação. Esta apresentação tem a intenção de iniciar uma discussão e reflexão sobre as diversas maneiras como essa noção é concebida na comunidade acadêmico-científica.

Em primeiro lugar, para mim, até há alguns anos atrás, equação era “algo” da Matemática que deveria ser resolvido, segundo alguns procedimentos e regras, com a finalidade de se encontrar o valor de “x”.

Outro fato que me despertou a atenção era que uma **expressão algébrica** era uma expressão com letras, números e um sinal de igualdade ou desigualdade, enquanto uma **equação** seria uma igualdade constituída de uma expressão algébrica onde um dos membros da igualdade, normalmente o segundo, era <u>obrigatoriamente</u> igual a zero.

Essa idéia de equação remonta meus primeiros anos de estudo, e nunca foi questionada por mim até então, pois afinal, o que importava era o fato de saber resolvê-la, de conhecer as regras e procedimentos que eram necessários para encontrar sua solução.

Mais recentemente, durante meus estudos na pós-graduação, bem como durante a realização de minha pesquisa de mestrado, comecei a me questionar a respeito de indagações que nunca haviam me incomodado anteriormente, como: Qual a idéia que fazia de equação? Qual a utilidade e aplicação desse termo intra e extra Matemática? O que é importante no ensino de equações, além do ensino de regras e procedimentos para a sua resolução?

Com isso, meus anseios e perspectivas em relação a esta pesquisa caminham no sentido de investigar quais os significados para equação que possam ser concebidos no ensino da Matemática. A meu ver, não podemos limitar o estudo das equações aos seus procedimentos e técnicas de resolução, se desejamos que os estudantes sejam capazes de utilizar essa idéia matemática de forma significativa, para, por exemplo, modelizar um problema e encontrar sua resposta, ou seja, resolver o problema.

Assim, considerando o meu objetivo nesta pesquisa e baseando-me nos estudos e leituras feitas até o presente momento, eis o argumento que venho construindo em minha tese, o qual fundamento a defesa com os resultados finais apresentados no último capítulo desse trabalho:

Embora não seja um objeto do saber, a noção de equação possui vários significados e deve tomar lugar junto aos objetos de ensino.

Esse argumento que defendo leva em conta, prioritariamente, o estudo epistemológico realizado, através do qual foi possível constatar os diversos significados que as civilizações antigas atribuíam à noção de equação. É importante lembrar que uma equação pode significar diferentes coisas dependendo do contexto em que ela está inserida. Por exemplo, a equação x+y=2, representa uma reta no plano e representa, ao mesmo tempo, um plano no espaço.

Com o estudo bibliográfico realizado em âmbito do ensino da Matemática, que trago para discussão a seguir, apresento fundamentos que justificam o argumento defendido nesta pesquisa, e que levantam elementos que conduzem na direção de se alcançar o objetivo já anunciado para a mesma.

Apresento então, a seguir, fragmentos de textos que revelam a concepção veiculada por seus autores, acompanhado por uma caracterização da obra analisada. Essa caracterização tem o intuito de auxiliar na compreensão da concepção veiculada, ou por que a mesma não ser apresentada em determinadas obras.

Procuro levantar também algumas comparações entre as diversas obras estudadas e apresentar algumas reflexões sobre o que essas obras trazem em seu bojo. Além disso, discuto as presentes obras sob à luz dos fundamentos teóricos que dão suporte a esta pesquisa.

4.2 Algumas "idéias" sobre a noção de equação na literatura

Dentre as leituras feitas, e mais especificamente no que diz respeito à noção de equação, encontrei algumas definições e considerações apresentadas por especialistas da área de Matemática e de Educação Matemática que subsidiam o desenvolvimento desta pesquisa.

O material bibliográfico utilizado como fonte desta pesquisa é composto por livros de fundamentos da Matemática, dicionários matemáticos e etimológicos, artigos científicos na área da Educação Matemática e livros didáticos nacionais e internacionais. A ordem de apresentação dessas obras segue a cronologia de publicação, procurando levar em conta a publicação de sua primeira edição.

Inicio o presente estudo, apresentando as "idéias" discutidas em:

- Três livros de Fundamentos da Matemática: Caraça (2003 – 1ª edição 1941), Garding (1997) e Rogalski (2001);
- Quatro dicionários matemáticos: James (1943), Chambadal (1969), Warusfel (1969) e Süggakai (1977);
- Dois dicionários etimológicos: Ferreira (1999) e Houaiss & Villar (2001);
- Três artigos científicos: Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), Iiris Attorps (2003) e Ponte (2004);
- Dez livros didáticos: Bos (1893), Bourdon (1897), van der Waerden (1991 – 1ª edição 1930), Caraça (1954 – 1ª edição 1935), Bourbaki

(1970), Tsipkin (1985 – 1ª edição 1979), Giovanni & Giovanni Jr (2000), Di Piero Neto & Soares (2002), Imenes & Lellis (2002) e Pires, Curi e Pietropaolo (2002). Vale ressaltar que, esses quatro últimos livros didáticos foram escolhidos, dentre outros, por fazerem parte do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) do Ministério da Educação e Cultura, no ano de 2005.

Inicio a apresentação dos livros de Fundamentos da Matemática por Bento de Jesus Caraça, professor português, com sua obra, *Conceitos Fundamentais da Matemática*.

Essa obra caracteriza-se, em parte, pela apresentação de justificativas para os problemas próprios da Matemática, e também pela discussão de fundamentos da Matemática que estão ligados a problemas da vida social. O autor acredita que, se a Matemática é vista por esse segundo prisma, é possível ver toda a influência que a mesma recebe do ambiente da vida social em que está inserida.

Nela, Caraça não traz definição para o termo equação, mas, define equação algébrica como sendo:

> Toda igualdade da forma $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + ... + a_n = 0$; n, número inteiro e positivo, chama-se grau da equação; à variável x chama-se incógnita e aos números $a_0, a_1, ... , a_n$, coeficientes da equação. (CARAÇA, 2003, p 144)

Logo a seguir, Caraça apresenta em sua obra o que entende por raiz da equação, que é: *todo número α tal que $a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + ... + a_{n-1}\alpha + ... + a_n \equiv 0$* (CARAÇA, 2003, p 144), afirmando claramente que: *o problema fundamental da teoria das equações algébricas é a determinação de suas raízes, ou seja, a resolução da equação* (CARAÇA, 2003, p 144).

Lars Garding, matemático suíço, traçou em sua obra *Encontro com a Matemática*, uma tentativa de fornecer uma moldura histórica, científica e cultural para os assuntos da Matemática encontrados num primeiro ano do curso de Matemática, ou por alunos que já têm algum conhecimento matemático.

O autor trata do tema equações num capítulo dedicado à Álgebra, mais especificamente, na parte intitulada de “Teoria das Equações” e apresenta alguns tipos de equação, da seguinte forma:

> Vamos escrever equações do primeiro, segundo e terceiro graus deste modo:
>
> $$x + a = 0$$
> $$x^2 + ax + b = 0$$
> $$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$
>
> Em todos os casos os coeficientes a, b, c são números racionais, reais e até mesmo complexos e o problema é achar as raízes, isto é, todos os números *x* que satisfaçam a equação.(GARDING, 1997, p. 28)

Acredito ser importante levantar aqui a forma como ele apresenta as equações. Essa é a maneira como eu concebia equação até algum tempo atrás, como ilustrei no início deste capítulo e corrobora a interpretação operacional de expressões algébricas, quando da tentativa de sempre procurar deixar o segundo membro da expressão, no caso uma equação, igualado a zero.

A obra analisada de Marc Rogalski, matemático francês, é *Carrefours entre ANALYSE, ALGÈBRE, GÉOMETRIE*, que tem por objetivo discutir temas matemáticos com candidatos aos concursos d´Agrégration e de CAPES de Mathématiques (semelhantes ao nosso ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio), sendo que esses concursos na França selecionam alunos para instituições de ensino superior. Ele recomenda o uso de sua obra com estudantes do 2º ano d´IUFM (formação de professores), e ainda, com estudantes do Lycée, correspondente ao Ensino Médio brasileiro, e do Collège, correspondente aos 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental.

Nela o autor declara que não concebe equação como um objeto da Matemática, ao contrário, por exemplo, de função, triângulo, integral ou grupo. Ele acredita que: “o termo equação é evocado **quando existe a intenção, por parte de alguém, de se resolver um certo tipo de problema”.** (ROGALSKI, 2001, p. 18)

De um modo bastante preciso e formal, ele apresenta qual o tipo de problema que acaba por evocar a palavra “equação”:

> Seja f: E $\rightarrow$ F uma aplicação, e y um elemento de F. Dizemos que queremos resolver a **equação** ($e_{f,y}$), e notamos ($e_{f,y}$): **f(x) = y**, **quando estamos a procura** de um elemento x de E cuja imagem por f é y (podemos dizer que estamos a procura de um antecedente x de y). Dizemos que x é a **incógnita**, e que y é **dado**. Um elemento x de E que responde à questão é chamado de uma **solução** da equação. Quando o dado y está destinado a variar em F, satisfazemo-nos algumas vezes em notar (e_f) a equação f(x) = y; quando não há risco de ambigüidade, satisfazemo-nos algumas vezes em notar (e) uma tal equação. **Uma equação está assim ligada a uma aplicação f** e, portanto a dois conjuntos E e F: y é dado em F, e procuramos a incógnita x em E. (ROGALSKI, 2001, p. 18)[11]

Segundo esse autor, com essa noção bastante geral de equação, pode-se unificar, generalizar e formalizar numerosos exemplos de equações já discutidas e adotadas em inúmeras situações.

O principal interesse dessa noção é poder englobar, sob um mesmo formalismo, equações muito diferentes, cujas incógnitas podem ser números (inteiros, reais, complexos,...), funções (contínuas, deriváveis, reais, complexas,...), polinômios, seqüências numéricas, ou até mesmo aplicações ou conjuntos quaisquer.

Discuto agora as idéias sobre equações encontradas em dicionários matemáticos, começando por Glenn James, professor da Universidade da Califórnia, cuja obra *Mathematics Dictionary* é dedicada a discutir e apresentar idéias essenciais da Matemática em suas diversas áreas, como Aritmética, Álgebra, Trigonometria, Geometria e Cálculo e é indicada também a estudantes

[11] Soit f: E $\rightarrow$ F une application, et y un élément de F. On dit qu´on veut résoudre l´**équation** ($e_{f,y}$), et on note **($e_{f,y}$): f(x) = y**, **lorqu´on recherche** un élément x de E dont l´image par f est y (on peut aussi dire qu´on recherche un antécédent x de y). On dit que x est l´**inconnue**, et que y est **donné**. Un élément x de E qui répond à la question est dit une **solution** de l´équaton. Lorsque la donée y est destinée à varier dans F, on se contente parfois de noter (e_f) l´équation f(x) = y; lorsqu´il n´y a pas de risque d´ambigüité, on se contente parfois de noter (e) une telle équation. **Une équation est donc attachée à une application f**, donc à 2 ensembles E et F; y est donée dans F, et on cherche l´inconnue x dans E.

de Matemática que estejam buscando entender seus conceitos e suas aplicações.

Nela, James apresenta a definição abaixo para o termo equação:

> Uma afirmação de igualdade entre duas quantidades. Equações são de dois tipos, *identidades* e equações *condicionais* (ou usualmente, simplesmente *equações*). Uma *equação condicional* é verdadeira somente para certos valores das quantidades desconhecidas envolvidas. (JAMES, 1943, p. 93)[12]

Lucien Chambadal, professor universitário, em seu *Dictionaire des Mathématiques Moderns* apresenta a seguinte definição para equação:

> Seja *f* e *g* duas aplicações de um conjunto E em um conjunto F. A relação $f(x) = g(x)$ (1) é chamada *equação*, e o elemento *x* de E *incógnita*. Todo elemento *x* de E para o qual a relação (1) é válida chama-se *solução* da equação (1). A pesquisa do conjunto das soluções chama-se *resolução* da equação (1) (...).(CHAMBADAL, 1969, p. 89)[13]

Em seu *Dictionnaire Raisonné de Mathémathiques*, André Warusfel, matemático francês, traz como objetivo fazer uma mediação entre a Matemática Clássica e a Matemática Contemporânea. Seu dicionário, que na verdade parece mais um manual, apresenta também orientações de cunho didático além de definições. Segundo o autor, sua obra é recomendada para estudantes iniciantes no ensino superior, bem como para aqueles que estão se preparando para entrar nas grandes universidades.

Nessa obra o autor traz a seguinte explicação quando se refere ao termo equação:

> Problema que consiste em procurar, em um conjunto *E*, os elementos *x* que satisfazem a uma relação *R(x)*; *x* é a **incógnita**, e x_i, tal que $R(x_i)$, é um valor aceitável para a incógnita se $x_i \in E$. Sob essa forma, o problema é

---

[12] A statement of equality between two quantities. Equations are of two types, *identities* and *conditional* equations (or usually simply *equations*). A *conditional equation* is true only for certain values of the unknown quantities involved.

[13] Soient *f* et *g* deux applications d´un ensemble E dans un ensemble F. La relation $f(x) = g(x)$ (1) s´appelle *équation*, et l´élément *x* de E *inconnue*. Tout élément *x* de E pour lequel la relation (1) est vraie s´appelle *solution* de l´équation (1). La recherche de l´ensemble des solutions s´appelle *résolution* de l´équation (1).

> muito amplo, e, por exemplo, contém os conceitos de **inequação** numérica e de pesquisa do lugar geométrico. Também se reserva, geralmente, o nome de equação ao caso particular onde $E = R$, C, R^n ou C^n , e onde $R(x)$ pode ser escrita na forma: $f(x) = 0$ (...) **Resolver** uma equação é encontrar todas as raízes dela, e se necessário determinar a ordem de cada uma. (WARUSFEL, 1969, p. 168)[14]

Nihon Sügakkai, matemático japonês, em sua obra *Encyclopedic Dictionary of Mathematics* apresenta definições de termos matemáticos, sem trazer outros tipos de indicações ou orientações, de forma que sua obra funciona realmente como um dicionário, entretanto, não apresenta definição para o termo equação, porém, traz a seguinte definição para equação algébrica:

> Sejam $F_1 (x_1, ... , x_m), ... , F_r (x_1, ... , x_m)$ os r polinômios em m variáveis $x_1, ... , x_m$, sobre um corpo K. Então, as equações $F_1=0, ... , F_r=0$, são chamadas equações algébricas em m incógnitas.
>
> (...)
>
> Por várias razões, é importante considerar uma equação na forma $f(x)=0$, onde $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n, a \neq 0$. Isso dá a forma geral da equação algébrica em uma incógnita. (SÜGAKKAI, 1977, p. 38)[15]

Acredito ser pertinente destacar o fato de Sügakkai não apresentar uma definição para equação e nem discutir ou enfatizar aspectos sobre a resolução de equações, aliás, algo que a meu ver, nem seria adequado para sua obra, visto que se trata de um dicionário.

Contudo, ressalto que ele, ao longo de seu dicionário, apresenta definições para tipos específicos de equação, como equação algébrica, equação diferencial, entre outras.

---

[14] Problème consistant à rechercher, dans um ensemble *E*, les éléments *x* satisfaisant à une relation *R(x)*; *x* est l´**inconnue**, et x_i tel que $R(x_i)$ est une valeur acceptable pour l´inconnue si $x_i \in E$. Sous cette forme, le problème est très large, et contient les concepts d´**inéquation** numérique et de recherche de lieu géométrique, par exemple. Aussi réservet-on généralement le nom d´équation au cas particulier où $E = R$, C, R^n ou C^n, et où $R(x)$ peut s´écrire sous la forme: $f(x) = 0$ (...) **Résoudre** une équation, c´est trouver toutes les racines de celle-ci, et au besoin déterminer l´ordre de chacune.

[15] Let $F_1 (x_1, ... , x_m), ... , F_r (x_1, ... , x_m)$ be *r* polynomials in *m* variables $x_1, ... , x_m$ over a field *k*. Then the equations $F_1 = 0, ... , F_r = 0$ are called **algebraic equations in** *m* **unknowns**. (...) For the above reason, it is important to consider an equation of the form $f(x)=0$, where $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n,\ a \neq 0$. This gives the general form of an algebraic equation in one unknown.

Julgo ser importante também investigar como dicionários da língua portuguesa apresentam a idéia de equação. O *Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa*, de Aurélio Buarque de Holanda Ferreira traz a seguinte definição para equação:

> Qualquer igualdade entre seres matemáticos que só é satisfeita para alguns valores dos respectivos domínios. (FERREIRA 1999, p. 781)

Outro dicionário da língua portuguesa apresentado é o de Antonio Houaiss e Mauro de Sales Villar: *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa*, que traz a seguinte definição para equação:

> **1** Igualdade entre duas expressões matemáticas que se verifica para determinados valores das variáveis (HOUAISS & VILLAR 2001, p. 1182).

Observa-se que nos dicionários da língua portuguesa analisados são apresentadas definições para a noção de equação, definições essas que recorrem à noção de igualdade entre expressões matemáticas e a noção de incógnita.

Passarei a seguir a apresentar artigos que trazem discussões em relação à idéia de equação presentes em obras matemáticas, artigos esses que foram escritos por pesquisadores em Educação Matemática aqui no Brasil, em Portugal e na Suécia.

O artigo científico: *Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo?* de Antonio Miguel, Dario Fiorentini e Maria Ângela Miorim, pesquisadores brasileiros na área de Educação Matemática, publicado em 1992, tem por objetivo discutir a atitude oscilatória em relação ao ensino da Álgebra e da Geometria ao longo da história da educação brasileira, enfatiza as características bastante diversas para as duas idéias de equação apresentadas acima: *"A exacerbação da preocupação fundamentalista com o rigor no ensino da Álgebra pode ser percebida através da comparação das seguintes definições de "equação", a primeira bastante comum no ensino "antigo" e a segunda representativa do ensino "moderno" da Álgebra"*. (MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992, p. 47)

Nele os autores trazem as seguintes idéias sobre equação:

> Equação é toda igualdade que exprime uma relação entre as quantidades conhecidas e desconhecidas de um problema sendo as quantidades conhecidas, os dados do problema ou da equação e as quantidades desconhecidas as incógnitas. (PÉREZ y MARIN, 1928 apud MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992, p. 47)
>
> A toda sentença aberta, que encerra a relação de igualdade e que se torna verdadeira para determinados valores das variáveis, dá-se o nome de equação. Para que as sentenças se tornem verdadeiras é necessário que se dê às variáveis valores que pertençam a um determinado conjunto universo. (ZAMBUZZI, 1965 apud MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992, p. 47)

Outro ponto importante que os autores destacam em seu artigo refere-se à preocupação existente no ensino antigo quando se procurava sempre relacionar a Matemática com a prática, com a resolução de problemas. Isso já não aparece na segunda definição, que apresenta em seu lugar uma preocupação com o conceito em si e com a linguagem para expressá-lo, característica do ensino de Matemática da época da Matemática Moderna.

Outro artigo que apresento neste estudo é *Teachers' Images of the 'Equation' Concept*, de Iiris Attorps, pesquisadora de uma universidade sueca. Como já foi citado em capítulo anterior, nesse artigo ela analisa quais as concepções que professores secundários de matemática têm a respeito da noção de equação e que tipo de experiências eles tiveram em sua formação que possam ter influenciado as suas concepções.

Na parte do artigo onde a autora discute a fundamentação teórica, ela apresenta um exemplo de definição para a noção de equação encontrada em um dicionário matemático inglês:

> Uma fórmula que afirma que duas expressões têm o mesmo valor; é também uma equação idêntica (usualmente chamada uma identidade), a qual é verdadeira para quaisquer valores das variáveis, ou equação condicional, a qual é verdadeira somente para certos valores das variáveis (as raízes das equações). Por exemplo, $x^2 - y^2 = (x-y).(x+y)$ é uma

> identidade, e $x^2 - 1 = 3$ é uma equação condicional, com raízes x=± 2. (BOROWSKI AND BORWEIN 1989, apud ATTORPS, 2003, p. 3)[16]

Além da definição de equação apresentada pela pesquisadora em seu trabalho, acho bastante pertinente apresentar alguns pontos de sua pesquisa que permeiam o estudo aqui desenvolvido, no que se refere à conceitos e concepções acerca da noção de equação.

Attorps apresentou aos professores durante as entrevistas realizadas na pesquisa cinco categorias, que são: identidades, equações não algébricas, equações envolvendo uma ou mais incógnitas, equações triviais e funções, as quais eles não consideram como sendo equações. Por último, ela apresenta uma categoria – inequações e expressões – que eles, agora sim, consideram como equação.

Vejamos os resultados apresentados em sua pesquisa:

- Concepções de Identidades: Alguns professores afirmam que $\cos^2 \alpha + sen^2 \alpha = 1$ não é uma equação, mas sim uma regra, uma fórmula, um resultado, etc. Um desses professores respondeu que não é uma equação *"... porque não tem uma fator desconhecido"*[17]*;*

- Concepções de equações não-algébricas: Alguns professores afirmam que $\int f(x)dx = x^2 = C$ não é uma equação, mas sim uma integral, uma integral e uma derivada, uma função, etc. Um desses professores respondeu: *"Não, não é uma equação.*

---

16 A formula that asserts that two expressions have the same value; it is either an identical equation (usually called an identity), which is true for any values of the variables, or conditional equation, which is only true for certain values of the variables (the roots of equations). For example, $x^2 - y^2 = (x - y).(x + y)$ is a identity, and $x^2 - 1 = 3$ is a conditional equation with roots x=± 2.

17 "... because there is no unknown factor"

Há integrais e derivadas, eu não as relaciono com equações"[18];

- <u>Concepções de equações com um ou mais fatores desconhecidos:</u> Alguns professores afirmam que $2x+5y=\sqrt{a}$ não é uma equação, mas sim uma fórmula, impossível de se resolver, etc. Um deles respondeu que *"x e y são incógnitas. Eu preciso de mais uma equação para resolver isto"*[19]*;*

- <u>Concepção de uma equação trivial:</u> Alguns professores afirmam que $x=2$ não é uma equação, mas sim uma solução, um valor de x, etc. Um deles respondeu: *"Eu tenho certeza a respeito disso, é somente uma resposta, você tem uma resposta"*[20];

- <u>Concepção de uma função:</u> Alguns professores afirmam que $f(x)=2x+1$ não é uma equação, mas sim uma função, uma linha reta, etc. Um deles respondeu: *"É uma função. O sinal de igual diz que é uma equação, mas eu não sei matematicamente, se você a considera como uma equação"*[21];

- <u>Concepções de desigualdades e expressões:</u> Alguns professores afirmam que $x+|x-3|\geq|x-1|+2$ é uma equação, uma desigualdade, etc. Um deles respondeu: "É *uma equação ... Eu posso resolver x aqui, Eu tenho uma meta ... Eu devo ter uma meta e no final eu posso resolver x"*[22].

---

[18] "No, it is not an equation. There are integrals and derivates, I don't connect them with equations"
[19] "x and y are unknown. I need one more equation to solve this"
[20] "I am sure about this, it is only an answer, you have got an answer"
[21] "It is a function. Equal sign says that it is an equation, but I don't know mathematically, if you regard it as an equation"
[22] "It is an equation ... I can solve x here. I have a goal ... I must have a goal and in the end I can solve x"

Durante a pesquisa, Attorps também levantou a seguinte questão: "O que o conceito de equação significa para você?". As respostas, dentre outras, foram:

- *"Quando você me pergunta se isso é ou não uma equação ... Eu tenho uma sensação de querer resolvê-la. Eu quero dar uma resposta, isto é, uma solução. Eu aprendi, se você dá uma resposta certa, é bom, você é capaz. Isto eu aprendi na escola"*[23]*;*

- *"O do lado esquerdo é igual ao lado direito ... Eu não tinha refletido antes o que o conceito equação significa ... 7 + x = 9, algo como isso. Você tenta descobrir um fator desconhecido, você resolve uma equação ..."*[24]

Com base nos resultados apresentados pela pesquisadora, podemos observar que as concepções dos professores entrevistados reforçam a conjectura levantada inicialmente por mim, sobre a ênfase que é dada no ensino de equações nos procedimentos e técnicas de resolução e o forte apelo ao par equação-resolução.

Vimos que grande parte dos professores entrevistados não reconhece como sendo equação as situações que envolvem equações não algébricas, como as trigonométricas, logarítmicas, ou àquelas cuja resolução não seja imediata, por exemplo, com mais de uma incógnita ou com radicais.

Trago também para discussão o artigo *As equações nos manuais escolares*, de João Pedro da Ponte, educador matemático português. Nesse artigo ele apresenta e discute as mudanças que ocorreram na abordagem da idéia de equação ao longo dos anos em Portugal. Para isso ele escolheu

---

[23] "When you ask me now whether this is an equation or not ... I get a feeling that I want to solve it. I want to get an answer, i. e. a solution. I have learnt, if you get a right answer, you are capable. This I have learnt at school"

[24] "The left hand side is equal to the right hand side ... I have not before reflected on what the concept equation means ... 7+x=9, something like this. You try to find an unknown factor, you solve an equation ..."

quatro manuais escolares – um do fim do século XIX, outro de meados do século XX, outro da época da Matemática Moderna e outro dos anos 90.

Desses quatro manuais, escolhi dois deles que apresentam explicitamente definição para a noção de equação. O primeiro é o livro *Compêndio de Álgebra* de J. Jorge G. Calado, de 1952:

> **108 – Definição –** *Chama-se equação a toda igualdade que só é verificada para* ***certos*** *valores atribuídos às letras que nela figuram (incógnitas).* Assim, a igualdade 4x = 32 é uma equação, visto que só é verificada para x = 8. Também é uma equação a igualdade 4x – 3y = 11 visto que só é verificada para *certos* valores de x e y. (CALADO apud PONTE 2004, p. 155)
>
> **109 – Raiz ou solução –** Os valores das incógnitas que *satisfazem à equação*, isto é, que dão aos seus dois membros valores numéricos iguais, chamam-se **raízes** ou **soluções** da equação. Assim, a equação: 2x + 1 = 3x – 5 admite a solução ou raiz x = + 6 visto que para x = + 6 os valores numéricos de 2x + 1 e 3x – 5 são iguais. (CALADO apud PONTE 2004, p. 155)

Nesse livro, no § 108 o autor apresenta uma definição para equação que recorre à idéia de igualdade e, no § 109 apresenta também uma definição para raiz ou solução de uma equação.

O segundo livro que destaco do trabalho de João Pedro da Ponte é *Compêndio de Matemática* de Maria José Soares, publicado em 1992. Nesse livro a noção de equação é apresentada aos alunos a partir de um problema envolvendo quantias em dinheiro. Logo a seguir a autora apresenta um quadro com terminologias como “equação”, “incógnita”, dentre outras, como vemos abaixo:

> A expressão que se obtém ligando duas expressões pelo sinal de igual é uma EQUAÇÃO. O valor de x, desconhecido, a determinar é a INCÓGNITA. Na equação há a considerar a expressão à esquerda do sinal de igual – o 1º MEMBRO – e a que está à direita – o 2º MEMBRO. As parcelas, em cada membro da equação, são os TERMOS DA EQUAÇÃO. Os termos da equação que contém a incógnita x são os TERMOS EM x e os que não a têm são os TERMOS INDEPENDENTES DE x. Os termos em x dizem-se SEMELHANTES entre si, bem como os termos independentes de x. (SOARES apud PONTE 2004, p. 164)

Observamos nessa segunda obra apresentada no artigo de João Pedro da Ponte, uma característica que certamente causa vários entraves no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra, quando se refere aos termos sempre em relação a *x*. Mas e se fosse *y*, por exemplo, continuaria valendo tal “definição”? Esse tipo de pergunta sempre é feita em salas de aulas quando se muda a variável (ou incógnita) de *x* para *y*.

Passo agora a apresentar as idéias sobre equação presentes em livros didáticos nacionais e internacionais. Com exceção dos quatro últimos livros didáticos discutidos aqui, que foram selecionados conforme mencionado anteriormente por pertencerem ao PNLD/2005, os demais não obedeceram a nenhum critério específico, mas sim, por estarem acessíveis durante essa fase da pesquisa, apesar de alguns deles, serem ou terem sido utilizados como referências na época em que foram editados.

A primeira obra investigada é *Éleménts D´Algèbre*, de H. Bos. Essa obra, em francês, foi publicada em 1893 e adotada pelo Colégio São Bento, em São Paulo. Após uma longa discussão sobre operações algébricas, ela discute as expressões algébricas, para então trazer no capítulo sobre equações de 1º grau, a seguinte definição:

> Dá-se o nome de equação a uma igualdade que somente ocorre para valores particulares atribuídos a algumas letras que aí entram, e que pode servir assim para determinar esses valores (BOS, 1893, p. 113)[25]

Outra obra que considero relevante para a presente discussão é *Éléments d´Algèbre*, de M. BOURDON. Essa obra, datada de 1897, traz em seu bojo uma vasta discussão sobre equações, que vai desde suas noções preliminares até a teoria das equações.

No capítulo sobre as noções preliminares de equação, o autor apresenta a seguinte idéia para esse termo:

---

[25] On donne le nom d’*équation* à une égalité qui n’a lieu que pour des valeurs particulières attribuées à quelques-unes des lettres qui y entrent, et qui peut servir ainsi à déterminer ces valeurs.

> (...) escrevemos algebricamente as relações que o enunciado da questão estabelece entre as quantidades conhecidas e as desconhecidas. Chega-se assim a uma expressão de duas quantidades iguais, que é chamada de *equação*".(BOURDON, 1897, p. 45)[26]

A obra de Bourdon, assim como a de Bos, é destinada a candidatos ao ensino universitário francês. Em ambas as obras há um estudo bastante detalhado de operações algébricas e resolução de equações algébricas, sendo que enquanto a de Bos discute somente até as equações de 2º grau, a de Bourdon trabalha com equações de grau n.

Na obra – *Álgebra, vol 1* – do matemático alemão, B L van der Waerden, observei que no capítulo introdutório são apresentados conceitos que ele assume como essenciais para o desenvolvimento das idéias da Álgebra e que serão discutidos ao longo de sua obra, porém, em momento algum, ele traz alguma definição ou alguma idéia do que se entende por equação. Entretanto, o autor se reporta ao termo equação da seguinte forma: *"a solução u de uma equação a = b + u, para a > b é designada por a – b"*. (WAERDEN, 1991, p. 5)

É importante destacar que, em seu livro *Álgebra, vol 1*, van der Waerden traz um curso de álgebra abstrata para cursos superiores e/ou cursos de pós graduação na área da Matemática, apresentando num capítulo introdutório conceitos que ele assume como essenciais para o desenvolvimento das idéias da Álgebra. Ele discute e define função, por exemplo, mas, não traz nenhuma referencia conceitual para a idéia de equação.

Acredito ser importante ressaltar aqui uma justificativa por ter inserido nesta pesquisa bibliográfica as obras de van der Waerden e Bourbaki. Os textos desses autores são normalmente considerados clássicos em cursos mais avançados em Álgebra, e são, certamente, grandes paradigmas de rigor. Por esse motivo então, achei importante investigar se eles discutem ou não a idéia de equação em suas obras.

---

[26] (...) on écrit algébriquement les relations que l´énoncé de la question établit entre les quantités connues et les quantités inconnues. On parvient ainsi à l´expression de deux quantités égales, que l´on appelle *équation*.

Apresento em seguida outra obra de Bento de Jesus Caraça, o livro didático *Lições de Álgebra e Análise, vol II*, em que ele discute a idéia de equação no capítulo sobre noção de função. Acho pertinente destacar aqui dois pontos:

1. Caraça retoma ao longo do capítulo analisado a sua idéia de equação como já apresentada anteriormente na obra *Conceitos Fundamentais da Matemática*;

2. Quando discute a noção de função, Caraça faz importantes relações entre função e equação, relações que apresentarei a seguir, pois, no meu entender, é mais uma forma pela qual ele concebe a idéia de equação.

Caraça discute a definição de função por meio de uma expressão analítica, apresentando: *(...) Do mesmo modo, a equação 2x+3y-1=0, onde x é a mesma variável, faz corresponder a cada x_i um único* $y_i = \frac{1-2x_i}{3}$ *e, portanto, esta equação define também uma função y(x).* (CARAÇA, 1954, p. 58).

Ele continua a discussão ao longo do capítulo, enfatizando o fato de que a equação é uma das formas de se definir uma função – a definição analítica. Ele chama atenção ainda para o fato, assim como Rogalski também o faz, de que uma mesma equação pode definir, analiticamente, duas funções, como, por exemplo: $y - x^2 = 0$, define as funções $y = +\sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$, e discute:

> Quando as funções são definidas por equações, diz-se que as equações definem uma ou mais funções (conforme os casos) funções implícitas de uma variável na outra (no caso duas funções implícitas x(y)); quando se resolve a equação, diz-se que se explicita a função ou funções por ela definidas. (CARAÇA, 1954, p. 59).

Desse modo, podemos observar nessa obra de Caraça, uma maneira mais ampla de se conceber equação da apresentada nos Conceitos

Fundamentais da Matemática, pois, partindo da idéia de equação algébrica, ele a relaciona com a noção de função.

Ao analisar a obra *Élements de Mathématique* – Algèbre I – de Nicolas Bourbaki, não encontrei definição para equação, mas sim, para equação linear, a qual segue abaixo:

> Seja E,F dois A-módulos (A um anel). Toda equação da forma $u(x) = y_0$, onde u: $E \to F$ é uma aplicação linear dada, y_0 um elemento dado de F e onde a incógnita x toma seus valores em E, chama-se *equação linear*; (...) Todo elemento $x_0 \in E$ tal que $u(x_0) = y_0$ é chamado *solução da equação linear* $u(x) = y_0$. (BOURBAKI, 1970, p. 48)[27]

A. G. Tsipkin, em sua obra *Manual de Matemáticas para la enseñaza media*, que é destinada às escolas de ensino médio e centros de formação de professores em nível médio, apresenta assuntos da Matemática da escola média, mas também idéias imprescindíveis para uma melhor compreensão dos principais fundamentos da Matemática, mesmo aqueles que não fazem parte do currículo do ensino médio, como por exemplo, Teorema Fundamental da Álgebra, e a Geometria de Hilbert, entre outros.

A autora destaca que o manual apresentado tem fundamentalmente um caráter teórico e pode servir como meio para uma sistematização dos conhecimentos matemáticos, sendo muito útil para a preparação de candidatos aos exames de ingresso em centros de educação superior.

Em seu manual, Tsipkin destaca que em Álgebra se estudam dois tipos de igualdades, as identidades e as equações. Assim, julgo importante apresentar aqui o que é considerado por ela como sendo identidade, uma vez que a autora se reporta a esse termo quando fala em resolver uma equação:

[27] Soient E,F deux A-modules. Toute équation de la forme $u(x) = y_0$, où u: $E \to F$ est une application linéaire donnée, y_0 un élément donnée de F et où l´inconnue x est assujettie à prendre ses valeurs dans E, s´appelle *équation linéaire*; (...) Tout élément $x_0 \in E$ tel que $u(x_0) = y_0$ est appelé *solution de l´équation linéaire* $u(x) = y_0$.

identidade é uma igualdade que vale para todos os valores (admissíveis) para as letras que se encontram nela. (TSIPKIN, 1985, p. 148)[28]

Sobre a noção de equação, traz a seguinte definição:

> *Equação* é uma igualdade que se completa somente para certos valores das letras que se encontram nela. As letras que entram na equação, segundo a condição do problema, podem não ser equivalentes: umas podem adquirir todos os valores admissíveis (são os chamados *parâmetros* ou *coeficientes* da equação (...)); outras, cujos valores são necessários encontrar, são as chamadas *incógnitas* (...). Em sua forma geral, a equação pode ser escrita como segue: $F\ (x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n) = 0$. (...) O valor das incógnitas que convertem a equação em identidade chama-se *solução* da equação. Resolver uma equação significa encontrar o conjunto de suas soluções ou demonstrar que as mesmas não existem. (TSIPKIN, 1985, p. 148-149)[29]

A seguir, apresento algumas definições e considerações sobre equação encontradas em livros didáticos brasileiros.

O primeiro deles é o livro *Matemática pensar e descobrir: novo – 6ª série*, de José Ruy Giovanni & José Ruy Giovanni Jr. A obra apresenta a idéia de equação na unidade *"Estudando as equações"*, que se inicia com uma discussão sobre sentenças matemáticas e igualdade, explicando e dando exemplos de cada um destes termos.

Em seguida, apresenta no item *"Equação"*, uma resposta para a questão *"O que é uma equação?"*:

> Toda sentença matemática expressa por uma igualdade, na qual exista uma ou mais letras que representam números desconhecidos dessa sentença, é denominada *equação*. Cada letra que representa um número

[28] La identidad es una igualdad que se cumple para todos los (admisibles) valores de las letras que entran en ella.

[29] La *ecuación* es una igualdad que se cumple sólo para ciertos valores de letras que entran en ella. Las letras que entran em la ecuación, según la condición del problema, pueden ser no equivalentes: unas pueden adquirir todos sus valores admisibles (son los llamados *parámetros* o *coeficientes* de la ecuación (...)); otras, cuyos valores es necesario hallar, son las llamadas *incógnitas* (...). En su forma general la ecuación puede ser escrita como sigue: $F\ (x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n) = 0$. (...) El valor de las incógnitas que convierten la ecuación en identidad se llama *solución* de la ecuación. Resolver una ecuación significa hallar el conjunto de sus soluciones o demonstrar que las mismas no existen.

> desconhecido chama-se *incógnita*. (GIOVANNI & GIOVANNI JR 2000, p. 151)

Na seqüência, no item *"Raízes de uma equação"* é apresentada uma resposta à questão *"O que é raiz ou solução de uma equação?"*:

> Sabemos que um número de um dado conjunto universo é raiz de uma equação quando, ao ser colocado no lugar da incógnita, torna verdadeira a equação. (GIOVANNI & GIOVANNI JR 2000, p. 155)

Outro livro didático escolhido foi *Matemática em atividades, 6ª série*, de Scipione de Pierro Netto e Elisabeth Soares. Nesse livro a idéia de equação é discutida no capitulo 3 *"Equações, sistemas de equações e inequações"*. Os autores recorrem à idéia de "sentenças matemáticas" para discutir equação, que aparece, especificamente, no item *"Um tipo especial de sentença matemática: a equação"*. Vejamos:

> Uma sentença é um conjunto de palavras que exprimem um pensamento com sentido completo. (...) São sentenças matemáticas aquelas que podem ser escritas utilizando-se da linguagem matemática. (...) Equação é uma sentença matemática aberta, expressa por uma igualdade. (Di PIERO NETTO & SOARES 2002, p. 86-87)

Diferentemente de outros autores, como Tspikin, por exemplo, na obra de Di Piero Netto & Soares, embora os autores empreguem o termo igualdade, em sua definição de equação, os mesmos não discutem essa idéia ao longo do capítulo, deixando a impressão de que a mesma é tomada por conhecida.

Outro ponto que acho relevante apresentar aqui, pelo fato de discutir o que é ser solução de uma equação, é a idéia que os autores acima citados apresentam em sua obra quando se referem à solução de uma equação: *"As soluções de uma equação também são chamadas de raízes da equação."* (Di PIERO NETTO & SOARES 2002, p. 93)

A seguir apresento a obra *Matemática para todos: 6ª série, 3º ciclo*, de Luiz Marcio Imenes e Marcelo Lellis. Esse livro traz a idéia de equação no capítulo *"Equações"*, sendo apresentada pelos autores acompanhada da resolução no item *"Resolvendo equações"*:

> A álgebra nos proporciona um novo recurso para resolver certos problemas: representamos o número desconhecido por uma letra e traduzimos o enunciado do problema, obtendo uma sentença chamada equação. (...) Equações são igualdades, ou seja, nelas aparece o sinal de =. O número desconhecido representado pela letra é chamado incógnita. Ao resolver a equação, estamos procurando o número desconhecido, ou seja, o valor da incógnita. (IMENES E LELLIS 2002, p. 230)

Na obra acima, observamos também que se recorre ao termo igualdade para definir equação, porém, não se discute o que é uma igualdade, a não ser pela característica de uma igualdade conter o sinal de igual. Todavia, a seguir, dá-se uma nova característica para equação: procurar o número desconhecido. Com isso, levanto as seguintes questões: **se 2 + 3 = 5 é uma igualdade, ela é também uma equação? Porém, ela não tem número desconhecido, então ela não é uma equação? Afinal, essa expressão é ou não é uma equação?**

No próximo item desse capítulo, quando da elaboração de uma análise comparativa entre as obras aqui apresentadas, retomarei esta discussão.

Um outro livro didático que apresento é o livro *Educação Matemática: 6ª série*, de Célia Carolino Pires, Edda Curi e Ruy Pietropaolo. Essa obra traz a idéia de equação no módulo *"Equações"*, em uma seção intitulada *"É preciso saber"*. Vejamos:

> Em Matemática, dizemos que equação é uma sentença aberta, porque nela há valores que não são conhecidos, que expressa uma igualdade. (...) O valor de *x* que transforma a sentença aberta em sentença verdadeira é chamado **raiz da equação**. (PIRES, CURI e PIETROPAOLO 2002, p. 211)

Mais uma vez observamos que se recorre a noção de igualdade para discutir a idéia de equação, como fazem também os autores acima, porém, supõe-se que essa noção é conhecida e compreendida pelos estudantes.

Pudemos observar então que são diversas as idéias e considerações apresentadas na literatura nacional e internacional em relação às "definições" apresentadas para o termo equação. Assim, a seguir, passo a discutir essas diferenças e semelhanças.

4.3 Análises e discussões das obras apresentadas

Partindo das “idéias” discutidas nas obras apresentadas e de suas caracterizações, procuro desenvolver uma análise e levantar pontos e questões para reflexão sobre as diferentes situações encontradas na literatura consultada.

Essas reflexões levam em consideração os fundamentos teóricos que estão dando suporte à pesquisa, bem como o estudo epistemológico-histórico feito anteriormente.

Nesse sentido, procuro apresentar, mas não de maneira linear e sim, buscando relações entre elas, as análises feitas dentro de duas perspectivas:

- A noção de equação é concebida como uma noção matemática ou paramatemática;
- Qual concepção de equação está presente nas idéias apresentadas pelos autores, e qual a relação existente entre essa maneira de conceber a noção de equação e os resultados obtidos com o estudo epistemológico-histórico feito anteriormente.

Ao final do capítulo, apresento um quadro resumo[30] com a finalidade de sintetizar e comparar essas duas perspectivas de análise que acabei de anunciar.

Começo discutindo alguns aspectos importantes a respeito de convergências e divergências entre as idéias apresentadas por Rogalski e Warusfel. Observei que a idéia geral que ambos têm sobre equação é convergente, ou seja, **ambos destacam que o termo equação está ligado a um problema em que se tem um valor a determinar, a partir de um valor dado**.

---

[30] Ver final deste capítulo, páginas 117 a 118.

Um ponto observado e que diverge nas obras desses autores diz respeito à discussão apresentada sobre o que é resolver uma equação. Enquanto Warusfel diz que resolver uma equação é encontrar suas raízes, Rogalski não chama a atenção para esse fato.

Na minha opinião, acredito que o segundo não faz esse tipo de referência justamente por querer englobar diversas situações, diversos tipos de equação, dentro de um mesmo formalismo, não particularizando a situação para as equações algébricas como faz Warusfel quando se refere ao ato de resolver uma equação. Percebo aqui, mais uma vez, a forte ligação existente entre a idéia de equação e sua resolução.

Fazendo uma análise comparativa entre Rogalski, Warusfel, Sügakkai e Caraça (2003) pude observar que, enquanto Rogalski e Warusfel procuram tratar o termo **equação de uma maneira mais geral**, Sügakkai e Caraça (2003) **particularizam a situação para o termo equação algébrica**, sem definir ou discutir a idéia de equação.

Vale lembrar que o objetivo de Rogalski é englobar diversos tipos de equação sob um mesmo formalismo. Dessa forma é possível contemplar outros tipos de equações, como as trigonométricas, as exponenciais, as logarítmicas, as diferenciais, entre outras.

Observei ainda que, apesar da maneira mais genérica com que Warusfel apresenta o termo equação, ele também chama a atenção para o fato de podermos particularizar a situação para o caso da equação algébrica. Apresento, em seguida, uma discussão que considera a idéia de se **resolver uma equação algébrica como sendo a busca de suas raízes e da ordem de cada**, tal como é feita na obra de Caraça (2003).

Assim, imagino ser pertinente destacar uma questão que, no meu modo de ver, parece ser fundamental para a sustentação de meu argumento de pesquisa: **Os autores apresentados, ao não definir equação, não estariam**

implicitamente considerando essa noção como uma noção paramatemática?

Além dos autores analisados acima, em van der Waerden, mais uma vez o que me chama a atenção é o fato do termo equação ser remetido à busca de sua solução por meio de certos procedimentos de resolução, sem se preocupar em conceituar equação. Isso já não acontece no caso de função, por exemplo, onde ele apresenta uma definição formal para esse objeto matemático.

Outro autor que não define equação em sua obra, mas apresenta uma definição para equação linear, é Bourbaki. Assim, mais uma vez encontro aqui uma evidencia que pode ser utilizada para a fundamentação de meu argumento de pesquisa, ou seja: **Tendo em vista que equação não é uma noção matemática, van der Waerden e Bourbaki não vêem necessidade de defini-la.**

M. BOURDON em seu *Éléments d´Algèbre,* logo no capítulo sobre as noções preliminares de equação, faz um alerta para o fato de se considerar em Álgebra que, os problemas cujos enunciados podem ser traduzidos algebricamente, estão ligados à idéia de equação.

Ele ressalta que situações nas quais problemas são colocados na forma de equação são divididas em duas partes: a primeira, destinada à escrita algébrica do problema, a qual podemos entender como equacionamento do problema, e a segunda parte, em que se deduz uma série de equações equivalentes, na qual a última delas fornece o valor da incógnita. Essa segunda parte entendo como a resolução da equação.

Desta forma, o autor anuncia logo de início que *"como as regras a serem seguidas para se colocar um problema numa equação são um pouco vagas, começaremos por nos ocupar com a segunda parte, que é submissa a regras fixas e invariáveis"* (BOURDON, 1897, p. 45).

Assim, o autor opta por discutir, em várias páginas, transformações algébricas utilizadas para a resolução de equações, para então retomar o que ele chama de “primeira parte”, ou seja, partindo-se de problemas chegar-se-á a equações.

Acho importante destacar aqui a escolha feita pelo autor em discutir, primeiramente, a resolução e determinação das soluções das equações, deixando para um outro momento o equacionamento do problema.

Segundo ele, como já ressaltado acima, o equacionamento de problemas não está submetido à “regras fixas e invariáveis” como os procedimentos e técnicas de resolução de equações, não sendo assim tão “simples” o tratamento que temos que dispensar para superar essa fase.

Imagino existir aqui uma relação entre essa fase destacada por Bourdon e as noções protomatemáticas discutidas por Chevallard que, embora não seja o foco principal de minha pesquisa, pode nos dar indícios de uma das formas de se conceber equação: **O equacionamento de problemas pode ser visto como uma noção protomatemática?**

Essa obra de Bourdon, conforme apresentado em Valente (1999), foi reimpressa mais de vinte vezes até o final do século XIX. Ela foi bastante importante para a educação brasileira, e especificamente para o ensino de Álgebra em nossas escolas. Podemos constatar isso no trecho a seguir:

> A parte da Álgebra, cujo ensino pertence à minha cadeira, compreende as operações e cálculos algébricos, as equações e problemas de 1º grau, as do 2º a uma só incógnita; aplicações do binômio de Newton e o complemento das teorias de progressões e logaritmos, começada a tratar na Aritmética. Limitei-me a este programa, deixando de parte a teoria geral das equações, que compete ao segundo ano. (OTTONI apud VALENTE 1999, p. 152)

> (...) o texto de Bourdon abarca todo o programa da Álgebra ensinada na Politécnica francesa (...) Ottoni, como se viu, compilou apenas a Álgebra que era ensinada no 1º ano da Academia de Marinha. Isso trará, posteriormente, profundos reflexos, dado que será essa limitação de conteúdos que irá constituir a Álgebra a ser ensinada nas escolas secundárias brasileiras. Em outras palavras, os conteúdos de Álgebra

> elementar irão até Teoria Geral das Equações exclusive. Noutros termos, Ottoni define a Álgebra secundária a ser ensinada posteriormente nos colégios e liceus. (VALENTE 1999, p. 153)

Uma vez que a obra de Bourdon pode ter influenciado significativamente o ensino brasileiro no que se refere à Álgebra ensinada nas escolas de educação básica, quero levantar aqui uma importante questão para reflexão: **A maneira como é abordado o ensino de equações na obra de Bourdon pode nos dar uma pista sobre as origens da ênfase que é dada aos procedimentos e técnicas de resolução de equações, atualmente no processo de ensino e aprendizagem da Matemática?**

Outro ponto de convergência que percebo entre as obras analisadas, refere-se ao fato de muitas delas, ao procurar definir a noção de equação, fazem-na remetendo-se à **idéia de igualdade entre valores**, como nos dicionários etimológicos de Ferreira, Houssais & Villar; nos artigos de Attorps e Ponte; nas definições encontradas nos livros didáticos de Bos, Tsipkin, Di Piero Netto & Soares, Giovanni & Giovanni Jr, Imenes e Lellis, e Pires, Cury e Pietropaolo.

Num outro caminho, observamos que nas obras de James, Houssais & Villar, Miguel, Fiorentini & Miorim, Bourdon, Imenes e Lellis, os autores ao fazerem a apresentação da definição para a noção de equação, remetem-se à idéia de **igualdade entre quantidades, normalmente relacionando-as com problemas.**

Nesse ponto, gostaria de retomar as questões levantadas anteriormente considerando o fato de se relacionar equação com igualdade: **se 2 + 3 = 5 é uma igualdade, ela é também uma equação? Porém, ela não tem número desconhecido, então ela não é uma equação? Afinal, essa expressão é ou não é uma equação?**

Com isso, o que pretendo aqui é ressaltar a importância de se discutir e esclarecer o significado de idéias matemáticas, por mais elementares que elas possam parecer, principalmente quando as usamos para definir outras noções dentro da Matemática.

Assim, de acordo com a primeira perspectiva de analise apresentada no início deste tópico – observar se os autores investigados concebem equação como uma noção matemática ou paramatemática – podemos observar que **não há consenso na literatura consultada sobre a "definição" de equação**. Aliás, nem podemos encontrar um consenso na apresentação ou não de definição para essa idéia matemática.

Enquanto alguns autores nem definem o termo equação, outros, quando o fazem, definem um "tipo" especifico de equação, mesmo que de forma implícita. Mais uma vez destaco: **Eles não definem equação por julgarem que essa idéia não é uma noção matemática e sim uma noção paramatemática?**

Por outro lado, considerando a outra perspectiva de análise – a maneira como os autores consultados concebem a noção de equação e qual a relação que essas têm com o estudo epistemológico feito – inicio destacando:

- Houssais & Villar, Miguel, Fiorentini & Miorim, Bourdon, Imenes e Lellis consideram a **igualdade entre quantidades**, relacionado-as com problemas. Assim, parecem se aproximar da maneira como os **babilônios e egípcios** concebiam equação, ou seja, uma idéia ligada a igualdade entre quantidades de um determinado problema;

- James, Ferreira, Houssais & Villar (na segunda definição apresentada), Attorps, Ponte, Bos, Tspikin, Di Piero Neto & Soares, Giovanni & Giovanni Jr e Pires, Curi & Pietropaolo consideram, em suas apresentações, a noção de equação diretamente ligada à idéia de **igualdade entre valores**, porém de forma diferente daqueles apresentados anteriormente, pois **não discutem a questão de quantidades e nem de problemas**. Nesse sentido, parecem se aproximar mais da maneira como os **árabes e hindus**, e mesmo os **europeus renascentistas**, concebiam equação, ou seja, uma idéia que tem sentido por si própria, que considera a questão da igualdade entre valores, e sobre a qual pode se levar a cabo diversos tipos de manipulações e operações;

- Rogalski, Chambadal, Warusfel, Caraça (em ambas as obras analisadas), Miguel, Fiorentini & Miorim (na segunda definição apresentada), Bourbaki parecem conceber equação de maneira semelhante à dos **europeus** como Descartes, Abel e Galois, os quais consideravam a **equação por si própria** e operavam sobre ela também de forma a considerar sua própria estrutura. Nesse caso, uma diferença significativa entre estes autores e os apresentados no tópico anterior, refere-se ao **grande apelo conjuntista** que emana de suas caracterizações para a noção de equação.

Com isso, podemos perceber que, nessa perspectiva de análise, encontramos algumas “definições” e/ou caracterizações para equação que recorrem ao fato de que a idéia de equação esteja diretamente ligada a um problema, deixando espaço para a seguinte consideração: i**sso não vem diretamente ao encontro da concepção de Rogalski?** Ou seja, embora a noção de equação não seja uma noção matemática, ela está diretamente relacionada à resolução de certos tipos de problemas que aparecem constantemente em Matemática.

4.4 Algumas observações finais

Finalizando esse capítulo, gostaria de retomar alguns pontos principais do trabalho, com vistas à apresentação, no próximo capítulo, dos diferentes significados que irei conceber para a noção de equação no ensino da Matemática:

- Objetivo da Pesquisa: **Investigar os significados da noção de equação no ensino de Matemática.**
- Questão de Pesquisa: **Quais os significados concebidos no ensino de Matemática para a noção de equação?**
- Hipótese da Pesquisa: **Investigando o desenvolvimento epistemológico da noção de equação é possível conceber seus significados no ensino de Matemática.**
- Argumento da Pesquisa: **Embora não seja um objeto do saber, a noção de equação possui vários significados e deve tomar lugar junto aos objetos de ensino.**
- Fundamentação Teórico-Metodológica: **Ensaio Teórico fundamentado nas idéias de Duval – Registros de Representação Semiótica, e de Chevallard – Transposição Didática.**

Vejo que, considerando meu objetivo, questão e hipótese de pesquisa, além do argumento e fundamentação teórico-metodológica apresentados, acredito ter elementos suficientes para, no próximo capítulo, responder a reflexão com a qual encerro esta sessão:

Quais os multisignificados de equação que podemos conceber no ensino da Matemática, considerando-se que essa não é uma noção matemática, mas, ainda assim, deve tomar lugar junto aos objetos de ensino?

4.5 Quadro resumo das "idéias" apresentadas sobre equação

A seguir, apresento um quadro resumo com a finalidade de contribuir para uma visão global das "idéias" apresentadas sobre equação nas obras analisadas.

Autor	Primeira Edição em	Define Equação	Define Equação Algébrica	Principal concepção
Livros de Fundamentos da Matemática				
Caraça	1941		X	Igualdade entre Valores – Apelo Conjuntista
Garding	1997		X	Igualdade entre Valores (Apelo Conjuntista)
Rogalski	2001			Igualdade entre Valores (Apelo Conjuntista) / Ferramenta Matemática
Dicionários Matemáticos				
James	1943	X		Igualdade entre Valores
Chambadal	1969	X		Igualdade entre Valores (Apelo Conjuntista)
Warusfel	1969			Igualdade entre Valores (Apelo Conjuntista) / Ferramenta Matemática
Süggakai	1977		X	Igualdade entre Valores (Apelo Conjuntista)
Dicionários da Língua Portuguesa				
Ferreira	1999	X		Igualdade entre Valores
Houaiss & Villar	2001	X		Igualdade entre Valores
Artigos Científicos				
Miguel, Fiorentini e Miorim	1992	X		Igualdade entre valores (Apelo Conjuntista - na 1ª) Igualdade entre Quantidades (Relação com Problemas - na 2ª)

Autor	Primeira Edição em	Define Equação	Define Equação Algébrica	Principal concepção
Attorps	2003	X		Igualdade entre Valores
Ponte	2004		X	Igualdade entre Valores (em ambas)
Livros Didáticos – Ensino Fundamental				
Bos	1893	X		Igualdade entre Valores
Bourdon	1897	X		Igualdade entre Quantidades (Relação com Problemas)
Giovanni & Giovanni Jr	2000	X		Igualdade entre Valores
Di Piero Netto & Soares	2002	X		Igualdade entre Valores
Imenes e Lellis	2002	X		Igualdade entre Quantidades (Relação com Problemas)
Pires, Curi e Pietropaolo	2002	X		Igualdade entre Valores
Livro Didático – Ensino Médio				
Tsipkin	1985	X		Igualdade entre Valores
Livros Didáticos – Ensino Superior				
van der Waerden	1930			Ferramenta Matemática
Caraça	1945	X		Igualdade entre Valores (Apelo Conjuntista)
Bourbaki	1970		X	Igualdade entre Valores (Apelo Conjuntista)

Capítulo V

Apresentando os Multisignificados da Noção de Equação

5.1 Introdução

Levando em consideração os resultados obtidos no estudo epistemológico-histórico realizado, bem como os do estudo no ensino de Matemática desenvolvido a partir das diferentes obras bibliográficas, apresento neste capítulo os **multisignificados**[31] para a noção de equação, identificados por mim, durante o desenvolvimento da presente pesquisa.

Esses significados levam em conta, por um lado, a concepção de equação enquanto um objeto de estudo – como aparece ao longo da história da Matemática – e, por outro, a concepção de equação como um algoritmo – como aparece em livros didáticos, artigos científicos, dentre outros.

Muito embora essas duas concepções sejam de épocas históricas distintas, a meu ver, existem relações atemporais entre elas, pois um mesmo significado é concebido em momentos históricos distintos e com finalidades completamente diferentes.

A categorização que será apresentada a seguir, além da influência de todo o estudo feito neste trabalho, também sofreu grande influência do trabalho de Fiorentini, Miorim e Miguel: *"Contribuição para um Repensar a Educação Algébrica Elementar"*.

Nesse trabalho os autores discutem que:

> Uma vez identificadas e caracterizadas as concepções mais freqüentes de Álgebra que podem ser inferidas a partir das diferentes leituras do desenvolvimento histórico desse campo, a questão que se coloca é: em que medida elas se relacionam com as concepções dominantes de Educação Algébrica que se manifestaram ao longo da história da Educação Matemática Elementar? (FIORENTINI, MIORIM E MIGUEL, 1993, p. 83)

As concepções de Educação Algébrica propostas pelos autores no trabalho acima citado, podem nos auxiliar na compreensão dos

[31] Ver quadro apresentado nas páginas 128 e 129.

multisignificados encontrados e relatados nesta pesquisa. Assim, considero relevante uma apresentação, mesmo que sucinta, de como eles concebem a Educação Algébrica em seu trabalho.

A primeira concepção apresentada, lingüístico-pragmática, destaca o papel da Álgebra como um instrumento de resolução de problemas, prevalecendo a crença de que *"a aquisição, ainda que mecânica, das técnicas requeridas pelo "transformismo algébrico" seria necessária e suficiente para que o aluno adquirisse a capacidade de resolver problemas." (*FIORENTINI, MIORIM E MIGUEL,*, 1993, p. 83)*.

Uma segunda concepção apresentada, fundamentalista-estrutural, concebe à Álgebra um papel fundamentador dos vários campos da matemática escolar. É importante lembrar que essa concepção veio para contrapor a anterior e ganhou força com o Movimento da Matemática Moderna. Nessa concepção a crença de que:

> a introdução de propriedades estruturais das operações, que justificassem logicamente cada passagem presente no transformismo algébrico, capacitaria o estudante a identificar e aplicar essas estruturas nos diferentes contextos em que estivesse adjacentes. (FIORENTINI, MIORIM E MIGUEL, 1993, p. 84)

Como uma terceira concepção de Educação Algébrica, os autores apresentam a fundamentalista-analógica, que, na verdade, é uma síntese das duas apresentadas anteriormente, pois, por um lado, recupera o valor instrumental da Álgebra e, por outro, mantém seu caráter fundamentalista.

Nessa concepção, os autores acreditam que essa etapa geométrico-visual *"constitui-se em um estágio intermediário e/ou concomitante à abordagem simbólico-formal."* (FIORENTINI, MIORIM E MIGUEL, 1993, p. 84), por intermédio de uma "álgebra geométrica", que pode tornar visível certas identidades algébricas.

Ainda em relação a essa concepção de Educação Algébrica, os autores destacam que, além da utilização dos recursos geométrico-visuais para a visualização de certas identidades algébricas, é bastante comum a:

> “justificação” de certas passagens do transformismo algébrico através da utilização de leis do equilíbrio físico, recorrendo a materiais “concretos” como balanças, gangorras, etc., nos quais o “concreto” tem um significado diferente do “concreto” ao qual fazem apelo os recursos estritamente geométrico-visuais. (FIORENTINI, MIORIM E MIGUEL, 1993, p. 85)

Para finalizar, os autores apresentam, de forma sintetizada, uma comparação entre as três concepções de Educação Algébrica discutida:

- A primeira tem uma reduzida preocupação fundamentalista, enfatizando o caráter mecânico do transformismo algébrico;
- A segunda apresenta uma preocupação em fundamentar o transformismo algébrico, fundamentação essa que se caracteriza por uma natureza lógico-estrutural;
- A terceira, assim como a segunda, também apresenta uma preocupação em fundamentar o transformismo algébrico, porém, nesse caso, essa fundamentação é de caráter preponderantemente algébrico.

Com isso, analisando os significados expressos no estudo epistemológico histórico feito no capítulo III e o estudo matemático apresentado no capítulo IV, e considerando-se as idéias expostas acima, passo a discutir os multisignificados que emergiram de todas essas reflexões.

5.2 Os multisignificados encontrados na pesquisa

Os multisignificados levantados nessa pesquisa são apresentados agora, segundo uma ordenação histórica da forma como os quais, na minha leitura, foram aparecendo e sendo utilizados, implícita ou explicitamente, na história da Matemática.

Embora eu apresente aqui diferentes formas de conceber a noção de equação – que optei chamar de **multisignificados** – é importante ressaltar que as diferenças entre esses multisignificados são, às vezes, bastante sutis e que é tênue a linha que separa um significado de outro.

Assim, vamos à apresentação desses multisignificados:

1. **Intuitivo-Pragmático:** por esse significado a noção de equação é concebida como uma noção intuitiva, ligada à idéia de igualdade entre duas quantidades. Sua utilização está relacionada à resolução de problemas de ordem prática, os quais são originários de situações do dia-a-dia. Alguns exemplos de situações que caracterizam esse significado podem ser encontrados:

    - Nos Babilônios e Egípcios: problemas de origem prática envolvendo questões da agricultura, por exemplo;
    - Nos livros didáticos de Bourdon, Imenes e Lellis, entre outros:

> (...) escrevemos algebricamente as relações que o enunciado estabelece entre as quantidades conhecidas e as desconhecidas. Chega-se assim a uma expressão de duas quantidades iguais que é chamada de *equação*”.(BOURDON, 1897, p. 45)

> A álgebra nos proporciona um novo recurso para resolver certos problemas: representamos o número desconhecido por uma letra e traduzimos o enunciado do problema, obtendo uma sentença chamada equação. (...) Equações são igualdades, ou seja, nelas aparece o sinal de =. O número desconhecido representado pela letra é chamado incógnita. Ao resolver a equação, estamos procurando o número desconhecido, ou seja, o valor da incógnita. (IMENES E LELLIS 2002, p. 230)

2. **Dedutivo-Geométrico:** por esse significado a noção de equação é concebida como uma noção ligada às figuras geométricas, aos segmentos. Sua utilização está relacionada à situações envolvendo cálculos e operações com segmentos, com medida de lados de figuras geométricas, com intersecções de curvas. Alguns exemplos de situações que caracterizam esse significado podem ser encontrados:

- Gregos: utilização do método das proporções e o da aplicação de áreas. O método das proporções permite que se construa um segmento de reta *x* dado por *a : b = c : x* ou por *a : x = x : b*, em que *a, b, c* são segmentos de reta dados. Em relação ao método da aplicação de áreas, pode-se recorrer aos *Elementos de Euclides*, utilizando-se a Proposição 44 do Livro I, e as Proposições 28 e 29 do livro VI;
- Geometria das Curvas: Khayyam encontrou uma solução geométrica para a equação cúbica do tipo $x^3 + ax = b$, utilizando a intersecção do círculo $x^2 + y^2 = qx$ e a parábola $x^2 = py$, e também trabalhou com a cúbica do tipo $x^3 = ax + b$, utilizando a intersecção da parábola $x^2 = \sqrt{a}y$ e a hipérbole eqüilátera $x\left(\frac{b}{a} + x\right) = y^2$.

3. **Estrutural-Generalista:** por esse significado a noção de equação é concebida como uma noção estrutural definida e com propriedades e características próprias. A equação aqui é considerada por si própria, operando-se sobre ela mesma na busca de soluções gerais para uma classe de equações de mesma natureza. Alguns exemplos de situações que caracterizam esse significado podem ser encontrados:

- al-Khwarizmi: embora as equações com que ele trabalhava eram originárias de problemas de ordem prática, sua atenção estava focada para a determinação da resolução de qualquer equação quadrática. Estabeleceu duas operações fundamentais *al-jabr* e *al muqabalah*, que reduziam as equações tratadas por ele em seis tipos, em sua forma canônica:

1) $ax^2 = bx$	4) $ax^2 + bx = c$
2) $ax^2 = c$	5) $ax^2 + c = bx$
3) $bx = c$	6) $bx + c = ax^2$

- Descartes: quando da utilização de seu método cartesiano passa a tomar as próprias equações não mais como um meio de organização de fenômenos, mas como um campo de objetos que necessita de novos meios para sua organização: seria a resolução de equações utilizando-se a forma canônica.

- Demais matemáticos a partir de Descartes, como Abel e Galois, que passaram a investigar a estrutura do processo de resolução das equações, visando encontrar, ou mostrar que não existia, um algoritmo capaz de resolver, por meio de radicais, as equações de grau superior a quatro.

4. **Estrutural-Conjuntista:** dentro dessa visão, a noção de equação é concebida dentro de uma perspectiva estrutural, que está diretamente ligada à noção de conjunto. É vista como uma ferramenta para resolver problemas que envolvam relações entre conjuntos. Alguns exemplos de situações que caracterizam esse significado podem ser encontrados:

- Rogalski:

Seja f: E $\rightarrow$ F uma aplicação, e y um elemento de F. Dizemos que queremos resolver a **equação** ($e_{f,y}$), e notamos ($e_{f,y}$): **f(x) = y**, **quando estamos a procura** de um elemento x de E cuja imagem por f é y (podemos dizer que estamos a procura de um antecedente x de y). Dizemos que x é a **incógnita**, e que y é **dado**. Um elemento x de E que responde à questão é chamado de uma **solução** da equação. Quando o dado y está destinado a variar em F, satisfazemo-nos algumas vezes em notar (e_f) a equação f(x) = y; quando não há risco de ambigüidade, satisfazemo-nos algumas vezes em notar (e) uma tal equação. **Uma equação está assim ligada a uma aplicação f** e, portanto a dois conjuntos E e F: y é dado em F, e procuramos a incógnita x em E. (ROGALSKI, 2001, p. 18)

- Warusfel:

Problema que consiste em procurar, em um conjunto *E*, os elementos *x* que satisfazem a uma relação *R(x)*; *x* é a **incógnita**, e x_i, tal que $R(x_i)$, é um valor aceitável para a incógnita se $x_i \in E$. Sob essa forma, o problema é muito amplo, e, por exemplo, contém os conceitos de **inequação** numérica e de pesquisa do lugar geométrico. Também se reserva, geralmente, o nome de equação ao caso particular onde $E = R$, C, R^n ou C^n , e onde *R(x)* pode ser escrita na forma: *f(x)* = 0 (...) **Resolver** uma equação é encontrar todas as raízes dela, e se necessário determinar a ordem de cada uma. (WARUSFEL, 1966, p. 168)

- Bourbaki (equação linear)

> Seja E,F dois A-módulos (A um anel). Toda equação da forma $u(x) = y_0$, onde u: E $\rightarrow$ F é uma aplicação linear dada, y_0 um elemento dado de F e onde a incógnita x toma seus valores em E, chama-se *equação linear*; (...) Todo elemento $x_0 \in$ E tal que $u(x_0) = y_0$ é chamado *solução da equação linear* $u(x) = y_0$. (BOURBAKI, 1970, p. 48)

5. **Processual-Tecnicista:** concebe equação como a sua própria resolução – como os métodos e técnicas que são utilizadas para resolvê-la. Diferentemente dos estruturalistas, não enxergam a equação como um ente matemático sobre o qual as operações e manipulações que são realizadas atendem à regras bem definidas. Alguns exemplos de situações que caracterizam esse significado podem ser encontrados em pesquisas realizadas na área de Educação Matemática que indicam a presença desse significado, como em:

   1. Cotret (1997) que apresenta que tanto professores como alunos não conseguem justificar de maneira satisfatória suas escolhas por essa ou aquela equação, quando do equacionamento de problemas, a não ser pela sua própria resolução, caracterizando o significado da equação em sua resolução e não na expressão algébrica elaborada a partir do problema posto;

   2. Dreyfus & Hoch (2004), que argumentam que alunos, ao serem questionados sobre o que é uma equação, utilizam-se de respostas que evidenciam suas compreensões sobre essa noção como sendo a própria resolução da equação, a partir dos procedimentos e técnicas utilizados para encontrar a sua solução.

6. **Axiomático-Postulacional:** concebe equação como uma noção da Matemática que não precisa ser definida, uma idéia a partir da qual outras idéias, matemáticas e não matemáticas, são construídas. Por

essa concepção, a noção de equação é utilizada no mesmo sentido de Noção Primitiva, como ponto, reta e plano na Geometria Euclidiana. Um exemplo desse significado pode ser entendido, a meu ver, em:

- Chevallard, o qual, de forma indireta concebe equação com esse significado em seu trabalho sobre a Transposição Didática, ao se referir às noções matemáticas e paramatemáticas, pois a noção de equação não pode ser concebida como uma noção matemática, por não ter uma "definição" única, aliás, nem precisa, afinal, ela é uma noção paramatemática, servindo como um saber auxiliar quando se trabalha com alguma noção matemática propriamente dita.

5.3 Quadro Resumo dos Significados Atribuídos para Equação

A seguir apresento um quadro resumo ilustrativo dos multisignificados concebidos para a noção de equação:

Significado	Características	Exemplos
Intuitivo-Pragmático	Equação concebida como noção intuitiva, ligada à idéia de igualdade entre duas quantidades. Utilização relacionada à resolução de problemas de ordem prática originários de situações do dia-a-dia.	Babilônios e Egípcios; Livros didáticos de: Bourdon e de Imenes & Lellis
Dedutivo-Geométrico	Equação concebida como noção ligada às figuras geométricas, segmentos e curvas. Utilização relacionada à situações envolvendo cálculos e operações com segmentos, com medida de lados de figuras geométricas e intersecção de curvas.	Gregos; Omar Khayyam - *Geometria das Curvas*

Significado	Características	Exemplos
Estrutural-Generalista	Equação concebida como noção estrutural definida e com propriedades e características próprias, considerada por si própria e operando-se sobre ela. Utilização relacionada com a busca de soluções gerais para uma classe de equações de mesma natureza.	al-Khwarizmi; Descartes; Abel e Galois.
Estrutural-Conjuntista	Equação concebida dentro de uma visão estrutural, porém diretamente ligada à noção de conjunto. É vista como uma ferramenta para resolver problemas que envolvam relações entre conjuntos.	Rogalski; Warusfel; Bourbaki.
Processual-Tecnicista	Equação concebida como a sua própria resolução – os métodos e técnicas que são utilizadas para resolvê-la. Diferentemente dos estruturalistas, não enxergam a equação como um ente matemático.	Pesquisas em Educação Matemática: Cotret (1997); Dreyfus & Hoch (2004)
Axiomático-Postulacional	Equação como noção da Matemática que não precisa ser definida, uma idéia a partir da qual outras idéias, matemáticas e não matemáticas, são construídas. Utilizada no sentido de Noção Primitiva, como ponto, reta e plano na Geometria Euclidiana.	Chevallard; Primeiro significado que poderia ser discutido no ensino-aprendizagem de Álgebra

5.4 Conclusões e considerações finais

Esse último significado que apresento, o axiomático-postulacional, a meu ver, deve ser concebido como o primeiro deles a ser discutido no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra.

Com ele não precisamos nos preocupar em definir a noção de equação, podendo priorizar a discussão da idéia central da noção de equação, quer seja – a idéia de igualdade – permitindo-nos, inclusive, a integração desse significado com outros que foram apresentados anteriormente.

Outro aspecto importante, e que se destaca com essa maneira diversificada de poder conceber a noção de equação, é a questão de poder trabalhar os seus multisignificados de maneira integrada, buscando relacionar um significado a outro.

A perspectiva pela qual estou propondo conceber a noção de equação no processo de ensino e aprendizagem de Matemática vem corroborar à discussão apresentada por Duval em sua teoria dos registros de representação semiótica apresentada como parte da fundamentação teórica desta pesquisa.

Nessa perspectiva, discutir a noção de equação utilizando-se dos multisignificados que essa noção possui, permite a articulação de diferentes registros de representação semiótica, trabalho esse que Duval indica como necessário na compreensão da Matemática.

Uma vez que Duval destaca a importância de se utilizar diferentes registros de representação semiótica para a construção do conhecimento matemático é presumível que articulando o intuitivo-pragmático com o geométrico, por exemplo, podemos propiciar situações em que a idéia de equação, ainda entendida como um problema entre igualdade de quantidades, pode ser interpretada e representada de diferentes formas gráficas, seja por meio de diagramas, de esquemas gráficos, ou mesmo, posteriormente, pela intersecção de duas curvas, gerando a solução para o problema apresentado. Fiorentini, Miorim e Miguel reforçam essa idéia quando afirmam *acreditar que a etapa geométrico-visual constitui-se em um estágio intermediário e/ou concomitante à abordagem simbólico-formal*. (FIORENTINI, MIORIM E MIGUEL, 1993, p. 84).

Entendendo-se que conhecemos um objeto matemático quando somos capazes de interpretá-lo e concebê-lo por meio de diferentes registros de representação semiótica, como Duval contempla, o trabalho articulado e a discussão dos multisignificados para a noção de equação apresentados nessa pesquisa, pode ser um ponto de partida para um estudo mais significativo desse importante e fundamental conhecimento algébrico.

Neste ponto, gostaria de retomar o argumento desta pesquisa – **Embora não seja um objeto do saber, a noção de equação possui vários significados e deve tomar lugar junto aos objetos de ensino** – defendendo que a discussão sobre as idéias de Chevallard são de extrema relevância rumo à construção deste argumento e aos resultados obtidos nesta pesquisa, ao menos por três motivos:

- Permitiram-me refletir e analisar as diferentes definições para a noção de equação apresentadas no capítulo anterior, definições essas que muitas vezes, embora pertinente ao contexto apresentado, acabavam por cercear a concepção de equação de uma forma mais ampla. Um exemplo disso é a limitação na relação de que as *incógnitas* são *números desconhecidos*, quando isso ocorre na verdade, somente para alguns tipos de equação;

- Provocaram-me reflexões acerca do paradoxo: para uma noção ser considerada uma noção matemática, em sua teoria, é necessária uma definição. Assim, ao não encontrar consonância entre os autores pesquisados a esse respeito, essa noção é considerada como uma noção paramatemática, inclusive pelo próprio Chevalard. Por outro lado, recebendo esse status, a noção de equação não poderia tomar lugar junto aos objetos de ensino. Contudo, a diversidade de significados que emergiram do estudo epistemológico feito sinaliza justamente o contrário: essa noção deve sim, tomar lugar junto aos objetos de ensino;

- Levaram-me a conceber o significado axiomático-postulacional, significado esse que resolve a questão do paradoxo apresentado, pois por esse significado não precisamos nos preocupar em definir equação, mas sim, tomá-la como uma noção primitiva, o que nos permite o trabalho em sala de aula dessa idéia matemática.

Com isso, deixo como sugestão para pesquisas futuras, o desenvolvimento de situações de aprendizagem que contemplem esses multisignificados para a noção de equação entre alunos e professores de Matemática. Situações essas que procurem articular esses significados, levando em consideração o nível de ensino e os objetivos propostos para a educação matemática que se quer praticar, por exemplo.

Apesar de já ter discutido nos capítulos anteriores, gostaria de retomar a questão histórica da mudança que ocorreu na forma de se olhar para a Álgebra, após Galois ter apresentado reposta à questão sobre a possibilidade de resolução das equações quínticas. Os resultados encontrados por ele, e que acabaram provocando essa mudança na forma de se olhar a Álgebra, aliada ao Movimento da Matemática Moderna, refletiu diretamente o ensino e aprendizagem da Matemática.

Essa mudança significativa na natureza do objeto de investigação em Álgebra – o estudo das equações perde o foco de atenção dos matemáticos para o estudo das estruturas matemáticas – acabou por caracterizar dois grandes momentos históricos: antes dessa mudança tínhamos o que é denominado por Álgebra Clássica ou Elementar e, depois, o que é chamado de

Álgebra Moderna ou Abstrata. Constatação também levantada por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993).

A mudança na natureza do foco de investigação da Álgebra, que acarretou uma mudança do que se entende atualmente por Álgebra, certamente influenciou os conteúdos e assuntos que são discutidos nos cursos de licenciatura em Matemática, como confirma o trabalho de Maranhão et al (2004).

Assim, de posse desses indicadores e com os resultados apresentados nesta pesquisa acerca dos multisignificados da noção de equação, deixo como sugestão o desenvolvimento de pesquisas, no âmbito da formação de professores, que levantem e discutam essas diferentes formas de conceber a noção de equação no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Acredito que uma proposta de trabalho que contemple um estudo epistemológico da noção de equação, referenciando as diferentes formas de se "olhar" para a noção de equação, pode propiciar ao professor em formação uma forma mais ampla de conceber e trabalhar com essa noção, posteriormente, em suas aulas de Matemática.

Uma outra questão que pode ser considerada em pesquisa futura baseia-se na investigação de quais significados apresentados neste trabalho fazem parte do repertório dos professores que ensinam Matemática, e como eles trabalham esses significados com seus alunos em suas salas de aula.

Finalizando, espero que a presente pesquisa contribua com a Educação Matemática Básica, oferecendo elementos teóricos que sirvam de embasamento para pesquisas futuras, as quais preocupações e questionamentos semelhantes àqueles apresentados no presente estudo.

Bibliografia

• ATTORPS, I. ***Teachers' Images of the 'Equation' Concept.*** In: European Research in Mathematics Education III, 2003. Disponível em internet no site http://ermeweb.free.fr/cerme3/groups/tg1/tg1_list_html, acessado em 15/12/2006, às 19h53.

• ____________ ***Concept Definition and Concept Image.*** Disponível em internet no site http://www.distans.hkr.se/rikskonf/Grupp%202/Attorps.pdf, acessado em 28/02/2007, às 11h05.

• BASHMAKOVA, I. G., SMIRNOVA, G. S. ***The Beginnings and Evolution of Álgebra.*** Washington, D.C.: The Mathematical Association of América, 2000.

• BAZZINI, L. ***Linguaggio verbale e linguaggio simbolico nella costruzione-interpretazione di espressioni algebriche***. IX Séminaire Franco-Italien de Didactique de l´Algèbre, 1997, p. IX-3 – IX-8.

• BEDNARZ, N., KIERAN, C., LEE, L. ***Approaches to algebra: perspectives for research and teaching***. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1996.

• BEKKEN, O. B. ***Equações de Ahmes até Abel.*** Rio de Janeiro: Universidade Santa Úrsula, GEPEM, 1994.

• BOOTH, L.R. ***Algebra: Children's strategies and errors***. Berkshire: NEFR – Nelson, 1984.

• BOOTH, W.C, COLOMB, G.G., WILLIAMS J.M. ***A Arte da Pesquisa***. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

• BOS, H. ***Éléments d´Algèbre***. Paris: Librairie Hacchette et Cie, 5ª edição, 1893.

• BOURBAKI, N. ***Elements de História de las Matemáticas***. Madrid: Alianza Editorial, 1976.

- ____________ ***Elements de Mathématique: Algèbre I***. Paris: Hermann, 1970.

- BOURDON, M. ***Éléments d´Algèbre***. Paris: Gauthier-Villars et Fils, 1897.

- BOYER, C. ***História da Matemática***. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1978.

- BRASIIL, Ministério da Educação. ***Parâmetros Curriculares Nacionais***. http://www.mec.gov.br/sef/sef/pcn.shtm - disponível em março de 2004 - PCN para o Ensino Fundamental – quarto ciclo – p. 116.

- BROUSSEAU, G. ***Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques***. Recherches em Didactique des Mathématiques, v. 7, n. 2. Grenoble, 1986, p. 33-115.

- CAMPBELL, S.R, ZASKIS, R. Toward Number Theory as a Conceptual Field in ***Learning and Teaching Number Theory: Research in Cognition and instruction***. Westport, CT:Ablex, 2002.

- CARAÇA, B de J. ***Conceitos Fundamentais da Matemática***. 5ª ed. Lisboa: Gradiva Publicações Ltda, 2003.

- ______________ ***Lições de Álgebra e Análise, vol. II***. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1954.

- CHAMBADAL, L. ***Dictionarie des Mathématiques Moderns***. Paris: Larrouse, 1969.

- CHEVALLARD, Y. ***La Transposition Didactique***. Cap. 4. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991, p. 49-56.

• _________________ ***Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l´activité mathématique***. Séminaire de Didactique des Mathémathiques et de l´Informatiqué de Grenoble. LSD2, IMAG. Grenoble: Université J. Fourier, 1991.

• _________________ ***Cencepts fondamentaux de la dadactique: perspectives apportées par une approche antropologique***. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble v. 12, n. 1., p. 73-112,1992.

• CORTÉS, A, KAVAFIAN N. ***Les principes Qui guident la pensée dans la résolution des équations***. ESA 7021, Cognition et activés finalisées CNPS, Université Paris 8, 1999.

• COTRET, R. S. ***Problématique à propos de la mise en équation de problèmes écrits***. IX Séminaire Franco-Italien de Didactique de l´Algèbre, 1997, p. IX-23 – IX-37.

• COURANT, R., ROBBINS, H. ***O que é Matemática?: Uma abordagem elementar de métodos e conceitos****.* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

• DAHAN-DALMEDICO, A., PEIFFER, J. ***Une historie des nathématiques: routes et dédales***. Paris: Éditions du Seuil, 1986.

• DAMM, R. F. **Registros de Representação**. In MACHADO, S. D. A. et al. *Educação Matemática: uma introdução*. 2ª edição. São Paulo: EDUC, 2000, p. 135-153.

• D´AMORE, B. ***Epistemologia e didática da Matemática***. São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

• Di PIERRO NETTO, S., SOARES, E. ***Matemática em Atividades: 6ª série***. São Paulo: Scipione, 2002.

• DOUADY, R. ***Jeux de Cadres et Dialectique outil-objet***. Recherches em Didactique des Mathématiques, v.7, n.2, 1986, p. 5-31.

• DREYFUS, T., HOCH, M. ***Equations: A structural approach***. Proceedings of the 28th Conference Of Internatoinal Group for the PME, 2004, p. 1-152 – 1-155.

• DUVAL, R. ***Registres de Représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée***. Annales de Didactique et Sciences Cognitives. ULP, IREM Strasbourg 5, 1993, p. 37-65.

• __________ ***Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales***. Cali: Merlin I.D., 1999.

• __________ ***Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática***. In MACHADO, S. D. A. (org) *Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica*. Campinas: Papirus, 2003, p. 11-33

• ECO, H. ***Como se faz uma tese***. São Paulo: Perspectiva, 2004.

• EVES, H. ***Introdução à História da Matemática***. Campinas: Unicamp, 2004.

• FERREIRA, A. B. DE H. ***Novo Aurélio Século XXI: o dicionário da língua portuguesa***. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999.

• FIORENTINI, D., MIORIM, M. A., MIGUEL, A. ***Contribuição para um Repensar ... a Educação Algébrica Elementar***. Revista Pro-Prosições, Faculdade de Educação da Unicamp, vol 4, n. 1[10], pp. 79-91, mar, 1993.

• FILLOY, E., ROJANO, T. (1984). ***From an arithmetical to an algebraic thought***. In J.M. Moser (Ed), Proceedings of the Sixth Annual Meeting of PME-NA . Madison: University of Wisconsin, 51-56.

• GARBI, G. G. ***O Romance das Equações Algébricas***. São Paulo: Makron Books, 1997.

• ___________ ***A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática.*** São Paulo: Livraria da Física, 2006.

• GARDING, L. ***Encontro com a Matemática***. Brasília: UnB, 1997.

• GIOVANNI, J R, GIOVANNI, J. R. Jr. ***Matemática pensar e descobrir: novo – 6ª série***. São Paulo: FTD, 2000

• HOUAISS, A., VILLAR, M. de S. ***Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa***. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

• IMENES, L. M. P., LELLIS, M. C. T. ***Matemática para todos: 6ª série, 3º ciclo***. São Paulo: Scipione, 2002.

• JAMES, G. ***Mathematics Dictonary***. Van Nuys: The Digest Press, 1943.

• KIERAN, C. ***The learnig and teaching of school algebra***. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 1992.

• LALANDE, A. ***Vocabulário técnico e crítico da filosofia***. 3ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

• LINTZ, R. G. ***História da Matemática***. vol I. Blumenau: Editora da FURB, 1999.

• MARANHÃO, M. C. S. A et al. ***Projeto: o que se entende por Álgebra?*** In: VII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife-PE. Anais: CD-Rom, 2004.

• MARCONI, M. A., LAKATOS, E. M. ***Fundamentos da Metodologia da Pesquisa***. 6ª ed. São Paulo: Atlas, 2005.

• MARTINS, J. C. G. ***Sobre as Revoluções Científicas na Matemática.*** Rio Claro, 2005. 175p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista.

• MIGUEL, A., FIORENTINI, D., MIORIM, M. A. ***Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo?*** Revista Pro-Prosições, Faculdade de Educação da Unicamp, vol 3, n. 1[7], pp. 39-54, mar, 1992.

• PIETROPAOLO, R. C. ***(Re) Significar a Demonstração nos Currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática***. São Paulo, 2005, 388p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

• PIRES, C. C., CURI, E, PIETROPAOLO, R. ***Educação Matemática: 6ª série***. São Paulo: Atual, 2002.

• POLYA, G. ***Como resolver problemas.*** Lisboa: Gradiva, 2003.

• PONTE, J. P. da. ***As equações nos manuais escolares***. In Revista Brasileira de História da Matemática. vol 4. Rio Claro: Editora da UNESP, 2004, p. 149-170.

• PUIG, L. ***Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwârizmî restaurado***. In F. Hitt (Ed). Investigaciones em matemática educativa II. México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica, 1998, p. 109-131.

• PUIG, L; ROJANO T. ***The history of Álgebra in Mathematics Education***. In The Future of the Teaching and Learnig of Álgebra. The 12th ICMI Study. STACEY, K; CHICK, H.; KENDAL, M. (Editors). Massachusetts: Kluwer Academic Publishers, 2004, p. 189-223.

• RIBEIRO, A J. ***Analisando o desempenho de alunos do Ensino Fundamental em Álgebra, com base em dados do SARESP***. São Paulo, 2001. 116 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

• ________________ ***Alguns Erros Freqüentes em Álgebra Elementar Baseado em Questões do SARESP***. In V Congresso Ibero Americano de Educação Matemática, 2005, Porto. Anais do V Congresso Ibero Americano de Educação Matemática, 2005.

• ________________ ***Discutindo a Noção de Equação: uma Análise Considerando as Idéias da Transposição Didática.*** In: III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2006, Águas de Lindóia. Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2006.

• RIBEIRO, A. J., MACHADO, S. D. A. ***Buscando Identificar o(s) Significado(s) para Equação***. In Anais do XI Encontro Baiano de Educação Matemática, Salvador: SBEM Bahia, 2005, CD-ROM.

• ROGALSKI, M. ***Carrefours entre Analyse, Algèbre et Géomètrie***. Paris: Ellipses, 2001.

• ROJANO, T. ***Problem Solving: From the development of algebric ideas to algebric thinking***. Centro de Investigacoin y Estudios Avanzados del IPN, México, 1995.

• SEVERINO, A. J. ***Metodologia do Trabalho Científico***. 22ª edição, S.Paulo: Cortez, 2002

- SFARD, A . ***On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on process and objects as different sides of the same coin**.* Educational Studies in Mathematics, n. 22, 1991, p. 1-36.

- SIERPINSKA, A. ***Some remarks on understanding in mathematics.*** For the Learning of Mathematics. n. 10,3, 1990, p. 24-36.

- SMITH, D. E. ***History of Mathematics***. vol II. Nova Iorque: Dover Publications, 1958.
- STRUIK, D. J. ***História Concisa das Matemáticas**.* 2 ed. Lisboa: Gradiva, 1992.

- SÜGAKKAI, N. ***Encycolpedic Dictonary of Mathematics***. Massachusetts: The MIT Press, 1977.

- TELES, R. A. de M. ***A Aritmética e a Álgebra na Matemática Escolar***. Educação Matemática em Revista, n. 16, ano 11, mai, 2004, p. 8-15.

- TSIPKIN, A. G. ***Manual de Matemáticas para la enseñanza media**.* Moscou: Editorial Mir Moscú, 1985.

- VALENTE, W. R. ***Uma História da Matemática Escolar no Brasil***. São Paulo: Annablume: FAPESP, 1999.

- WAERDEN B. L. van der. ***Algebra: Volume I***. Nova Iorque: Springer-Verlag, 1991.

- WARUSFEL, A. ***Dictonnaire Raisoné de Mathématiques***. Paris: Éditions du Seuil, 1969.