

ANTONIO LUIS MOMETTI

**Reflexão sobre a Prática: Argumentos e Metáforas no
Discurso de um Grupo de Professores de Cálculo.**

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**PUC/SP
São Paulo
2007**

ANTONIO LUIS MOMETTI

**Reflexão sobre a Prática: Argumentos e Metáforas no
Discurso de um Grupo de Professores de Cálculo.**

*Tese apresentada à Banca Examinadora da
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,
como exigência parcial para obtenção do título de
DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob a
orientação da **Profa. Dra. Janete Bolite Frant**.*

PUC/SP
São Paulo
2007

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

Aos meus amores:

Flávia (esposa)

Ana Carolina (filha)

AGRADECIMENTOS

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desse trabalho, meus sinceros agradecimentos.

À minha orientadora Profa. Dra. Janete Bolite Frant, pelas sugestões, pela paciência, dedicação, incentivo, amizade e por acreditar no meu trabalho.

À minha esposa Flávia, pelo amor, carinho e cumplicidade com que me ajudou a superar mais essa etapa da minha vida e, sobretudo, pela pessoa verdadeira e especial que me trouxe, além da possibilidade de reconstruir minha família, a possibilidade de ser feliz.

À minha filha Ana Carolina, pela inspiração não só para iniciar essa pesquisa, mas para viver.

À minha família que sempre me apoiou incondicionalmente.

À família da minha esposa e minha também, especialmente à minha sogra pelas várias correções desse texto.

Aos professores da Banca Examinadora: Laurizete Ferragut Passos, Siobhan Victoria Healy (Lulu Healy), Eduardo Sebastiani Ferreira e Maria Tereza Carneiro Soares, pelas sugestões e críticas que me ajudaram a reescrever o trabalho.

Aos professores do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, especialmente aos professores do grupo G3 - Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática, pelos conhecimentos que me ajudaram a construir.

Ao secretário Francisco pelo suporte e apoio dedicado.

Às minhas colegas da Pós: Marilene, Aparecida, Mônica e Rita pelo apoio que me deram no começo do meu Doutorado e aos colegas do COTLEM pelas colaborações.

Aos professores que participaram dessa pesquisa, pela colaboração e acima de tudo pela nossa amizade e à profa. Dra. Mônica Castro pelas sábias contribuições.

A CAPES, pelo incentivo financeiro.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo investigar como a discussão e a reflexão sobre a própria prática profissional, no âmbito de um grupo de professores de Cálculo, podem contribuir para o desenvolvimento profissional dos participantes desse grupo, partindo do que os professores efetivamente falam sobre a sua prática, em particular, sobre suas aulas de Integral de Riemann para funções de uma variável real. O Modelo da Estratégia Argumentativa (FRANT & CASTRO, 2002) e a Teoria da Cognição Corporificada (LAKOFF & JOHNSON, 1980; LAKOFF & NÚÑEZ, 2000) compõem o aporte teórico-metodológico. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, cujo gênero adotado é o da investigação sobre a própria prática (PONTE, 2004).

Verificou-se a partir dos argumentos e das metáforas utilizadas pelos professores, ao discutir a prática, uma forte tensão entre intuição e rigor no Ensino de Cálculo e apresentou-se uma análise a partir do referencial teórico.

Observou-se que o grupo de discussão consolidou-se num ambiente em que os participantes se sentiram à vontade para expor idéias, para trocar experiências e ajudou os professores a repensar sua prática pedagógica.

O referencial teórico-metodológico adotado mostrou-se apropriado para explorar as ideologias dos professores a partir dos argumentos, permitindo explorar os implícitos nas falas e aprofundar, assim, o processo de reflexão no grupo.

Palavras-chave: Argumentos, Metáforas, Ensino de Cálculo, Integral, Reflexão sobre a Prática, Desenvolvimento Profissional.

ABSTRACT

The purpose of this work is to investigate how the discussion and the reflection on the proper professional practice, in the scope of a group of Calculus professors, can contribute for the professional development of the participants of this group, from what the professors effectively speak on its practice, in particular, on its lectures of Riemann Integrate for functions of a real variable. The Model of the Argumentative Strategy (FRANT & I CASTRO, 2002) and the Theory of the Embodied Cognition (LAKOFF & JOHNSON, 1980; LAKOFF & NÚÑEZ, 2000) compose the support theoretical-methodological. It is about a qualitative research, whose sort adopted is the inquiry of the proper practice (PONTE, 2004).

It was verified from the arguments and the metaphors used by the professors when arguing about the practice, a strong tension between intuition and rigor on Calculus teaching and it has presented an analysis from the theoretical background.

It was observed that the group of discussion was consolidated in an environment where the participants had felt free to expose their ideas, to change experiences and it helped the professors to rethink their pedagogical practice.

The theoretical-methodological background adopted revealed to be appropriate to explore the ideologies of the professors from the arguments, allowing to explore the implicit in the speeches and to go deep, thus, the process of reflection in the group.

Keywords: Arguments, Metaphors, Calculus Teaching, Integrate, Reflection on the Practice, Professional Development.

RÉSUMÉ

Le but de ce travail est de rechercher comment la discussion et la réflexion sur sa propre pratique professionnelle, dans le contexte d'un groupe d'enseignants de Calcul, peuvent contribuer au développement professionnel des participants de ce groupe, en partant de celui qu'ils parlent, en effet, sur leur pratique, en particulier, sur leurs leçons d'Intégrale de Riemann pour fonctions d'une variable réelle. Le Modèle de la Stratégie Argumentative (FRANT & CASTRO, 2002) et la Théorie de la Connaissance Corporelle (LAKOFF & ; JOHNSON, 1980 ; LAKOFF & ; NÚÑEZ, 2000) composent l'apport théorique-méthodologique. Il s'agit d'une recherche qualitative, dont le type adopté est celui de la recherche sur la propre pratique (PONT, 2004).

En partant des arguments et des métaphores utilisées par les enseignants, pendant la discussion sur leur pratique, on a vérifié une forte tension entre intuition et rigidité dans l'Enseignement de Calcul et une analyse est présentée à partir du référentiel théorique.

Il a été observé que le groupe de discussion est consolidé dans une atmosphère dans lequel les participants se sont sentis confortables pour exposer des idées, pour échanger l'expérience, et il a les aidé à repenser sa pratique pédagogique.

Le référentiel théorique-methodologique adopté est montré approprié pour explorer les idéologies des enseignants à partir des arguments, et en permettant d'explorer les implicites dans les paroles et d'approfondir, ainsi, le processus de réflexion dans le groupe.

Mots Clés: Arguments, Métaphores, Enseignement de Calcul, Intégrale, Réflexion sur la Pratique, Développement Professionnel.

SUMÁRIO

Introdução.....	15
O Problema da pesquisa.....	20
Estrutura da tese.....	20
Capítulo 1. A Revisão da Literatura.....	22
1.1 Reflexão sobre a prática profissional do professor e desenvolvimento profissional.....	22
1.2 O Ensino de Cálculo Diferencial e Integral.....	30
Capítulo 2. Fundamentação Teórico Metodológica.....	46
2.1 Conhecimento.....	46
2.2 Conhecimento Profissional.....	49
2.3 Linguagem.....	52
2.4 A Teoria da Cognição Corporificada.....	54
2.5 Montagens Conceituais.....	60
2.6 Conceito e Intuição.....	63
2.7 Um olhar para o infinito a partir da Teoria da Cognição Corporificada: o infinito potencial e o infinito atual.....	67
2.8 O Modelo da Estratégia Argumentativa.....	73
2.9 Metodologia e Procedimentos Metodológicos.....	77
2.9.1 O grupo de discussão e os participantes da pesquisa.....	80
2.9.2 A dinâmica dos encontros de professores.....	82
2.9.3 As tarefas.....	86
2.9.4 A coleta de dados.....	87
2.9.5 A análise dos dados.....	88

Capítulo 3. Episódios Analisados.....	91
3.1 Episódio I: Falando sobre conceitos e Intuição.....	91
3.1.1 Parte I: Conceito é definição.....	95
3.1.2 Parte II: Intuição é o ponto de partida.....	110
3.2 Episódio II – Falando Sobre o Infinito e a Integral.....	118
3.2.1 Parte I: No limite coincide.....	119
3.2.2 Parte II: Enforcando a Matemática.....	128
3.2.3 Parte III: O infinito atual e a tecnologia.....	137
3.3 Episódio III – A reflexão sobre a prática e o desenvolvimento Profissional.....	143
3.3.1 O desenvolvimento profissional: “Um passo à frente”.....	143
3.3.2 A reflexão a partir da prática.....	151
Considerações Finais.....	152
Referências Bibliográficas.....	162
Anexo I. As Tarefas.....	175
Tarefa 1.....	176
Tarefa 2.....	179
Tarefa 3.....	185
Tarefa 4.....	188
Anexo II. Termo de Compromisso Ético.....	191
Anexo III. As Transcrições dos Encontros de Professores.....	193

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1: Formação de Professores x Desenvolvimento Profissional.....	29
Tabela 2: Perfil dos participantes da pesquisa.....	80
Tabela 3: Os encontros com professores de Cálculo.....	84
Tabela 4: Reunião Pedagógica x Encontro de Professores.....	149

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. A derivada da área.....	33
Figura 2. Aplicação da Local <i>Straightness</i> para a função seno (TALL, 1991)..	37
Figura 3. Cálculo da área por aproximação de retângulos. (MELLO, 2002)....	39
Figura 4. O TFC segundo Baldino (1998).....	41
Figura 5. A Caixa.....	48
Figura 6: Ilustração de M. C. Escher para a Faixa de Möebius.....	48
Figura 7: Relação entre sujeitos constituindo objetos (CATRO & FRANT, 2002, p. 59).....	52
Figura 8: Metáfora Conceitual DISCUSSÃO É GUERRA.....	58
Figura 9: Os espaços de uma Montagem Conceitual.....	61
Figura 10: A montagem <i>Clinton-Titanic</i>	62
Figura 11: A BMI, o mapeamento básico do Infinito, como um duplo- ambiente de Montagem Conceitual (NÚÑEZ, 2005, p. 1730).....	71
Figura 12: O Infinito Atual: um exemplo de Montagem.....	72
Figura 13: Dinâmica de locução no grupo de professores.....	76
Figura 14: Componentes da Análise de Dados (MILES & RUBERMAN, 1988).....	89
Figura 15: A metáfora do guarda chuva.....	104
Figura 16: A metáfora colcha de retalhos.....	104
Figura 17: A Montagem do Infinito Atual com os argumentos do professor.....	122
Figura 18: O cálculo da área sob o gráfico de uma função.....	130
Figura 19: A metáfora de ligação utilizada pelo professor.....	131
Figura 20: Possíveis metáforas de ligação utilizadas pelos alunos.....	133

Figura 21: A dinâmica da sala de aula, adaptado de FRANT, J. B. et al, 2005, p. 52)..... 134

*Não é no silêncio que os homens se fazem, mas na palavra, no trabalho, na
ação-reflexão. (Paulo Freire)*

Introdução

A reflexão sobre a prática profissional tem sido difundida por diversos autores. Schön (2000) propõe uma formação profissional que interage com teoria e prática, em um ensino reflexivo, baseado no processo de reflexão na ação. Para Serrazina (2004), em uma abordagem reflexiva, o professor reflete sobre a sua prática, aumentando o seu conhecimento profissional à medida que consegue explicitar diferentes aspectos do seu trabalho. Alarcão (2002) alerta que “Ser reflexivo é muito mais do que descrever o que foi feito em sala de aula”, referindo-se à sua preocupação de que a reflexão sobre a prática se torne um discurso vazio.

Esta pesquisa é pautada na reflexão sobre a prática de professores de Cálculo¹, participantes de um grupo de discussão em uma universidade particular do Estado de São Paulo com cerca de 14.000 alunos, a maioria proveniente do ensino básico público, que trabalha durante o dia e estuda à noite. Os índices de reprovação na disciplina de Cálculo chegam a 45%.

Dados que não se restringem a essa universidade, uma vez que a disciplina Cálculo Diferencial e Integral faz parte do currículo de vários cursos universitários, como Engenharia, Matemática, Economia, Administração de Empresas, Arquitetura, Biociências, entre outros, e faz parte de um conjunto de disciplinas denominadas básicas e fundamentais para a interpretação e resolução de problemas específicos de diferentes áreas.

Segundo Barufi (1999), a taxa de reprovação na disciplina Cálculo para Funções de uma Variável Real do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo – SP foi de 66,9%. Conforme Morellatti (2001) de 1993 a 1998 os percentuais de reprovação em Cálculo estiveram entre 50% a 71%, na Unesp de Presidente Prudente – SP. Atualmente, conforme relatos obtidos por professores de Cálculo², tanto de universidades públicas quanto de

¹ Sempre que usarmos a palavra Cálculo estaremos nos referindo à disciplina Cálculo Diferencial e Integral para funções de uma variável.

² Entramos em contato com algumas universidades, mas não conseguimos a liberação da identificação das instituições juntamente com os índices de reprovação.

universidades particulares do estado de São Paulo, ainda temos índices de reprovação preocupantes, chegando a 67,7%.

Assim, essas estatísticas apontam que existem problemas com o ensino de Cálculo.

A trajetória desse trabalho se inicia com as dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos meus alunos que me instigaram a buscar metodologias diferenciadas. Em 1998, eu e mais seis professores da universidade onde trabalho, iniciamos um projeto para o ensino de Cálculo utilizando o *Software Mathematica*. Oitenta por cento das aulas ocorriam em salas de aula convencionais e vinte por cento em laboratórios de informática. Pudemos notar, com a utilização do computador, o entusiasmo e o interesse dos alunos, principalmente em relação à visualização gráfica e aos cálculos referentes a Limites, Derivadas e Integrais, executados com muita rapidez pelo *Software*. Porém, mesmo com esse projeto, as altas taxas de reprovação continuaram. Em virtude disso e da complexidade da sintaxe do *Mathematica*, esse projeto terminou em 2001 e, atualmente, as quarenta e cinco licenças que foram adquiridas do *Software* estão praticamente ociosas.

Esse cenário me levou, inicialmente, a alguns questionamentos: Quais as reais contribuições das aulas no laboratório de informática para a aprendizagem de Cálculo? Como estamos trabalhando com as novas tecnologias na sala de aula? Assim, buscando responder a essas questões e a entender melhor as dificuldades de aprendizagem do Cálculo apresentadas pelos alunos, iniciei, em 2003, o Doutorado em Educação Matemática na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

O Cálculo para funções de uma variável real tem tradicionalmente no seu escopo os conceitos de Função, Limite, Continuidade, Derivada e Integral. Nossa pesquisa centrou-se especificamente sobre o conceito de Integral de Riemann de função de uma variável real, uma vez que essa está inserida num projeto maior intitulado "*Cognição Corporificada, Linguagem e Matemática*", no qual outros conceitos do Cálculo já estavam sendo estudados por outros pesquisadores, sob orientação da Prof. Dra. Janete Bolite Frant.

No Brasil e no mundo, são muitas as pesquisas já realizadas acerca do Ensino e Aprendizagem do Cálculo e, mesmo olhando especificamente para o

conceito de Integral, encontramos várias pesquisas das quais destacamos: Czarnocha (1997, 2001), Turégano (1997), Hong & Thomas (1997), Bezuidenhout (2000, 2002), Melo (2002), Robutti (2003), Tall (1991), Baldino (1998) e Silva (2004). Em síntese, essas pesquisas enfatizam dois resultados: o primeiro é a utilização do computador, apontada como um recurso auxiliar na construção do conceito, permitindo visualizações, animações, simulações que podem desenvolver a intuição dos alunos; o segundo é que os alunos, em geral, concebem a Integral como uma série de procedimentos e algoritmos, não conseguindo articular os sistemas de diferentes representações, conectar e relacionar esse conhecimento com outros precedentes.

Buscamos, com essa pesquisa, avançar em relação aos resultados já obtidos, pois acreditamos ser necessário considerar e entender melhor os mecanismos cognitivos que permitem pensar sobre um determinado conceito para ensiná-lo.

A Teoria da Cognição Corporificada (LAKOFF & JONHSON, 1980, LAKOFF & NÚÑEZ, 2000) nos trouxe elementos para a reflexão sobre a forma como pensamos e aprendemos conceitos novos, a qual é estruturada, segundo os autores, por uma natureza metafórica, conforme veremos no capítulo 2.

Das pesquisas citadas anteriormente, duas trazem o livro didático de Cálculo como objeto de pesquisa, e as demais têm alunos como sujeitos de pesquisa. Nós optamos por trabalhar com professores de Cálculo, numa perspectiva da reflexão sobre a prática e das contribuições dessa no desenvolvimento profissional.

A investigação sobre a própria prática profissional do professor é, segundo Ponte (2002), um processo privilegiado de construção do conhecimento sobre essa mesma prática, sendo uma atividade de grande valor para o desenvolvimento profissional.

Segundo Tardif (2002), os professores são sujeitos do conhecimento e a prática deles não é somente um lugar de aplicação de saberes produzidos por outros, mas, também, um espaço de produção, de transformação e de mobilização de saberes que lhes são próprios.

Para Tardif (op. cit.), os saberes profissionais, isto é, os conhecimentos, o saber-fazer, as competências e as habilidades que os professores mobilizam

diariamente na sala de aula, parecem ser plurais, compósitos, heterogêneos, pois trazem à tona, no próprio exercício do trabalho, conhecimentos e manifestações do saber-fazer e do saber-ser bastante diversificados, provenientes de fontes variadas e de naturezas diferentes. Tardif identifica e classifica os saberes dos professores em saberes pessoais, saberes provenientes da formação escolar anterior, saberes provenientes da formação profissional para o magistério, saberes provenientes dos programas e livros didáticos usados no trabalho e saberes provenientes de sua própria experiência na profissão, na sala de aula e na escola.

Assim, a concepção que cada professor tem sobre conhecimento, em particular sobre conhecimento matemático, e, principalmente, a forma como ele foi construído durante toda sua formação está intimamente ligada à sua prática pedagógica.

O décimo quinto *ICMI Study 15* – “*International Commission on Mathematical Instruction*” – realizado no Brasil em maio de 2005, discutiu o desenvolvimento e a educação profissional de professores de Matemática no mundo, partindo da premissa de que a educação e o desenvolvimento continuado de professores são essenciais para as oportunidades dos estudantes de aprender Matemática. A aprendizagem sobre a prática e os programas ao redor do mundo são apontados como importantes recursos para pesquisas, teorias, práticas e orientações políticas na educação de professores, localmente e globalmente.

O *ICMI 15* foi organizado em duas linhas de trabalhos: a primeira relativa aos programas de formação de professores e a segunda à aprendizagem profissional a partir da prática. Nosso trabalho se insere na segunda linha, para a qual o documento de discussão³ do *ICMI 15* apontava algumas questões norteadoras das quais destacamos:

- Que tipo de aprendizagem parece emergir do estudo (pesquisa) da prática?
- De que modo os professores podem estar aprendendo mais sobre matemática, sobre a aprendizagem matemática dos estudantes, e sobre o ensino de Matemática, quando eles trabalham sobre registros ou experiências na prática?
- Como a linguagem desempenha um papel na aprendizagem da prática?

³ Esse documento pode ser encontrado em <http://www-personal.umich.edu/~dball/icmstudy15.html>

- Qual o tipo de linguagem para discutir o ensino e a aprendizagem de matemática – linguagem profissional – que é desenvolvida entre professores quando eles trabalham na prática?

Além da motivação pessoal, essas pesquisas trazem à tona a importância e a necessidade de continuar com pesquisas em Educação Matemática que enfatizem a prática do professor como elemento essencial para a compreensão dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, em particular do ensino e da aprendizagem de Cálculo.

Optamos, assim, por formar um grupo de discussão com outros professores de Cálculo⁴, para refletirmos sobre as nossas práticas, em particular sobre as nossas aulas de Integral, buscando nesse grupo de pessoas o diálogo, a discussão e a reflexão sobre o meu caminhar e sobre a nossa própria prática enquanto grupo. Desse modo, olhamos para os professores de Cálculo não como sujeitos de pesquisa, mas como colaboradores, como participantes, como coadjuvantes na pesquisa.

Convidamos os professores de Cálculo que trabalham na mesma instituição que eu para montarmos o grupo de discussão, observando o mesmo perfil de formação profissional que o meu, ou seja, todos do grupo também têm formação em matemática “pura” até o mestrado. As dificuldades e questionamentos de como lidar com os problemas de ensino e aprendizagem do Cálculo, de como melhorar a prática também preocupam esses professores. A impressão que temos é de que não estamos prontos para enfrentar a sala de aula e todos os elementos que intervêm no dia-a-dia da docência. Dessa forma, questionamos de que modo a elaboração de grupos ou comunidades de discussão e reflexão sobre a prática impacta o nosso desenvolvimento profissional. E é nesse contexto que formulamos o problema dessa pesquisa.

⁴ Os participantes da pesquisa serão descritos no capítulo 2.

O problema da pesquisa

A presente pesquisa tem por objetivo investigar e analisar como a discussão e a reflexão, no âmbito de um grupo de professores de Cálculo, podem contribuir para o desenvolvimento profissional dos participantes desse grupo, partindo do que os professores efetivamente falam sobre a sua prática, em particular sobre suas aulas de Integral de Riemann para funções de uma variável real.

Dessa forma, a linguagem se torna elemento central desse trabalho e, conseqüentemente, das questões elaboradas, considerando-se, inicialmente, o referencial teórico-metodológico e, num segundo momento, tais questões são reestruturadas a partir dos direcionamentos tomados nos diálogos entre os professores.

Três indagações nortearam nossa investigação:

- Como os professores caracterizam conceito e quais as implicações desta caracterização na sua prática pedagógica?
- Quais os argumentos utilizados pelos professores na reflexão sobre o ensino e a aprendizagem dos processos infinitos subjacentes ao conceito de Integral?
- Quais as contribuições do grupo de discussão sobre a própria prática no desenvolvimento profissional?

A estrutura da tese

No intuito de organizar a pesquisa realizada, apresentamos esse trabalho em três capítulos.

O primeiro capítulo objetiva apresentar um panorama das pesquisas já realizadas e correlatas ao tema desse trabalho, levantando as lacunas existentes e apontando as contribuições pretendidas, além de situar o problema de pesquisa a partir das escolhas teóricas. Apresentamos uma revisão da literatura a que tivemos acesso, em dois blocos: o primeiro referente à reflexão sobre a prática

profissional do professor e desenvolvimento profissional; o segundo sobre o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral.

O segundo capítulo trata do referencial teórico metodológico que adotamos para a pesquisa, que é pautado na articulação entre a Teoria da Cognição Corporificada (LAKOFF & JOHNSON, 1980; LAKOFF & NÚÑEZ, 2000, 2005) e o Modelo da Estratégia Argumentativa (CASTRO & FRANT, 2002). Complementado tais referenciais apresentamos a Teoria das Montagens Conceituais (FAUCONIER & TURNER, 1998) e as nossas escolhas para as noções de conhecimento, produção de significados, linguagem e conceito. No final do capítulo dois, abordamos a metodologia adotada – a investigação sobre a própria prática (PONTE, 2004) -, assim como os métodos, os participantes, a coleta de dados, ou seja, como se desenvolveu essa pesquisa.

No terceiro capítulo, apresentamos a análise dos dados, a partir do referencial teórico adotado, em três episódios: Episódio I - Falando sobre Conceitos e Intuição; Episódio II - Falando sobre o Infinito e a Integral e, finalmente, Episódio III - A reflexão sobre a prática e o desenvolvimento profissional.

Nas considerações finais buscamos responder às nossas questões de pesquisa a partir da análise realizada e apontar as contribuições dessa no contexto Educação Matemática.

No final do trabalho seguem os anexos: I – As tarefas; II – Termo de Compromisso Ético e III – As transcrições dos encontros de professores.

Capítulo 1

A Revisão da Literatura

Apresentamos em duas etapas a revisão da literatura a que tivemos acesso, correlata ao nosso problema de pesquisa. A primeira refere-se à reflexão sobre a prática profissional do professor e o desenvolvimento profissional, e a segunda sobre o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral, especialmente sobre o ensino de Integral – objeto matemático dessa pesquisa. Buscamos publicações nacionais⁵ e internacionais⁶ recentes⁷ em Educação Matemática.

1.1 Reflexão sobre a prática profissional do professor e o desenvolvimento profissional.

Neste item da revisão buscamos por estudos que justificassem a importância da reflexão sobre a prática para a pesquisa sobre o desenvolvimento profissional do professor.

A reflexão sobre a prática tem sido defendida e difundida por diversos autores. Schön (2000) propõe uma formação profissional que interage com teoria e prática, em um ensino reflexivo, baseado no processo de reflexão na ação. A expressão *conhecer-na-ação* é usada pelo autor para referir-se aos tipos de

⁵ Publicações Nacionais: Dissertações e Teses (PUC-SP, UNESP – Rio Claro, UNICAMP e USP-SP), Zetetiké, Bolema, Anais do ENEM, Anais do EBRAPEM e do EPEM, Educação Matemática em Revista, GEPEM, Vetor Netecclem.

⁶ Publicações Internacionais: Psychology of Mathematics Education – PME, Conference of the European Society for Research in Mathematics Education – CERME, Education Studies Mathematics – ESM, Illinois Council of Teachers of Mathematics – ICTM, Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – SIPEM, Conferencia Interamericana de Educación Matemática – CIAEM, ICME – International Congress on Mathematical Education e ICMI – International Commission on Mathematical Instruction.

⁷ Na maioria dos casos a pesquisa foi realizada de 1998 a 2005, porém algumas publicações anteriores a 1998 foram inseridas devido à importância dos trabalhos para essa pesquisa.

conhecimento que revelamos em nossas ações inteligentes – *performances* físicas publicamente observáveis, como andar de bicicleta, ou operações privadas, como a análise instantânea de uma folha de balanço (contabilidade). O conhecimento que emerge nestas situações de um modo espontâneo e que não somos capazes de torná-lo explícito verbalmente pode ser descrito, às vezes, por meio da observação e da reflexão sobre nossas ações. (SCHÖN, 2000, p.31).

Serrazina (1999), referindo-se ao ensino da Matemática, aponta que a reflexão pode partir de diversos aspectos: uns relativos à organização e gestão de sala de aula; outros relativos à compreensão matemática, isto é, à medida que se “conversa reflexivamente com a situação”, vai-se sendo capaz de tornar explícito o seu conhecimento matemático – falar sobre os procedimentos e não apenas descrevê-los. Para a autora, ensinar constitui uma forma de reflexão na ação, isto é, reflete-se sobre os acontecimentos e sobre as formas espontâneas de pensar e de agir de alguém, surgidas no contexto da ação, que orientam a ação posterior.

Destacamos as visões e concepções de Serrazina (2004) sobre reflexão e suas potencialidades:

- A qualidade e a natureza da reflexão são muito mais importantes do que a sua própria ocorrência e a reflexão pode ter como objetivo principal não só fornecer ao professor informação correta e autêntica sobre a sua ação, as razões sobre sua ação e as conseqüências dessa ação, mas também pode apenas servir para justificar a ação, procurando defender-se das críticas e justificar-se. (SERRAZINA, 2004, p. 6);
- Só a reflexão não basta; assim ela tem de ter força para provocar a ação, isto é, levar os intervenientes a repensar o seu ensino da Matemática. (Ibid., p.6)
- Um professor que não reflete sobre o ensino atua de acordo com a rotina, aceitando a realidade da escola, e os seus esforços vão ao sentido de encontrar as soluções que outros definiram para ele. Serrazina define, então, o professor reflexivo como “o que busca o equilíbrio entre a ação e o pensamento e uma nova prática implica sempre uma reflexão sobre a sua experiência, as suas crenças, imagens e valores”. (Ibid., p. 8).
- Numa abordagem reflexiva, o professor reflete sobre a sua prática, aumentando o seu conhecimento profissional à medida que consegue explicitar diferentes aspectos do seu trabalho. (Ibid., p. 10)

Corroboramos com as visões expostas até aqui sobre reflexão, porém acreditamos e acrescentamos que o professor sozinho na sua introspecção nem sempre é capaz de observar e explicitar suas ações. O diálogo com outros professores, a análise de vídeos sobre a sua atuação e sobre as ações dos alunos, podem, assim, ajudar nessa explicitação. Segundo Lakoff & Núñez (2000) “a maior parte do nosso pensamento é inconsciente – não o reprimido no sentido Freudiano - mas simplesmente inacessível por introspecção consciente direta”.

Reforçando essa idéia temos o trabalho colaborativo que é apontado por Boavida & Ponte (2002), como uma estratégia fundamental para lidar com problemas que se figuram demasiado pesados para serem enfrentados em termos puramente individuais, como é o caso da investigação sobre a prática. Dentre as justificativas colocadas, destacamos:

Juntando diversas pessoas que interagem, dialogam e refletem em conjunto, criam-se sinergias que possibilitam uma capacidade de reflexão acrescida e um aumento das possibilidades de aprendizagem mútua, permitindo, assim, ir muito mais longe e criando melhores condições para enfrentar, com êxito, as incertezas e obstáculos que surgem. (BOAVIDA & PONTE, 2002, p. 3).

A nossa pesquisa se insere na linha da investigação/reflexão sobre a própria prática, que conforme Ponte (2002) é um processo privilegiado de construção do conhecimento, um processo fundamental de construção do conhecimento sobre essa mesma prática e, portanto, uma atividade de grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que nela se envolvem ativamente. Para o autor, a reflexão e a investigação sobre a prática são conceitos parcialmente sobrepostos, pois não se concebe alguém que faça investigação sobre a prática e que não seja um profissional reflexivo, mas não basta ser reflexivo para fazer investigação.

Assim sendo, reunimos um grupo de professores de Cálculo para a discussão e reflexão sobre a minha prática e sobre a prática de cada professor participante.

Existem várias visões e pesquisas sobre o trabalho colaborativo, mas não entraremos nessa discussão aqui; porém, convém ressaltar que a pesquisa que realizamos não é uma pesquisa colaborativa, conforme alerta Fiorentini (2002, p.

66) “uma dissertação ou tese acadêmica nunca poderá ser considerada como uma pesquisa colaborativa, pois a autoria e o processo de escrita e, portanto, de análise são reservados a uma única pessoa”. Entretanto, o grupo que elaboramos, inicialmente com os objetivos de refletir sobre nossas práticas, melhorar nossas aulas e de contribuir com os objetivos dessa pesquisa acadêmica, não deixa de ser um grupo colaborativo. Citamos como exemplo dessa colaboração, que surge com o decorrer da constituição do grupo e das nossas discussões, a proposta de escrever um livro de Cálculo Diferencial e Integral I.

A importância da investigação sobre a prática é destacada, também, pelas seguintes pesquisas:

Em setembro de 1993, foi fundado na UNESP de Rio Claro o grupo de pesquisa-ação – GPA, cujos participantes são alunos de graduação, de pós-graduação, professores da UNESP, professores da rede pública e privada. Fiz parte desse grupo em 1994, ano de conclusão da minha graduação. Todos os subgrupos do GPA visam produzir alguma intervenção direta sobre condicionantes pedagógicos de salas de aulas e, muitas vezes, é sobre sua própria sala de aula que o participante intervém, formando-se então a figura do professor-pesquisador que toma a sua própria prática como objeto de pesquisa. (BALDINO, 1999, p. 2)

Saraiva & Ponte (2003) reforçam a perspectiva de que o desenvolvimento profissional é um processo que se realiza ao longo de períodos alargados de tempo e que a observação de aulas de outros professores constitui um poderoso ponto de partida para a reflexão sobre a prática profissional. Apontam também que o estudo deles evidencia três fatores susceptíveis de promover o desenvolvimento profissional: o enquadramento favorável à experimentação e ao desenvolvimento profissional; o trabalho de equipe desenvolvido de forma reflexiva, segundo o ritmo, necessidades e interesse dos professores, no contexto natural do trabalho da escola, e o desejo de inovar e de fazer melhor.

O décimo quinto ICMI – “*International Commission on Mathematical Instruction*” realizado no Brasil em 2005, como já dissemos na Introdução, teve como foco o desenvolvimento e a educação profissional de professores de Matemática no mundo. A aprendizagem sobre a prática e programas ao redor do mundo são apontados como importantes recursos para pesquisa, teorias, práticas

e orientações políticas na educação de professores, localmente e globalmente. De uma das linhas de trabalho do ICMI, intitulada “Aprendizagem profissional na e para prática”, destacamos algumas pesquisas:

Lins (2005) indaga se, conforme Perrenoud (1999), “um aspecto essencial da prática profissional de professores de Matemática é agir na urgência e tomar decisões em situações incertas”, como podemos, então, preparar um professor para tratar de situações que são incertas? Lins propõe que essa questão pode ser tratada pela adição de dois componentes para o desenho de projetos em educação de professores de Matemática: o primeiro de promover a habilidade dos professores para ler a produção de significados e a produção de conhecimentos de seus alunos e o segundo de promover a boa vontade dos professores para aceitar as diferenças das produções de significados. A implementação desses dois pontos nos cursos de licenciatura no Brasil pode, segundo o autor, ser dificultada pela separação entre pedagogia e conteúdo matemático que é quase sempre muito forte.

Ball et al (2005) apresentaram uma “*working session*” com o título “A teoria do conhecimento matemático para o ensino”, defendendo a idéia de que o conhecimento matemático dos professores desempenha um papel significativo na forma da qualidade de seu ensino. Um referencial teórico é apresentado: quatro domínios do conhecimento matemático para o ensino são identificados, cada um ligado a um distintivo trabalho que o professor faz. O primeiro é o *conhecimento do conteúdo comum* (CCK) – o conhecimento matemático do currículo escolar. O segundo domínio é o *conhecimento de conteúdo especializado* (SCK) – um conhecimento matemático que professores usam no ensino e que vai além do conhecimento da matemática do currículo em si mesmo. O terceiro domínio, *conhecimento de estudantes e conteúdo* (KSC), reside na intersecção de conhecimento sobre ensino e conhecimento sobre matemática e o quarto domínio reside na intersecção entre *conhecimento sobre ensino e conhecimento e conhecimento sobre matemática* (KTC). Um exemplo é citado pelos autores: calcular a resposta para um problema com vários dígitos (CCK), analisar os erros de cálculo para o problema (SCK), identificar o pensamento do estudante que provavelmente tenha produzido tais erros (SCK) e reconhecer quais manipulações seriam melhor destacadas das características do algoritmo (KTC). Ball et al afirmam que esses dois últimos domínios são próximos daquele

freqüentemente chamado por “conhecimento de conteúdo pedagógico” – uma única montagem de conhecimento matemático e sua pedagogia.

Não concordamos com essa separação dos conhecimentos sobre ensino, pois para nós, a partir do momento em que o professor fala, já está implicitamente embricado o conhecimento matemático e o conhecimento pedagógico do professor, assim como defende Lins (2005) que Matemática e Pedagogia não estão separadas.

Esses trabalhos e muitos outros apresentados no ICMI *Study 2005* vêm reforçar a importância da investigação e reflexão sobre a prática do professor e as contribuições para o seu desenvolvimento profissional e, conseqüentemente, para a melhoria da qualidade de ensino e aprendizagem da Matemática.

No Brasil, segundo o estado da arte da pesquisa sobre “Formação de Professores que Ensinam Matemática” no período de 1978 a 2002, elaborado por Fiorentini et. al (2002), tivemos um total de 112 trabalhos entre dissertações de Mestrado e teses de Doutorado com foco de investigação na formação de professores e no desenvolvimento profissional do professor. As pesquisas foram organizadas em focos e subfocos, dos quais destacamos, no foco “formação inicial”, o subfoco “formação, pensamento e prática profissional dos formadores de professores”.

Entre os quatro trabalhos presentes nesse subfoco, destacamos Brasil (2001) que, segundo Fiorentini, ao investigar as concepções e crenças dos professores que atuam na Licenciatura em Matemática, constatou que alguns desses docentes apresentavam, além de uma visão dicotômica entre bacharelado e licenciatura, concepções absolutistas de Matemática e de seu ensino. Gonçalves (2000), conforme análise de Fiorentini, verificou que a formação teórico-acadêmica de oito formadores de professores de Matemática foi predominantemente técnico-formal, com ênfase quase exclusiva na formação matemática, e que os saberes relativos a como formar professores de Matemática foram adquiridos a partir da prática ou da experiência anterior como professores do Ensino Fundamental e Médio. Os dois trabalhos apontam para a necessidade de se construir, entre os formadores, uma cultura profissional mediada pelo trabalho coletivo, reflexivo e investigativo.

No foco “formação continuada”, temos três pesquisas sobre a própria experiência do formador em formação continuada no subfoco “Estudos sobre a

própria prática de formador” e quatorze estão classificadas no subfoco “Grupos ou práticas colaborativas”. Dentre essas quatorze pesquisas, seis utilizaram a metodologia da pesquisa-ação, apenas uma se refere ao ensino superior e, segundo Fiorentini et al (2002), as principais transformações percebidas por esses estudos foram: os professores tornaram-se mais reflexivos em suas práticas; buscaram melhores condições profissionais; tornaram-se produtores de seus próprios materiais, geraram novas práticas e promoveram mudanças na concepção de Matemática. Há fortes indícios de que o trabalho colaborativo é fundamental para o desenvolvimento profissional dos professores.

Esse panorama sobre as pesquisas desenvolvidas no Brasil mostra que ainda é incipiente a pesquisa em Educação Matemática a partir da prática profissional do professor e, principalmente, no nível superior, conforme aponta Fiorentini:

[...] o campo de pesquisa ligado à formação continuada do professor a partir da prática profissional – o qual envolve saberes, habilidades, competências, pensamentos e práticas – é um terreno ainda praticamente inexplorado, pois a maioria dos saberes didático-pedagógicos veiculados pela Educação Matemática são saberes oriundos das ciências educativas, produzidos quase que exclusivamente sob o paradigma da racionalidade técnica. A sistematização de conhecimentos produzidos a partir da prática profissional pode trazer contribuições relevantes para uma formação inicial mais articulada com as realidades escolares. (FIORENTINI et al, 2002, p. 20).

Com essa revisão da literatura que tivemos acesso, sobre a investigação da prática do professor de Matemática, podemos dizer que no Brasil são poucas as pesquisas nessa linha, principalmente em se tratando de ensino de Cálculo. Contudo, podemos observar também que, as pesquisas – como as apresentadas no ICMI 15 – acenam para uma crescente valorização da prática do professor como elemento essencial de investigação para melhoria do ensino e aprendizagem de Matemática.

O desenvolvimento profissional do professor também tem merecido atenção nas pesquisas. Para Ponte (1997, p. 44):

O desenvolvimento profissional do professor corresponde a um processo de crescimento na sua competência em termos de práticas letivas e não letivas, no autocontrole da sua atividade

como educador e como elemento ativo da organização escolar. O desenvolvimento profissional diz assim respeito aos aspectos ligados à didática, mas também à ação educativa mais geral, aos aspectos pessoais e relacionais e de interação com os outros professores e com a comunidade extra-escolar.

Numa análise comparativa entre desenvolvimento profissional do professor e a formação de professores, Ponte (1995) sintetiza as seguintes características:

Tabela 1: Formação de Professores x Desenvolvimento Profissional*

Formação de Professores	Desenvolvimento Profissional
Tem subjacente uma lógica "escolar".	Processa-se por meio de múltiplas formas e processos (pode incluir a frequência de cursos, mas também outras atividades como projetos, trocas de experiências, leituras, reflexões).
O movimento é essencialmente de fora para dentro (o formando é submetido a um programa de formação previamente construído).	O processo corresponde a um movimento de dentro para fora (o professor, nesta perspectiva, é preponderantemente, sujeito de formação em vez de objeto de formação).
É construída tendo como pressuposto a carência do professor numa certa área do saber.	Parte-se do professor, das suas experiências, dos seus saberes, para os desenvolver.
Tende a ser vista de modo compartimentado, por assuntos.	Parte-se da pessoa do professor como um todo (embora se podendo focar a atenção na análise de temas específicos).
Parte predominantemente da teoria e muitas vezes (talvez na maior parte) não chega a sair da teoria.	Tanto pode partir da teoria como da prática; e, em qualquer caso, tende a considerar a teoria e a prática numa forma interligada.

*Adaptado de Ponte, 1995.

Nossa investigação se insere na linha do desenvolvimento profissional, uma vez que partimos do que o professor efetivamente fala sobre sua prática e não temos uma estrutura escolar subjacente que "guie" nossas ações.

1.2 O Ensino de Cálculo Diferencial e Integral

O ensino de Cálculo Diferencial e Integral tem sido tema de pesquisas apresentadas em vários artigos nacionais e internacionais. Os problemas que surgem aqui no Brasil parecem ser semelhantes em outros países.

Na ocasião do ICME 10 – *International Congress on Mathematical Education* – 2004, Barra, Dapuetto e Impedovo apresentam um resumo da pesquisa sobre ensino e aprendizagem de Cálculo, Probabilidade e Estatística na Itália, de 2000 a 2003 e, especificamente, sobre o ensino de Cálculo, afirmando que tal ensino tem favorecido uma abordagem algébrica, negligenciando outros contextos como, por exemplo, a representação geométrica, a aproximação numérica e a abordagem histórica via problemas significantes.

Segundo os autores, vários pesquisadores da Itália demonstraram que estudantes são capazes, desde o início da escola obrigatória, de lidar com os conceitos de infinito, infinitesimal e limite num nível informal e, mais especificamente, são capazes de compreender os problemas que esses conceitos colocam como: Existem mais números inteiros ou mais números pares? Como você calcula a área de um círculo? Essa compreensão poderia agir como um ponto inicial para o enriquecimento das representações mentais e daí familiarizar gradualmente os estudantes com esses conceitos que demandam um longo período de ensino para serem entendidos. Algumas pesquisas têm recorrido ao estudo das metáforas no ensino e aprendizagem do Cálculo e, em um bom número delas, a tecnologia tem desempenhado um papel fundamental.

Dentre os pesquisadores que têm trabalhado com metáforas no ensino de Cálculo, destacamos um dos trabalhos de Robutti (2003) o qual investiga o papel da utilização da tecnologia e da linguagem na construção do conceito de Integral Definida. Após uma seqüência de atividades com a calculadora TI89, ilustrando o cálculo da área sob uma curva por aproximações de somas finitas das áreas de retângulos, o professor institui a metáfora da “calculadora ideal” que conseguiria efetuar os cálculos que a calculadora real não pode executar, como o de somar infinitas áreas.

Segundo Robutti (2003, p. 8):

Este exemplo dá uma sugestão para pesquisadores em Educação Matemática: a possibilidade de que o *Embodied Cognition* (cognição corporificada) pode fornecer ferramentas (isto é, metáforas) na interpretação de situações de aprendizagem de um ponto de vista cognitivo. Neste estudo nós observamos que a metáfora introduzida pelo professor é o “*lauching pad*” para os estudantes. De fato ela dá suporte a eles na superação de uma descontinuidade epistemológica, que é a passagem do finito para o infinito, do discreto para o contínuo, marcada pela definição de integral definida como o limite de somas finitas.

Nós também utilizamos a Teoria da Cognição Corporificada “*Embodied Cognition*”, contudo nosso foco de investigação é sobre os professores, e as metáforas serão levantadas a partir dos diálogos sobre a prática profissional e não, necessariamente, introduzidas conscientemente pelo professor com fins didáticos, como foi o caso do exemplo acima.

Em resposta ao Ministro da Educação da França, uma comissão de reflexão sobre o ensino da Matemática, sob a direção de Jean-Pierre Kahane, publica um livro intitulado “*L’Enseignement des Sciences Mathématiques*”, em março de 2002. Em seus quatro capítulos são tratados, respectivamente, os temas: a Informática, Estatística e Probabilidade, a Geometria e o Cálculo. O Cálculo é entendido de forma ampla, com suas diferentes facetas, concernindo, além dos números, os objetos matemáticos mais diversos, como os geométricos ou mecânicos (cálculo baricentro, cálculo vetorial, cálculo tensorial,...), os objetos funcionais e probabilísticos (cálculo diferencial e integral, cálculo das variações, cálculo estocástico,...), até os lógicos (cálculo proposicional, cálculo dos predicados,...).

Segundo a Comissão:

O ensino da matemática se encontra de fato, em relação ao Cálculo, numa fase de desestabilização. Não podemos deixar de perguntar sobre o que pode ser, sobre o que deve ser ensinado de Cálculo hoje; às vezes nos seus conteúdos e nas suas formas, dá-se conta das necessidades culturais, científicas e sociais as quais deve responder. (KAHANE, 2002, p. 172).

A Comissão enfatiza que o desenvolvimento das tecnologias informáticas modificou profundamente as práticas associadas ao cálculo:

A maioria dos algoritmos de cálculo cuja aprendizagem ocupava um tempo importante na escolaridade, principalmente no ensino obrigatório, são hoje implantados em calculadoras. Em recompensa, o cálculo coloca questões novas ligadas principalmente à representação informática dos objetos matemáticos, a performance dos algoritmos utilizados além da sua efetividade... O poder do cálculo das novas ferramentas modifica assim profundamente a economia do cálculo e coloca, em termos renovados, aquele da gestão da relação entre cálculo e raciocínio, favorecendo explorações, simulações e experimentações. (ibid., p. 171).

De fato, com as vantagens advindas das tecnologias da informação, a ênfase no ensino pode ser centrada na modelagem e exploração de conceitos; e as tarefas técnicas rotineiras podem ser deixadas para as máquinas. Desde 1985 já encontramos tal proposta com Julián Marías (1985, p. 98):

Os computadores não pensam, não têm inteligência; o que fazem é liberar-nos do pensamento estúpido, puro mecanismo. Eliminam o pensamento 'bruto' e nos deixam livres para pensar, para executar o pensamento lúcido, inteligente.

O Cálculo Integral, objeto matemático dessa pesquisa, é abordado num dos capítulos do livro. A respeito do exemplo paradigmático do cálculo da área sob uma curva de uma função contínua positiva f definida num intervalo I , a Comissão ressalta a importância de se mostrar aos alunos a analogia que existe entre os cálculos encontrados em diversos contextos. Nesse exemplo, seria importante fazer a ligação entre dois pontos de vista: se $A(x)$ designa a área da região delimitada pelo eixo das abscissas, a curva, e as duas retas paralelas ao eixo das ordenadas passando pelos pontos $(a,0)$ e $(x,0)$, a sendo a origem fixada do intervalo I , então A é uma função derivável sobre I , de derivada f . (Figura 1).

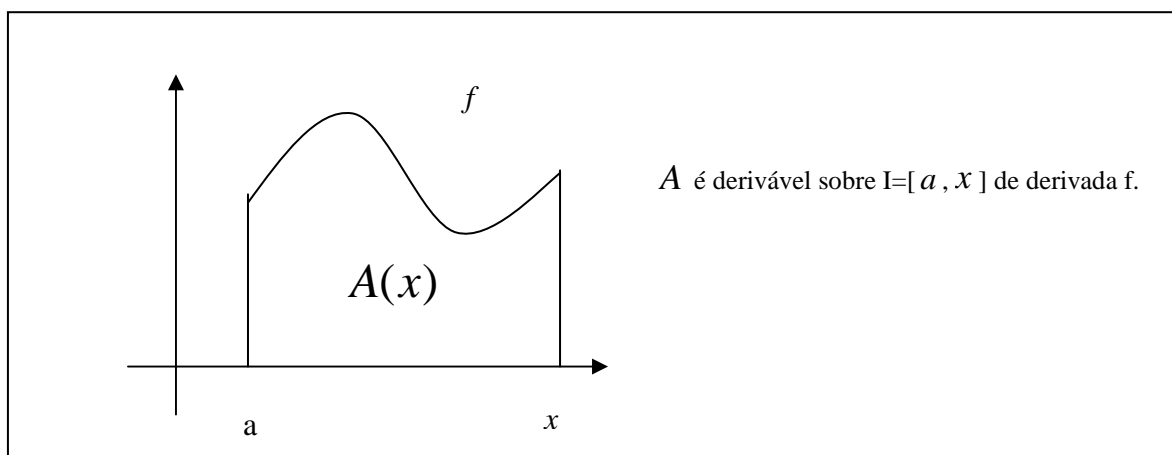


Figura 1. A derivada da área.

Assim como os pesquisadores da Itália, citados no início dessa revisão, a comissão coordenada por Kahane na França acredita que alguns rudimentos do Cálculo, em particular do Cálculo Integral, poderiam ser introduzidos no secundário:

Não se trata de introduzir a Integral no Secundário via a Integral de Riemann, mas de mostrar aos alunos a profunda analogia que existe entre os cálculos encontrados em diversos contextos. Na Universidade, estas questões poderão ser retomadas e teorizadas no contexto da Integral de Riemann. (KAHANE, 2002, p. 247).

As conclusões e recomendações da comissão sobre o ensino de Cálculo na França, são as seguintes:

- Reforçar ao longo da escolaridade as relações entre raciocínio e Cálculo;
- Visar ao desenvolvimento de um Cálculo instrumentado de forma inteligente e controlada;
- Equilibrar a relação entre cálculo exato e cálculo aproximado;
- Diversificar as relações do cálculo conforme as experiências;
- Enriquecer os contextos matemáticos do Cálculo e reforçar a relação com outras disciplinas;
- Prever os equipamentos necessários;
- Adaptar a formação dos professores. (Ibid., p. 252).

Corroboramos com essas idéias, principalmente com a recomendação de que é necessário complementar a formação dos professores por meio de uma formação continuada, criando em cada estabelecimento equipes de professores cujas competências se completam eficazmente. Assim, nenhum professor poderá ter hoje a ambição de dominar o Cálculo dentro dessa diversidade e a

complementaridade das competências no seio das equipes deve ser trabalhada e construída (KAHANE, 2002). Isso vem confirmar a necessidade da formação de grupos de professores nas Universidades para a discussão dos problemas inerentes ao ensino de Cálculo.

Nos Estados Unidos, a discussão sobre o ensino de Cálculo ganha força com o projeto chamado “*Calculus Reform*”, iniciado em 1986. Em 1988, a Fundação Nacional de Ciência incentiva os projetos do movimento em prol da reforma do ensino de Cálculo por meio de 43 premiações, totalizando quase sete milhões de dólares (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 1991; TUCKER & LEITZEL, 1995, apud MURPHY⁸). Quase todos os projetos apostaram no uso de computadores ou calculadoras gráficas, visando ao aprendizado dos conceitos do Cálculo pela ênfase nas representações numérica, geométrica e analítica, podendo ajudar o aluno na construção de interconexões entre as várias formas de representações.

De acordo com Hughes Hallett⁹, o impacto do “*Calculus Reform*” pode ser observado pela grande variedade de problemas, inserção das representações (gráfica, numérica, analítica) e da tecnologia nos livros textos de Cálculo; afirma também que o maior impacto desse projeto é a criação de uma comunidade de matemáticos que inovam e refletem sobre o ensino de Cálculo.

O projeto “*Calculus Reform*” teve grande influência no ensino de Cálculo no Brasil a partir dos anos 90, principalmente na utilização dos programas CAS – *Computer Algebraic Systems* – nos cursos introdutórios de Cálculo das Universidades. Como exemplo, apontamos o projeto PROIN - Programa de Apoio à Integração Graduação Pós-Graduação, iniciado em dezembro de 1995, na Universidade Federal de São Carlos, tendo por objetivo central a melhoria do ensino das disciplinas básicas de Matemática, utilizando recursos computacionais como os programas CAS - *Mathematica*, *Maple V* e *Matlab* -. Segundo o coordenador do projeto:

Um grave problema que atinge os cursos básicos de graduação da UFSCar são as altas taxas de reprovação (na Matemática em média 47%). Estas taxas devem-se principalmente aos seguintes fatores: má formação prévia do aluno (segundo grau), classes

⁸ Disponível em <http://www.mste.uiuc.edu/users/Murphy/Papers/CalcReformPaper.html>

⁹ Disponível em <http://math.arizona.edu/~dhh/NOVA/calculus-conceptual-understanding.pdf>

muito numerosas (falta de professores), metodologias de ensino arcaicas e lineares, falta de apoio ao ensino de graduação (equipamentos e treinamento de recursos humanos) e distanciamento entre a Pós-Graduação e a Graduação. (MALAGUTTI, 1995)¹⁰.

Em 1990, inicia-se na Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP –, o projeto chamado “*Cálculo com Aplicações*”, que desde então passou por várias reestruturações, ampliações e conseguiu importantes apoios institucionais como o do PROIN/CAPE/89¹¹. Ressaltamos que esse trabalho vai além da simples utilização da tecnologia nas aulas de Cálculo, pois com o amadurecimento das experiências durante vários anos de projeto foi criado, segundo as autoras, um *ambiente de ensino e aprendizagem*, composto por: Oficina de Trabalho, Atividades de Laboratório, Projetos, Oficina de Estudos, Espaço Aberto, Sarau, Módulos Animados, Mostra de Mão Dupla. De acordo com Figueiredo et al (2005), o projeto baseia-se numa proposta pedagógica em evolução contínua, que se apóia no tripé: incorporação de novas tecnologias em sala de aula, ensino por meio de projetos, e trabalho reflexivo em equipe e relata:

Em nossa vivência, a ferramenta computacional, utilizada para o desenvolvimento das atividades de laboratório e dos projetos, foi um grande modificador tanto concreto quanto subjetivo, interferindo no funcionamento da disciplina, além de interferir na motivação e no envolvimento dos integrantes da equipe. (FIGUEIREDO, 2005, p.6).

A trajetória dos professores integrantes do projeto “*Cálculo com aplicações*” foi objeto de investigação do Doutorado de Souza Jr (2003), o qual afirma que os interesses do pesquisador não convergiam com os interesses do grupo:

Quando nos constituímos como pesquisador participante percebemos que nosso interesse e do grupo não coincidiam. O interesse do grupo era melhorar sua prática pedagógica; o nosso era o de compreender a trajetória que esse grupo percorria para alcançar seu objetivo. (SOUZA JR, 2003, p. 198).

¹⁰ Disponível em <http://www.dm.ufscar.br>

¹¹ Programa de Integração Graduação/Pós-Graduação da Coordenadoria de Apoio ao Ensino Superior

Esse fato não ocorreu no nosso grupo de discussão, pois os interesses de todos os participantes, inclusive o meu, convergiam para o mesmo ponto, isto é, o de melhorar a própria prática no ensino de Cálculo.

Outras universidades, tanto públicas quanto particulares, também iniciaram projetos semelhantes. A universidade onde trabalho, utilizou o *Software Mathematica*, contudo os altos índices de reprovação continuam, conforme vimos na introdução desta tese.

Apresentamos, até então, considerações e propostas amplas sobre o ensino de Cálculo em três países, Itália, França e Estados Unidos. Olhamos, agora, para publicações específicas, artigos, teses, dissertações e, mais adiante, retomamos essas visões, numa análise comparativa com os resultados obtidos das pesquisas que serão apresentadas. Iniciamos com as pesquisas que recorreram à utilização da tecnologia no ensino de Cálculo.

Scucuglia (2006), baseado na perspectiva epistemológica Seres-Humanos-com-Mídias, a qual ressalta o papel das mídias na produção de conhecimento matemático, discute como estudantes do primeiro ano de graduação em Matemática investigam as Somas de Riemann, a Integral Definida e o Teorema Fundamental do Cálculo, a partir da utilização da Calculadora Gráfica TI-83. O autor afirma que o processo de experimentação com calculadoras gráficas condicionou o contexto investigativo das estudantes, as quais recorriam, inicialmente, a noções intuitivas e notações simplificadas, o que possibilitou, segundo o autor, o engajamento gradativo das alunas em “discussões matemáticas dedutivas”.

Tall (1991), para provar o Teorema Fundamental do Cálculo, defende a noção de “*local straightness*”, a qual, segundo o autor, pode conduzir a intuições poderosas que serão úteis para o rigor da prova matemática mais tarde. Por exemplo, se tivermos o gráfico de $f(x) = \sin x$ para x variando de -3 a 3 , podemos, usando um *Software* para plotar o gráfico dessa função para x variando de 1.002 a 1.006 , e o gráfico apresentado pelo *software* nesse intervalo pequeno será o de uma reta (Figura 2), ou seja, para variações muito pequenas de x , o gráfico $f(x) = \sin x$ praticamente se aproxima de uma reta; isso é a noção de *local straightness*. Assim, sendo $A(x)$ a área entre o gráfico de f e o eixo x de um valor fixo a até x , ficaria muito mais fácil de ser percebido,

visualizado que para valores muito pequenos de h , teríamos $A(x+h) - A(x)$ aproximadamente igual à área do retângulo de base h e altura $f(x)$, ou seja, $A(x+h) - A(x) \cong f(x) \cdot h$, ou $\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \cong f(x)$, donde $A'(x) = f(x)$ para $h \rightarrow 0$ e f contínua.

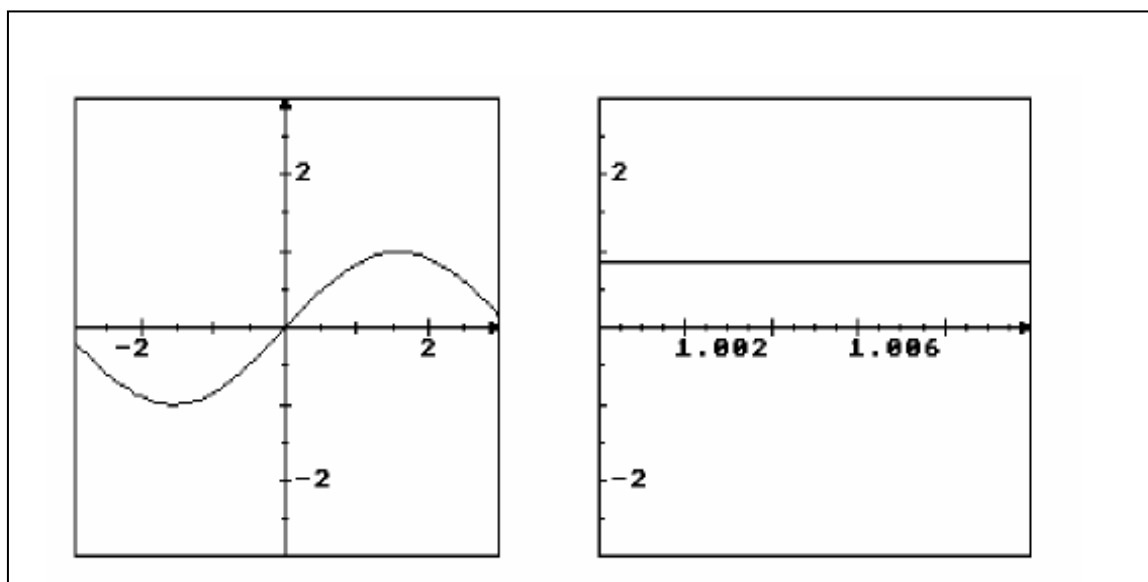


Figura 2. Aplicação da *Local Straightness* para a função seno. (TALL, 1991, p. 6).

Em trabalhos e palestras mais recentes, Tall (2002, 2004) defende que podemos categorizar os modos de representação em três mundos:

- Incorporado (*Embodied*): baseado nas percepções e ações humanas num contexto do mundo real, incluindo, mas não limitando os aspectos enativo (“*enactive*”¹²) e visual.
- Simbólico-processual: combinando o papel dos símbolos em aritmética, álgebra e cálculos simbólicos, baseado na teoria em que esses símbolos agem duplamente como processo e como conceito.
- Formal-axiomático: uma abordagem formal iniciando da seleção de axiomas e fazendo deduções lógicas para provar teoremas. (TALL, 2002, p. 3).

Tall (2002) afirma: “Lakoff usa o termo num caminho diferente, afirmando que toda matemática é incorporada, significando que ela depende das construções na mente humana e compartilha significados na cultura matemática”. Apesar de concordar com essa visão, Tall diz que ela reduz a importância do

¹² Representação através da ação.

mundo *Embodied*, referindo-se, especificamente, ao pensamento construído pela percepção sensória como oposto à operação simbólica e à dedução lógica, ou seja, o termo *Embodied*, para Tall, está muito ligado ao mundo físico, ao mais “concreto”, mais “palpável”, e como veremos no capítulo 2, não é o que ocorre sempre na Teoria da Cognição Corporificada.

A tese defendida por Turégano (1997) é a de que os estudantes podem aprender intuitivamente conceitos de Cálculo, sem a formalização do cálculo com regras e algoritmos usuais, usando visualização no computador para dar sentido ao conceito de Integral Definida e suas propriedades, por meio da idéia de áreas sob uma curva. Levando em conta a gênese histórica do conceito de Integral, o autor propõe um modelo teórico baseado num estudo de Lesbegue (1928) sobre magnitude e Integral, o qual ele usou na composição de uma proposta didática para introduzir o conceito de Integral, via sua definição geométrica, para estudantes do secundário que não tinham sido ainda iniciados no estudo do Cálculo.

Observamos que os trabalhos de Scucuglia, Tall e Turégano apontam para as contribuições da tecnologia em relação ao desenvolvimento do pensamento intuitivo, assunto esse que também teve presença marcante nos encontros de professores e mereceu nossa atenção na análise, no episódio 3.1.2 Parte I: A intuição é o ponto de partida.

HONG (1997) desenvolve questões para investigar o entendimento do conceito de Integração, usando o computador baseado em módulos de trabalho. As soluções dadas pelos alunos mostram que eles têm uma tendência a ver os cálculos da Integral como uma série de procedimentos e algoritmos associados e não desenvolvem uma compreensão de alguns conceitos, os quais deveriam dar-lhes versatilidade de pensar.

Mello (2002), em sua dissertação de Mestrado, apresenta uma proposta computacional para o ensino e a aprendizagem do conceito de Integral, fundamentado na psicologia cognitiva de Piaget e de Vygotsky e na teoria construcionista de Papert. A pergunta colocada é: “Os alunos são capazes de construir o conceito de Integral, por meio de atividades que levem em conta sua gênese, utilizando um *Software Matemático*?” (p. 76). O autor elabora uma seqüência didática, utilizando o *Software Maple*, sobre a aproximação da área entre o gráfico de uma função f e o eixo das abscissas, por soma da área de

retângulos (Figura 3). Destacamos, abaixo, as respostas apresentadas pelos alunos à seguinte questão: “É possível calcular exatamente a área da figura abaixo do gráfico de f ?”:

O retângulo não pode fechar por completo a figura.
 Porque não existem mais bases dos retângulos.
 Sempre haverá espaços entre a parábola e os retângulos.
 Porque, por mais que se construíssem retângulos, não se conseguiria chegar ao resultado final.
 Independente do número de retângulos, sempre haverá espaços que não estão sendo preenchidos. (MELLO, 2002, p.123).

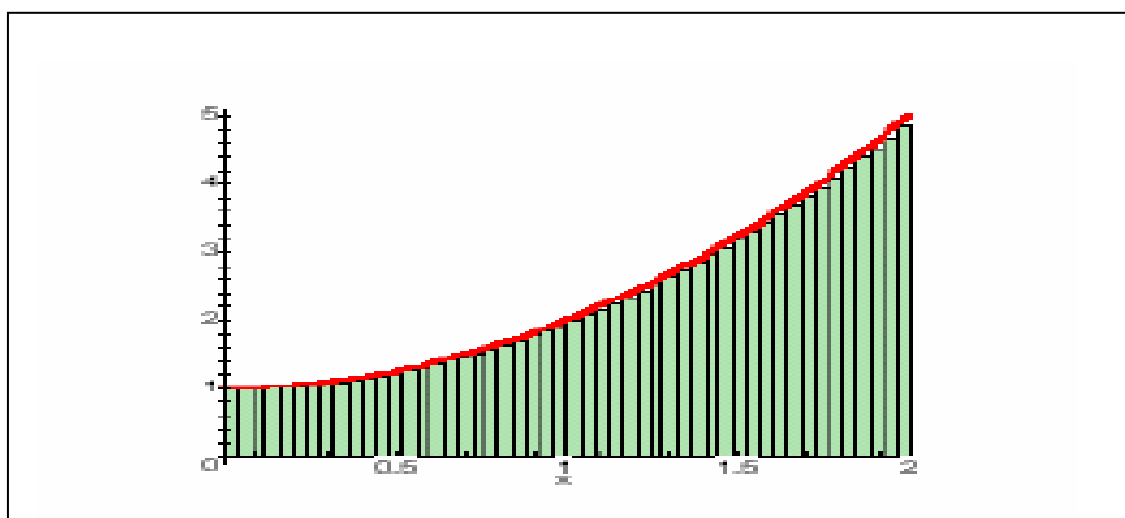


Figura 3. Cálculo da área por aproximação de retângulos. (MELLO, 2002, p. 91).

Afirmações como as observadas por Mello também foram levantadas nos discursos de alunos de graduação que foram submetidos às tarefas dessa tese (Anexo I) e nosso objeto de investigação foram as reflexões que os professores, participantes do grupo, construíram a partir de respostas como essas e das experiências da prática docente quando se tratavam, neste caso, dos processos infinitos subjacentes ao conceito de Integral, discussão essa que será aprofundada no Episódio II - Falando sobre o Infinito e a Integral.

Acreditamos que as lentes com as quais investigamos os diálogos dos professores, a Teoria do Cognição Corporificada juntamente com o Modelo da Estratégia Argumentativa, contribuíram para continuar esse diálogo, pois esses modelos nos permitiram levantar as frases dos professores enunciadas, quase que rotineiramente, inconscientemente, na discussão sobre a prática, os argumentos e as metáforas empregadas.

Além dos trabalhos que propõem o uso da tecnologia para a melhoria do ensino de Cálculo, Baldino (1998) defende uma abordagem infinitesimal:

Os alunos continuam a pensar como físicos. Achem que 0,999... é menor que um e, quando descrevem o que pensam, embora sem usar o termo, indicam que vêem ali uma diferença infinitesimal. Outra aluna me disse que o limite de $1/n$ quando n tende ao infinito é muito pequeno, mas não é zero; “é zero vírgula zero, zero, zero..., infinitos zeros, depois 1. Os alunos vivem imersos em uma cultura infinitesimal. Para eles os livros-textos escritos segundo o rigor da teoria Weierstrassiana são literalmente indecifráveis. (p. 2).

O exemplo da Integral Definida é apresentado para ilustrar a dificuldade que os alunos têm quando buscam ler um livro para solucionar suas dúvidas, pois, segundo Baldino, os livros são escritos para quem não precisa aprender com ele, por conta da preocupação com o rigor Weierstrassiano. Para o pesquisador, não existe motivo para não utilizar os infinitésimos¹³ num curso de Cálculo e para o Teorema Fundamental do Cálculo, propõe que pensemos não no gráfico da função f , mas no gráfico de F , a primitiva de f , $F' = f$ (Figura 4).

Sendo $\frac{dF}{dx} = F'(x)$, que escrita em notação diferencial dá $dF = F'(x)dx$ e $dF = F'(x)dx = f(x)dx = dA$ (dA é chamado elemento de área), interpretando-se dF e dx como catetos de um retângulo infinitesimal no ponto $(x, F(x))$ do gráfico de F , conforme o “zoom infinito” na Figura 8, e somando a infinidade de parcelas dA por meio da Integral, por um lado tem-se a área sob o gráfico de f , mas, por outro, tem-se a soma das variações infinitesimais dF de F , cujo resultado é $F(b) - F(a)$.

¹³ Ao redor de cada número real há uma infinidade de outros que estão infinitamente próximos dele. O conjunto desses números infinitamente próximos dele é chamado de **nômada** do número real. Os números da nômada do zero são chamados **infinitésimos**. (BALDINO, 1998, p. 97).

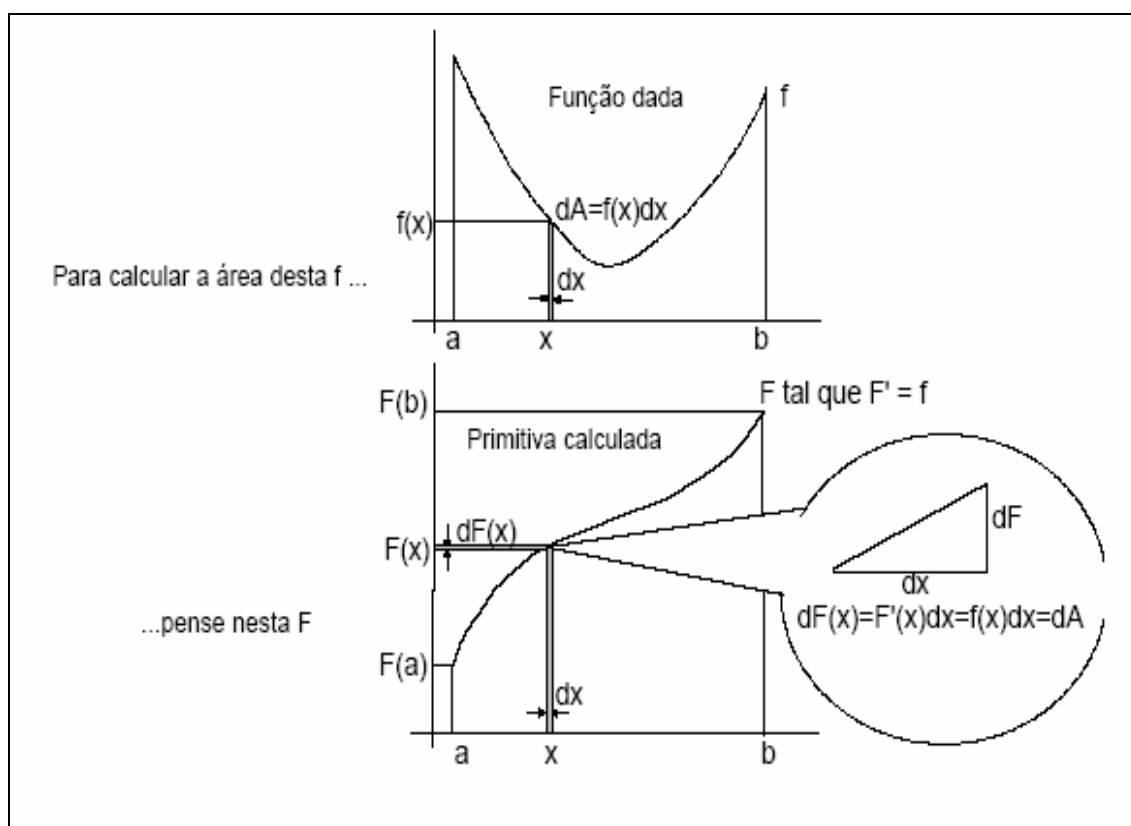


Figura 4. O TFC segundo Baldino. (1998, p. 23).

Ainda de acordo com Baldino (1998):

O ensino tradicional de Cálculo não lança mão de argumentos como esse, primeiro porque abomina os infinitésimos, segundo porque a notação, no ensino tradicional, não tem a função de expressar o conceito, mas sim de conferir a autonomia ao rigor simbólico por meio do cálculo proposicional em que se arquiva o conhecimento matemático. (p.23).

Núñez (2003), do mesmo modo que Baldino, critica a ênfase predominante no ensino de Cálculo do formalismo proveniente da teoria Weierstrassiana, ao analisar os aspectos cognitivos do conceito de continuidade, afirmando que primeiro os alunos são introduzidos à continuidade natural por meio de conceitos e exemplos consistentes com os padrões inferenciais sustentados pelo sistema conceitual humano, como por exemplo, uma função é contínua se é possível desenhar o seu gráfico sem tirar o lápis do papel. Depois vem a definição de Cauchy-Weierstrass para continuidade, que tem uma estrutura cognitiva inferencial diferente e que causa conflito com a idéia aprendida previamente:

A cultura e a prática da matemática acabam por agravar ainda mais o problema: jamais dizem aos alunos que a nova definição é, na verdade, uma idéia humana corporificada totalmente diferente, e o que é pior, dizem aos alunos que a continuidade de Cauchy-Weirstrass captura a própria essência da antiga idéia, que sendo “vaga” e “intuitiva” deve ser evitada. Essa essência é normalmente compreendida como independente da compreensão humana, da atividade social e de empreendimentos filosóficos. (NÚÑEZ, 2003, p. 15).

Martin-Gonzalez (2002) analisam as respostas de um grupo de estudantes do primeiro ano de Matemática de uma universidade, em um questionário, com o objetivo de determinar as dificuldades que eles têm quando são desenvolvidas tarefas não-rotineiras relacionadas a Integrais Impróprias. São colocadas as seguintes perguntas de pesquisa: Como os estudantes reagem quando têm na frente tarefas de um tipo não-algorítmico, perguntas de raciocínio e questões não-rotineiras no tópico em que nós estamos envolvidos? Em que sistema de representação eles se sentem mais confortáveis? São conscientes dos resultados paradoxais que podem alcançar? Podem articular diferentes sistemas de representação nas perguntas relacionadas às Integrais Impróprias? Estabelecem algum relacionamento entre o conhecimento novo com o precedente, particularmente às Integrais Definidas, Séries e Seqüências? Os autores, por meio da interpretação dos resultados fornecidos pelos estudantes, estabeleceram algumas conclusões parciais da pesquisa, afirmando que há dificuldades em articular os sistemas de diferentes representações e dificuldades para conectar e relacionar este conhecimento como uma generalização de conceitos precedentes, como a Integral Definida, Séries e Seqüências.

Dubinsky (2000) relata uma inesperada surpresa ao observar as respostas de alguns estudantes, que foram claramente não-baseadas na aproximação pela soma de Riemann. Foi observada uma coerente intuição do cálculo de áreas na mente dos estudantes, muito diferente da intuição que o curso de Cálculo tinha tentado desenvolver, concluindo que a desenvolvida pelos alunos é similar às de Arquimedes, Cavalieri, Wallis e Roberval.

Das pesquisas a que tivemos acesso, duas analisaram livros didáticos de Cálculo: Baruffi (1999) e Silva (2004), sendo que a primeira pesquisadora faz uma análise geral e o outro analisa especificamente a noção de Integral, como vemos a seguir.

Baruffi (1999), em sua tese de Doutorado, baseada no referencial teórico da rede de conhecimentos e significados de Pierre Lévy, analisa 24 livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral e conclui que não é na falta de bons livros que residem as dificuldades com o ensino de Cálculo, apesar de alguns apresentarem propostas que mais se aproximam daquelas de um curso de Análise Real. A autora aponta também a importância da utilização do computador, como sendo instrumento facilitador, que abre novos horizontes, possibilitando o estabelecimento de múltiplas relações e a negociação de significados.

Silva (2004) analisa, em dois livros didáticos (Guidorizzi e Stewart), o conteúdo Integral, à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e os resultados mostram que, se os livros forem bem explorados, podem levar o aluno ao entendimento, por meio da utilização das conversões, com visualização gráfica dos conceitos em uma situação contextualizada e motivadora. Os dois livros estudados apresentam o assunto na mesma seqüência: antiderivada ou primitiva, definição de Integral, técnicas de integração e aplicações. Silva conclui que os dois autores utilizam vários registros, não só na representação do conteúdo, como também nos exemplos e enunciados dos exercícios propostos. Os tratamentos de conversões são, também, explorados.

As duas pesquisas apresentadas acima afirmam que existem bons livros didáticos de Cálculo. Porém, de certo modo, quando Baruffi acrescenta ao livro o computador, aponta que só sua leitura não dá conta da negociação de significados e Silva, quando diz “se for bem explorado”, parece também corroborar com o fato de que como o livro está não leva ao entendimento do aluno. Nós concordamos com a visão de Baldino (1998) acerca dos livros didáticos de Cálculo ao afirmar que são complexos e escritos para o matemático-professor.

As teses de doutorado de Sad (1998) e de Rezende (2003) recorrem a uma abordagem epistemológica para analisar os problemas com o ensino e a aprendizagem do Cálculo. Na primeira pesquisa se realiza uma análise epistemológica de aspectos da aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

Os seguintes resultados e direcionamentos são apontados:

- O processo ensino/aprendizagem, particularmente do Cálculo, está centralizado em que: aprender é produzir significado.

Como a produção de significados é cognitivamente dinâmica, devemos atentar para as mudanças e relações entre Campos Semânticos;

- As diversificações encontradas na função semântica da linguagem matemática em diferentes textos, incluindo estudos históricos-epistemológicos da matemática, reforça a importância de dedicarmos uma maior atenção à enunciação na qual são produzidos os significados para o texto lido.
- A fala é uma construção social, cuja demanda provém de um interlocutor e carrega os significados através da linguagem. Os objetos do cálculo são concebidos em meio de diferentes demandas por parte dos alunos. Portanto, é primordial na aprendizagem, dar maior importância à fala dos alunos se queremos analisar como e o que estão aprendendo.

Os procedimentos didáticos/pedagógicos que se impõem como necessários à aprendizagem, à observação da formação de significados matemáticos no início do 3º grau, devem privilegiar e preocupar-se com as atividades em grupos (socialização dos significados, diálogos e críticas), as diferentes interpretações de textos, as narrativas como diários de classe, e outras, onde o papel central é a “exposição” do aluno, e não do professor. (SAD, 1998, p. 521).

Rezende (2003) se refere ao ensino de Cálculo, a partir do entrelaçamento dos fatos históricos e pedagógicos, tendo como pano de fundo as dualidades essenciais e os mapas conceituais do cálculo. Explicita cinco macro-espços de dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica: o eixo discreto/contínuo; o eixo da permanência/variabilidade; o eixo do finito/infinito; o eixo local/global; e o eixo da construção/sistematização. O autor afirma que o lugar-matriz das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo é o da omissão/evitação das idéias básicas e dos problemas construtores do Cálculo no ensino da Matemática em sentido amplo.

Com um primeiro panorama sobre pesquisas já realizadas acerca do ensino do Cálculo, podemos afirmar que, tanto nacionalmente como internacionalmente, tanto pelas propostas amplas dos países citados – Itália, França e Estados Unidos – no início dessa revisão, como nas pesquisas individuais, os problemas do ensino de Cálculo parecem convergir para os mesmos fatores: ênfase nos procedimentos e técnicas, falta de conexão entre as diferentes representações (algébrica, geométrica, numérica), falta de conhecimentos prévios (pré-requisitos) por parte do aluno, dificuldades com o rigor dos conceitos do Cálculo etc. Se olharmos para as recomendações ou sugestões, também são praticamente as mesmas: utilização do computador,

iniciar com rudimentos do Cálculo no Ensino Médio, levar em conta como o cálculo foi historicamente estruturado, valorizar o pensamento intuitivo etc.

Apesar dessa enorme quantidade de pesquisas e de informações, ainda temos problemas que são diagnosticados pelos altos índices de reprovação na disciplina.

Essa pesquisa pretende avançar em relação aos resultados já obtidos, primeiramente por considerar como foco o professor de Cálculo - o que não ocorre na maioria das pesquisas -, o qual é um elemento essencial nesse cenário, se quisermos compreendê-lo; em segundo, por investigarmos o papel da linguagem e da corporeidade na discussão e reflexão sobre a prática do professor.

Capítulo 2

A Fundamentação Teórica – Metodológica

Neste capítulo apresentamos, inicialmente, as premissas que adotamos para conhecimento, produção de significados, conhecimento profissional e linguagem. Em seguida, os modelos teóricos da Cognição Corporificada e da Estratégia Argumentativa que, articulados, forneceram elementos para investigar a prática a partir dos diálogos e, finalmente, os procedimentos metodológicos.

2.1 Conhecimento

Na Filosofia Cartesiana a razão é o elemento primordial na condução do conhecimento. Em seu Discurso do Método, publicado em 1637, Descartes aponta que seu propósito não é ensinar o método que cada um deve seguir para bem conduzir sua razão, mas somente mostrar de que modo procurou conduzir a sua:

[...] formei um método que me parece fornecer um meio de aumentar gradualmente meu conhecimento e de elevá-lo pouco a pouco ao ponto mais alto que a mediocridade de meu espírito e a curta duração de minha vida lhe permitirão alcançar. (DESCARTES, 1996, p. 6).

O ponto mais alto a que se refere Descartes é, segundo Granger (1973), a sabedoria, isto é: “O perfeito conhecimento de todas as coisas que o homem pode saber, tanto para a conduta de sua vida como para a conservação de sua saúde e a invenção de todas as artes”, mas, a fim de que este conhecimento seja tal, acrescenta que “é necessário que seja deduzido das causas primeiras”. (DESCARTES, Livro dos Princípios).

Dessa forma, o conhecimento almejado por Descartes é universal e construído por dedução, e a razão é a sua principal fonte, sendo esta conduzida pelos preceitos seguintes que possibilitariam aumentar o conhecimento no sentido de atingir a sabedoria:

- O primeiro era de nunca aceitar coisa alguma como verdadeira sem que a conhecesse evidentemente como tal;
- O segundo, dividir cada uma das dificuldades que examinasse em tantas parcelas quantas fosse possível e necessário para melhor resolvê-las;
- O terceiro, conduzir por ordem meus pensamentos, começando pelos mais simples e mais fáceis de conhecer, para subir pouco a pouco, como por degraus, até o conhecimento dos mais compostos; e supondo certa ordem mesmo entre aqueles que não se precedem naturalmente uns aos outros;
- Por último, fazer em tudo enumerações tão completas, e revisões tão gerais, que eu tivesse a certeza de nada omitir. (DESCARTES, 1996, p. 23).

Assim, o conhecimento é visto como algo a ser alcançado, a ser adquirido, de maneira linear, partindo do mais simples ao mais elaborado. Essa concepção cartesiana de “aquisição” de conhecimento parece ainda estar presente e nortear, principalmente, o ensino de Matemática. O professor é detentor do saber e deve “transmitir” seu conhecimento aos alunos da maneira mais simples possível, partindo de situações mais elementares, de fácil entendimento, até atingir as situações mais elaboradas.

Essa perspectiva de ensino se enquadra no paradigma positivista: “é possível obter conhecimento objetivo, definindo e manipulando variáveis e realizando medições. As leis da natureza exprimem-se numa linguagem neutra e impessoal” (PONTE, 2004, p.20). É como se tudo funcionasse, independentemente dos sujeitos, ou seja, por meio da linguagem transmite-se o conhecimento do professor para o aluno, e para averiguar se o aluno aprendeu, mede-se o seu conhecimento pela nota obtida na prova.

Novos paradigmas científicos têm trazido outras visões para conhecimento, principalmente nas ciências sociais e humanas, como por exemplo, o paradigma interpretativo: “não há uma estrutura dos significados em si, independentemente das interpretações que os seres humanos fazem desses significados”. (ibid., p.20).

Nesse sentido, nossa pesquisa se insere no paradigma interpretativo, dado que a concepção de conhecimento que adotamos é contrária à de conhecimento como um bem passível de acumulação, como uma caixa inicialmente vazia e que pudesse ser preenchida. Para nós, o conhecimento não pode ser adquirido, transferido ou apropriado e, sim, **produzido pelo sujeito** de modo bastante complexo. Podemos, ao comunicar, transportar informação, mas nunca conhecimento. A metáfora proposta por Frant (2001) é a de conhecimento como uma Faixa de Möebius (Figura 6) em oposição à metáfora da caixa (Figura 5).

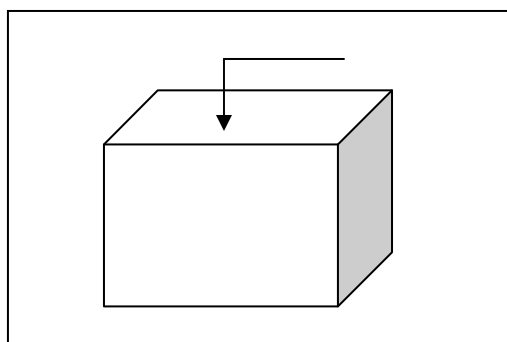


Figura 5. A Caixa



Figura 6: Ilustração de M. C. Escher para a Faixa de Möebius

A faixa de Möebius é uma superfície não orientável do R^3 . Como podemos ver pela Figura 6, não dá para dizer se está dentro ou fora, pois não existe tal divisão, portanto, não falamos, nesse caso, em acumulação de conhecimento, em internalização de conceitos, em medir conhecimento. Segundo Radford (2002), não é possível falar em distinção entre representações externas (símbolos, gráficos, linguagem etc.) e representações internas (formas mentais de processar a informação), como propõe a psicologia cognitiva tradicional.

Na visão de conhecimento da faixa de Möebius não faz sentido distinguir uma linguagem interna, que seria própria do pensar, de uma linguagem externa que viria se superpor a ela para traduzi-la, conforme aponta Bouveresse:

A concepção cartesiana (no sentido chomskiano do termo) dá facilmente a impressão de que nós pensamos de certo modo de fora da linguagem e que nós utilizamos a linguagem como um tipo de código mais ou menos arbitrário para exteriorizar o que pensamos. É esquecer que a linguagem com a qual nos comunicamos é igualmente a linguagem com a qual nós pensamos, que pensamos em certa medida em palavras das

quais nos servimos para comunicar nossos pensamentos. (BOUVERESSE, 1976, p. 36, apud. CASTRO, 1997, p.91).

Enfim, entendemos que o processo de construção do conhecimento é complexo e é algo do domínio da enunciação (LINS (1999), Bakhtin (1995) e outros).

Aceitando que o conhecimento é do domínio da enunciação, esclarece-se que não há conhecimento em livros enquanto objetos, pois ali há apenas enunciados. O que está enunciado no livro é algo morto, acabado, por isso é preciso a enunciação efetiva daqueles enunciados para que eles tomem parte na produção de conhecimentos. (LINS, 1999, p. 89). Desse modo não chamaremos de conhecimento algo que foi dito (oral, escrito, gestual) por outros; o que é dito por outros será considerado por nós como texto.

Nesse contexto, torna-se fundamental observar a linguagem dos participantes envolvidos, a qual engloba, além da fala, os gestos e existe, sobretudo, um conhecimento que parece ocorrer nos “bastidores”, de modo inconsciente, e que discutiremos ao falar da Teoria da Cognição Corporificada.

Em relação à produção de significados, adotamos a concepção dada por Lins: “[...] quando falo de significados não estou me referindo a tudo que numa dada situação eu poderia dizer de um objeto, e sim *ao que efetivamente digo a respeito de um objeto dentro daquela atividade*” (LINS, 1999, p.86).

Dado que investigamos o desenvolvimento profissional dos professores do grupo, é importante colocar, também, o que entendemos por conhecimento profissional.

2.2 Conhecimento Profissional

Tardif (2002) aponta para as principais características do conhecimento profissional dos últimos 20 anos: os profissionais devem se apoiar em conhecimentos especializados e formalizados por intermédio das disciplinas científicas; esses conhecimentos especializados devem ser adquiridos por meio de uma longa formação de alto nível, na maioria das vezes de natureza universitária, entre outras. Tardif acrescenta que de uns vinte anos para cá, o

objetivo do movimento de profissionalização do ofício do professor tem sido exatamente o de desenvolver características como essas para o ensino e formação de professores. O autor critica a tentativa de definir e fixar padrões de competência para essa formação, similarmente à profissão de um médico ou advogado e propõe a seguinte definição: “Chamamos de epistemologia da prática profissional o estudo do *conjunto* dos saberes utilizados *realmente* pelos profissionais em seu espaço de trabalho cotidiano para desempenhar *todas* as suas tarefas”. (TARDIF, 2002, p. 255).

Essa noção de saber adotada por Tardif engloba os conhecimentos, as competências, as habilidades e as atitudes. Esse autor defende ainda que a definição de epistemologia da prática profissional, dada acima, traz conseqüências importantes como: propor um processo centrado no estudo dos saberes dos atores em seu contexto real de trabalho, em situações concretas de ação; que a prática profissional não é um espaço de aplicação de conhecimentos universitários; propõe que se pare de considerar os professores como idiotas cognitivos cuja atividade é determinada pelas estruturas sociais. (ibid., p. 256).

Acrescentamos que para investigar os saberes utilizados pelos professores em seu espaço de trabalho cotidiano, é necessário considerar o que eles *efetivamente* falam sobre suas práticas, em consonância com a definição de Lins (1999) sobre a produção de significados. Mesmo que aparentemente o professor fale somente sobre o conteúdo matemático, ele estará falando implicitamente sobre seu conhecimento pedagógico:

[...] “pedagogia e matemática não são separadas, bem como elas não são separadas em sala de aula. O método pelo qual a investigação e a discussão procedem, geram conhecimentos e compreensões matemáticas e não-matemáticas ao mesmo tempo; tanto como a introdução de noções matemáticas também geram conhecimentos e compreensões matemáticas e não-matemáticas ao mesmo tempo”. (LINS, 2005, p. 5).

Altet (2001, p. 28) fala em “competências profissionais” como sendo: “o conjunto formado por conhecimentos, *savoir-faire* e posturas, mas também as ações e as atitudes necessárias ao exercício da profissão de professor”.

O conhecimento profissional é definido por Ponte como:

[...] o conhecimento necessário para desempenhar com sucesso uma atividade profissional, que se debate com questões bastante diferentes das da vida acadêmica ou da vida cotidiana. Uma atividade profissional envolve tanto processos de rotina como a resolução de problemas concretos num domínio delimitado de prática social. (PONTE, 1998, p. 2).

E no caso dos professores, Ponte afirma que:

[...] o conhecimento profissional envolve o conhecimento relativo à prática letiva na sala de aula e a outros papéis profissionais, tais como a tutoria de alunos, a participação em atividades e projetos da escola, a interação com membros da comunidade e o trabalho em associações profissionais. O conhecimento profissional inclui ainda, num outro plano, a visão do professor sobre o seu próprio desenvolvimento profissional. (ibid., p. 2).

Concordamos com Tardif (2002) de que a prática profissional não é somente um espaço de aplicação de conhecimentos universitários, mas também um espaço de produção de conhecimentos. Desse modo, para que tenhamos avanços na pesquisa em relação à formação de professores, é de essencial importância levar em conta os conhecimentos produzidos pelos professores no exercício de sua profissão.

O conhecimento profissional do professor daqui em diante será entendido como um conhecimento **produzido pelo professor** durante sua formação inicial e ao longo da sua prática docente, a partir de suas vivências sobre ensino e aprendizagem, sobre a dinâmica de uma escola, sobre a dinâmica da sala de aula, sobre didática, sobre os alunos, sobre o conteúdo, sobre o currículo, enfim, sobre os elementos que compõem o seu cenário de trabalho.

Lins (1999) afirma que toda produção de conhecimento é feita na direção de um interlocutor. Castro & Frant (2002) acrescentam:

“Objetos do conhecimento são constituídos necessariamente na relação entre mais de um. Quem conhece, conhece algo e este algo só existe quando é compartilhado por mais um. Significa que o que chamamos de conhecimento só existe a partir da interação entre indivíduos. Mais especificamente, objetos de conhecimento são constituídos na práxis social dos indivíduos”. (p. 54).

Para Castro e Frant (id.) a ação do sujeito sobre o objeto passa necessariamente pela relação entre os sujeitos. (Figura 7)

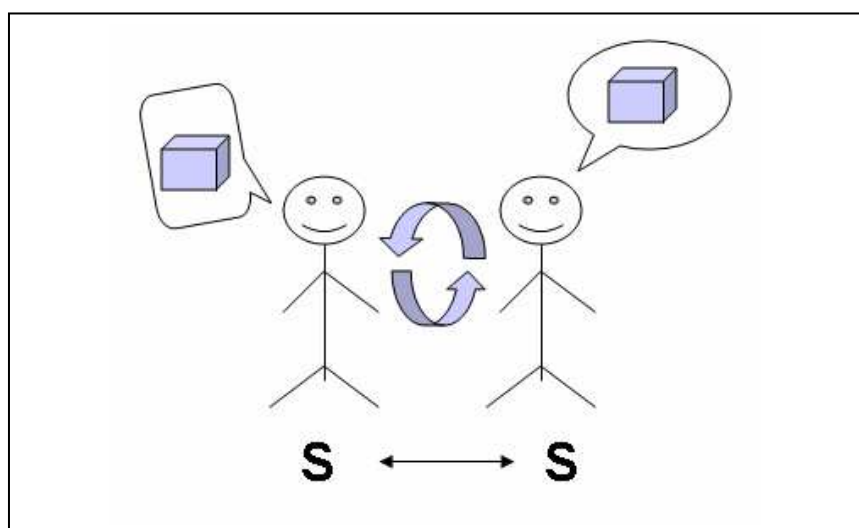


Figura 7: Relação entre sujeitos constituindo objetos. (CASTRO & FRANT, 2002, p. 59).

Essas visões reforçam a importância da criação de um espaço – o grupo de discussão – onde nós, professores, pudéssemos trocar experiências e refletir sobre nossas atuações, visando à construção do conhecimento profissional.

Assim, a linguagem assume um papel fundamental na constituição do conhecimento.

2.3 Linguagem

Nesse trabalho, como não poderia ser diferente, devido ao que entendemos por conhecimento, adotamos uma visão pragmática para a linguagem, ou seja, uma visão que busca analisar os efeitos performativos e argumentativos da fala viva, o estudo da linguagem natural constituída a partir da prática social dos indivíduos. (CASTRO&FRANT, 2002).

Corroboramos com as idéias de Bakhtin (1995) sobre a natureza social da enunciação:

Na realidade, o ato da fala, ou, mais exatamente, seu produto, a enunciação, não pode de forma alguma ser considerado como individual no sentido estrito do termo; não pode ser explicado a partir das condições psicofisiológicas do sujeito falante. A enunciação é de natureza social. (p. 109).

A linguagem é para Bakhtin um fenômeno profundamente social e histórico e, por isso mesmo, ideológico:

[...] não são palavras o que pronunciamos ou escutamos, mas verdades ou mentiras, coisas boas ou más, importantes ou triviais, agradáveis ou desagradáveis etc. A palavra está sempre carregada de um conteúdo ou de um sentido ideológico ou vivencial. (BAKHTIN, 1995, p. 95).

A linguagem restrita à função comunicativa está mais ligada à transmissão de informações, pois, quando nos comunicamos, transferimos informações, mas nunca conhecimento. Para nós, a linguagem não é entendida como uma ferramenta do pensamento, como se pudessemos exprimir nossas idéias por meio dela, de forma exterior a ela, mas ela é, também, constituinte do pensamento. O sujeito é visto por Bakhtin como sendo imbricado em seu meio social, sendo permeado e constituído pelos discursos que o circundam. Assim, de acordo com Castro e Frant (2002), pensamento e linguagem estão embricados e, de certa forma, é impossível dizer que o pensamento é anterior à linguagem e vice-versa.

Se a linguagem natural se restringisse a códigos destinados a transmitir informações, todos os conteúdos seriam exprimidos de maneira explícita. A existência de implícitos coloca em destaque todo o dispositivo de convenções e leis sociais que regulam a interação lingüística entre indivíduos. O implícito situa-se na região do dizer o que não pode ser dito, ou do dizer parecendo não ter dito, ou ainda, do dizer defendendo-se do risco de ser contestado. (CASTRO & FRANT, p. 60, 2002).

Por exemplo, vejamos as frases isoladas:

1. Nossa! Você está bonito hoje, hein!
2. Cosseno de 90 é 1.

Podemos dizer que em 1. tem alguém bem vestido, arrumado e em 2. que o aluno aprendeu corretamente, mas dependendo do contexto, 1. pode ser uma frase irônica e a pessoa veste calça vermelha e camisa amarela com bolinhas pretas, e 2. pode ser um aluno que deu a mesma resposta do colega, considerado o “mais inteligente” da sala, com medo de ser contestado e, na verdade, nem

sabe o que é cosseno. Assim se torna fundamental o contexto das enunciações para que possamos analisar os argumentos utilizados pelos interlocutores.

Para Castro & Frant (2002), os objetos do conhecimento são constituídos necessariamente na relação entre mais de um, são constituídos via enunciação pelo sujeito cognoscente e a linguagem que efetivamente participa da construção dos conhecimentos matemáticos escolares é, preferencialmente, a linguagem natural. Além disso, a linguagem do cotidiano comporta a existências dos implícitos já que dependendo grupo social ao qual estamos inseridos podemos dizer algumas coisas e outras não. Para as autoras, o implícito pode ser ou não intencional, quando não o é, articulamos com a Teoria da Cognição Corporificada que vemos a seguir.

2.4 A Teoria da Cognição Corporificada

Buscamos respaldo na Teoria da Cognição Corporificada (LAKOFF & JONHSON, NÚÑEZ, 1980, 2000, 2005) para melhor entender os mecanismos que nos permitem pensar sobre um determinado conceito e como aprendemos conceitos novos. Desta forma, ela nos trouxe elementos para que pudéssemos melhor compreender e analisar os diálogos entre os professores de Cálculo.

A imagem do universo como um grande mecanismo, composto de peças elementares independentes, cujo funcionamento está regido por leis invariáveis e eternas, está estreitamente ligada com a concepção cartesiana de conhecimento, onde se busca uma unidade elementar que explique um todo maior a partir das partes. Pensar, nessa visão cartesiana, era tido como uma atividade separada do corpo; dessa maneira a mente e o cérebro estão relacionados, mas apenas no sentido de a mente ser o *Software* que roda no cérebro o *Hardware* e o corpo garantiria apenas a sobrevivência do cérebro:

[...] compreendi por aí que era uma substância cuja essência ou natureza consiste apenas no pensar, e que, para ser, não necessita de nenhum lugar, nem depende de qualquer coisa material. De sorte que esse eu, isto é, a alma, pela qual sou o que sou, é inteiramente distinta do corpo e, mesmo, que é mais fácil

de conhecer do que ele, e, ainda que este nada fosse ela não deixaria de ser tudo o que é. (DESCARTES, 1973, p.55).

Para a ciência cognitiva tradicional mantida pelo dualismo cartesiano, a mente é uma entidade abstrata, separada e transcendente do corpo. O raciocínio – incluindo o pensamento matemático – é também não-corporal, atemporal e universal. Conceitos são abstratos e não são limitados pela realidade física ou corporal.

As críticas a essa visão mecanicista do mundo e do corpo começaram a tomar força, na década de sessenta, com os trabalhos de Wittgenstein sobre os jogos de linguagem e os de Kuhn sobre os paradigmas científicos e se aprofundaram, nos anos setenta e oitenta, com os trabalhos de Habermas e com as investigações sobre as bases metafóricas e retóricas do nosso conhecimento de mundo, entre os quais se destacam os trabalhos de Lakoff e Johnson. (NAJMANOVICH, 2001, p. 84).

Na neurociência, Damásio (1996), estudando pacientes com lesões cerebrais, escreve o livro chamado “O Erro de Descartes”, criticando exatamente os dualismos entre mente e corpo, razão e emoção, e argumentando contra uma das mais conhecidas frases da filosofia: “Penso, logo existo”. Para Damásio, os sentimentos exercem uma grande influência sobre a razão, e os sistemas cerebrais necessários para os sentimentos e emoções se encontram enredados aos sistemas cerebrais da razão, ambos interligados com os que regulam o corpo. Três afirmações são apresentadas e defendidas pelo neurocientista:

1) O cérebro humano e o resto do corpo constituem um organismo indissociável, formando um conjunto integrado por meio de circuitos reguladores bioquímicos e neurológicos mutuamente interativos. 2) O organismo interage com o ambiente como um conjunto: a interação não é nem exclusivamente do corpo nem do cérebro. 3) As operações fisiológicas que denominamos por mente derivam desse conjunto estrutural e funcional e não apenas do cérebro. (DAMÁSIO, 1996, p.17).

Morin (2000, p.111) reforça a idéia de que não é possível conceber a mente humana em termos de processos mecânicos, ainda mais quando se fala de criatividade. “Como dizem e reconhecem numerosos sociólogos, a sociedade é fenômeno de autoprodução permanente. Os processos de criatividade e de invenção não são redutíveis à lógica da máquina artificial”.

Na Lingüística Cognitiva encontramos o modelo teórico da Cognição Corporificada – *Embodied Cognition* – que parte de um novo paradigma em que corpo e mente estão intimamente relacionados. A fundamentação dessa teoria vem dos trabalhos de Rosch da Psicologia Cognitiva (ROSCH, 1973, 1994; VARELA et al., 1991); Maturana e Varela da Biologia do Conhecimento (MATURANA e VARELA, 1987) e, principalmente, dos trabalhos de Lakoff e Johnson da Lingüística Cognitiva (LAKOFF e JOHNSON, 1980, 1999) e Lakoff e Núñez da Cognição Matemática (LAKOFF E NÚÑEZ, 2000). (NÚÑEZ et al., 1999, p. 49).

Lakoff & Johnson (1980), baseados principalmente na evidência lingüística, constataram que a maior parte de nosso sistema conceitual, em termos do qual pensamos, agimos e formamos nossos conceitos, é de natureza metafórica. A metáfora era (e é ainda, por alguns) considerada apenas como fenômeno da linguagem, ou seja, um ornamento lingüístico, sem nenhum valor cognitivo, mas Lakoff & Johnson se contrapõem a esse enfoque objetivista da metáfora, atribuindo a ela um *status* epistemológico.

Para dar uma idéia de como um conceito pode ser compreendido metaforicamente, citamos o exemplo sobre o conceito DISCUSSÃO, entendido pela metáfora DISCUSSÃO É GUERRA.

DISCUSSÃO É GUERRA

Seus argumentos são *indefensáveis*.

Ele *atacou todos os pontos fracos* da minha argumentação.

Suas críticas foram *direto ao alvo*.

Destrui sua argumentação.

Jamais *ganhei* uma discussão com ele.

(LAKOFF & JOHNSON, 2002, p. 46)

Segundo os autores, esse é um exemplo do que queremos dizer quando afirmamos que um conceito metafórico, nesse caso, DISCUSSÃO É GUERRA, estrutura (pelo menos parcialmente) o que fazemos quando discutimos, assim como a maneira pela qual compreendemos o que fazemos. A visão da discussão como guerra depende da cultura, pois numa cultura onde guerra fosse entendida como dança o discurso seria diferente. “A essência da metáfora é compreender e experienciar uma coisa em termos de outra”. (ibid., p 46).

No exemplo seguinte, podemos ver como o tempo pode ser conceituado em termos de dinheiro; as inferências que podemos fazer ao falarmos sobre dinheiro são preservadas para falarmos sobre o tempo.

Metáfora	{	TEMPO É DINHEIRO
Inferências	{	Você está <u>desperdiçando</u> meu tempo. Esta coisa vai te <u>poupar</u> horas. Eu não <u>tenho</u> tempo para te <u>dar</u> . Como você <u>gasta</u> seu tempo hoje em dia? Aquele pneu furado me <u>custou</u> uma hora. (ibid., p. 50)

Além desse tipo de metáfora, chamadas de metáforas estruturais, são também apresentadas as metáforas orientacionais, que surgem do fato de termos os corpos que temos e do fato de eles funcionarem da maneira que funcionam no nosso ambiente físico. FELIZ É PARA CIMA é um exemplo de metáfora orientacional, pois o termo FELIZ é entendido em relação a uma orientação espacial PARA CIMA; isto é observado por meio de expressões lingüísticas como “Estou me sentido para cima hoje” ou quando levantamos o polegar para indicar que tudo está bem. Várias outras metáforas orientacionais são observadas no cotidiano como, TRISTE É PARA BAIXO, BOM É PARA CIMA, MAU É PARA BAIXO, entre outras.

Em trabalhos posteriores, como em “*Philosophy in the flesh: the embodied mind and its challenge to western thought*” publicado em 1999, Lakoff e Johnson, baseados no trabalho realizado em “*Metaphors We Live By*” (1980) e em resultados de pesquisas da ciência cognitiva, apresentam e defendem as seguintes premissas: “A mente é corporificada. Quase todo pensamento é inconsciente. Os conceitos abstratos são na maioria metafóricos”. (LAKOFF & JOHNSON, 1999, p. 3).

A primeira das premissas nos diz que a mente é estruturada por meio de nossas experiências corporais e não por uma entidade independente do corpo. A segunda nos diz que a maior parte do nosso pensamento é inconsciente e, uma vez que não temos acesso direto ao nosso sistema conceitual, um dos meios de entendê-lo é considerar a linguagem. A terceira premissa afirma que nós, seres humanos, conceitualizamos conceitos abstratos em termos de conceitos concretos, usando idéias e modos de raciocínio baseados no sistema sensório-

motor, por meio de metáforas conceituais que, segundo Núñez et al (1999), “são mapeamentos que preservam a estrutura inferencial de um domínio-fonte quando ele é projetado em um domínio-alvo”.

Metáfora Conceitual é um mecanismo cognitivo que nos permite fazer inferências num domínio de experiência (alvo), baseado em inferências que são válidas em outro domínio de experiência (fonte). Para o exemplo DISCUSSÃO É GUERRA que já apresentamos, teríamos a compreensão de um domínio da experiência, a discussão, em termos de outro domínio da experiência, a guerra. A metáfora conceitual é um mapeamento (no sentido matemático) de um domínio de origem (nesse caso guerra) a um domínio alvo (neste caso, discussão).

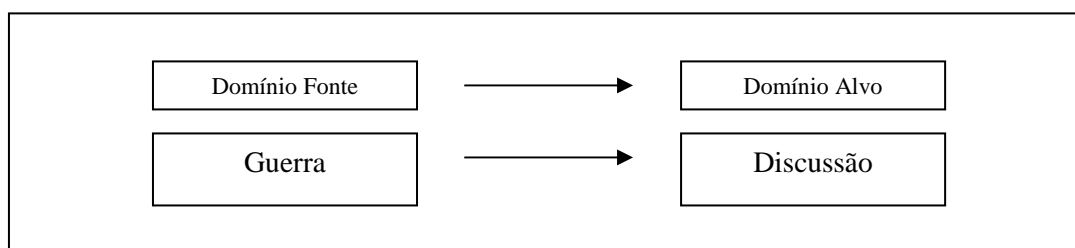


Figura 8: Metáfora Conceitual DISCUSSÃO É GUERRA

Tomemos outros exemplos: a afeição que, em geral, é conceitualizada em termos de temperatura. Temos no domínio-fonte a temperatura e no domínio-alvo a afeição. “Eles me acolheram calorosamente”, “Você está frio comigo hoje”, “Eles ainda não quebraram o gelo”. As palavras são diferentes (calor, frio, gelo), mas a relação conceitual entre elas é a mesma: afeição é conceitualizada em termos de temperatura. Outra situação comum é a da importância conceitualizada como tamanho: “Esta é uma grande questão”, “Isto é um pequeno problema, podemos ignorá-lo”, “Gauss foi um grande matemático” etc.

Segundo Núñez (2000), uma importante descoberta na Linguística Cognitiva é que conceitos são sistematicamente organizados por meio de uma vasta rede de mapeamentos conceituais, ocorrendo em sistemas altamente-coordenados e combinando caminhos complexos. A maior parte desses mapeamentos conceituais são usados inconscientemente e **sem esforço** na comunicação do dia-a-dia. Um importante tipo de mapeamento é a metáfora conceitual e o outro são as montagens conceituais. Metáforas conceituais são utilizadas em geral de forma inconsciente, sem exame dos próprios pensamentos e sentimentos, ou seja, sem introspecção.

Numa primeira análise, podemos ser guiados a dizer que essas afirmações são óbvias, não refletem nenhuma novidade, que não existe nenhum mapeamento entre domínios, mas isso ocorre exatamente porque esses mapeamentos são feitos inconscientemente e sem esforço nenhum, pois já estão incorporados ao nosso cotidiano. Por exemplo, quando dizemos “a Páscoa está chegando”, a Páscoa não pode chegar literalmente; estamos usando um domínio espacial para falar de algo que não é espacial, que não se move: a Páscoa. Nesse caso estamos usando a metáfora de movimento temporal como lugar no espaço.

Em “*Where Mathematics Comes From*”, Lakoff & Núñez (2000) apresentam a seguinte questão: “Como a ciência cognitiva pode trazer rigor científico sistemático para o terreno das idéias matemáticas, as quais se apóiam fora do rigor matemático?” As três premissas apresentadas por Lakoff & Johnson em “*Philosophy in the flesh*”, continuam válidas, segundo os autores, para o pensamento matemático. Concluem, ainda, que muitas das idéias matemáticas fundamentais são inerentemente metafóricas, como por exemplo:

- A reta numérica, onde números são conceituados metaforicamente como pontos na reta,
- Trigonometria, onde ângulos são conceituados metaforicamente como números,
- O plano complexo, onde multiplicação é conceituada metaforicamente em termos de rotação. (LAKOFF & NÚÑEZ, 2000, p. XVI)

No que concerne aos conceitos matemáticos, Núñez (2000, p. 10) e Lakoff & Núñez (2000, p. 53) distinguem dois importantes tipos de metáforas conceituais: as Metáforas Básicas e as Metáforas de Ligação.

As Metáforas Básicas baseiam nossa compreensão das idéias matemáticas em termos de experiências do cotidiano. Nestes casos, o domínio alvo é matemático, e o domínio fonte reside fora da matemática, na nossa experiência. Exemplos: adição como adição de objetos de uma coleção, conjuntos são contêineres, elementos de um conjunto são objetos de um contêiner. Estes mapeamentos em geral requerem pouca instrução, são realizados praticamente sem esforço.

As Metáforas de Ligação são mapeamentos na matemática mesmo, ligados às idéias mais sofisticadas, que nos permitem conceitualizar um domínio matemático em termos de outro domínio matemático. Exemplos: números são pontos na reta, considerar figuras geométricas como equações algébricas e funções como conjunto de pontos. Essas metáforas exigem um maior grau de instrução explícita.

Assim, nem sempre o domínio-fonte estará ligado às experiências sensório-motoras. No caso das metáforas de ligação, o domínio-fonte está na própria Matemática; já quando pensamos números como pontos na reta, temos o conceito geométrico do ponto da Matemática no domínio-fonte e o conceito de número no domínio-alvo.

Apresentamos, a seguir, a teoria das Montagens Conceituais de Fauconier & Turner (1998) que nos ajudou a interpretar alguns episódios que formulamos, após a análise dos diálogos.

2.5 Montagens Conceituais

A teoria das montagens conceituais desenvolvida por Fauconnier & Turner (1998) agrega novos elementos à teoria das metáforas conceituais de Lakoff & Johnson (1980). Metáforas conceituais são mapeamentos que preservam a estrutura inferencial entre dois domínios – o domínio fonte e o domínio alvo; já o trabalho sobre montagem conceitual mostrou que além de tais mapeamentos, existem processos dinâmicos de integração que constroem novos espaços mentais.

Na montagem conceitual, a unidade básica da organização cognitiva não é o domínio, mas sim o espaço mental – um pacote conceitual relativamente pequeno construído com o propósito da compreensão e da ação local, uma estrutura representacional parcial e temporária que construímos quando pensamos ou falamos sobre uma situação percebida, imaginada, passada, presente ou futura –. Espaços mentais não são equivalentes a domínios, mas, em contrapartida, dependem deles, representam cenários particulares que são estruturados a partir de domínios dados. (GRADY et al, 1999).

Por exemplo, podemos construir um espaço mental para entender a frase "minha caminhada ao longo da trilha *Appalachian* em *Carlisle*, Pensilvânia em 1990." Este espaço mental incluirá a caminhada, o caminhante, a data, o local, e assim por diante. Isto recrutará uma estrutura parcial do domínio conceitual de *viagem*, mas somente uma pequena quantidade do conhecimento associado com viagem será recrutada explicitamente na construção do espaço mental.

Segundo Fauconnier & Turner (1998), quatro espaços são usados na montagem conceitual: dois espaços de entrada: *Entrada 1* - *Entrada 2* (que no caso metafórico podem ser o domínio fonte e o domínio alvo), um *Espaço Genérico*, representando uma estrutura conceitual que é compartilhada por ambas as entradas e o *Espaço Montagem*, onde o material das entradas são combinados e interagidos. (Figura 9)

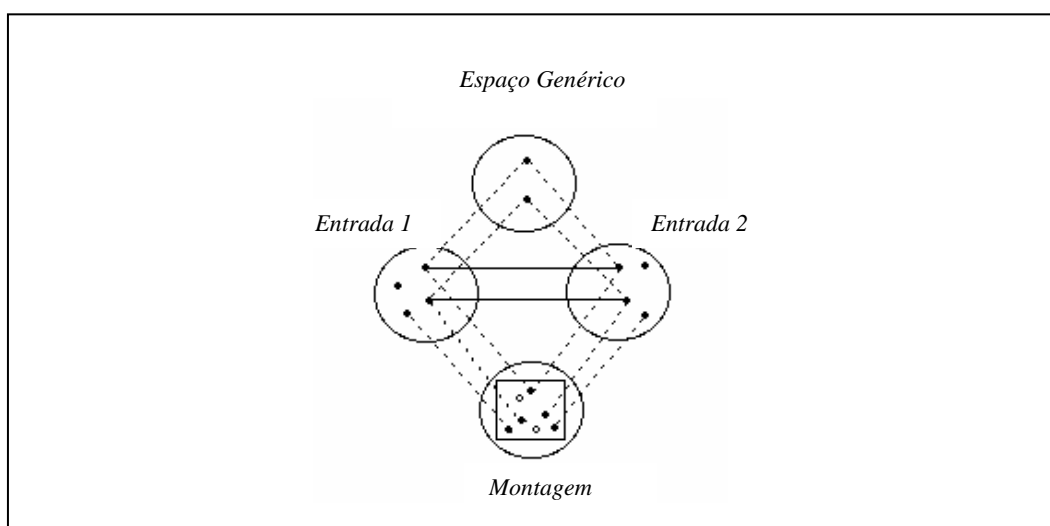


Figura 9: Os espaços de uma Montagem Conceitual

Como exemplo, na frase "Se Clinton fosse o *Titanic*, o *iceberg* afundaria" (FAUCONIER & TURNER, 1998), a montagem conceitual tem o seguinte esquema:

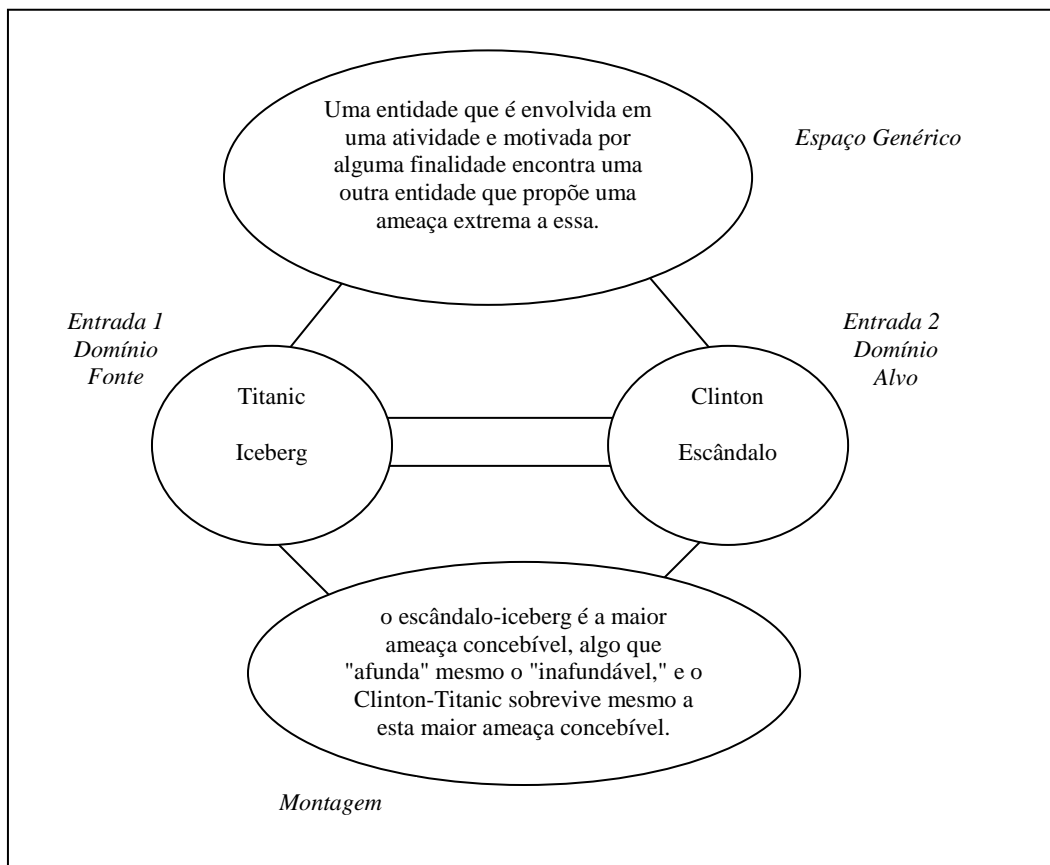


Figura 10: A montagem *Clinton-Titanic*.

No espaço genérico, o resultado do encontro não é especificado, o cenário do Titanic pode ser compreendido como o domínio fonte e o cenário de Clinton como alvo, mas a montagem tem uma estrutura causal e eventual que não vem da fonte, é certamente contrária à fonte e a inferência central da metáfora não pode ser projetada da fonte. Se Clinton é o Titanic e o escândalo é o iceberg e nós projetarmos inferências da fonte, então Clinton deveria ter perdido a presidência. Mas a inferência contrária é uma que é construída: Clinton superará toda a dificuldade política. A montagem tem uma estrutura emergente: na montagem, o Titanic é inafundável apesar de tudo, e é possível para o gelo afundar-se, não meramente estar submerso.

O domínio fonte não fornece estas inferências à montagem, e nem são mapeadas do domínio alvo. No domínio alvo com Clinton e o escândalo, o *status* relativo dos elementos e mesmo a natureza de sua interação não são claras. No domínio alvo, Clinton parece meramente sobreviver ao escândalo. Mas esses elementos ganham um *status* muito mais afiado na montagem: o escândalo-

iceberg é a maior ameaça concebível, algo que "afunda" mesmo o "inafundável", e o Clinton-Titanic sobrevive mesmo a esta maior ameaça concebível.

A extrema superioridade de Clinton como uma força e o **status** extremo do escândalo como uma ameaça são construídos na montagem, como é sua inferência predicativa que Clinton sobreviverá. Esta estrutura, que não está disponível da fonte ou do alvo, é construída na montagem e projetada ao alvo para reestruturá-lo e dar a ele novas e claras inferências.

Fauconnier & Turner (1995) apontam que a construção dos espaços montagem está envolvida em argumentação, imaginação, ação, emoção e expressão. Montagem é uma operação cognitiva geral, que opera sobre categorização, formação de hipóteses, inferências, origem e combinação de construções gramaticais. Pode ser detectada na linguagem do dia-a-dia, em idiomas, pensamentos criativos em Matemática, evolução de modelos sócio-culturais, publicidade e outros aspectos do comportamento lingüístico e não-lingüístico.

Dallanese (2006) mostrou que nem sempre as metáforas conceituais davam conta de explicar o processo de compreensão da derivada de uma função num ponto. Na análise de alguns dos episódios que elaboramos como o Episódio Falando sobre o Infinito e a Integral recorreremos à teoria das montagens conceituais.

No próximo item trazemos uma breve abordagem sobre conceito e intuição que emergiu durante os encontros do grupo de professores.

2.6 Conceito e Intuição

Lamônaco et al (2000), citando a teoria sobre a formação de conceitos denominada de *visão clássica* por Smith e Medin (1981), colocam que nessa concepção os conceitos são formados pela abstração de atributos comuns a todos os membros de um grupo de coisas, eventos ou pessoas. A representação mental do conceito consistiria numa descrição sumária, resultante de um processo de abstração, que não corresponde exatamente a nenhum dos exemplos específicos e se aplica a todos os exemplos possíveis. Assim, todos os

membros de uma mesma categoria têm uma mesma representatividade, os limites das categorias são bem definidos, não existem casos duvidosos, a inclusão de membros numa categoria ocorre de forma absoluta, na base do tudo ou nada, ou seja, ou pertence ou não pertence a uma determinada categoria.

Rosch (1999), da Psicologia Cognitiva, afirma que conceitos, do ponto de vista do cognitivismo clássico, são vistos como conjuntos lógicos fechados, não admitindo a função participativa e nem a inovação. No Cognitivismo, que trata a mente como uma máquina, mais precisamente como um programa de computador, a mente é considerada como uma coleção de representações mentais precisamente análogas às representações simbólicas de um computador e os conceitos são centrais nesse modelo, pois constituem exatamente a representação de um objeto pelo pensamento.

Adotamos, nesse trabalho, a definição dada por Rosch (1999, p. 61) que contradiz a visão clássica. Conceitos constituem um aspecto do estudo de categorização - uma das funções mais básicas dos seres vivos - : “Conceitos são sistemas abertos através dos quais os seres humanos podem aprender coisas novas e podem inventar... “. Para Lakoff & Johnson (1999, p. 19), conceitos são: “Estruturas neurais que nos permitem caracterizar mentalmente nossas categorias e razões sobre eles”.

Com essas concepções temos uma estreita ligação entre conceito e categoria, podendo dizer que conceituar é categorizar, e que existe também uma relação muito próxima entre conhecer e categorizar, ou seja, conhecer é categorizar. Tomemos por exemplo o conceito de mesa: o que é uma mesa? Existe uma aceitação pelo grupo social em que vivemos sobre o que é mesa; agora, se perguntarmos se a mesa de uma sala de cirurgia é um bom exemplo de mesa de sala de jantar, ou se uma mesa de dois pés é um exemplo de mesa, do ponto de vista clássico de categoria, essa questão não faz sentido, pois categorizar é dizer o que pertence ou não. Mas segundo Rosch (1999), “categorizar é tratar objetos e eventos distinguíveis como equivalentes”, ou seja, conceituar mesa é categorizar, é poder dizer que todos esses objetos, mesmo distinguíveis, podem ser tratados como equivalentes e, a partir daí, podemos dizer que o sujeito conhece o que é uma mesa, se ele é capaz de identificá-la e usá-la.

Segundo Lakoff & Johnson (1999), a maior parte de nossas categorias são formadas automaticamente e inconscientemente como um resultado de nossas

funções no mundo e da nossa corporeidade, ou seja, as categorias que nós formamos são partes de nossas experiências e não atos puramente intelectuais. Assim, os conceitos humanos não são apenas reflexões de nossa realidade externa, mas são crucialmente formados por nossos corpos e cérebros, especialmente nosso sistema sensorio motor:

Um conceito incorporado é uma estrutura neural que é efetivamente parte do, ou faz uso do sistema sensorio motor de nossos cérebros. Muitas das inferências conceituais são, portanto, inferências sensorio-motoras (LAKOFF & JONHSON, 1999, p. 20).

Para matemáticos conceito é definição. Os autores de livros didáticos de Matemática, embora escrevam para um público de estudantes, que nem sempre são ou serão Matemáticos, também identificam conceito com definição, não prevendo e nem respeitando distintas produções de significados de seus leitores. Nossa preocupação é com o desenvolvimento desse conceito do ponto de vista cognitivo, que é o que nos interessa na sala de aula.

Tomemos um exemplo extraído do livro Cálculo Diferencial e Integral de Paulo Boulos (1999), que apresenta, num item chamado “\$ - Funções: (A) Conceito”, a definição: “Sendo A e B conjuntos, uma função de A em B é uma correspondência que a cada elemento x de A associa um único elemento y de B” (p. 22).

O autor apresenta como conceito de função a própria definição de função, e para o aluno, saber a definição de função não significa que ele saiba o conceito de função.

Para a construção do conceito pelo aluno, são necessários diferentes textos, gráficos, símbolos, aplicações, definições, entre outros. Não podemos nos esquecer de que o conceito vai sendo produzido pelo sujeito, que pode aprender coisas novas e inventar. De repente o aluno faz outras associações, outras analogias e as incorpora ao conceito de função, isto é, o aluno participa na construção do conceito pessoal e a escola espera que tal construção seja breve e corresponda à que é aceita na comunidade Matemática.

Castro et al (2000) propõem que não devemos nos preocupar com o que é conceito, mas sim com os usos que fazemos dele:

“[...] só podemos falar do conceito a partir dos usos que se fazem dele. A questão “O que é conceito?” deixa de fazer sentido e tem de ser substituída por outra, onde o que está em jogo são os usos concretos, práticos e que constituem, em cada contexto específico, o conceito em questão. (p. 6)

Conceito foi um termo constantemente utilizado no discurso dos professores, bem como o emprego do termo intuição, sendo considerada como o ponto de partida para o ensino de Cálculo.

Segundo Damásio (1996), a intuição é um misterioso mecanismo por meio do qual chegamos à solução de um problema sem raciocínio explícito, com vista a essa solução. Não há necessidade de explicitar o raciocínio aplicado a todo o campo das opções possíveis. Há uma preleção que é levada a efeito, umas vezes de forma oculta, outras não. Um mecanismo biológico efetua a pré-seleção, examina os candidatos e permite que apenas alguns se apresentem a um exame final.

A tensão entre rigor e intuição tem sido tema de alguns trabalhos em Educação Matemática. Reis (2001), por meio de análise de manuais didáticos e de pesquisas semi-estruturadas com quatro professores e autores de livros didáticos das áreas de cálculo e análise – Prof. Roberto Ribeiro Baldino, Prof. Geraldo Severo de Souza Ávila, Prof. Djairo Guedes de Figueiredo, Prof. Elon Lages Lima - constatou que a relação tensional entre rigor e intuição é sempre desigual e dicotômica nos manuais didáticos e que o conjunto de posições defendidas pelos entrevistados aponta para uma necessidade de rompimento com o formalismo no ensino e afirma que o ideal da atuação do professor seja o equilíbrio entre a intuição e o rigor.

BICUDO (1992) defende que:

É por essa tensão dialética entre intuição e rigor que se sobe na espiral do conhecimento matemático. Mesmo que não a percebamos, a intuição está impregnada do rigor que colaborou na possibilidade de sua criação. É o equilíbrio das tendências de diferenciação (intuição) e unificação (rigor). Não há avanço de uma sem a outra. (p. 64)

Retomamos essa discussão no episódio Falando sobre conceitos e Intuição.

2.7 Um olhar para o infinito a partir da Teoria da Cognição Corporificada: o infinito potencial e o infinito atual.

A noção de infinito impulsionou durante muito tempo o desenvolvimento da Matemática. Suposições a respeito de divisão de grandezas, como: 1. É válido admitir-se que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente? (O espaço e o tempo são infinitamente divisíveis?) 2. É válido admitir-se que uma grandeza é formada de um número muito grande de partes atômicas indivisíveis? (Existe um menor elemento indivisível de tempo (um instante) e de espaço (um ponto)?), desafiaram e dividiram o pensamento dos gregos por muito tempo.

Os paradoxos do filósofo Zenão de Eléia (450 a.C.) são registros clássicos desses pensamentos. Em dois dos paradoxos, a Dicotomia e Aquiles, Zenão argumentou que o tempo e o espaço são infinitamente divisíveis e, por conseguinte, o movimento seria impossível.

A Dicotomia: Se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível, pois, para percorrê-lo, é preciso antes alcançar seu ponto médio, antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento e assim por diante, *ad infinitum*. Segue-se então que o movimento jamais começará. (EVES, 2004, p. 418).

Com os paradoxos, A Flecha e o Estádio, Zenão argumentou o contrário, de que o tempo e o espaço não são infinitamente divisíveis, ou seja, de que a subdivisibilidade do tempo e do espaço acaba em indivisíveis.

A Flecha: Um objeto em vôo sempre ocupa espaço igual a si mesmo; mas aquilo que ocupa um espaço igual a si mesmo não está em movimento. Logo a flecha que voa está sempre parada, portanto seu movimento é uma ilusão. (BOYER, 2001, p. 52).

A partir da complexidade dessas questões, os gregos desenvolveram o que se chamou de “horror ao infinito”. Nenhum desses problemas foi resolvido na Antiguidade:

Conclui-se pela exclusão do conceito quantitativo de infinito dos raciocínios matemáticos – a matemática grega toma uma feição

cada vez mais *finitista*: invade-a o *horror do infinito*. Conclui-se pelo abandono das concepções dinâmicas, sempre que tal fosse possível – a matemática grega é invadida pelo *horror do movimento*. (CARAÇA, 2000, p. 78).

Aristóteles (384a.C.-322a.C) busca entender essas questões, introduzindo duas novas representações para o conceito de infinito:

Aristóteles tratou de enfrentar o problema do infinito através de duas representações, duas concepções complementares e cuja interação dialética influenciou no próprio desenvolvimento da matemática. No terceiro livro de sua obra *Física*, Aristóteles distingue dois tipos de infinito; o infinito como processo de crescimento sem final ou de subdivisão sem final e o infinito como uma totalidade completa. O primeiro é o infinito potencial e o segundo é o infinito atual. (ORTIZ, 1994, p.61).

A primeira dessas representações é a de infinito potencial que foi efetivamente chamada de “potencial” por São Tomas de Aquino¹⁴ (1227-1274) e a segunda é a de infinito atual que foi estudada e sistematizada por Cantor (1845-1918), com a teoria dos números transfinitos.

Segundo Dauben (1995), o infinito como entidade completa, ou o infinito atual, foi rejeitado desde os tempos de Aristóteles por matemáticos (incluindo Aristóteles) e filósofos, por causa, sobretudo, dos paradoxos que parecia implantar. Galileu (1564-1642), por exemplo, observou que, se em matemática fossem admitidos conjuntos infinitos completos, haveria tantos número inteiros para quantos pares e ímpares reunidos. O teólogo São Tomás de Aquino considerava que tal noção comportava um desafio direto à natureza única, infinita e absoluta de Deus.

De acordo com Ortiz (1994), Kant, no século XIX, concordava com Aristóteles ao assinalar que nunca podemos chegar ao infinito atual. Gauss, em 1831, também enfatiza seu protesto contra o uso do infinito como algo consumado: “Protesto contra o uso de uma quantidade infinita como uma entidade atual, esta nunca se pode permitir em matemática. O infinito é só uma forma de falar, quando na realidade deveríamos falar de limites aos quais certas razões podem aproximar-se tanto quanto se deseje, enquanto outras são permitidas crescer ilimitadamente”.

¹⁴ Contribuição por e-mail do Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrósio (2005).

O primeiro matemático a fundamentar a noção de infinito atual foi Bernard Bolzano, em sua obra “Paradoxos do Infinito” (1851), defendendo a existência de um infinito atual e enfatizando que o conceito de equivalência entre dois conjuntos era aplicável tanto a conjuntos finitos como infinitos. (ORTIZ, 1994, p. 64).

No final do século XIX, Cantor desenvolve uma teoria sobre o infinito atual: a teoria dos números transfinitos. Atualmente os números transfinitos são denotados pela primeira letra do alfabeto Hebreu \aleph - Aleph; os alephs designam a cardinalidade, o número de elementos dos conjuntos infinitos. Com essa teoria é possível, além de falar em infinito como entidade completa, realizar operações entre números transfinitos.

Tomemos, como exemplo, a decimal infinita periódica 0,999.... Se pensarmos apenas que é sempre possível acrescentar mais um dígito 9 e que esse processo nunca termina, estamos pensando no infinito potencial; agora, a partir do momento em que acreditamos e aceitamos que 0,999... é igual a 1, estamos falando de infinito atual. É como se atualizássemos o infinito, transformássemos a decimal infinita em algo “real”, isto é, o número 1. Essas noções podem ser úteis na compreensão do conceito de limite; se tomarmos a seqüência $a_n = \frac{1}{n}$, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Se pensarmos que é sempre possível considerar mais um termo da seqüência e, assim sucessivamente, sem parar, estamos pensando no infinito potencial; agora, quando dizemos e aceitamos que essa seqüência tem limite 0, é como se estivéssemos atualizando um conjunto de infinitos pontos (pontos da seqüência) e transformando-os numa entidade completa (o número 0).

Para a compreensão da natureza cognitiva do infinito atual, Núñez (2005) defende que são necessários três importantes mecanismos: 1. *Sistema Aspectual*; 2. *Metáforas Conceituais* e 3. *Montagens Conceituais*.

Sistema Aspectual, na semântica cognitiva, caracteriza a estrutura de eventos-conceitos. Algumas ações, por exemplo, são inerentemente iterativas, como “estalar os dedos” ou respirar. Outras são inerentemente contínuas, como movimento. Verbos como pular, segundo o autor, tem um *aspecto perfectivo*, pois cada pulo tem um ponto final e um resultado. Mas verbos como *nadar, voar, e rolar* têm *aspecto imperfectivo*, sem nenhum ponto final indicado. Processos com aspectos imperfectivos podem ser conceitualizados como processos contínuos ou

iterativos; por exemplo, em frases como “A águia voou e voou e voou”, a idéia de ação iterada é usada sintaticamente para expressar a idéia de ação contínua. (LAKOFF & NÚÑEZ, 2000).

Segundo Núñez (2005, p. 1728), “do ponto de vista do *aspecto*, o infinito potencial tem um aspecto imperfectivo”.

Para Lakoff & Núñez (2000), a idéia de infinito atual na matemática é metafórica. Vários exemplos de infinito atual fazem uso de um último resultado metafórico de um processo sem fim e todos os casos de infinito atual – conjuntos infinitos, limites de séries infinitas, intersecções infinitas – são casos especiais de uma metáfora conceitual chamada “Metáfora Básica do Infinito”. Nessa metáfora, o estado inicial, o processo iterativo e o resultado depois de cada iteração são mapeados para os correspondentes elementos do domínio-alvo, mas o crucial efeito da metáfora é adicionar ao domínio-alvo a completude do processo e seu estado resultante (LAKOFF & JOHNSON, 2000, p.158).

Núñez (2005) modifica a idéia da Metáfora Básica do Infinito para Mapeamento Básico do Infinito via Montagens Conceituais por entender que a Metáfora Básica do Infinito não descreve com riqueza esse processo. Dois espaços de entrada são apresentados: um é o espaço envolvendo Processos Iterativos Completos (aspecto perfectivo, na matemática: processos finitos) o outro envolve Processos Iterativos sem fim (aspecto imperfectivo, na matemática: infinito potencial). Assim, com a montagem conceitual (vide figura 11 - página seguinte), tem-se uma estrutura inferencial necessária para caracterizar processos que envolvem o infinito atual.

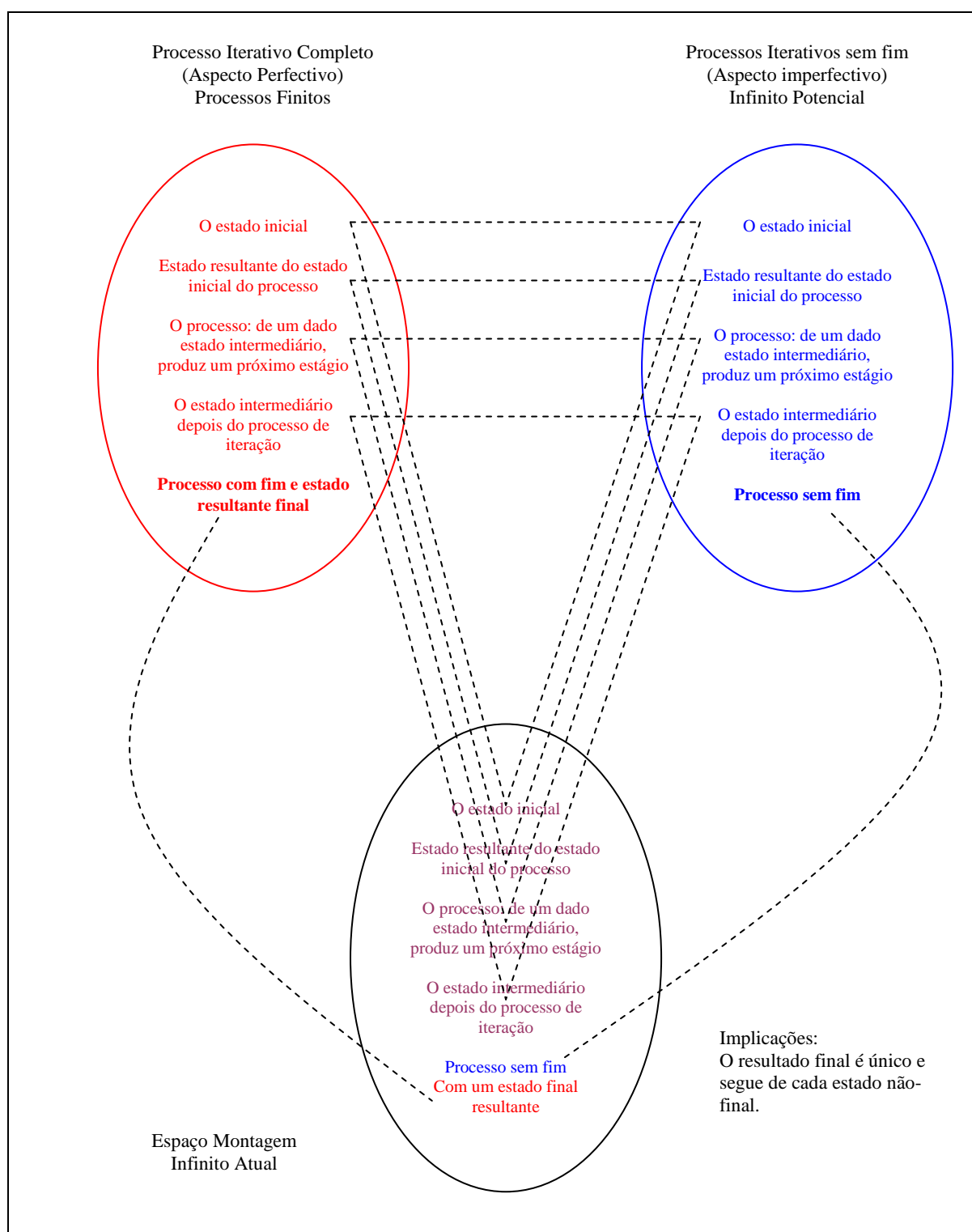


Figura 11. A BML, o mapeamento básico do Infinito, como um duplo-ambiente de Montagem Conceitual (NÚÑEZ, 2005, p. 1730)

Pensando, por exemplo, a série geométrica de razão $\frac{1}{2}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots \text{ e considerando as somas parciais dessa série,}$$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, teríamos o seguinte Espaço Montagem para entender tal resultado.

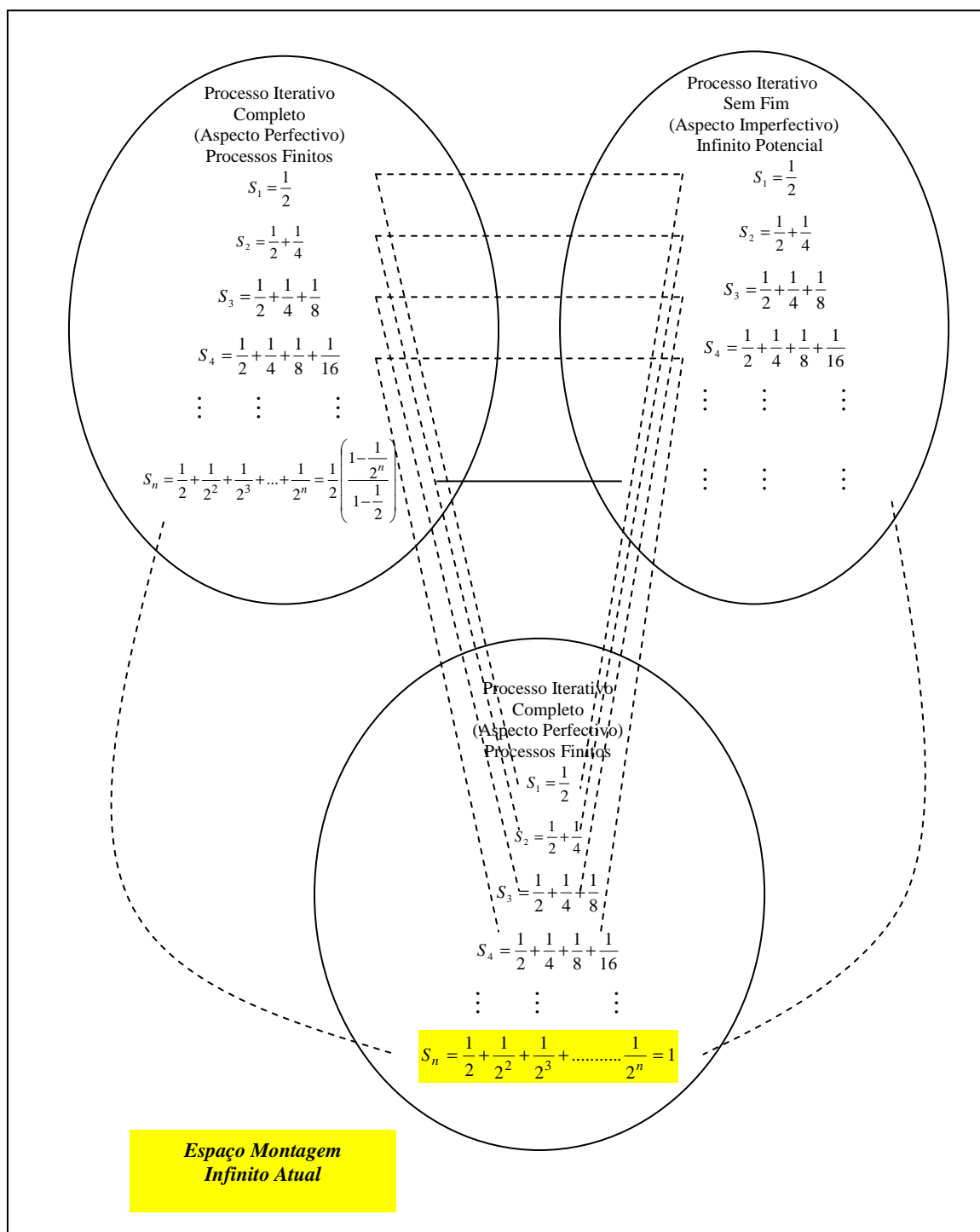


Figura 12: O Infinito Atual: um exemplo de Montagem

Sabemos na Matemática que a soma dessa série é igual a 1, mas estamos interessados aqui em entender como se processa nosso pensamento quando trabalhamos com esse tipo de conceito. Como pode uma soma infinita dar igual a 1? De acordo com a Montagem do Infinito Atual, para aceitar esse fato e atribuir a um processo iterativo infinito um estado resultante, uma completude, fazemos inferências da nossa forma de pensar por meio de processos finitos e processos infinitos sem fim – o infinito potencial.

A seguir apresentamos os fundamentos do Modelo da Estratégia Argumentativa, pois levantarmos as metáforas/montagens, prestamos atenção aos argumentos usados nos diálogos e, para isso, adotaremos o Modelo da Estratégia Argumentativa – MEA, desenvolvido por Frant e Castro (2002).

2.8 O Modelo da Estratégia Argumentativa

Baseadas no Tratado da Argumentação de Perelman, as autoras trazem para a Educação Matemática as idéias dessa teoria, elaborando um modelo que possa dar subsídios para a análise do discurso em sala de aula de Matemática. Segundo Frant, o MEA é:

Um modelo alternativo para a análise do discurso em sala de aula. Buscamos interpretar a produção de significados baseados nos argumentos utilizados ao invés das palavras. O contexto de uma enunciação é fundamental para sedimentar os acordos que são a base para a ação de argumentar. (FRANT, 2001, p. 126).

O Modelo da Estratégia Argumentativa busca resgatar a importância do estudo da linguagem materna para a construção do conhecimento matemático escolar. A argumentação refere-se à argumentação que entra em cena nos diálogos do cotidiano, sempre quando alguém quer convencer o outro ou a si mesmo.

Uma das premissas do Modelo da Estratégia Argumentativa, segundo Frant (2001, p. 126), é que: “o processo de produção de significados para objetos matemáticos é similar ao processo de produção de significados para objetos do

cotidiano”. Nos diálogos em sala de aula, os argumentos estão sempre presentes: é o professor argumentando na tentativa de convencer o aluno, o aluno argumentando na tentativa de convencer o professor ou um colega que o seu raciocínio está correto, enfim, os processos de ensino e aprendizagem supõem exatamente situações em que os indivíduos se esforçam para convencer os outros. Quem argumenta o faz a partir de convenções sociais e das diversas práxis. Na sala de aula existem convenções pré-estabelecidas que determinam o que deve ser dito e como deve ser dito, qual o papel do aluno e qual o papel do professor.

Assim, muitas vezes, o aluno responde o que o professor espera ouvir, mas não o que ele gostaria de dizer por conta das convenções existentes, pois ele tem que tirar nota, tem que ser aprovado, não pode errar na frente dos colegas, entre outras. Essas regras e convenções foram apontadas por Brousseau, usando o termo contrato didático para defini-las:

Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor [...]. Esse contrato é o conjunto de regras que determinam, uma pequena parte explicitamente, mas, sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro. (BROUSSEAU, 1986, apud SILVA, 2002, p. 43).

O MEA pode ajudar, na pesquisa, a explicitar tais regras. O Tratado da Argumentação propõe uma ruptura com a concepção de razão e de raciocínio oriundas de Descartes, contrapondo-se à concepção clássica de demonstração e, mais especificamente, à lógica formal que se limita aos meios de provas demonstrativas:

Quando se trata de demonstrar uma proposição, basta indicar mediante quais procedimentos ela pode ser obtida como última expressão de uma seqüência dedutiva [...] Mas, quando se trata de argumentar, de influenciar, por meio do discurso, a intensidade de adesão de um auditório a certas teses, já não é possível menosprezar completamente, considerando-as irrelevantes, as condições psíquicas e sociais sem as quais a argumentação ficaria sem objeto ou sem efeito. (PERELMAN, 1996, p. 16).

Segundo Castro (1997), o “Tratado da Argumentação” destaca cinco aspectos que distinguem claramente a argumentação do raciocínio demonstrativo: 1. A argumentação dirige-se a um auditório; 2. Ela se exprime em linguagem cotidiana; 3. Suas premissas são verossímeis; 4. Sua progressão depende do orador; 5. Suas conclusões são sempre contestáveis.

Aquele que argumenta se dirige a outro intencionalmente, portanto, o argumento é sempre dependente da hipótese sobre as preferências e os saberes do auditório (audiência). Um dos principais objetivos da argumentação é convencer uma determinada audiência sobre uma idéia ou tese.

Um auditório é o conjunto de todos aqueles sobre os quais o locutor quer exercer influência por meio de seu discurso. Quando um locutor quer convencer alguém, ele prepara seu discurso de modo que seja eficaz. Não se pode convencer alguém se não se leva em conta suas convicções e suas reações. Essa preparação do discurso está baseada nas hipóteses que o locutor tem a respeito de seu auditório. Um auditório é sempre uma hipótese do orador, uma hipótese ideal para fins de preparação do discurso.

Por exemplo, quando o professor prepara a sua aula, ele pensa no discurso que poderá fazer baseado em algumas hipóteses que ele tem sobre sua turma de alunos: faixa etária, condições sociais, dificuldades de aprendizagem apresentadas na aula anterior, problemas de relacionamento da aula anterior, entre outras, e o professor, mais do que qualquer locutor, deseja que seu discurso seja eficaz; nesse exemplo o auditório é constituído pelo grupo de alunos dessa turma. Castro (1997, p. 68) diz, baseada em Perelman, que: “um acordo é o conjunto de hipóteses sobre o qual o locutor se baseia para construir sua argumentação”.

Nossa análise parte do que os professores de Cálculo do grupo efetivamente falam sobre suas aulas de Integral, sobre registros dos alunos, sobre vídeos das aulas, entre outros aspectos. Os professores participantes da pesquisa serão identificados pelas siglas P1, P2, P3, P4 e P5. Se, por exemplo, P2 é o orador, o seu auditório será constituído pelos demais professores do grupo (ver figura 13 – página seguinte). A partir do momento em que P5 passa a falar, P2, juntamente com os demais, passarão a constituir o auditório.

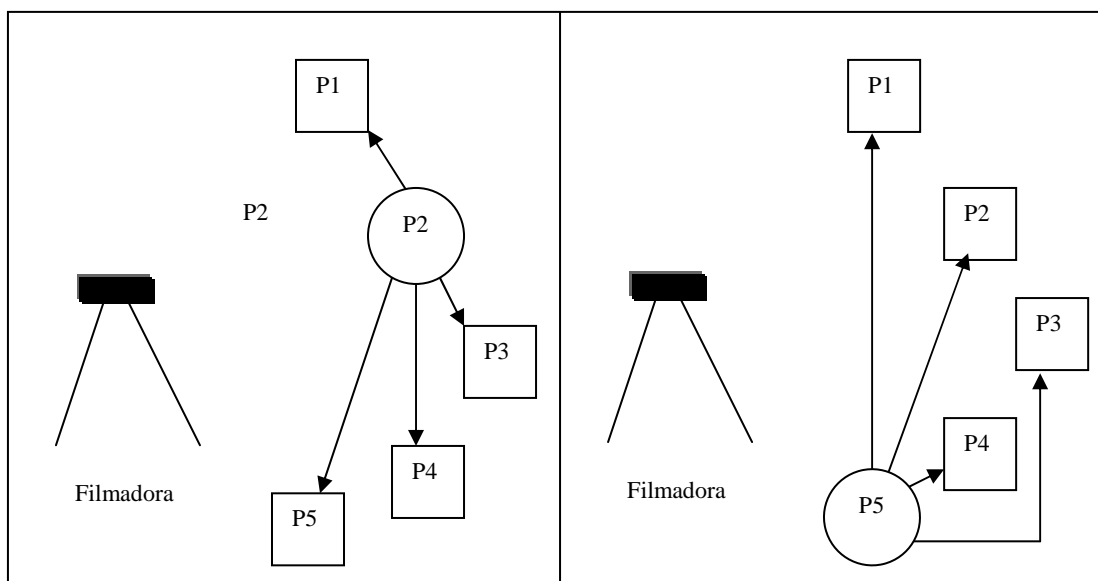


Figura 13: Dinâmica de locução no grupo de professores.

Para a argumentação é fundamental que haja, no diálogo entre as pessoas, negociações, trocas, e controvérsias – elaboramos tarefas envolvendo o conceito de Integral que incitassem controvérsias e discussões entre os professores – .

Segundo Castro & Frant (2002):

O diálogo entre as pessoas é entendido não apenas como a comunicação em voz alta, mas como um momento de troca lógica, um momento de relação com o outro, quando os interlocutores deixam-se invadir um pelo outro, expondo-se à contestação de suas crenças e de seus conhecimentos. O diálogo, neste sentido, é sempre um risco, é uma relação dialógica entre os indivíduos. Uma relação dialógica supõe que os interlocutores partilhem conhecimentos, representações, atitudes, percepções, enfim, hábitos de pensamento. (p. 8)

Analisando os diálogos que ocorreram no grupo de professores de Cálculo, tal partilha citada por Frant verificou-se no nosso grupo, pois todos se sentiram à vontade para expor as suas visões e trocar experiências.

Um episódio ou evento crítico é tomado, segundo as autoras, como uma seqüência do diálogo, escolhida por conter dados relevantes da questão que está sendo pesquisada ou por apresentar novas questões para essa questão. Em um episódio, busca-se encontrar o que dá inteligibilidade e organização à fala dos

sujeitos. Na nossa pesquisa um episódio escolhido, numa primeira análise, foi denominado de Falando sobre Conceitos e Intuição.

A análise de um episódio requer a recriação do contexto da enunciação; assim é necessário descrever esse episódio por meio de um esquema, no qual está presente o argumento que está sendo utilizado pelo orador, por meio de enunciados simples. As interpretações são feitas baseadas nesse esquema; desse modo monta-se uma questão em direção à qual os argumentos parecem convergir, tendo como passo inicial para a interpretação do argumento a construção do tema em torno do qual a argumentação se desenvolve. (CASTRO & FRANT, 2002).

Nesta pesquisa pretendemos compreender melhor os processos argumentativos utilizados pelos professores de Cálculo quando ensinam Integral. Buscamos, ainda, durante a análise, levantar os implícitos nos diálogos dos professores e entender melhor como se processa o seu pensamento, que, na maioria das vezes, é inconsciente e inacessível por introspecção direta, em relação à sua prática.

Com a articulação da Teoria da Cognição Corporificada (TCC) e do Modelo da Estratégia Argumentativa (MEA), tentamos levantar os implícitos nos diálogos entre os professores (MEA), os argumentos utilizados (MEA) e, a partir desses argumentos, buscamos as metáforas utilizadas (TCC). Deste modo podemos, a nosso ver, enfatizar o uso na análise de um modelo que dê conta do processo de diálogo – o que é dito; como é dito; por quem é dito e em que circunstância é dito.

Ressaltamos também que esses modelos constituíram a lente para que pudéssemos elaborar as tarefas que foram realizadas com os alunos e o planejamento dos encontros com professores. A metodologia e os procedimentos metodológicos que adotamos são apresentados na seqüência.

2.9 Metodologia e Procedimentos Metodológicos

Sendo essa uma pesquisa, na qual o pesquisador se coloca, também, no papel de pesquisado, como professor de Cálculo, e pelo fato de que partimos da investigação sobre a prática profissional, precisamos esclarecer alguns pontos

para justificar e reforçar a legitimação desse trabalho. Beillerot (2001) classifica um procedimento como sendo de pesquisa “mínima”, segundo três critérios:

- Uma produção de conhecimentos novos (critério nº 1);
- Uma produção rigorosa de encaminhamento (critério nº 2);
- Uma comunicação de resultados (critério nº 3). (BEILLEROT, 2001, p. 74).

E para que seja uma pesquisa dita de “segundo grau” ou “superior”, acrescenta mais três critérios:

- Possibilidade da referida pesquisa introduzir uma dimensão de crítica e de reflexão (um trabalho de segundo grau) sobre suas fontes, seus métodos e seus modos de trabalho (critério nº 4);
- Sistematização na coleta de dados (critério nº 5);
- Presença de interpretações enunciadas segundo teorias reconhecidas e atuais que contribuem para permitir a elaboração de uma problemática, assim como uma interpretação de dados (critério nº 6). (ibid., p. 76).

Nossa pesquisa busca satisfazer a esses seis critérios, desde a produção de conhecimentos novos, sendo admitida como tal pela comunidade mais autorizada para sustentar um julgamento desse tipo, em nosso caso uma comunidade de pesquisadores em Educação Matemática, até a presença de análises segundo teorias reconhecidas e atuais. Desse modo, acreditamos que é perfeitamente possível se fazer uma pesquisa dita de grau “superior”, partindo da reflexão/investigação sobre a prática docente.

A investigação sobre a própria prática tem sido apontada por Ponte (2004) como um novo paradigma de investigação em Educação Matemática e como “um gênero de investigação, com os seus traços próprios e definidores, com numerosas variantes e pontos de contacto com outros gêneros e tradições de investigação”.

Para esta pesquisa adotamos este gênero de investigação cujas idéias principais apresentadas por Ponte (2004) são:

A pesquisa sobre a nossa própria prática:

1. Tem como objetivo fundamental lidar com problemas da prática.
2. É validada pela respectiva comunidade profissional (e não por grupos exteriores).

- 3.É essa comunidade que define os respectivos critérios de qualidade.
- 4.Nos seus processos pressupõe a formulação de questões e metodologias de trabalho e a publicidade dos resultados (trata-se de algo mais do que simples reflexão ou colaboração profissional).
- 5.Requer um contexto colaborativo (homogêneo ou heterogêneo).
- 6.Só se pode afirmar como prática profissional corrente desde que existam condições institucionais mínimas e uma cultura profissional que a valorize. (p. 24)

Segundo essas idéias, verificamos que em nossa pesquisa:

1. Nossas discussões partiram dos problemas e experiências da prática dos professores enquanto ensinam Integral;
2. A validação vem de nossos pares em confessoros, palestras, debates e aqui pela banca examinadora;
3. Definimos nossos próprios critérios de qualidade;
4. e 5. Temos as questões dessa pesquisa, a publicidade dos resultados parciais em congressos como EBRAPEM, EPEM, SIPEM e ICMI, será publicada em sua defesa e, no futuro, em outros congressos e periódicos etc. Além das questões dessa pesquisa, que procuro responder, o grupo de professores tem formulado outras questões sempre referentes à prática docente. Existe, também, um projeto para a redação de um livro, ou seja, além dos objetivos dessa pesquisa acadêmica, estamos criando uma sinergia no sentido de criar de fato um contexto colaborativo;
6. Praticamente não existem condições institucionais para que o nosso grupo se constitua, inclusive tivemos professores do grupo que foram desligados da Instituição e passaram a participar dos encontros via internet.

Formamos uma comunidade de aprendizes onde pesquisa e ensino não são duas atividades contraditórias, não são vistas como dois pólos distintos, mas sim complementares. De acordo com Ponte (2004):

Quem pesquisa beneficia o contacto com os alunos, pelas suas perguntas pertinentes, pelo desafio que estes colocam às suas questões, teorias e métodos. Quem ensina pode usar exemplos atuais e problemas em aberto, tornando o ensino vivo e estimulante.(p. 5)

Os resultados que esse tipo de investigação pode proporcionar, segundo Ponte (2004), são:

Ao investigar os problemas da sua prática profissional, os profissionais adquirem uma compreensão mais profunda desses problemas e das possibilidades de intervenção, as instituições modificam a sua forma de trabalho, questionam a sua cultura, re-equacionam a sua relação com a comunidade e enriquece-se o conhecimento da comunidade profissional e da comunidade educativa em geral. (p. 23).

2.9.1 O grupo de discussão e os participantes da pesquisa

A criação do grupo de discussão se deu com o meu convite para quatro professores de Cálculo da mesma Universidade em que trabalho. Planejamos, inicialmente, dez encontros, de uma hora cada, que ocorreram no segundo semestre de 2004. No final do primeiro semestre de 2005, tivemos mais dois encontros, planejados a partir das primeiras análises dos materiais coletados dos dez primeiros encontros. Outros seis encontros, entre o segundo semestre de 2005 e primeiro de 2006, foram realizados pelo “*MSN Messenger*” – um mensageiro virtual que possibilita a troca de mensagens entre várias pessoas ao mesmo tempo via *Internet* –, e os textos provenientes foram gravados em arquivo no computador. Totalizamos, assim, dezoito encontros.

Um fator comum a todos os participantes é a formação em Matemática; eu sou o único que ingressei na Educação Matemática, mesmo assim só a partir do doutorado. Identificaremos os participantes pelas siglas P1, P2, P3, P4 e P5 e o perfil de cada um é descrito na Tabela 2:

Tabela 2: Perfil dos participantes da pesquisa

Participantes	Formação	Disciplinas que Leciona	Tempo docência Magistério Superior
P1	Licenciatura em Matemática, Mestrado em Matemática e Doutorando em Educação Matemática.	Análise, Cálculo Diferencial e Integral I, Álgebra Linear e Projetos de Ensino.	10 anos
P2	Licenciatura Matemática e Mestrado em Matemática	Geometria Analítica, Cálculo Diferencial e Integral e Álgebra.	10anos

P3	Licenciatura em Matemática, Mestrado em Matemática.	Cálculo Diferencial e Integral I, Geometria Analítica e Álgebra.	4 anos
P4	Bacharelado em matemática, Mestrado em Matemática e Doutorado em Matemática	Cálculo Diferencial e Integral, Variáveis Complexas e Geometria.	34 anos
P5	Bacharelado em Matemática Mestrado em Matemática Doutorando em Matemática	Matemática I (Cálculo I) Matemática II (Cálculo II)	3 anos

Escolhemos professores com formação em Matemática, primeiro pela semelhança com a minha formação até antes de entrar no Doutorado, e como quero investigar a minha própria prática, nada melhor do que compartilhar com professores que tivessem “o mesmo perfil” de formação. Será que as minhas dificuldades são as mesmas que eles encontram? Como será que eles atuam em sala de aula frente às dificuldades? Segundo, porque queríamos investigar uma prática que de certa forma é orientada por essa formação em Matemática.

A formação do grupo não foi uma tarefa fácil por conta das diversas mudanças que têm ocorrido nas universidades particulares, pois professores com Doutorado têm sido desligados por questões financeiras, a reestruturação permanente do quadro docente e a falta de incentivos financeiros prejudicam a formação de um grupo de discussão, mas mesmo assim somos perseverantes. Em relação ao quadro de participantes apresentado, temos atualmente a seguinte situação: P2 e P4 demitidos no final de 2004 e P5 saiu da Universidade no final do primeiro semestre de 2005. P1, P2 e P3 participaram de praticamente todos os encontros, P4 foi o professor que participou somente do segundo encontro e P5 participou dos dois encontros do primeiro semestre de 2005 e dos encontros pelo MSN.

A alternativa que encontramos para continuar os encontros, mesmo com os professores que haviam saído da instituição, foi a de marcar, desde suas saídas, encontros via internet, usando o programa MSN. Os encontros via “MSN” ocorreram às quartas feiras das 22h30 às 23h30, com participação dos professores P1, P2, P3, P5 e a orientadora dessa pesquisa, a professora Dra. Janete Bolite Frant, cuja sigla será PO.

Baldino (1998) afirma que o discurso profissional do matemático-professor é regido pelo controle dos significados imposto pela organização dos conteúdos em teoremas, e que, assim, o sentido de um conhecimento para o matemático-professor é muito diferente do sentido desse conhecimento para seus alunos de “cursos em serviço”. Cursos em serviço se tratam de disciplinas matemáticas, como Cálculo, ministradas por professores de departamentos de Matemática para cursos de não-matemáticos, como Engenharia. O professor P3 é professor de Cálculo para Engenharia, ou seja, de curso em serviço, e esse fato será relevante para nossa análise como veremos adiante.

2.9.2 A dinâmica dos encontros de professores.

Com a intenção de aprofundar a investigação sobre a minha prática, eu precisava de que os professores se sentissem à vontade para falar das suas experiências em sala de aula, para comentar as minhas experiências, para discutir, emitir opiniões, refletir sobre a nossa própria prática. Assim, logo no primeiro encontro, coloquei-me como um professor de Cálculo que queria melhorar a sua prática; logicamente que os informei de que se tratava de uma pesquisa de Doutorado, que todos os encontros presenciais seriam filmados, que as fitas seriam transcritas e que as identidades seriam preservadas, em conformidade com o Termo de Compromisso Ético (Anexo 2).

Acredito que essa posição que assumi desde o início foi favorável para que os encontros fluíssem naturalmente e criássemos uma sinergia em torno do assunto que estávamos discutindo, ou seja, o ensino de Integral. Sabemos que a presença do pesquisador é problemática, quando se trata de alguém que quer investigar o outro, pois “mesmo na investigação sobre a prática tem predominado o discurso sobre a prática dos outros”. (PONTE, 2004, p. 25).

Buscamos na literatura um método que nos ajudasse a elaborar os encontros e encontramos em Gaskell (2002) as entrevistas qualitativas do tipo semi-estruturado com um grupo de respondentes – o grupo focal. Para Gaskell, a compreensão dos mundos da vida dos entrevistados e de grupos sociais especificados é a condição *sine qua nom* da entrevista qualitativa e a descrição

feita por Habermas (1992) da esfera pública é ideal para caracterizar, segundo o autor, o grupo focal:

É um debate aberto e acessível a todos: os assuntos em questão são de interesse comum; as diferenças de *status* entre os participantes não são levadas em consideração; o debate se fundamenta em uma discussão racional. Nesta característica final, a idéia de “racional” não é que a discussão deva ser lógica ou desapaixonada. O debate é uma troca de pontos de vista, idéias e experiências, embora expressas emocionalmente e sem lógica, mas sem privilegiar indivíduos particulares ou posições. (GASKELL, 2002, p. 79).

Essas concepções e as principais características advindas da entrevista em grupo, dadas a seguir, vieram ao encontro com o nosso objetivo de compreender melhor a prática do professor de Cálculo:

- ❑ Uma sinergia emerge da interação social. Em outras palavras, o grupo é mais do que a soma das suas partes.
- ❑ É possível observar o processo do grupo, a dinâmica da atitude e da mudança de opinião e a liderança de opinião.
- ❑ Em um grupo pode existir um nível de envolvimento emocional que raramente é visto numa entrevista a dois. (ibid., p. 76).

Para cada encontro elaboramos um *tópico guia*¹⁵, que é uma espécie de roteiro para a condução do encontro, contendo anotações, lembretes, transcrições da fala de alunos, trechos denominados ‘para refletir’ contendo algumas considerações acerca do referencial teórico dessa tese. É importante salientar que esse roteiro era só para orientação; às vezes, dependendo do rumo da discussão, o roteiro era deixado de lado. Além de refletir sobre a minha própria prática assumi, também, o papel de moderador do grupo, já que ao mesmo tempo em que dava liberdade para os professores falarem e os deixava a vontade para expor suas opiniões, eu sempre trazia algumas indagações do tipo: O que você quer dizer com isso? Por que isso é assim?

O fato de os professores se sentirem à vontade nos encontros pode ser observado na fala do professor P3:

¹⁵ Termo usado por Gaskell, segundo o qual, um bom tópico guia irá criar um referencial fácil e confortável para uma discussão, fornecendo uma progressão lógica e plausível através dos temas em foco.

[...] é a primeira vez que eu participo de um encontro entre professores, mas um encontro, vamos dizer assim, isso não é uma reunião pedagógica né, um encontro que funciona e eu acho que isso é o que falta em qualquer nível de ensino, essa troca de experiências, acho que **sem acanhamento por parte dos participantes**, o que não acontece na verdade, a gente sempre fica com receio, com um pé atrás né, com **medo de mostrar que sabe menos** ou que sabe mais, acho que isso não aconteceu aqui, acho que foi bem transparente e eu acho que foi proveitoso para todos nós. (PROFESSOR P3, 2004, Encontro 10, p. 2).

A tabela 3 contém uma sinopse de todos os encontros realizados.

Tabela 3: Os encontros com professores de Cálculo

Encontro	Data	Participantes	Temática	Objetivo
1º	17/08/2004	P1, P2 e P3	Apresentação dos professores participantes. Apresentação do pesquisador. Discussão da Tarefa 1 – A área do círculo.	Investigar as opiniões e concepções dos professores sobre a Tarefa 1, que envolve os conceitos de Infinito atual e potencial.
2º	24/08/2004	P1, P2 e P4	Discussão de um texto resumo da teoria da Cognição Corporificada	Introduzir aos poucos algumas considerações teóricas, relacionando-as a algumas falas do primeiro encontro.
3º	31/08/2004	P1, P2 e P3	Resolução e discussão de atividades utilizando a calculadora TI-83 Plus e um sensor CBR.	Investigar as opiniões e concepções dos professores a respeito da utilização do sensor.
4º	05/10/2004	P1, P2 e P3	Discussão das tarefas 3 e 4 sobre o Teorema Fundamental do Cálculo, com animação em Flash.	Investigar as opiniões dos professores acerca das tarefas 3 e 4, visando a uma futura comparação com as opiniões dos alunos que resolveram essas tarefas.
5º	19/10/2004	P1, P2 e P3	Discussão sobre a tarefa 2 de aproximação da área sob o gráfico de uma função por retângulos com animação no software Winplot.	Investigar as opiniões e concepções dos professores acerca da tarefa 2, visando uma futura comparação com as opiniões dos alunos que resolveram essa tarefa.
6º	26/10/2004	P1, P2 e P3	Apresentação da palestra “Metáforas no ensino da Matemática” que foi proferida por P1 na V Semana da Matemática da Universidade onde trabalhamos.	Introduzir mais considerações teóricas.

7º	09/11/2004	P1, P2 e P3	Relato do Professor P3 sobre suas aulas de Integral, alterações na metodologia do professor, os resultados obtidos, entre outros, e debate.	Refletir, especificamente, sobre as experiências da prática do Professor P3.
8º	16/11/2004	P1, P2 e P3	Discussão sobre trechos transcritos de fitas de vídeo das: Tarefas 1 e 2 aplicadas numa turma de pós-graduação em Educação Matemática (1º semestre de 2004) e da Tarefa 2 aplicada numa turma de Licenciatura em Matemática (2º semestre de 2004).	Investigar as concepções e opiniões dos professores sobre as respostas dadas pelos alunos enquanto resolviam as tarefas 1 e 2.
9º	30/11/2004	P1, P2 e P3	O ensino de Integral o que muda a partir de nossas reflexões?	Levantar as considerações/reflexões de cada integrante sobre os encontros na tentativa de sistematizar os pontos considerados favoráveis ao ensino do Cálculo Integral.
10º	07/12/2004	P1, P2 e P3	Concluindo a primeira fase de encontros.	Levantar quais as contribuições dos encontros para a prática profissional de cada um dos participantes.
11º	15/06/2005	P1, P3 e P5	Retomando a discussão sobre a tarefa 1 – A área do círculo.	Retomar as discussões sobre essa tarefa, buscando explorar mais os conceitos de infinito atual e potencial e integrar o novo participante, o P5, das discussões.
12º	22/06/2005	P1, P3 e P5	Falando sobre conceitos.	Analisar as concepções dos professores sobre o que é conceito.
13º	14/09/2005	PO, P1, P2 e P3	Familiarização com o MSN	Familiarizar com as ferramentas oferecidas pelo MSN com uma discussão sobre o ensino de Cálculo
14º	28/09/2005	PO, P1, P2, P3 e P5	Tecnologia no Ensino de Cálculo	Discutir a utilização da tecnologia no ensino de Cálculo.
15º	05/10/2005	PO, P1, P2 e P5	Tecnologia no Ensino de Cálculo	Discutir a utilização da tecnologia no ensino de Cálculo.
16º	19/10/2005	P1, P2 e P3	A aula de P1 e conceitos	Refletir sobre a atuação de P1 em suas aulas de Integral e aprofundar a discussão sobre conceitos.
17º	30/11/2005	P1, P2 e P3	Intuição e rigor	Discussão sobre intuição e rigor no Ensino de Cálculo.

18º	17/052006	PO, P1, P2 e P3	Intuição e rigor	Aprofundar a discussão sobre intuição e rigor no Ensino de Cálculo.
-----	-----------	--------------------	------------------	---

A seguir apresentamos uma síntese das tarefas que elaborei visando a uma melhoria da minha aula de Integral e que serviram de suporte para iniciarmos as nossas discussões e reflexões no grupo de professores.

2.9.3 As tarefas.

Todas as tarefas desenvolvidas foram aplicadas em salas de aula e foram elaboradas a partir das minhas reflexões sobre a revisão da literatura e do referencial teórico dessa tese. As tarefas 1, 2, 3 e 4 (Anexo I) foram aplicadas numa turma de pós-graduação em Educação Matemática, no segundo semestre de 2004; a tarefa 2 foi aplicada em duas turmas de licenciatura em Matemática, uma no segundo semestre de 2003 e a outra no segundo semestre de 2004, das quais fui o professor de Cálculo. As transcrições das fitas serviram de material para análise e reflexão no grupo de professores de Cálculo.

A forma que encontramos de iniciar as discussões e debates sobre a nossa própria prática foi partir de uma análise das tarefas por parte dos professores do grupo e, posteriormente, analisamos os relatos dos meus alunos enquanto executavam essas tarefas. Assim, começamos a refletir sobre nossas atuações e sobre as ações dos alunos. Os demais professores também colocaram as suas experiências, suas vivências e angústias com relação ao ensino de Cálculo.

As tarefas 1 e 2 exploram, basicamente, as noções de infinito atual e potencial. Situações hipotéticas de dois alunos, com respostas e argumentos distintos¹⁶, foram colocadas na tarefa 1 com o objetivo de incitar a discussão dos alunos, e também dos professores do grupo, sobre o infinito. Nas tarefas 3 e 4, foram abordadas as noções referentes aos teoremas fundamentais do Cálculo.

¹⁶ Barto & Frant (2004) utilizaram esse tipo de estratégia numa investigação sobre aprendizagem de continuidade.

2.9.4 A coleta de dados

Os dados para essa pesquisa foram coletados a partir de duas formas: do material escrito e, principalmente, das gravações feitas em fitas de vídeo. O vídeo é um importante e flexível instrumento para coleta de informação oral e visual, pois pode capturar comportamentos valiosos e interações complexas e permite aos pesquisadores reexaminar continuamente os dados. (CLEMENT, 2000, p. 577, apud. POWELL et al, 2004, p. 86). Pela análise do vídeo, além da informação oral, conseguimos capturar expressões, gestos, risos dos participantes, que não seriam possíveis com outros tipos de coleta de dados e, sobretudo, a possibilidade de rever várias vezes um mesmo episódio facilitou a interpretação e análise dos dados.

Tanto as tarefas em sala de aula, quanto os encontros com professores, foram filmados e as fitas foram transcritas. Para realizar a análise das fitas de vídeo, recorreremos, em parte, ao modelo proposto por Powell et al (2004) que, segundo os autores, é um modelo para analisar dados no contexto de investigações sobre o trabalho matemático e sobre o desenvolvimento do pensamento de estudantes engajados em investigações matemáticas. Nós estamos interessados no desenvolvimento do pensamento dos professores de Cálculo ao refletir sobre a própria prática. Powell et al (2004) cita sete fases que são interativas e não lineares:

1. Observar atentamente os dados do vídeo;
2. Descrever os dados do vídeo;
3. Identificar os eventos críticos;
4. Transcrever;
5. Codificar;
6. Construir um enredo;
7. Compor a narrativa.

A fase três, a da identificação dos eventos críticos, é uma das fases mais importantes. Um evento, ou seja, uma seqüência conectada de expressões e ações é crítico em relação a uma questão particular perseguida pela pesquisa. Assim, uma seqüência de frases dos professores a respeito de conceito pode ser considerada como um evento crítico, pois a caracterização de conceito pelos

participantes é uma das questões dessa pesquisa. Identificados os eventos críticos fizemos, somente, as suas transcrições.

É importante ressaltar que a presença da câmera não foi motivo de inibição por parte dos participantes do grupo de professores. Na verdade, no início do primeiro encontro apenas, parece que ela teve alguma influência constrangedora, mas logo foi esquecida e incorporada ao cenário.

2.9.5 A análise dos dados

A análise de dados qualitativos é feita a partir de dados compostos essencialmente de palavras e não de números. Miles e Huberman (1988) consideram que a análise consiste de três simultâneos fluxos de atividade: a redução dos dados, a apresentação dos dados e desenho/verificação da conclusão.

A redução dos dados se refere ao processo de seleção, focalização, simplificação, abstração e transformação dos dados “brutos” que aparecem escritos nas notas de campo. A redução dos dados ocorre continuamente, durante todas as fases da pesquisa qualitativa, e tal redução ocorre em função do referencial teórico, das questões de pesquisa e dos objetivos do pesquisador. A apresentação dos dados é uma reunião organizada de informações que permite desenhar conclusões e tomar ações. As conclusões emergem desde o início da coleta de dados, quando o pesquisador está decidindo qual o significado das coisas, está notando regularidades, exemplos, possíveis configurações e proposições. (MILES & HUBERMAN, 1988, p.21). A figura 14 é apresentada por esses autores para sintetizar a visão deles sobre a análise dos dados:

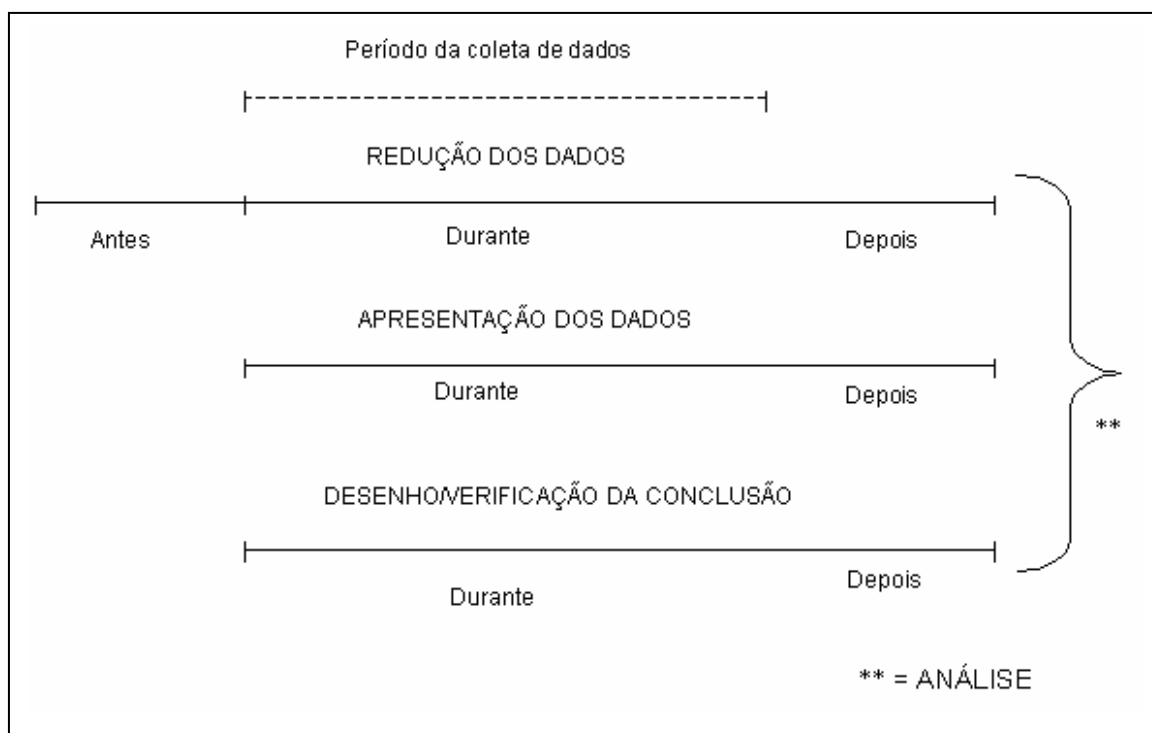


Figura 14: Componentes da Análise de Dados (MILES & HUBERMAN, 1988, p. 22)

No período anterior à coleta de dados, elaboramos tarefas envolvendo o conceito de Integral, baseados na nossa revisão da literatura e no referencial teórico, as quais foram aplicadas com alunos. O material foi transcrito a fim de gerar dados para o grupo de discussão de professores. Durante o período de coleta, ou seja, das filmagens dos dez encontros, iniciamos uma codificação seguida da redução dos dados. Baseados no referencial teórico e nas questões de pesquisa selecionamos alguns trechos da discussão dos primeiros encontros que serviram de dados para os próximos encontros, pois queríamos investigar mais os argumentos apresentados pelos professores. Por exemplo, o trecho abaixo e várias outras afirmações envolvendo a palavra conceito apareceram nos primeiros encontros:

[...] para dizer aquilo que ficou muito pequeno, você representa pelo dx e aquilo é a base do retângulo e a altura do retângulo é $f(x)$, então eu acho que são os conceitos né, que realmente se forem discutidos, acho que podem levar a uma melhora. (PROFESSOR P3, Encontro 1).

Essas afirmações foram retomadas no 12º encontro. Os vídeos foram atentamente observados e iniciamos o levantamento dos eventos críticos ou

episódios. A apresentação dos eventos críticos, para cada encontro, foi feita em tabelas com marcações de tempo, de linha e de página (ver anexo III), para que pudéssemos analisar melhor os dados. A partir da análise e das questões de pesquisa, elaboramos três episódios que são apresentados a partir de esquemas, incluindo os argumentos e as metáforas usadas pelos professores, possibilitando compreender o contexto da enunciação.

Capítulo 3

Episódios Analisados

A análise foi realizada a partir de observações dos vídeos na íntegra e de transcrições das falas dos professores durante os encontros, destacando as seqüências de diálogos relevantes para as questões norteadoras dessa pesquisa. Os três episódios que apresentaremos, emergiram das análises parciais dos argumentos e metáforas levantados nos diálogos.

Por várias vezes, foi necessário retomar a observação e a análise dos vídeos, discutir as mesmas no grupo de pesquisa, ou ainda que somente com a orientadora, a fim de melhor entender e recompor o contexto das enunciações para refinar as análises.

Os episódios são apresentados, inicialmente, por meio de um esquema argumentativo que resume as metáforas e argumentos utilizados pelos professores. Nesses esquemas as figuras com tracejado contínuo contêm as falas dos professores, as com borda tracejada contêm nossas interpretações e as nuvens contêm metáforas. Cada professor e suas falas foram identificados por uma cor diferente conforme legenda.

Após cada esquema, seguem-se as interpretações e análises, intercaladas com caixas de texto, contendo as seqüências de diálogos dos professores, objetivando, assim, a construção do tema em torno do qual a argumentação se desenvolve.

3.1 Episódio I – Falando sobre Conceito e Intuição

A questão norteadora deste episódio é: Como os professores de Cálculo, participantes do grupo, caracterizam conceito e quais as implicações dessa caracterização na sua prática pedagógica? Cabe observar que, em geral, os livros didáticos e outras recomendações aos professores incluem algo como “levar o

aluno a entender o conceito de...”. Entretanto não se sabe o que se entende por conceito. Para os matemáticos, na comunidade matemática, conceito é sinônimo de definição, enquanto que para a Psicologia, conceito vai além da definição, como vimos no capítulo anterior.

Nesse estudo, a gênese da discussão sobre as significações do termo conceito iniciou-se com a minha reflexão, quando começávamos a análise dos trechos transcritos do primeiro encontro de professores. Li e discuti os textos de Rosch (1999) e Lakoff e Johnson (1999) sobre conceito e, a partir de então, além de colocar minha visão para o grupo, passei a prestar maior atenção quando, como e por quê, eu ou algum colega colocávamos algo sobre conceito.

Constatamos que conceito é uma palavra utilizada extensivamente pelos professores participantes, principalmente ao falar do conceito de Integral e das especificidades do seu ensino, fato esse que nos impulsionou a aprofundar essa investigação, buscando entender melhor o uso da noção de conceito em suas práticas.

Observamos, ainda, que durante os encontros, quando os professores participantes refletiam sobre suas atuações em sala de aula, sobre os problemas detectados com o ensino de Integral, não tinham nenhuma intenção inicial de refletir sobre o que entendiam por conceito. No entanto, essa questão emergiu a partir da minha análise e foi levada ao grupo que decidiu discuti-la.

A análise parcial dos primeiros encontros apontava para uma interpretação de conceito como sendo a definição matemática; por exemplo, o conceito de Integral era concebido, pelos professores, como sendo a definição de Integral.

Essa constatação nos levou a introduzir a metáfora conceitual CONCEITO É DEFINIÇÃO para que pudéssemos analisar, à luz da Teoria da Corporeidade, quais implicações dessa visão poderiam interferir na prática do professor de Cálculo. Ressaltamos que nosso objetivo é a análise do discurso dos professores sobre conceitos na perspectiva do ensino e, conseqüentemente, na produção de conceitos pelos seus alunos nas salas de aula de Cálculo. Ou seja, não estamos nos referindo a conceitos como formalmente definidos em Matemática, mas sim à produção de conceitos pelo sujeito imerso numa cultura e numa sociedade.

Assim, a metáfora Conceito é Definição surge como elemento central nesse episódio. Temos dois domínios: o fonte que é a definição matemática e o alvo que é a idéia abstrata sobre conceito na sala de aula de Matemática. As

inferências realizadas no domínio fonte ajudam a compreender as inferências realizadas no domínio alvo, conforme o quadro abaixo.

Domínio-Fonte DEFINIÇÃO		Domínio-Alvo CONCEITO
A definição é estática, é sempre a mesma, independentemente do sujeito.	→	O conceito é estático, é sempre o mesmo, independentemente do sujeito.
A definição é fechada.	→	O conceito é fechado.
A definição é rigorosa.	→	O conceito é rigoroso.
A definição é apresentada e aceita pelos membros de uma comunidade científica – os matemáticos.	→	O conceito é apresentado e aceito pelos membros de uma comunidade científica – os matemáticos.
A definição surge na forma analítica.	→	O conceito surge na forma analítica.

Essa metáfora conceitual nos ajuda a entender como os professores participantes do grupo concebiam e utilizavam, em geral, inconscientemente, a palavra conceito e quais as implicações desse uso para a prática docente.

Assim como Debate é Guerra pode nortear, segundo Lakoff & Johnson (1980), nosso entendimento e ações sobre um debate, Conceito é Definição pode nortear nossas ações em sala de aula.

O conceito, sendo entendido como a definição matemática, leva-nos a uma série de limitações em relação à sua compreensão e, principalmente, em relação à sua construção pelo sujeito, no nosso caso, pelo aluno.

No domínio-fonte, temos a definição e as suas caracterizações, cujas inferências nos levariam a uma caracterização do que é conceito no domínio-alvo:

A definição é estática, é sempre a mesma independente do sujeito e é apresentada e aceita pelos membros de uma comunidade científica. Essas

características da definição implicariam que o conceito não poderia variar de pessoa para pessoa, não seria um constructo de cada indivíduo, teria que ser universal e comunicável a todos.

A definição é fechada e essa característica da definição limitaria a noção de conceito como sendo algo fechado, determinado e acabado, opostamente à definição dada por Rosch (1999): “conceitos são sistemas abertos através dos quais os sujeitos podem aprender e inventar coisas novas”.

Essas duas inferências, possíveis, contradizem o que foi proposto por Lins (2005) em relação ao respeito para produção de significados distintos; ser estática e fechada implica em ter apenas uma interpretação, o que não ajuda muito no processo de construção de conhecimento e leva a “technicalidade” sempre criticada pelos próprios professores.

A definição surge de forma analítica e essa representação da definição limitaria o conceito à forma analítica. Assim todas as demais representações: geométricas, dinâmicas etc. não seriam incluídas como importantes para a construção do conceito, embora o professor utilize essas representações para ajudar a compreensão do conteúdo pelo aluno.

A definição é rigorosa: os epsílons e deltas e o rigor da Análise foram apontados por várias vezes como sendo a base ou a fundamentação do conceito; o rigor oriundo das definições implicaria, então, no rigor dos conceitos. Nessa visão a intuição, por exemplo, que se apóia, geralmente, em metáforas do movimento, não seria considerada.

Entendemos que uma vez que os professores, neste grupo, fizeram mestrado em Matemática, era natural que inconscientemente categorizassem conceito deste modo. No entanto, como veremos, ao discutirem mais sobre conceito na sala de aula, tal argumento se enfraquece e os professores vão modificando suas falas ao longo do diálogo, mas a idéia de que conceito é definição está tão enraizada ou incorporada que continua a figurar no mesmo.

Com o refinamento das análises, pudemos constatar que o termo intuição foi concomitantemente utilizado nas discussões sobre conceito; dessa forma consideramos importante um aprofundamento da análise desse assunto durante os encontros. Apresentamos, assim, esse episódio em duas partes não excludentes - Parte I: Conceito é Definição e Parte II: A intuição é o ponto de partida.

3.1.1 PARTE I: Conceito é Definição

Nesta parte, buscamos os argumentos utilizados pelos professores ao caracterizarem conceito no contexto da sala de aula.

Essa pesquisa, como já delineamos anteriormente, é uma pesquisa sobre a prática dos professores de Cálculo e, em particular, sobre a minha própria prática. A reflexão sobre nossas ações e pensamentos passa a ter um impulso quando somos expostos a questionamentos e a percepções de outras pessoas. Foi a partir das indagações de PO sobre o que eu entendia por conceito, que se iniciou esse episódio, quando estávamos analisando as transcrições.

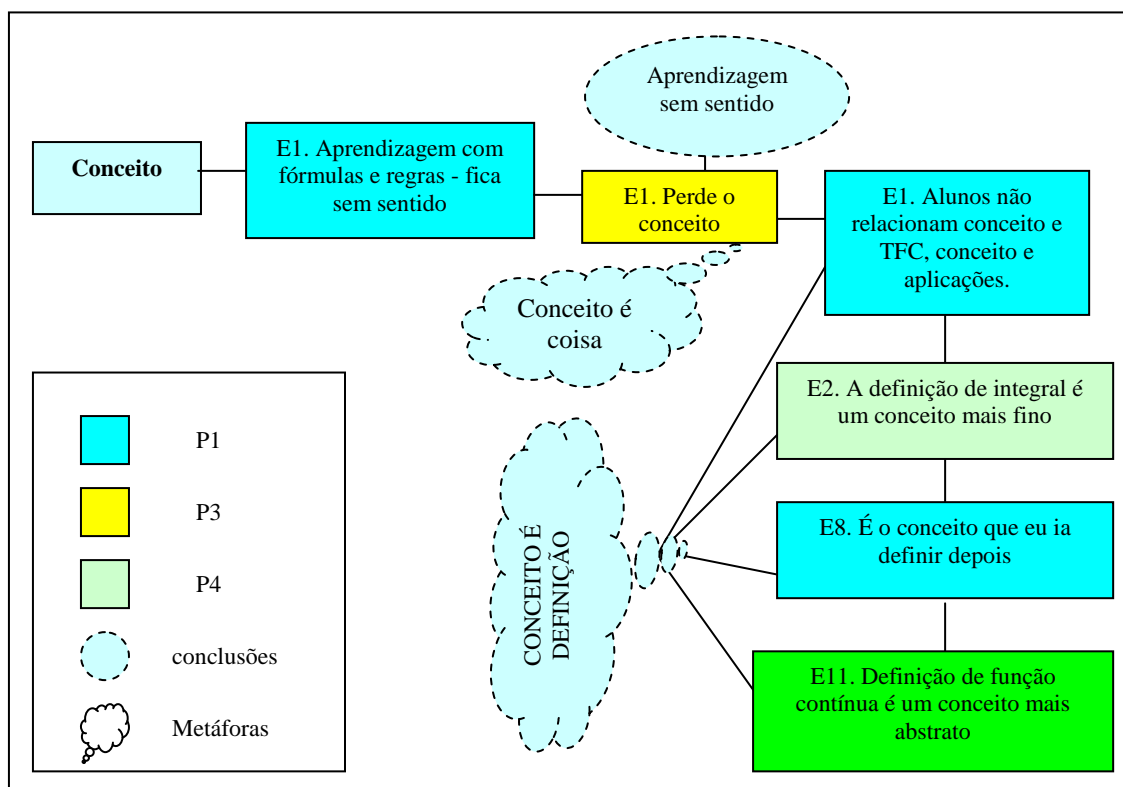
Em trechos como “alunos não fazem conexão nenhuma entre conceito e o teorema fundamental, entre o conceito e aplicações” (E1, p2, L34)¹⁷, fui indagado sobre o que eu entendia por conceito, e logo após uma primeira análise, pude ver que eu usava espontaneamente conceito com a significação de definição e nessa visão o Teorema Fundamental, assim como as aplicações não faziam parte do conceito de integral.

No esquema 1 temos falas dos professores, desde o primeiro encontro até o décimo primeiro, encontros esses que antecederam a nossa intervenção e aprofundamento da discussão sobre conceitos, que ocorreu no décimo segundo encontro.

No primeiro encontro, cada professor apresentou de forma sucinta as suas experiências e seus anseios em relação ao ensino de Cálculo Integral. Dois argumentos surgem logo no início: “aprendizagem com fórmulas e regras – sem sentido” e “perde o conceito”:

P1: [...] o que os alunos valorizam, gostam e tem facilidade são exatamente **com as técnicas de integração, com as fórmulas**, com as regras, mas aí fica meio **sem sentido**. (L29)
P3: Perde o conceito. (L33) *Encontro 1, p.2.*

¹⁷ Ei = encontro i, pi = página i e Li = linha i – linha que inicia o parágrafo (transcrições - anexo III).



Esquema 1. Falando sobre Conceito e Intuição

Observamos que a metáfora que começava a ser utilizada era “Conceito é Coisa”, a qual atribui a conceito uma caracterização de objeto que pode ser perdido e encontrado; já “perder o conceito” está relacionado a uma aprendizagem sem sentido, quando os alunos ficam somente nos cálculos, nos processos mecânicos que envolvem Integral. Cabe notar também que “sem sentido” é usado na sua forma jargão, impessoal, já que a expressão não está relacionada ao sujeito que dá o sentido, ou que sente, mas sim a um sentido que seria estático, fechado e único.

Novamente prevalecia uma visão de um grupo semiótico sobre outro, isto é, a comunidade de matemáticos e a comunidade da matemática escolar ou da Educação Matemática. Como fazer fluir um diálogo entre comunidades que compartilham diferentes crenças, valores, convenções e necessidades sociais?

Nós, professores, teríamos que encontrar o que seria minimamente compartilhado por esses dois grupos, uma vez que pertencíamos à 1 comunidade matemática pela nossa formação de bacharel/mestre e à comunidade de Educadores Matemáticos por sermos professores da sala de aula.

Outra metáfora, Conceito é Definição, surge em argumentos utilizados pelos professores.

P4: A definição de integral é ainda um conceito ainda mais fino que esse. (E2, p9, L24)

P1: É o conceito que eu ia definir depois. (E8, p27, L 14).

P5: Definição de função contínua é um conceito mais abstrato. (E11, p45, L3).

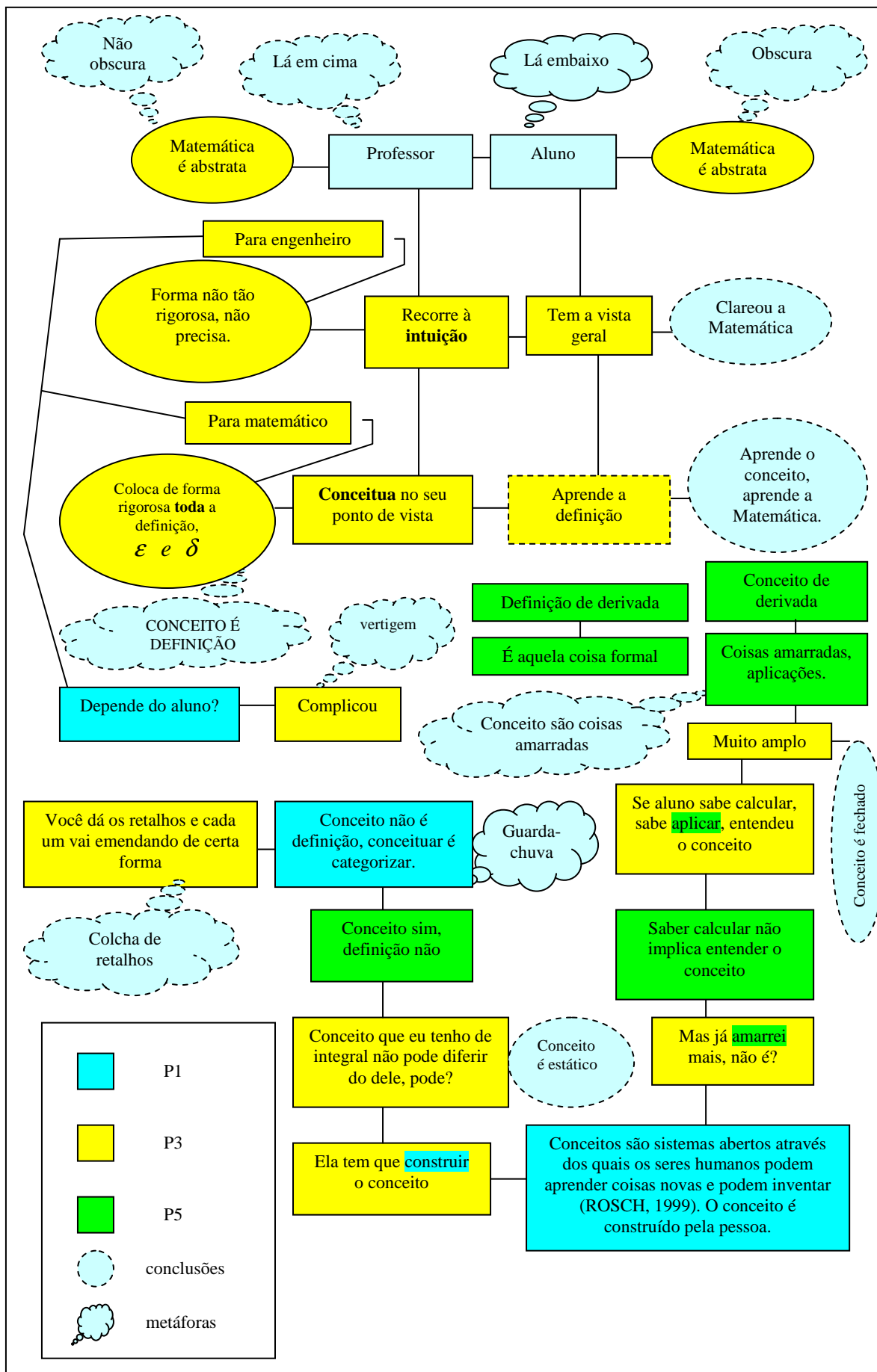
Analisando as falas dos professores na gravação em vídeo, notamos que esses argumentos eram utilizados naturalmente, estavam praticamente incorporados ao nosso discurso sobre o ensino de Cálculo. Existia, também, uma hierarquia nas definições/conceitos, um era mais fino e sofisticado, outro era mais abstrato, outro deveria ser deixado para depois.

Observo o quanto Conceito é Definição está incorporado não só no discurso dos demais professores do grupo, mas também na minha compreensão e, conseqüentemente, na minha prática, pois mesmo depois de ter iniciado a reflexão sobre conceito, volto a utilizar a palavra no oitavo encontro com o significado de definição - L14.

Até então, uma análise parcial apontava que conceito era caracterizado como a definição matemática do conteúdo em questão. Resolvemos, então, aprofundar a investigação e marcamos o décimo segundo encontro para discutirmos o tema: “o que entendemos por conceito”, cujos argumentos e metáforas estão sintetizados no esquema 2 da página seguinte.

A discussão sobre as nossas práticas, nossas experiências de sala de aula, por várias vezes, ancorava-se na noção de conceito. O próprio professor P3, no primeiro encontro, aponta para a discussão conceitual como sendo fundamental para a melhoria do ensino de Cálculo, momento em que ainda não tínhamos intenção de investigar o que entendíamos por conceito.

Esse encontro foi iniciado colocando-se a questão: “O que se quer dizer quando se fala de conceito?” e com a leitura de alguns trechos selecionados do primeiro encontro, como veremos abaixo. Estiveram presentes os professores P1, P3 e P5.



Esquema 2. Falando sobre Conceito e Intuição

P1: “P3: Então eu acho que **são os conceitos** não é que se realmente **forem discutidos**, acho que **podem levar a uma melhora**” (E1, p3, L36). P1 pergunta para P3: O que você quer dizer quando fala em conceito? Você está falando que é importante! (L21).

P3: Eu acho assim primeiro não tem jeito de fugir da **parte intuitiva**, a Matemática de fato ela é abstrata, não são todos que têm uma facilidade para **enxergar** certas coisas da Matemática e você tem que **tornar mais acessível**, aí você recorre **à intuição**, acho que depois que o aluno teve a **vista geral**, aí você **pode conceituar no seu ponto de vista**, o que seria esse conceituar, **conceituar é colocar de uma forma rigorosa toda a definição**. (L 25)

P1 **Conceituar** é colocar de forma rigorosa toda a definição? (L33)

P3 Eu **acho** que sim, não pode ser uma **coisa muito não é**, quando eu falo o **conceito** de integral. (L35)

Encontro 12, p 51.

Levantamos, no esquema 2, as metáforas “obscura”, “não obscura”, “lá embaixo” e “lá em cima” para sintetizar os argumentos utilizados por P3. Quando P3 diz que não são todos que têm facilidade para enxergar a Matemática, é como se ela fosse “obscura” - difícil de entender, confusa e enigmática, e o professor tem a missão de torná-la mais acessível: “[...] facilitar para que a Matemática se torne acessível para as pessoas que estão lá embaixo” (p.55, L1); a expressão “lá embaixo” revela que os alunos estão em situação inferior em relação ao conhecimento matemático e opostamente o professor está “lá em cima”.

Para facilitar a compreensão do aluno sobre Integral, começa-se pelo “concreto”, pela intuição, para que ele comece a enxergar, a clarear a Matemática. Ao mesmo tempo em que é percebido que são dois processos cognitivos distintos: entender, pensar “no intuitivo” e entender, pensar “na Matemática rigorosa”, é observada a tentativa de levar o aluno de baixo para cima, ou seja, partir do intuitivo e chegar à abstração.

A intuição é, para P3, uma forma não tão rigorosa, não precisa em Matemática e a partir daí o professor pode “conceituar no seu ponto de vista; conceituar é colocar de uma forma rigorosa toda a definição”. Essa frase nos remete a uma valorização da teoria Weirstrassiana, conforme apontam Baldino (1998) e Núñez (2003), conferindo a conceito um *status* de rigor e de formalidade.

Observamos que a prática da discussão sobre nossa atuação em sala de aula provoca mudanças em nossas idéias. O discurso de P3 começa a mudar quando diz que conceito pode variar, dependendo da turma com que se trabalha.

Conforme aponta Tardif (2002), os nossos conhecimentos profissionais são oriundos da nossa formação escolar anterior, dos livros didáticos, dos programas

e da própria experiência na profissão. Assim, no nosso caso, a formação em Matemática e o ensino que recebemos, desde a Escola Fundamental reforçavam nosso discurso sobre conceito, mas ao dialogar sobre o mesmo íamos constituindo novos olhares e encontrando a intersecção entre as duas comunidades apontadas anteriormente – a Matemática e a Educação Matemática.

P1 Você viu quantas vezes aparece a palavra **conceito**, você está querendo melhorar a sua aula e aí uma das coisas que você falou no seu discurso, que não é só no seu, eu também falo e qualquer texto que você pegue, o PCN, por exemplo, levar o aluno a desenvolver o **conceito** de proporcionalidade, o **conceito** de, aí se eu quero fazer isso eu tenho que saber o que é **conceito**, o que eu entendo por **conceito**. (p.51, L38)

P3 Eu acho que é assim fazer com que aquilo fique **claro** pros alunos, mas de que forma, tem forma **intuitiva**, que seria uma forma mais, **não tão rigorosa**, não precisa em integral, integral não é só a área baixo da curva, fazer ele entender que é uma área, você vai partir de uma coisa que seja **concreta**, tudo bem a área, **a maioria tem uma definição própria**. (p.51, L46)

P1 Fazer entender o **conceito** para você tem um objetivo final que é entender a definição? (p.52, L3).

P3 Eu acho que dependendo de pra quem você está dando aula, do **seu público**, você não tem que ser tão específico, isso é um ponto que a gente estava discutindo na última aula sobre **conceito**, **pode variar**, eu posso **conceitualizar algo de forma bem formal para um matemático, mas para um engenheiro não**, ele pode ter uma **noção** de integral, mas ele não vai mexer com épsilons e deltas. (p.52, L5)

P1 Então o **conceito depende** do aluno? (p.52, L13)

P3 É, aí é um pouco **mais complicado**, mas eu **não** sei se **estou conseguindo me expressar**. (p.52, L14)

Encontro 12.

Podemos observar, mais uma vez, que a produção de significados depende do sujeito, do contexto em que ele se insere, pois temos o caso dos alunos de Engenharia, de Economia, da comunidade matemática como professores de Matemática. De um modo geral, nós professores, esperamos que todos os alunos pertençam à comunidade Matemática, assim como, numa conversa, esperamos que o outro nos compreenda; para isso buscamos os acordos, procuramos entender o lugar de onde fala/ouve/interage nosso auditório.

No nosso grupo, buscávamos entender melhor o que era dito por nós sobre conceito. Podemos observar que, de início, o único acordo era entre nós, matemáticos, e conceito era entendido como definição.

As interações neste encontro nos levaram a uma reflexão sobre o lugar do nosso auditório, mas Conceito é Definição estava incorporado ao nosso pensar/agir, como podemos observar na enunciação “posso conceitualizar algo de

forma bem formal para um matemático, mas para um engenheiro não”, na qual o termo conceitualizar é empregado no sentido de definir.

Quando P3 é perguntado se conceito depende do aluno, ele fica sem resposta; de fato, na visão de conceito como definição, essa variação seria impossível uma vez que a definição matemática não varia, é fechada e universal. Assim, como poderia cada aluno ter a sua definição de integral? A metáfora da “vertigem” traduz o mal-estar, a “tontura” que o professor tem ao não conseguir responder a questão.

O professor P5 se lembra do objetivo que escreveu para a disciplina Cálculo I em seu plano de ensino, no qual constava “compreender e aplicar os conceitos do Cálculo”. Como podemos objetivar a compreensão dos conceitos se não temos claro como os conceitos são construídos? Isso reforça a importância de discutirmos esse tema, a fim de que nossos planejamentos de aula deixem de figurar apenas no campo teórico/burocrático e norteiem realmente as nossas ações na sala de aula. A seguir apresentamos mais um trecho extraído do décimo segundo encontro.

P1 pergunta para **P5**: Você concorda com **P3**? (L16)

P5 Tô lembrando quando eu coloquei lá o objetivo de matemática I [corresponde ao Cálculo I] compreender e aplicar o **conceito** do Cálculo diferencial para funções de uma variável real. (L17)

P1 Os **conceitos** do Cálculo! (L21)

P3 Eu acho que essa palavra é usada para vários. (L22)

P5 Talvez se eu fosse dar a definição de **conceito**. (L24)

P1 - Isso, o que é **conceito** para você? (L26)

P5 A definição de derivada e o **conceito** de derivada, a definição de derivada é aquela coisa formal. (L27)

P1 Isso é o **conceito**? A definição é o **conceito**? (L29)

P5 Não, essa é a definição, o **conceito** de derivada... (L31)

P3 É entender o que significa? (L33)

P5 Pois eu acho que **é muito mais**, as coisas, **as coisas que estão amarradas** assim, as aplicações. (L34)

P3 Mas isso é **muito amplo**, não é? (L36)

P5 Pois é, mas é a idéia que eu tenho! (L37)

P3 Eu acho assim, você está dando a aula de integral, se o aluno **consegue calcular** integral, ele **sabe aplicar** a integral, ele entendeu, **sabe fazer** as aplicações, pra mim ele entendeu o **conceito** de integral. (L38)

P5 Se ele sabe calcular integral, não necessariamente ele entendeu o **conceito**. (L42)

P3 Não, mas se ele sabe **aplicar**, **já amarrei** mais não é? Tem aluno que calcula e não sabe nem o que está calculando, não é? Mas se sabe calcular, sabe aplicar, entende as aplicações, tem um **bom embasamento**. Ah eu ia falar um bom **embasamento conceitual** [risos] (L44).

No final do décimo primeiro encontro, o professor P5 disse que a definição de função contínua é um conceito abstrato, ou seja, para ele conceito era usado no sentido da definição. Observamos, nesse encontro, uma visão diferenciada, uma mudança em seu discurso, atribuindo à definição uma caracterização de formalidade e a conceito uma caracterização de “coisas amarradas, as aplicações”.

A metáfora “Conceitos são coisas amarradas” nos remete à metáfora “Conceito é coisa” que usamos no primeiro esquema. Lá vimos que para os professores o aluno perde o conceito, quando aprende somente as técnicas de integração; aqui podemos interpretar “coisas” como sendo as técnicas, as aplicações, a definição, a teoria etc., que estando amarradas, pelo aluno, não se perdem, estão presas e isso ajudaria na construção do conceito.

A visão de P5 é diferenciada da do professor P3, que gradualmente vai modificando seu discurso e vai aos poucos aceitando a argumentação de P5. Inicialmente há certa resistência de P3 quando afirma que a visão de P5 é “muito ampla”, uma vez que aceitando que Conceito é Definição teríamos algo muito restrito e fechado. Contudo, na linha 38, P3 já inclui as aplicações como pré-requisito para a compreensão do conceito e na linha 44 o trecho “já amarrei mais, não é?”, aponta para uma aceitação parcial dos argumentos de P5. Nas últimas linhas desse diálogo, P3 introduz a palavra embasamento e se policia para não falar embasamento conceitual, o que já reflete uma preocupação do professor no uso do termo conceito.

Após esse debate, apresentei a minha visão baseada na concepção de Rosch (1999): “Conceitos são sistemas abertos através dos quais os seres humanos podem aprender coisas novas e podem inventar [...]”. Conceitos constituem um aspecto do estudo de categorização, conceituar é categorizar e, segundo Rosch (id), categorizar é tratar objetos e eventos distinguíveis como equivalentes. Assim a definição de Integral é apenas um dos itens que participam da construção do conceito de Integral. As aplicações, as técnicas de integração, os teoremas, as representações geométricas, as somas de Riemann, enfim, tudo o que puder ser categorizado nesse grande rótulo Integral caracteriza o conceito de Integral. Continuando a discussão, P3 reflete sobre o assunto.

P3 Ela tem que construir o **conceito**? [aponta para si mesmo colocando a mão no peito] (L3)

P1 Exatamente, é ela que vai construir o **conceito**, é aquilo que você falou, depende do público, **depende da pessoa**, nada do que se faz é independente da pessoa que está pensando, quem constrói o **conceito** é você, sou eu, é ele. (L5)

P3 Eu vou dar a definição e a partir daquilo ele constrói o seu **conceito** de integral? (L10)

P1 Você vai transmitir a informação, enquanto você está falando como uma matraca, eu to transmitindo informação, agora o **conceito** é o aluno que vai construir. (L12)

P3 Agora o **conceito** que eu tenho de integral e que ele tem de integral **não pode diferir, pode?** (L15)

P5 Eu acho que **pode, a definição é impossível** não é. (L17)

Encontro 12, p.53.

Com a pergunta da linha 10 vemos que P3 tenta entender como que um conceito é construído pelo aluno. Começa a pensar em definição como sendo algo diferente do conceito, mas ao mesmo tempo a coloca como sendo suficiente para a construção do conceito. Isso nos leva a refletir: O que é oferecido aos alunos de modo que eles categorizem integral? Somente a definição?

A partir da definição, podemos somente ter a própria definição, mas isso não é o que ocorre, pois além da definição temos os exemplos, aplicações, diferentes representações com ou sem tecnologia. Assim, faz-se necessário que o professor de Cálculo tenha consciência desse assunto com o intuito de que possa valorizar as outras formas de apresentação do conteúdo, além da definição, como sendo formas vitais à construção dos conceitos.

Na linha 15, quando P3 questiona se o conceito que cada um tem sobre Integral não pode diferir, vemos novamente que conceito é pensado como definição, como algo fechado, estático, determinado e único para todas as pessoas, o que aponta para o conhecimento matemático enquanto saber do domínio público, da ciência, dos livros e não como um constructo mental. Já para P5 o conceito poderia variar de pessoa para pessoa, mas a definição não.

A definição é o que o professor deseja que o aluno tenha para poder compartilhar com matemáticos e professores de matemática; assim em cálculo II ou em outra disciplina qualquer que requeira essa definição, ela será sempre a mesma, mas conceito que é algo que não conseguimos entender e expressar sem maiores complexidades é algo diferente. Assim sendo, defendemos a idéia de que é melhor caracterizar os diferentes aspectos que o aluno estaria utilizando para falar, usar, expressar etc. sobre Integral do que falar vaziamente em conceito.

É interessante observar este diálogo, pois no início P3 se mostrava mais aberto, deixando transparecer sua vertigem em não conseguir a intersecção entre o conteúdo Matemático e o conteúdo para a sala de aula de Matemática, o conceito dependeria do público alvo.

O professor P5 que parecia mais fechado, não fala de sua vertigem, mas ela está presente nas reticências da linha 31 página 52 e na linha 17 da página 53 enuncia a conciliação das duas comunidades: “conceito pode”, isto é, podem existir diferentes produções de significado para Integral, mas a definição Matemática de Integral só tem uma.

Até aqui observamos que para P3 é muito forte entender Conceito via Definição. Para P1 e P5, conceito é algo mais amplo do que apenas a definição matemática, é construído pelo aluno, e pode variar de pessoa para pessoa, dependendo da sua capacidade de estabelecer relações, de criar etc.

P1 [...] agora o **conceito**, ele não é, não dá para enxergar o **conceito** como sendo a definição de integral [...] Quando você trabalha com integral, você tem lá a definição de somatório, as somas de Riemann, só a definição vai ser o **conceito** de integral? Não, o **conceito** de integral é tudo o que eu falar. Imagine um grande **guarda-chuva**, aí tudo o que eu puder **pendurar** aqui sobre integral, por exemplo, área, aplicações, integral indefinida, integral definida, tudo isso que eu possa falar que me permite falar nesse negócio chamado integral, agora esse conjunto é a pessoa que vai construindo. (L34)
P3 É **ela que vai amarrando**, como se você desse os **retalhos** e cada um vai emendando de certa forma. (L47) *Encontro 12, p.53.*

As metáforas “guarda-chuva” e “colcha de retalhos” ajudam os professores P1 e P3 a argumentar sobre conceito; enquanto no guarda-chuva você pendura tudo o que é referente à integral, na colcha você emenda, formando assim o conceito.

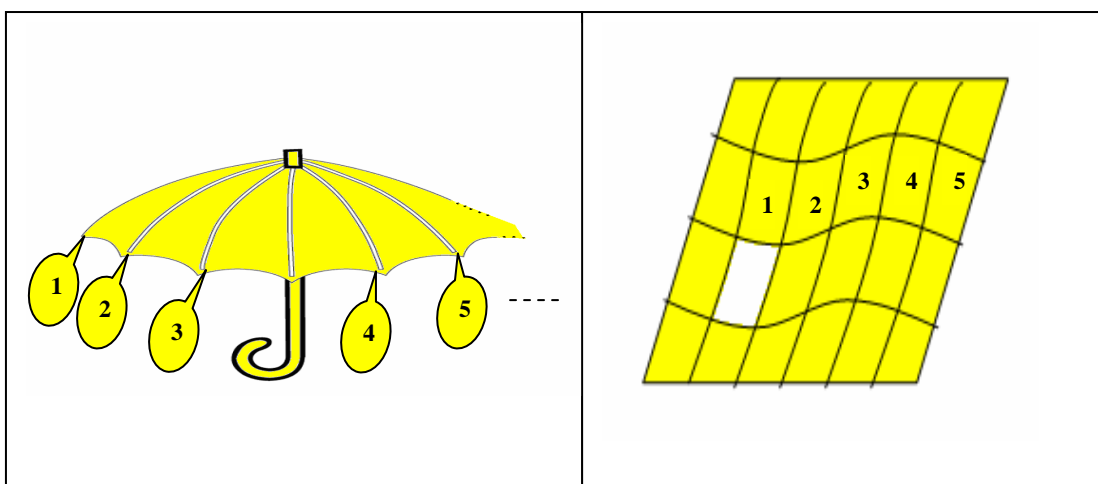


Figura 15: A metáfora do guarda-chuva

Figura 16: A metáfora colcha de retalhos

O guarda-chuva é um objeto que nos abriga da chuva e dependendo do tamanho cabem mais ou menos coisas embaixo dele. O conceito é entendido como um guarda-chuva hipotético, cuja copa é ampla para sempre proteger algo mais, por isso a figura é de um guarda-chuva, cuja ponta está aberta, pode crescer indefinidamente, é algo que inclui a definição, textos, gráficos, símbolos, aplicações, etc., possibilitando novas construções e criações. Cada um dos balões corresponde a diferentes maneiras de pensar/produzir significados para um determinado conteúdo, no nosso caso a integral. Se o balão 2 cai de sua copa, o guarda-chuva continua existindo do mesmo jeito. Já na colcha de retalhos, se não tivermos os retalhos emendados teremos um buraco.

No caso do guarda-chuva, sempre cabe mais um ou se pode tirar algum; assim respeitamos as diferentes formas de produção de significados dos alunos. No caso da colcha tem que estar tudo amarrado de um determinado modo e o buraco aponta para possíveis falhas na aprendizagem dos alunos. Quando na fundamentação teórica apresentamos a visão sobre conhecimento, poderíamos aqui relacionar o guarda-chuva hipotético à faixa de Moebius e a caixa com nossa colcha.

No décimo sexto encontro, voltamos a discutir sobre esse assunto com a participação, nessa ocasião, do professor P2. O discurso do professor P2, no referido encontro, também apontava para a metáfora Conceito é Definição. Esse encontro foi realizado pelo MSN, quando retomamos o assunto sobre conceitos, após termos discutido uma aula sobre Integral de P1. Participaram do encontro os professores P1, P2 e P3.

Observamos que, inicialmente, P2 via conceito como “uma espécie de definição” (p.72, L1) e com o decorrer da discussão, a opinião muda: “entender o conceito é uma coisa bem mais ampla do que entender a definição (eu acho)” (p.72, L22).

A elaboração do esquema 3 da página seguinte contou com a colaboração de um grupo de alunos de Pós-Graduação da Universidade Estácio de Sá do Rio de Janeiro, na disciplina Análise do Discurso, sob orientação da Prof^a. Dra. Mônica Rabello de Castro. Duas metáforas foram levantadas para analisar o discurso dos professores.

A primeira, “Vertigem”, que significa não estar bem, uma espécie de tontura, confusão, no sentido de definir o que venha a ser conceito, foi introduzida

para sintetizar as idéias de P2 identificadas em expressões como “não estou sabendo responder” (p.72, L9).

A segunda encontra-se na fala “também já caí nessa” (p.72, L2) do professor P3. A expressão “já caí nessa” significa que aquela situação já fora apresentada anteriormente e que a pessoa se encontra, então, em alerta, para não errar novamente.

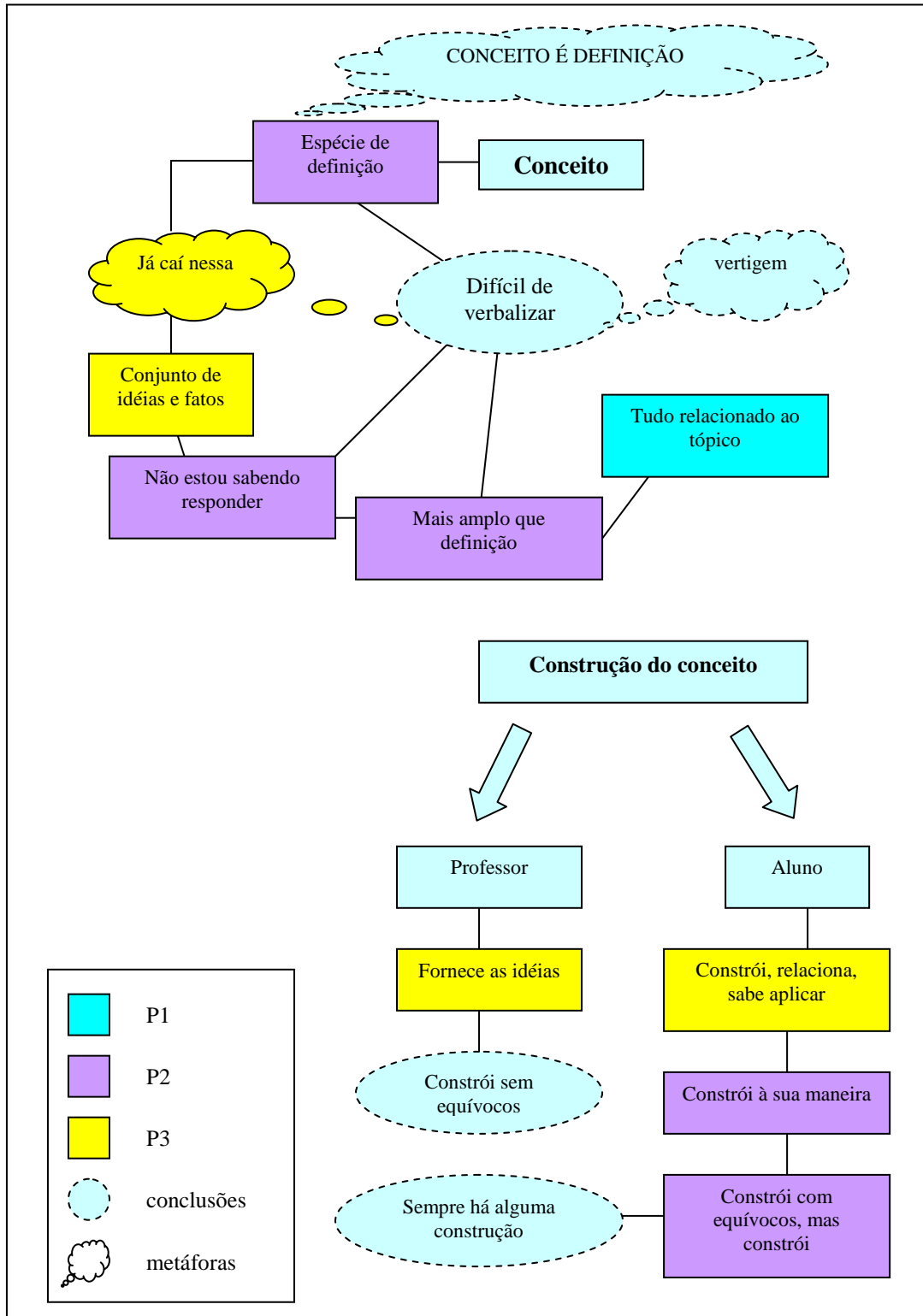
O professor P2 afirma que os alunos constroem o conceito à sua maneira e a seu tempo: “entender o conceito, relacionar [...] é uma particularidade de cada aluno e cada um compreende à sua maneira e a seu tempo.” (p.72, L29). Porém, a construção se dá por meio de equívocos: “o aluno que constrói (mesmo que às vezes com alguns equívocos), mas ele constrói”. (p.72, L35).

Baseados nesses argumentos percebemos que, de certa forma, existe alguma construção do conceito por parte do aluno. Conclui-se, então, que os professores constroem conceitos sem equívocos.

Transcrevemos abaixo os argumentos utilizados pelos professores e na página seguinte trazemos o esquema que resume os argumentos utilizados.

P1: E aí P2, o que você entende por **conceito**? (p.71, L59)
P1: Acho que o P3 pode ajudar. (p.71, L59)
P2: Conceito? Huummm, uma **espécie de definição**. (p.72, L1)
P3: É P2, também **já caí nessa**.(L2)
P3: Veja se aprendi P1: (L3)
P1: Só para clarear **conceito** de Integral, o que é? (L4)
P1: Quando você quer que o aluno aprenda o **conceito** de Integral o que você quer que ele aprenda? (L5)
P3: É um **conjunto de idéias que levam** o aluno a "compreender" o assunto? (L7)
P2: **Não estou sabendo responder...** (L9)
P1: Idéias de quem, P3, quem constrói o **conceito**? (L10)
P2: Acho que quero que ele adquira **informações diversas** sobre o tópico. (L11)
P3: Nós damos as idéias e os **alunos deveriam construir** o conceito, relacionar, saber aplicar... (L13)
P3: ??? (L15)
P3: Entender o conjunto de fatos sobre Integrais. (L16)
P1: P2, você **já havia pensado nisso**? (L17)
P2: Mais ou menos, **não muito** (pensado nisso).(L18)
P1: Fazer entender o conceito é fazer entender a definição? (L19)
P2: Não. (L20)
P1: O que é então? (L21)
P2: Fazer entender o conceito é uma coisa **bem mais ampla** do que entender a definição (eu acho).(L22)
P2: Gostaria muito que os alunos entendessem todos os **conceitos** que ensino.(L24)
P1: Ok **P2**, conceito não é somente a definição, é tudo o que está relacionado ao tópico e é o aluno que constrói. (L26)

P2: entender o **conceito**, relacionar,... É uma particularidade de cada aluno e cada um **compreende a sua maneira e a seu tempo?** (L29)
P1: Ok, P2 essa discussão surgiu porque a maioria dos professores acaba associando conceito à definição.(L33)
P2: O **aluno que constrói** (mesmo que às vezes com alguns **equivocos**), mas **ele constrói**. (L35) *Encontro 16, p. 71 e 72.*

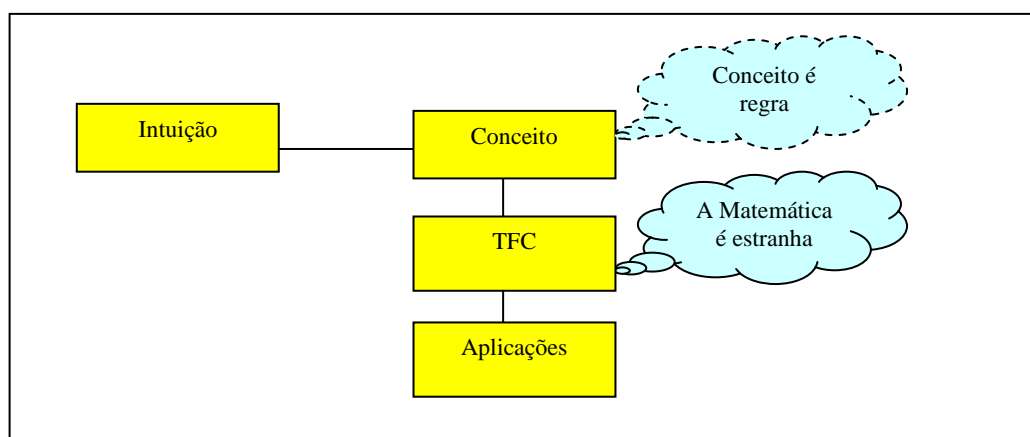


Esquema 3. Falando sobre Conceitos e Intuição

A seguir, continuamos a investigação sobre conceitos analisando, nesse caminhar, uma aula do professor P3.

A aula de P3

Numa aula introdutória sobre integral do professor P3, para um curso de Engenharia, noturno, com 70 alunos, pudemos verificar, novamente, a utilização da palavra conceito, nesse caso com uma significação de método, de regra, de ferramenta para cálculo.



Esquema 4: Falando sobre Conceitos e Intuição

A aula foi filmada com a autorização da instituição, do professor e dos alunos e iniciou-se com P3 falando sobre a noção de integração por aproximação de áreas de retângulos, com o clássico exemplo de área sob uma curva e de aplicações da Integral, como por exemplo, que com ela é possível encontrar a velocidade de um móvel, calcular a área de uma região não regular e a energia consumida.

P3 – Agora, o que nós vamos fazer daqui para frente é descobrir um **método** para se calcular a Integral definida. O Cálculo da Integral Definida [O professor escreve esse título na lousa] A semana passada eu passei para vocês a importância de se calcular a área abaixo de uma curva. Qual foi a idéia original para se chegar até aqui, o que você tem aqui $\int f(x)dx$ que pode ser interpretada como a soma das áreas de retângulos com base tendendo a zero. Agora como calcular essa Integral? Então nós vamos começar a introduzir **conceitos** para se calcular essa integral. **No começo** vai parecer **estranho** porque eu vou enunciar um teorema da Matemática e pra quem está vendo pela primeira

vez vai **estranhar** o que vai ser escrito. Agora é importante perceber que o que vocês **utilizam na engenharia como aplicações**, os **matemáticos por detrás têm que dar uma fundamentação para isso funcionar**; essa ferramenta que você utiliza nas aplicações ela tem que funcionar, não pode ser uma aproximação, e de que forma isso é feito. Então nós vamos escrever assim [professor escreve na lousa]. O Cálculo da Integral Definida é fundamentado num famoso teorema da Matemática chamado Teorema Fundamental do Cálculo. Esse teorema, até aqui eu falei alguma coisa de derivada? Isso aqui é um símbolo que indica soma de áreas de retângulos.
Aula de P3

Podemos observar que o professor P3 segue pensando na colcha de retalhos. Quando diz que no começo pode parecer estranho, ou seja, os retalhos estão soltos e não parecem com a colcha que se forma no final, depois de amarrar os retalhos. Conceito é enunciado por P3 como algo relacionado ao formalismo da matemática, quando diz vamos introduzir agora conceitos para se conseguir calcular essa integral. Esse conceito a que se refere é o Teorema Fundamental do Cálculo que fornecerá as regras para o cálculo da Integral.

Podemos interpretar essa visão por meio da metáfora “Conceito é Regra”, o que nos levaria a pensar que se o aluno aprende as regras, ele entenderá o conceito e por isso é uma matemática que está por detrás e talvez nem seja necessário entendê-la, pois não será exigida em prova, basta saber usar. A technicalidade introduzida pelo próprio professor conduz à falta de sentido na aprendizagem, apontada pelos professores anteriormente.

O argumento “A Matemática é estranha” é explicitada na fala de P3: “No começo vai parecer estranho porque eu vou enunciar um teorema da Matemática e pra quem está vendo pela primeira vez vai estranhar o que vai ser escrito”, o termo “estranho” significa que a Matemática, particularmente nessa situação o Teorema Fundamental do Cálculo, é externa, desconhecida, misteriosa, algo novo para os alunos e, ao mesmo tempo, é extraordinária porque é famosa, é uma ferramenta que os alunos usarão em aplicações, deve funcionar e é exata. Com esse argumento ele tenta convencer os alunos de continuarem acompanhando a aula, apesar de ser estranho no início, mas depois eles vão entender com as regras.

Na aula de P3, assim como em seu discurso no décimo segundo encontro, observamos que existe uma dinâmica a ser tomada em sua aula, na qual o assunto é sempre iniciado de forma intuitiva. Isso nos impulsionou a retomar a análise dos diálogos dos professores em função do termo intuição. Pudemos

constatar que, assim como conceito parecia fundamentar boa parte do discurso dos professores, os termos intuição, intuitivamente, forma intuitiva e conceito intuitivo figuravam de forma freqüente.

3.1.2 PARTE II: Intuição é o Ponto de Partida

Apresentamos, nesta parte, uma análise sobre os argumentos utilizados pelos professores a respeito do uso do termo intuição na reflexão sobre a prática, a qual consideramos fundamental para responder a questão de pesquisa que norteia esse episódio.

No primeiro encontro, notamos que, para P3, como não é possível “transmitir” para alunos iniciantes o rigor das definições do Cálculo, que são sustentadas pela Análise, a solução é começar pela intuição.

P3 - É uma questão delicada principalmente a parte que dá a **fundamentação para isso é análise**, a parte de demonstração isto a gente não tem condição de transmitir, o cálculo foi o problema de séculos, ninguém aceitava essa história de **tender a zero, dar um acréscimo, fazer tender a zero**, e chega na derivada. A **fundamentação** disso veio com a análise, isso é o que **sustenta** realmente as definições do cálculo e isso a gente **não pode passar no começo**. Acho que no cálculo a idéia é **começar pela intuição**. (L23)

P3 - As vezes tenta deixar a coisa **tão simples** que a gente acaba **enforcando a matemática**. (L 33)

P3 - Eu fui comentar com a turma essa história do limite do delta x **tendendo a zero**; aí você escreve lá o $f(x)dx$ aquilo é a base do retângulo e o $f(x)$ é a altura ok, mas não vai sair por aí dizendo que na integral é o $f(x)$ vezes o dx , aquilo lá é uma notação, também não é? Isto me preocupa, eu falo isso porque eu **sei que eles vão entender melhor** pelo menos o **conceito**, eu sei que eles **vão entender** aquele símbolo da integral, pra eles vai ter uma **visão melhor** o S eu tô somando áreas dos retângulos, o que me dá a base dos retângulos é o dx e o que me dá a altura do retângulo é o $f(x)$, mas espera aí, isso é uma notação, isso **não é o $f(x)$ vezes o dx** . (L35)

P3 - É complicado, você tem que pensar num jeito de trazer o aluno para que ele tenha esse **conceito intuitivo**, mas ao mesmo passo, tomar cuidado para ele **não enforçar a matemática**, se não ele por aí **fazendo besteira**. (L47) *Encontro 1, p4.*

Começando pela intuição, para P3, há uma melhor compreensão pelos alunos, “eles terão uma visão melhor”, contudo traz preocupações ao professor que diz ter receio de estar “enforcando a Matemática”.

As noções apresentadas pelo professor que foram caracterizadas como sendo intuitivas estão basicamente relacionadas a noções de movimento por meio

de uma linguagem dinâmica, que são explicitadas em falas como “tender a zero”, “dar um acréscimo”, “delta x tendendo a zero” com as quais os alunos são instigados a utilizar a imaginação para perceber o que ocorre de fato.

No segundo encontro de professores, tivemos a reflexão sobre um trecho extraído da Vídeo-conferência do Prof. Dr. Rafael Núñez na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2004):

Tangente “toca” a circunferência num ponto. Esse toca é diferente da cognição humana natural, por exemplo, quando a mão toca o microfone. Usamos uma **noção intuitiva** para chegar nos conceitos matemáticos. Porém se o aluno não percebe que tem um ponto em comum, ele está no senso comum. A dificuldade dos alunos é decorrente dos conflitos conceituais.

Núñez (2004) alerta que as noções intuitivas, apoiadas em expressões do cotidiano que usamos para chegar aos conceitos matemáticos, podem trazer conflitos para os alunos.

No exemplo dado, o termo “toca” que é usado por nós, professores, para dizer que a tangente “toca” a circunferência, ou que duas circunferências se “tocam”, na linguagem natural tem o significado de ter contato com, e quando, por exemplo, nossas mãos tocam algo como o microfone não temos nesse ato uma intersecção entre nossa mão e o microfone. No entanto, na Matemática, quando dizemos que a tangente toca a circunferência, temos um ponto em comum nessa intersecção. Com uma metáfora básica não é possível entender esse caso, pois as inferências do domínio mão/microfone não explicam o domínio tangente/curva; é preciso um novo texto que favoreça a metáfora de ligação ou a montagem conceitual.

Essa visão vem ao encontro com a preocupação dos professores em acabar “enforcando a Matemática” quando recorrem à intuição. A discussão sobre esse assunto surgiu também no segundo encontro de professores.

P2 - No caso aqui, tomar cuidado para não enforçar a Matemática, isso acontece em todos os tópicos e todos os cursos, às vezes quero trazer **tão perto** do aluno, aí você vai e diz espera aí, **já fui demais**.(L11)

P4 - Não, eu não sei se **enforca a Matemática**. (L15)

P4 - Aqui é uma notação e essa notação numa teoria mais avançada isso tem um outro significado, aqui é apenas uma notação, se você quiser dizer que o Δx vira dx , fica a

vontade, assim tudo funciona bem [risos]. Na verdade começou assim: o dx era uma notação para diferenças; se você olhar historicamente o dx está lá no cálculo, Leibniz usava essa notação que mais adiante [...] passou a ter o **seu devido lugar**. (L16)

P1 - Quem produz significado é o aluno [independentemente do estágio em que o aluno esteja, de qualquer forma o professor terá que falar sobre (de alguma forma) um determinado conteúdo] (L24)

P4 - Por isso mesmo que você precisa tomar muito cuidado com a informalidade, a **informalidade em excesso**, aí você periga de estar comprometendo a disciplina, você **precisa de um certo controle** [...] não deixar as **coisas abertas** para os alunos. (L28)

Encontro 2, p.10.

Para P4, podemos observar que não existe uma preocupação em utilizar frases como “ Δx vira dx ” para “facilitar” ou “tornar mais fácil” a compreensão por parte dos alunos; entretanto alerta que é necessário ter um certo controle com a informalidade em excesso, não deixando as coisas em aberto. A informalidade refere-se exatamente a discursos não pautados no rigor da matemática.

As idéias intuitivas apresentadas pelo professor P3 a seus alunos são aceitas com facilidade pelos mesmos, como podemos perceber em sua fala: “esse **conceito intuitivo** acredito que no primeiro momento, nenhum aluno chegou a questionar [...] talvez também porque eu não desse abertura para isso, mas a parte **intuitiva** eu acredito que eles ficaram com o pé no chão” (E7, p.16, L37). A metáfora “pé no chão” implica que houve um acordo entre professor e alunos, os quais aceitaram a sua argumentação, ou seja, intuitivamente os alunos aceitam e aprendem o conteúdo. Como nenhum aluno questionou podemos, também, interpretar que os alunos não entenderam, porém calaram-se por falta de abertura de P3.

Introduzimos então a metáfora “pé nas nuvens” com vistas a uma visão antagônica, ou seja, quando o professor inicia a utilização da linguagem matemática, do rigor Weierstrassiano, os alunos ficam com os pés nas nuvens, têm dificuldades para compreender o assunto, ficam literalmente nas nuvens.

A seqüência de aula - intuição primeiro e rigor depois - também é registrada na fala do professor P2: “vamos ter uma idéia **intuitiva** usando os recursos, depois eu vou formalizar isso aí direitinho” (E9, p.30, L22). Os recursos a que se refere P2 consistem na utilização do computador com os programas *Winplot* e *Flash* utilizados nas tarefas 2 e 3 dessa tese. O termo “direitinho” reforça que o que se faz antes da formalização pode não ser tão “direitinho”

assim, ou seja, a intuição pode trazer algo que não é direito, que é errado ou que tem falhas.

Na fala de P1: “[...] que o *winplot* faz, então, de uma parte **intuitiva** para a formalização, acho que não teria um **salto tão grande**” (E9, p.31, L37), percebemos uma preocupação com a mediação que pode ser feita pelo professor, nesse caso usando a tecnologia entre a parte intuitiva e a formalização. Essa discussão ganha espaço no décimo sétimo encontro.

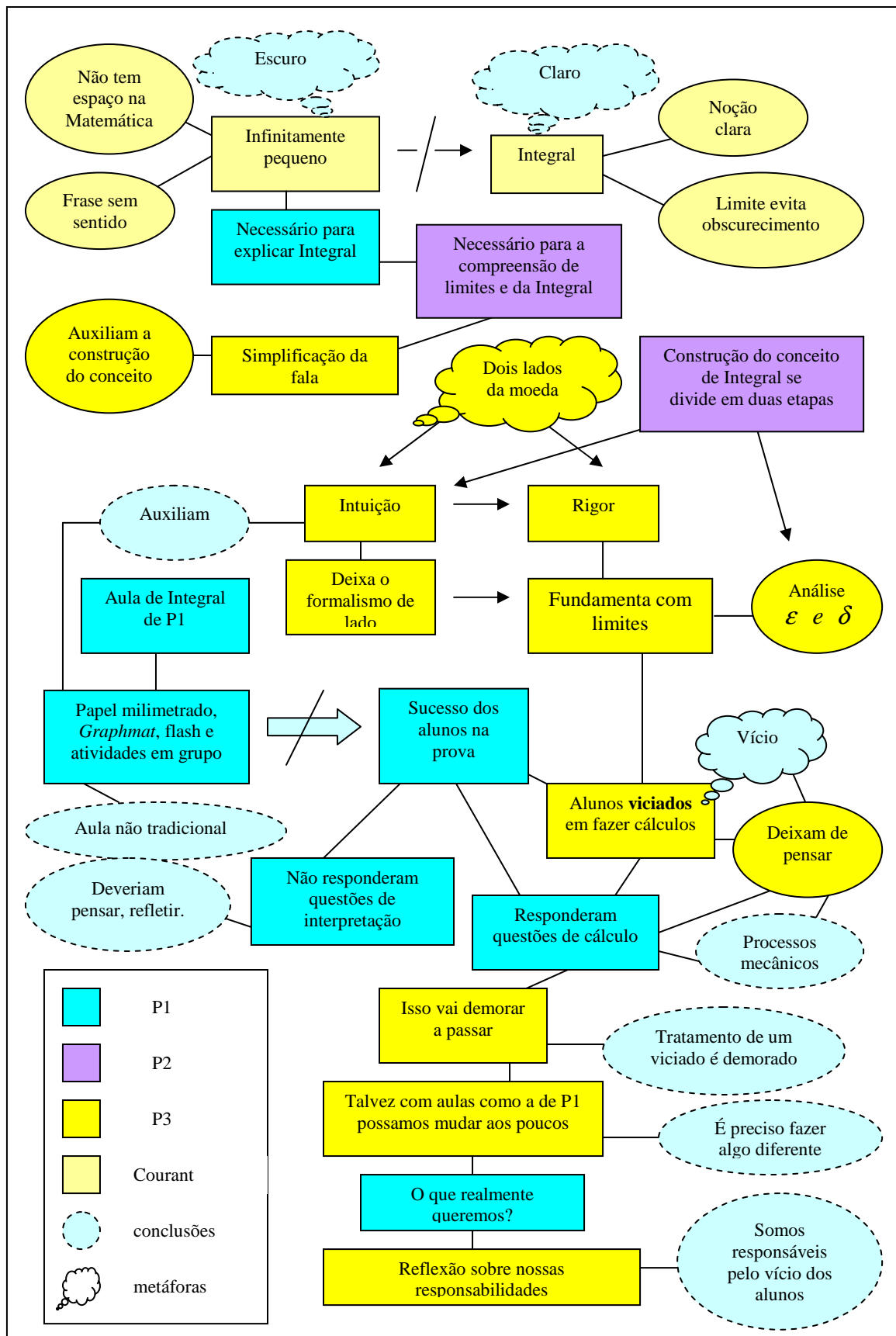
Esse encontro realizou-se pelo MSN com a participação dos professores P1, P2 e P3. A discussão iniciou-se com a reflexão sobre o seguinte trecho extraído do livro “O que é Matemática?”:

O símbolo de somatório era usualmente escrito S na época de Leibniz, e o símbolo é meramente um S estilizado. Embora o simbologismo de Leibniz seja muito sugestivo em relação à maneira pela qual a integral é obtida como o limite de uma soma finita, deve-se ser cauteloso para não atribuir excessiva importância ao que é, afinal de contas, uma pura convenção de como o limite deve ser representado. Nos primeiros tempos do cálculo, quando o conceito de limite não era claramente compreendido e certamente nem sempre lembrado, explicava-se o significado da integral afirmando que “a diferença finita é substituída pela quantidade infinitamente pequena dx , e a própria integral é a soma de infinitas quantidades infinitamente pequenas $f(x)dx$ ”. Embora o **infinitamente pequeno** exerça uma certa atração para mentes especulativas, **não encontra espaço na matemática**. Não serve a qualquer finalidade útil envolver a **noção clara da integral** com **frases sem sentido**. (COURANT, 2000, p. 488, grifo nosso).

As metáforas “claro” e “escuro” introduzidas, no esquema 5 da página seguinte, se aplicam esse texto. A Integral é uma noção clara, cujo obscurecimento é evitado pelo conceito de limite. Frases sem sentido, como infinitamente pequeno só faz obscurecer o conceito de integral e não tem lugar na Matemática. Esta visão parece ser contraditória à dos professores que argumentam ser necessário esse tipo de frase não somente para compreensão do conceito de Integral como também do próprio conceito de limite.

A dicotomia entre intuição e rigor explicitadas nas falas dos professores P2 e P3 pode ser sintetizada pela metáfora “dois lados da moeda” encontrada na fala do professor P3 “[...] mas é claro, devemos mostrar os dois lados da moeda”. De um lado da moeda, digamos, na cara, teríamos a intuição (onde o formalismo é

deixado de lado) e na outra – a coroa – teríamos o rigor (fundamentação com limites, com os ϵ e δ). Nas Considerações Finais analisaremos essa separação com as lentes do referencial teórico adotado.



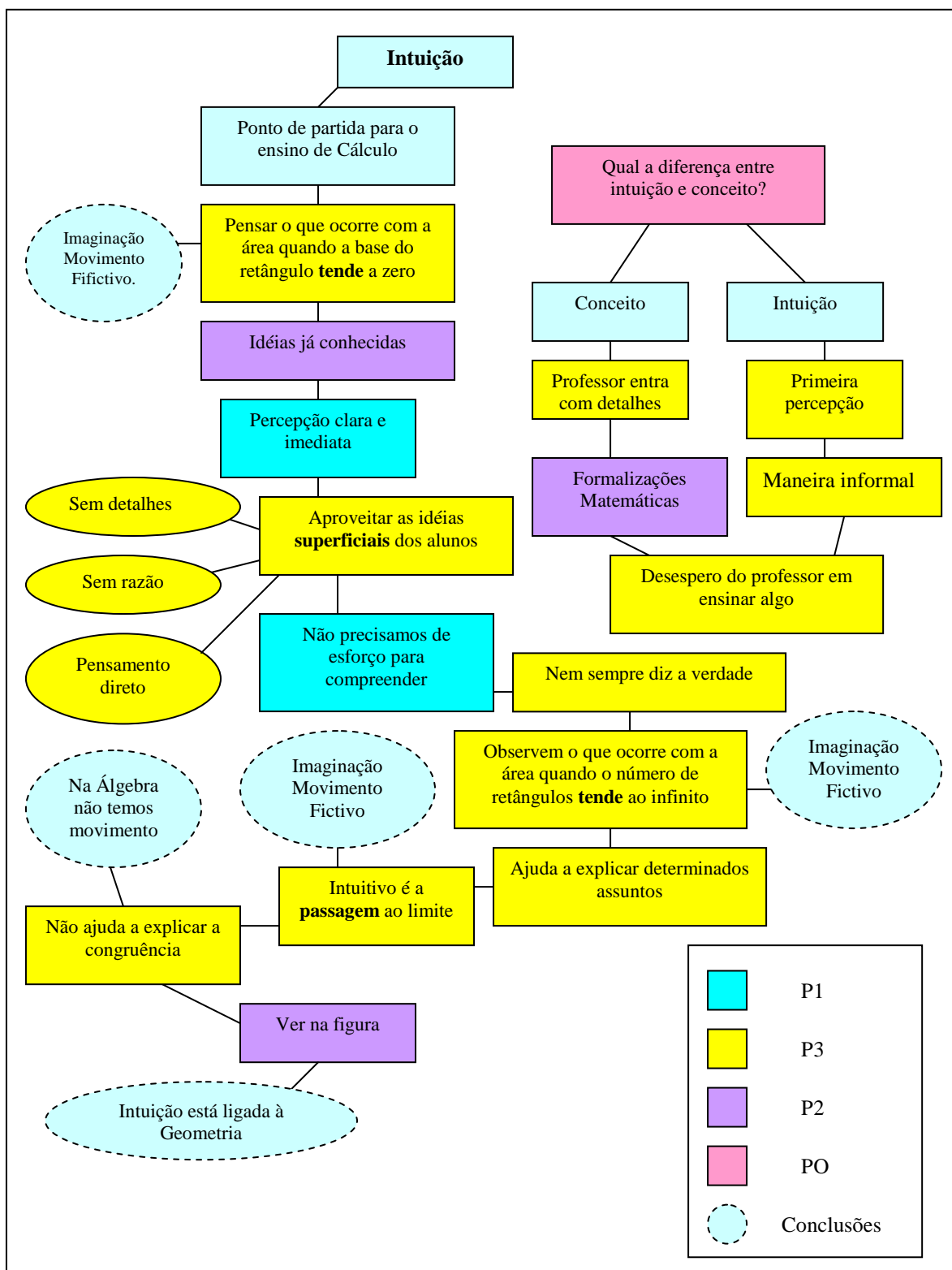
Esquema 5: Falando sobre Conceitos e Intuição

O professor P1 comenta que na sua aula sobre Integral, mesmo usando vários recursos como papel milimetrado, atividades com o *graphmat* e atividades em grupo, os alunos não foram bem na prova, principalmente nas questões referentes às atividades, e nas questões dissertativas “eles responderam as questões de calcule determine, e não essas” (E17, p.74, L50).

A metáfora “vício” pode ser observada por meio da seguinte fala do professor P3 “boa parte dos alunos estão **viciados** em ‘fazer’ cálculos e deixam de pensar” (E17, p. 74, L44). Vício significa costume prejudicial, prática irresistível de mau hábito; assim os alunos têm a prática quase que irresistível de fazer cálculos sem raciocinar, sem pensar sobre o que estão fazendo, o que pode ser prejudicial à sua aprendizagem.

A recuperação de um “viciado” ocorre num longo período e isso pode ser observado pela fala de P3: “acredito que isso vai demorar a passar. Talvez com aulas como a sua, aos poucos, podemos mudar isso [...]” (E17,p.74,L58). O “tratamento” é apontado como sendo um ensino diferenciado como ocorreu na aula de P1. No final P1 e P3 refletem sobre quais as suas responsabilidades de fato: quem será que deflagra esse “vício” nos alunos?

Assim como o tratamento de “viciados” exige um empenho grande das pessoas envolvidas como a família, o próprio “viciado”, os médicos, os psicólogos etc., acreditamos que o empenho de grupos de discussão como esse, formado para a discussão do ensino de Cálculo, possa contribuir no desenvolvimento profissional dos professores e, conseqüentemente, na qualidade de suas aulas. Diante de todas essas constatações, resolvemos aprofundar a investigação e marcamos o décimo oitavo encontro para discutirmos sobre intuição.



Esquema 6: Falando sobre Conceitos e Intuição

Esse encontro também foi realizado pelo MSN e participaram do encontro: a orientadora dessa pesquisa, que será identificada com a sigla PO – professora orientadora –, os professores P1, P2 e P3.

Iniciamos a discussão com a seguinte enunciação de P3 no primeiro encontro de professores: “[...] isso é o que sustenta realmente as definições do Cálculo e isso a gente não pode passar no começo, [...] acho que no cálculo a idéia é começar pela **intuição**”. Houve uma convergência das opiniões dos professores de que a intuição deve ser de fato o **ponto de partida para o Ensino de Cálculo**.

O professor P3 diz que recorre à intuição dos alunos quando pede para que “pensem no que ocorre com a área quando a base do retângulo tende a zero” (E18,p.76,L23). Nessa fala observamos que intuir estaria muito próximo de imaginar, ou seja, teríamos que imaginar, pensar no que ocorre quando a base do retângulo tende a zero, isto é, na “passagem ao limite” que é abstrato e facilmente induzido por uma linguagem dinâmica do tipo “tende a zero” ou com gestos dos dedos das mãos representando a “diminuição” do tamanho da base dos retângulos. Essa linguagem dinâmica utilizada pelo professor pode trazer uma falsa impressão de movimento a um conjunto de pontos de um intervalo que são estáticos – o que é chamado de movimento fictivo por Talmy (2000).

A metáfora conceitual de Movimento Fictivo é um mecanismo cognitivo que utilizamos diariamente em sentenças como “A linha vermelha do metrô vai do Jabaquara à Barra Funda”, que descrevem movimento sem nenhuma ocorrência física, ou seja, a linha do metro, que é estática, é conceituada em termos de um viajante num trem em movimento pela linha. O termo fictivo foi adotado, segundo Talmy (id), por sua referência à capacidade imaginável da cognição e não por sugerir uma representação não real – ficção.

Para P2 “na intuição contamos com as idéias já conhecidas pelos alunos (ou instinto de cada um)” (E18,p.76,L26). Aqui temos uma visão diferenciada: primeiro por considerar a individualidade, isto é, a intuição é intrínseca a cada sujeito; segundo, por levar em consideração as idéias já conhecidas, o que numa perspectiva da Teoria da Cognição Corporificada estaria muito próximo das metáforas básicas, quando recorremos às nossas experiências prévias ligadas ao nosso sistema sensorio-motor, para que possamos compreender ou criar o novo. Para nós a relação fica ainda mais forte ao falarmos em conhecimento sem esforço, quando não precisamos nos esforçar para agirmos ou pensarmos, fazemos automaticamente ou inconscientemente, sem uma introspecção direta.

A argumentação do professor P3 começa a mudar, falando em “aproveitar as idéias superficiais dos alunos”, no sentido de não entrar com “detalhes” (E18, p.76, L45), sem o uso da razão. Porém, quando perguntado novamente sobre a intuição, P3 retoma a idéia inicial.

PO: P3 quando você pede ao aluno para pensar em dx tendendo a zero, de fato você pede uma ação do seu aluno, mas seria intuição?
P3: Creio que sim. *Encontro 18, p.76.*

Desta forma, a ação que ele pede aos seus alunos, estaria mais próxima da imaginação, de um pensamento que exige, sim, o uso da razão, do que da intuição.

O professor P3 não recorreria à intuição para explicar congruência – de fato, na Álgebra, parece que não temos implícita a noção de movimento, como no Cálculo, que é considerado a Matemática do movimento. Enfim, assim como conceito, parece ser difícil de verbalizar o que é intuição, mas a intuição é hierarquicamente inferior ao conceito, mais superficial. Novamente a metáfora da caixa para conhecimento que aloca definições mais “finas” como profundas e intuições como superficiais.

Quando os professores são perguntados da diferença entre conceito e intuição, P3 e P2 estabelecem uma clara separação entre rigor e intuição, que pode ser ilustrada pela metáfora “os dois lados da moeda” vista no esquema 5, A intuição seria uma primeira percepção, de maneira superficial, informal, sem detalhes e sem razão, enquanto que o conceito corresponderia aos “detalhes”, às formalizações matemáticas.

Nas Considerações Finais retomaremos essa análise e passaremos agora ao episódio II que trata da questão do infinito no ensino de Cálculo Integral.

3.2 Episódio II – Falando Sobre o Infinito e a Integral

Apresentamos, nesse episódio, uma análise do discurso dos professores sobre o ensino dos processos infinitos subjacentes ao conceito de Integral. As Tarefas 1 e 2 (Anexo I) constituíram o ponto de partida para as discussões.

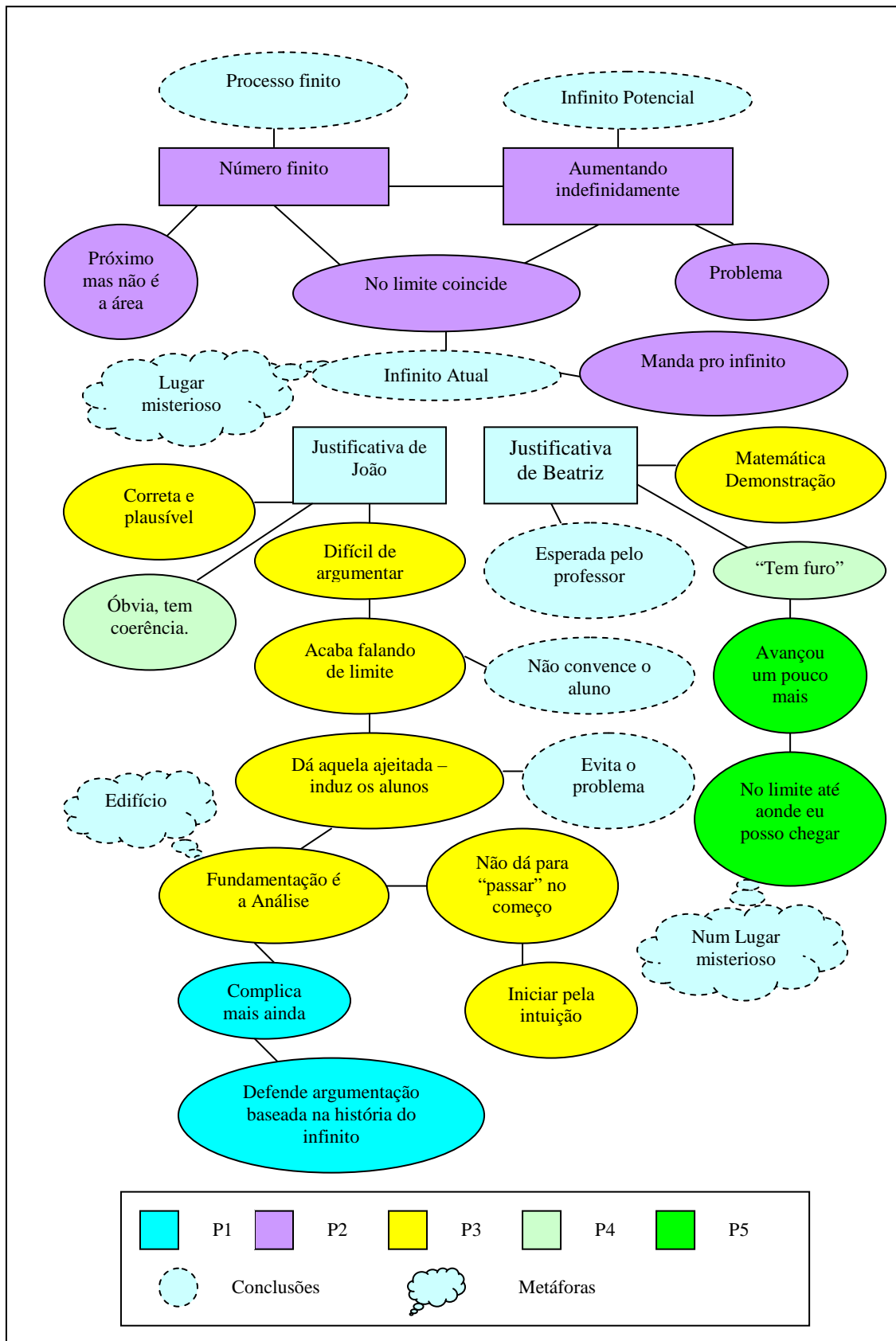
A partir da análise preliminar das transcrições dos encontros, observamos uma relevante dificuldade dos professores, incluindo a minha, em argumentar com alunos que têm dificuldades para compreender e aceitar as técnicas do Cálculo que envolvem o conceito de infinito como é o caso da Integral. Buscamos, então, aprofundar essa investigação e levantar elementos para responder à questão da pesquisa:

“Quais os argumentos e as metáforas utilizadas pelos professores na reflexão sobre o ensino e a aprendizagem dos processos infinitos subjacentes ao conceito de Integral?”.

Para isso procuramos em cada encontro os diálogos relacionados ao tema e estruturamos essa apresentação em três partes: a primeira intitulada “No limite coincide”; a segunda: “ $\int f(x)dx = F(x) \times x$ ” e a terceira: “O infinito é induzido pela tecnologia”.

3.2.1 Parte I: No limite coincide.

Esta parte traz as discussões e os argumentos dos professores sobre o ensino do conceito de infinito. Escolhemos o argumento “no limite coincide” como título dessa parte, pois ele sintetiza, de certa forma, a fala utilizada pelos professores em suas aulas quando falam do infinito atual, como veremos a seguir.



Esquema 7 : No limite coincide

No primeiro encontro os professores P2 e P3 teceram seus comentários sobre as justificativas dadas pelos alunos hipotéticos João e Beatriz na Tarefa 1 (Anexo 1). A justificativa de João está ancorada na concepção de infinito potencial, pois João acredita que, mesmo aumentando indefinidamente o número de lados de um polígono regular inscrito num círculo, essa técnica jamais chegaria a exaurir a área do círculo. Beatriz, usando fórmulas e operações com limites, determina a área do círculo e diz que é possível preencher a área procurada, ou seja, a idéia subjacente é a de infinito atual. Essas duas situações foram apresentadas na Tarefa 1 com o objetivo de incitar uma discussão entre os professores sobre as concepções de infinito potencial e atual.

P2 - O problema está nesse **aumentando indefinidamente**, se fosse um **número finito**, pode ser um número **muito próximo**, mas não é a área, agora quando **você manda para o infinito** o número de lados do polígono, ai **no limite coincide**. (p.3, L44).

P3 - A justificativa de Beatriz é matemática, são as regras de limite e acaba sendo a demonstração de que de fato alcança a área do círculo; agora a justificativa de João é plausível, **é difícil de você argumentar** com ele, você **acaba falando de limite** que vai tender ao infinito, mas não é isso que ele está argumentando, ele tá argumentando que entre um e outro sempre existe um, de fato também ocorre. (p.3, L49).

P2 - Eu ia tentar **convencer**. (p.4, L7).

P3 - Você ia tentar **enganar** não é [risos dos três] (p.4, L8).

P2 - O problema é como dizer pra ele que não, que **no infinito vai coincidir sim**, essa é a coisa mais complicada, conseguir convencer o aluno. (p.4, L9).

P3 - O **problema todo** é como sempre **o infinito**. (p.3, L12).

Encontro 1

Observamos que para P2 o problema reside no “aumentando indefinidamente”. De fato, se nos pautarmos pela noção de processo iterativo sem fim que pode ser mapeado por frases que utilizamos no cotidiano como “o pássaro voou e voou e voou”, ou pela idéia de acrescentar mais um, mais um e assim por diante, ambos processos sem fim, não podemos ter um estado final, um fim para esses processos e isso pode gerar conflitos cognitivos na aceitação do infinito atual, ou seja, da famosa frase “no limite coincide.”

Assim, o professor P2 tem dificuldade em argumentar com o aluno; é como se o professor tivesse que argumentar contra um pensamento que é de certa forma o mais sedimentado e incorporado por nós desde criança, que é o do infinito como algo que não tem fim.

Com a fala “manda pro infinito” de P2, que é acompanhada de gestos com a mão como se, de fato, algo fosse arremessado para longe, temos implícita a idéia de movimento fictivo – o número de lados que é estático ganha atributos de

um objeto com possibilidade de locomover-se e ser enviado ou mandado para um lugar muito longe – o infinito – que seria o lugar de destino e aí “no limite coincide”, ou seja, o infinito em ato ou atual.

Analisando o argumento utilizado por P2, verificamos que se trata, de acordo com Núñez (2005), de uma Montagem Conceitual do Infinito, na qual temos os três espaços da montagem:

1. “o problema está nesse aumentando indefinidamente” – espaço dos processos iterativos sem fim ou o infinito potencial;
2. “se fosse um número finito, pode ser um número muito próximo, mas não é a área” – espaço dos processos iterativos completos ou processo finito.
3. “quando você manda para o infinito o número de lados do polígono, aí no limite coincide” – espaço montagem – infinito atual.

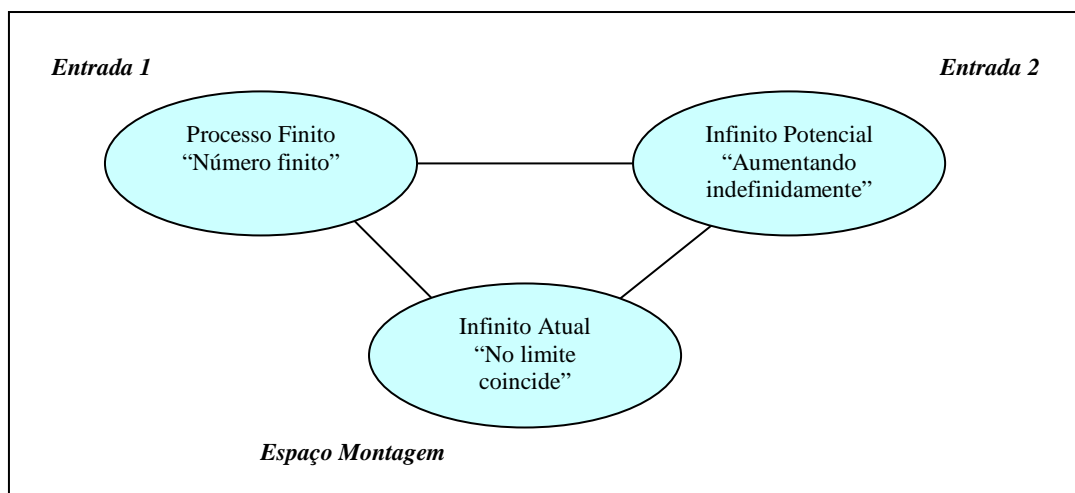


Figura 17: A Montagem do Infinito Atual com os argumentos do professor

O infinito é um “lugar misterioso” onde a coincidência ocorre, contudo não conseguimos enxergá-lo, pois é uma construção puramente lingüística. Não temos como chegar a esse lugar misterioso, não temos como “ver” o que ocorre lá e muito menos nos apoiar em situações reais que nos permitam fazer inferências diretas por mapeamentos primários como as metáforas básicas. É simplesmente um lugar novo e diferente, onde só o pensamento em processos finitos não dão conta e nem só os pensamentos em processos iterativos sem fim. Acreditamos que somente quando o sujeito realizar uma montagem conceitual a partir de inferências desses dois tipos de pensamentos e conseguir operar nesse lugar misterioso, sem ficar preso a nenhum deles, ou seja, operar com uma construção

mental nova, ou num *Espaço Mental* novo, sobre o infinito, é que ele aceitará sem maiores dificuldades o infinito atual ou o infinito em ato.

Para P3, a justificativa de Beatriz é clara e rapidamente aceita; não houve, até então, nenhum questionamento sobre os significados produzidos por ela durante a resolução, pois existe um acordo entre a justificativa apresentada por Beatriz e o resultado esperado pelo professor. Por outro lado, a justificativa de João, apesar de ser aceita pelo professor como correta, gera dificuldades em relação à argumentação que deve fornecer ao aluno.

A única saída para o professor parece ser mesmo a linguagem de limites “você acaba falando de limite que vai tender ao infinito”. Entretanto esse linguajar sobre limites mesmo que informal, é percebido pelo professor como sendo insuficiente para derrubar a argumentação do João e não existe, nesse caso, um acordo.

A dificuldade reside em fazer com que os alunos aceitem o infinito atual. P2 diz: “Eu ia tentar convencer” e P3 completa: “Você ia tentar enganar, não é?”. O professor tem, então, a autoridade e o poder para convencer ou, se não conseguir, enganar o aluno, ou seja, fugir do assunto assim que achar necessário.

P3 - Na verdade, na aula, você já prevendo o problema que vai acontecer, algumas vezes você mesmo dá **aquela ajeitada**, você em algumas situações, você faz com que os **alunos induzam** o resultado, não é, na sua exposição de aula. (L15)

P2 - Você já faz direto isso aqui e **não dá nem tempo pro aluno pensar** nisso; o ótimo é passar por aqui, mesmo que você não consiga responder pro aluno. (L20)

P3 - É uma questão delicada, principalmente a parte que dá a **fundamentação** para **isso é Análise**; a parte de demonstração isto a gente não tem condição de transmitir, o cálculo foi o problema de séculos, ninguém aceitava essa história de tender a zero, dar um acréscimo, fazer tender a zero, e chega na derivada. **A fundamentação disso veio com a Análise**, isso é o que **sustenta** realmente **as definições** do cálculo e isso a gente não pode passar no começo, [...] acho que no cálculo **a idéia é começar pela intuição**. (L23)

Encontro 1, p.4.

Na frase “você faz com que os alunos induzam o resultado”, vemos que o professor P3 usa a sua autoridade e quando percebe que os alunos não entenderão algo, acerta e ajeita o seu discurso de forma a induzir o aluno, sem que ele tenha espaço para questionamentos. O professor P2 também diz que foge do assunto: “Você já faz direto isso aqui e não dá nem tempo pro aluno pensar nisso”, contudo já afirma que o bom é passar por essas discussões.

A justificativa dada por P3 para a fuga de se falar mais, ou de se abrir um espaço maior para a discussão em aula sobre assuntos como esse envolvendo o infinito é relegada, então, à Análise: “a parte que dá a **fundamentação** para isso é análise”. Emerge dessa fala a metáfora do edifício: na base do edifício temos a análise, o rigor da Matemática, e nos andares superiores temos os conceitos (definições) do Cálculo. Para o prédio, a única maneira dos andares superiores não desmoronarem é se eles tiverem uma base bem construída e, analogamente, a única forma de se aprender os conceitos (definições) do Cálculo seria pela aprendizagem da Análise.

Historicamente tivemos matemáticos brilhantes como Euler, Newton e Leibniz que não tinham os resultados da Análise e nem por isso deixaram de operar e aplicar as noções do Cálculo em seus notáveis estudos. A intuição é apontada, então, como um paliativo para a construção do edifício.

O problema observado é que a intuição ou essa construção das definições sem o rigor aceito pela e na comunidade Matemática pode provocar o desabamento do prédio, ou na fala de P3: “enforca a Matemática”. Os professores P2 e P3 tornam a discutir as justificativas dadas por João e Beatriz.

P3 - A de baixo é a **demonstração**, a de cima é uma construção geométrica, o argumento dele está correto. (L10).

P2 - Aqui [João] eu iria dizer ao aluno que preenche sim [risos], no infinito preenche, apesar de eu não conseguir **derrubar** seu argumento, **vou pensar melhor**, vou levar pra casa. (L13)

P3 - É uma tarefa que gera discussão, leva as pessoas a pensar, mesmo para quem tem **o conceito formado**. (L17)

P2 - Achei muito bom [...] e o fato de aparecer essa discussão é muito bom, é bom que gere discussão, a **gente não deve fugir disso**, eu não fujo dessas coisas quando acontecem outras coisas como essa, tem vezes que o aluno traz a solução. (L20)

Encontro 1, p.10.

O professor P2 continuaria afirmando para o aluno que no infinito se preenche a área do círculo, ou seja, como já dissemos anteriormente, nesse “lugar misterioso” a área é determinada. Entretanto o professor P2 se vê derrotado por não conseguir derrubar o argumento do aluno, é como se o professor tivesse perdido a guerra, ou seja, a discussão, conforme já vimos que discussão pode ser conceitualizada por termos bélicos. Temos, também, uma mudança no discurso de P2, se antes era melhor fugir da discussão (L20 - p4), agora, é melhor enfrentá-la (L20 – p10).

Quando P3 diz que essa atividade leva as pessoas a pensar, mesmo para quem tem o “conceito formado”, observamos que o próprio professor começa a refletir e a questionar algo que para ele já estava consolidado e formado, isto é, algo novo é incorporado ao conceito que o professor já tinha sobre o infinito.

No décimo primeiro encontro os professores P1, P3 e P5 também discutem as questões colocadas na Tarefa 1.

P1 – Explica a tarefa 1 (Aproximação da área do círculo pelas áreas dos polígonos regulares inscritos), pergunta para os demais professores o que eles responderiam se tivessem um aluno como o João e outro como a Beatriz. (L9)

P5 – No fundo você está fazendo um exercício de limites aqui, não é? A seqüência $\frac{1}{n}$ se aproxima de zero, mas **nunca é zero** [gesto com as mãos: uma mão se aproxima da outra até a **colisão** dando a idéia de que a seqüência está chegando ao seu limite]; essa é a coisa, não é, esse é um ponto, **o aluno que entende isso** cara! (L13)

P3 O problema é, **é uma coisa confusa para gente explicar** também não é, **P5**, porque de fato a argumentação desses dois alunos, eles estão discutindo, **como é que a gente colocaria melhor esse está certo, esse não está**, é uma **coisa confusa** que acaba **atrapalhando**. **Dependendo**, aqui fala não é [lê o texto], posso continuar aumentando o número de lados que o processo jamais esgotaria a área do círculo, como é que eu vou convencer o aluno que geometricamente vai acontecer não vai [risos] (L19)

P3 Ele [João da tarefa 1] ta concordando não é, ele ta concordando que independentemente do número de lados sempre haverá espaços [...] para ele não vai exaurir. (L29)

P5 Quer dizer, dado um polígono você consegue um outro com área um pouco maior. (L32)

P3 Já a menina fez o cálculo. (L34)

P3 Essa é matemática [risos] (L35)

P5 Um é **geômetra** e o outro é **analista**. (L36)

Encontro 11, p42.

O professor P5 relaciona a técnica utilizada por Beatriz aos exercícios de limites e afirma que seria muito bom se os alunos entendessem que, por exemplo, a seqüência $\frac{1}{n}$ se aproxima de zero, mas nunca é zero. Essa fala é comum quando ensinamos limites de seqüências ou de funções; então o aluno é submetido a uma enunciação que reforça que a seqüência nunca é zero, contudo no limite é zero, ou seja, a própria fala do professor parece dificultar ainda mais a compreensão do infinito atual, em ato.

Para P3 é “uma coisa confusa” que dependendo pode até atrapalhar, as falas apontam que tais discussões deveriam ser deixadas de lado, pois acabam atrapalhando o caminho que o professor projeta para que seus alunos aceitem

sem maiores conturbações as técnicas de limites e de outros conceitos do Cálculo.

P1 [Pergunta para **P5**] O que você diria pro João e o que você diria para a Beatriz? (p.42, L40)

P3 Pro João, da maneira com que ele raciocinou, acho que ele está certo, você **pega um polígono**, depois você **dá um passo a mais e pega um polígono** um pouquinho maior e se você continuar assim você vai passar uma eternidade e **nunca de fato vai chegar**, ele tá certo, não é? (p.42, L42)

P1 Ele está certo e ela está certa? [pergunta para **P5**] (p.42, L48)

P5 Pois é ela também tá certa, não é? Só que **ela avançou um pouquinho** a mais porque no fundo ela também pensou isso, não é? (p.43, L1).

P1 Mas então será que ela entendeu? (p.43, L4)

P5 Essa é uma pergunta que né? (p.43, L4)

P5 Bom, no fundo ela pensou isso também, eu vou colocando polígonos, eu nunca vou chegar na área do círculo, **mas no limite**, até onde eu posso chegar, né? No máximo até a área do círculo; bom, eu não sei se foi isso que ela pensou né, essa é a resposta, ele fez a conta né, **ela passa o limite**. (p.43, L6)

P3 Mas talvez seja pela própria interpretação do limite né, quando você diz o limite é isso, ou então, ele pode entender quando ele diz que o limite é isso. Significa que o $x > \text{se aproxima}$ de zero, o resultado desse cálculo $> \text{fica próximo}$ desse cálculo, **essa igualdade aqui é uma coisa**. (p.43, L12)

P1 É complicado em minha opinião, esse é um problema pro cálculo, pra análise, porque uma boa parte dos problemas gira em torno disso, o aluno aceitar isso. É **uma aceitação** ou ele aceita ou então ele terá problemas. (p.43, L18)

Encontro 11

Quando P3 comenta a justificativa dada por João, ele usa termos como “pega um polígono” e “dá um passo a mais e pega um polígono um pouquinho maior” que traz, além da idéia de ação iterada, a idéia de movimento do corpo, como se fosse possível realmente pegar um polígono e para “pegar” outro um pouco maior você dá um passo. É como se estivesse realmente numa caminhada na qual você vai passar uma eternidade e nunca vai de fato chegar.

Essa linguagem, apoiada nas nossas experiências sensorio-motoras, ajuda na compreensão do infinito potencial, contudo é restrita a essa maneira de pensar e não dá suporte para a compreensão do infinito atual.

O professor P5, refletindo sobre a justificativa de Beatriz, diz que ela também poderia ter pensado como o João, só que ela avançou um pouco mais, pois teria pensado em pegar mais um e mais um polígono e percebido no limite que só era possível chegar até a área do círculo. A fala no limite é utilizada também por P5 “no limite até onde eu posso chegar”; a palavra onde é um advérbio de lugar que nos leva novamente à metáfora do “lugar misterioso”.

P3 Mas eu acho que a única fundamentação daí depois que vai ser dada é com epsilons e deltas. A gente pode tentar fazer uma aproximação, mas eu acho que **a formalidade é a única prova**; dizer que esse limite é igual a isso, significa que o resultado desse cálculo se aproxima desse, quando x se aproxima de zero, não posso interpretar assim? Será que essa aluna, do jeito que ela dá a resposta, acho que pra ela o limite é exatamente a área do círculo que depois com as noções de epsilon e delta a gente vê que ela tá correta, mas num primeiro momento se ela não teve essa noção de epsilon e delta, não sei se ela teve. (E11, p.43, L22)

P1 Eu acho que mesmo com a noção de epsilon e delta, eu acho que epsilon e delta complica mais ainda, em relação a entender o significado. (E11, p.43, L34)

P1 [Pergunto para **P5**] Você já ouviu falar em **infinito atual** e em **infinito potencial**? (E11, p.43, L37)

P5 Infinito atual? (E11, p.43, L39)

P5 Não. (E11, p.43, L40)

P1 Vou continuar a minha pesquisa, isso é uma situação da história, são termos da história que apareceram e eu tô batendo nessa tecla. Eu acho que se **a gente estudar** um pouco sobre isso ou tiver alguma leitura sobre esses assuntos vai ajudar a entender essa história do atinge ou não atinge [o limite da seqüência]. Quando você fala que atinge é o infinito atual, é como se você tivesse trabalhando com o infinito como se ele fosse uma “coisa”, algo que pudesse ser atingido; isso graças a Cantor que conseguiu formalizar tudo sobre o infinito, a cardinalidade dos conjuntos infinitos tal. Agora o infinito potencial é um termo que surgiu antes, que é exatamente esse pensamento do aluno aqui ó [o João], você vai colocar mais um, mais um e nunca atinge, é o $n+1$. Então eu trouxe esse artigo para vocês, é muito interessante esse artigo, por exemplo, o Gauss não acreditava no infinito atual, para ele era uma coisa absurda. (E11, p.43, L41)

P3 Eu acho que esse problema já **começa no Ensino Médio**, quando você vai explicar, por exemplo, dízima [...] você começa lá com 0,999... é igual a 1. (E11, p.44, L8)

Encontro 11

Segundo o professor P3, a única prova para a justificativa dada pela aluna Beatriz é o formalismo, com os epsilons e deltas. Contudo P1 acredita que com os epsilons e deltas a compreensão por parte do aluno se torna mais difícil ainda e aponta para a história do conceito de infinito – o infinito potencial e atual – como sendo possíveis aliados na construção e compreensão do conceito de infinito, principalmente na aceitação por parte do aluno do infinito atual. Observamos que o professor P5 também nunca havia ouvido falar nesses termos. Essa questão já poderia ser abordada desde o Ensino Básico que antecede o Ensino Superior em situações-problema que levem os alunos a questionar problemas como o das decimais infinitas como 0,999...., conforme lembra P3.

Resumindo essa primeira parte, podemos dizer que os professores realmente teriam dificuldades em argumentar com alunos que tivessem o mesmo raciocínio do João. A argumentação utilizada pelos professores estaria, num primeiro momento, muito ligada à frase “no limite coincide”, a qual parece ser contra-intuitiva, uma vez que ela vem precedida de “manda para o infinito” e o significado de “limite”, na linguagem corrente, é de fronteira, de fim. Teríamos

então um fim para o infinito e isso contrariaria o nosso pensamento intuitivo sobre o infinito de algo ilimitado, que não tem fim.

Num segundo momento, a justificativa dada pelos professores viria com o formalismo das definições de limites com epsilons e deltas, sendo apontada como a única forma de provar e argumentar com os alunos sobre o assunto.

Já a resposta dada por Beatriz é praticamente a resposta esperada pelos professores, a qual praticamente não suscita pela discussão dos significados produzidos pela aluna.

Nós propomos aqui que a história e a epistemologia do conceito de infinito – retomando as concepções de infinito potencial e infinito atual – podem ajudar os professores de Cálculo não só a ter subsídios para argumentar com seus alunos, como também entender melhor como se constituiu esse conceito tão complexo e importante da Matemática – o conceito de infinito.

Além da história, acreditamos, também, que os resultados da lingüística cognitiva sobre como pensamos cotidianamente o infinito e sobre os mapeamentos conceituais que empregamos, na maioria das vezes inconscientemente, para entender o infinito atual, ajudam os professores na compreensão das justificativas apresentadas pelos alunos que podem ter sido formuladas, a partir de inferências em domínios fora da Matemática.

3.2.2 Parte II: Enforcando a Matemática

Uma dificuldade em relação ao ensino da Matemática no terceiro grau passa pela questão de que Matemática deve ser ensinada, apesar de o currículo de Cálculo ser o mesmo para os cursos de Engenharia e de Matemática, o professor é quem decide como tratará esse currículo. E como vimos o professor sente a necessidade de discutir mais com outros colegas sobre como fazer na sala de aula.

Até aqui tratamos das reflexões sobre conceito e intuição. Conectando à intuição, vimos que em nosso grupo há uma preocupação pelos professores de usar uma linguagem mais intuitiva ou mais familiar, para ajudar os alunos a compreenderem a Integral de Riemann.

O professor P3, no primeiro encontro, colocou sua inquietação quanto a usar uma abordagem intuitiva. Segundo ele, é preciso “trazer o aluno para que ele tenha esse **conceito intuitivo**, mas ao mesmo passo, tomar o cuidado para ele não **enforçar a Matemática**, senão ele sai por aí **fazendo besteira**.” (E1, p4, L47). Vemos que a didática por ele utilizada o preocupa, a metáfora “Enforçar a Matemática” enfatiza tal receio.

Como já foi dito na fundamentação teórica, nem tudo relativo ao enforçamento é mapeado no domínio matemático, mas da idéia da morte podemos inferenciar que enforçar a Matemática seria matá-la, acabar com ela. Daí a angústia expressa por P3, pois se de um lado ele usa “artifícios” para ajudar os alunos a compreenderem a noção de Integral, por outro lado ele não quer que seus alunos aprendam algo que está morto, enforcado.

No sétimo encontro, entretanto, P3 retoma essa questão quando P1 questiona se seus alunos teriam dificuldades em entender o que é dx e ele diz que não, pois ele utiliza a idéia geométrica, sendo dx a base e $f(x)$ a altura do retângulo.

P3 - Às vezes tenta **deixar a coisa tão simples** que a gente acaba **enforçando a matemática**. (L33)

P3 - Eu fui comentar com a turma essa história do limite do delta x tendendo a zero, aí você escreve lá o $f(x)dx$ aquilo é a **base do retângulo** e o $f(x)$ **é a altura** ok, **mas não vai sair por aí dizendo que na integral é o $f(x)$ vezes o dx** , aquilo lá é uma notação, também, não é? **Isto me preocupa**, eu falo isso porque eu sei que eles **vão entender melhor pelo menos o conceito**, eu sei que eles vão entender aquele símbolo da integral, pra eles vai **ter uma visão melhor** o S. Eu tô somando áreas dos retângulos, o que me dá a base dos retângulos é o dx e o que me dá a altura do retângulo é o $f(x)$, mas espera aí, isso é uma notação, isso não é o $f(x)$ vezes o dx . (L35)

P3 - É complicado, você tem que pensar num jeito de trazer o aluno para que ele tenha esse **conceito intuitivo**, mas ao mesmo passo, tomar cuidado para ele não **enforçar a Matemática**, se não **ele sai por aí fazendo besteira**. (L47) *Encontro 1, p. 4.*

P1 Perguntaram para você o que é o dx ? (L22)

P3 Não perguntaram porque quando eu comecei com a idéia de área, eu apresentei aquele dx como a base de um retângulo; o delta x está aqui [**gesto com os dedos** polegar e indicador para representar o intervalo de tamanho delta x]. Fazendo isso tender a zero eu vou pegar um retângulo de base tão pequena quanto você possa imaginar e aí, eu sempre apelo. Por exemplo, não tem a idéia que entre dois números eu sempre posso encontrar outro, se eu falo 0,1 você fala um número menor, se eu falo 0,01 você fala outro menor ainda. Então partindo dessa idéia da reta, então você pode imaginar um delta x tão pequeno quanto você queira e isso é o que eu to chamando de dx é a base do retângulo e o $f(x)$ é que vai me dar a altura do retângulo. E aí eu defini a área do retângulo e a integral definida é a soma dessas áreas, só que depois, mais

adiante, eu comentei que a integral definida para matemático é um símbolo de integração, para vocês isso tem que representar algo mais, então eu apresentei. (L23)
Encontro 7, p.17.

O exemplo citado por P3 é um exemplo paradigmático no ensino de Integral. Trata-se do cálculo da área entre o gráfico de uma função e o eixo das abscissas x por aproximação do cálculo de áreas de retângulos.

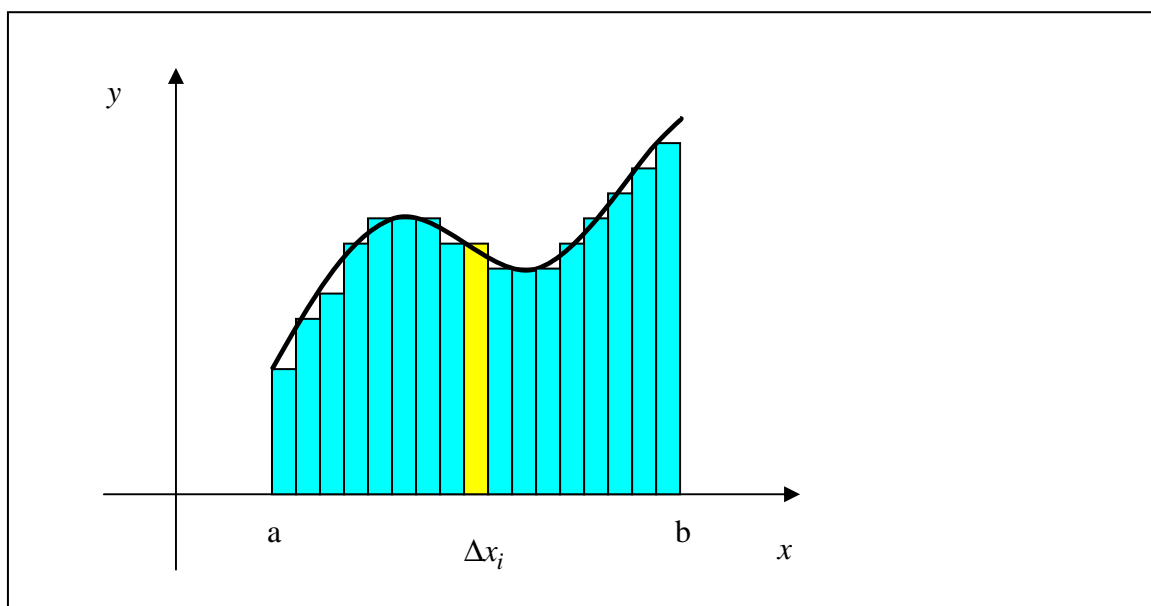


Figura 18: O cálculo da área sob o gráfico de uma função

Temos inicialmente retângulos com base $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, onde x_i e x_{i-1} são os extremos superior e inferior, respectivamente, de cada intervalo. Aumentando-se o número de retângulos, teremos uma diminuição da base Δx_i , ou seja, Δx_i tende a zero e usamos a notação dx para representar um retângulo de base infinitesimal.

O professor P3 se apóia num argumento geométrico para explicar aos seus alunos, dizendo que dx é base do retângulo e que $f(x)$ é a altura; então a área de cada retângulo pode ser determinada por $f(x)$ vezes o dx e somando-se as áreas de todos os retângulos obtém-se a área sob o gráfico da função.

Analisando essa situação pela teoria das metáforas conceituais vemos que P3 recorre a uma metáfora de ligação (figura 19), envolvendo dois domínios da Matemática: no domínio-fonte a geometria e o cálculo da área de retângulos, e no

domínio-alvo a Análise, no qual o símbolo $\int_a^b f(x)dx$ é introduzido para representar

o limite das somas de Riemann $\lim_{\text{máx}\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$ e que determina a área entre o gráfico de f , o eixo das abscissas e as retas $x=a$ e $x=b$.

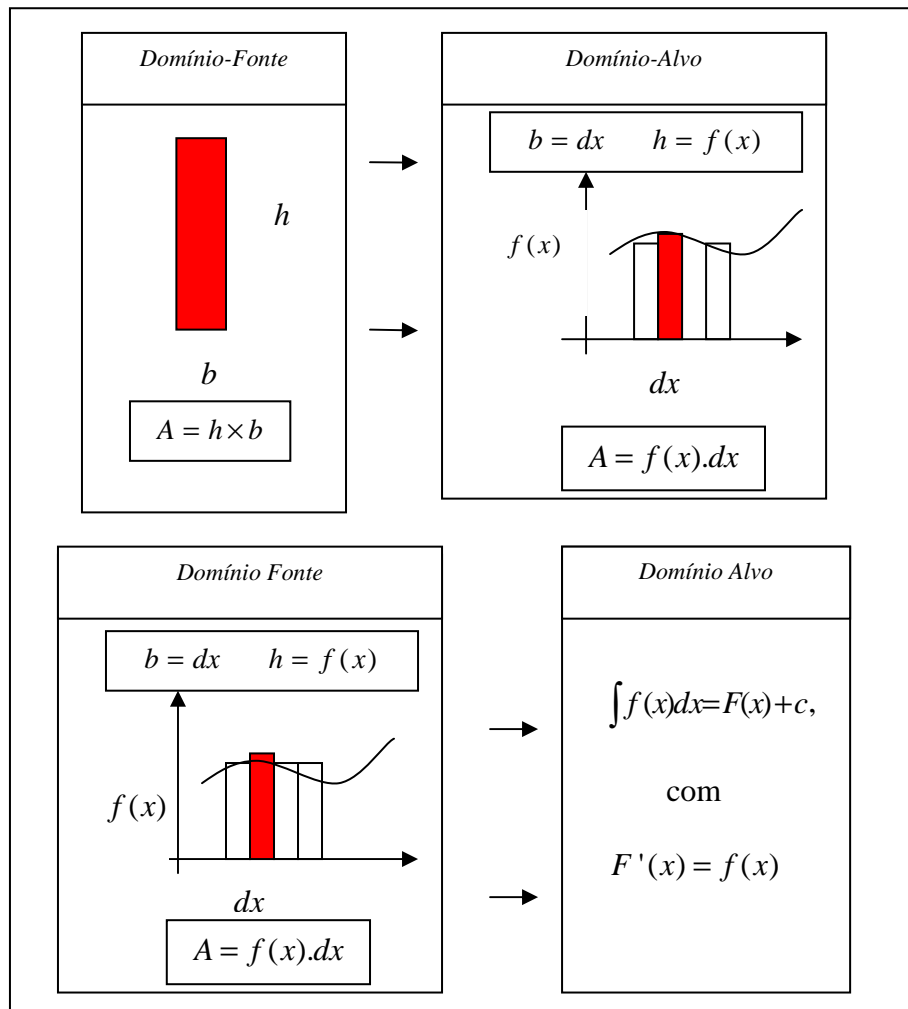


Figura 19: A metáfora de ligação utilizada pelo professor

Temos a mesma situação do cálculo da área do círculo. Precisamos aceitar que esse limite possa ser assumido, uma vez que o símbolo $\int_a^b f(x)dx$ é o resultado da soma da área de infinitos retângulos infinitesimais, ou seja, o infinito atual. Observamos também que, como apontado por Lakoff & Núñez (2000), as metáforas de ligação são as que necessitam de maior intervenção do professor, já

que as metáforas básicas são compreendidas sem necessidade de maiores instruções.

A didática utilizada por P3 à qual ele atribui a denominação de abordagem intuitiva, ou sem rigor, o preocupa, pois tem receio que essa ação, apesar de ajudar os alunos na compreensão da Integral, pode “enforçar” a Matemática, ou seja, causar uma interpretação errônea por parte dos alunos, que acabam fazendo a multiplicação de f por dx .

Observamos, também, que o gesto realizado por P3, no sétimo encontro, com o dedo indicador e o polegar para representar a diminuição da base do retângulo, pode levar os alunos a acreditarem que os limites do intervalo se encontram por meio de um movimento fictivo (TALMY, 2000), pois os dedos das mãos de fato se aproximam e se tocam, mas os limites dos intervalos são estáticos, não se movem e não se encontram.

Com essa interpretação, alguns alunos podem fazer inferências da experiência física para a Matemática, fazendo com que eles acreditem que o Δx vira dx e o dx vira x , conforme podemos constatar pelo resultado apresentado pelo aluno de P3 na prova, quando ao calcular a integral $\int x dx$ exhibe o resultado $\frac{x^2}{2} \cdot x$. A operação de multiplicação pode ser uma inferência mapeada do campo geométrico, com o qual o professor P3 diz que a área do retângulo é calculada por $f(x)$ vezes o dx (Figura 20).

Ainda para o gráfico de uma função qualquer, apresentamos, habitualmente, o valor x no eixo das abscissas e o valor correspondente $f(x)$ nas ordenadas, e nesse caso temos dx nas abscissas e o $f(x)$ nas ordenadas, o que também pode ter levado o aluno a pensar o dx como x (Figura 20).

Observamos que a linguagem utilizada por P3 produziu inicialmente uma aceitação do dx por parte dos alunos; entretanto depois trouxe problemas com as operações algébricas da Integral.

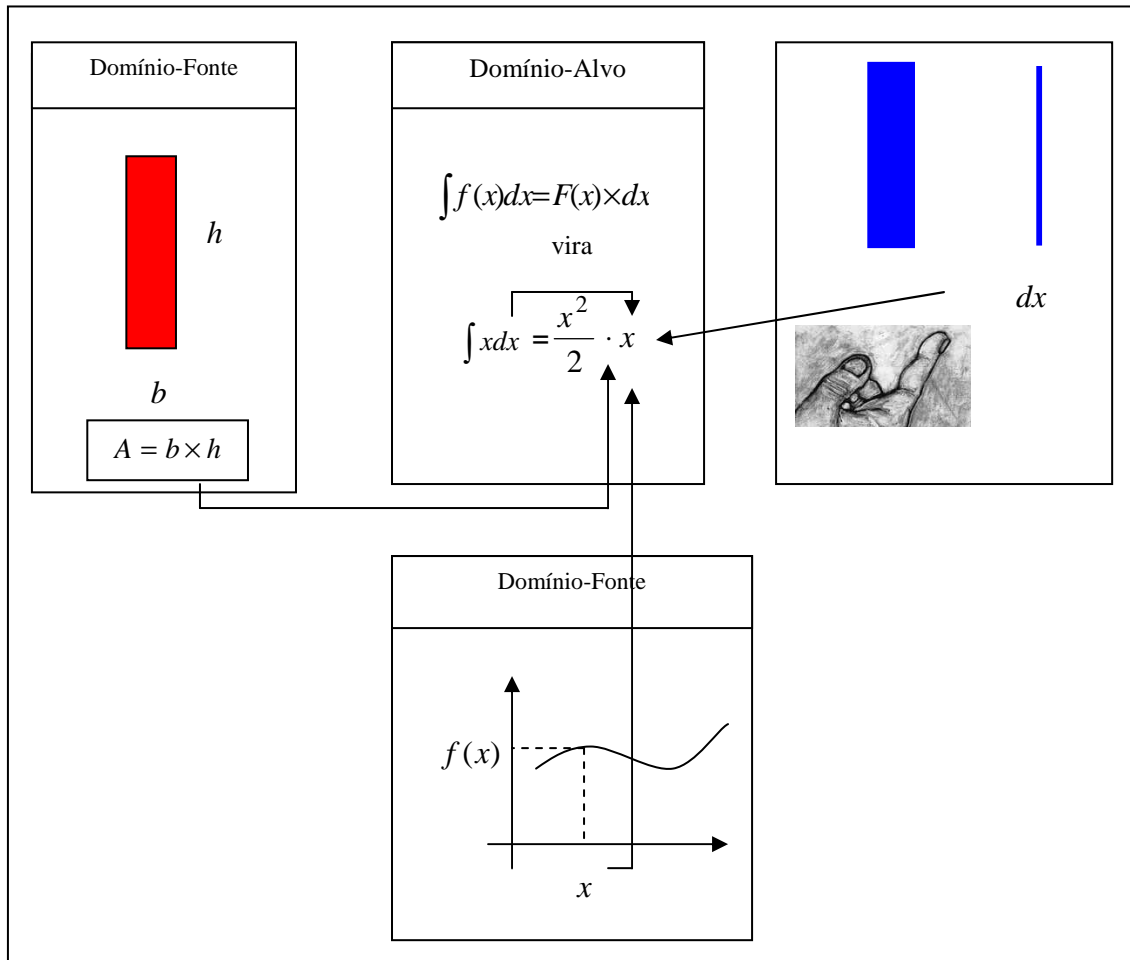


Figura 20: Possíveis metáforas de ligação utilizadas pelos alunos

Aprender o que é dx é problemático para o aluno; assim as metáforas “mais concreto” e “mais palpável” surgem na fala de P3 para explicitar a noção do dx como um infinitésimo na Engenharia, apontando para uma noção de infinitésimo como sendo algo que existe em forma material e que é palpável, ou seja, que se pode ver, sentir e palpar: “vai estudar a massa dessa viga” e “vai estudar um circuito, ele vai estudar cada elemento pequeno”. Enquanto que na Matemática, para P3, um infinitésimo é diferente, é mais abstrato, menos palpável.

Na fala de P3 observamos que, apesar da Matemática ciência ser citada como precisa e sem ambigüidade, a Matemática escolar e seu ensino dependem, e muito, do contexto em que é ensinada.

P1 Para eles da Engenharia tem que representar algo mais? (p17, L42)

P3 Sim, porque para eles não é só o símbolo, esse dx tem um significado; o que para gente é um infinitésimo para eles é um infinitésimo também, mas **é um infinitésimo mais concreto** que o nosso, para eles é algo **mais palpável**. Vou estudar a massa dessa viga, ele vai particionar isso, elementos pequenos e vai estudar cada pedaço, vai estudar um circuito ele vai estudar cada elemento pequeno, [...] **tender a zero para eles é diferente**. (E7, p17, L44)

P1 E as suas provas? (p18, L8)

P3 Provas eu já fiz e o resultado, em termos de porcentagem:

50% entenderam, o objetivo foi atingido,

25% entenderam com falhas,

25% calamidades. (p18, L9)

P1 A que você atribui esses resultados? (p18, L14)

P3 Vários fatores, mas o principal talvez não seja nem o problema com o cálculo, é o **problema com a álgebra**, não sabe simplificar uma fração, não sabe simplificar uma expressão. Como você vai falar de integral se ele não sabe nem simplificar; erros de interpretação da simbologia da integral é $\int x dx$ é $\frac{x^2}{2} \cdot x$, parte algébrica básica e interpretação de símbolos. (p.18, L15)

Encontro 7

Analisando esse trecho do episódio, podemos inferir que as metáforas utilizadas pelo professor com o intuito de facilitar a compreensão dos alunos talvez possam, ao contrário, dificultar a aprendizagem. Observamos que não há uma convergência entre o resultado esperado pelo professor e o apresentado pelo aluno, as metáforas utilizadas em cada caso conduzem a alvos diferentes.

Contribuímos com o esquema da dinâmica dos discursos na sala de aula apresentado por FRANT et al (2005):

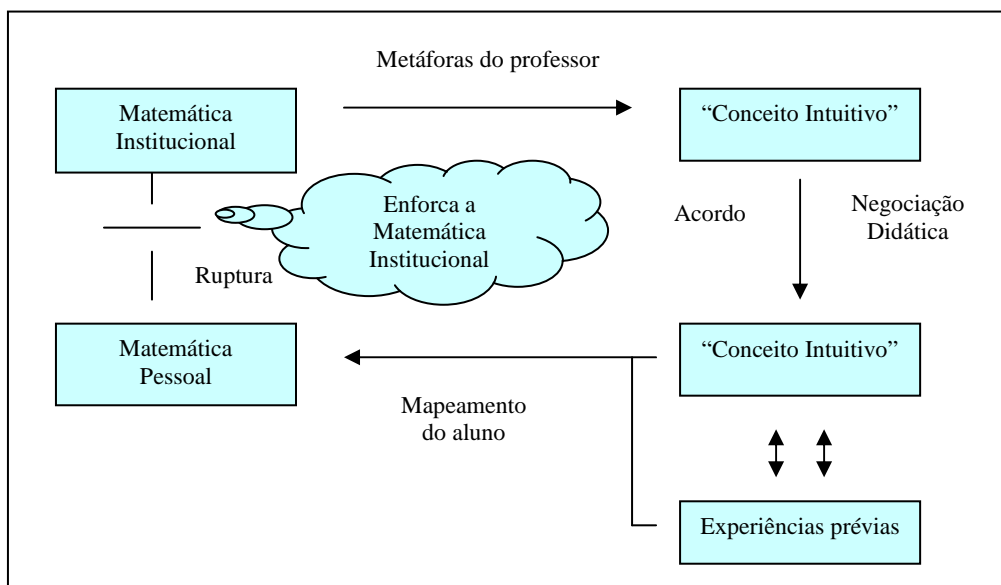


Figura 21: A dinâmica da sala de aula, adaptado de FRANT, J. B. et al, 2005, p. 52).

O professor parte da Matemática que ele pretende ensinar, no nosso caso o Cálculo e apoiando-se, em geral, em metáforas de movimento e no domínio geométrico tenta facilitar a aprendizagem. O alvo seria uma abordagem intuitiva, ou seja, como os próprios professores categorizaram no episódio I, uma abordagem sem rigor, sem detalhes, buscando a adesão dos alunos.

Dessa forma parece existir um acordo entre alunos e professores, como afirma P3: “eu sei que eles vão entender melhor”. Com essa negociação didática, as falas dos professores apontam que há, por parte dos alunos, a compreensão do assunto em questão e eles constroem aos poucos um conceito intuitivo. Porém, além das inferências advindas das metáforas introduzidas pelos professores, os alunos trazem consigo outros aportes de conhecimentos e de experiências prévias que podem interferir nessa construção.

Assim, o mapeamento realizado pelos alunos, com base nesses domínios, resulta numa matemática “pessoal” diferente da esperada pelo professor, ou seja, da matemática institucional. A metáfora “enforca a Matemática” sintetiza a ruptura que existe nesse mapeamento.

O professor P5 não acha necessário utilizar argumentos como os introduzidos por P3 para explicar Integral. Apesar de o professor P5 ficar perturbado com uma possível explicação para o dx , ele diz que não recorre a argumentos como os de P3, e aponta que o significado do dx é “mais natural”, quando inicia o assunto pela integral definida, com os intervalos Δx_k e, quando inicia sua aula pela integral indefinida, essa seria abordada como sendo apenas um símbolo ligado à função a ser integrada e depois “vem o TFC e concatena”. Quanto aos alunos, a fala é: “vocês fiquem calmos ai, quietos, dêem um voto de confiança” (E12, p. 56, L6), revelando a não- preocupação, por P5, em falar “mais fácil” para ajudar os alunos na compreensão do dx . Notamos que, dessa forma, para P5 o não “Enforçar a Matemática” é privilegiado em relação aos artifícios e às metáforas que facilitariam a compreensão da Matemática.

[P1 pergunta para P5] P5, o P3 quando deu a aula de Integral dele, ele usou esse argumento de falar do $f(x)$ e o dx como sendo a base, ele usou um argumento para tentar convencer ou explicar; você concorda ou discorda? Você usa esse tipo de argumento? (p55, L31)

P5 Pois é essa parte do dx me perturba um pouco. (p55, L36)

P1 E só para completar, o que você diz para um aluno que lhe pergunta o que é o dx ? (p55, L38)

P5 Se você começa pela integral definida, o dx fica mais natural assim, não é? O dx digamos e os Δx_k , então tudo bem, quando eu fiz primeiro a integral indefinida a justificativa é ..., bom vamos deixar a priori em aberto isso, um símbolo amarrado à variável da função $f(x) dx$, mas isso vai ser concatenado, conectado logo com outro conceito, mas fica aquela coisa assim, não é? Mas por que não é? (p55, L40)

P5 Qual a outra pergunta? (p55, L48)

P3 Por outro lado quando eu faço isso, sempre vem um drama na consciência, pois será que eu não estou cometendo nenhuma falha quanto ao rigor matemático, porque às vezes você quer simplificar tanto o assunto que você acaba fazendo, você não pode abrir mão do rigor. (p55, L49)

[**P1** pergunta para **P5**] Você acha que tem que ter essa preocupação, de falar de outra forma? (p56, L4)

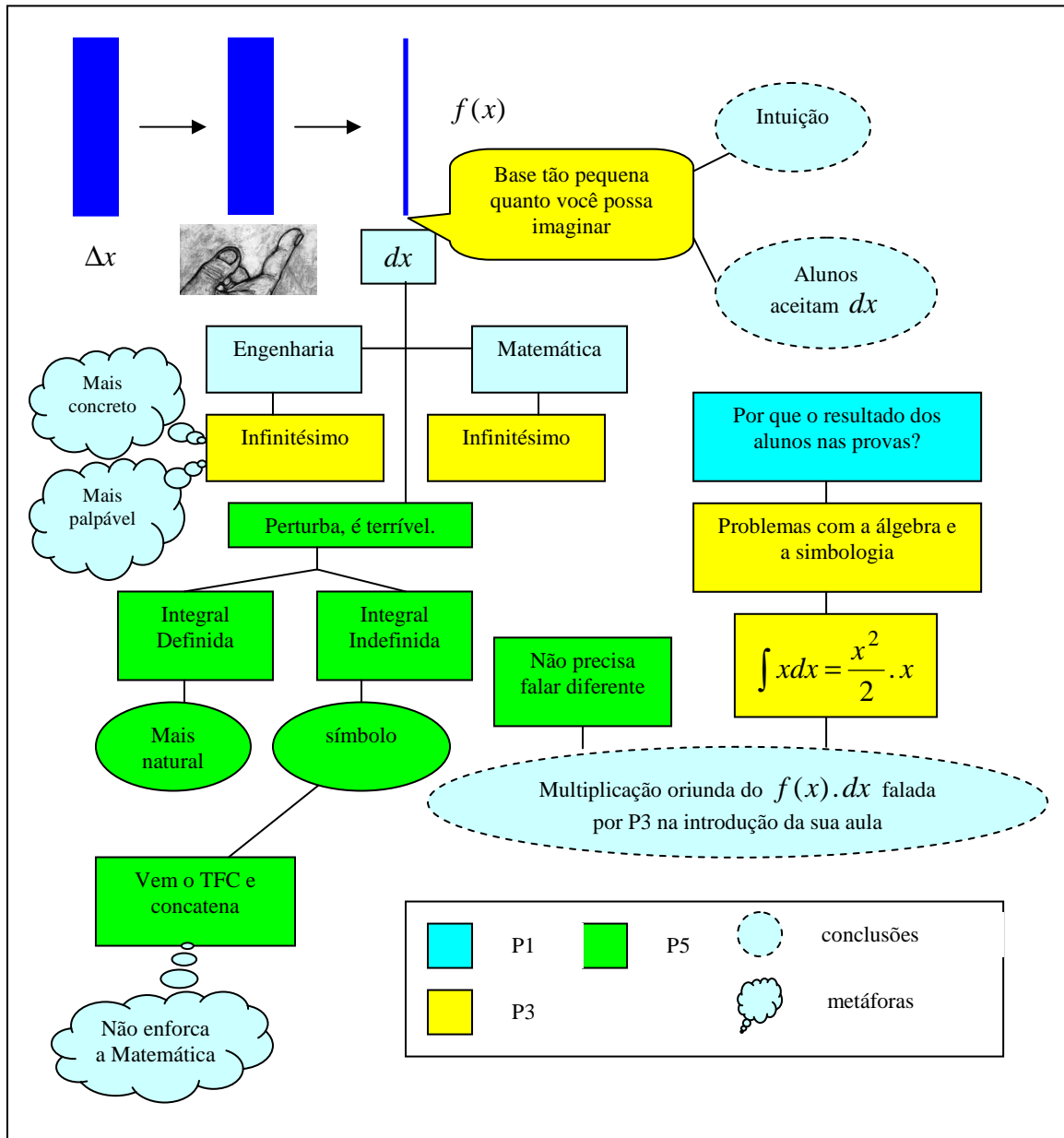
P5 Pra mim não, vamos assumir, digamos assim, a gente poderia usar outra notação, só que vamos introduzir essa notação já pensando no futuro. Então vocês fiquem calmos aí, quietos, dêem um voto de confiança e depois nós vamos ver porque que foi interessante já termos introduzido essa notação e beleza. Eu lembro que uma vez eu assisti uma palestra do Elon Lima¹⁸ e ele também falou isso, digamos assim, você seja um ator lá na frente e convença, convença não, combine com seu aluno, aceite isso a priori, isso depois nós vamos ver, não é, aí vem o TFC e concatena. (p56, L6)

Encontro 12

Concluindo essa parte do episódio, destacamos que é necessária uma reflexão, por nós professores de Cálculo, sobre as metáforas que utilizamos quase que inconscientemente, no sentido de facilitar a aprendizagem, o que nem sempre ocorre, como observamos acima, e apontamos o grupo de reflexão sobre a própria prática como um ambiente fecundo para que as trocas de experiências e discussões como essas possam interferir diretamente na prática docente.

O esquema 1 da folha seguinte sintetiza os argumentos e as metáforas utilizadas pelos professores no sétimo encontro e que foram discutidas e analisadas acima.

¹⁸ Professor Dr. do Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA/RJ.



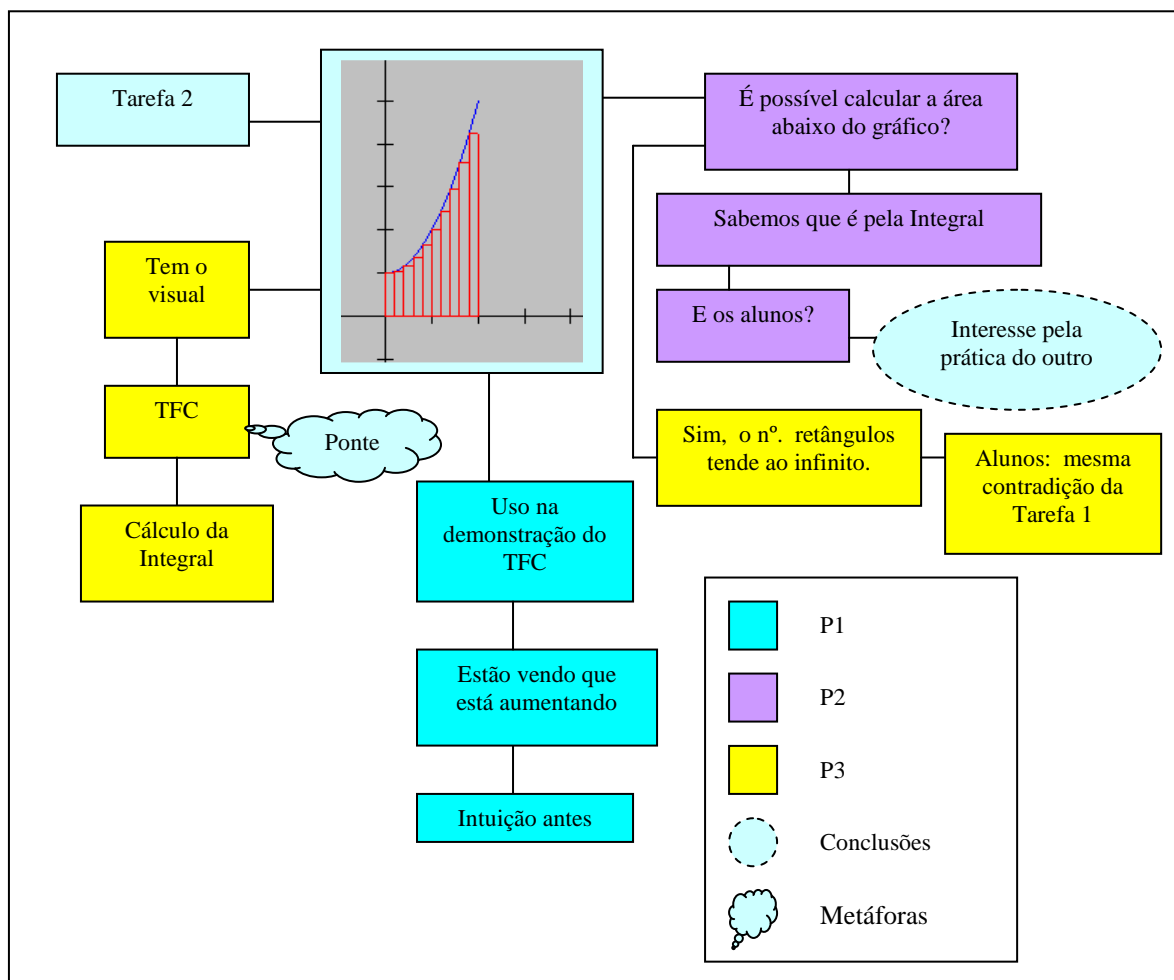
Esquema 8: Enforcando a Matemática

3.2.3 Parte III: O infinito atual e a tecnologia.

No quinto encontro conversamos sobre a tarefa 2 (anexo I). Os professores a resolveram no computador e usaram o *Winplot* para determinar a área sob o gráfico da função real dada por $f(x) = x^2 + 1$ no intervalo $[0,2]$. Para eles, a integral de tal função dava conta da resposta, mas ficaram curiosos em saber como os alunos responderam essa questão. Esta curiosidade aponta que em

suas práticas esta tarefa nem sempre é compreendida pelos seus alunos, o que fica explicitado no sétimo encontro, quando P3 coloca que os resultados das provas mostram que “25% entenderam com falhas e 25% calamidades” (E7, p.18, L 9).

Apresentei as transcrições das falas dos alunos e voltamos a discutir. A partir do esquema abaixo, analisamos os argumentos dos professores.



Esquema 9: O Infinito Atual e a Tecnologia

P2 É possível calcular exatamente a área abaixo do gráfico? Nós sabemos que é usando integral, **mas e os alunos lá? Não sei o que é que eles responderam...**(p13, L47)

P3 Sim, fazendo o número de retângulos tender ao infinito agora vai cair, **os alunos iriam cair na contradição daquela primeira folhinha.** Lembra daquela primeira atividade do círculo que você ficou preenchendo com polígonos e **nunca chegava** e um aluno pode dizer você vai aumentando, aumentando, **vai dando zoom** e sempre vai achar um espaço em branco (p14, L1)

P3 Sim, fazendo o número de retângulos **tender ao infinito.** (p14, L8)

P2 Sim, que é o conceito de integral definida. (p14, L10)

P1 O P2 estava curioso para saber o que os alunos teriam respondido [...]. Eu vou trazer umas sinopses do que eles falaram a respeito disso. (p14, L11)

P3 Acho que a dificuldade dependendo do embasamento, aqui a gente consegue **ter o visual, o preenchimento da área**, agora **a melhor ponte** que tem que ser feita, quando **você vai de fato calcular a integral definida** pelo Teorema fundamental do cálculo. (p14, L23)

P1 Eu uso na demonstração do teorema fundamental do cálculo **vários recursos daqui**, que **na sala de aula não dá para fazer**, aqui eles estão **vendo que está aumentando**. (p14, L28)

P1 Essa questão do **infinito eu acho complicado**, então é para trabalhar um pouco **a intuição antes**, isso é algo que estou tentando fazer e queria discutir com vocês. (p14, L32)

Encontro 5

Observamos que a discussão do infinito atual e potencial volta a incomodar os professores, enunciado por P3 (p. 14, L1), que na discussão aponta para uma possível maneira de fazer o aluno compreender esta Integral. Quando coloca que “a melhor ponte [...]”, entendemos que com esta metáfora ele acredita ser possível que o Teorema Fundamental fosse uma passagem entre o visual e as técnicas de integração. Pelo resultado de suas provas e por nossas observações, acreditamos que se trata de mecanismos cognitivos distintos e que, portanto, não existe uma simples ponte mas, sim, um mapeamento do tipo montagem conceitual que revela uma complexidade de inferências e relações.

Cabe ressaltar, também, que o uso da tecnologia possibilitou a construção de cem retângulos sob o gráfico, o que não seria possível na lousa, em sala de aula. Com mais esse recurso, os alunos podem aguçar a intuição.

Trazemos a seguir a discussão dos professores sobre as transcrições das falas dos alunos.

P3 O que a gente percebe aqui no discurso é que **de fato há uma diferença** entre a **geometria**, o visual; alguns afirmam aqui embaixo [aponta para o texto com as transcrições] que no visual nunca vai chegar, não vai, vai ter uma diferença infinitesimal e **analiticamente prova-se que chega na área**, não é? (p.24, L33)

P3 Quando você aplica, por exemplo, essa atividade [referindo-se a atividade 2 com o Winplot] em sala, eles têm a parte gráfica, eles têm o visual. Não estaríamos também insinuando para eles afirmarem que entre aspas eu diria assim: “você está lá, você dá um **zoom**”. Eles vão sempre encontrar um espaço vazio. Então aquele aluno atento, de fato, vai dizer que, mesmo **com infinitos retângulos, ele não vai conseguir preencher aquilo**, talvez ele vai dando zoom, vai dando zoom, ele vai achar sempre [...]. A gente não estaria insinuando eles a afirmarem isso através da própria atividade? Eu pensei nisso agora, porque quando você trabalha com o conceito de infinito, quando você dá o limite, eu não sei se eles teriam **maturidade** ainda para dar a definição por epsilons e deltas. (p.24, L39)

P1 Não, eu não trabalhei muito. (p.25, L4)

P3 Aqui eles **estão assim crus**, não é verdade? (p.25, L5)

P3 A teoria eu também acho que é necessária, **depois eu sei lá**, quando eles estiverem mais **maduros** [...] (p.25, L6)

P1 Você acha que com epsilons e deltas eles vão entender tudo? (p.25, L8)

P3 Não, não vão, não foi isso que eu disse, eu disse assim que a atividade, o visual nos leva a dizer que dá zoom, dá zoom, vai ter um espaço lá, intuitivamente eles estão com a idéia de limite na cabeça, mas como é de fato que você vai argumentar isso? Aí é que entra **de novo o problema da primeira atividade**, eu acho que vai chegar um momento lá que eles vão ter que ver isso **lá abstratamente** com a teoria dos epsilons e deltas para justificar. (p.25, L10)

P1 Essa questão **da indução** é se, por exemplo, se você deixa com 200 retângulos, o aluno vai falar que preenche. (p.25, L19)

P3 Mas e se você dá o zoom? (p.25, L22)

P1 Não, sem dar o zoom, aí com 200 já preenche a área, então vamos supor que eu não queira usar o *page Down* [tecla que fornece o zoom no *winplot*], aí eu teria, seria pior, se eu deixo lá com 200 e eles acreditam que é! Eu acho que seria pior, não se induzir, mas idéia de colocar o *page down* é para que levasse o aluno a **pensar que o número tinha que ser muito grande**, mesmo que não fosse infinito. (p.25, L23)

P3 Não, eu entendi, talvez eu tenha me colocado mal, é isso que eu quero chegar, quando eles estão dando zoom, eles estão vendo o espaço, vai ter um espaço lá, não é? (p.25, L31)

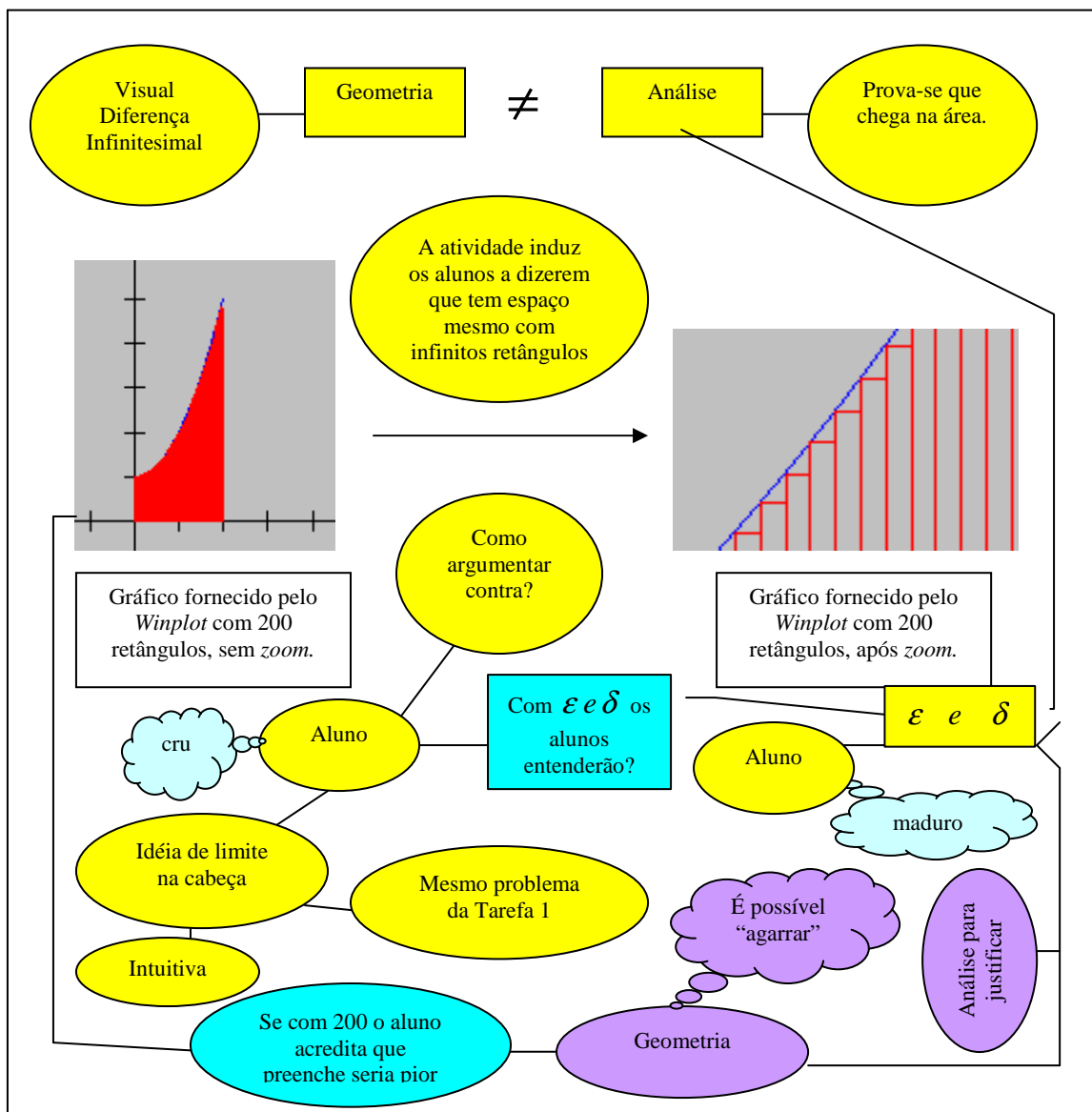
P1 Mas quando você estiver no **campo geométrico sempre vai ter um espaço** [...] (p.25, L35)

P2 É porque aqui, eles se agarraram na **geometria**; é como na outra atividade, chega um momento que tem que ir lá para terminar de justificar as coisas e tem que ir para a **Análise**. (p.25, L37)

Encontro 8

Aqui evidenciamos uma mudança: se no quinto encontro a solução didática apontada seria uma ponte, no oitavo encontro os professores apontam dois espaços mentais distintos: **“de fato há uma diferença entre a geometria, o visual; alguns afirmam aqui embaixo [aponta para o texto com as transcrições] que no visual nunca vai chegar, não vai, vai ter uma diferença infinitesimal e analiticamente prova-se que chega na área, não é?”**. (p.24, L33). Mais ainda eles falam que se os alunos se agarrarem a um espaço, só compreenderão o outro quando estiverem maduros.

A tecnologia usada contribuiu para a intuição, no entanto, como apontaram os professores, contribuiu, também, para reafirmar o infinito potencial e não o atual. E temos que encarar o jogo do infinito, isto é, cognitivamente podemos interpretar o infinito de dois modos: potencial e atual. As falas acima corroboram com a Teoria da Cognição Corporificada, pois o potencial ou imperfectivo está relacionado à nossa experiência e o computador reitera tal experiência. Para entender o infinito atual temos que jogar com a definição “rigorosa”. O esquema 2 resume os argumentos dos professores no encontro 8.



Esquema 10. O Infinito Atual e a Tecnologia

Na questão 10 da Tarefa 2 (Anexo I) - Com cinquenta retângulos a soma das áreas dos retângulos coincide com a área abaixo do gráfico de f ? -, os alunos poderiam usar as opções *Pagedown* e *Pageup* para aumentar ou diminuir o tamanho da figura gerada pelo *winplot*, conforme podemos ver no esquema 10. Esse trecho da tarefa foi apontado por P3 como sendo uma intervenção que induziria os alunos a pensar que sempre existe um espaço entre os retângulos e a curva determinada pelo gráfico da função, mesmo quando o número de retângulos fosse muito grande.

O professor P3 lança, então, sua preocupação de como argumentar e convencer os alunos: "intuitivamente eles estão com a idéia de limite na cabeça",

ou seja, como argumentar contra essa visão que, instigada a partir do texto oferecido pela tecnologia, leva os alunos a ter esse pensamento, num infinito potencial, de algo que não termina nunca, contrariando a idéia intuitiva de limite, de algo que é atingido e que tem fim – o infinito atual.

A demonstração a partir da Análise, com ε e δ é apontada, então, como sendo a única forma para argumentar com os alunos, contudo esses não teriam ainda a maturidade para trabalhar com os resultados da Análise, estariam ainda “cru”, metáfora usada por P3 no sentido de dizer que os alunos ainda não estão preparados para apreender os resultados da análise colocados formalmente.

Cabe em outro trabalho discutir melhor o que se entende por cru ou maduro; a nosso ver, trata-se de outro jargão muito usado pelos professores, mas assim como “conceito”, não se sabe precisar bem o que significa. Na fala: “**depois eu sei lá**, quando eles estiverem mais **maduros**” (p.25, L6), o lá expressa tal indeterminação. Analisando tal enunciação, poderíamos cair no absurdo de dizer que Euler era cru e Weierstrass era maduro.

Quando P2 diz que “aqui, eles se **agarraram** na Geometria, é como na outra atividade chega um momento que tem que ir lá para terminar de justificar as coisas e tem que ir para a Análise”, observamos que a Geometria parece oferecer uma base tão segura à aprendizagem dos alunos que seria possível agarrá-la de fato, como se ela fosse algo material. As justificativas viriam por intermédio da Análise, e nesse campo seria necessário um desprendimento da base segura que é a Geometria.

Ao nosso ver, uma sugestão seria conversar com os alunos sobre as duas formas de olhar sobre o infinito, e aproveitar a grande oportunidade de mostrar via história esses olhares e a construção do Cálculo, antes e depois da teoria dos conjuntos. A tecnologia, como vimos, pode despertar a intuição dos alunos sobre o infinito potencial e incitar discussões profícuas sobre essas duas formas de pensar o infinito.

3.3 Episódio III – A reflexão sobre a prática e o desenvolvimento profissional

Apresentamos nesse item uma análise dos argumentos dos professores durante os encontros com o intuito de responder a questão central dessa pesquisa: Quais as contribuições do grupo de discussão sobre a própria prática no desenvolvimento profissional?

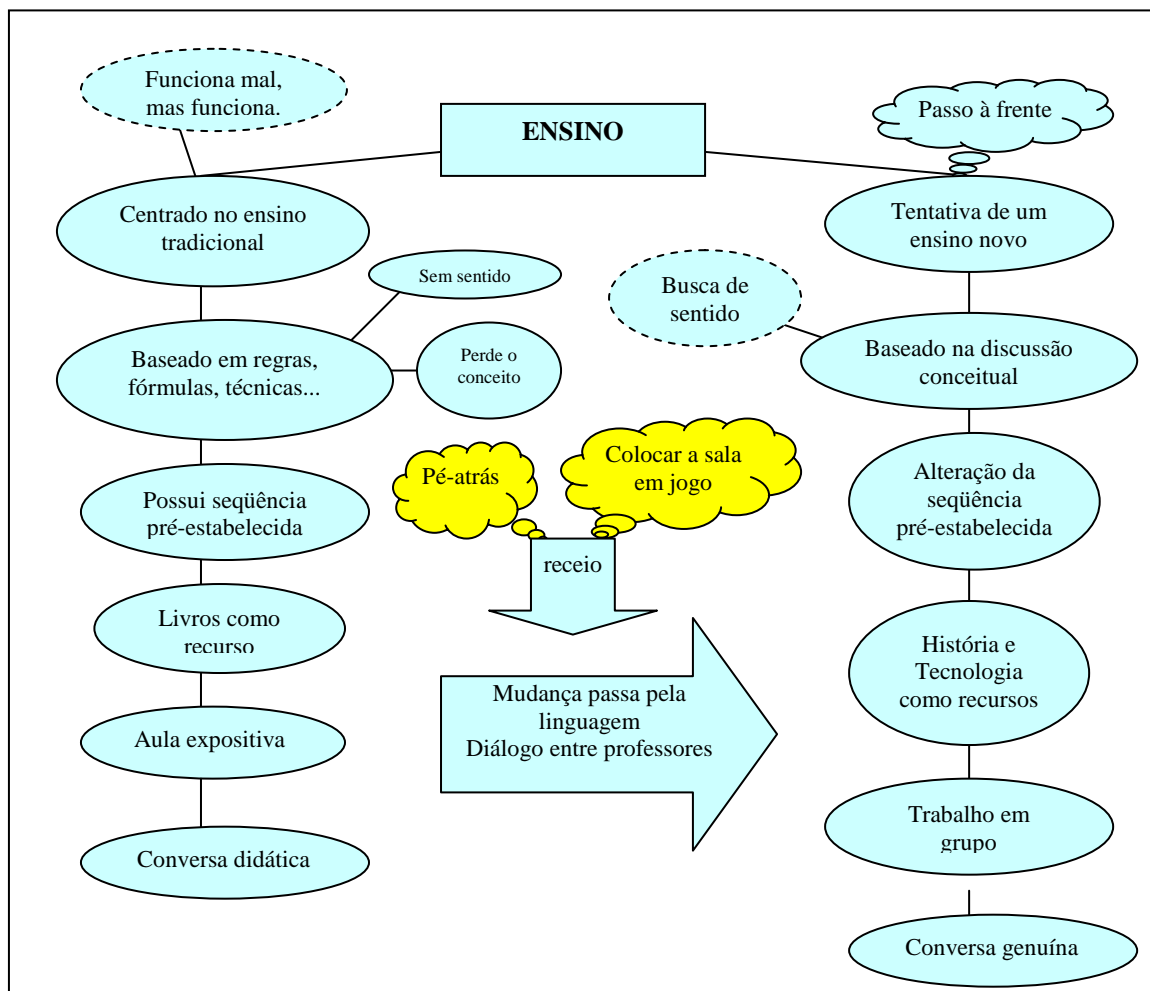
3.3.1 O desenvolvimento profissional: “passo à frente”

A intenção de melhorar a própria prática foi o mote para os professores que participaram efetivamente dos encontros. A formação do grupo de discussão partiu de P1 que, desde o primeiro encontro, colocou-se como alguém que estava interessado em investigar e melhorar a própria prática e para isso precisava conversar com outros professores que tivessem as mesmas dificuldades com o ensino de Cálculo: “estou tentando investigar a minha prática e melhorá-la e para isso preciso conversar, não adianta refletir sozinho, é a primeira vez que sento com alguém para conversar assim” (E1, p3, L10).

No contexto da tentativa de melhorar a prática e de entender as dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos, estiveram sempre presentes no discurso dos professores uma dicotomia entre duas tendências de ensino: o ensino tradicional e a tentativa de um novo ensino.

Os professores acreditam que seja necessário vislumbrar novas estratégias e opções de ensino, contudo têm receio de mudar e “**dar um passo a frente**”. O grupo de discussão se caracterizou por um espaço de trocas de experiências, de discussões e reflexões espontâneas que instigavam os professores a mudanças e os encorajavam a propor novas metodologias e estratégias na sala de aula conforme aponta a fala: “quando você tem um meio de discussão em aberto você está trabalhando com pessoas que mexem com aquilo, você se sente mais seguro em **dar um passo**, você se sente mais seguro em arriscar” (E1, p3, L21). O esquema 1 resume os argumentos dos professores em

relação às preocupações com as estratégias de ensino a serem adotadas na sala de aula:



Esquema 11: O desenvolvimento profissional: “Passo à frente”

A elaboração desse esquema e de parte das análises a seguir tiveram a colaboração de um grupo de alunos de Pós-Graduação da Universidade Estácio de Sá do Rio de Janeiro, na disciplina Análise do Discurso, sob orientação da Prof^a. Dra. Mônica Rabello de Castro.

O ensino tradicional é caracterizado pelos professores a partir da metodologia de ensino adotada: “Tradicional é a aula expositiva onde o professor fala e o aluno ouve” (E13, p59, L59); da seqüência de ensino pré-estabelecida, no caso da integral – integral indefinida – integral definida – teoremas – aplicações – que estão presentes nos livros didáticos de Cálculo: “Quando eu introduzi o conceito de integral eu comecei pelo método tradicional, definindo a primitiva, a integral indefinida, para depois a integral definida [...]” (E1, p2, L43); da

valorização das técnicas de cálculo: “o que os alunos valorizam, gostam e têm facilidade são exatamente com as técnicas de integração, com as fórmulas, com as regras, mas aí fica meio sem sentido” (E1, p2, L30) e da conversa didática: “conversa didática é aquela já meio preparada, ‘ensaiada’ em casa com as perguntas e respostas já previamente planejadas pelo professor” (E13, p58, L54).

Esse ensino tradicional preocupa os professores, pois para eles, a aprendizagem baseada nas técnicas e nos processos mecânicos de cálculos leva à “perda do conceito” (E1, p2, L33).

Outros métodos para sua prática são apontados pelos professores, baseados na utilização de tecnologia: “estou usando tecnologia, tenho um trabalho com o winplot, que uso na parte de Integral” (E1, p2, L27); na alteração da seqüência pré-estabelecida, considerando os fatos históricos do conceito de integral: “[...] mostrar aquilo que eu acho que surgiu historicamente primeiro a integral definida, o cálculo de área abaixo de uma curva e depois as técnicas de cálculo para resolver a integral definida e aí a ligação entre as duas é a ponte pelo TFC” (E1, p3, L1); na valorização da discussão conceitual como foco da busca do sentido e na conversa genuína: “[...] é uma coisa, digamos assim, uma aula ao vivo” (E13, p58, L54) – a conversa genuína citada é uma conversa na qual aluno e professor têm igualdade de voz, contrariamente à conversa didática na qual o professor domina a conversa.

Contudo, os professores têm receio dessas mudanças, de abandonar o método tradicional e partir para um ensino totalmente novo, porque têm desconfianças se a tentativa vai funcionar: “você até pensa em fazer, fica com um **pé-atrás**, não sabe se aquilo vai funcionar, você não quer **colocar uma sala em jogo**” (E1, p3, L18). A utilização da metáfora “pé-atrás” destaca essa insegurança. A expressão “pé-atrás” é usada como poder retornar, a qualquer momento, na tentativa de reverter a situação e acertar.

Para os professores, utilizar uma nova metodologia significa arriscar, “**colocar uma sala em jogo**”, pois não sabem quais resultados vão obter e, portanto, arriscam fazer o aluno não aprender sequer o que aprende com o antigo método, daí a explicação para a caixa pontilhada (funciona mal, mas funciona), referindo-se ao ensino tradicional.

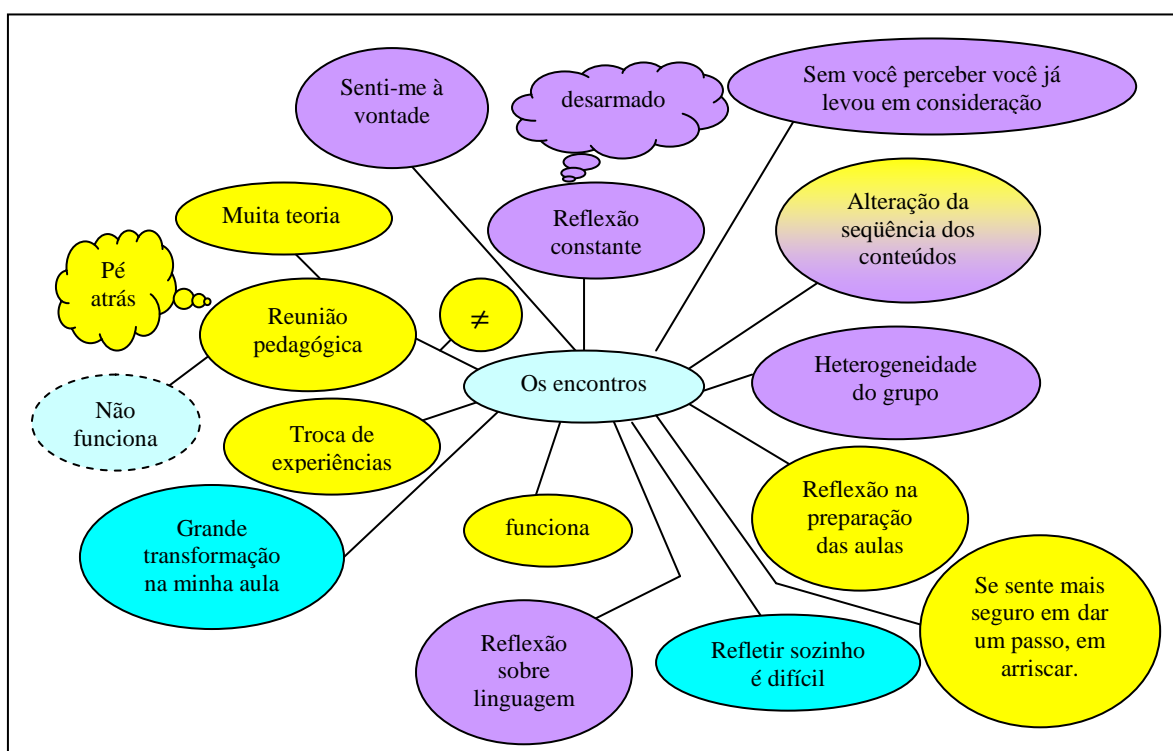
A metáfora “passo à frente” é usada no sentido de dar um passo em relação ao futuro, em busca de algo que venha a melhorar o que está sendo feito:

“você se sente mais seguro em **dar um passo**, em arriscar” (E1, p3, L23). Mostra a intenção de propor novas estratégias.

Na tentativa de um novo ensino, é fundamental discutir os conceitos, ou seja, a linguagem torna-se fundamental nesse contexto: “os conceitos se forem realmente discutidos podem levar a uma melhora” (E1, p3, L37). A tentativa do novo ensino privilegia a busca do sentido.

As metáforas “pé-atrás” e “passo à frente” organizam a ideologia dos professores no sentido de estruturar um novo ensino, na tentativa de que os alunos consigam dar sentido ao que eles ensinam. Os encontros dos professores de Cálculo contribuíram para que eles se sentissem mais seguros em “dar um passo à frente”, em arriscar.

As contribuições dos encontros para o desenvolvimento profissional de cada professor do grupo estão sistematizadas no esquema 2.



Esquema 12: O desenvolvimento profissional : “Passo à frente”

O pensar e repensar a prática, as trocas de experiências e as discussões realizadas acerca do referencial teórico dessa tese provocaram a reflexão constante por parte dos professores conforme revelam as falas:

P3 “Cada terça-feira eu saio daqui; achando que eu **tenho que mudar tudo**” (E7, p. 18, L31)

P2 Foi uma **reflexão constante; acatei**, como na semana passada o P3 falou da parte histórica primeiro e tal, uma coisa que eu não tinha pensado. E na hora falei: não, é isso aí, eu não tinha pensado, mas **já estou incluindo** e se eu **não tivesse conversado com você** [P3], talvez só no ano seguinte é que eu fosse **me tocar**, então ia **demorar um ano** para eu incluir aquilo (E 10, p33, L40).

P2 Muitas coisas que você trouxe da Educação Matemática, leituras recentes, que nem das metáforas e tal, tudo isso eu vou levar em consideração, mas nem tudo eu sei como eu vou levar em consideração ainda. Vou ter que fazer uma primeira vez para daí ir melhorando, mas tudo ou conscientemente ou mesmo **sem você perceber, você já levou em consideração**, você já está levando em consideração, mesmo que sem perceber, fora aquilo tudo o que eu vou fazer conscientemente, lembrando o que nós discutimos e lemos (E10, p33, L47).

Destacamos a potencialidade dos diálogos, no grupo de discussão, de interferência direta na prática docente, antecipando mudanças que poderiam ocorrer um ano depois ou simplesmente não ocorrer. As experiências positivas socializadas pelos professores do grupo encorajaram os demais em “dar uma passo à frente”.

No que diz respeito à linguagem, as mudanças, em sala de aula, nem sempre são fáceis de serem percebidas pelo próprio professor, o que pode ser observado quando P2 diz que “sem você perceber você **já levou em consideração**”.

Para P3 as reflexões já se iniciam, desde o momento da preparação das aulas até o ato das aulas.

P3 Eu acho que esses encontros nos levaram, me levou de forma direta, a refletir já no momento **da preparação das aulas**, eu acho que isso já influenciou tanto no momento da preparação das aulas, quanto no **ato da aula**. Você parou para refletir, ou seja, me deixou com **certas preocupações**, isso é bom porque você acha que está tudo bem, **você não pensa em mudar, não é?** E a partir do momento que você está vendo que existem **outros caminhos**, existem outras possibilidades, isso te leva a refletir na preparação das aulas, **na maneira com que você vai falar**, na maneira com que você vai apresentar e isso pode ajudar bastante na elaboração das aulas. E eu acho que **é a primeira vez que eu participo de um encontro entre professores**, mas um encontro, vamos dizer assim, isso **não é uma reunião pedagógica**, não é? Um **encontro que funciona** e eu acho que isso é o que falta em qualquer nível de ensino, essa troca de experiências, acho que **sem acanhamento por parte dos participantes**, o que não acontece na verdade. A gente sempre **fica com receio**, com um **pé atrás, não é?** Com **medo de mostrar** que sabe menos ou que sabe mais, acho que isso não aconteceu aqui, acho que foi bem transparente e eu acho que foi proveitoso para todos nós. (L8).

P1 Você diz que numa reunião pedagógica não é tão natural assim? (L31).

P3 Eu acho que isso não acontece, numa reunião pedagógica tratam **muito de teoria** e que **não ocorre essa troca de experiências**, é difícil ver isso aqui. Acho que é a

primeira vez que estou participando de uma reunião que **de fato** ocorreu uma **troca de experiências**, pude aproveitar algumas coisas, você **[P1] me ouviu**, o **P2 me ouviu** e a gente conseguiu relacionar isso; acho que é o que falta, é uma chave principal, não é? Porque você trabalhar **sozinho é uma coisa**, a gente sabe que de fato existem maneiras de trabalhar um assunto, mas você precisa testar isso com alguém que já tem um certo contato, uma certa experiência e eu acho que falta bastante isso. Os encontros ajudaram, me **fez refletir quanto a postura nos assuntos** a serem tratados na aula, a ordem que foi apresentada nos programas, a sugestão que foi dada no último encontro, também gostei das aplicações, dos programas [referindo-se aos softwares], das tarefas que foram propostas, podem de fato ser aproveitadas numa aula do dia-a-dia. (L33).

Encontro 10, p 34.

O professor P3 compara os encontros que realizamos para discutir os problemas com o ensino de Cálculo com uma reunião pedagógica. Numa reunião pedagógica, segundo P3, há uma preocupação maior com a teoria, em detrimento da prática e da troca de experiências, não é funcional, e os professores não se sentem à vontade para colocar suas experiências, o que pode ser traduzido novamente pela metáfora “**pé atrás**” extraída da fala de P3: “a gente sempre fica com receio, com um **pé atrás**, não é?”.

Em contrapartida, durante os encontros, os professores não tiveram receios de expor suas idéias, de relatar suas experiências, sentiram-se à vontade: “eu me senti totalmente à vontade, até de falar coisa errada, **não tive medo** nenhum de falar coisa errada para vocês”. (E10, p39, L31).

Observamos que, no grupo de discussão, ocorreu de fato o *diálogo*, os professores deixaram-se invadir um pelo outro, expondo-se à contestação de suas crenças e de seus conhecimentos. O diálogo, neste sentido, é sempre um risco, é uma relação dialógica entre os indivíduos. (CASTRO & FRANT, 2001).

Acreditamos que esse sentimento de liberdade para falar sobre nossas experiências durante os encontros tenha se criado por conta da posição de P1, que se apresenta desde o primeiro encontro como alguém que está tentando melhorar a própria prática e não somente como alguém que está pesquisando a prática do outro, e também pelo fato da heterogeneidade do grupo, apontada por P2.

P2 Numa reunião pedagógica, às vezes tem professor de Língua Portuguesa, de... e você vai falar de Integral, e nem todos, naquele momento entendem; agora aqui todo mundo está falando de Cálculo, nem sempre dá para falar, por exemplo, vamos falar sobre derivada, sobre integral, ah mas o que é isso? Eu sou de outra área. E outra coisa, mesmo que eu faça com professores de uma determinada área, tem professor que não

vão falar, vai falar mais ou menos, porque ele vai se expor muito, não vai aceitar, parece que você está lá punindo, >não, não é assim>, >muda>, agora a gente **veio aqui desarmado**. (E10, p35, L3)

A metáfora “desarmado” utilizada por P2 explicita que, quando os professores participam de uma reunião pedagógica, eles vão “armados” para evitar exposições e situações de constrangimento, o que geralmente acaba ocorrendo na forma de silêncio pois ficam “**com medo de mostrar** que sabe menos ou que sabe mais”. Contudo nos encontros isso não ocorreu visto que os professores se sentiram totalmente à vontade para falar e expor suas idéias. A tabela abaixo sintetiza as comparações traçadas pelos professores.

Tabela 4: Reunião Pedagógica x Encontro de Professores

Reunião Pedagógica	Encontro de Professores
Trata da teoria	Trata da prática
Não ocorre diálogo*	Ocorre diálogo
Professores armados, com medo	Professores desarmados, sem receio
Professores de diferentes áreas	Somente professores de Cálculo
Não ocorre troca de experiências	Ocorre troca de experiências
Pé atrás	Passo à frente

*Diálogo segundo Casto & Frant (2001)

Concordamos com Lins (2005) que pedagogia e matemática não são separadas em sala de aula, e acrescentamos que pedagogia e matemática também não estiveram separadas no grupo; a discussão sobre noções matemáticas de integral geraram conhecimentos e compreensões matemáticas e não-matemáticas ao mesmo tempo, como pudemos observar no esquema 1 desse episódio.

Os professores apontam que se sentem mais seguros quando discutem com alguém que tem experiência, no caso, o professor P1, respaldado por uma instituição conceituada de Pós-Graduação em Educação Matemática: “nada mais certo do que você se apoiar em quem já tem uma certa experiência pra te dar uma base, você se **sente mais seguro**”. (E10, p.35, L28).

A reflexão sobre a linguagem utilizada pelos professores em suas aulas de Cálculo também foi apontada como uma das contribuições dos encontros,

acarretando uma preocupação constante com a “linguagem do cotidiano” ou linguagem natural, empregada com a finalidade de facilitar a aprendizagem.

P1 Eu gostaria de perguntar a respeito da linguagem, assim das questões que a gente falou sobre linguagem, sobre metáforas e a prática de vocês; vocês chegaram a pensar em mudar alguma coisa por conta disso, ou não? (L32)

P2 Da linguagem, tomar cuidado, como o que nós discutimos aquele dia lá; é claro que a gente **usa de recursos às vezes do cotidiano**, às vezes da matemática anterior, mas **cuidado para não enforçar a matemática**. Eu sempre tive esse cuidado, **mas agora eu vou ter mais ainda**, a minha linguagem de esclarecer muito, não acabar usando uma coisa **que na cabeça do aluno vai ser prejudicial**, então eu tomo cuidado, sim. Às vezes eu falo num dia: puxa, isso eu acho que não devo mais falar, né, essa turma eu já falei, já foi, mas pelo menos **na próxima vez eu vou falar diferente**, eu tenho essa preocupação sim. (L37) *Encontro 10, p. 35.*

A preocupação com a linguagem empregada na sala de aula também, é apontada por P1 como uma das grandes modificações na sua prática docente. P1 aponta que metáforas que utilizamos no ensino de Matemática, como a metáfora da balança para o ensino da resolução de equações, são importantes, não se opondo aos próprios princípios da Teoria da Corporeidade, contudo, existem limitações das inferências que podem ser feitas do domínio-fonte “equilíbrio da balança” para o domínio-alvo “resolução de equações” e que devem ser ressaltadas pelo professor, como por exemplo, na resolução de equações que envolvam número negativos. Segundo Lins & Gimenez (1997, p.143) “não é possível, por exemplo, produzir significados para $3x+100=10$ em relação ao núcleo da balança de dois pratos. A essa impossibilidade chamamos de *limite epistemológico*”. Para esses autores não faz sentido falar em “passagem” do “concreto” para o “formal” se tratam apenas de atividades distintas com seus resultados localizados: “de áreas para pensamento algébrico ou de balanças para pensamento algébrico há *rupturas*, e não ‘abstração’ ou ‘passagem’” (LINS & GIMENEZ, 1997, p.121).

P1 Eu acho que o que **foi uma grande transformação na minha aula, foi nesse cuidado**, é impressionante como que isso pode estar influenciando, porque nessa tentativa de **falar de coisas mais simples ou do cotidiano dos alunos para tentar explicar** determinado conceito, **existe uma passagem que eu acho que é bastante sutil**. Você acaba tratando das coisas como se fossem as mesmas, então você está falando de (++), o aluno pode estar entendendo o raciocínio, estar entendendo a matemática ou não, quando eu citei pra vocês o exemplo da tangente [**P1** cita que é um exemplo dado por Rafael Núñez em um congresso, no Brasil, em dezembro de 2004],

esse toque [P1 mostra uma mão aberta tocando a outra mão fechada], aqui na linguagem natural tem um outro significado, uma outra semântica, do que na matemática, porque aqui quando você toca, você não tem intersecção e na matemática é a intersecção de dois conjuntos que têm um ponto em comum [...] (p. 35, L 49)

P1 Quando você pega lá a **equação como uma balança** e aí se fala disso, de equação como balança para tentar explicar a matemática, aí o aluno vai entender a equação como uma balança e quando você chega nas equações que envolvem números negativos, onde a balança não é suficiente, ele não vai voltar para a matemática que o professor quer, o que a gente quer ensinar? A matemática, a ciência matemática, a teoria é isso que a gente quer ensinar enquanto professor; agora os meios que a gente faz para chegar nesse conhecimento, **nem sempre podem estar realmente ajudando o aluno a chegar**, porque ele pode parar no meio do caminho. Não é que eu estou dizendo para o aluno: não use a balança, isso não é matemática, não acho que é isso, não é por aí, não estou dizendo >você não pode pensar equação como uma balança>, daí eu estaria indo contra a própria questão didática [**contra a teoria da corporeidade, das metáforas conceituais**] de você estar usando uma coisa que conhece, através de uma metáfora, para uma coisa que você não conhece. Eu tô usando algo que eu conheço, que é uma balança, para tentar entender um conceito que é abstrato, o de equação [...]. O que eu acredito e a gente **está tentando falar é que essas coisas são distintas, você pode usar a balança, você chega até um certo ponto [com a balança], você pode até simular situações com saquinhos vermelhos para representar os números negativos e na matemática é assim.** (p. 36, L17) *Encontro 10*

3.3.2 A reflexão a partir da prática

Acreditamos que a reflexão a partir da prática caracterizou-se como elemento essencial para a adesão dos professores ao grupo de discussão. Conforme apontam os professores, “numa reunião pedagógica tratam **muito de teoria** e que **não ocorre essa troca de experiências**” (E10, p34, L33).

Motivados pela discussão sobre sua própria prática ou da prática do outro, podemos dizer que os professores que participaram efetivamente do grupo buscaram o equilíbrio entre a ação e o pensamento e uma nova prática implicou sempre uma reflexão sobre a experiência, qualidade essa de um professor reflexivo, segundo Serrazina (2004).

Concluindo esse episódio III destacamos que o grupo de discussão se configurou num espaço que provocou uma reflexão constante por parte dos professores e incentivou-os a “dar um passo à frente”, a repensar sua ação, o planejamento da sua aula, a sentir-se mais seguro em “colocar uma sala em jogo”, enfim, a produzir novos conhecimentos profissionais e desenvolver-se profissionalmente.

Considerações Finais

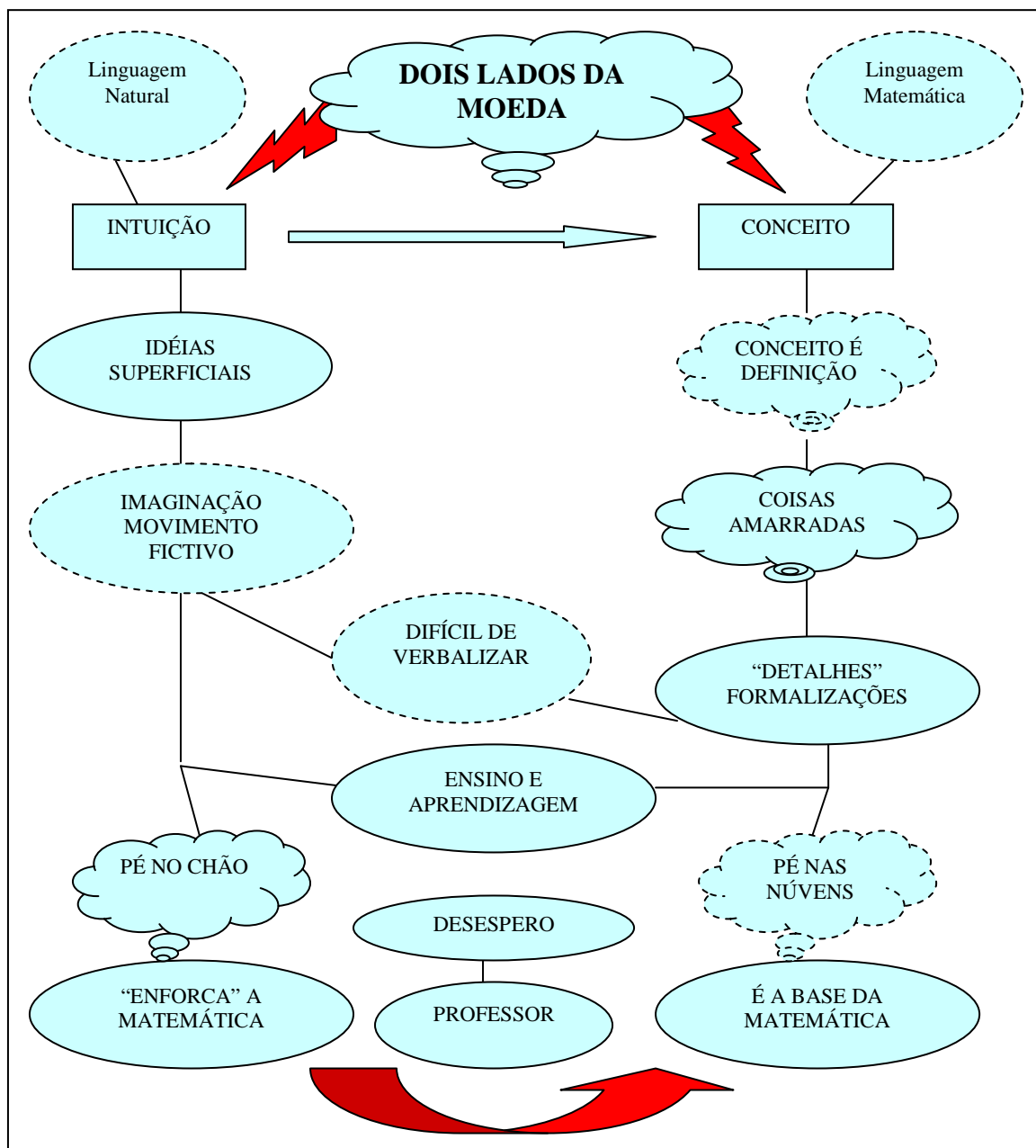
Nesta seção, retomamos e sintetizamos os elementos que acreditamos responder às nossas indagações iniciais e traçamos nossas considerações e reflexões finais.

QUESTÃO I: Como os professores caracterizam conceito e quais as implicações desta caracterização na sua prática pedagógica?

Essa questão emergiu a partir das análises das transcrições dos diálogos entre os professores do grupo e mereceu uma atenção especial devido à utilização intensiva do termo conceito nas discussões, em enunciações como: “são os conceitos, não é que se realmente forem discutidos, acho que podem levar a uma melhora”.

Desta forma, é importante que tenhamos uma efetiva compreensão do que caracterizamos como conceito em nossa prática docente, o que poderia possibilitar um planejamento mais adequado das reais estratégias didáticas a serem traçadas, com vistas à melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem do Cálculo.

Elaboramos um esquema - Esquema 13 - que resume o episódio “Falando sobre Conceito e Intuição” a partir dos seis esquemas apresentados no Capítulo 3 e das análises que pudemos explanar até então, objetivando gerar subsídios para responder à questão I.



Esquema 13: Conceito e Intuição, uma análise geral.

Dividimos o esquema acima em duas partes para facilitar a apresentação: a primeira, relativa à caracterização dada pelos professores sobre conceito e intuição, e, a segunda, referente às relações dessa com o ensino e a aprendizagem no Cálculo. Observamos que foi necessário incluir a investigação sobre intuição concomitantemente à de conceito devido ao direcionamento das falas dos professores.

Como pudemos observar, os professores participantes do grupo utilizam, constantemente, o termo conceito em seus discursos e, pela nossa análise, detectamos que, na maioria dos casos, o significado produzido para esse termo

era, inicialmente, o de definição, o qual foi explicitado em falas como “conceituar é colocar de forma rigorosa toda a definição”.

A metáfora CONCEITO É DEFINIÇÃO nos ajudou a interpretar essa visão. A definição matemática tem propriedades intrínsecas: é estática, é sempre a mesma, independentemente do sujeito; é fechada, é pautada no rigor, é apresentada e aceita pelos membros de uma comunidade científica – os matemáticos - e surge na forma analítica. A partir das inferências que fazemos dessas propriedades que estão no domínio fonte – definição – teríamos as caracterizações do conceito, no domínio alvo, o que implicaria numa visão limitada de conceito, especialmente, no que se refere à sua construção.

A universalidade e o formalismo da Matemática dificultam a compreensão por parte dos professores de que a construção do conceito é feita pelo sujeito, admitindo criação e invenção e podendo variar de indivíduo para indivíduo.

Em sua prática, os professores recorrem a diferentes elementos para ensinar determinado conteúdo, como exercícios, problemas, definições, tecnologia, provas, idéias intuitivas etc. Contudo, se ele tem uma visão como a explicitada acima pela metáfora CONCEITO É DEFINIÇÃO, com valorização demasiada no rigor da Matemática, isso pode se traduzir em dificuldades para a aprendizagem dos alunos.

Assim, o que propomos, aqui, é que repensemos nosso discurso sobre conceitos, não falemos vaziamente sobre ele e destaquemos em nossas aulas a importância de elementos como: textos, tecnologias, representações geométricas, intuição etc., que ajudam o aluno na aprendizagem de determinado conteúdo.

Após nossas primeiras intervenções, o discurso dos professores sobre conceito muda, visões como “conjunto de coisas amarradas” e “colcha de retalhos”, passam a fazer parte dos diálogos. Entretanto, na aula de um dos professores e nos últimos encontros, tivemos, novamente, uma retomada da visão de conceito ligado ao rigor, “no conceito entramos com os detalhes” e os detalhes significavam as formalizações matemáticas, o que corrobora com a idéia de que o que temos incorporado é difícil de ser modificado.

A intuição também surge por várias vezes no discurso dos professores e é considerada como o ponto de partida para se trabalhar determinado conteúdo, é caracterizada como sendo um pensamento direto, sem uso da razão, sem os detalhes, ou ainda “idéias superficiais”.

Com o desenrolar dos diálogos, um professor diz que recorre à intuição dos alunos no momento em que “pede para que eles pensem o que ocorre com a área quando a base do retângulo tende à zero”.

Em síntese, concluímos que os professores consideram como intuitivo no ensino de Cálculo o que não for pautado no rigor da Matemática e, geralmente, está associado a uma ação do professor no sentido de facilitar a compreensão do aluno sobre determinado conteúdo. Na maioria das vezes, essas ações estão apoiadas em sentenças que envolvem movimento.

Em nossas aulas, usamos, constantemente, frases como “delta x **tende** a zero”, que é ilustrada, em geral, com o auxílio dos dedos das mãos indicando um “movimento” para a diminuição do intervalo. Nessa frase, estamos atribuindo movimento a um elemento estático, que é um conjunto de pontos que compõem o intervalo de comprimento delta x, descrito por Talmy (2000) como sendo Movimento Fictivo.

Enquanto essas sentenças que usamos em nossas aulas se apóiam, em geral, numa linguagem dinâmica, as definições do Cálculo com épsilons e deltas se apóiam em elementos estáticos. Ao comentar a definição de continuidade: a função f é contínua em x_0 se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|x - x_0| < \delta$ então $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, Martinez (2006, p 10) diz que:

A nova formulação traduz um deslocamento conceitual. Os intervalos deixam de ser considerados como grandezas extensas, que diminuem ou aumentam, para serem vistos como conjuntos de pontos tomados simultaneamente.

Núñez (2003) também afirma que essa definição se apóia em estruturas cognitivas totalmente diferentes da definição natural usada por matemáticos como Euler: “a curva que é descrita por deixar a mão se mover livremente”, ou seja, a curva que pode ser traçada sem tirar o lápis do papel.

Considerando essas diferentes estruturas, a primeira apoiada numa linguagem materna e dinâmica e, a segunda, numa linguagem matemática e estática, acreditamos que não seja possível a unidirecionalidade esperada pelos professores em suas aulas, partindo da intuição até chegar ao conceito num ponto de vista dicotômico de intuição e rigor.

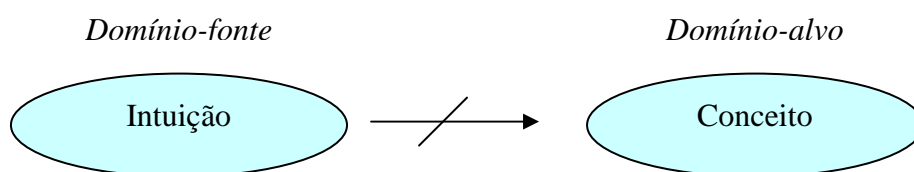
Defendemos que deva existir uma valorização equilibrada de ambos os lados da moeda e a consciência por parte dos professores de que os dois são importantes para a compreensão, a criação e o avanço da Matemática.

Em relação à aprendizagem temos, do lado da moeda referente à intuição, a compreensão e uma aceitação maior por parte dos alunos da argumentação do professor, que pode ser traduzido pela metáfora “pé no chão”, enquanto que do lado do conceito (definição), temos dificuldades de compreensão, os alunos ficam, literalmente, com os “pés nas nuvens”.

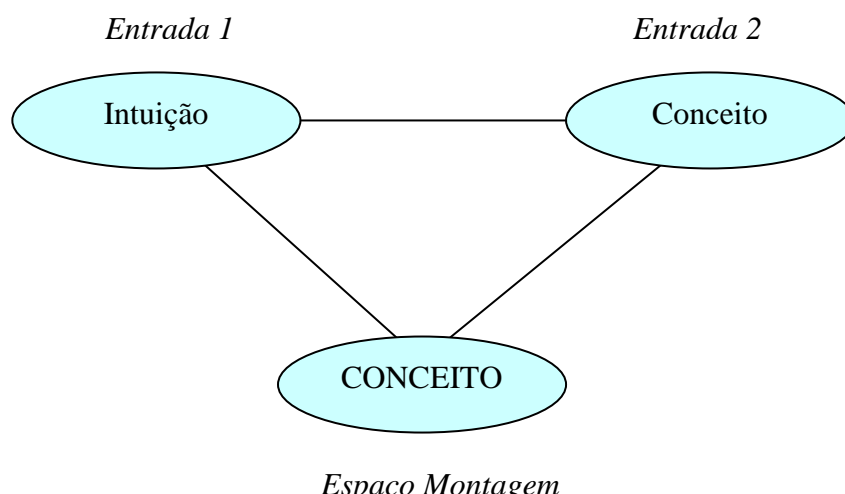
Em relação ao ensino, enquanto a intuição é considerada perigosa pelos professores, como algo que pode até “enforçar a Matemática”, o conceito seria a base e a fundamentação da Matemática.

Nesse contexto, o professor se vê em “desespero”, numa tensão entre intuição e conceito, entre facilitar a compreensão do conteúdo e enforçar a Matemática. Reis (2001) afirma que o ideal da atuação do professor seja o equilíbrio entre a intuição e o rigor.

Concordamos com essa idéia e trazemos a nossa análise segundo a Teoria da Cognição Corporificada. Para nós, a teoria das Metáforas Conceituais, com a preservação de inferências entre os domínios fonte e alvo, não é suficiente para analisarmos a relação entre intuição e conceito no ensino e aprendizagem do Cálculo. Nesse contexto, defendemos a necessidade das Montagens Conceituais para essa situação.



Na montagem, temos três espaços mentais: a intuição no *espaço entrada 1*, o conceito no *espaço entrada 2*, e o terceiro espaço seria o *espaço montagem*, no qual o espaço das entradas são combinados e interagidos, é um espaço novo onde os elementos característicos provenientes da intuição e do conceito são integrados e combinados de tal forma que não é possível dissociá-los.



Na entrada 2, temos conceito no sentido empregado pelos professores, da definição e do formalismo da Matemática e, no espaço montagem, temos o CONCEITO na perspectiva da psicologia – “conceitos são sistemas abertos através dos quais os seres humanos podem aprender coisas novas e podem inventar...” Rosch (1999, p. 61). Isso ajuda a diminuir o “desespero” do professor que vê a intuição como ponto de partida e o rigor da Matemática como ponto de chegada, esperando que ocorra uma “passagem” na aprendizagem do aluno.

Finalizando, observamos que o diálogo abaixo reflete que nós, professores, nunca havíamos “parado para pensar” no assunto que gerou esse episódio:

P3 Quando desejo que o aluno aprenda o **conceito** de Integral, aí você pode ter uma visão subjetiva, sei lá, em termos da parte intuitiva. Agora, se eu quero formalizar essa coisa, essa hipótese, essa visão, não é uma coisa única assim sólida né? O **conceito** pronto e acabado.

P5 Pois é, sabe que eu nunca tinha parado para pensar nisso.

P1 Eu também não.

P5 Sei lá, pensando, eu não sei se eu vou pensar a mesma coisa amanhã, mas hoje, o **conceito** é uma coisa mais abstrata, definição de função contínua é um **conceito** mais abstrato, é um abstrato mais concreto, seja f uma função...

Os encontros de professores se consolidaram num momento em que, de fato, se “parou” para pensar e refletir sobre as nossas ações em sala de aula.

O desenvolvimento profissional envolve, necessariamente, mudança. Se continuarmos a pensar e a agir da mesma forma, com as mesmas atitudes e valores, não estamos nos desenvolvendo profissionalmente. Nossas idéias começam a ser modificadas a partir do momento que recebemos provocações e

somos expostos a pontos de vista diferentes dos que estamos, rotineiramente, acostumados.

Não é fácil mudarmos algo que parece estar incorporado e é utilizado por nós quase que automaticamente, como é caso do termo conceito, que na Matemática, em especial, é construído durante a nossa formação inicial como algo rígido, fixo e imutável, até mesmo pela própria característica intrínseca da Matemática de ciência “exata”. Passaremos, agora, ao refinamento da análise da questão II.

QUESTÃO II: Quais os argumentos utilizados pelos professores na reflexão sobre o ensino e a aprendizagem dos processos infinitos subjacentes ao conceito de Integral?

Essa questão também emergiu a partir das análises que obtivemos das transcrições das falas dos professores, do referencial teórico-metodológico adotado e, acima de tudo, de uma motivação pessoal de investigar esse assunto.

Após a análise dos diálogos, concluímos que os professores têm dificuldades em argumentar com alunos que não aceitam a noção de infinito atual. A argumentação utilizada estaria, num primeiro momento, muito ligada à frase “**no limite coincide**”, a qual parece ser contra-intuitiva, uma vez que ela vem precedida de “manda para o infinito” e, o significado de “limite”, na linguagem corrente, é de fronteira, de fim.

Num segundo momento, a justificativa dada pelos professores viria com o formalismo das definições de limites com epsítons e deltas, sendo apontada como a única forma de provar e argumentar com os alunos sobre o assunto.

Nós propomos, aqui, que a história e a epistemologia do conceito de infinito – retomando as concepções de infinito potencial e infinito atual – podem ajudar os professores de Cálculo não só a ter subsídios para argumentar com seus alunos, mas, também, entender melhor como se constituiu esse conceito tão complexo e importante da Matemática – o conceito de infinito.

Além da história, acreditamos também, que os resultados da lingüística cognitiva - sobre como pensamos cotidianamente o infinito e sobre os

mapeamentos que empregamos para entender o infinito atual - ajudam os professores na compreensão das justificativas apresentadas pelos alunos, as quais podem ter sido formuladas a partir de inferências em domínios fora da Matemática.

QUESTÃO III - Quais as contribuições do grupo de discussão sobre a própria prática no desenvolvimento profissional?

Essa é a questão central da pesquisa e, para tentar respondê-la, retomamos e sintetizamos, aqui, alguns pontos importantes que pudemos obter a partir da análise.

Destacamos a comparação, feita pelos professores, entre os encontros que realizamos e uma reunião pedagógica. Numa reunião pedagógica, segundo os professores, há uma preocupação maior com a teoria em detrimento da prática e da troca de experiências; não é funcional, e os professores não se sentem à vontade para colocar suas experiências, o que pode ser traduzido pela metáfora “**pé atrás**” extraída da fala de um dos professores: “a gente sempre fica com receio, com um **pé atrás**, não é?”.

Por outro lado, durante os encontros, os professores não tiveram receios de expor suas idéias, de relatar suas experiências, sentiram-se à vontade “eu me senti totalmente à vontade, até de falar coisa errada, **não tive medo** nenhum de falar coisa errada para vocês”. Ocorreu de fato o *diálogo*, os professores deixaram-se invadir um pelo outro, expondo-se à contestação de suas crenças e de seus conhecimentos. O diálogo, neste sentido, é sempre um risco, é uma relação dialógica entre os indivíduos (CASTRO & FRANT, 2002). Acreditamos que a participação de P1 no grupo como alguém que estava investigando a própria prática e, não somente, a prática do outro, tenha contribuído para que os professores se sentissem à vontade.

Concluindo, para nós, o grupo de discussão se caracterizou por um espaço de trocas de experiências, de discussões e reflexões espontâneas que instigavam os professores a mudanças e os encorajavam a propor novas metodologias e estratégias na sala de aula, na fala de um dos professores: “quando você tem um

meio de discussão em aberto você está trabalhando com pessoas que mexem com aquilo, você se sente mais seguro em **dar um passo**, você se sente mais seguro em arriscar”. A metáfora “dar um passo” revela que o grupo de discussão contribuiu para que pudéssemos construir novos conhecimentos profissionais e desenvolver-nos profissionalmente.

Considerações e reflexões finais.

Pela nossa revisão da literatura, vimos que são poucas as pesquisas no ensino de Cálculo que investigam professores e, menos ainda, as que partem da prática. Nossa pesquisa almejou contribuir nesse campo.

Podemos dizer que a criação do grupo de discussão e reflexão sobre o ensino de Cálculo, a partir da prática, foi bem sucedida e aceita pelos participantes, os quais propuseram a continuidade dos encontros. Estamos planejando nosso primeiro encontro em 2007, com a socialização dos resultados dessa tese.

Refletir a partir da prática no grupo demandou muito mais do que apenas discutir e descrever o que é feito em sala de aula, foi necessário o envolvimento e a participação dos professores, o planejamento e a organização dos encontros, a troca de experiências, as leituras teóricas e, sobretudo, o interesse em melhorar a própria prática.

Essa pesquisa de formação continuada mostrou que o grupo de discussão ajudou os professores a repensar sua prática pedagógica e a aprofundar o processo reflexivo.

Apontamos os modelos teóricos que utilizamos como diferencial dessa pesquisa e como um instrumento metodológico adequado para a análise e interpretação dos argumentos utilizados pelos professores na reflexão sobre a prática. Tais modelos permitiram levantar os implícitos nas falas dos professores, bem como, explicitar formas de pensar e agir que empregamos quase que automaticamente e inconscientemente na sala de aula, sem um exame mais profundo.

Dessa forma, pudemos avançar e aprofundar nossas reflexões, não permitindo que essas se tornassem discursos vazios e que os encontros se transformassem apenas num momento de “bate papo” sobre a sala de aula.

Gostaria de registrar aqui, também, a minha satisfação pessoal com a conclusão desse trabalho. As minhas indagações iniciais sobre as dificuldades dos meus alunos, hoje, são vistas num outro espectro graças aos novos horizontes trazidos por esse estudo. Tenho convicção de que é apenas o começo de uma longa e árdua caminhada que, como formador de professores de Matemática, pretendo prosseguir.

Referências Bibliográficas

ALARCÃO, I. Refletir na prática. **Nova Escola**, São Paulo, n. 154, ago. 2002. Disponível em: < http://novaescola.abril.com.br/index.htm?ed/154_ago02/html/fala_mestre>. Acesso em: 05 fev. 2007.

ALTET, M. As competências do professor profissional: entre conhecimentos, esquemas de ação e adaptação, saber analisar. In: PAQUAY, L et al. (Org.) **Formando professores profissionais: Quais estratégias? Quais competências?** 2. ed. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001. cap. 1, p. 23-35.

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. São Paulo: Pioneira, 1998.

BALDINO, R. R. Desenvolvimento de Essências de Cálculo Infinitesimal. **Série Reflexão em Educação Matemática**. Rio de Janeiro: MEM/USU, 1998.

_____. Pesquisa-ação para formação de professores: leitura sintomal de relatórios. In: BICUDO, M.A.V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999.

BAKHTIN, M. **Marxismo e filosofia da linguagem**. Tradução: Michel Lahud e Yara Frateschi Vieira, 7. ed., São Paulo: Hucitec, 1995.

BALL, et al. A Theory of Mathematical Knowledge for Teaching. In: International Commission on Mathematical Instruction, 15., 2005, Brasil. **Anais eletrônicos**...Brasil: Águas de Lindóia, 2005. Disponível em < http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/ball_ICMI_prop_oct11.doc>. Acesso em: 25 jul. 2005.

BARRA, M.; DAPUETO, C.; IMPEDOVO, M. Teaching and learning calculus, probability and statistics. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 10., 2004, Dinamarca. **Anais eletrônicos...**Dinamarca: Copenhagen, 2004. Disponível em: <<http://www.dm.unito.it/semdidattica/icme10.pdf> >. Acesso em: 15 jan. 2005.

BARON, M. E. **A matemática grega: curso de história da matemática, origens e desenvolvimento do cálculo.** Tradução Prof. José Raimundo Braga Coelho, Brasília: UNB, 1985.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.** 1999. 184p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BEILLEROT, J. A “pesquisa”: um esboço de uma análise. In: MARLI, A. (Org.) **O papel da pesquisa na formação e na prática dos professores.** 3 ed., Campinas, SP: Papirus, 2001.

BEZUIDENHOUT, J.; OLIVIER, A. Students' conceptions of the integral. In. PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 24., 2000, Japão, **Proceedings...**Japão: Hiroshima, 2000. v 2, p. 73-80.

_____. How can students' understanding of graphical aspects of the integral concept be enhanced? In. INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE TEACHING OF MATHEMATICS, 2., 2002, Grécia. **Anais eletrônicos...**Grécia: Universidade de Creta, 2002. Disponível em: <http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/ICTM2_Proceedings_Table_of_Contents.html>. Acesso em: jul. 2003.

BICUDO, I. Análise Não-Standard. **BOLEMA**, Rio Claro: Unesp, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, n. 8, p. 60-67, 1992.

BIRKHOFF, G. **A source book in classical analysis**. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1973.

BOAVIDA, A. M.; PONTE, J. P. Investigação colaborativa: potencialidades e problemas. **Refletir e investigar sobre a prática profissional**. Lisboa, p. 43-55, 2002.

BOULOS, P. **Cálculo diferencial e integral**. v. 1, São Paulo: Makron Books, 1999.

BOUVERESSE, J. **La parole malheureuse**. Paris : Les Éditions de Minuit, 1971.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução Elza F. Domingues, 2 ed., São Paulo: Edgard Blücher, 2001.

BRASIL, Ministério da Educação. **Propostas de diretrizes para a formação inicial de professores da educação básica, em cursos de nível superior**. Brasília, abr., 2001.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 3 ed. Lisboa: Gradiva, 2000.

CASTRO, M. R. **Retóricas da rua: educador, criança e diálogos**. Rio de Janeiro: USU, 1997.

_____ ; FRANT, J. B. Argumentação e Educação Matemática. **Boletim GEPEM** - Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática Boletim, Rio de Janeiro, n. 40, p. 53-68, ago. 2002.

_____ ; FRANT, J. B.; LIMA, F. M. Produção de significados, funções e representações sociais. In: ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 23., 2000, Caxambu-MG, **Anais eletrônicos**...Caxambu-MG, 2000. Disponível em: <<http://www.gt19edu.mat.br/>>. Acesso em: 22 set. 2005.

CATAPANI, E. C. **Alunos e professores em um Curso de Cálculo em serviço: o que querem?** 2001. 128p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, 2001.

COURANT, R. **O que é Matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos.** São Paulo: Moderna, 2000.

CZARNOCHA, B. et al. Investigating the nature of students' understanding of definite integral: Wallis or Riemann's idea. In. PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 21., 1997, Finlândia, **Proceedings...** Finlândia: University of Helsinki, 1997. v 1, p. 267.

_____. The concept of definite integral: coordination of two schemas. In. PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25., 2001, Netherlands, **Proceedings...** Netherlands, 2001. v 2, p. 297-304.

DALL'ANESE, C. **Argumentos e Metáforas Conceituais para a taxa de variação.** 2006. 128 p. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

DAMÁSIO, A. R. **O erro de Descartes: emoção, razão e o cérebro humano.** Tradução portuguesa Dora Vicente e Georgina Segurado, São Paulo: Companhia das Letras, 1996.

DAUBEN, J. W. Geog Cantor. In: **Investigación y ciencia** Prensa Científica S. A. Muntaner Barcelona, 1995.

DAY, C. **Developing teachers: the challenges of lifelong learning.** Londres: Falmer, 1999.

DESCARTES, R. **Discurso do método.** Tradução Maria E. G. Pereira, São Paulo: Martins Fontes, 1996.

DESCARTES, R. **Os pensadores**. Tradução de Guinsburg e Bento Prado Júnior, 1. ed., São Paulo: Abril, 1973.

DUBINSKY, E., et all. **Calculus Students Intuition of Area and the Definite Integral: Chopping Up or Sweeping Out**, Collegiate Mathematics Journal. 2000. Disponível em <<http://www.math.kent.edu/~edd/Integral1.pdf> >. Acesso em: 15 mar. 2004.

EDWARDS, C. H. **The historical development of the calculus**. New York: Springer-Verlag, 1979.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues, 2 ed., Campinas, UNICAMP, 2004.

FAUCONIER, G.; TURNER, M. Conceptual Integration and Formal Expression. In: JOHNSON, M. (ed.), **Journal of Metaphor and Symbolic Activity**, v. 10, n. 3, 1995.

_____. **Metaphor, Metonymy, and Binding**. Editado por Antonio Barcelona, Topics in English Linguistics, 1998.

FIGUEIREDO, V. L. X, et al. **Cálculo com aplicações: atividades computacionais e projetos**. Campinas – SP: UNICAMP/IMECC, 2005.

FIORENTINI, D. et. al. Formação de professores que ensinam matemática. **Educação em Revista**. Belo Horizonte: UFMG, n. 36, p. 137-160, 2002.

_____. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. **Tendências em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, Org. Marcelo Borba e Jussara Araújo, n. 9, p. 47-76. 2004.

FRANT, J. B. Tecnologia, corpo, linguagem: cognição. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2001, Paraná. **Anais...** Paraná: Universidade Federal do Paraná, 2001. p. 121-134.

_____; ACEVEDO, J.; FONT, V. Cognição corporificada e linguagem na sala de aula de matemática: analisando metáforas na dinâmica do processo de ensino de gráficos de funções. **Boletim GEPEM** - Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, Rio de Janeiro, n. 46, p. 53-68, jan/jun. 2005.

GASKELL, G. Entrevistas individuais e grupais. In: BAUER, M.; GASKELL, G. **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som: um manual prático**. Rio de Janeiro: Vozes, 2002.

GONÇALVES, T. O. **Formação e Desenvolvimento Profissional de Formadores de Professores**: o caso de professores de matemática da UFPA. 2000. 206p. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) — FE, Unicamp, Campinas (SP), 2000.

GRANGER, G. G. **Os pensadores: Descartes (Introdução)**. Tradução de Guinsburg e Bento Prado Júnior, 1 ed., São Paulo: Abril, 1973.

GRADY, J.; OAKLEY, T.; COULSON, S. Blending and Metaphor. In: STEEN, G.; GIBBS, R. (eds.) **Metaphor in cognitive linguistics**. Philadelphia: John Benjamins, 1999. Disponível em <http://cogweb.ucla.edu/CogSci/Grady_99.html>. Acesso em: 13 dez. 2007.

HONG, Y.; THOMAS, M. Using the Computer to improve Conceptual Thinking in Integration. In. **PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION**, 21., 1997, Finlândia, **Proceedings...**Finlândia: University of Helsinki, 1997. v 3, p. 81-88.

JAWORSKI, B. Learning in practice from a study of practice. In: International Commission on Mathematical Instruction, 15., 2005, Brasil. **Anais eletrônicos...**Brasil: Águas de Lindóia, 2005. Disponível em <

http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/Jaworski_Barbara_ICMI15_paper.doc.
Acesso em: 25 jul. 2005.

KAHANE, J. P. **L'Enseignement des sciences mathématiques**. Commission de Réflexion sur l'enseignement des mathématiques, Paris: Odile Jacob, 2002.

KOGA, M. T. **Uma análise no discurso de alguns professores de cálculo diferencial e integral do curso de licenciatura em matemática**. 1998. 167p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

LAKOFF, G.; JOHNSON, M. **Metáforas da vida cotidiana**. Coord. da tradução Mara Sophia Zanotto, Campinas, SP: Mercado de letras; São Paulo: Educ, 2002.

_____. **Metaphors We Live By**. Chicago: The University of Chicago, 1980.

_____. **Philosophy in the flesh: the embodied mind and its challenge to western thought**. New York: Basic Books, 1999.

_____.; NÚÑEZ, R. **Where Mathematics comes from**. New York: Basic Books, 2000.

LAMÔNACO, et al. Desenvolvimento de conceitos: o paradigma das descobertas. **Psicologia Escolar e Educacional**, Campinas –SP, v. 4, n. 2, p. 31-39, 2000.

LINS, R. C. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: concepções & perspectivas**, São Paulo: Unesp, 1999. p. 75-94.

_____. Categories of everyday life as elements organising mathematics teacher education and development projects. In: International Commission on Mathematical Instruction, 15., 2005, Brasil. **Anais eletrônicos...**Brasil: Águas de

Lindóia, 2005. Disponível em <<http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/strand2.html>>. Acesso em: 25 jul. 2005.

MARÍAS, J. **Cara y cruz de la electrónica**. Madrid: Espasa-Calpe, 1985.

MARLI, A. (org.), et al. **O papel da pesquisa na formação e na prática dos professores**. Série Prática Pedagógica, 3 ed., Campinas, SP: Papyrus, 2001.

MARTIN-GONZALEZ, A. S.; CAMACHO, M. The Improper Integral. An Exploratory Study With First-Year University Student. In. INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE TEACHING OF MATHEMATICS, 2., 2002, Grécia. **Anais eletrônicos...**Grécia: Universidade de Creta, 2002. Disponível em: <http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/ICTM2_Proceedings_Table_of_Contents.html>. Acesso em: jul. 2003.

MAWHIN, J. **L'éternel retour des sommes de Riemann-Stieltjes dans l'évolution du calcul integral**. v. 70, p. 345-364, 2001.

MELO, J. M. R. **Conceito de Integral: Uma Proposta Computacional para seu Ensino e Aprendizagem**. 2002. 180p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

MILES, M. B.; HUBERMAN, A. M. **Qualitative data analysis: a sourcebook of new methods**. 8 ed. California, 1988.

MORELATTI, M. R. M. **Criando um ambiente construcionista de aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral I**. São Paulo, 2001. Tese (Doutorado em Educação) – Programa: Supervisão e Currículo, PUCSP, São Paulo, 2001.

MORIN, E. **Ciência com consciência**. Tradução: Maria D. Alexandre e Maria A. S. Dória, 4 ed., Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2000.

NAJMANOVICH, D. **O Sujeito Encarnado, questões para pesquisa no/do cotidiano.** Rio de Janeiro: DP&A, 2001.

NÚÑEZ, R. E. et al. Embodied Cognition as grounding for situatedness and context in Mathematics Education. **Educational Studies in Mathematics**, Netherlands; v. 39, n. 1-3, p. 45-65, 1999.

_____. Mathematical idea analysis: What Embodied Cognitive Science can say about the Human Nature of Mathematics? In. **PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION**, 24., 2000, Hiroshima-Japão, **Proceedings...** Hiroshima-Japão, 2000. v 1, p. 1-22.

_____. Cognição humana e continuidade na matemática moderna. **Vetor NETECLEM**, Campos de Goytacazes: FAFIC, Trad. Janete Bolite Frant, v 1, p. 9-26, 2003.

_____. **Conceptual Metaphor and the Cognitive Foundations of Mathematics: Actual Infinity and Human Imagination.** Departamento de Ciência Cognitiva, Universidade da Califórnia, San Diego, USA. Disponível em: <http://www.cogsci.ucsd.edu/~nunez/web/SingaporeF.pdf>. Acesso em: 05 mar. 2005.

ORTIZ, J. R. El concepto de infinito. **Boletín**, Venezuela, v1, n. 2, 1994.

PERELMAN, C.; OLBRECHTS-TYTECA, L. **Tratado da Argumentação.** Tradução: Maria Ermantina G. G. Pereira, São Paulo: Martins Fontes, 1996.

PERRENOUD, P. **Enseigner: agir dans l'urgence, décider dans la incertitude.** ESF, Paris, 1999.

PONTE, J. P. **Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de Matemática.** Portugal: Universidade de Lisboa, 1995. Disponível em: [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/95-Ponte\(Luso\).rtf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/95-Ponte(Luso).rtf). Acesso em: 10 abr. 2004.

_____. **O conhecimento profissional dos professores de matemática.** Relatório final do projeto “O saber dos professores: concepções e práticas, Lisboa, 1997.

_____. **Didáticas específicas e construção do conhecimento profissional.** In: IV Congresso da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, Universidade de Aveiro, 18-21, fev. 1998.

_____. OLIVEIRA, H. Remar contra a maré: a construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. **Revista de Educação.** v XI, n.2, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Portugal, 2002.

_____. Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), **Reflectir e investigar sobre a prática profissional.** p. 5-28 Lisboa: APM, 2002. Disponível em: < <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/>>. Acesso em: 28 ago. 2004.

_____. **A investigação sobre a própria prática.** In: ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 27., GT 19 2004, Minas Gerais-Caxambú.

_____. **Investigar a sua Prática. Reflexão sobre uma experiência de trabalho colaborativo.** Conferência promovida pelos grupos de pesquisas PRAPEM, HIFEM, PSIEM e GEPEC, da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, mar. 2004.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de idéias e raciocínios matemáticos de estudantes. **Bolema,** Rio Claro: Unesp, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, n. 21, ano 17, 2004.

RADFORD, L. **The object of representations: between wisdom and certainty.** Edited by Fernando Hitt, 2002.

REIS, F. S. **A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.** 2001. 302p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, 2001.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica.** 2003. 450p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

ROBUTTI, O. Real and Virtual Calculator: From Measurements to definite integral. In. CONFERENCE OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 3., 2003, Itália, **Proceedings...**Itália: Università di Torino, 2003.

ROSCH, E. Reclaiming Concepts. **Journal of Consciousness Studies.** Editado por Rafael Núñez e Walter Freeman, nº 11-12, p. 61-77, 1999.

SAD, L. A. **Cálculo Diferencial e Integral:** uma abordagem epistemológica de alguns aspectos. 1998. 371p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

SARAIVA, M., & PONTE, J. P. O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. **Quadrante**, Portugal, n. 12(2), p. 25-52, 2003.

SCHÖN, D. A. **Educando o profissional reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem.** Tradução: Roberto C. Costa, Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

SCUCUGLIA, R. **A Investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com Calculadoras Gráficas.** 2006. 145p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro – SP, 2006.

SERRAZINA, L. Reflexão, conhecimento e práticas letivas em matemática num contexto de reforma curricular no 1º ciclo. **Quadrante**, Portugal, 1999.

_____. **A reflexão e o professor como investigador**. Seminário realizado na PUC/SP, São Paulo, 2004.

SILVA, B. A. Contrato Didático. In: FRANCHI, et. al. **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: Educ, 2002.

SILVA, C. A. **A noção de Integral em livros didáticos e os registros de representação semiótica**. 2004. 157p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

SOUZA, JR. Trabalho coletivo na universidade: trajetória de um grupo de professores de cálculo mediado pelo computador. In: FIORENTINI, D. (Org.) **Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos, novos olhares**. Campinas-SP: Mercado de Letras, 2003.

TALL, D. Visualizing Differentials in Integration to Picture the Fundamental Theorem of Calculus. **Mathematics Teaching**, n. 137, p. 29-32, 1991.

_____. Using technology to support an embodied approach to learning concepts in Mathematics. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 1., 2002, Rio de Janeiro, **Anais...**Rio de Janeiro: Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2002.

TALMY, L. **Toward a Cognitive Semantics**. v 1. Cambridge: The Mit Press, 2000.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. 3 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

THIOLLENT, M. **Metodologia da pesquisa-ação**. 13 ed. São Paulo: Cortez, 2004.

TURÉGANO, P. Concept-Images of the Definite Integral Identified in Secondary School Students (14-16 anos). In. PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 21., 1997, Finlândia, **Proceedings...**Finlândia: University of Helsinki, 1997. v 1, p. 267.

ANEXO I – As Tarefas

Tarefa 1: A área do círculo

Objetivos: Explorar as concepções dos alunos a respeito do cálculo da área do círculo por aproximação das áreas de polígonos inscritos, considerando elementos históricos e instigar a discussão sobre o infinito atual e o infinito potencial.

Software Utilizado: *Cabri-Géomètre II.*

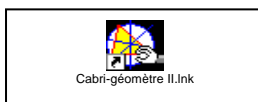
A área do círculo

Segundo Eves (1953), Antífon, o Sofista (430 a.C.) teria antecipado a idéia de que, por sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular inscrito num círculo, a diferença entre a área do círculo e a área do polígono exaurir-se-ia. A crítica que surgiu contra esse argumento sustentava-se no princípio de que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente e que, assim, o processo de Antífon jamais esgotaria a área do círculo.

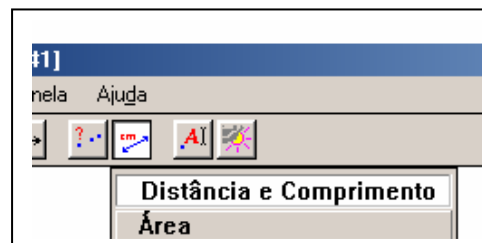
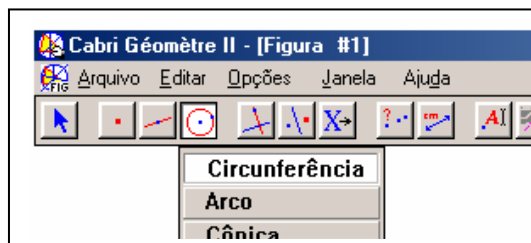
a) Para visualizar essa idéia de Antífon, utilizaremos o software Cabri Géomètre

II:

- Inicie o Cabri II, com um duplo clique no ícone:

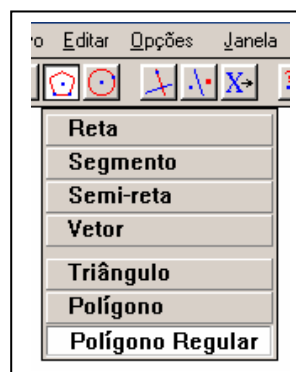
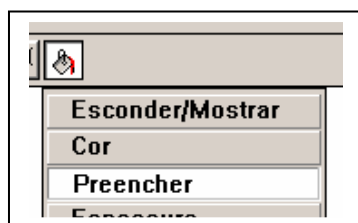


- Construa cinco circunferências, todas com raio 2,20cm, usando as ferramentas *circunferência* e *distância e comprimento*.

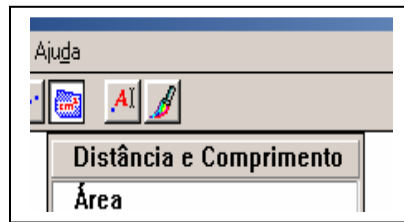


- Construa polígonos regulares inscritos com, respectivamente, 5 lados, 8 lados, 12 lados, 18 lados e 30 lados:

- Preencha a área dos polígonos com a cor preferida:



- b) Encontre a área de cada um dos cinco polígonos regulares inscritos, usando a opção *área* do Cabri II:



Nº Lados n	5	8	12	18	30
Área $A(n)$					

- c) A área do polígono de 30 lados coincide com a área do círculo? Sugestão: Aumente o tamanho da figura para responder essa questão.

- d) Como a opção *polígono regular* do Cabri II, possibilita a construção de um polígono com, no máximo, trinta lados; podemos continuar calculando a área de cada polígono regular pela fórmula $A(n) = n \cdot r^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$, onde n é o número de lados do polígono e $r = 2,20 \text{ cm}$. Utilizando essa fórmula temos os seguintes resultados:

Nº Lados n	40	50	60	80	100
Área $A(n)$	15,14	15,16	15,18	15,18	15,19

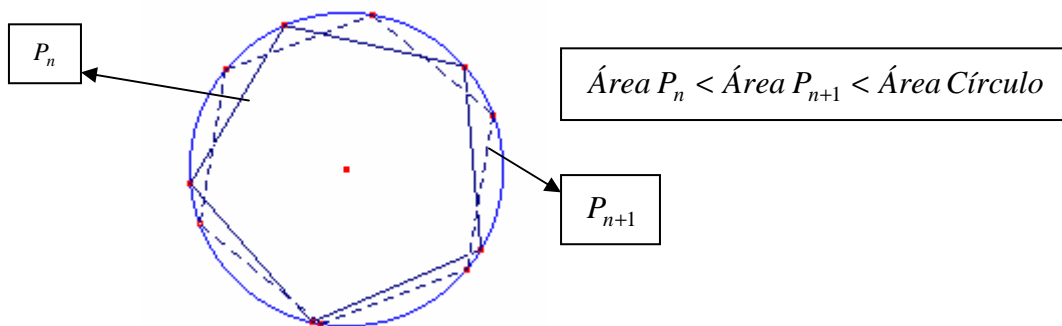
- e) O que acontece com o valor da área dos polígonos conforme se aumenta o número de lados? Será que a área do polígono de 100 lados coincide com a área da círculo? Justifique.

- f) Conforme a crítica à idéia de Antífon, podemos continuar aumentando indefinidamente o número de lados do polígono e esse processo jamais esgotaria a área do círculo. Você concorda com esse argumento? Justifique.

- g) Após resolver essa atividade, dois alunos hipotéticos, chamados João e Beatriz responderam a questão f) usando as seguintes justificativas:

A Justificativa de João:

Sim, concordo, pois independente do número de lados, sempre haverá espaços entre o polígono regular inscrito e a circunferência. Para qualquer polígono regular inscrito P_n com n lados sempre existirá um polígono regular inscrito P_{n+1} com $n+1$ lados que terá área maior que a área de P_n e menor que a área do círculo.



A justificativa de Beatriz:

Não, não concordo, pois vimos que a área dos polígonos regulares pode ser calculada pela fórmula $A(n) = n \cdot r^2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ e fazendo a substituição

$$x = \frac{\pi}{n} \text{ temos}$$

$$\frac{\pi}{x} \cdot r^2 \cdot \text{sen}(x) \cdot \cos(x) = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot \cos(x),$$

quando $n \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot \cos(x) = \pi \cdot r^2,$$

e $\pi \cdot r^2$ é exatamente a área do círculo.

Portanto quando o número n , de lados do polígono, tende ao infinito ($n \rightarrow \infty$), temos que a área do polígono inscrito tem limite igual a área do círculo que é $\pi \cdot r^2$.

Comente as respostas de João e Beatriz!

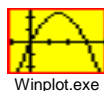
Tarefa 2: A área sob o gráfico de uma função

Objetivo: Investigar as concepções dos alunos sobre o cálculo da área entre o eixo x e o gráfico da função $f(x) = x^2 + 1$, $x \in [0,2]$, por aproximação de áreas de retângulos e sobre a independência do método utilizado.

Software Utilizado: *Winplot* – Versão em Português (*Free*)

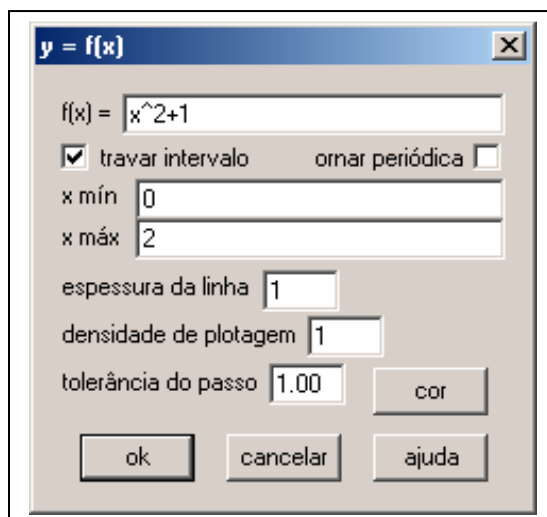
1ª Parte

1) Para abrir o *Winplot*, dê um duplo clique no ícone:



2) Para abrir a tela de trabalho clique em **Janela – 2 dim F2**.

3) No menu superior escolha a opção **Equação → 1.Explicita F1**, e complete a seguinte caixa conforme as indicações:



4) Você pode usar a opção **PageDown** para visualizar melhor o gráfico de f na janela $[0,2] \times [0,5]$.

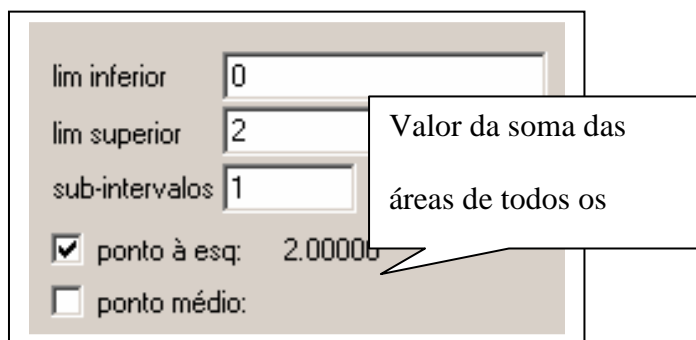
5) No menu superior escolha a opção **Um → Medidas → Integrar F7**

Limite Inferior

Limite Superior

Subintervalos

Ativar somente a opção **ponto à esquerda** e clique em **definida**, o número que aparece na frente da opção ponto à esq: é o valor da soma das áreas de todos os retângulos:



Escolha também a **cor** de sua preferência e complete a tabela abaixo, observando a figura:

Retângulo	Medida da Base	Medida da Altura	Área
1º			
Área Total			

Qual o valor da soma das áreas de todos os retângulos, fornecido pelo Winplot? _____

Ativar, agora, a opção **ponto à direita** (desative **ponto à esquerda**), clique em **definida** e complete a tabela abaixo:

Retângulo	Medida da Base	Medida da Altura	Área
1º			
Área Total			

Qual o valor da soma das áreas de todos os retângulos, fornecido pelo Winplot? _____

6) Em **sub-intervalos** mude de **1** para **2**, e clique em **definida**

Complete a tabela abaixo usando a opção **Ponto à esquerda**:

Retângulo	Medida da Base	Medida da Altura	Área
1º			
2º			
Área Total			

Qual o valor da soma das áreas de todos os retângulos, fornecido pelo Winplot? _____

Complete a tabela abaixo usando agora a opção **Ponto à Direita**:

Retângulo	Medida da Base	Medida da Altura	Área
1º			
2º			
Área Total			

Qual o valor da soma das áreas de todos os retângulos, fornecido pelo Winplot? _____

7) Em **sub-intervalos** mude de 1 para 4,

Complete a tabela abaixo usando a opção **Ponto à esquerda**:

Retângulo	Medida da Base	Medida da Altura	Área
1º			
2º			
3º			
4º			
Área Total			

Qual o valor da soma das áreas de todos os retângulos, fornecido pelo Winplot? _____

Complete a tabela abaixo usando agora a opção **Ponto à Direita**:

Retângulo	Medida da Base	Medida da Altura	Área
1º			
2º			
3º			
4º			
Área Total			

Qual o valor da soma das áreas de todos os retângulos, fornecido pelo Winplot? _____

8) Em **sub-intervalos** entre com os seguintes números de retângulos e marque a área fornecida pelo Winplot, usando primeiro a opção **Ponto à Esquerda** e depois a opção **Ponto à Direita**

Nº retângulos	5	10	12	15
Área (Ponto à esq:)				

Área (Ponto à dir:)				
---------------------	--	--	--	--

Nº retângulos	20	50
Área (Ponto à esq:)		
Área (Ponto à dir:)		

9) O que você observa em relação à área total (soma das áreas dos retângulos) quando se aumenta o número de retângulos, considerando os cálculos por ponto à esquerda e por ponto à direita?

10) Com cinquenta retângulos a soma das áreas dos retângulos coincide com a área abaixo do gráfico de f ? Justifique. Você pode usar as opções **PageDown** e **PageUp**.

11) Em **sub-intervalos** digite agora os seguintes números: 200, 400, 700 e 1000 e clique em **definida**. Complete a tabela abaixo e responda: o que você observa em relação à visualização e em relação à parte numérica?

Nº retângulos	200	400	700	1000
Área (Ponto à esq:)				
Área (Ponto à dir:)				

12) Com 1000 retângulos, a soma das áreas dos retângulos coincide, agora, com a área abaixo do gráfico de f ? É possível calcular exatamente a área abaixo do gráfico de f ? Justifique. Você pode ainda usar a opção `PageDown`

13) Se você acha que é possível encontrar a área entre o gráfico de f e o eixo x por esse processo, qual o número de retângulos necessários? Justifique.

2ª Parte

1) Para a função $f(x) = x^2 + 1$, $x \in [0,2]$, vejamos o que ocorre nos diferentes processos. Em `sub-intervalos` digite os seguintes números: 100, 500, 1000, 10000 e 100000 e complete a tabela abaixo, usando 4 casas decimais após a vírgula.

	100	500	1000	10000	100000
Ponto à esq:					
Ponto Médio:					
Ponto à dir:					
Trapezoidal:					
Parabólico:					
Aleatório:					

- 2) O que acontece com os valores numéricos das áreas, nos diferentes processos?

- 3) Qual a relação entre o cálculo da área e o processo utilizado?

- 4) Calcule a área entre o gráfico de $f(x) = x^3$ e o eixo $x \in [0,2]$.

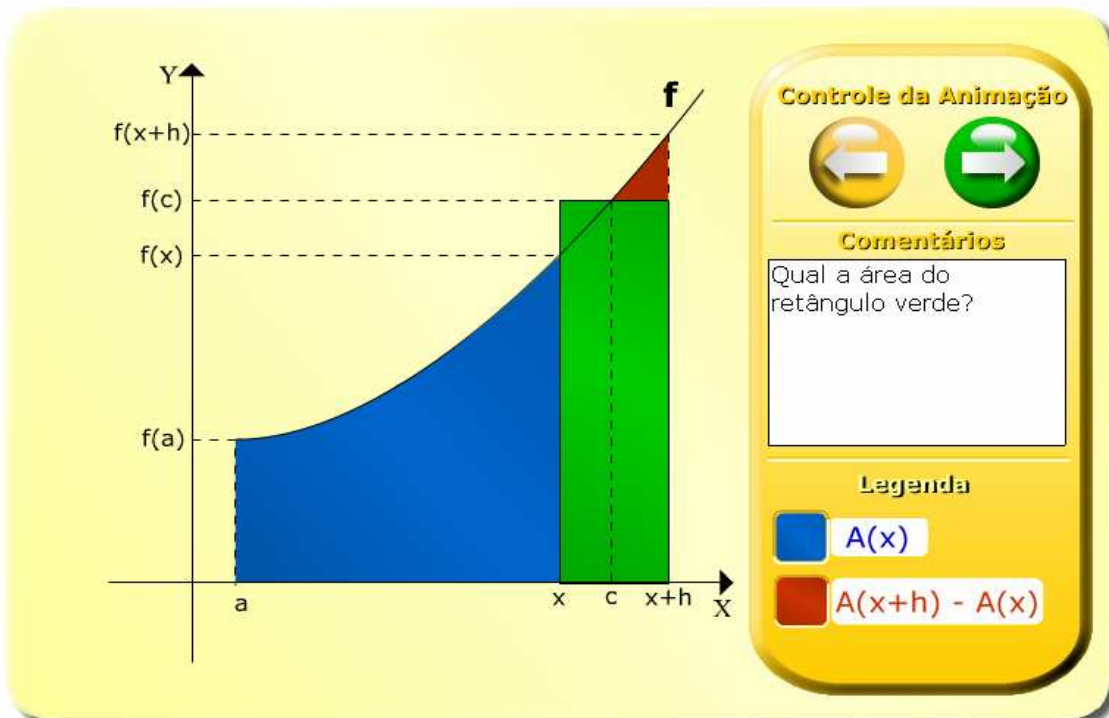
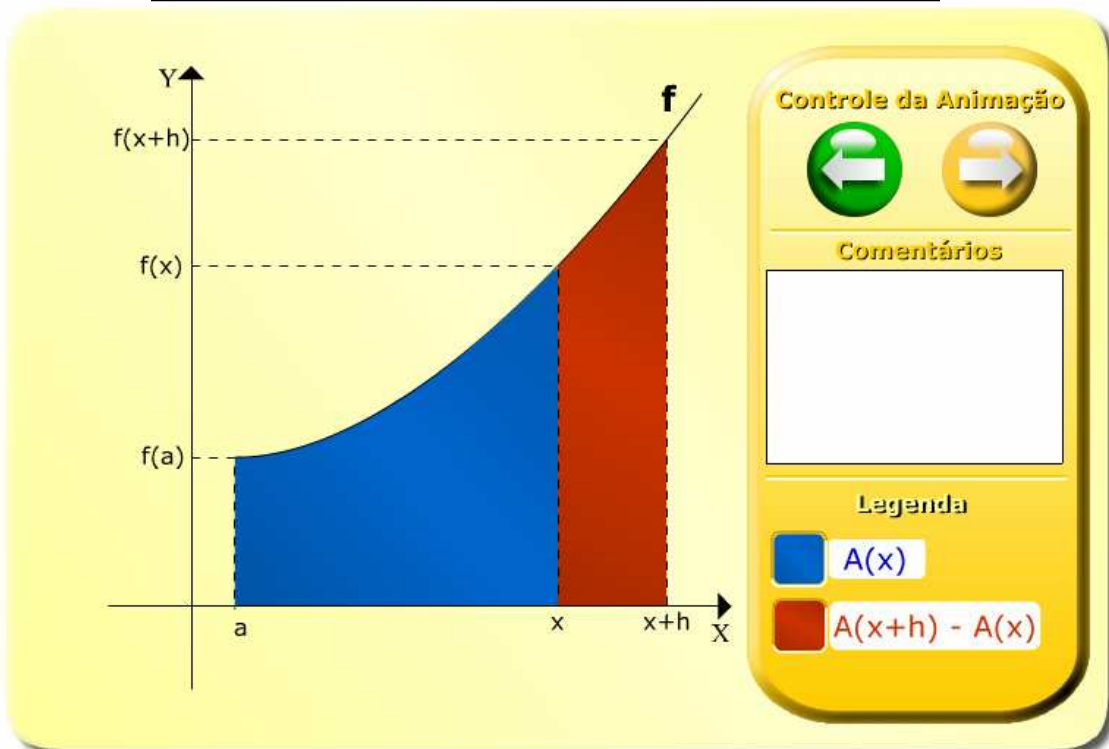
Tarefa 3: A derivada da área.

Objetivo: Investigar as concepções dos alunos sobre a relação entre o conceito de área e de derivada e possibilitar uma interpretação geométrica para o primeiro Teorema Fundamental do Cálculo.

Programa Utilizado: *Flash*.

A Derivada da Área

$A(x) = \text{área sob o gráfico de } f \text{ de } a \text{ até } x$



Observe que a área $A(x+h) - A(x)$ é aproximada pela área do retângulo verde, assim:

$$A(x+h) - A(x) \cong f(c).h$$

ou

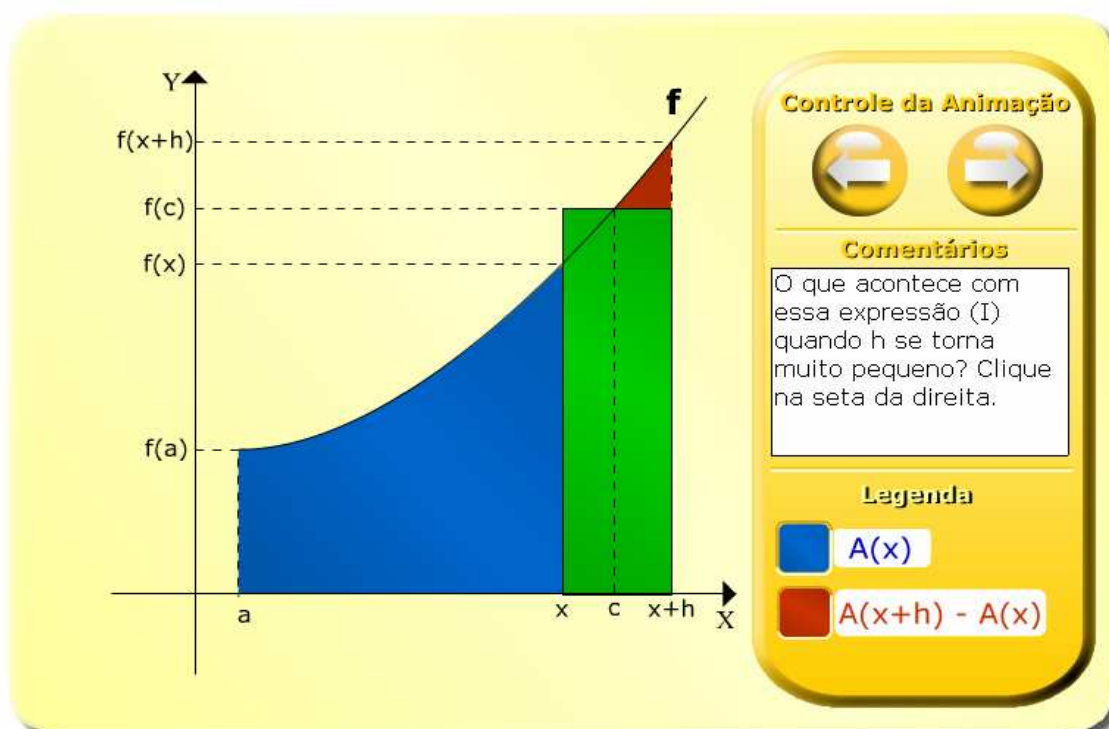
$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \cong f(c) \quad (\text{I})$$

O que acontece com essa expressão (I) quando h se torna muito pequeno?

- Para auxiliar na resposta dessa questão usaremos uma simulação feita no Flash.
- Inicie a animação com um duplo clique em:



Area_05012005



Ao clicar na seta da direita, a animação diminui gradativamente o retângulo verde correspondendo à diminuição do valor de h .

O que acontece com $f(c)$ quando h tende a zero?

O que acontece com o quociente abaixo quando h tende a zero?

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \cong f(c)$$

Qual a condição sobre a função f ?

A Tarefa 4. O TFC

Objetivo: Investigar as interpretações dos alunos sobre o segundo Teorema Fundamental do Cálculo.

Parte 1:

Numa aula de Cálculo I o professor pediu a seus alunos que calculassem a integral definida $\int_0^2 x^2 + 1 \, dx$. Dois alunos João e Beatriz recorreram aos seguintes procedimentos:

Beatriz:

Para esse cálculo podemos usar o segundo teorema fundamental do cálculo:

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, onde $F'(x) = f(x)$, ou seja, onde F é uma primitiva de f .

$$\int_0^2 x^2 + 1 \, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} + 2 \right) - \left(\frac{0^3}{3} + 0 \right) = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}$$

João:

João fez os gráficos das funções $F(x) = \frac{x^3}{3} + x$ e de $f(x) = x^2 + 1$, no intervalo $[0,2]$.

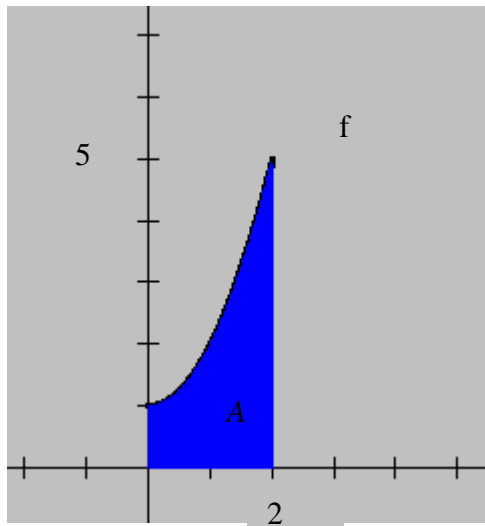


Figura 1

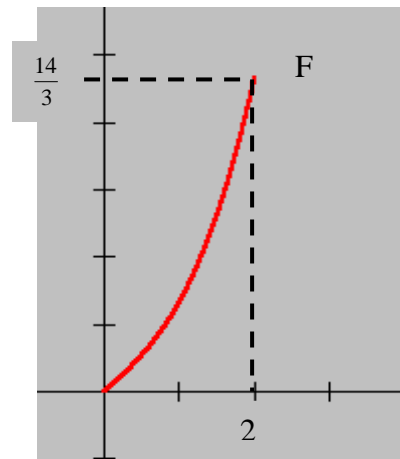


Figura 2

Observando os gráficos, João fica confuso e não consegue entender qual a relação entre a figura 1 e a figura 2? Como você explicaria a João a relação entre a área A e a variação $F(2) - F(0)$?

Parte 2:

a) Considere o enunciado: A área sob o gráfico de uma função f é a variação de uma primitiva F . Em símbolos:

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, onde $F'(x) = f(x)$. Neste enunciado, pode-se trocar a

palavra “primitiva” por “função” e a palavra “função” por “derivada”? Que enunciado se obtém? Qual a nova fórmula? (BALDINO, 1998, p. 113)

b) Considere os gráficos da função F e de sua derivada F' - A área sob o

gráfico da derivada F' é a integral $A = \int_a^b F'(x)dx$. Interprete o integrando $F'(x)dx$

no gráfico de F . Você pode concluir que $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$?

ANEXO II – Termo de Compromisso Ético

PUC-SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Campus da Marquês de Paranaguá

Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

TERMO DE COMPROMISSO

Este termo tem como objetivo esclarecer os procedimentos de nossa pesquisa, principalmente no que tange a utilização dos dados nela coletados.

O material coletado - as atividades realizadas, as gravações de vídeo, as transcrições, os registros escritos - servirá de base para pesquisas que procuram entender melhor o processo de produção de significados em sala de aula de cursos de Cálculo. O acesso aos registros em vídeos será exclusivo do grupo de pesquisa e só poderá ser apresentado com autorização dos participantes, as transcrições e registros escritos terão seus nomes trocados por pseudônimos preservando a identidade dos sujeitos em sigilo. Nas pesquisas que utilizarem o material coletado não será feita menção à Instituição onde o curso foi realizado para a preservação da identidade do grupo.

As informações provenientes da análise desse material poderão ainda ser utilizadas pelos pesquisadores em publicações e/ou eventos científicos.

São Paulo, 15 de junho de 2005

Janete Bolite Frant – Orientadora da Pesquisa

Antonio Luis Mometti

Cláudio D'Allanese

Sujeito da Pesquisa

**ANEXO III – As Transcrições dos Encontros de
Professores.**

ANEXO III – Transcrições dos Encontros de Professores.

Com o objetivo de preservar a identidade dos sujeitos pesquisados utilizaremos as siglas P1, P2, P3, P4 e P5. (Utilizar a paginação centralizada)

Encontro 1 – 17/08/2004

Início: 17h30

Término: 18h30

Professores Participantes desse encontro: P1, P2 e P3.

Objetivo: Levantar o perfil dos participantes e investigar as opiniões e concepções dos professores sobre a tarefa 1, que envolve os conceitos de infinito atual e infinito potencial.

Tópico guia para o primeiro encontro de professores de Cálculo:

1. Apresentação dos professores participantes

- Formação
- Disciplinas que leciona
- Por que aceitou participar dos encontros

2. Minha apresentação

O objetivo desses encontros é refletir sobre o ensino do Cálculo Integral. Apresentarei algumas tarefas que foram realizadas e filmadas numa turma de Pós Graduação em Educação Matemática. Espero que vocês se sintam à vontade para apresentar as suas experiências, os pontos que julgam que deram certo, bem como aqueles que “foram mal” e possamos juntos refletir sobre nossas atuações.

Resumidamente a minha trajetória é a seguinte: Sou formado em Licenciatura Matemática pela Unesp – Rio Claro, fiz Mestrado em Matemática pela Usp – São Carlos, atualmente faço Doutorado em Educação Matemática na PUC-SP. A pesquisa que estou desenvolvendo no Doutorado tem por objetivo investigar e analisar como a discussão e a reflexão, no âmbito de um grupo de professores de Cálculo, podem contribuir para o desenvolvimento profissional dos participantes desse grupo, partindo do que os professores efetivamente falam sobre a sua prática, em particular sobre suas aulas de Integral de Riemann de função real de uma variável.

Falo, resumidamente, como são as minhas aulas sobre Integral. (livros adotados, tarefas, organização, tecnologia,...).

1 **3. As aulas sobre Integral dos professores**
 2 **participantes**

3 Os professores participantes falam,
 4 resumidamente, como são as suas aulas sobre Integral.
 5 (livros adotados, tarefas, organização, tecnologia,...).
 6

7 **4. A tarefa 1 (ver anexo I)**

8 Esta primeira tarefa foi aplicada no dia 08 de junho
 9 de 2004 para uma turma de Pós Graduação em Educação
 10 Matemática. A aula foi no laboratório de informática,
 11 utilizamos o *Software Cabri Géomètre II*, a turma foi
 12 dividida em duplas e uma dupla foi filmada durante todo o
 13 desenvolvimento da tarefa. Após o término da resolução
 14 da tarefa por todas as duplas, os alunos vão à lousa e
 15 expõem as conclusões a que chegaram, sendo esta parte
 16 da aula também filmada em fita VHS.

17 Preciso das sugestões e das críticas de vocês
 18 sobre essa tarefa.

19
 20
 21 **Transcrição:**

22 (0:5:27) **P1** - Uso os livros Guidorizzi e Boulos na
 23 Bibliografia básica, estou tentando mudar um pouco, mas
 24 ainda tem bastante do ensino tradicional, tem uma
 25 seqüência que eu sigo na minha aula de integral, antes
 26 tem que ter visto derivada, tem que ter visto algumas
 27 regras de derivação, depois primitiva, to usando
 28 tecnologia, tenho um trabalho com o winplot, que uso na
 29 parte de integral, e por incrível que pareça o que os
 30 alunos valorizam, gostam e tem facilidade são
 31 exatamente com as técnicas de integração, com as
 32 fórmulas, com as regras, mas ai fica meio sem sentido.

33 (0:6:18) **P3** - Perde o conceito.

34 (0:6:23) **P1** - De acordo com os artigos que eu li os aluno
 35 não fazem conexão nenhuma entre conceito e o teorema
 36 fundamental, entre o conceito e aplicações, to querendo
 37 entender melhor esse processo, como funciona e avançar
 38 principalmente em relação a linguagem com que o
 39 professor fala e se isso pode ajudar ou não no processo
 40 de ensino e aprendizagem.

41 (0:7:07) **P3** - O *Mathematica* é melhor que *Winplot*?
 42 [interesse pela tecnologia]

43 (0:7:45) **P3** - Quando eu introduzi o conceito de integral
 44 eu comecei pelo método tradicional, definindo a primitiva,
 45 a integral indefinida, para depois a integral definida, só
 46 que para esse ano pensei um pouco se seria possível
 47 começar pela integral definida, falando de área e a partir
 48 do conceito de área abaixo de uma curva, da partição,
 49 dos retângulos, deduzir a integral definida e a partir da
 50 integral definida falar das técnicas de integração,

1 primitivas, ou seja, mostrar aquilo que eu acho que surgiu
 2 historicamente primeiro a integral definida, o cálculo de
 3 área abaixo de uma curva e depois as técnicas de cálculo
 4 para resolver a integral definida e aí a ligação entre as
 5 duas é a ponte pelo TFC.

6 (0:9:27) **P2** - Comecei da maneira tradicional, primeiro a
 7 integral indefinida e depois a integral definida, mas
 8 também acho que começar da integral definida é
 9 interessante, já li algum livro que fez isso.

10 (0:10:19) **P1** - Estou fazendo uma reflexão sobre a minha
 11 prática, na minha pesquisa, estou tentando investigar a
 12 minha prática e melhorá-la e para isso preciso conversar,
 13 não adianta refletir sozinho, é a primeira vez que sento
 14 com alguém para conversar assim.

15 (0:10:45) **P3** - Acho que um dos problemas da educação é
 16 de fato não haver esse diálogo, acho que quando
 17 acontece esse diálogo, a gente pode trocar experiências,
 18 e as vezes a gente tá com receio, você até pensa em
 19 fazer, você fica com um pé atrás, você não sabe se aquilo
 20 vai funcionar, você não quer colocar uma sala em jogo né,
 21 então quando você tem um meio de discussão em aberto
 22 você está trabalhando com pessoas que mexem com
 23 aquilo, você se sente mais seguro em dar um passo, você
 24 se sente mais seguro em arriscar...

25 (0:11:24) **P3** - No cálculo para engenharia o conceito de
 26 limite se passa de forma muito superficial, mas quando
 27 você vai trabalhar com o conceito de integral, você faz um
 28 retângulo, você faz o delta x tender a zero, pra eles aquilo
 29 não faz sentido, pra eles o que faz sentido é você
 30 trabalhar com algo muito pequeno, mas não tendendo a
 31 zero, são formas diferentes de introduzir, não sei se pra
 32 matemático é específico ou pra engenheiro, mas acho
 33 que pra mente humana vale como regra geral, para essa
 34 abstração do delta x tender a zero, para dizer aquilo que
 35 ficou muito pequeno, você representa pelo dx e aquilo é a
 36 base do retângulo e a altura do retângulo é $f(x)$, então eu
 37 acho que são os conceitos né, que realmente se forem
 38 discutidos, acho que podem levar a uma melhora.

39

40 **A tarefa 1. A área do círculo** [Trechos dos diálogos
 41 entre os professores sobre a tarefa 1 – cálculo da área do
 42 círculo pela aproximação da área de polígonos inscritos]

43

44 (0:19:22) **P2** - O problema tá nesse aumentando
 45 indefinidamente, se fosse um número finito, pode ser um
 46 número muito próximo mas não é a área, agora quando
 47 você manda pro infinito o número de lados do polígono, aí
 48 no limite coincide.

49 (0:23:53) **P3** - A justificativa de Beatriz é matemática, são
 50 as regras de limite e acaba sendo a demonstração de que

1 de fato alcança a área do círculo, agora a justificativa de
2 João é plausível, é difícil de você argumentar com ele,
3 você acaba falando de limite que vai tender ao infinito,
4 mas não é isso que ele está argumentando, ele ta
5 argumentando que entre um e outro sempre existem um,
6 de fato também ocorre.

7 (0:24:20) **P2** - Eu ia tentar convencer.

8 (0:24:25) **P3** - Você ia tentar enganar né [risos dos três]

9 (0:24:32) **P2** - O problema é como dizer pra ele que não,
10 que no infinito vai coincidir sim, essa é a coisa mais
11 complicada, conseguir convencer o aluno.

12 (0:25:20) **P3** - O problema todo é como sempre o infinito.

13 (0:25:26) **P1** - Vocês já ouviram falar em infinito potencial
14 e infinito atual? [P1 e P2 dizem que não]

15 (0:27:07) **P3** - Na verdade na aula você já prevendo o
16 problema que vai acontecer algumas vezes você mesmo
17 dá aquela ajeitada, você em algumas situações, você faz
18 com que os alunos induzam o resultado não é, na sua
19 exposição de aula.

20 (0:27:24) **P2** - Você já faz direto isso aqui e não dá nem
21 tempo pro aluno pensar nisso, o ótimo é passar por aqui,
22 mesmo que você não consiga responder pro aluno.

23 (0:29:36) **P3** - É uma questão delicada principalmente a
24 parte que dá a fundamentação para isso é análise, a parte
25 de demonstração isto a gente não tem condição de
26 transmitir, o cálculo foi o problema de séculos, ninguém
27 aceitava essa história de tender a zero, dar um acréscimo,
28 fazer tender a zero, e chega na derivada, a
29 fundamentação disso veio com a análise, isso é o que
30 sustenta realmente as definições do cálculo e isso a gente
31 não pode passar no começo,... acho que no cálculo a
32 idéia é começar pela intuição.

33 (0:35:35) **P3** - As vezes tenta deixar a coisa tão simples
34 que a gente acaba enforcando a matemática.

35 (0:36:06) **P3** - Eu fui comentar com a turma essa história
36 do limite do delta x tendendo a zero, ai você escreve lá o
37 $f(x)dx$ aquilo é a base do retângulo e o $f(x)$ é a altura ok,
38 mas não vai sair por ai dizendo que na integral é o $f(x)$
39 vezes o dx , aquilo lá é uma notação, também não é? Isto
40 me preocupa, eu falo isso porque eu sei que eles vão
41 entender melhor pelo menos o conceito, eu sei que eles
42 vão entender aquele símbolo da integral, pra eles vai ter
43 uma visão melhor o S eu to somando áreas dos
44 retângulos, o que me dá a base dos retângulos é o dx e o
45 que me dá a altura do retângulo é o $f(x)$, mas espera ai,
46 isso é uma notação, isso não é o $f(x)$ vezes o dx .

47 (0:37:28) **P3** - É complicado você tem que pensar num
48 jeito de trazer o aluno para que ele tenha esse conceito
49 intuitivo, mas ao mesmo passo, tomar cuidado para ele

- 1 não enforçar a matemática, se não ele por ai fazendo
2 besteira.
3 (0:37:40) **P2** - Acho que é justamente essas coisas que o
4 professor lá [referindo a seus professores de graduação]
5 não falou e eu aprendi, mas só agora eu descobri, agora
6 quando você vai dar aula eu tento falar aquilo que o
7 professor não falou.
8 [Os professores são indagados sobre as questões do
9 João e da Beatriz]
10 (0:38:25) **P3** - A de baixo é a demonstração, a de cima é
11 uma construção geométrica, o argumento dele está
12 correto.
13 (0:38:45) **P2** - Aqui [João] eu iria dizer ao aluno que
14 preenche sim [risos] no infinito preenche, apesar de eu
15 não conseguir derrubar seu argumento, vou pensar
16 melhor, vou levar pra casa.
17 (0:40:32) **P3** - É uma tarefa que gera discussão leva as
18 pessoas à pensar, mesmo para quem tem o conceito
19 formado.
20 (0:45:37) **P2** - Achei muito bom... e o fato de aparecer
21 essa discussão é muito bom, é bom que gere discussão,
22 a gente não deve fugir disso, eu não fujo dessas coisas
23 quando acontecem outras coisas como essa, tem vezes
24 que o aluno trás a solução.

26 **Encontro 2 – 24/08/2004**

27 **Início:** 17h30

28 **Término:** 18h30

29 **Professores Participantes desse encontro:** P1, P2 e
30 P4.

31 **Objetivo:** Introduzir algumas considerações teóricas da
32 tese – Teoria da Cognição Corporificada.

33

34 **Tópico guia para o segundo encontro de professores** 35 **de Cálculo:**

36

37 **1. Apresentação dos professores que não estavam** 38 **presentes na 1º reunião:**

- 39 Nome;
40 Formação;
41 Disciplinas que leciona atualmente.

42

43 **2. Retomada do primeiro encontro para que os** 44 **professores novos possam se situar.**

- 45 Entrega da tarefa 1 para os professores novos;
46 Retomar a discussão sobre a questão do João e da
47 Beatriz.

48

49 **3. Discussão sobre a teoria**

- 50 Entregar a ficha I para cada professor.

Ficha I:

No primeiro encontro o Professor **P3** fez as seguintes colocações quando falávamos em facilitar para que o aluno entendesse determinado conceito.

“Às vezes a gente tenta deixar a coisa tão simples que você acaba enforcando a matemática”.

“Eu fui comentar com a turma essa história do limite do Δx tendendo a zero, você escreve o $f(x)dx$, o dx é a base do retângulo e o $f(x)$ é a altura ok, mas não vão sair por ai dizendo que na integral é o $f(x)$ vezes o dx , aquilo é uma notação. Isso é algo que me preocupa, eu falo isso porquê eu sei que eles vão entender melhor, pelo menos o conceito.”

Um pouco de teoria para refletirmos...

Lakoff e Johnson (1980), no livro *Metaphors We Live By*, baseados principalmente na evidência lingüística, constataram que a maior parte de nosso sistema conceitual, em termos do qual pensamos e agimos, é de natureza metafórica.

Na linguagem humana do cotidiano, quando dizemos o natal está chegando. O natal não chega, não pode chegar literalmente. A linguagem humana tem mapeamentos que tem natureza metafórica. Eventos temporais: natal, segunda, etc. não existem no espaço, se utilizamos um domínio espacial para falar de coisas que não são espaciais, estamos usando uma metáfora: Movimento temporal como um lugar no espaço (Vídeo Conferência - Núñez 2004)

Dois exemplos na Matemática...

Num artigo apresentado por Frant et al (2003) no II SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática temos um estudo de caso, o qual colocamos aqui com a intenção de explicar como as metáforas conceituais podem ajudar a levantar quais são os significados produzidos pelos alunos durante uma tarefa sobre derivadas. A tarefa consistia na observação de uma determinada animação no computador com comentários falados e escritos sobre a mesma. Tratava-se de uma curva com dois pontos P e Q sobre a mesma que ligados apresentavam uma secante à tal curva, Q então “movia-se” para P de modo a representar a aproximação da secante à tangente à curva no ponto P. Os gestos, bastante icônicos, mostravam que o ponto no plano cartesiano não possuía uma abscissa e ordenada que variava dependendo da posição já que o “mesmo ponto Q” se transformava no ponto Q via tal movimentação.

1 Uma análise rápida usando como lente as
 2 metáforas conceituais poderíamos dizer que a metáfora
 3 aqui usada é: PONTOS SÃO CORPOS. Os domínios ou
 4 campos metafóricos são o espaço físico que habitamos e
 5 experienciamos e o espaço cartesiano do plano definido
 6 por duas retas ortogonais onde cada ponto é definido por
 7 sua abscissa e sua ordenada.

Domínio Fonte	Domínio Alvo
Um corpo no espaço	Um ponto no plano cartesiano

8 Segundo Frant surgem alguns padrões de
 9 inferência que podem ser mapeados, usando esta
 10 metáfora, de um domínio para outro:

Corpo que se movimenta ao longo de uma trajetória	→ Ponto que se move ao longo de uma curva que representa uma função real.
Pessoa/carro que entra e sai de um túnel é o mesmo	→ Ponto que se move ao longo da curva é o mesmo

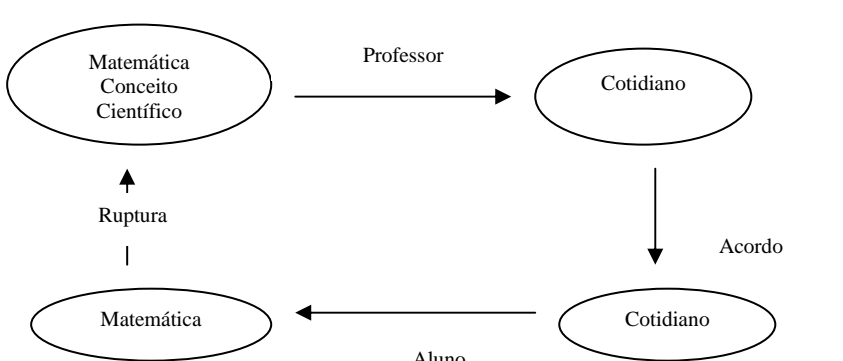
11

12 **Outro exemplo:**

13 Tangente “toca” a circunferência num ponto. Esse
 14 toca é diferente da cognição humana natural, por
 15 exemplo, quando a mão toca o microfone. O ponto de
 16 intersecção é único = intersecção de dois conjuntos
 17 distintos. Usamos uma noção **intuitiva** para chegar nos
 18 conceitos matemáticos. Porém se o aluno não percebe
 19 que tem um ponto em comum, ele está no senso comum.
 20 A dificuldade dos alunos é decorrente dos conflitos
 21 conceituais. (Vídeo Conferência - Núñez 2004)

22
 23 Como professores de Matemática estamos sempre
 24 tentando facilitar, deixar claro o conceito a ser ensinado
 25 pro aluno e nessa dinâmica às vezes podemos ter
 26 problemas, pois quem produzirá significados para o que
 27 estamos falando serão os alunos:

28



29
 30
 31
 32
 33

FRANT, J. B.; et al Cognição corporificada e linguagem na sala de aula de matemática ...Boletim GEPEM, n. 46, p. 41-53, jan/jun – 2005.

1 Qual a sua opinião sobre os comentários do **P3** e sobre
2 essa introdução teórica? Você tem alguma situação de
3 aula que gostaria de expor para que possamos refletir?
4

5 **Transcrição:**

6 [**P1** fala da tarefa 1 para **P4** e pede que ele comente a
7 parte da tarefa referente às justificativas do João e da
8 Beatriz (dois alunos hipotéticos) e ela faz os seguintes
9 questionamentos:]

10 (0:06:13) **P4** - Esses são alunos de que?

11 (0:00:16) **P1** - São alunos de cálculo que já estudaram
12 limites.

13 (0:00:36) **P4** - Mas esse limite aí, como é que foi
14 introduzido esse processo de limite, pela definição?

15 (0:06:40) **P1** - De forma **intuitiva**.

16 (0:06:42) **P4** - Não tem a noção de seqüência?

17 (0:07:07) **P4** - A resposta do aluno e a justificativa que ele
18 dá vai depender da bagagem dele, dos direcionamentos
19 que eles tem, não só do conceito de limite, mas do
20 conceito de limite de seqüência.

21 (0:07:20) **P1** - Você fala se ele teve a parte formal do
22 assunto?

23 (0:07:21) **P4** - Mesmo se ele só teve a parte **intuitiva**, se
24 ele foi exposta à noção de que toda seqüência crescente
25 e limitada tem um limite, então a resposta certamente vai
26 ser diferente.

27 (0:07:46) **P1** - Mas normalmente num primeiro curso de
28 Cálculo você não tem todo esse aparato.

29 (0:08:08) **P4** - Mas isso aí pode aparecer naturalmente, o
30 aluno já vem trabalhando com seqüência desde
31 progressão geométrica.

32 (0:08:10) **P4** - Você pode criar muitas justificativas, mas é
33 sempre uma situação inicial.

34 (0:08:40) **P1** - O João não está errado está?

35 (0:08:46) **P4** - Ele vai justificar de acordo com o que ele
36 tem de bagagem.

37 (0:09:16) **P4** - [risos] A minha apreciação, do que eu vejo
38 disso aqui, eu acho muito difícil discutir as justificativas
39 aqui...as coisas colocadas fora do contexto...vai depender
40 do tom, da ênfase que você dá pro assunto na sala de
41 aula.

42 (0:11:04) **P4** - É complicado você ficar discutindo fora do
43 contexto, na sala de aula você encaminha as respostas
44 dos alunos, a coisa mais simples de você descobrir como
45 é que o negócio falhou na sala de aula é você ver a
46 resposta dos alunos na prova, você inconscientemente
47 >induz> a tomada daquilo que não é exatamente
48 esperado.

49 (0:11:40) **P1** - Então você acha que é difícil argumentar
50 porque não tem o contexto.

1 (0:11:45) **P4** - É difícil para mim argumentar que essa é a
 2 resposta que eu acho mais adequada, é claro que nessa
 3 aqui a gente vê o furo [referindo a demonstração da
 4 Beatriz], não sei se o aluno está preparado para isso,
 5 essa aqui [referindo à resposta do João] é mais ou menos
 6 óbvia, tem coerência, a seqüência vai sempre
 7 aumentando e não vai chegar lá nunca..

8 (0:12:30) **P1** - A idéia é colocar as duas questões para
 9 gerar discussão entre uma coisa que é mais intuitiva,
 10 natural e o processo de limite, no limite ele é, na pós que
 11 apliquei a tarefa os alunos diziam, no limite ele é, mas não
 12 é tão simples assim para o aluno.

13 (0:12:47) **P4** - Não, não é simples, o conceito de limite é o
 14 conceito mais complicado de todos, é um conceito muito
 15 fino, muito sofisticado e como a gente não tem condições
 16 nas primeiras abordagens de fazer com que o aluno
 17 entenda toda essa figura, você fica na informalidade, a
 18 informalidade gera várias interpretações que podem ser
 19 absolutamente equivocadas e isso é em função do fato da
 20 gente ter que ser informal porque o aluno ainda não está
 21 preparado pro conceito colocado formalmente, você está
 22 lidando com um conceito que é muito fino dentro do
 23 cálculo, pra fazer o conceito de integração, a definição de
 24 integral é ainda um conceito ainda mais fino que esse,
 25 você tem um limite que envolve a norma da partição, uma
 26 escolha em cada partição, você tem a possibilidade de
 27 escolha, é um processo de limite que tem um segundo
 28 estágio.

29 (0:12:20) **P1** - No primeiro encontro o Professor **P3**
 30 colocou a seguinte opinião quando falávamos em facilitar
 31 para que o aluno entendesse determinado conceito.

32
 33 *“Às vezes a gente tenta deixar a coisa tão simples que
 34 você acaba enforcando a matemática”.*

35
 36 *“Eu fui comentar com a turma essa história do limite do
 37 Δx tendendo a zero, você escreve o $f(x)dx$, o dx é a
 38 base do retângulo e o $f(x)$ é a altura ok, mas não vão
 39 sair por ai dizendo que na integral é o $f(x)$ vezes o dx ,
 40 aquilo é uma notação. Isso é algo que me preocupa, eu
 41 falo isso porquê eu sei que eles vão entender melhor, pelo
 42 menos o conceito.”*

43 (0:15:02) **P4** - Em cada estágio você pode entender a
 44 matemática tão sofisticada quanto você consegue,
 45 quando você escreve $f(x)dx$, se você for olhar uma
 46 interpretação mais moderna disso você está integrando
 47 uma forma diferencial, isso passa a ter sentido no mundo
 48 das formas diferenciais, é uma forma dual, é sempre
 49 complicado.

- 1 (0:15:30) **P1** - O P3 ai na tentativa de dar um significado
 2 pro símbolo ele desenha um retângulo infinitesimal de
 3 base dx e altura $f(x)$, para tentar ajudar o aluno, mas aí
 4 ao passo que você está falando mais fácil, o aluno vai
 5 produzir o significado que ele quiser.
- 6 (0:16:08) **P4** - Você pode dizer pro aluno o segredo tanto
 7 quanto você queira, eu até digo pro meu aluno de cálculo,
 8 isso aqui por enquanto é uma notação mas se você for
 9 estudar matemática, você pode entender isso como uma
 10 integral de uma forma sobre uma superfície num intervalo.
- 11 (0:16:47) **P2** - No caso aqui, tomar cuidado para não
 12 enforçar a matemática, isso acontece em todos os tópicos
 13 e todos os cursos, as vezes quero trazer tão perto do
 14 aluno, ai você vai e diz espera ai, já fui demais.
- 15 (0:17:00) **P4** - Não, eu não sei se enforca a matemática.
- 16 (0:17:32) **P4** - Aqui é uma notação e essa notação numa
 17 teoria mais avançada isso tem um outro significado, aqui
 18 é apenas uma notação, se você quiser dizer que o Δx
 19 vira dx , fica a vontade, assim tudo funciona bem [risos],
 20 na verdade começou assim o dx era uma notação para
 21 diferenças, se você olhar historicamente o dx está lá no
 22 cálculo, Leibniz usava essa notação que mais
 23 adiante...passou a ter o seu devido lugar.
- 24 (0:20:19) **P1** - Quem produz significado é o aluno
 25 [independentemente do estágio em que o aluno esteja, de
 26 qualquer forma o professor terá que falar sobre (de
 27 alguma forma) um determinado conteúdo]
- 28 (0:20:27) **P4** - Por isso mesmo que você precisa tomar
 29 muito cuidado com a informalidade, a informalidade em
 30 excesso, ai você periga de estar comprometendo a
 31 disciplina, você precisa de um certo controle...não deixar
 32 as coisas abertas para os alunos.
- 33 (0:21:38) **P1** - Fala sobre o Modelo Teórico do *Embodied*
 34 *Cognition* e sobre o exemplo da tangente apresentado no
 35 SIPEM. (ver anexo)
- 36 (0:29:35) **P4** - Mas esse é um processo puramente
 37 geométrico [referindo-se ao clássico exemplo da
 38 aproximação da tangente pelas retas secantes]
- 39 (0:29:40) **P1** - Você não precisa das coordenadas?
- 40 (0:29:49) **P4** - Não é um processo puramente geométrico.
- 41 (0:30:33) **P1** - É o mesmo ponto que se aproxima?
- 42 (0:33:39) **P4** - Você vai fazer o ponto percorrer.
- 43 (0:30:43) **P1** - Mas o ponto não é o mesmo!
- 44 (0:30:48) **P4** - Mas você >>induziu>> a pensar isso, e
 45 você não contou pro aluno que a cada vez que ilumina um
 46 ponto na tela é um ponto geométrico diferente.
- 47 (0:31:08) **P4** - Mas você induziu o aluno, é aqui que está o
 48 furo do negócio com a imagem que você produziu na tela,
 49 você induziu o aluno, primeiro que o processo não
 50 depende de coordenada e depois >>é claro que os alunos

1 vão dizer que é o mesmo>> porque você deu a imagem,
2 então o instrumento que é falho, é por isso que usa
3 recursos para ensinar conceitos é uma coisa
4 extremamente perigosa, eu falo isso pros meus alunos
5 todo dia, olha essa coisinha aqui é muito bonitinha, ,mas
6 muito cuidado, isto é uma situação extremamente
7 perigosa.

8 (0:33:36) **P4** - Estes dias eu fiz o gráfico de um logaritmo
9 que estava definido só num semiplano e ele [o software
10 winplot] fez o gráfico no plano inteiro], não me pergunte
11 como é que ele fez.

12 **Encontro 4 – 05/10/2004**

13 **Início:** 17h30

14 **Término:** 18h30

15 **Professores Participantes desse encontro:** P1, P2 e
16 P3.

17 **Objetivo:** Investigar as opiniões dos professores acerca
18 das tarefas 3 e 4, visando uma futura comparação com as
19 opiniões dos alunos que resolveram essas tarefas.
20

21

22 **Tópico guia para o quarto encontro de professores de** 23 **Cálculo**

24 Nesse encontro os professores deverão resolver as
25 tarefas 3 e 4 e discutir as possíveis contribuições dessas
26 nas aulas de integral.
27

28

29 **Transcrição:**

30 [Os professores resolvem e comentam a tarefa 3]

31 (0:06:43) **P3** O que acontece com $f(c)$ quando h tende a
32 zero?

33 (0:07:03) **P3** Quando o h tende a zero o $f(c)$ se aproxima
34 do $f(x)$

35 (0:07:15) **P3** O que acontece com o quociente abaixo
36 quando h tende a zero?

37 (0:07:30) **P2** Isso é a derivada da área né?

38 (0:07:40) **P3** Quando h tende a zero isso vai se aproximar
39 da derivada da área ou seja de $A'(x)$.

40 (0:07:50) **P2** Isso é $A'(x)$.

41 (0:07:52) **P3** Nisso o aluno já aprendeu derivada?

42 (0:08:00) **P1** Já.

43 (0:12:31) **P3** Qual a condição sobre a função f ? Ela tem
44 que ser contínua por causa do movimento aqui [aponta
45 para o computador]

46 (0:12:49) **P2** Tem que ser maior que zero, não, não é!

47 (0:14:50) **P1** O que vocês acharam? A idéia dessa
48 atividade é.. porque uma das críticas nos artigos que eu li
49 é de que o aluno entende a integral somente como as
50 fórmulas de integração, como um processo mecânico e

1 não faz nenhuma conexão entre área e primitiva, na
 2 verdade isso é uma animação para o primeiro teorema
 3 fundamental do cálculo, onde a derivada da integral é a
 4 própria função, é uma interpretação geométrica.

5 (0:15:00) **P2** É a gente nunca faz isso a gente sempre
 6 pensa a área e a integral [faz gesto com as mãos para a
 7 direita e para a esquerda indicando a separação entre
 8 área e integral]

9 (0:15:28) **P3** Não relaciona assim mesmo né!

10 (0:15:31) **P1** Não né! Eu aprendi a integral como soma de
 11 áreas de retângulos, vi a definição, vi o teorema
 12 fundamental do cálculo, agora a conexão entre área e
 13 primitiva eu não me lembro de ter visto.

14 (0:15:52) **P3** E a gente apresenta simplesmente a
 15 integração como a área lá, a soma de retângulos e depois
 16 diz que isto está relacionado pelo teorema fundamental do
 17 cálculo e ponto final, mas não se relaciona desse jeito.

18 (0:17:28) **P1** Quando eu estava aplicando isso para um
 19 grupo de alunos, tinham alunos que não conseguiam
 20 achar a condição sobre a f , aí eu interfeirei na hora da
 21 aplicação, essa dupla de alunos tinha bem mais
 22 dificuldades e não iriam conseguir de jeito nenhum,
 23 quando você está caminhando o que você faz? O que te
 24 impede de continuar uma trajetória, você está vendo um
 25 ponto sobre a curva, sobre o gráfico da função f , está se
 26 movimentando, o que te impede de caminhar? Eles
 27 disseram, ah um buraco, ah tá tem que ser contínua. Até
 28 aí eu não sei se eu atropeliei ou se eu tinha que esperar
 29 eles chegarem a uma conclusão, mas foi assim a minha
 30 fala interferiu e ajudou eles a chegarem numa conclusão
 31 rapidamente, para que eu possa continuar caminhando eu
 32 não posso ter buraco, então eu recorri a algo mais
 33 próximo deles para que eles conseguissem entender a
 34 continuidade.

35 (0:18:52) **P2** O P3 quando viu logo falou contínua, eu
 36 achei que tinha que ter mais coisas..

37

38 [Os professores resolvem e comentam a tarefa 4]

39 (0:21:08) **P3** Como você explicaria a João a relação entre
 40 a área A e a variação de $F(2)-F(0)$? É complicado num
 41 primeiro momento para enxergar uma relação imediata de
 42 tal forma que variando o $F(2)-F(0)$ representa a área, a
 43 gente pode dizer que essa função F grande é uma função
 44 que fornece a área abaixo dessa curva para cada x
 45 caminhando aqui, poderia colocar aqui o x e o $F(x)$ e vou
 46 caminhando com o x , isso vai varrendo aqui, conforme eu
 47 vou caminhando eu vou varrendo isso aqui. Podia explicar
 48 que a variação $F(x)-F(0)$ representa, ou seja, a função F
 49 grande representa a área abaixo da curva no intervalo de

1 0 a x, mas isso eu estou afirmando, não estou deixando
 2 ele perceber né P1?
 3 (0:22:50) **P3** Ele percebe isso claramente?
 4 (0:23:08) **P2** Ali como é a área você está no zero, a área é
 5 zero, quando você chegar no 2 vai ser a área total que
 6 você já sabe, então aqui vai ser o valor da área total que
 7 tem que vir aqui, e conforme você caminha, você vai
 8 pegando uma parte maior abaixo do gráfico e por isso
 9 uma função crescente ok
 10 (0:23:49) **P3** A função F grande indica a área sob o
 11 gráfico da função f no intervalo de 0 a x
 12 (0:24:00) **P2** De 0 a 2, ah tá não é o x vai de 0 a 2 [gesto
 13 com a mão como se o x percorresse de 0 a 2]
 14 [Os professores usam o flash para ver a animação]

16 Encontro 5– 19/10/2004

17 **Início:** 17h30

18 **Término:** 18h30

19 **Professores Participantes desse encontro:** P1, P2 e
 20 P3.

21 **Objetivo:** Investigar as opiniões e concepções dos
 22 professores acerca da tarefa 2, visando uma futura
 23 comparação com as opiniões dos alunos que resolveram
 24 essa tarefa.

26 Tópico guia para o quinto encontro de professores de 27 Cálculo

28
 29 Nesse encontro os professores deverão resolver a tarefa
 30 2 e discutir as possíveis contribuições dessa nas aulas de
 31 integral.
 32

34 Transcrição:

35 (1:14:23) **P1** Essa tarefa foi aplicada para os alunos sem
 36 que eles soubessem o conceito de integral, sem saber
 37 nada de integral, eu introduzi..
 38 (1:14:30) **P2** Alunos de graduação?
 39 (1:14:31) **P1** Alunos de graduação sem ver o conceito de
 40 integral.
 41 (1:14:41) **P2** Eles viram que se aproximava, só não
 42 sabiam que era integral?
 43 (1:14:43) **P1** Não.
 44 (1:14:48) **P3** Com mil retângulos a soma das áreas dos
 45 retângulos coincide com a área abaixo do gráfico?
 46 (1:15:06) **P2** Não coincide.
 47 (1:15:10) **P2** É possível calcular exatamente a área abaixo
 48 do gráfico? Nós sabemos que é usando integral, mas os
 49 alunos lá não sei o que é que eles responderam...

- 1 (0:15:38) **P3** Sim fazendo o número de retângulos tender
 2 ao infinito agora vai cair, os alunos iriam cair na
 3 contradição daquela primeira folhinha lembra daquela
 4 primeira atividade do círculo que você ficou preenchendo
 5 com polígonos e nunca chegava e um aluno pode dizer
 6 você vai aumentando, aumentando, vai dando zoom e
 7 sempre vai achar um espaço em branco
 8 (1:16:15) **P3** Sim fazendo o número de retângulos tender
 9 ao infinito.
 10 (1:16:22) **P2** Sim que é o conceito de integral definida.
 11 (1:31:22) **P1** O P2 estava curioso para saber o que os
 12 alunos teriam respondido... eu vou trazer umas sinopses
 13 do que eles falaram a respeito disso.
 14 (1:32:00) **P1** No final dos encontros eu gostaria que a
 15 gente tentasse definir uma seqüência ou um conjunto de
 16 situações que pudessem ajudar
 17 (1:32:15) **P2** Na nossa aula
 18 (1:32:16) **P1** Isso uma situação que seria a melhor, eu
 19 usaria na minha aula e não só isso, mesclando teoria,
 20 como começar, eu gostaria que vocês pudessem me
 21 ajudar, eu estou pensando, por exemplo, essa atividade 2
 22 é uma terceira versão dela..
 23 (1:33:05) **P3** Acho que a dificuldade dependendo do
 24 embasamento, aqui a gente consegue ter o visual, o
 25 preenchimento da área, agora a melhor ponte que tem
 26 que ser feita, quando você vai de fato calcular a integral
 27 definida pelo Teorema fundamental do cálculo
 28 (1:33:15) **P1** Eu uso na demonstração do teorema
 29 fundamental do cálculo vários recursos aqui, que na sala
 30 de aula não dá para fazer, aqui eles estão vendo que está
 31 aumentando.
 32 (1:34:14) **P1** Essa questão do infinito eu acho complicado,
 33 então é para trabalhar um pouco a intuição antes, isso é
 34 algo que estou tentando fazer e queria discutir com vocês.

35

36 **Encontro 7 – 09/11/2004**37 **Início:** 17h3038 **Término:** 18h3039 **Professores Participantes desse encontro:** P1, P2 e
40 P3.41 **Objetivo:** Refletir sobre as experiências da prática do
42 Professor P3.

43

44 **Tópico guia para o sétimo encontro de professores de**
45 **Cálculo:**

46

47 **Questões direcionadas ao Prof. P3:**

48

- 49
-
- O que você mudou na sua aula sobre integral, neste
-
- 50 ano?

- 1 □ Que artifícios você usou? (começou pela definição de
2 área?, utilizou aplicações? Tecnologia? Como?
3 Porque?)
4 □ Que metodologia de trabalho você adotou? Como?
5 Porque?
6 □ Quais as dúvidas dos alunos? Como vc sabia que
7 eram essas as dúvidas? Eles falaram? Erraram as
8 tarefas? Ou o quê?
9 □ Como foram os resultados das provas sobre integral?
10 □ A que você atribui esses resultados?
11 □ Você pretende mudar ainda mais a sua aula sobre
12 integral? Por que?
13 □ Como?
14 □ Onde você acha que residem as dificuldades dos
15 alunos? Por que você acha que é aí? Como pode
16 afirmar?
17 □ Os nossos encontros as terças contribuíram para que
18 você refletisse mais sobre as suas aulas? Como?

19

20 **Transcrição:**21 (0:7:32) **P1** Então **P3**, especificamente sobre as aulas de
22 integral, você havia comentado que houve mudança, o
23 que mudou?24 (0:7:40) **P3** Na verdade é assim, eu comecei, o ano
25 passado eu fiz o método tradicional, definindo a primitiva
26 primeiro e a integral indefinida, esse ano eu fiz uma
27 espécie de motivação com a área, eu comecei contando
28 que o que motivou o estudo da integral é o cálculo de
29 áreas, então eu comecei apresentando alguns problemas
30 que necessitavam de cálculos de áreas abaixo de uma
31 curva e algumas aplicações voltadas para a engenharia.32 (0:8:20) **P1** Quais aplicações?33 (0:8:21) **P3** Deslocamento de uma partícula conhecendo a
34 função velocidade, massa de um corpo conhecendo a
35 densidade, consumo de energia conhecendo a função
36 potência elétrica.37 (0:9:12) **P1** E essas aplicações que você falou, foram os
38 alunos que fizeram? Ou você falou?39 (0:9:15) **P3** Não, eu citei, eu apresentei e deixei uma série
40 de problemas em aberto, eu falei olha quando a função é
41 constante se calcula essa área aqui em baixo, o que ela
42 representa? Velocidade vezes o tempo dá o espaço
43 percorrido, mas e se a função não for constante como é
44 que você vai calcular o deslocamento, como você vai
45 calcular o consumo, a massa, em cada caso né, deixei
46 todos esses problemas em aberto.47 (0:10:05) **P1** A tecnologia você não chegou a usar?48 (0:10:06) **P3** Não, não usei.49 (0:10:07) **P1** E porque você fez essa mudança?

1 (0:10:10) **P3** Eu fiz essa mudança, porque na verdade da
2 forma como eu apresentei o ano passado realmente ficou
3 uma coisa desconexa, dava a primitiva e depois dava o
4 cálculo da integral definida, eu >ficava insistindo o tempo
5 todo>, que tinha uma relação entre elas, mas na verdade
6 essa relação ficava muito despercebida porque você não,
7 você insistia porque você próprio tinha aquela
8 insegurança de, a coisa não ficou muito boa né [olha para
9 **P2**] então você fica falando, falando, mas não adianta né,
10 só que mesmo esse ano, apesar de começar pela
11 motivação da área chegou uma hora que eu tive de
12 comentar da integral definida, então na verdade eu
13 apresentei primeiro a integral definida e a história da área
14 e aí eu joguei a pergunta como é que nós vamos calcular
15 a integral definida, como é que eu vou calcular essa área,
16 mesmo sabendo que é a soma das áreas dos retângulos,
17 como é que é feito esse cálculo aí? Ai eu disse que existe
18 um teorema na matemática que é o teorema fundamental
19 do cálculo que relaciona isso com a derivada e apresentei
20 esse teorema, mas não demonstrei e ai eu falei pra eles,
21 vocês estão vendo a partir do enunciado, do cálculo da
22 primitiva, é importante determinar essa função a F grande,
23 falei é importante determinar essa função, então o que
24 nós vamos ver daqui para frente são as técnicas para
25 determinar essa função que mais tarde eu vou chamar de
26 primitiva e ai eu apresento as técnicas de integração e
27 agora é que eu estou dando o cálculo de área.

28 (0:12:32) **P1** A metodologia de trabalho que você utiliza é
29 aula expositiva? Porquê?

30 (0:12:35) **P3** Primeiro pelo tempo e segundo pelo número
31 de alunos na sala de aula. Atividade em grupo só para a
32 resolução de exercícios.

33 (0:13:01) **P1** Eles apresentaram dúvidas?

34 (0:13:05) **P3** Sim num primeiro momento quando você dá
35 aquela noção de retângulos, você faz o desenvolvimento
36 no quadro, particiona aquela área em pequenos
37 retângulos, esse conceito intuitivo acredito que no
38 primeiro momento, nenhum aluno chegou a questionar...
39 talvez também porque eu não desse abertura para isso,
40 mas a parte intuitiva eu acredito que eles ficaram com o
41 pé no chão, quando foi no teorema fundamental do
42 cálculo eu falei olha os livros todos demonstram, mas eu
43 não posso fazer isso agora, eu poderia estar fazendo
44 numa atividade complementar no sábado, aí passou tudo
45 bem, mas a maior dificuldade deles é mais o cálculo,
46 porque na verdade é assim, existe a simbologia
47 matemática para a integral e para eles existe uma outra
48 simbologia, existe uma simbologia física, aquela integral
49 tem um significado físico né, quando você define integral
50 definida primeiro, aquele símbolo o S distorcido e o dx pra

1 gente [matemático] é apenas um símbolo de integração e
2 a função que está no meio é a função que você vai
3 integrar, pra eles [alunos da Engenharia] não, esse S tem
4 realmente o significado de uma soma e esse dx mesmo
5 que não seja um diferencial é um elemento de base,
6 elemento de volume, elemento de tempo.

7 (0:14:55) **P1** Eles vêem isso numa disciplina de física?

8 (0:15:00) **P3** Não, eles estão tendo agora, junto comigo,
9 eu fui apresentando a matemática já citando, mesmo que
10 eles não tivessem contato.

11 (0:15:26) **P3** Eles viram física no primeiro semestre, então
12 alguma coisa eles já tinham visto.

13 (0:16:34) **P3** Ai eu comentei com eles, o resultado da
14 integral definida tem vários significados dependendo da
15 função que está sendo integrada, se a função é
16 velocidade, então o resultado é deslocamento, se essa
17 função interna representa densidade volumétrica então o
18 resultado é massa, se a função integrada é a potência, o
19 resultado é o consumo de energia, essa idéia acho que
20 ficou claro para eles, agora eu acho que a parte algébrica
21 é a mais complicada para eles,

22 (0:18:11) **P1** Perguntaram para você o que é o dx?

23 (0:18:24) **P3** Não perguntaram porque quando eu comecei
24 com a idéia de área eu apresentei aquele dx como a base
25 de um retângulo, o delta x está aqui [gesto com os dedos
26 polegar e indicador para representar o intervalo de
27 tamanho delta x] , fazendo isso tender a zero eu vou
28 pegar um retângulo de base tão pequena quanto você
29 possa imaginar e ai eu sempre apelo, por exemplo, não
30 tem a idéia que entre dois números eu sempre posso
31 encontrar outro, se eu falo 0,1 você fala um número
32 menor, se eu falo 0,01 você fala outro menor ainda, então
33 partindo dessa idéia da reta então você pode imaginar um
34 delta x tão pequeno quanto você queira e isso é o que eu
35 to chamando de dx é a base do retângulo e o f(x) é que
36 vai me dar a altura do retângulo e ai eu defini a área do
37 retângulo e a integral definida é a soma dessas áreas, só
38 que depois mais adiante eu comentei que a integral
39 definida para matemático é um símbolo de integração,
40 para vocês isso tem que representar algo mais, então eu
41 apresentei.

42 (0:19:23) **P1** Para eles da Engenharia tem que
43 representar algo mais?

44 (0:19:26) **P3** Sim, porque para eles não é só o símbolo,
45 esse dx tem um significado, o que para gente é um
46 infinitésimo para eles é um infinitésimo também, mas é
47 um infinitésimo mais concreto que o nosso, para eles é
48 algo mais palpável, vou estudar a massa dessa viga, ele
49 vai particionar isso elementos pequenos e vai estudar

1 cada pedaço, vai estudar um circuito ele vai estudar cada
2 elemento pequeno,... tender a zero para eles é diferente.

3 (0:20:11) **P1** Mas no fundo o que formaliza, o que
4 viabiliza esses cálculos é a idéia intuitiva, é a mesma idéia
5 que tem na matemática, eu não vejo isso separado, você
6 pode até ter um significado físico mas o que resolve é o
7 cálculo da integral.

8 (0:29:29) **P1** E as suas provas?

9 (0:29:31) **P3** Provas eu já fiz e o resultado, em termos de
10 porcentagem:

11 50% entenderam, o objetivo foi atingido,

12 25% entenderam com falhas,

13 25% calamidades.

14 (0:30:01) **P1** A que você atribui esses resultados?

15 (0:30:08) **P3** Vários fatores, mas o principal talvez não
16 seja nem o problema com o cálculo, é o problema com a
17 álgebra, não sabe simplificar uma fração, não sabe
18 simplificar uma expressão, como você vai falar de integral
19 se ele não sabe nem simplificar, erros de interpretação

20 da simbologia da integral é $\int x dx$ é $\frac{x^2}{2} \cdot x$, parte algébrica

21 básica e interpretação de símbolos.

22 (0:32:15) **P1** Bom tem problemas, você pretende mudar
23 ainda mais a sua aula de integral?

24 (0:32:18) **P3** Pretendo mudar mais, eu acho que ainda
25 ficou muito mecânico a história da integral definida.

26 (0:32:52) **P1** Você utilizaria aquela atividade com o
27 winplot?

28 (0:33:00) **P3** Eu usaria sim

29 (0:39:15) **P1** Os nossos encontros nas terças feiras
30 contribuiu para que você refletisse sobre suas aulas?

31 (0:39:27) **P3** Cada terça feira eu saio daqui achando que
32 eu tenho que mudar tudo, agora como? Essa é a parte
33 difícil, eu acho assim que tudo é válido para tentar
34 melhorar.

35

36 **Encontro 8 – 16/11/2004**

37 **Início:** 17h30

38 **Término:** 18h30

39 **Professores Participantes desse encontro:** **P1, P2 e**
40 **P3.**

41 **Objetivo:** Investigar as concepções e opiniões dos
42 professores sobre as respostas dadas pelos alunos
43 enquanto resolviam as tarefas 1 e 2.

44

45 **Tópico guia para o oitavo encontro de professores de**
46 **Cálculo:**

47

48 **Discussão sobre trechos transcritos de fitas de vídeo**
49 **sobre:**

1
2 **1. Tarefas 1 e 2 na Pós-Graduação em Educação**
3 **Matemática**

4 **2. Tarefa 2 na Licenciatura Matemática**

5
6 Os nomes dos alunos foram substituídos por
7 pseudônimos para preservar a identidade dos sujeitos
8 pesquisados.

9
10 **1. Tarefas 1 e 2 na pós graduação**

11
12 Essas tarefas foram aplicadas em uma aula de
13 Cálculo Diferencial e Integral de uma turma iniciante de
14 Pós-Graduação em Educação Matemática, na no dia 08
15 de junho de 2004, das 14h às 17h. A aula foi ministrada
16 no laboratório de informática com dois alunos por
17 computador, sendo que uma dupla foi filmada durante a
18 resolução das tarefas. Após o termino da resolução das
19 tarefas a câmera foi posicionada de forma a focalizar a
20 lousa e as duplas de alunos foram convidadas, pela
21 professora da disciplina, para apresentarem suas
22 conclusões na frente da sala. Os alunos já estavam
23 habituados com essa dinâmica de aula.

24
25 **Trechos da discussão das tarefas 1 e 2 aplicadas na**
26 **Pós- Graduação.**

27
28 **Sobre a tarefa 1:**

29
30 **[Julia e Adriana** vão para frente expor as suas
31 conclusões]

32 **Julia:** Isso é a nossa resposta: João não percebeu que à
33 medida que aumenta o número de lados do polígono a
34 área do polígono apenas fica próxima da área do círculo,
35 o que não é verdade, mas haverá um determinado
36 momento em que a área do polígono será igual à área da
37 circunferência conforme demonstrou algebricamente a
38 Beatriz.

39 **Adriana:** Conforme aumenta o número de lados nunca
40 vai chegar à área do círculo, mas a gente sabe que
41 chega. A distância entre dois vértices consecutivos vai ser
42 tão pequena que a gente vai ter ponto do lado de ponto, ai
43 tem aquela idéia que entre dois pontos existem infinitos
44 que a gente viu na aula da Professora.

45 **[Julia** desenha um segmento de reta AB no quadro]

46 **Adriana:** Conforme a gente vai dividindo o segmento que
47 vai de A até B, vai chegar uma hora que vai estar tão
48 próximo.

49 **Professora:** Vocês estão querendo dizer que a reta não é
50 reta, que a reta é um ponto

1 **Pedro:** Eu vou fazer igual o Cantor fez, eu vou relacionar
2 cada vértice com dado ponto, então o número de pontos
3 que você me der, de pontos da circunferência vai ser o
4 número de vértices, nunca vai haver esse espaço que
5 você está querendo,
6 **Kátia:** Vai ter esse espaço!
7 **Sofia:** Mas se você ampliar esse ponto você não vai
8 conseguir visualizar?
9 **Pedro:** a minha relação é com os pontos da
10 circunferência em relação ao meu vértice, você pode levar
11 pra onde for, a minha relação é com vértices e pontos da
12 circunferência.
13 **Patrícia:** Você consegue especificar o número de lados?
14 **Maria:** Os dois são infinitos!
15 **Professora:** Mas você tem um polígono que tenha
16 infinitos lados?
17 **Pedro:** Sim, eu faço tender!
18 **Maria:** esse negócio de infinitos lados, no limite é a
19 circunferência.
20 **Kátia:** [respondendo a pergunta da Professora sobre os
21 diferentes domínios] Eu to dizendo que geometricamente
22 a gente não chega embora tenha a questão do potencial,
23 vou, vou, vou, mais um, mais um, mas não chego na área.
24 **Professora:** E analiticamente?
25 **Kátia:** Eu digo que o limite é aquela área!
26 **Pedro:** Geometricamente eu faria a relação entre os
27 pontos da circunferência e os vértices do polígono, isso
28 me daria o argumento.
29 **Professora:** Você está fazendo isso geometricamente ou
30 é uma idéia que vem de função?
31 **Pedro:** é uma idéia que vem de função, mas não deixa de
32 ser geométrica.
33 **Professora:** Eu acho que você está fazendo, mas não é
34 geométrico, eu não consigo ver como é que você
35 consegue pegar um círculo infinito, porque na hora que eu
36 pegar, esse pontinho [gesticula como se estivesse
37 pegando um ponto da circunferência desenhada na lousa
38 e devolvendo-o] aqui já não é um pontinho, são infinitos
39 pontos. Como que se pega um ponto do círculo
40 geometricamente, você não pega!
41 **Pedro:** é só uma relação que você estabelece.
42 **Professora:** Isso, você está estabelecendo uma
43 correspondência, então você está aqui (analiticamente)
44 embora você esteja visualizando um círculo e um
45 polígono você está trabalhando aqui (analiticamente)
46 porque você não pega o ponto. Eu estou tentando falar de
47 uma coisa num ambiente que eu não posso falar aqui,
48 esses dois modos da gente pensar são dois modos
49 diferentes, é o que eu insisto com vocês, tem um lado
50 geométrico, tem um lado funcional/analítico e tem a

1 relação entre esses dois modos que faz com que o Pedro
2 júri que ele está vendo isso e muitos matemáticos
3 também, mas essa visualização a gente não tem...

4 **Tarefa 2**

5 **Ricardo:** [respondendo à pergunta 12]: ... mesmo com
6 1000 retângulos, coincidir não coincide, fica muito
7 próximo... mas não coincide exatamente com a área,
8 mesmo que você faça com 10000, com 100000 vai ficar
9 muito próximo, lá um número muito pequeno, 6^a, 7^a, 8^a, 9^a
10 casa decimal mas igual não fica

11 **Ricardo:** é possível calcular exatamente, assim como se
12 calcula a área do círculo, claro usando o número irracional
13 π , você exatamente a área do círculo, da curva fica igual
14 para se calcular com o cálculo da Integral, é o limite da
15 área, mas com mil retângulos não se coincide. Questão
16 13: é por esse processo não! Vai faltar sempre um
17 pouquinho, mas pelo cálculo de Integral igual se calcula a
18 área do círculo você tem uma fórmula é possível, mas não
19 por esse processo, esse é um processo **intuitivo** que vai
20 levar ao limite que tem lá, mas exatamente não, porque
21 não teria um polígono, teria infinitos lados,mas não teria
22 um número pré definido para calcular a área.

23 **Kátia:** o processo que nós interpretamos como grupo foi o
24 seguinte: colocar essa quantidade infinita de retângulos,
25 se eu tenho uma quantidade infinita abaixo, infinita assim
26 não é, muitos, muitos, eu sempre vou ter uma faltzinha lá
27 próximo a curva e se eu tenho uma quantidade infinita
28 mas acima da curva eu sempre vou ter uma sobrazinha,
29 quer dizer eu vou chegar muito próximo a essa área... se
30 for pensar na função propriamente dita eu calculo a
31 integral definida dessa função e encontro esse valor

32 **Kátia:...** se eu tenho uma quantidade enorme, eu ponho
33 mais um, mais um, mais um, mas nessa questão de
34 quantos eu quiser, quantos eu posso por aí? Quantos eu
35 quiser, eu ainda penso que sempre vai faltar um
36 pouquinho ou sobrar um pouquinho, veja eu volto a falar,
37 visualmente a gente viu aqui que vai chegar um
38 determinado momento aqui (apontando para o
39 computador) que eu vejo a área abaixo da curva. Eu to
40 vendo essa área abaixo da curva, mas os resultados
41 numéricos não me chegam a resultados iguais, para eu
42 mostrar que é a área, eu teria que ter à esquerda é à
43 direita os mesmos valores, que esses limites teriam que
44 ser iguais, quando eu falo em limite é porque eu estou
45 pensando na quantidade de retângulos infinitamente essa
46 quantidade...

47
48 **Trechos da discussão da tarefa 2 aplicada na**
49 **Licenciatura Matemática:**
50

1 Essa tarefa foi aplicada durante duas aulas de Cálculo
2 Diferencial e Integral I de uma turma de ingressantes do
3 curso de Licenciatura Matemática. A primeira aula ocorreu
4 em 08 de outubro de 2004, no laboratório de informática.
5 Utilizando o software Winplot os alunos, em duplas,
6 resolveram a tarefa 2. Na segunda aula, do dia 22 de
7 outubro de 2004 houve um debate, o professor (que é o
8 próprio pesquisador – P1) retomou a tarefa feita no
9 computador com algumas figuras na lousa, em seguida
10 distribuiu as fichas de tarefas, que eles haviam
11 respondido no primeiro dia, separadas em dois grupos:

- 12 O dos que concordaram que é possível calcular
13 exatamente a área,
- 14 O dos que não concordaram que é possível calcular
15 exatamente a área.

16 As duplas foram à frente e colocaram suas
17 respostas e argumentações.

18
19 Respostas às perguntas 12 e 13 da tarefa 2.

20
21 12. Com 1000 retângulos, a soma das áreas dos
22 retângulos coincide, agora, com a área abaixo do
23 gráfico de f ? É possível calcular exatamente a área
24 abaixo do gráfico de f ? Justifique. Você pode ainda
25 usar a opção **PageDown**

26 13. Se você acha que é possível encontrar a área entre o
27 gráfico de f e o eixo x por esse processo, qual o
28 número de retângulos necessários? Justifique.

29
30 **Geraldo e Eliane:**

31 A partir de 200 completa a área visualmente,
32 A partir de 200 retângulos é possível achar a área

33 **Roberto e Aline:**

34 Pusemos que não pois ainda há espaços vazios,...
35 com a área aproximada é possível.

36 Por um número bem elevado de retângulos

37 Alguém da sala diz que é necessário determinar qual é
38 esse número elevado.

39 **Márcio e Tobias:**

40 Com 100 retângulos não é possível

41 Com infinitos retângulos é possível achar um número
42 muito próximo, mas nunca exato,

43 Infinitos retângulos para se encontrar um número bem
44 aproximado,

45 Eu entendi como se fosse igual a limite pro infinito, por
46 mais que você calcule a gente nunca encosta lá no ponto,
47 quando a gente tava fazendo no computador percebi isso.

48 **Flávio e Gislene**

49 Relacionam ao método da exaustão,

1 Quando você tem essa figura, esse gráfico que forma
2 uma curva que não tem uma forma regular, você vai
3 fazendo retângulos, você vai subdividindo, até que você
4 vai chegar num ponto, você vai chegar bem perto do limite
5 do zero, que é o limite da espessura desses retângulos,
6 só que você nunca vai chegar a zero, porque você tem
7 infinitos números entre um número e outro, você vai
8 chegar num número muito aproximado, talvez nesse
9 campo [limites] nós conseguíssemos chegar no valor
10 exato.
11 Essa definição de quantos retângulos, estaria relacionada
12 com limite próximo de zero da espessura desse retângulo,
13 foi o que entendi.
14 Por experimentação é difícil, pelo processo não dá!
15 Para conceituar é difícil.

16
17 **Transcrição:**

18 (0:13:55) **P3** Esse argumento que ela colocou aqui,
19 conforme a gente vai dividindo o segmento que vai de A
20 até B, vai chegar uma hora que vai estar tão próximo,
21 >mas não o ponto A do ponto B>, eu não entendi o que
22 ela quis dizer aqui P1?

23 (0:14:14) **P1** Aqui é assim, eles já tinham tido outras aulas
24 antes e essa dupla aqui, ela insistia em dizer que você vai
25 dividindo o segmento, vai colocando mais pontos, mais
26 pontos, e esse pontos aqui, o ponto B vai se aproximando
27 do A, o próprio ponto B se aproxima do A.

28 (0:14:29) **P3** Nossa que estranho? [risos]

29 (0:15:25) **P3** Não tem lógica nisso né, eles acham lógica
30 nisso assim?

31 (0:15:35) **P1** É elas saíram da atividade acreditando que
32 era assim.

33 (0:16:03) **P3** O que a gente percebe aqui no discurso é
34 que de fato há uma diferença entre a geometria, o visual,
35 alguns afirmam aqui em baixo [aponta para o texto com
36 as transcrições] que no visual nunca vai chegar, não vai,
37 vai ter uma diferença infinitesimal e analiticamente prova-
38 se que chega na área né.

39 (0:35:40) **P3** Quando você aplica, por exemplo, essa
40 atividade [referindo a atividade 2 com o Winplot] em sala,
41 eles tem a parte gráfica, eles tem o visual, não estaríamos
42 também insinuando para eles afirmarem que entre aspas
43 eu diria assim, você está lá, você dá um zoom, eles vão
44 sempre encontrar um espaço vazio, então aquele aluno
45 atento de fato vai dizer que, mesmo com infinitos
46 retângulos ele não vai conseguir preencher aquilo, talvez
47 ele vai dando zoom, vai dando zoom, ele vai achar
48 sempre,... a gente não estaria insinuando eles a
49 afirmarem isso através da própria atividade? Eu pensei
50 nisso agora, porque quando você trabalha com o conceito

1 de infinito, quando você dá o limite eu não sei se eles
2 teriam maturidade ainda para dar a definição por épsilons
3 e deltas
4 (0:36:40) **P1** Não eu não trabalhei muito.
5 (0:36:43) **P3** Aqui eles estão assim crus, não é verdade?
6 (0:36:53) **P3** A teoria eu também acho que é necessária
7 depois eu sei lá, quando eles estiverem mais maduros...
8 (0:37:07) **P1** Você acha que com épsilons e deltas eles
9 vão entender tudo?
10 (0:37:08) **P3** Não, não vão, não foi isso que eu disse, eu
11 disse assim que a atividade, o visual nos leva a dizer que
12 dá zoom, dá zoom, vai ter um espaço lá, **intuitivamente**
13 eles estão com a idéia de limite na cabeça, mas como é
14 de fato que você vai argumentar isso, ai é que entra de
15 novo o problema da primeira atividade, eu acho que vai
16 chegar um momento lá que eles vão ter que ver isso lá
17 abstratamente com a teoria dos épsilons e deltas para
18 justificar.
19 (0:37:50) **P1** Essa questão da indução, é se por exemplo,
20 se você deixa com 200 retângulos, o aluno vai falar que
21 preenche.
22 (0:38:00) **P3** Mas e se você dá o zoom?
23 (0:38:02) **P1** Não, sem dar o zoom, ai com 200 já
24 preenche a área, então vamos supor que eu não queira
25 usar o page Down [tecla que fornece o zoom no winplot]
26 ai eu teria, seria pior, se eu deixo lá com 200 e eles
27 acreditam que é! Eu acho que seria pior, não se induzir,
28 mas idéia de colocar o page down é para que levasse o
29 aluno a pensar que o número tinha que ser muito grande,
30 mesmo que não fosse infinito.
31 (0:38:30) **P3** Não, eu entendi, talvez eu tenha me
32 colocado mau, é isso que eu quero chegar, quando eles
33 estão dando zoom, eles estão vendo o espaço, vai ter um
34 espaço lá né,
35 (0:38:46) **P1** Mas quando você estiver no campo
36 geométrico sempre vai ter um espaço...
37 (0:39:38) **P2** É porque aqui, eles se agarraram na
38 geometria, é como na outra atividade chega um momento
39 que tem que ir lá para terminar de justificar as coisas e
40 tem que ir para a análise.
41 (0:39:40) **P3** É mais eles debateram e viram né, um fala
42 1000 ou 200 e eles não chiaram do que esse grupo falou?
43 (0:39:49) **P1** Todo mundo chiou, isso que é, eu não sei se
44 eles aprenderam ou não aprenderam, eu não fiz a prova
45 ainda, mas eu, sinceramente quando terminei essa aula
46 eu aplaudi eles pela participação e pelo entusiasmo com
47 que eles participaram da aula.
48 (0:40:07) **P2** Isso ai vale muito mais as vezes do que ir lá
49 e dar a resposta certa.

1 (0:40:10) **P1** Eu fiquei com a sensação de que a minha
2 aula valeu mais do que o semestre inteiro de aulas
3 (0:40:14) **P3** Você deu oportunidade para que eles
4 pensem né.
5 (0:40:20) **P1** Que eles falassem né!
6 (0:40:25) **P2** E não só falar para eles isso aqui está certo,
7 isso aqui está errado.
8 (0:40:30) **P1** Por que é assim, eu tive dois momentos
9 nessa atividade, o ano passado eu apliquei também na
10 minha turma de licenciatura, ai era a primeira versão da
11 atividade, eu nunca tinha trabalhado com a situação de ter
12 debate, de estar filmando, tudo isso assim numa sala de
13 aula, ai vinham perguntas, eu não sabia qual reação, eu
14 ficava sem reação, eu não sabia se eu contava, se eu
15 deixava no ar, eu fiquei com receio, até que ponto a
16 teoria, eles não tinham visto nada do conceito ainda, não
17 dava para falar a teoria, nossa eu fiquei sem ação, ai
18 nesse semestre como eu participei, na graduação,
19 participei com a minha orientadora, eu vi como funcionava
20 o debate, uma porção de debates e a idéia do debate é
21 colocar mais perguntas.
22 (0:41:27) **P3** Nessas apresentações aqui [referindo às
23 apresentações dos alunos] você interferiu?
24 (0:41:30) **P1** Eu interferi sim, eu trouxe as fichas
25 separadas por respostas, os que acreditavam e os que
26 não acreditavam, vamos provocar um debate, vem
27 primeiro quem fala uma coisa e depois quem fala outra,
28 começou com quem acreditava que era suficiente, depois
29 vieram os que acreditavam que precisava de mais,...eles
30 sempre ficavam olhando para mim, esperando uma
31 resposta certa ou errada, e eu nunca dei essa resposta.
32 (0:42:01) **P2** Às vezes é difícil segurar né!
33 (0:42:03) **P1** É difícil, eu não poderia falar se não eu
34 matava tudo ali, eu matava a discussão.
35 (0:42:07) **P3** Se falar que com um retângulo preenche
36 eles vão acreditar, porque o professor tem um poder de,
37 se falar que com um retângulo preenche a área eles vão
38 acreditar [risos do P3]
39 (0:42:22) **P1** Eu acho que foi legal porque é assim, deixa
40 eu colocar o que vocês estão falando, essa dupla, vocês
41 acreditam que, é assim que vocês estão pensando, to
42 certo, to, então eu meio que arrumava a casa assim, são
43 vocês que estão falando, não sou eu, são vocês.
44 **[P1 lê o trecho do roteiro do encontro referente às falas de**
45 **dois alunos da sua turma de 1º ano da licenciatura]**
46 **Flávio e Gislene** [dois alunos do curso de Licenciatura
47 Matemática]
48 Relacionam ao método da exaustão,
49 Quando você tem essa figura, esse gráfico que forma
50 uma curva que não tem uma forma regular, você vai

1 fazendo retângulos, você vai subdividindo, até que você
2 vai chegar num ponto, você vai chegar bem perto do limite
3 do zero, que é o limite da espessura desses retângulos,
4 só que você nunca vai chegar a zero, porque você tem
5 infinitos números entre um número e outro, você vai
6 chegar num número muito aproximado, talvez nesse
7 campo [limites] nós conseguíssemos chegar no valor
8 exato.
9 Essa definição de quantos retângulos, estaria relacionada
10 com limite próximo de zero da espessura desse retângulo,
11 foi o que entendi.
12 Por experimentação é difícil, pelo processo não dá!
13 Para conceituar é difícil.
14 (0:43:53) **P1** É o conceito que eu ia definir depois.
15 (0:44:04) **P1** O que vocês fariam para esse aluno?
16 (0:44:15) **P2** Nós vamos ver que teoricamente é por ai.
17 (0:44:32) **P3** Eu diria que o argumento deles está correto,
18 ele vai chegar na área quando a base do retângulo tende
19 a zero.
20 (0:44:45) **P2** Eu ia dizer que a gente ia ver a teoria e é por
21 ai que a gente vai chegar lá.
22 (0:44:51) **P3** Que de fato usa o conceito de limite, limite
23 quando o numero de retângulos tende ao infinito ou a
24 base tende a zero [gesto com os dedos]
25 (0:45:00) **P1** Ai depois ele [aluno **Flávio** da Licenciatura]
26 coloca assim, por experimentação fica difícil, pelo
27 processo não dá, ai eu interpretei e perguntei para ele se
28 realmente era isso, o que vocês estão falando é assim, se
29 for pelo processo de ir colocando mais um retângulo, mais
30 um retângulo, não dá para calcular a área exatamente,
31 por um processo prático de colocar mais um, geométrico
32 não dá, sempre vai ficar faltando...o que vocês estão
33 falando é que precisa de mais alguma coisa para poder
34 justificar isso, porque ele fala assim talvez nesse campo
35 de limites nós conseguíssemos,...ele falou é.
36 (0:46:23) **P1** Pergunta para a classe: A resposta deles
37 [**Flávio e Gislene**] é exatamente a resposta de **Márcio** e
38 **Tobias** [dupla de alunos que falou antes de **Flávio** e
39 **Gislene**], porque vocês concordam que se o número, se a
40 espessura do retângulo está indo para zero como eles
41 estão falando, quantos retângulos eu vou ter? Infinitos,
42 disseram os alunos. Então, se tem infinitos retângulos
43 vocês concordam que é a mesma resposta de **Márcio** e
44 **Tobias**? Eles responderam que não, **P1** já havia
45 esquecido que **Márcio** e **Tobias** disseram que era infinito
46 porém era aproximado [mesmo com infinitos retângulos o
47 valor da área seria aproximado]...daqui para cá [resposta
48 de **Márcio e Tobias** para a resposta de **Flávio e**
49 **Gislene**], aqui tem infinitos mas estaria próximo, aqui se
50 tiver infinitos mais um processo de limite ai é possível.

1 (0:48:23) **P1** Você fica calculando, limite, limite quando n
 2 vai para o infinito, aumenta o número de retângulos e o
 3 número de retângulos vai para o infinito, a definição
 4 tradicional que tem no Guidorizzi e no Sokowisky, você
 5 vai calcular o limite quando o máximo dos Δx_i tende a
 6 zero dessa soma [**P1** escreve a soma de Riemann no
 7 papel]

8 (0:49:04) **P1** Puxa mas isso é muito complicado, porquê
 9 na época [quando aluno] eu não teria condições de
 10 entender isso.

11 (0:49:10) **P2** Dá para escrever a demonstração
 12 corretamente também assim, você particiona, supõe que
 13 os retângulos tenham a mesma base e você prova do
 14 mesmo jeito.

15 (0:49:26) **P1** Se você tem um intervalo $[a,b]$, você pega
 16 $\frac{b-a}{n}$ e faz o limite disso quando n tende ao infinito.

17 (0:49:30) **P2** Ai você não precisa falar tudo de uma vez
 18 só, se não você vai ter que falar um monte de coisa nova,
 19 um monte de novidades de uma vez só.

20 (0:50:30) **P3** Por que você não usou isso que o **P2** falou?
 21 Todos os retângulos de mesma base? [Essa pergunta foi
 22 feita depois que eu havia dito que tinha definido integral
 23 usando partição e o limite quando $\max \Delta x_i$ tende a zero.]

24 (0:50:32) **P1** É porque eu não havia pensado nisso, eu
 25 não tinha pensado.

26 (0:51:57) **P3** Por exemplo, mas ai nossa preocupação é
 27 com o rigor da matemática com relação a análise, não é?
 28 Essa notação dividir assim ou em partes iguais, mas para
 29 eles o que eu acho que importa é esse conceito [coloca a
 30 mão no papel sobre a carteira] e você apresentar formal,
 31 eu acho que você não está cometendo nenhum pecado
 32 em apresentar retângulos com partes iguais.

33

34 **Encontro 9 – 30/11/2004**

35 **Início:** 17h30

36 **Término:** 18h30

37 **Professores Participantes desse encontro:** P1, P2 e
 38 P3.

39 **Objetivo:** Levantar as considerações/reflexões de cada
 40 integrante sobre os encontros na tentativa de sistematizar
 41 os pontos considerados favoráveis ao ensino do Cálculo
 42 Integral.

43

44 **Tópico Guia para o nono encontro de professores de** 45 **Cálculo**

46

47 - cada professor fala qual seria o seu planejamento de
 48 aulas sobre integral para o próximo ano, considerando as

1 tarefas, as discussões realizadas nos encontros
2 anteriores e a sua própria experiência docente.
3

4
5 **Transcrição:**

6 (1:10:00) **P1** Hoje é o nono encontro, eu tinha pedido no
7 último encontro para que vocês pensassem um pouco
8 sobre o que a gente fez, o que a gente viu juntando com o
9 que a gente já tem de experiência sobre aula de integral,
10 o que a gente poderia sistematizar, o que poderia ser bom
11 para o ensino de integral, dessas atividades que a gente
12 viu, tentar juntar um pouco dessas coisas para formar um
13 esqueleto..., porque não adianta você tem que ter um
14 planejamento, vamos supor assim eu quero mudar a
15 minha aula, para o ano que vem eu vou mudar a minha
16 aula para o ano que vem, eu tenho que planejar isso, eu
17 tenho que escrever, vou ter que colocar uma ordem, uma
18 seqüência, tem que ter um planejamento, senão você não
19 consegue fazer nada diferente, então eu gostaria que
20 vocês falassem, pensassem um pouco sobre isso.

21 (1:11:17) **P3** Eu cheguei a pensar, mas não coloquei no
22 papel, eu pensei assim, se fosse para seguir uma espécie
23 de... para ir adaptando aos poucos eu acho que
24 começaria assim, uma introdução não aprofundada mais
25 histórica sobre o que motivou o cálculo da integral que foi
26 o cálculo de áreas, com algum texto.

27 (1:11:55) **P3** Em seguida acho que daria uma idéia da
28 dimensão das áreas, da partição da área de retângulos,
29 daria essa idéia na partição da área de retângulos e
30 aplicaria essa atividade do winplot [Tarefa 2]

31 (1:12:25) **P1** No laboratório?

32 (1:12:26) **P3** É.

33 (1:12:29) **P3** Ai num segundo momento acho que abriria
34 um tempo para discussão para tirar as idéias e depois a
35 fundamentação da teoria e formalizar isso, o que saiu
36 nesse debate e apresentar o Teorema Fundamental do
37 Cálculo.

38 (1:12:57) **P3** As outras atividades P1, essa da área do
39 círculo, essa atividade seria na verdade só para motivar a
40 história do método da exaustão né, mas que no momento
41 poderia ser feita com a partição dos retângulos ai da área,
42 que aumentando os retângulos. Eu só não aplicaria essa
43 no momento eu to pensando também na parte prática em
44 termos de hora, acho que o que mais se adaptaria a
45 minha realidade seria isso.

46 (1:13:31) **P1** É não adianta fugir, como que você vai
47 mudar? Eu estou pensando num planejamento
48 executável.

49 (1:15:03) **P3** A atividade 3 eu pensei em encaixar isso no
50 teorema fundamental do cálculo, não é.

- 1 (1:15:54) **P3** Eu acho que num primeiro momento seria
 2 isso.
- 3 (1:16:00) **P1** E depois as técnicas de integração?
- 4 (1:16:06) **P3** É isso
- 5 (1:16:08) **P1** O que mais?
- 6 (1:16:20) **P3** As técnicas de integração e aí as aplicações.
- 7 (1:18:29) **P2** Antes seria a introdução histórica, aí seria
 8 aquela atividade..é para integral de modo geral, a integral
 9 tanto definida, como indefinida? O tópico todo?
- 10 (1:18:50) **P1** Ai você já entra na teoria?
- 11 (1:18:55) **P2** Não ainda não, aquela atividade,
 12 suponhamos que eu comece por integral sem uma ordem
 13 definida, assim falando de definida e depois de indefinida,
 14 depois quando terminar integral você vai ter visto as duas
 15 coisas, aí aquela atividade do flash que era...
- 16 (1:19:16) **P1** Mas você vai começar falar primeiro da
 17 teoria para depois fazer a atividade?
- 18 (1:19:20) **P2** Então eu não sei se tem um ordem assim
 19 toda a teoria, ou todas as atividades e depois toda a
 20 teoria, acho que eu ia comentar alguma coisa da teoria
 21 mas sem escrever na lousa, sem formalizar, isso eu vou
 22 formalizar daqui a algumas aulas, entendeu, vamos ter
 23 uma idéia **intuitiva** usando os recursos, depois eu vou
 24 formalizar isso aí direitinho, no P3 a fundamentação
 25 teórica veio mais para frente, isso é o que eu faria
 26 também, uma idéia **intuitiva** já usando o canhão, se eu
 27 tiver uma sala muito grande de setenta alunos.
- 28 (1:19:59) **P1** Qual atividade você iria usar para ter a idéia
 29 **intuitiva**?
- 30 (1:20:00) **P2** A do Flash, deixa eu ver se não estou
 31 confundindo, é aquela das animações da área abaixo do
 32 gráfico e a atividade dois do *winplot* também, inicialmente
 33 as duas, aí eu ia começar a formalizar a teoria.
- 34 (1:21:11) **P2** Como nós vimos as atividades acho que eu
 35 faria também (o mesmo que o P3 já fez) a integral
 36 definida, eu não vou poder fazer qualquer integral, porque
 37 eu não ensinei as técnicas de integração ainda e eu vou
 38 fazer uma integral que você saiba a primitiva sem usar a
 39 integral por partes e depois quando eu der essa teoria eu
 40 faço outras integrais definidas, aí a formalização da teoria.
- 41 (1:21:36) **P1** A formalização da teoria é o teorema
 42 fundamental do cálculo?
- 43 (1:12:37) **P2** É.
- 44 (1:21:42) **P1** Integral definida e integral indefinida tudo
 45 junto?
- 46 (1:21:46) **P2** Primeiro teoria básica da integral definida e
 47 depois a teoria mais completa da integral indefinida, não
 48 tão básica quanto a definida, porque na indefinida eu já
 49 vou emendar com as técnicas de integração.

1 (1:22:15) **P2** Ai quando eu fizer as técnicas de integração
2 além de resolver as indefinidas eu vou por novamente as
3 definidas, porque naquele momento ainda eu fiz só
4 algumas que não precisavam dessas técnicas, que eu
5 não tinha ensinado.

6 (1:22:30) **P1** Ai vai ser sempre um vai e volta?
7 (1:22:31) **P2** Não, não vai ser muito vai e volta, seria
8 definida, indefinida e na hora dos exercícios, depois das
9 técnicas de integração, incluiria resolver também, pensar
10 e discutir, por em lista definidas, não só indefinidas
11 porque naquele momento ficou pobre a definição, porque
12 eu ensinei a teoria, a definição, o que é integral definida
13 usando as atividades, mas aquelas que precisavam de
14 integral por partes para fazer eu não tinha ainda, porque
15 eu não tinha ensinado as técnicas de integração e ai as
16 aplicações.

17 (1:23:18) **P2** Aplicações se fosse um curso de engenharia
18 ou outro porque na matemática eu não sei se faria.

19 (1:24:44) **P2** Depois que eu fizer uma primeira vez a gente
20 vai ver se funciona ou não, talvez para uma segunda vez
21 eu mude a ordem.

22 (1:25:28) **P1** Agora eu vou falar a minha.

23 (1:26:00) **P1** Eu não sei se precisaria mudar o conteúdo
24 programático, eu acho que uma coisa que faz falta
25 quando você começa integral é seqüências e séries, eu
26 não sei se precisa colocar um capítulo sobre séries e
27 sobre seqüências, mas no próprio capítulo de limites, na
28 hora que eu estiver trabalhando com limites eu já vou
29 trabalhar os limites com n tendendo ao infinito, certo? Tipo
30 limite de... quando você calcula a área dos retângulos,
31 não pela definição do máximo da partição tendendo a
32 zero mas sim $(b-a)/n$ com n tendendo ao infinito, ai você
33 faz isso vezes a altura e toma a soma disso, quando você
34 está trabalhando com limite tendendo ao infinito que é
35 equivalente àquela [definição com máx partição tendendo
36 a zero], com partições todas iguais, da mesma forma que
37 o *winplot* faz, então de uma parte **intuitiva** para a
38 formalização acho que não teria um salto tão grande, ai
39 então essa parte com limite tendendo ao infinito eu já
40 estaria trabalhando com as fórmulas necessárias para
41 algumas integrais mais simples. Então a minha idéia é de
42 estar trabalhando na parte de limites, junto o limite de
43 seqüências com n tendendo ao infinito, no lugar de
44 trabalhar com x troco por n com n natural, numa forma
45 **intuitiva** pelo menos para ter uma noção, ai você pode
46 trabalhar essa seqüência além da forma algébrica,
47 trabalhar numa tabela, ter uma parte algébrica, uma
48 numérica e colocar uma parte geométrica, porque você
49 vai somar áreas, então você pode pegar figuras que

1 formem progressão geométrica cuja soma dá 2 por
2 exemplo.
3 (1:31:47) **P1** A idéia é trabalhar junto com limites, porque
4 limite é um negócio que fica morto, então a minha idéia é
5 lá na parte de limites dar ênfase na parte numérica, na
6 algébrica e geométrica, ai eu vou começar a estimular
7 uma discussão sobre [infinito atual] e trabalhar com
8 notação de soma, porque no meu conteúdo programático
9 do jeito que está eu tenho função, limite, derivada e
10 integral.
11 (1:32:51) **P2** Praticamente todos os livros são assim.
12 (1:33:13) **P3** Eu acho que vai relacionar bem com essa
13 soma ai P1.
14 (1:33:04) **P1** Ai porque mesmo tendo feito todo aquele
15 auê que eu fiz lá no laboratório, com as discussões que
16 eu promovi, você define a soma daquela forma, eles
17 entenderam **intuitivamente** o que era aquilo... mas ai
18 ficou numa aula e depois você já passa para o Teorema
19 Fundamental do Cálculo e vai usar o $F(b)-F(a)$ e ai você
20 acaba caindo nas técnicas e acaba sendo..
21 (1:33:51) **P3** O resto do curso.
22 (1:33:52) **P1** Acaba sendo o resto do curso e o que vai
23 cair na prova e vai dar a minha nota, o que vai ficar, o que
24 eles vão aprender, as técnicas eles gostam, ai você
25 coloca quinhentos mil exercícios sobre isso, a técnica não
26 é o problema, não sou contra, é importante, agora só isso
27 não é suficiente para entender o significado.
28 (1:35:10) **P3** É porque a sua idéia P1 é de fato calcular as
29 integrais usando a soma de Riemann, não mostrar a
30 definição apenas.
31 (1:35:26) **P3** É verdade na licenciatura eu acho que é
32 legal
33 (1:35:30) **P1** É uma idéia para reforçar o conceito.
34 (1:35:34) **P2** É porque derivada a gente até costuma fazer
35 pela definição, agora a integral é direto pelo Teorema
36 Fundamental do Cálculo.
37 (1:36:53) **P1** No capítulo de integração não vai diferir
38 muito do que vocês falaram, história do conceito de
39 integral, Arquimedes mais o método da exaustão,
40 atividade 1 sem o debate do João e da Beatriz, pois os
41 alunos de graduação não saberiam ainda entender a
42 argumentação da Beatriz, atividade 2 do winplot e debate
43 das duplas, a definição de integral sem usar $\max \Delta x$
44 tendendo a zero mas sim $(b-a)/n$, cálculo pela definição de
45 alguns exemplos, teorema fundamental do cálculo
46 demonstração junto com a atividade 3, depois as técnicas
47 de integração e as aplicações do tipo daquela do
48 reservatório.

1 (1:43:16) **P2** Ele trabalha a compreensão do conceito e
 2 não só a calculeira [referindo-se ao problema do
 3 reservatório]

4 (1:45:00) **P1** A avaliação tem que acompanhar essas
 5 coisas aqui, porque se eu dei debate eu acho que vai ter
 6 que ter questões dos debates na prova, a minha idéia é
 7 tentar ajudar e reforçar o conceito.

8 (1:44:01) **P3** É eu não vejo nenhum livro que trabalhe com
 9 a definição de integral.

10 (1:44:11) **P2** E mesmo a parte histórica é pouquinha.

11

12 **Encontro 10 – 14/12/2004**

13 **Início:** 13h50

14 **Término:** 14h50

15 **Professores Participantes desse encontro:** **P1**, **P2** e
 16 **P3**.

17 **Objetivo:** Levantar quais as contribuições dos encontros
 18 para a prática profissional de cada um dos participantes.

19

20 **Tópico guia para o décimo encontro de professores de** 21 **Cálculo:**

22

- 23 Perguntar para cada professor quais as contribuições
- 24 dos encontros para a sua prática profissional;
- 25 Levantar as considerações finais de cada participante.

26

27

28 **Transcrição:**

29 (0:1:29) **P2** Contribuiu bastante, bom primeiro só o fato de
 30 a gente conversar aqui seja lá de que assunto fosse já
 31 uma coisa que eu não fazia e nem vocês também já é
 32 uma grande coisa e quanto às coisas que discutimos, o
 33 fato de talvez inverter a ordem, essa mudança constante,
 34 você mudou tudo e ainda não ficou bom, troco isso, troco
 35 aquilo né, isso vou sempre fazer independente de (--) não
 36 só falando de integral e falando de integral (++) é que
 37 você [o pesquisador] estava falando dos encontros eu to
 38 tendendo para o conteúdo.

39 (0:2:14) **P1** Fica a vontade, você fala o que quiser.

40 (0:2:16) **P2** Foi uma reflexão constante, acatei, como na
 41 semana passada o P3 falou da parte histórica primeiro e
 42 tal, uma coisa que eu não tinha pensado, e na hora falei
 43 não, é isso aí, eu não tinha pensado mas já estou
 44 incluindo e se eu não tivesse conversado com você [P3],
 45 talvez só no ano seguinte é que eu fosse me tocar, então
 46 ia demorar um ano para eu incluir aquilo, (++) o que mais
 47 (++) muitas coisas que você trouxe da Educação
 48 Matemática, leituras recentes, que nem das metáforas e
 49 tal, tudo isso eu vou levar em consideração, mas nem
 50 tudo eu sei como eu vou levar em consideração ainda,

1 vou ter que fazer uma primeira vez para daí ir
2 melhorando, mas tudo ou conscientemente ou mesmo
3 sem você perceber você já levou em consideração, você
4 já está levando em consideração, mesmo que sem
5 perceber, fora aquilo tudo o que eu vou fazer
6 conscientemente, lembrando o que nós discutimos e
7 lemos, por enquanto é isso aí

8 (0:3:26) **P3** Eu acho que esses encontros nos levaram,
9 me levou de forma direta a refletir já no momento da
10 preparação das aulas, eu acho que isso já influenciou
11 tanto no momento da preparação das aulas quanto no ato
12 da aula, você parou para refletir, ou seja, me deixou com
13 certas preocupações, isso é bom porque você acha que
14 está tudo bem, você não pensa em mudar né, e a partir
15 do momento que você está vendo que existem outros
16 caminhos, existem outras possibilidades, isso te leva a
17 refletir na preparação das aulas, na maneira com que
18 você vai falar, na maneira com que você vai apresentar e
19 isso pode ajudar bastante na elaboração das aulas, e eu
20 acho que é a primeira vez que eu participo de um
21 encontro entre professores, mas um encontro, vamos
22 dizer assim, isso não é uma reunião pedagógica né, um
23 encontro que funciona e eu acho que isso é o que falta
24 em qualquer nível de ensino, essa troca de experiências,
25 acho que sem acanhamento por parte dos participantes, o
26 que não acontece na verdade, a gente sempre fica com
27 receio, com um pé atrás né, com medo de mostrar que
28 sabe menos ou que sabe mais, acho que isso não
29 aconteceu aqui, acho que foi bem transparente e eu acho
30 que foi proveitoso para todos nós.

31 (0:5:01) **P1** Você diz que numa reunião pedagógica não é
32 tão natural assim?

33 (0:5:02) **P3** Eu acho que isso não acontece, numa reunião
34 pedagógica tratam muito de teoria e que não ocorre essa
35 troca de experiências, é difícil ver isso aqui, acho que é a
36 primeira vez que estou participando de uma reunião que
37 de fato ocorreu uma troca de experiências, pude
38 aproveitar algumas coisas, você **[P1]** me ouviu, o **P2** me
39 ouviu e a gente conseguiu relacionar isso, acho que é o
40 que falta, é uma chave principal né, porque você trabalhar
41 sozinho é uma coisa, a gente sabe que de fato existem n
42 maneiras de trabalhar um assunto, mas você precisa
43 testar isso com alguém que já tem um certo contato, uma
44 certa experiência e eu acho que falta bastante isso, os
45 encontros é ajudaram, me fez refletir quanto a postura nos
46 assuntos a serem tratados na aula, a ordem que foi
47 apresentada nos programas, a sugestão que foi dada no
48 último encontro, também gostei das aplicações, dos
49 programas [referindo aos softwares], das tarefas que

- 1 foram propostas, podem de fato serem aproveitadas
2 numa aula do dia a dia.
- 3 (0:6:12) **P2** Numa reunião pedagógica às vezes tem
4 professor de Língua Portuguesa, de ... e você vai falar de
5 Integral, e nem todos, naquele momento entendem, agora
6 aqui todo mundo está falando de Cálculo, nem sempre dá
7 para falar, por exemplo vamos falar sobre derivada, sobre
8 integral, ah mas o que é isso? Eu sou de outra área. E
9 outra coisa, mesmo que eu faça com professores de uma
10 determinada área, tem professores que não vão falar, vai
11 falar mais ou menos, porque ele vai se expor muito, não
12 vai aceitar, parece que você está lá punindo, >não não é
13 assim>, >muda>, agora a gente veio aqui desarmado.
- 14 (0:7:06) **P3** Ou a pessoa tem receio, toma aquele
15 conhecimento como só seu, acho que isso não pode
16 acontecer, eu acho que se você está tendo resultado
17 positivo, nada mais do que justo de você transmitir isso
18 pros outros para que a gente possa fazer o mesmo né, e
19 não ficar aquela coisa fechada né.
- 20 (0:9:12) **P3** É uma situação delicada porquê, não sei, é
21 um egoísmo muito grande, eu acho que mais ainda na
22 área da matemática, não sei se nas outras áreas isso
23 ocorre...eu vejo a matemática como diferente das outras
24 áreas, é uma área mais árdua, quanto mais você estuda
25 mais de fato você vê que não sabe nada, eu posso não
26 saber resolver, como você [**P2**], como você [**P1**] mas acho
27 que isso não pode ser um constrangimento... eu estou
28 sempre tentando mostrar as aplicações e nada mais certo
29 do que você se apoiar em quem já tem uma certa
30 experiência pra te dar uma base, você se sente mais
31 seguro.
- 32 (0:11:40) **P1** Eu gostaria de perguntar a respeito da
33 linguagem, assim das questões que a gente falou sobre
34 linguagem, sobre metáforas e a prática de vocês, vocês
35 chegaram a pensar em mudar alguma coisa por conta
36 disso, ou não?
- 37 (0:12:04) **P2** Da linguagem, tomar cuidado, como o que
38 nós discutimos aquele dia lá, é claro que a gente usa de
39 recursos às vezes do cotidiano, às vezes da matemática
40 anterior, mas cuidado para não enforçar a matemática, eu
41 sempre tive esse cuidado, mas agora eu vou ter mais
42 ainda, a minha linguagem de esclarecer muito, não
43 acabar usando uma coisa que na cabeça do aluno vai ser
44 prejudicial, então eu tomo cuidado sim, às vezes eu falo
45 num dia, puxa isso eu acho que não devo mais falar né,
46 essa turma eu já falei, já foi, mas pelo menos na próxima
47 vez eu vou falar diferente, eu tenho essa preocupação
48 sim.
- 49 (0:12:46) **P1** Eu acho que o que foi uma grande
50 transformação na minha aula, foi nesse cuidado, porquê é

1 impressionante como que isso pode estar influenciando,
2 porque nessa tentativa de falar de coisas mais simples ou
3 do cotidiano dos alunos para tentar explicar determinado
4 conceito, existe uma passagem que eu acho que é
5 bastante sutil, você acaba tratando das coisas como se
6 fossem as mesmas, então você está falando de (++), o
7 aluno pode estar entendendo o raciocínio, estar
8 entendendo a matemática ou não, quando eu citei pra
9 vocês o exemplo da tangente [**P1** cita que é um exemplo
10 dado por Rafael Núñez em um congresso, no Brasil, em
11 dezembro de 2004], esse toque [**P1** mostra uma mão
12 aberta tocando a outra mão fechada] aqui na linguagem
13 natural tem um outro significado, uma outra semântica, do
14 que na matemática, porque aqui quando você toca, você
15 não tem intersecção e na matemática é a intersecção de
16 dois conjuntos que tem um ponto em comum...

17 (0:15:45) **P1** Quando você pega lá a equação como uma
18 balança e ai se fala disso, de equação como balança para
19 tentar explicar a matemática, ai o aluno vai entender a
20 equação como uma balança e quando você chega nas
21 equações que envolvem números negativos onde a
22 balança não é suficiente, ele não vai voltar para a
23 matemática que o professor quer, o professor quer, o que
24 a gente quer ensinar? A matemática, a ciência
25 matemática, a teoria é isso que a gente quer ensinar
26 enquanto professor, agora os meios que a gente faz para
27 chegar nesse conhecimento, nem sempre podem estar
28 realmente ajudando o aluno a chegar porque ele pode
29 parar no meio do caminho, não é que eu estou dizendo
30 para o aluno, >não use a balança>, >isso não é
31 matemática>, >não acho que é isso>, não é por ai, não
32 estou dizendo >você não pode pensar equação como
33 uma balança>, daí eu estaria indo contra a própria
34 questão didática [contra a teoria da corporeidade, das
35 metáforas conceituais] de você estar usando uma coisa
36 que conhece, através de uma metáfora, para uma coisa
37 que você não conhece, eu to usando algo que eu conheço
38 que é uma balança para tentar entender um conceito que
39 é abstrato, o de equação... o que eu acredito e a gente
40 está tentando falar é que essas coisas são distintas, você
41 pode usar a balança, você chega até um certo ponto [com
42 a balança], você pode até simular situações com
43 saquinhos vermelhos para representar os números
44 negativos e na matemática é assim.

45 (0:20:53) **P3** Por mais que a gente tente realmente
46 procurar meios para facilitar o entendimento da
47 matemática, chega uma hora que você não tem como
48 fugir dela, você não pode fugir dela... a matemática tem
49 essa natureza.

1 (0:23:22) **P3** A gente sempre acaba pecando por que
2 você fica preso né, você não tem um curso aberto, você
3 sempre está preso a um conteúdo e isso te leva de fato a
4 cometer (--) uma coisa que você poderia trabalhar melhor,
5 a gente tenta fazer o melhor, mas chega uma hora que
6 não dá.

7 (0:28:05) **P1** Outra coisa que é muito importante é o fato
8 de que o conhecimento é construído pelo aluno, não
9 adianta, por mais que você tenta falar, não é o fato de
10 você falar que vai fazer com que ele aprenda...você acaba
11 ficando menos ansioso, menos angustiado quando o
12 aluno não entende, tem um professor amigo meu que diz
13 “eu falei dez vezes e o aluno não conseguiu entender”,
14 essa frase é muito comum né, isso eu não faço mais, vai
15 dando uma gastura, você tenta explicar e fala de novo,
16 fala de novo, deixando o aluno falar, você acaba
17 descobrindo onde está a dificuldade dele e você usa uma
18 outra forma...

19 (0:29:16) **P2** Dez vezes do mesmo jeito não adianta,
20 então fala uma segunda vez de outra maneira, mesmo
21 assim pode ser que você fale algumas vezes e não
22 adiante, ai você não tem essa culpa...fazer o quê? A
23 gente também não faz milagres, como que é a história
24 [pergunta para **P1**] a gente não enfia [faz gesto com a
25 mão como se colocar algo num recipiente]

26 (0:29:40) **P1** É a gente não transmite conhecimento. Eu
27 não vou falar o meu conhecimento e transmitir para você
28 através da linguagem, eu vou falar, mas se você não
29 quiser aprender? Você transmite informação, por
30 exemplo, quando eu falei para você como copiar figuras
31 usando o paint, eu transmiti uma informação, mesmo que
32 eu fale sobre teoria, ou sobre qualquer coisa eu to dando
33 informação, se essa informação chega até você e se você
34 tiver interesse, vai lá abre um livro, vai estudar, ela vai
35 passar a ser conhecimento a partir do momento que você
36 se apropriar dela e desenvolver aquilo, quero estudar
37 mais e vou desenvolver.

38 (0:30:36) **P2** É que nós somos seres humanos, não
39 somos máquina ou robô, no computador você faz isso,
40 você copia, Ctrl + c, agora aqui não dá para dar um Ctrl+c
41 Ctrl+v.

42 (0:30:45) **P1** Cada um tem a sua identidade

43 (0:30:46) **P3** Tem o seu ritmo [risos]

44 (0:30:50) **P1** Eu acho que esse mundo da cognição que
45 eu estou estudando, que é assim, de tentar entender
46 como as pessoas pensam a matemática é fantástico,
47 porque essas coisas complexas aí das metáforas, de ter
48 uma linguagem e você falar de uma certa forma que é
49 parecida mas não é, e você pega e junta tudo como se
50 fosse, quando eu falo essas coisas é tudo em relação ao

1 pensamento da pessoa, como na cabeça da gente se
2 processa o conhecimento. O conhecimento ,em geral,
3 através dessa teoria que estudo, a forma de processar as
4 coisas é a partir das coisas conhecidas, já corporificadas,
5 que é da Teoria da Corporeidade, das coisas que você já
6 assimilou, que você já sabe, você já tem incorporado, se
7 eu já sei, eu vou pra frente tentar avançar, eu não falo
8 diretamente de alguma coisa, você vai fala de alguma
9 coisa [conhecida] para entender outra [desconhecida].

10 (0:31:53) **P3** Mesmo nas coisas mais abstratas, eu
11 sempre me apoiei assim em figuras, o visual ajuda muito
12 né, mesmo na parte mais abstrata da matemática dá para
13 enxergar, na minha dissertação de mestrado agora, é
14 completamente abstrata , na primeira versão eu coloquei
15 um monte de desenho de como eu imaginava aquilo, o
16 professor mandou eu cortar tudo, mas era como eu
17 envergava, a maneira de entender aquilo, tinha uma
18 aplicação lá usava ífimo e sup e eu queria entender
19 como aquilo funcionava, fiz um desenho, uma estrutura,
20 que do meu modo de enxergar era aquele que funcionava
21 para dar uma explicação, eu acho que isso ajuda, é aquilo
22 que você falou dos dois campos, da geometria, mas
23 sempre tomar cuidado para não...

24 (0:32:45) **P1** Na Graduação e na Pós, uma frase que eu
25 ouvi muito, é o desenho não vale nada, eu ouvi isso a
26 minha formação inteira, o desenho não vale nada, >como
27 não vale nada>, ele vale tudo, fica assim a professora ia
28 lá fazia o desenho, mas pelo amor de Deus apaga isso
29 aqui, isso aqui não vale nada na matemática, o que vale é
30 o rigor da matemática, mas eu queria ver o aluno
31 entender isso sem ter esse campo que ajuda naquele lá
32 que é mais abstrato

33 (0:34:45) **P3** [Falando da sua dissertação de mestrado] Eu
34 tinha que me inserir naquele mundo lá pra conseguir
35 entender aquilo né.

36 (0:34:55) **P1** Você tinha que se inserir? Explica isso.

37 (0:35:02) **P3** Então [**P1**], eu estava trabalhando com
38 conceitos muito abstratos, eu precisava tornar aquilo de
39 uma forma mais palpável, que eu conseguisse ver né, a
40 tese inteira falava de estrutura de espaço quociente,
41 quando você trabalho com espaço quociente já é uma
42 coisa né!, chegou um ponto que ficou tão abstrato que eu
43 não estava entendendo mais.

44 (0:39:45) **P1** Na sala de aula, o que vocês acham que
45 pode ser efetivamente mudado com essas coisas que a
46 gente estudou? Dois pontos que vocês mudariam.

47 (0:40:05) **P2** Um é a reflexão sobre a linguagem, pré e
48 pós aula, que depois da aula também, todo dia eu vou
49 viajando [**P2** mora em outra cidade] pensando puxa aquilo
50 já foi, agora para uma próxima aula...outra é a reflexão

1 continua sobre a integral, sobre as mudanças que
2 falamos, sempre estar procurando coisas novas, mudar a
3 ordem...**

4 (0:41:20) **P1** O que eu acho interessante é que a gente
5 está partindo da prática nossa, do que a gente faz na sala
6 de aula, isso eu acho que falta nas pesquisas, você tem
7 relato das teorias, elas estão lá funcionam que é uma
8 beleza, ai você vai e aplica um teste de acordo com
9 aquela teoria, e o que a gente fez aqui é exatamente o
10 contrário, eu estou partindo do que vocês estão falando
11 da prática de vocês, partindo do que a gente faz na sala
12 de aula, do que os alunos falaram naquelas tarefas, do
13 que vocês pensaram daquelas tarefas, partindo do que as
14 pessoas realmente falam sobre a prática e eu acho que
15 para poder, eu como profissional, para que eu consiga me
16 desenvolver profissionalmente para mim é muito
17 interessante você estar refletindo sobre a sua prática e
18 essa forma de trabalhar em grupo eu acho que ajudou
19 bastante, eu gostei de ter essa reflexão em grupo, porque
20 eu estava com algumas dúvidas e pra refletir sozinho é
21 difícil, tem alguns pontos que eu discuti com vocês, será
22 que mudo, será que não mudo, será que é essa tarefa ou
23 não é, o que vocês acham e o que vocês não acham, a
24 partir do momento que eu tive a possibilidade de falar com
25 vocês essas coisas, eu acho que é novo ainda na
26 pesquisa em Educação Matemática, principalmente no
27 ensino superior, quantos grupos de cálculo fazem esse
28 tipo de pesquisa, são poucos, partindo da prática, lógico
29 tendo um fundo teórico para tentar juntar as duas coisas.

30 (0:43:20) **P2** Uma coisa só para comentar também é que
31 eu me senti totalmente a vontade, até de falar coisa
32 errada, não tive medo nenhum de falar coisa errada para
33 vocês, alguma coisa que vocês discordavam ou quando
34 eu discordava, me senti inteiramente a vontade, eu não
35 tive aquele receio de eu preciso agradar, eu preciso
36 agradar.

37 (0:44:13) **P3** Eu gostei da ordem proposta dos conteúdos
38 do último encontro, eu acho que isso é uma coisa que eu
39 já posso colocar em prática a partir da próxima turma e
40 uma coisa que eu não fiz nesse semestre e vou fazer
41 também é usar a tarefa no computador, aquela do winplot.

42 (0:44:55) **P1** Agora uma pergunta para cada um para
43 terminar, esse é o último encontro, agradeço desde já a
44 participação, foi uma contribuição muito importante para o
45 meu trabalho... para o meu Doutorado esses dez
46 encontros é o que eu precisava, mesmo assim eu gostaria
47 de continuar com os encontros no ano que vem e gostaria
48 de saber se vocês continuariam ou não?

49 (0:46:08) **P2** sim

50 (0:46:10) **P3** Eu também.

- 1 **Encontro 11 – 15/06/2005**
 2 **Início:** 17h30
 3 **Término:** 18h30
 4 **Professores Participantes desse encontro:** P1, P3 e
 5 P5. (O professor P2 foi demitido da instituição no final de
 6 2005 e P5 passa a fazer parte do grupo)
 7 **Objetivo:** Retomar as discussões sobre a tarefa 1,
 8 buscando explorar mais os conceitos de infinito atual e
 9 potencial e integrar o novo participante, o P5, das
 10 discussões.

11

12 **Tópico guia para o décimo primeiro encontro de**
 13 **professores de Cálculo:**

14

15 **1. Informações:**

- 16 Os encontros serão filmados e as fitas de vídeo serão
 17 transcritas;
 18 A identidade de cada participante será preservada;
 19 Os dados serão analisados e utilizados na minha tese
 20 de Doutorado que tem provisoriamente o título:
 21 “Aprendizagem Profissional na e para a Prática: um
 22 grupo de Professores de Cálculo e o ensino de
 23 Integral” e o objetivo de: investigar e analisar como a
 24 discussão e a reflexão, no âmbito de um grupo de
 25 professores de Cálculo, podem contribuir para o
 26 desenvolvimento profissional dos participantes desse
 27 grupo, partindo do que os professores efetivamente
 28 falam sobre a sua prática, em particular sobre suas
 29 aulas de Integral de Riemann de função real de uma
 30 variável.

31 **2. Questões que procuro responder com a minha**
 32 **pesquisa de doutorado:**

- 33 De que modo os professores podem estar aprendendo
 34 mais sobre a aprendizagem matemática dos
 35 estudantes e sobre o ensino de Cálculo, quando eles
 36 trabalham sobre registros, vídeos ou experiências da
 37 prática?
 38 Qual o papel da linguagem na reflexão e
 39 aprendizagem sobre a prática? Qual o tipo de
 40 linguagem utilizada pelos professores de Cálculo
 41 quando ensinam Integral? Usam metáforas¹? Têm
 42 consciência das metáforas que utilizam?
 43 Qual a concepção de conhecimento dos professores e
 44 quais as implicações na sua prática pedagógica?
 45 Qual o papel da tecnologia no ensino de Integral?

46

47 **3. Apresentação dos professores**

¹ A essência da metáfora é compreender e experienciar uma coisa em termos de outra (LAKOFF&JOHNSON, 2002, p. 47).

4. Discussão da tarefa 1- infinito atual e infinito potencial

Transcrição:

[P1 – Fala do objetivo dos encontros, da sua pesquisa do Doutorado e do desejo de montar um grupo de discussão sobre o ensino de Cálculo].

10 (0:13:09) P1 - ...pensando em mudar um pouco a minha aula, trouxe uma tarefa usando o CABRI, começando pela integral definida, isso a gente já havia discutido no semestre passado, ao invés de começar pela integral indefinida, não sei, como que é a sua aula? [pergunta para P5] Você começa pela integral definida?

16 (0:13:28) P5 – Esse ano foi assim, o ano passado foi o contrário comecei pela integral definida, depois pela indefinida.

19 (0:13:30) P3 – Você achou que foi melhor?

20 (0:13:32) P1 – É isso que eu preciso ouvir!

21 (0:13:34) P3 – Eu sempre comecei pela indefinida, foi o ano passado que eu mudei.

23 (0:13:39) P5 – Pois é, na forma canônica né, pois é, uma vez que eu dei lá na Federal de São Carlos foi canonicamente, indefinida depois definida, eu queria fazer diferente para ver resultados, eu achei interessante pelos impactos que causaram, mas por outro lado sem querer falar mau de nada, mas é aquela turma que são os formandos, então, ou seja, uma turma muito fraca, não dá pra você ter respaldo nenhum.

31 (0:14:17) P1 – Formandos? Eles estavam concluindo o curso?

33 (0:14:19) P5 – É os formandos de hoje, deste ano, o pessoal que está na matemática 5 [disciplina da grade do curso de licenciatura desta instituição]

36 (0:14:25) P1 – Ah, aqui!

37 (0:14:26) P5 – Isso é aqui, aquela turma muito fraquinha.

38 (0:14:32) P1 – Ah entendi, os formandos e você acabou não fazendo?

40 (0:14:33) P5 – Não, ai eu fiz primeiro a definida e depois a indefinida e foi meia dúzia que entendeu assim.

42 (0:14:48) P1 – E a integral definida você começa como?

43 (0:14:50) P5 – Digamos assim eu coloquei um problema, quer dizer uma motivação né, como calcular a área, bom primeiro começo com um quadrado, um retângulo, e aí depois digamos, vou pegar uma região que pelo menos a base seja o gráfico de uma função, quer dizer começo com a motivação né, a afirmação é que é uma técnica que dá para resolver esse tipo de problema e inúmeros outros né, porque para falar de integral definida, você não

- 1 precisa falar da derivada né, você pode começar primeiro
 2 a falar de integral definida sem falar de derivada.
 3 (0:15:23) **P1** – Sim você pode começar, e historicamente
 4 a integral veio primeiro.
 5 (0:15:29) **P5** – Historicamente primeiro veio a integral
 6 definida?
 7 (0:15:33) **P1** – Sim, o Arquimedes já trabalhava com a
 8 noção de integral a 300 a.C.
 9 **P1** – Explica a tarefa 1 (Aproximação da área do círculo
 10 pelas áreas dos polígonos regulares inscritos), pergunta
 11 para os demais professores o que eles responderiam se
 12 tivessem um aluno como o João e outro com a Beatriz.
 13 (0:20:12) **P5** – No fundo você está fazendo um exercício
 14 de limites aqui né? A seqüência $\frac{1}{n}$ se aproxima de zero
 15 mas nunca é zero [gesto com as mãos: uma mão se
 16 aproxima da outra até a colisão dando a idéia de que a
 17 seqüência está chegando ao seu limite] essa é a coisa né,
 18 esse é um ponto, o aluno que entende isso cara!
 19 (0:20:31) **P3** O problema é, é uma coisa confusa pra
 20 gente explicar também né, **P5**, porque de fato a
 21 argumentação desses dois alunos, eles estão discutindo,
 22 como é que a gente colocaria melhor esse está certo,
 23 esse não está, é uma coisa confusa que acaba
 24 atrapalhando dependendo, aqui fala né [lê o texto] posso
 25 continuar aumentando o número de lados que o processo
 26 jamais esgotaria a área do círculo, como é que eu vou
 27 convencer o aluno que geometricamente vai acontecer
 28 não vai [risos]
 29 (0:21:37) **P3** Ele [João da tarefa 1] ta concordando né, ele
 30 ta concordando que independentemente do número de
 31 lados sempre haverá espaços...para ele não vai exaurir.
 32 (0:21:53) **P5** Quer dizer, dado um polígono você
 33 consegue um outro com área um pouco maior.
 34 (0:22:09) **P3** Já a menina fez o cálculo.
 35 (0:22:12) **P3** Essa é matemática [risos]
 36 (0:22:13) **P5** Um é geômetra e o outro é analista.
 37 (0:22:45) **P1** [Pergunta para **P5**] Você vê algum furo
 38 nessa dedução? [Os professores dizem que não tem nada
 39 de errado]
 40 (0:24:49) **P1** [Pergunta para **P5**] O que você diria pro João
 41 e o que você diria para a Beatriz?
 42 (0:24:52) **P3** Pro João, da maneira com que ele
 43 raciocinou, acho que ele está certo, você pega um
 44 polígono, depois você dá um passo a mais e pega um
 45 polígono um pouquinho maior e se você continuar assim
 46 você vai passar uma eternidade e nunca de fato vai
 47 chegar, ele ta certo né!
 48 (0:25:16) **P1** Ele está certo e ela está certa? [pergunta
 49 para **P5**]

- 1 (0:25:21) **P5** Pois é, ela também ta certa né, só que ela
2 avançou um pouquinho a mais porque no fundo ela
3 também pensou isso né.
- 4 (0:25:25) **P1** Mas então será que ela entendeu?
- 5 (0:25:29) **P5** Essa é uma pergunta que né?
- 6 (0:25:32) **P5** Bom no fundo ela pensou isso também, eu
7 vou colocando polígonos, eu nunca vou chegar na área
8 do círculo, mas no limite, até onde eu posso chegar né?
9 No máximo até a área do círculo, bom eu não sei se foi
10 isso que ela pensou né, essa é a resposta, ele fez a conta
11 né, ela passa o limite.
- 12 (0:25:55) **P3** Mas talvez seja pela própria interpretação do
13 limite né, quando você diz o limite é isso, ou então, ele
14 pode entender quando ele diz que o limite é isso, significa
15 que o x >se aproxima> de zero o resultado desse cálculo
16 >fica próximo> desse cálculo, essa igualdade aqui é uma
17 coisa.
- 18 (0:26:47) **P1** É complicado, na minha opinião esse é um
19 problema pro cálculo, pra análise, porque uma boa parte
20 dos problemas gira em torno disso, o aluno aceitar isso, é
21 uma aceitação ou ele aceita ou então ele terá problemas.
- 22 (0:26:43) **P3** Mas eu acho que a única fundamentação daí
23 depois que vai ser dada é com épsilons e deltas, a gente
24 pode tentar fazer uma aproximação, mas eu acho que a
25 formalidade é a única prova, dizer que esse limite é igual
26 a isso, significa que o resultado desse cálculo se
27 aproxima desse, quando x se aproxima de zero, não
28 posso interpretar assim? Será que essa aluna, do jeito
29 que ela dá a resposta, acho que pra ela o limite é
30 exatamente a área do círculo que depois com as noções
31 de épsilon e delta a gente vê que ela ta correta, mas num
32 primeiro momento se ela não teve essa noção de épsilon
33 e delta, não sei se ela teve.
- 34 (0:27:45) **P1** Eu acho que mesmo com a noção de épsilon
35 e delta, eu acho que épsilon e delta complica mais ainda,
36 em relação a entender o significado real.
- 37 (0:27:56) **P1** [Pergunto para **P5**] Você já ouviu falar em
38 infinito atual e em infinito potencial?
- 39 (0:27:58) **P5** Infinito atual?
- 40 (0:28:00) **P5** Não.
- 41 (0:28:10) **P1** Vou continuar a minha pesquisa, isso é uma
42 situação da história, são termos da história que
43 apareceram e eu to batendo nessa tecla, eu acho que se
44 a gente estudar um pouco sobre isso ou tiver alguma
45 leitura sobre esses assuntos vai ajudar a entender essa
46 história do atinge ou não atinge [o limite da seqüência]
47 quando você fala que atinge é o infinito atual, é como se
48 você tivesse trabalhando com o infinito como se ele fosse
49 uma “coisa”, algo que pudesse ser atingido, isso graças a
50 Cantor que conseguiu formalizar tudo sobre o infinito, a

- 1 potencialidade dos conjuntos infinitos tal, agora o infinito
 2 potencial é um termo que surgiu antes, que é exatamente
 3 esse pensamento do aluno aqui ó [o João], você vai
 4 colocar mais um, mais um e nunca atinge, é o $n+1$, então
 5 eu trouxe esse artigo para vocês, é muito interessante
 6 esse artigo, por exemplo, o Gauss não acreditava no
 7 infinito atual, para ele era uma coisa absurda.
 8 (0:30:35) **P3** Eu acho que esse problema já começa no
 9 ensino médio, quando você vai explicar por exemplo
 10 dízima...você começa lá com 0,999.. é igual a 1.
 11 (0:30:54) **P1** Exatamente, se você acredita que 0,999... é
 12 igual a , a partir do momento que você coloca igual a 1 é o
 13 infinito atual, você está atualizando, é igual a , então se
 14 você assume que 0,999.. é igual a 1, você está no infinito
 15 atual, você está potencializando, é como se você tornasse
 16 essa coisa aqui que é infinita em 1, agora se você
 17 acredita se você acredita só no potencial, eu to tentando
 18 entender o que o aluno pensa, se o aluno pensa que eu
 19 coloco zero, nove, nove, depois eu posso colocar mais um
 20 nove continuar esse processo ele ta no processo que
 21 historicamente era chamado de potencial, vou
 22 acrescentando mais um dígito, mais um dígito nesta
 23 história e nunca termina e está certo né!, só que eu acho
 24 que chega um momento que você tem que falar se você
 25 continuar pensando assim, não vai dar para você fazer
 26 matemática, você tem que entender os conceitos da
 27 matemática.
 28 (0:32:40) **P1** [Terminando o 11º encontro lanço uma
 29 pergunta para o próximo encontro] Além do infinito atual e
 30 do infinito potencial que depois se vocês quiserem podem
 31 olhar o artigo, o que é conceito?
 32 (0:32:53) **P5** Conceito em que sentido?
 33 (0:32:58) **P1** Digamos assim, eu quero ensinar ao aluno o
 34 conceito de integral, o que é o conceito para você, o que
 35 você entende por conceito?
 36 (0:33:12) **P3** Eu acho que é bem geral isso, acho que é
 37 bem geral, eu vou pensar né... [risos]
 38 (0:33:20) **P1** O que é conceito, o que você entende por
 39 conceito? Se você tivesse de falar rápido o que é
 40 conceito? [**P1** pergunta para **P3**]
 41 (0:33:56) **P3** Quando desejo que o aluno aprenda o
 42 conceito de integral, ai você pode ter uma visão subjetiva,
 43 sei lá em termos da parte **intuitiva**? Agora se eu quero
 44 formalizar essa coisa, essa hipótese, essa visão não é
 45 uma coisa única assim sólida né, o conceito pronto e
 46 acabado.
 47 (0:34:32) **P5** Pois é, sabe que eu nunca tinha parado para
 48 pensar nisso.
 49 (0:34:39) **P1** Eu também não.

1 (0:34:40) **P5** Sei lá pensando, eu não sei se eu vou
 2 pensar a mesma coisa amanhã, mas hoje o conceito é
 3 uma coisa mais abstrata, definição de função contínua é
 4 um conceito mais abstrato, é um abstrato mais concreto,
 5 seja f uma função...

6 (0:35:51) **P1** Um abstrato mais concreto?

7 (0:35:04) **P5** É um paradoxo ai do cão né [risos] é mas um
 8 abstrato digamos assim mais palpável, seja f uma função
 9 definida sobre um subconjunto da reta, você ta
 10 considerando uma função ali, agora o conceito eu acho
 11 que é uma coisa assim é o abstrato mesmo da coisa, não
 12 a idéia de continuidade bom...

13 (0:35:36) **P1** Quarta feira que vem a gente continua.

14

15 **Encontro 12 – 22/06/2005**

16 **Início:** 17h30

17 **Término:** 18h30

18 **Professores Participantes desse encontro:** P1, P3 e
 19 P5.

20 **Objetivo:** Analisar as concepções dos professores sobre
 21 o que é conceito.

22

23 **Tópico guia para o décimo segundo encontro de**
 24 **professores de Cálculo:**

25

26

27

28

29

30

31

32

33

34

35

36

37

38

39

40

41

42

43

44

45

Trechos transcritos do vídeo do primeiro encontro:

“Quando eu introduzi o conceito de integral eu comecei pelo método tradicional, definindo a primitiva, a integral indefinida, para depois a integral definida, só que para esse ano pensei um pouco se seria possível começar pela integral definida, falando de área e a partir do conceito de área abaixo de uma curva, da partição, dos retângulos, deduzir a integral definida e a partir da integral definida falar das técnicas de integração, primitivas, ou seja, mostrar aquilo que eu acho que surgiu historicamente primeiro a integral definida, o cálculo de área abaixo de uma curva e depois as técnicas de cálculo para resolver a integral definida e aí a ligação entre as duas é a ponte pelo TFC”. (PROFESSOR P3, L22)

“No cálculo para engenharia o conceito de limite se passa de forma muito superficial, mas quando você vai trabalhar com o conceito de integral, você faz um

1 retângulo, você faz o delta x tender a zero, pra eles
2 aquilo não faz sentido, pra eles o que faz sentido é você
3 trabalhar com algo muito pequeno, mas não tendendo a
4 zero, são formas diferentes de introduzir, não sei se pra
5 matemático é específico ou pra engenheiro, mas acho
6 que pra mente humana vale como regra geral, para essa
7 abstração do delta x tender a zero, para dizer aquilo que
8 ficou muito pequeno, você representa pelo dx e aquilo é a
9 base do retângulo e a altura do retângulo é $f(x)$, então eu
10 acho que são os conceitos né, que realmente se forem
11 discutidos, acho que podem levar a uma melhora”.
12 (PROFESSOR P3, L57)

13
14 “Eu fui comentar com a turma essa história do limite do
15 delta x tendendo a zero, ai você escreve lá o $f(x)dx$ aquilo
16 é a base do retângulo e o $f(x)$ é a altura ok, mas não vai
17 sair por ai dizendo que na integral é o $f(x)$ vezes o dx,
18 aquilo lá é uma notação, também não é? Isto me
19 preocupa, eu falo isso porque eu sei que eles vão
20 entender melhor pelo menos o conceito, eu sei que eles
21 vão entender aquele símbolo da integral, pra eles vai ter
22 uma visão melhor o S eu to somando áreas dos
23 retângulos, o que me dá a base dos retângulos é o dx e o
24 que me dá a altura do retângulo é o $f(x)$, mas espera ai,
25 isso é uma notação, isso não é o $f(x)$ vezes o dx”.
26 (PROFESSOR P3, L115)

27

28 Roteiro:

29

- 30 1. **P3** Quando você diz conceito o que você quer dizer
31 com isso?
- 32 2. **P5** Você concorda com isso? Qual a sua posição?
- 33 3. O que é o conceito de integral?
- 34 4. O que vocês acham que é necessário para que o
35 aluno compreenda o conceito de Integral? Como são
36 as suas aulas? Quais os resultados positivos e
37 negativos?
- 38 5. **P5** você usa o mesmo tipo de argumento de **P3** (essa
39 *história do limite do delta x tendendo a zero, ai você*
40 *escreve lá o $f(x)dx$ aquilo é a base do retângulo e o $f(x)$*
41 *é a altura) ? Concorda ou discorda, acha importante
42 esse tipo de discurso para facilitar a aprendizagem
43 matemática do aluno? O que você responde a um
44 aluno que lhe pergunta o que significa o dx?*
- 45 6. **P5** Nas suas aulas sobre integral quais são as dúvidas
46 mais frequentes dos alunos? Como você identificou?
47 Onde você acha que residem as dificuldades dos
48 alunos? Por que você acha que é aí? Como pode
49 afirmar?

- 1 **7. P5** Como foram os resultados das provas sobre
 2 integral? A que você atribui esses resultados?
 3 **8. P5** Você pretende mudar a sua aula sobre integral? Por
 4 que?
 5 **9. P3** Qual a contribuição dos dez primeiros encontros
 6 para a sua aula? O que mudou?
 7

8 **Para refletir:**

9
 10 “*Conceitos são sistemas abertos através dos quais os*
 11 *seres humanos podem aprender coisas novas e podem*
 12 *inventar...*” (ROSCH, 1999).

13
 14 “*Conhecimento não pode ser adquirido, transferido ou*
 15 *apropriado e sim **produzido pelo sujeito** de modo*
 16 *bastante complexo. Podemos ao comunicar, transportar*
 17 *informação, mas nunca conhecimento*”.

18
 19 **Transcrição:**

20
 21 (0:35:00) **P5** Não é verdade, é verdade [O professor **P5**
 22 inicia a discussão levantando a questão da veracidade do
 23 Cálculo utilizado pela Beatriz na tarefa 1]

24 (0:36:10) **P1** Se você tem o gráfico da função,... se você
 25 tem lá o gráfico da função $\frac{\text{sen } x}{x}$, quando x está perto do
 26 zero, o gráfico se aproxima do um [**P1** faz um gráfico no
 27 papel]...ai o que eu estou pegando, estou pegando alguns
 28 pontos, x não é $\frac{\pi}{n}$, então que pontos são esses

29 $\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \dots$ que está vindo para cá [próximo do zero],

30 então se eu calcular a f nesses pontos vai acontecer a
 31 mesma coisa não é? Se para todo x isso acontece, em
 32 particular para uma seqüência de pontos isso também vai
 33 acontecer não vai?

34 (0:37:43) **P5** É, não, é ta certo, a medida que n cresce ele
 35 $[\frac{\pi}{n}]$ decresce dessa forma aí que tu fez né.

36 (0:38:12) **P5** É em análise tem aqueles resultados né, se
 37 uma seqüência converge, é que uma seqüência está
 38 indexada né nos naturais... não é talvez eu esteja
 39 querendo ser xarope.

40 (0:38:48) **P5** Mas agora digamos assim digamos as
 41 respostas da menina e do menino, a menina assim ela
 42 respondeu de uma forma assim, utilizando um outro
 43 argumento, quer dizer não um outro argumento mas o que
 44 ela fala é que quando n é um número muito grande as
 45 áreas coincidem, mas ela falou no limite né.

- 1 (0:39:14) **P1** É ela ta no processo de limite e ta dizendo
 2 quando n vai pro infinito...
- 3 (0:39:15) **P3** Ela ta interpretando o limite né.
- 4 (0:39:20) **P1** Ela fala que é possível chegar na área $\pi.r^2$
 5 que isso vai ser igual a $\pi.r^2$, ao passo que o outro não,
 6 se fala que você pode ir acrescentando, acrescentando e
 7 nunca vai chegar à área.
- 8 (0:39:31) **P3** É tem esse detalhe né, no limite tudo bem
 9 né, no limite é igual, mas?
- 10 (0:39:39) **P1** A minha preocupação nessa história toda do
 11 limite né é em relação ao pensamento do aluno, porque
 12 na matemática tá claro né, isso de fato acontece o limite
 13 de fato é assumido e, talvez esse processo [Cálculo da
 14 Beatriz] acho que não tem, mas se tiver problemas pode
 15 ser resolvido de outra forma, você pode demonstrar, você
 16 pode usar a própria integral para calcular a área do
 17 círculo, a minha preocupação é que eu acho que um dos
 18 maiores problemas dos alunos que têm dificuldade com o
 19 Cálculo, não só no Cálculo, mas na Matemática numa
 20 forma geral né, da gente tá entendendo o processo do
 21 pensamento, o que as pessoas pensam a respeito dessas
 22 coisas, porque eu acho que se a gente tá dando aula lá e
 23 dando bulhufas pro que os outros estão pensando, da
 24 forma como os alunos pensam ou deixam de pensar e
 25 mesmo a gente, essas coisas são complicadas porque a
 26 gente pára, opa, como que é isso, como que não é, então
 27 acho que a gente sabendo um pouco como se processa o
 28 conhecimento ajuda bastante. Estudei agora no
 29 Doutorado, li muito sobre conhecimento, como que, as
 30 formas que a gente pensa, e essa estrutura que eu
 31 coloquei pra vocês, aí do infinito atual e potencial, que
 32 surgiu na história da Matemática, ela ajuda um pouco a
 33 pensar nessas coisas, não tô dizendo que isso é certo ou
 34 errado, mas eu acho que pode ajudar e de fato você tem
 35 que acreditar que aquilo chega [atinge o limite] porque
 36 senão você nunca vai acreditar no Cálculo.
- 37 (0:41:29) **P3** Mas a justificativa para o aluno eu acho que
 38 mesmo nos primeiros anos quando você dá o conceito de
 39 limite, como será que o aluno enxerga o limite? Porque
 40 mesmo sendo formal para matemático né, aquilo tem um
 41 valor, pra eles que tão vendo pela primeira vez, aquilo não
 42 é tão importante, então eles vão mais pela **intuição** eu
 43 acho, no começo né, você pega o limite né dessa função,
 44 você diz quando o limite é igual a um, eu acho que tem
 45 aluno que, não sei se por trás daquilo de fato ele enxerga
 46 o que está acontecendo o que significa dizer que o limite
 47 de $\frac{\sin x}{x}$ quando tende a zero dá um pra ele, ele ta
 48 sabendo que o x se aproxima de zero, o f de x ta se

- 1 aproximando de um e que isso não deixa de ser uma
 2 notação $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ é uma notação e essa notação tem
 3 um significado muito forte pra eles né.
 4 (0:42:42) **P1** Eles estão acostumados com equações até
 5 então e a partir do momento que tem o limite... tem muito
 6 aluno que escreve, vai fazendo as operações algébricas
 7 com limite e chega um certo momento ele não escreve
 8 mais limite, vai colocando sinal de igual, fazendo as
 9 operações algébricas e não escreve mais limite, não sei
 10 se vocês já observaram isso.
 11 (0:43:07) **P3** Já
 12 (0:43:08) **P1** Ele deixa de escrever limite e vai embora,
 13 aquelas três letras lim não tem significado...
 14 (0:43:16) **P3** Mas porque, será que a gente não deixa de
 15 transparecer que aquilo é apenas um símbolo e não dá a
 16 devida importância daquele símbolo na hora do limite?
 17 (0:43:28) **P1** Eu acho que numa boa parte do Cálculo o
 18 que acaba acontecendo é a ênfase, às vezes você
 19 começa com uma idéia **intuitiva** de área e abandona
 20 aquilo, diz isso é só para entender e aí vai para a parte
 21 algébrica que é o que eles têm bastante dificuldade, eles
 22 vêm do Ensino Fundamental e Médio e não sabem nada e
 23 a gente fica dias e dias pra poder...
 24 (0:43:49) **P3** É pra sustentar né?
 25 (0:43:50) **P1** Porque você não consegue ir pra uma
 26 aplicação de derivada se eles não sabem derivar, não
 27 consegue falar de derivada se não falar de limite, você
 28 tem um encadeamento lógico ali que também se você não
 29 faz a parte algébrica você não consegue sair do lugar.
 30 (0:44:08) **P3** Porque se você, se a gente se coloca no
 31 lugar por exemplo naquela história de como começar
 32 integral, se por área ou pela definição da primitiva mesmo,
 33 só aquele símbolo se você não dá uma justificativa já é
 34 uma coisa muito estranha né, integral de $f(x) dx$ é o efão,
 35 agora se você define a área você tem como justificar né o
 36 símbolo
 37 (0:44:28) **P5** O dx.
 38 (0:44:31) **P3** É o dx, o S da soma.
 39 (0:44:34) **P5** Pra mim é terrível dar uma idéia do dx cara.
 40 (0:44:36) **P1** Legal que a gente chegou nessa discussão
 41 porque o que eu coloquei aqui vem exatamente essa
 42 coisa [**P1** fala da ficha preparada para o encontro, **P1**
 43 pede para que eles leiam e para que **P3** observe a
 44 palavra conceito].
 45 (0:46:42) **P3** Porque eu tô dando Cálculo para
 46 Engenharia, então é assim eles não têm a parte formal,
 47 não se fala em épsilon, não se fala em delta, só fala de
 48 limites porque eu tenho que definir a derivada ainda pelo
 49 limite, mas a parte de épsilons e deltas nem pensar e

1 quando na integral que eu experimentei fazer o começo
2 com área para eles na prática o que interessa eles vão lá,
3 sei lá estudar a sustentação de uma viga, ele pega o
4 comprimento pequeno pra ele aquilo é o dx , tá certo o
5 infinitésimo lá, então o Δx tendendo a zero é o dx e
6 daí na aula, esse é um problema que a gente discutiu aqui
7 eu vou lá calcular a área abaixo de uma curva, desenho
8 um retângulo e falo aqui tá o Δx , eu vou desenhar um
9 retângulo tão fino quanto você possa imaginar e a base
10 desse retângulo é o dx e o $f(x)$ é a altura do retângulo e a
11 área do retângulo é base vezes altura e ficou $f(x) dx$ só
12 que isso, eu percebi que, também ocasionou alguns erros,
13 porque eles começaram enxergar como se tivesse um
14 multiplicação ali na integral $f(x)$ vezes o dx , isso depois eu
15 percebi, tive que corrigir essa falha e por várias vezes
16 retomar, olha, não tem multiplicação, então assim depois
17 que eu dei a integral indefinida eu tive que falar, olha, isso
18 é só uma simbologia, a função que você está integrando é
19 essa aqui, mas de forma prática você pode enxergar isso
20 como sendo a base do retângulo e $f(x)$ como sendo a
21 altura e você está somando a área de todos os
22 retângulos, isso eles entenderam facilmente, é uma
23 maneira, mas é uma enrolação né?

24 (0:48:35) **P1** Você falou que era base vezes altura para
25 poder explicar, aí de repente você apaga e diz isso não é,
26 você fala que é e depois fala que não é, aí o que é pior,
27 falar ou não falar? Porque também se você não falar eles
28 não vão entender nada.

29 (0:48:54) **P3** Porque aquele símbolo, porque quando você
30 começa depois a integral, foram alguns erros que
31 aconteceram, integral de $x dx$ é x ao quadrado sobre dois,
32 aí aparece a integral de $1dx$ ele [o aluno] acha que está
33 integrando dx e vai dar o x aí você coloca integral de $x dx$
34 e uns colocam x quadrado sobre dois vezes dx , você
35 entendeu? Isso aconteceu.

36 (0:49:25) **P5** É cara, que engraçado.

37 (0:49:23) **P3** Vai integrar a integral de $1dx$ é x , aí eu tive
38 que voltar, a integral de dx que você está integrando é a
39 função constante igual a 1, só que como eu salientei
40 demais a importância do dx , acho que eles focaram mais
41 o dx , aí começaram a integrar o dx para todo e qualquer
42 lado [risos].

43 (0:49:49) **P3** Então são problemas que acontecem, você
44 tenta facilitar por um lado e abre um buraco do outro, né.

45 (0:49:55) **P1** É a questão da linguagem né? É uma das
46 questões que eu tento responder.

47 (0:50:00) **P3** Aí simplesmente se você falar o dx é só para
48 indicar a variável que vai ser integrada tudo bem, é um
49 papel do dx , agora nessa situação prática, para eles que
50 usam dy/dx , eles não usam a notação da linha para

- 1 derivada, aquilo tem um significado concreto ds/dt , é
2 pequeno espaço sobre pequeno tempo, para eles tem um
3 significado mais concreto do que para a gente tem que
4 ter.
- 5 (0:50:36) **P1** O dx é problemático assim, eu li alguns
6 artigos, tem hora que você tá derivando em relação a x
7 dy/dx , só derivada, isso aqui é um símbolo, quando você
8 vai para equação diferencial o dx vai para o lado de lá, a
9 integral também tem o dx , quer dizer, é diferente esse dx
10 daquele dx ?
- 11 (0:50:52) **P3** Isso passa a ser um símbolo, isso passa a
12 ser um símbolo, foi uma notação importante que deu um
13 desenvolvimento importante para a matemática, mas
14 quando você vai resolver uma equação diferencial você
15 pode enxergar esse símbolo como quociente entre duas
16 grandezas e eu vou passar esse dx multiplicando.
- 17 (0:51:13) **P5** É quando você isola as variáveis.
- 18 (0:51:01) [Retomando o questionamento sobre conceitos,
19 **P1** lê o trecho da transcrição da fala do **P3** no 1º
20 encontro].
- 21 (0:52:37) **P3** “*Então eu acho que são os conceitos né que*
22 *se realmente forem discutidos, acho que podem levar a*
23 *uma melhora*”. O que você quer dizer quando fala em
24 conceito? Você está falando que é importante.
- 25 (0:53:04) **P3** Eu acho assim primeiro não tem jeito de fugir
26 da parte **intuitiva**, a matemática de fato ela é abstrata,
27 não são todos que tem uma facilidade para enxergar
28 certas coisas da matemática e você tem que tornar mais
29 acessível, aí você recorre à **intuição**, acho que depois
30 que o aluno teve a vista geral, aí você pode conceituar no
31 seu ponto de vista, o que seria esse conceituar,
32 conceituar é colocar de uma forma rigorosa toda a
33 definição.
- 34 (0:53:42) **P1** Conceituar é colocar de forma rigorosa toda
35 a definição?
- 36 (0:53:42) **P3** Eu acho que sim, não pode ser uma coisa
37 muito, quando eu falo o conceito de integral.
- 38 (0:53:57) **P1** Você viu quantas vezes aparece a palavra
39 conceito, você está querendo melhorar a sua aula e aí
40 uma das coisas que você falou no seu discurso, que não
41 é só no seu, eu também falo e qualquer texto que você
42 pegue, o PCN por exemplo, levar o aluno a desenvolver o
43 conceito de proporcionalidade, o conceito de, aí se eu
44 quero fazer isso eu tenho que saber o que é conceito, o
45 que eu entendo por conceito.
- 46 (0:54:16) **P3** Eu acho que é assim fazer com que aquilo
47 fique claro pros alunos, mas de que forma, tem forma
48 **intuitiva**, que seria uma forma mais, não tão rigorosa, não
49 precisa em integral, integral não é só a área baixo da
50 curva, fazer ele entender que é uma área, você vai partir

- 1 de uma coisa que seja concreta, tudo bem a área, a
2 maioria tem uma definição própria.
- 3 (0:54:41) **P1** Fazer entender o conceito para você tem um
4 objetivo final que é entender a definição?
- 5 (0:54:51) **P3** Eu acho que depende de pra quem você
6 está dando aula, do seu público, você não tem que ser tão
7 específico, isso é um ponto que a gente estava discutindo
8 na última aula sobre conceito, pode variar, eu posso
9 conceitualizar algo de forma bem formal para um
10 matemático, mas para um engenheiro não, ele pode ter
11 uma noção de integral, mas ele não vai mexer com
12 épsilons e deltas.
- 13 (0:55:21) **P1** Então o conceito depende do aluno?
- 14 (0:55:25) **P3** É, aí é um pouco mais complicado, mas eu
15 não sei se estou conseguindo me expressar.
- 16 (0:55:28) [**P1** pergunta para **P5**, você concorda com **P3**?]
- 17 (0:55:36) **P5** Tô lembrando quando eu coloquei lá o
18 objetivo de matemática I [corresponde ao Cálculo I]
19 compreender e aplicar o conceito do Cálculo diferencial
20 para funções de uma variável real.
- 21 (0:55:42) **P1** Os conceitos do Cálculo!
- 22 (0:55:53) **P3** Eu acho que essa palavra é usada para
23 vários...
- 24 (0:56:00) **P5** Talvez se eu fosse dar a definição de
25 conceito.
- 26 (0:56:04) **P1** - Isso, o que é conceito para você?
- 27 (0:56:06) **P5** A definição de derivada e o conceito de
28 derivada, a definição de derivada é aquela coisa formal.
- 29 (0:56:16) **P1** Isso é o conceito? A definição é o conceito?
- 30 (0:56:20) **P5** Não essa é a definição, o conceito de
31 derivada..
- 32 (0:56:21) **P3** É entender o que significa?
- 33 (0:56:23) **P5** Pois eu acho que é muito mais, as coisas, as
34 coisas que estão amarradas assim, as aplicações.
- 35 (0:56:29) **P3** Mas isso é muito amplo não é?
- 36 (0:56:30) **P5** Pois é, mas é a idéia que eu tenho!
- 37 (0:56:35) **P3** Eu acho assim, você está dando a aula de
38 integral, se o aluno consegue calcular integral, ele sabe
39 aplicar a integral, ele entendeu, sabe fazer as aplicações,
40 pra mim ele entendeu o conceito de integral.
- 41 (0:57:00) **P5** Se ele sabe calcular integral, não
42 necessariamente ele entendeu o conceito.
- 43 (0:57:06) **P3** Não, mas se ele sabe aplicar, já amarrei
44 mais não é, tem aluno que calcula e não sabe nem o que
45 está calculando né, mas se sabe calcular, sabe aplicar,
46 entende as aplicações, tem um bom embasamento, a eu
47 ia falar um bom embasamento conceitual [risos]
- 48 (0:57:28) [**P1** fala dos trechos para refletir, falo da
49 definição de Eleonor Rosch sobre conceito]

- 1 (0:59:58) **P1** ...para que a pessoa construa o conceito ela
2 tem que estabelecer.
- 3 (1:00:04) **P3** Ela tem que construir o conceito [aponta para
4 si mesmo colocando a mão no peito]
- 5 (1:00:06) **P1** Exatamente, é ela que vai construir o
6 conceito, é aquilo que você falou depende do público,
7 depende da pessoa, nada do que se faz é independente
8 da pessoa que está pensando, quem constrói o conceito é
9 você, sou eu, é ele.
- 10 (1:00:19) **P3** Eu vou dar a definição e a partir daquilo ele
11 constrói o seu conceito de integral?
- 12 (1:00:20) **P1** Você vai transmitir a informação, enquanto
13 você está falando como uma matraca, eu to transmitindo
14 informação, agora o conceito é o aluno que vai construir.
- 15 (1:00:34) **P3** Agora o conceito que eu tenho de integral e
16 que ele tem de integral não pode diferir, pode?
- 17 (1:00:44) **P5** Eu acho que pode, a definição é impossível
18 né.
- 19 (1:00:50) **P1** Eu acho que é nisso que ele [**P3**] ta
20 querendo chegar, mas então eu tenho o meu, ele tem o
21 dele e você tem o seu, eu não seria idiota em estar
22 discutindo, aqui o objetivo da aula de Cálculo é fazer o
23 que é da gente estar chegando num saber...
- 24 (1:01:06) **P3** Num denominador comum.
- 25 (1:01:07) **P1** que é a definição, eu to preocupado com o
26 rigor da matemática, to preocupado com o Cálculo, com
27 infinito, infinitésimo, épsilons e deltas, isso é uma ciência
28 que está lá, se não se a matemática não fosse importante
29 eu pulava tudo isso, é muito fácil eu pular esses pontos
30 que dão problema, jogo fora, abandono e fico com a parte
31 fácil...
- 32 (1:01:42) **P3** Agora como o aluno digere isso é que vai
33 variar de pessoa para pessoa.
- 34 (1:01:50) **P1** A gente quer que o aluno chegue nesse
35 saber ai, que ele construa esse conceito da matemática
36 formal lá, lá.. agora o conceito ele não é, não dá para
37 enxergar o conceito como sendo a definição de
38 integral...quando você trabalha com integral, você tem lá a
39 definição de somatório, das somas de Riemann, só a
40 definição vai ser o conceito de integral?, não o conceito
41 de integral é tudo o que eu falar, imagine um grande
42 guarda chuva, ai tudo o que eu puder pendurar aqui sobre
43 integral, por exemplo, área, aplicações, integral indefinida,
44 integral definida, tudo isso que eu possa falar, que me
45 permite falar nesse negócio chamado integral, agora esse
46 conjunto é a pessoa que vai construindo.
- 47 (1:03:19) **P3** É ela que vai amarrando, como se você
48 desses os retalhos e cada um vai emendando de certa
49 forma.

- 1 (1:06:43) **P5** Essa última frase aqui [sobre conhecimento]
 2 é sua ou é dessa mulher [referindo-se a Rosch]
 3 (1:06:43) **P1** Essa ai está na minha tese e eu coloquei ai
 4 para refletir mesmo.
 5 (1:06:59) **P5** Eu sou um defensor, assim, inabalável disso.
 6 (1:07:20) **P5** Eu ia te fazer uma pergunta, não sei se
 7 atrapalho?
 8 (1:07:23) **P1** Não, não, pode fazer.
 9 (1:07:25) **P5** Por que o aluno ele vê de forma totalmente
 10 contrária, ele acha que o professor é educador e
 11 transmissor de conhecimento? Por que o aluno tem essa
 12 visão?
 13 (1:07:47) **P1** Eu posso dar a minha opinião, eu acho que é
 14 uma coisa cultural, que vem da escola desde a primeira
 15 série porquê, o professor é o dono da verdade, é o
 16 detentor do saber e ele tem que passar...
 17 (1:09:42) **P1**... e essa idéia de que o conhecimento não
 18 pode ser adquirido, transferido ou apropriado é totalmente
 19 contra o ensino tradicional, porque o professor sabe tudo,
 20 o aluno fica sentado, é passivo e fica recebendo, você
 21 pode enjoar de falar dez vezes a mesma coisa, que o
 22 aluno não vai aprender é ele que tem que construir
 23 isso...a hora que você fala, quando você dá aula você
 24 transmite informação, mas conhecimento não, mas agora
 25 assim quando você está dando a sua aula de integral,
 26 você falou, falou e o aluno não deu a mínima, para ele
 27 aquilo não vai passar de informação, quando ele vai
 28 construir aquilo, quando ele for tirar dúvida, for resolver
 29 uma lista, for buscar...
 30 (1:11:08) **P3** Solidificar aquilo né, transformar aquela
 31 informação em conhecimento.
 32 (1:11:28) **P1** Você perguntou isso porquê **P5**? Por causa
 33 dos alunos, eles ficam esperando que você faça tudo?
 34 (1:11:36) **P5** Pois é, é uma coisa que me chamou a
 35 atenção, eu vou só fazer um parênteses, o gestor fez uma
 36 auto avaliação né, não sei se ele te passou?
 37 (1:11:43) **P1** Não.
 38 (1:11:45) **P5** Ele tirou xerox das disciplinas e passou para
 39 mim, uma coisa totalmente sigilosa, digamos com o intuito
 40 positivo e engraçado as observações que os alunos
 41 fizeram é relativo ao professor, digamos assim, sugestões
 42 adicionais que você queira dar a respeito, é assim, é do
 43 professor, o professor não tem didática, ou eu aprendi
 44 porque o professor tem um domínio muito grande, mas
 45 ele não vê que se o aluno aprendeu é porque ele estudou
 46 na sua casa, tirou dúvidas....
 47 (1:12:40) **P3** Mas **P5** assim ta eu entendi o que você
 48 falou, mas onde é que entra o nosso papel então? Ele
 49 [**P1**] ta dizendo que conhecimento não pode ser adquirido
 50 e ai você diz o aluno vai corre atrás e estudou, e o nosso

1 papel de certa forma eu ainda não sei como, mas facilitar
 2 pra que a matemática se torne acessível para as pessoas
 3 que estão lá em baixo, porque por exemplo, você pode
 4 ser por exemplo um autodidata, mas existem coisas na
 5 matemática que se eu conversar com você, você vai me
 6 explicar e eu vou entender de uma forma diferente, do
 7 que ficar fechado, aí, eu acho que, qual seria o nosso
 8 papel? Aquele aluno inteligente que vai no livro, ele não
 9 precisa do professor nem como transmissor de
 10 conhecimento, porque ele pode pegar no livro....agora as
 11 pessoas que querem aprender um determinado assunto,
 12 eu ia falar conceito, [risos] e aí eles não tem uma
 13 capacidade para entender aquilo eles precisam de alguém
 14 para facilitar eu acho que é aí que a gente tem que entrar,
 15 a gente tem que fazer uma ponte e de certa forma criar
 16 uma base para levar para frente, agora de fato, tem
 17 alunos que esperam tudo da gente, tem que dá tudo
 18 pronto e o cara não move uma palha, é uma coisa
 19 complicada porque você está lidando com ser humano...
 20 (1:15:45) **P3** O dom da palavra é muito forte né, você fala
 21 alguma coisa e ele acredita piamente naquilo né, então
 22 você tenta facilitar né... aí você questionando né qual o
 23 nosso verdadeiro papel para divulgar a matemática, para
 24 tornar ela mais acessível, porque quem tá ali acho que
 25 está tentando aprender alguma coisa e eu acho que a
 26 gente tem que entrar né, por isso que eu resolvi participar
 27 desse grupo, quem sabe o **P1** acha uma fórmula para isso
 28 né, para conseguir encaixar né, porque a aula por si só
 29 para a gente colocar no quadro e atingir a todos, nós não
 30 vamos conseguir atingir mesmo né.
 31 (1:16:45) [**P1** pergunta para **P5**] **P5** o **P3** quando deu a
 32 aula de integral dele, ele usou esse argumento de falar do
 33 $f(x)$ e o dx como sendo a base, ele usou um argumento
 34 para tentar convencer ou explicar, você concorda ou
 35 discorda? Você usa esse tipo de argumento?
 36 (1:17:24) **P5** Pois é essa parte do dx me perturba um
 37 pouco.
 38 (1:17:26) **P1** E só para completar, o que você diz para um
 39 aluno que lhe pergunta o que é o dx ?
 40 (1:17:35) **P5** Se você começa pela integral definida o dx
 41 fica mais natural assim né, o dx digamos e os delta x_k ,
 42 então tudo bem, quando eu fiz primeiro a integral
 43 indefinida a justificativa é bom vamos deixar a priori em
 44 aberto isso, um símbolo amarrado à variável da função
 45 $f(x)dx$, mas isso vai ser concatenado, conectado logo com
 46 outro conceito, mas fica aquela coisa assim né, mas
 47 porque né?
 48 (1:18:17) **P5** Qual a outra pergunta?
 49 (1:18:33) **P3** Por outro lado quando eu faço isso, sempre
 50 vem um drama na consciência pois será que eu não estou

1 cometendo nenhuma falha quanto ao rigor matemático,
2 porque as vezes você quer simplificar tanto o assunto que
3 você acaba fazendo, você não pode abrir mão do rigor.
4 (1:19:19) **[P1 pergunta para P5]** Você acha que tem que
5 ter essa preocupação, de falar de outra forma?
6 (1:19:20) **P5** Pra mim não, vamos assumir digamos assim,
7 a gente poderia usar outra notação, só que vamos
8 introduzir essa notação já pensando no futuro, então
9 vocês fiquem calmos ai, quietos, dêem um voto de
10 confiança e depois nós vamos ver porquê que foi
11 interessante já termos introduzido essa notação e beleza,
12 eu lembro que uma vez eu assisti uma palestra do Elon
13 Lima e ele também falou isso, digamos assim você seja
14 um ator lá na frente e convença, convença não, combine
15 com seu aluno, aceite isso a priori, isso depois nós vamos
16 ver né, ai vem o TFC e concatena.
17 (1:20:09) **P1** Você recebeu o e-mail sobre a animação do
18 TFC, deu certo, funcionou?
19 (1:20:11) Sim. **[P5 fala que seria interessante uma**
20 **animação no computador para derivada]**
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50

OS ENCONTROS REALIZADOS PELO MSN

Encontro 13 – 14/09/2005

Início: 23h00

Término: 00h06

Professores Participantes desse encontro: PO, P1, P2 e P3.

Objetivo: Familiarizar com as ferramentas oferecidas pelo MSN com uma discussão sobre o ensino de Cálculo

Hora	De	Mensagem
23:17:33	PO	Como vc acessou a matemática? Pro P3
23:17:49	PO	P2, vc fez unesp rc?
23:18:17	PO	Sugiro q vcs comecem a "abreviar" palavras
23:18:29	P2	Sim fiz a graduação em Licenciatura Matemática na UNESP RC.
23:19:05	PO	Então conheceu Baldino, Romulo, Miriam ...
23:19:43	P2	Conheci todos eles e tive aulas com alguns deles.
23:20:03	PO	Na verdade vale pra todos nós, Como aprendemos matemática e agora dizemos q ela é difícil ou inacessível?
23:20:36	PO	P3 começou e parou pq?
23:21:06	P3	De fato aprendemos Matemática, mas acho que em algumas ocasiões ela pode se tornar mais simples.
23:21:15	P3	Quanto ao meu histórico
23:21:39	P3	sou formado em licenc. na UMC, onde leciono hoje e o mestrado conclui no ime
23:21:41	P2	Também conheci o Sergio Nobre (história da matemática). Aliás ele é que nos deu (pra mim e o P1) o curso de história da Mat.
23:22:25	PO	acho que em algumas ocasiões ela pode se tornar mais simples-- que ocasiões e pq? Eu acho q as vezes deveríamos é complexizar ainda mais hahaha
23:22:37	PO	E os outros 2 o q acham?
23:22:43	P3	Brincadeira né?
23:23:36	PO	Não é super sério. Nós, prof de matemática tentamos sempre levar uma matemática mastigada q não presta pra nada, assim não faz sentido aprendê-la
23:24:15	P2	Não acho a Mat. nem difícil e nem inacessível e sim, talvez, mau ensinada.
23:24:22	PO	Por exemplo, problemas sempre com números naturais bem comportados a menos q estejamos falando de números complexos
23:24:45	PO	Mas se mau ensinada não se torna difícil?
23:25:25	P3	Não pensei em uma matemática mastigada, mas uma matemática mais interessante.
23:25:29	PO	Veja que mau é o oposto de bom e não de bem, por acaso a mau ensinada seria a mal ensinada de propósito?
23:25:36	P3	Há professores que dão aulas para o quadro
23:25:49	P2	Concordo, se torna difícil sim.
23:26:01	PO	Os meus professores falavam com o quadro o tempo todo, isso era horrível
23:26:43	P3	Acredito que a base pode ser fornecida e só assim o aluno terá condições de buscar o restante
23:27:15	P3	Há situações onde uma simples ilustração, ou exemplo já modifica e muito o ensino de um determinado assunto

- 1 23:27:25 PO **Vou tentar dar um exemplo da complexidade e depois falo**
2 **o q penso de base, aviso q não é só com P3 tdos podem**
3 **contrapor ok?**
- 4 23:29:51 PO **O P1 começou observando minha aula, tradicional, de**
5 **cálculo e levou um susto. Lembro dele ter dito algo como**
6 **Não imaginava q os alunos falassem tanto. E ele**
7 **experimentou e os alunos falaram sim, é difícil achar uma**
8 **atividade q ponha a nós todos em pé de igualdade não do**
9 **saber específico matematico, mas de poder travar uma**
10 **conversa genuína e não uma conversa didatica em sala de**
11 **aula, o q acham**
- 12 23:32:41 P3 Por esse motivo acho que as tecnicas pedagogicas deveriam
13 ser mais realistas
- 14 23:33:04 PO **Como assim? O q seria uma técnica mais realista?**
- 15 23:33:55 P3 As vezes não temos como aplicar uma atividade para uma sala
16 muito grande.
- 17 23:33:57 PO **Pra vcs o q é uma conversa genuina e uma conversa**
18 **didática?**
- 19 23:34:00 P1 Acho que isso é um desafio para os professores, a partir do
20 momento que se passa a dar poder de voz aos alunos nos
21 sentimos ameaçados, será que conseguiremos dar conta de
22 tudo, de saber tudo, de responder a todas as questões? Na
23 primeira atividade que fiz, lembro que fiquei sem resposta para
24 a pergunta de um aluno, e depois as coisas vão melhorando,
25 pois afinal, quanto mais questionamentos tiverem
- 26 23:35:15 P3 Não sei, PO e, o que você defende como conversa
27 didática e conversa genuína?
- 28 23:35:16 PO **Concordo com o P3 q turmas grandes desfavorecem por**
29 **exemplo um trabalho num lab de informatica, mais de 3 por**
30 **comp. pode ser mal**
- 31 23:36:19 PO **Gostaria de palpites, detesto qdo usamos jargões, e me**
32 **peguei fazendo isso por isso preciso saber o q entendem**
33 **por esse conversa gen. e didatica**
- 34 23:37:01 P3 De fato, o ensino seria melhor se ao invés de aulas expositivas
35 tivessemos apenas um bate papo sobre determinado assunto,
36 onde todos pudessem participar com a mesma igualdade.
- 37 23:37:09 P2 Eu acho que conversa didática é aquela já meio preparada,
38 "ensaiada" em casa com as perguntas e respostas já
39 previamente planejadas pelo professor. E a conversa genuína é
40 uma coisa, digamos assim, uma aula ao vivo. Já a conversa
41 didática é um video dirigido (o diretor do vídeo é o professor que
42 quer seguir o roteiro do seu filme). Gosto muito mais de ter uma
43 conversa genuína com os alunos.
- 44 23:37:21 P2 pelo menos tento sempre que possível.
- 45 23:37:55 P1 concordo com o Márcio
- 46 23:39:21 PO **Gosto das características q P2 coloca, adiciono q a**
47 **didática as vezes nem é tão ensaiada mas é algo q só o prof**
48 **quer e leva os alunos a falarem nem é bem uma conversa.**
49 **Qto a genuína, como disse antes não é bem igualdade de**
50 **saber pois não podemos negar q algo a mais nesse campo**
51 **o prof. tvz tenha, mas igualdade de voz**
- 52 23:40:19 PO **Quem já teve mesmo em aula tradicional, ensaiada, um**
53 **momento em que o vídeo parece ter seguido outro roteiro?**
- 54 23:40:56 PO **E se deixarmos "rolar solto" o q estaremos fazendo em**
55 **sala?**
- 56 23:40:57 P3 é verdade, não conseguimos ter o controle de tudo.
- 57 23:41:35 P1 Eu já tive por várias vezes alunos que tiveram idéias brilhantes
58 e resolveram problemas e exercícios de outras maneiras que
59 não a "esperada"
- 60 23:41:35 PO **R. Depende, as vezes temos o controle sim, só q nao é um**

- 1 controle remoto q manipula os alunos hehe
- 2 23:42:38 PO **A, e alunos não tão brilhantes e q tvz tenham resolvido por**
- 3 **outros caminhos q seriam brilhantes se ele tivesse voz? tvz**
- 4 **nem tenhamos olhado esses caminhos**
- 5 23:42:56 P3 é verdade
- 6 23:43:47 P3 as vezes acho que nós nos perdemos do nosso objetivo. Não
- 7 conseguimos dar atenção devida aos alunos que realmente
- 8 necessitam.
- 9 23:44:05 P3 pois os alunos brilhantes, tenho a impressão que caminham até
- 10 sozinhos
- 11 23:44:54 P2 A questão de igualdade de voz é relevante mesmo. Também
- 12 acho.
- 13 23:44:57 PO **Gente, repararam q é o primeiro encontro e estamos muito**
- 14 **a vontade? Tvz seja o meio virtual q desinibe**
- 15 23:44:58 P1 É engraçado nas minhas aulas não tradicionais, os alunos que
- 16 mais se destacaram foram que menos participavam das aulas
- 17 23:45:23 PO **O q vc chama de tradicional e não tradicional?**
- 18 23:46:18 PO **Todos tem microfone? Não sei se é possível dar voz a todos**
- 19 **aqui hahaha**
- 20 23:46:19 P1 Tradicional é a aula expositiva onde o professor fala e o aluno
- 21 ouve
- 22 23:46:50 PO **Vc teve aula com Ubiratan? Como é a aula dele? Vc a**
- 23 **chamaria de tradicional?**
- 24 23:47:03 PO **P2?**
- 25 23:48:39 P1 Sim a aula dele é estritamente tradicional, ele não sai nem da
- 26 frente do retro, e não gosta de ser interrompido durante a sua
- 27 fala, no entanto ele é uma inciclopédia ambulante e só a sua
- 28 fala já é um show
- 29 23:48:56 PO **Já descobri, não é possível uma conversa de áudio com**
- 30 **mais de 2 partcipntes**
- 31 23:49:06 P2 Eu nunca tive aula com o Ubiratan, mas já assisti uma ou outra
- 32 palestra e já lí várias coisas escritas por ele! Eu não o chamaria
- 33 de tradicional!
- 34 23:49:22 P1 Eu não tenho microfone não
- 35 23:49:32 P3 Logo, podemos encontrar aulas tradicionais e interessantes?
- 36 23:50:04 PO **O q quis chamar a tenção é q, jargões não dão conta do**
- 37 **recado, vamos olhar o q incomoda de verdae. Uma aula**
- 38 **"tradicional" pode ser show e aprendermos muito de modo**
- 39 **bem satisfeitos**
- 40 23:50:47 P2 Mas também não acho que ele dê aulas genuínas (no sentido
- 41 acima, igualdade de voz).
- 42 23:51:16 PO **Gente, vamos dar como teto 24h? Podemos combinar um**
- 43 **tema para o próximo encontro?**
- 44 23:51:35 PO **Qto ao Ubi se vc n teve aula com ele como ele n dá voz?**
- 45 23:51:58 PO **Ao contrario, acho q ele dá todas**
- 46 23:52:00 P3 É verdade, estou adorando a conversa. Mas será que
- 47 poderíamos marcar outro horário?
- 48 23:52:10 PO **o q é dar voz?**
- 49 23:52:12 PO **OK**
- 50 23:52:19 PO **paramos daqui a pouco.**
- 51 23:52:26 PO **Qdo é bom pra todos?**
- 52 23:52:27 P1 Bom eu gostaria, se possível, que discutíssemos um pouco
- 53 sobre a utilização da tecnologia na aula de cálculo
- 54 23:52:41 PO **Por mim topo o tema**
- 55 23:52:50 P3 Eu também
- 56 23:53:08 PO **Falta o P2, e q dia?**
- 57 23:53:27 PO **Quem avisa ao P5?**
- 58 23:53:35 P3 Posso verificar e depois falo com o P1. certo?
- 59 23:53:55 P1 Depois entro em contato com todos para marcarmos o próximo
- 60 encontro

1 23:54:03 PO **ok, e P2, o tema te interessa?**
 2 23:54:20 PO **O q de tecnologia ou deixamos aberto?**
 3 23:54:45 P1 Gostaria de agradecer muito a participação de
 4 todos!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!:)
 5 23:55:00 P2 Pra mim tudo bem também,
 6 23:55:15 P2 estava com dificuldades para ler as mensagens.
 7 23:55:20 PO **ok, foi bem legal conhece-los**

8
9

10 Encontro 14 – 28/09/2005

11

12

13 **Início: 22h27**

14 **Término: 23h31**

15 **Professores Participantes desse encontro: PO, P1, P2, P3 e P5.**

16 **Objetivo: Discutir a utilização da tecnologia no ensino de Cálculo.**

17

18

19	Hora	De	Mensagem
20	22:43:19	P1	no último encontro combinamos de discutir sobre tecnologia
21	22:43:36	P2	Recebi o teu P3 (porque será que não estão recebendo os que 22 estou enviando) ? P1, você sabe alguma coisa sobre isto ?
23	22:43:47	P1	enviei um site e um aplicativo pra vcs, vcs olharam, o que 24 acharam?
25	22:44:45	P3	P1, olhei o site gostei das idéias mas as animações não 26 são melhores que a do flash
27	22:44:49	P2	Eu olhei o aplicativo sim. Quanto a página entrei no site, mas 28 não consegui abrir um dos links (acho que o último).
29	22:45:14	P2	Gostei bastante do aplicativo! Achei bem ilustrativo! Muito 30 mesmo.
31	22:45:49	P1	Bom, só para organizar vamos começar com o Flash o que vcs 32 acharam? Vcs usariam em sala de aula com os alunos? 33 Mudariam algo?
34	22:46:17	P5	Eu tive algumas dificuldades para abrir. Mas consegui trabalhar 35 um pouco com o aplicativo do TFC.
36	22:47:08	P5	Acredito que depois de uma exposição teórica, isso seria muito 37 útil na compreensão do conceito.
38	22:47:11	P2	Eu usaria em aula com os alunos (com certeza)!
39	22:47:39	P1	Em que vcs acham que esse aplicativo poderia ajudar os 40 alunos?
41	22:47:42	P3	P1, vc já utilizou o flash com os alunos? Gostaria de tentar
42	22:47:51	P1	PO e convidei vc
43	22:48:02		PO foi adicionado(a) à conversa.
44	22:48:10	P2	Claro que acompanhado (como o P5 comentou) da teoria 45 relacionada.
46	22:48:36	P1	Já utilizei, inclusive um ex-aluno da pós disse que está usando 47 esse aplicativo com os alunos dele
48	22:48:59	P5	Eu usaria sim, com certeza. Como falei, faria a exposição 49 teórica, como de costume, e depois o aplicativo.
50	22:49:07	P3	Creio que o flash pode ser utilizado como um fechamento da 51 aula.
52	22:49:22	P5	Boa idéia, P3.
53	22:49:41	PO	Por que não para abrir a aula?
54	22:49:45	P2	Boa idéia P3 também.
55	22:50:31	P5	Acredito que deixaria de lado o verdadeiro sentido e significado 56 da Matemática.
57	22:50:51	PO	qual é o verdadeiro sentido?
58	22:50:57	PO	vale para todos
59	22:50:57	P3	Boa noite PO, acredito que primeiro o aluno deveria ter um

- 1 primeiro contato com a teoria, e depois acho que
2 compreenderia melhor o programa.
- 3 22:51:07 PO **não só para o P5**
- 4 22:51:17 P2 Eu usaria para iniciar o assunto e talvez voltasse a usá-lo mais
5 para o final do tópico novamente.
- 6 22:51:27 PO **Boa noite a todos, é q estou super ocupada**
- 7 22:51:55 P1 Oi PO
- 8 22:51:57 P5 Matemática (penso eu) é um conjunto de idéias abstratas. O
9 uso de aplicativos me parece que fugiria dessa idéia.
- 10 22:52:04 PO **P2, pq vc pensa melhor como usar para iniciar o assunto?**
- 11 22:52:43 P3 Creio, que o que o P5 quer dizer é que o programa não passe a
12 ser simplesmente uma ilustração da Matemática, mas que ajude
13 na compreensão dos assuntos.
- 14 22:52:55 P1 P5 porque vc acha que o uso de aplicativo desvia das idéias
15 abstratas?
- 16 22:52:56 P2 Não entendi direito a pergunta POe.
- 17 22:53:09 P3 Um complemento para o ensino
- 18 22:53:14 PO **P5, concordo, os aplicativos a tornam mais palpável mas
19 qual o problema? será q a partir do palpável não
20 chegaríamos ao abstrato?**
- 21 22:53:36 PO **P2- como vc usaria para iniciar uma aula?**
- 22 22:54:00 P5 Sim, acredito que com o uso de tais, a Matemática passa a ser
23 vista como algo concreto...
- 24 22:54:50 P5 É uma boa pergunta... Sinceramente, não tenho muita fé
25 nisso...
- 26 22:56:01 P1 Vocês já usaram tecnologia em suas aulas?
- 27 22:56:27 PO **P5 eu tendo muito mais a sua visão, acredito que temos
28 vários espaços de pensamento/ação assim um espaço é da
29 matemática abstrata, outro é da mat concreta e os dois são
30 distintos, tao distintos q chegam a ficar distantes mas...**
- 31 22:56:28 P3 De fato, existem assuntos da matemática que são
32 completamente abstratos, mas o que estamos colocando em
33 questão é tentar "ilustrar" alguns conceitos (não todos) para
34 facilitar o aprendizado.
- 35 22:56:31 P5 Para Antonio: Aplicativos?
- 36 22:57:00 P2 Eu colocaria o aplicativo para rodar e tentaria obter comentários
37 (e quem sabe daí surgiriam boas respostas e conceitos
38 teóricos) por parte dos alunos.
- 39 22:57:22 P3 Comecei a usar o Winplot nas aulas de Cálculo III e Vetores
40 para visualização de superfícies. Os alunos gostaram.
- 41 22:57:45 PO **P3, primeiro vc diosse Creio, que o que o P5 quer dizer é
42 que o programa não passe a ser simplesmente uma
43 ilustração da Matemática, mas que ajude na compreensão
44 dos assuntos. Agora De fato, existem assuntos da
45 matemática que são completamente abstratos, mas o que
46 estamos colocando em questão é tentar "ilustrar" alguns
47 conceitos (não todos) para facilitar o aprendizado.**
- 48 22:57:48 P2 Num primeiro momento eu não ficaria explicando detalhe por
49 detalhe do aplicativo. Tentaria que os alunos fizessem isto.
- 50 22:57:55 PO **Afinal é para ilustrar ou não?**
- 51 22:58:02 P1 Para P5: não só aplicativos, qualquer tipo de software
- 52 22:58:27 PO **P2- eu faço isso, vc já usou algo em sala?**
- 53 22:58:57 P5 Nunca usei.
- 54 22:59:08 PO **Gente, já estamos em papos paralelos, como qdo
55 presencialmente de repente os papos paralelos rolam**
- 56 22:59:23 P3 Talvez, não tenha me expressado, corretamente. Tudo depende
57 o objetivo que vc pretende atingir.
- 58 23:00:06 PO **P3, eu q sou chata pergunte ao Antonio, ptto qual objetivo
59 vc quer atingir ao usar o softw?**
- 60 23:01:03 PO **digo objetivo**

- 1 23:01:09 P3 O que eu observo é o seguinte, qual a diferença entre dar uma
 2 explicação fazendo um desenho no quadro e utilizando o
 3 recurso gráfico do computador? É apenas por causa da
 4 animação?
- 5 23:01:17 P2 Aplicativos ilustrativos (como este) ainda não usei (não tinha um
 6 para usar), mas já usei softwares para cálculos.
- 7 23:02:05 PO **se a idéia é dar uma explicação concordo com vc mas se a**
 8 **idéia é ensinar aí é outro papo**
- 9 23:02:55 P3 Por exemplo, na aula de Cálculo III ou meu objetivo principal
 10 era que os alunos visualizem algumas superfícies que eu não
 11 consigo fazer no quadro com todos os detalhes. Para assim
 12 detectarem os seus extremos.
- 13 23:02:55 P1 Quando elaborei o Flash por exemplo, o meu objetivo era tentar
 14 possibilitar que o aluno tivesse uma fonte a mais sobre o TFC,
 15 tentando mostrar a relação entre geometria e álgebra, só a
 16 demonstração do teorema não dá conta,
- 17 23:04:31 P3 Certo P1, dessa forma tenho certeza que o objetivo foi
 18 atingido, pois de fato o flash fornece essa visão
- 19 23:05:37 P1 Acho que o interessante seria discutir o que a tecnologia traz de
 20 diferente, é só visualização?
- 21 23:06:05 P1 Vocês conseguiram abrir a página que enviei?
- 22 23:06:05 P3 Olha, P1 num primeiro momento acho que sim.
- 23 23:06:20 P3 Abri
- 24 23:06:47 PO **P1, eu tenho muitas duvidas qto a visualização**
- 25 23:06:49 P3 Achei a idéia interessante, mas as animações não são melhores
 26 que a do flash
- 27 23:07:01 P1 Qual a diferença entre o Flash e o site
- 28 23:07:14 P1 Eu também
- 29 23:07:31 P2 Também acho que só a demonstração não é suficiente para a
 30 compreensão (de fato) do TFC e nem para a visualização ente
 31 geometria e álgebra. Talvez nem com o Flash seja suficiente
 32 (para alguns alunos).
- 33 23:07:46 P3 No site temos a apresentação dos dois teoremas fundamentais
 34 e no flash uma, certo?
- 35 23:08:15 P3 Só não gostei das animações do site.
- 36 23:08:27 P1 É no site temos vários itens começando pelo cálculo de áreas
 37 de figuras conhecidas né
- 38 23:08:30 P5 Bom, se o aluno entendeu o conceito matemático, claramente, o
 39 uso de qualquer meio tecnológico não apenas o ajudará no
 40 sentido ilustrativo. Ele terá isso também, como um recurso a
 41 mais; eventualmente, ele poderá aprimorar a sua própria
 42 compreensão.
- 43 23:10:50 P1 Olá pessoal tive problemas com a internet
- 44 23:11:11 P1 todos estão de volta?
- 45 23:11:16 PO **vc abriu uma nova, espera q te adiciono na velha**
- 46 23:11:23 PO saiu da conversa.
- 47 23:11:32 P3 saiu da conversa.
- 48 23:11:16 P3 Acho que aí, que entra o professor PO, primeiro a explicação
 49 da teoria e depois o programa
- 50 23:11:21 P5 Ah, concordo contigo. Acho que esse é o ponto chave!
- 51 23:11:47 PO **é q não é tão simples**
- 52 23:12:30 P1 P5, se o aluno já sabe o conceito pra que precisaria da
 53 animação?
- 54 23:12:36 PO **as vezes vemos a teoria primeiro e não há conexão com o**
 55 **flash ou vice versa, é um pouco de cada, tudo junto**
- 56 23:13:09 PO **Concordo com o P5 q se o aluno já sabe pode usar o**
 57 **software para ir mais longe**
- 58 23:13:16 P3 Mas será que o professor não consegue fazer essa conexão
- 59 23:13:38 PO **Mas estamos falando do conhecimento do professor ou do**
 60 **aluno?**

- 1 23:14:37 PO **o problema é q o flash é meio ilustrativo apenas, tem uma pagina com objetos de aprendizagem q creio podemos ir mais longe**
- 2
- 3
- 4 23:15:43 P1 A página que enviei sobre integral também é muito interessante
- 5 23:16:21 PO **pq vc a considera importante?**
- 6 23:16:59 P2 Talvez o aluno que ainda nada saiba sobre o TFC (teoria), mesmo assim visualize algo com o Flash (pois ele sabe sobre conceitos "anteriores" como derivada, limite,...)
- 7
- 8
- 9 23:17:19 P3 Não acredito, P2.
- 10 23:17:35 PO **Existem várias pesquisas**
- 11 23:17:53 PO **q dizem é ele pode reconhecer coisas**
- 12 23:18:15 PO **mas não se garante q o aluno vá ver o q vc quer q ele veja**
- 13 23:18:49 P1 Ela proporciona uma série de problemas que o aluno tem que desenvolver para conseguir passar para um próximo item com várias animações
- 14
- 15
- 16 23:21:32 P1 oi P5
- 17 23:21:50 P1 voltou para a conversa!
- 18 23:21:53 P5 Desculpe-me, tive problemas com a rede.
- 19 23:21:58 P1 Ok
- 20 23:22:04 P3 De qualquer forma acredito que a tecnologia quando bem utilizada só traz saldo positivo. Basta definirmos bem o nosso objetivo.
- 21
- 22
- 23 23:22:40 PO **eu queria um exemplo mais concreto de um objetivo seguido de um uso de tecno**
- 24
- 25 23:22:54 PO **antes de sair**
- 26 23:24:39 PO **Agora, para sair deixo algo q vai fugir do tema-- Vcs viram como neste meio virtual é mais rápido para uma conversa evoluir? Parece q o teclado amedronta menos q o olho no olho o q acham?**
- 27
- 28
- 29
- 30 23:24:42 P3 Um exemplo simples, no Cálculo III estudamos os métodos para determinação de máximos e mínimos através de uma série de cálculos. Nesse caso, o aluno pode efetivar seus cálculos e comprovar observando a superfície. Não ficamos só nos cálculos.
- 31
- 32
- 33
- 34
- 35 23:25:16 P2 Também não vejo com a tecnologia poderia prejudicar (no máximo ela pode não ter efeito algum).
- 36
- 37 23:26:05 P1 Os objetivos tradicionais são: ajuda na visualização e agiliza os cálculos, porém os problemas continuam,
- 38
- 39 23:26:35 P3 De fato
- 40 23:27:34 P1 Vocês acham que o fato do professor usar tecnologia, mesmo que não use com os alunos, pode ajudar a melhorar a sua aula?
- 41
- 42 23:28:00 P2 Os problemas (e a figura do professor) continuam.
- 43 23:28:51 P3 De fato P1, os problemas continuam e vão continuar, pois de nada adianta discutirmos e elaborarmos métodos que facilitem o aprendizado do aluno, se na maioria das "escolas" estamos sempre presos a um programa nem sempre flexível. Não há tempo para o aprendizado de fato se concretize e já somos praticamente obrigados a seguir.
- 44
- 45
- 46
- 47
- 48
- 49 23:29:10 PO **será que a tecnologia prejudica? Por exemplo, e essa fica para semana q vem: No graphmatica experimentem traçar $y_1 = 2x^3 + 5$ e $y_2 = x + 6$ depois $g = y_1/y_2$ e discutimos na próxima quarta**
- 50
- 51
- 52
- 53 23:29:15 PO **bye**
- 54 23:29:47 P1 Tchau PO!
- 55 23:30:08 P3 P1, acho que tamb
- 56 23:30:24 P1 E sobre a última pergunta que fiz
- 57 23:30:34 P2 Mesmo não usando na aula, a tecnologia pode ajudar o professor (a visualização para ele professor, etc.), que acabará (em parte) refletindo nas aulas deste professor também.
- 58
- 59
- 60 23:30:35 P1 Ok P3

- 1 23:30:37 P5 Não estou conseguindo enviar, acho que agora sim.
 2 23:31:00 P3 Também concordo com o P2
 3 23:31:22 P1 A nossa visão da matemática muda quando usamos
 4 tecnologia, como?
 5
 6

7 Encontro 15 – 05/10/2005

8
 9

10 **Início:** 22h28

11 **Término:** 23h35

12 **Professores Participantes desse encontro:** PO, P1, P2 e P5.

13 **Objetivo:** Discutir a utilização da tecnologia no ensino de Cálculo.
 14
 15

16 Hora De Mensagem

- 17 22:34:05 P1 Bom P5, vc chegou a acessar a página que enviei?
 18 22:34:28 PO foi adicionado(a) à conversa.
 19 22:34:36 P1 Oi PO
 20 22:34:53 P5 Sim, eu entrei na página, e coloquei alguns dados.
 21 22:35:01 P2 Oi PO.
 22 22:35:09 P1 O que vc achou da página?
 23 22:35:11 P5 Mas a parte final não consegui acessar.
 24 22:36:07 P1 Pessoal o P3 disse que vai acessar daqui a pouco!!!
 25 22:36:49 P5 Achei legal quando tu muda os valores da vel e acel, e vice-versa.
 26 Fica super claro esses conceitos.
 27 22:37:30 P2 Como você descobriu esta (e a da semana passada) página
 28 P1 ?
 29 22:37:31 PO **boa noite, só agora vi que vcs já começaram, que grupo**
 30 **bacana!**
 31 22:37:42 P1 Oi POe
 32 22:38:38 P1 P2: a da semana passada eu pesquisei na internet e a de hj
 33 foi a PO que me passou
 34 22:38:41 P5 Legal também o gráfico do percurso da bike. Ajuda a
 35 compreender melhor quando se aumenta a aceleração ou diminui.
 36 22:39:01 PO **Oi, o q vcs acham de manter a posição inicial e a velocidade e**
 37 **mudar apenas a aceleração, depois mudar apenas a**
 38 **velocidade, o q acham pessoalmente e o q acham q seria**
 39 **interessante para os alunos?**
 40 22:40:30 PO **Oi P1, o P3 ainda não chegou?**
 41 22:40:31 P5 Acho que isso ajuda a compreender melhor o conceito de
 42 aceleração, que não é tão familiar quanto o conceito de
 43 velocidade. Velocidade é algo mais familiar.
 44 22:40:42 P2 Eu preciso manipular mais o aplicativo (na página da internet)
 45 para ter mais idéias do que trabalhar com os alunos.
 46 22:41:22 PO **P5, como exatamente entenderiam melhor o c"conceito" de**
 47 **aceleração?**
 48 22:41:23 P1 Ele disse que vai entrar um pouco atrasado
 49 22:41:53 PO **P2, nas primeiras vezes tudo é muito novo mesmo, precisaras**
 50 **De tempo mexendo**
 51 22:42:34 P2 mas se mantermos a posição inicial e a velocidade e mudarmos
 52 apenas a aceleração, estaremos mudando a velocidade também
 53 22:42:37 PO **Aliás sugiro também o VRUM VRUM que é um software para o**
 54 **DOS (vcs já eram nascidos?)**
 55 22:43:27 PO **P2, mas veja o q ocorre na página, dá para abri-la agora?**
 56 22:43:38 P5 Sim, tentar entender o que significa isso na "vida real". Acho que o
 57 aluno da escola não precisa entender o conceito de aceleração
 58 como um físico. Quando muda-se os valores da acel, a bike

- 1 descreve o percurso de forma diferente.
- 2 22:43:50 P1 Já tive um aluno que fez um trabalho com o software vrum vrum
- 3 22:44:24 P5 vrum vrum? Esse eu não conheço.
- 4 22:44:58 PO **P5 concordo, só acho q ao proporcionarmos este ambiente o**
- 5 **aluno está entendendo como um fisico, o q acham todos?**
- 6 22:45:08 P5 Na verdade, conheço mesmo apenas o Maple e o MatLab.
- 7 22:46:04 P1 Desculpa pessoal tive que atender o tel
- 8 22:46:15 PO **Vou tentar abrir a página e envio já, um momento**
- 9 22:47:21 P5 Sim, pode ser, PO. Quando me referi ao físico, quis dizer
- 10 entender o conceito formal, robusto, etc... Mas concordo contigo,
- 11 criando um ambiente para isso.
- 12 22:48:14 PO **<http://www.dapp.min-edu.pt/nonio/softeduc/soft2/vrum.htm> é**
- 13 **a página do vrum**
- 14 22:48:33 P1 Bom eu gostaria de retomar um ponto do encontro passado, li as
- 15 msgs e encontrei lá uma preocupação em não se desviar das
- 16 idéias abstratas da matemática quando se usa um software,
- 17 quando se torna as coisas "concretas" pelo software, e para esse
- 18 de hj parece que foi diferente ou não?
- 19 22:50:49 PO **Acho q qdo o P5 diz Acho que isso ajuda a compreender**
- 20 **melhor o conceito de aceleração, que não é tão familiar**
- 21 **quanto o conceito de velocidade, tem um misto de abstrato e**
- 22 **concreto ou é impressão minha?**
- 23 22:51:58 P1 Ah, nessa semana começo com a integral na Licenciatura se
- 24 conseguir laboratório começarei usando o Flash, para ver os
- 25 resultados, isso também surgiu no encontro passado, e depois
- 26 passo pra vcs!!!
- 27 22:52:10 P2 é, acho que desviar das idéias abstratas é interessante (é bom).
- 28 Tb fiquei com a impressão que é uma mistura de abstrato e
- 29 concreto na observação do P5.
- 30 22:52:13 P5 Bom, eu continuo com a mesma opinião anterior. O que esse
- 31 aplicativo me chamou a atenção é que ele ajuda a compreender o
- 32 conceito de... Mas de forma alguma ele substitui o abstrato, ou
- 33 seja, uma "definição" do que seria aceleração ou velocidade.
- 34 22:52:45 PO **P1 manda outra vez a pag do objeto aprendizagem pois**
- 35 **perdi e acho q poderíamos todos abri-la e falar a partir daí.**
- 36 22:52:52 P5 Tche, vocês estão me colocando no paredão??? rs
- 37 22:53:21 P1 Só um minuto PO
- 38 22:53:33 P1 <http://www.educaplus.org/modules/wfsection/>
- 39 22:53:36 PO **Mas P5 será q ele (o applet) ajudaria a construir essa**
- 40 **definição**
- 41 22:53:56 P2 Tb concordo que este aplicativo não substitui o abstrato
- 42 (definição) mas é interessante (e útil) tê-lo em mãos.
- 43 22:55:35 P5 Boa pergunta... Para os alunos da escola, da oitava série, por
- 44 exemplo, por que não? Acho que é a primeira vez que ele verá tal
- 45 conceito. Mas não sei...
- 46 22:56:56 PO **Ok, voltando direto na página sugerida pelo P1,**
- 47 **encontro algumas coisas q talvez necessitassem do prof**
- 48 **chamar a atenção**
- 49 22:57:17 PO **por exemplo temos posição inicial, vel inicial e aceleração cte**
- 50 22:58:03 PO **será q fica claro q não manteríamos a vel qdo mudamos a**
- 51 **aceleração e mantemos a posição, e q essa posição se**
- 52 **modifica?**
- 53 22:58:50 PO **Faço essa pergunta pois os alunos associam função**
- 54 **constante aquela coisa que é paralela ao eixo mas não a algo**
- 55 **que não varia, qual a experiência de vcs?**
- 56 22:59:44 PO **P5 veja o q os criadores do vrum vrum dizem--VRUM VRUM é**
- 57 **um jogo que oferece ao utilizador um poderoso ambiente**
- 58 **para desenvolver as capacidades de coordenação entre as**
- 59 **representações gráfica e a trajectória do movimento de uma**
- 60 **personagem identificada por "Bugão". Destina-se a ser**

- 1 utilizado por alunos a partir do 7.º ano de escolaridade, em
 2 ambientes informais ou na sala de aula. Este program
 3 23:00:19 P1 É verdade PO, é difícil dos alunos perceberem o significado da
 4 fç constante
 5 23:00:22 PO **Este programa, se amplamente utilizado por alunos do**
 6 **Ensino Básico, pode servir para criar um quadro conceptual**
 7 **que facilite a aprendizagem da Cinemática e da Dinâmica a**
 8 **nível do Ensino Secundário, áreas onde o insucesso da**
 9 **aprendizagem é extremamente elevado. Pode igualmente**
 10 **auxiliar a aprendizagem do conceito de função, de um modo**
 11 **informal.**
 12 23:01:37 PO **Acredito q só esse applet seria pouco, penso q precisamos**
 13 **de uma gama variada de atividades para que algo possa ser**
 14 **de fato caracterizado como algo.**
 15 23:01:40 PO **explico**
 16 23:02:13 P1 Acho que não falamos de função sem recorrer a movimentos
 17 23:02:45 P2 Função constante, apesar do próprio nome dizer, é difícil dos
 18 alunos entenderem o seu significado.
 19 23:03:31 P1 Usamos gestos para fç crescente, gestos para x tendendo a zero,
 20 23:03:32 PO **se eu disser sofá, nós todos vamos saber do q estou falando,**
 21 **mas se pedir para q tdos escrevam o sofa q está em suas**
 22 **cabeças teremos 4 sofas diferentes. Mas ao olharmos um**
 23 **sofa, qq um dos 4 terá a característica de um sofa. Agora**
 24 **função constante**
 25 23:04:33 PO **se só falamos que função constante é do tipo $y=4$ e q o**
 26 **gráfico é uma reta paralela ao eixo x, onde está o movimento?**
 27 23:04:40 P1 E para a fç constante?
 28 23:05:19 PO **A tecnologia ajuda muuuuito nisso! Pois o gesto da função**
 29 **cte não é parado é um movimento paralelo ao eixo x**
 30 23:05:55 P2 É verdade, pensando no que estão dizendo, acho que preciso
 31 "usar" mais o movimento nas aulas sobre função constante.
 32 23:06:14 P1 Usamos movimento para explicar função, mas o gráfico da função
 33 é estático, isso ajuda ou atrapalha na opinião de vcs!!!
 34 23:06:49 P5 Mas essa questão do movimento, se aplica também ao simples
 35 caso de estudar a função $y=2$?
 36 23:08:47 PO **Vamos tentar entender o q falamos de movimento? O Antonio**
 37 **anda lendo sobre isso e sinto q suas perguntas não estão**
 38 **enraizadas no exemplo da página apenas certo? gostaria q**
 39 **ficássemos com a página, o q acham? Tudo q falarmos pode**
 40 **ser exemplificado a partir dela tvz fique mais simples**
 41 23:09:03 P5 Quando estudamos o conceito de função, linear por exemplo, não
 42 precisamos falar de movimento...
 43 23:09:26 PO **P5 qdo fazemos com a mão um gesto para representar $y=2$**
 44 **como vc faz?**
 45 23:10:09 P2 O gráfico feito, pronto, estático, não ajuda tanto quanto se
 46 víssemos ele sendo construído (traçado) dinâmico (como na
 47 página), imagino.
 48 23:10:10 PO **Qdo vc desenha a função $y=2x+1$ q gesto faz? e qdo é $y=-2x$**
 49 **+1?**
 50 23:10:35 P5 Ah, entendi, PO.
 51 23:10:52 P5 Pois é...
 52 23:11:34 PO **P2, vc toca exatamente no ponto. Quando está "pronto" que é**
 53 **o caso matemático é sempre estático, no entanto como seres**
 54 **humanos usamos artefatos que nos permitem traçá-lo e aí é**
 55 **dinâmico**
 56 23:12:16 PO **e agora volto ao Antonio, e aí? como tratar essa história de**
 57 **dinâmico e estático, com e sem tecnologia? voltemos à**
 58 **página se necessário**
 59 23:12:53 P5 Mas veja, será que o aluno não acaba confundindo o movimento
 60 da bike, e o "movimento" da função, que descreve o percurso da

- 1 bike?
- 2 23:12:55 P1 Com a tecnologia temos então possibilidade de "dar" movimento
3 aos gráficos, certo?
- 4 23:13:00 PO **Gente, vcs precisam ter um dia no COTLEM conosco
5 brincando com esses softwares, applets, sensores etc...**
- 6 23:13:14 PO **Com o lápis e com o dedo tb**
- 7 23:13:43 PO **Não temos outro modo de desenhar, sem movimentar algo
8 hahaha**
- 9 23:14:07 P1 Sim, concordo, mas quero voltar a falar da tecnologia!
- 10 23:14:17 P5 O.K.
- 11 23:14:23 PO **é um nó. A tecnologia dependendo de qual**
- 12 23:14:42 PO **estamos usando pode parecer "estática"**
- 13 23:23:30 PO **Bem vindo P1**
- 14 23:24:06 P1 Ok já estou na janela
- 15 23:24:08 P2 quando o traçado é dinâmico podemos parar, observar, refletir
16 sobre o que deverá ocorrer (e explorar tudo isto com os alunos tb)
17 no próximo trecho (intervalinho) etc.
- 18 23:24:44 P5 PO e, queira me desculpar, mas não estou entendendo, dinâmico
19 e estático...
- 20 23:25:52 PO **é que estávamos falando q no Mapple é tão rápido o traçado
21 de um gráfico q é quase como olhar num livro, pronto e
22 estático, já nesse applet da moto o traçado é dinâmico,
23 acompanhamos o movimento de traçar**
- 24 23:26:03 PO **P1?**
- 25 23:26:11 P1 Oi PO
- 26 23:26:42 P5 Ah, sim, entendi.
- 27 23:26:42 PO **P5, deu pra entender?**
- 28 23:27:32 PO **Pois é, e aí volto a questão do Antonio sobre o movimento,
29 será q como diz o P2 esse dinamismo ajuda a compreensão?**
- 30 23:28:25 P1 Acho que é praticamente impossível dissociar do movimento para
31 a compreensão do gráfico de uma função tanto no lápis quanto no
32 computador
- 33 23:28:30 P5 PO, minha pouca experiência em sala de aula foi com
34 universitários. Nesse caso, sempre preferi o estático.
- 35 23:28:50 PO **especialmente gostaria de saber o q acham do colocado
36 pelos autores do vrum vrum que dizem**
- 37 23:28:53 PO **Este programa, se amplamente utilizado por alunos do
38 Ensino Básico, pode servir para criar um quadro conceptual
39 que facilite a aprendizagem da Cinemática e da Dinâmica a
40 nível do Ensino Secundário, áreas onde o insucesso da
41 aprendizagem é extremamente elevado. Pode igualmente
42 auxiliar a aprendizagem do conceito de função, de um modo
43 informal.**
- 44 23:29:30 P2 Eu acho que ajuda pois podemos fazer mais simulações e
45 interagir mais com o traçado do gráfico (oque seria impossível
46 com um livro).
- 47 23:29:40 PO **Tvz o P5 possa nos dizer tb como fazer só no estático**
- 48 23:30:01 P5 Bom, eu preciso, antes de responder a tua questão, estudar o
49 vrum vrum. Preciso fazer isso antes.
- 50 23:30:58 PO **Desculpe, o vrum vrum tem a mesma idéia da moto, ao invés
51 da moto é um boneco que se mexe sobre uma linha reta e ao
52 lado temos o grafico dist e tempo**
- 53 23:31:57 PO **a ideia é a mesma, mas gostaria de ouvir/ler sobre só o
54 estático, pois para o P1 isso é impossível e eu
55 discordo dele**
- 56 23:32:08 P1 Acho que quando os autores do vrum vrum falam em criar um
57 quadro conceitual estão dizendo que oferecem diferentes formas
58 "representações" para que o aluno contrua os conceitos é isso?,
59 também não conheço o vrum vrum
- 60 23:32:41 P5 Quando desenhamos no sistema de coordenadas, estamos

- 1 apenas representando, geometricamente, o gráfico da função.
 2 Acho que por isso acabei sempre me voltando para o estático.
 3 23:33:48 P1 Acho que devemos separar duas coisas, de um lado a matemática
 4 e de outro como se ensina a matemática
 5 23:33:57 PO **Deixe eu entender quando vc representa geometricamente**
 6 **não existe movimento?**
 7 23:35:14 PO **Eu penso q se ficasse só com a álgebra não teria movimento**
 8 **algum, seria um jogo de palavras, mas a representação**
 9 **geométrica me induz a movimentos pois começo de um**
 10 **ponto e vou até outro. O q acham?**
 11 23:35:19 P5 Não preciso falar de movimento para esboçar uma reta ou uma
 12 curva qualquer.
 13 23:35:29 P1 pois uma coisa é vc estar dando aula e falando sobre o gráfico de
 14 uma função, existe sempre o movimento, ligado a ação do
 15 professor
 16
 17

18 Encontro 16 – 19/10/2005

19
 20
 21 **Início: 21h58**

22 **Término: 23h07**

23 **Professores Participantes desse encontro: P1, P2 e P3.**

24 **Objetivo: Refletir sobre a atuação de P1 em suas aulas de Integral e**
 25 **aprofundar a discussão sobre conceitos.**

26

27	Hora	De	Mensagem
28	22:01:42	P1	Bom hj pretendo comentar a minha aula, estou começando
29			integral e usei o Flash
30	22:02:12	P3	vc mostrou no canhão
31	22:02:42	P1	E numa parte gostaria de falar sobre conceitos
32	22:03:08	P1	Sim eu usei o canhão, tentei reservar o LAB mas não consegui
33	22:03:28	P3	Na aula vc já tinha comentado algo sobre o TFC ou foi direto para o flash?
34			
35	22:03:30	P1	Que bom que vc está usando outra cor
36	22:04:05	P1	Não tinha comentado nada, vou dizer o que fiz só estou esperando o P2 entrar
37			
38	22:04:25	P1	Enquanto isso
39	22:04:31	P3	ah, está bom
40	22:04:43	P3	consegui mudar a cor. Fica melhor né?
41	22:04:51		P2 foi adicionado(a) à conversa.
42	22:04:53	P3	vc convida o P2?
43	22:04:55	P1	Oi P2
44	22:05:02	P1	já convidei
45	22:05:17	P1	e ai P2
46	22:05:30	P1	Está na conversa?
47	22:05:47		P2 saiu da conversa.
48	22:05:54	P3	P2 está na conversa?
49	22:06:01	P1	Acho que o P2 teve problemas
50	22:06:53		P2 foi adicionado(a) à conversa.
51	22:07:02	P1	Oi P2 ok agora?
52	22:07:13	P3	E aí, P2?
53	22:07:21	P2	Oi.
54	22:07:51	P1	Estamos todos numa janela, a cor do P2 tbém é azul?
55	22:08:13	P2	Vou mudar a cor.
56	22:08:39	P2	Agora o verde,
57	22:08:41	P1	Usa o verde seu palmeirense
58	22:08:42	P2	não deu certo.
59	22:08:49	P1	?

1	22:09:03	P1	ficou muito claro?
2	22:09:11	P2	está é melhor.
3	22:09:23	P1	Ok
4	22:09:34	P1	Bom podemos começar?
5	22:09:43	P3	sim
6	22:09:45	P2	Podemos começar.
7	22:10:09	P2	boa noite aos dois e espero que não tenham levado ovos.
8	22:10:11	P1	Hj gostaria de discutir a minha aula e um pouco sobre
9			Conceitos
10	22:10:31	P1	Comecei na semana passada o tópico integral
11	22:10:54	P1	Pensei bastante em como introduzir o assunto
12	22:11:06	P1	depois de todas as nossas reflexões
13	22:11:25	P1	estou escrevendo picado assim para não demorar muito ok
14	22:11:33	P3	ok
15	22:11:53	P2	Ok, e vc já começou (de cara) com o flash?
16	22:12:07	P1	tentei reservar o laboratório mas não consegui
17	22:12:17	P2	pode concluir o raciocínio primeiro P1.
18	22:12:29	P1	ai levei o Flash e usei o canhão
19	22:12:48	P1	antes da atividade do Flash, eles ainda não sabiam nada de
20			integral
21	22:13:04	P1	preparei três atividades com papel milimetrado
22	22:13:38	P1	a primeira forneci o gráfico de uma fç constante e pedi para
23			que encontrassem a área
24	22:14:02	P1	e tiverem questões podem fazer ok
25	22:14:50	P1	a segunda desenhei no papel milim. uma fç linear crescente e
26			pedi para que encontrasse a área
27	22:15:24	P1	a terceira desenhei uma eq quadrática é pedi para que
28			encontrassem a área abaixo da curva
29	22:15:40	P1	Tudo bem até aqui
30	22:15:46	P3	ok
31	22:15:47	P2	tudo bem.
32	22:16:25	P1	Perguntei para os aluno se eles achavam que dava para
33			calcular a área exata abaixo da parábola
34	22:16:37	P1	e eles disseram que não
35	22:17:11	P3	ninguém falou, nem aproximadamente?
36	22:17:21	P2	achei interessante esta maneira de iniciar o assunto.
37	22:17:45	P1	sim aproximadamente várias duplas disseram
38	22:18:14	P1	as duplas foram à lousa e colocaram os resultados tipo num
39			painel
40	22:18:33	P1	e ai me perguntaram se dava para calcular exatamente
41	22:18:44	P3	vc sugeriu como calcular?
42	22:19:28	P1	bom ai acho que fiz algo errado, disse que era possível sim
43			pela integral e disse que o valor exato era $14/3$
44	22:19:50	P1	sabe por que acho que me precipitei,
45	22:20:19	P1	depois dessa atividade fizemos aquela atividade do winplot no
46			canhão também lembram a atividade 2
47	22:20:42	P3	da divisão em retângulos?
48	22:21:04	P1	a função do papel milimetrado e a do winplot era a mesma
49			x^2+1
50	22:21:12	P1	Isso P3!
51	22:21:13	P2	não sei se foi errado vc dizer que era possível, pois vc, de qq
52			forma, não disse naquele momento COMO calculava.
53	22:21:53	P1	Não não disse, mas ainda tinha o computador entendeu, com
54			o computador poderíamos fazer aproximações melhores
55	22:22:16	P2	é verdade.
56	22:22:41	P3	No papel quadriculado todas as duplas calculam a área
57			pelos quadriculados, ou alguém pensou em fazer divisões
58			menores?
59	22:23:05	P1	Bom ai fizemos a atividade do winplot e todos concordaram
60			que seriam necessários infinitos retângulos para preencher a

1			área
2	22:24:29	P1	Ai fiz algo bem diferente, desliguei o canhão, fui para o quadro e defini primitiva
3			
4	22:24:47	P1	aparentemente nada a ver com área certo?
5	22:24:55	P3	certo?
6	22:25:18	P1	Bom acho que eles entenderam primitiva e calcularam até que com facilidade
7			
8	22:25:51	P3	Quando vc definiu a primitiva, falou da notação dos retângulos?
9			
10	22:26:28	P1	Não não falei nada, somente defini primitiva como sendo o F cuja derivada é o f
11			
12	22:26:48	P3	Ah, e aí?
13	22:27:23	P1	Ai na mesma aula na segunda parte depois do intervalo, usei o aplicativo do Flash lembram
14			
15	22:27:56	P1	O Flash nada mais é do que uma animação do TFC certo?
16	22:28:00	P2	lembro.
17	22:28:27	P3	O que vc percebeu, deu certo?
18	22:28:55	P2	o flash não é só uma animação do TFC, dá para explorar mais coisas tb com ele
19			
20	22:28:57	P1	Fui fazendo mostrando as etapas do flash e fazendo questões só o flash não foi suficiente, foi preciso que eu fosse para a lousa
21	22:29:35	P1	
22			
23	22:30:27	P1	chega num momento da animação que temos $A(x+h)-Ax$ sobre h
24			
25	22:30:53	P1	façam o teste de escrever (x) tudo junto
26	22:31:09	P1	Vira uma bonequinha
27	22:31:26	P1	voltando
28	22:31:44	P2	(X)
29	22:31:51	P1	os alunos não associaram essa expressão à definição de derivada
30			
31	22:31:56	P1	(X)
32	22:32:03	P1	Ok
33	22:32:08	P2	desculpe, apertei o botão errado.
34	22:32:17	P1	tremeu tudo aqui
35	22:32:25	P3	aqui também
36	22:32:49	P2	a tremedeira foi um pedido de atenção (por engano) meu, botão errado.
37			
38	22:33:12	P1	foi necessário que eu fosse à lousa e dissesse lembra do $f(x+h) - f(x)/h$ o limite disso define o que?
39			
40	22:33:38	P1	No semestre passado fizemos várias derivadas pela definição estavam todos habituados com essa simbologia, acho que o problema foi que só usei f e g e não usei outras notações p função, o que vcs acham?
41	22:34:24	P1	
42			
43			
44	22:35:00	P1	Como por exemplo $A(x)$
45	22:35:02	P3	É, P1, mas acho que é normal não lembrarem, talvez eles estivessem mais atentos ao problema da área. Muita informação, entende. Talvez não esperassem que fosse dar uma derivada
46			
47			
48			
49	22:35:19	P3	de qualquer forma acho a mudança de notação importante
50	22:35:23	P1	É talvez,
51	22:35:49	P1	Concordo, mas a gente nem percebe e usa só a letra f não é?
52	22:36:04	P3	é verdade.
53	22:36:18	P3	Na matemática também faço isso.
54	22:36:34	P3	Só comecei a mudar as notações por causa da engenharia.
55			
56	22:37:37	P1	Bom aí depois que eu falei, concordaram que era $A'(x)$, a outra parte da animação funcionou bem, a de que $f(c)$ tende a $f(x)$ assim $A'(x) = f(x)$
57			
58			
59	22:37:43	P2	as vezes tb me pego usando sempre f.
60	22:38:02	P1	Bom lembram da primitiva que eu havia definido?

1	22:38:06	P3	P1, e se da próxima vez lembrássemos a derivada logo no início da aula?
2			
3	22:38:11	P2	sim.
4	22:07:09	P2	Oi, tudo bem ?
5	22:07:52	P3	Será que estamos em duas janelas?
6	22:41:52		P2 saiu da conversa.
7	22:40:54	P3	tudo bem P1?
8	22:41:11	P2	seja bem vindo de volta,
9	22:41:29	P1	ok perdi a conexão
10	22:41:51	P1	onde estávamos mesmo?
11	22:42:08	P3	vc estava falando da primitiva
12	22:42:10	P2	lembra da primitiva que havia definido.
13	22:42:17	P1	Ok
14	22:42:51	P1	Então disse para os alunos que a função área também era
15			Uma primitiva de f pois a derivada dela é f
16	22:43:03	P3	Ah
17	22:43:36	P3	Acho que ai ficou interessante, certo?
18	22:44:27	P1	Bom eles concordaram e entenderam pois viram pelo menos
19			uma relação entre área e derivada e futuramente entre integral
20	22:44:44	P1	desculpa a demora tive que atender o interfone
21	22:44:56	P1	Bom o que vcs acharam?
22	22:45:06	P1	Fariam isso tbém?
23	22:45:34	P3	Gostei muito P1.
24	22:45:59	P1	Bom P3 assisti sua aula de integral hj
25	22:46:34	P3	Talvez a parte mais delicada e difícil para os alunos tenha sido a interpretação do flash? ou não?
26			
27	22:46:39	P2	Como uma primeira vez (usando o Flash) achou que faria
28			parecido sim. Numa próxima vez a gente vai aprendendo e
29			sempre melhorando.
30	22:46:46	P1	e acho que uma grande dificuldade que temos é justificar
31			essas relações principalmente p alunos iniciantes e p a
32			Engenharia, certo?
33	22:47:09	P1	Acho que essa montagem ajuda nesse sentido!
34	22:47:19	P3	Com certeza, sua forma de introduzir e mostrar essa relação foi melhor.
35			
36	22:48:15	P3	Vc já chegou a comentar sobre a integral definida, com as notações?
37			
38	22:48:45	P1	Ainda não, mas pretendo colocar questões na prova também
39			referentes as atividades
40	22:49:11	P1	por que se não se a gente ficar só na ilustração e não valorizar
41			essas coisas né!
42	22:49:29	P3	certo
43	22:49:30	P1	O aluno tbém não valorizará
44	22:49:42	P2	acho coerente (correto) colocar questões referente as
45			atividades tb.
46	22:50:59	P3	tenho vontade de mostrar a atividade do flash, quem sabe no final do semestre marco uma aula na atividade complementar, mesmo eles já conhecendo a integral, acho que ficaria legal mostrar a verdadeira relação da primitiva com a área
47			
48			
49			
50			
51	22:51:10	P1	acho que os professores-matemáticos usam a figura a
52			ilustração e dizem isso é só para ilustrar como se isso não
53			fizesse parte, o que vale é o rigor, a definição
54	22:51:33	P1	Acho legal P3!
55	22:51:45	P2	e os alunos gostaram de vc usar animação para dar uma aula
56			sobre um novo tópico e tal, ou ficaram reticentes ?
57	22:52:00	P1	P2 o que vc entende por conceito?
58	22:52:29	P1	Gostaram P2, até levaram a animação p casa
59	22:53:32	P1	E ai P2, o que vc entende por conceito?
60	22:53:47	P1	Acho que o P3 pode ajudar

1	22:53:50	P2	conceito ? Huummmm, uma espécie de definição.
2	22:54:06	P3	é P2 também já cai nessa
3	22:54:18	P3	Veja se aprendi P1:
4	22:54:19	P1	só para clarear conceito de integral, o que é?
5	22:55:02	P1	Quando vc quer que o aluno aprenda o conceito de integral o que vc quer que ele aprenda?
6			
7	22:55:06	P3	é um conjunto de idéias que levam o aluno a compreender" o assunto?
8			
9	22:55:17	P2	não estou sabendo responder.....
10	22:55:32	P1	Idéias de quem P3, quem constrói o conceito?
11	22:56:24	P2	acho que quero que ele adquira informações diversas sobre o tópico.
12			
13	22:56:30	P3	Nós damos as idéias e os alunos deveriam construir o conceito, relacionar, saber aplicar...
14			
15	22:56:33	P3	???
16	22:57:03	P3	Entender o conjunto de fatos sobre integrais
17	22:57:13	P1	P2 vc já havia pensado nisso?
18	22:58:06	P2	mais ou menos, não muito (pensado nisso).
19	22:58:13	P1	Fazer entender o conceito é fazer entender a definição?
20	22:58:40	P2	não.
21	22:58:49	P1	o que é então
22	22:59:07	P2	fazer entender o conceito é uma coisa bem mais ampla do que entender a definição (eu acho).
23			
24	22:59:39	P2	gostaria muito que os alunos entendessem todos os conceitos que ensino.
25			
26	23:00:05	P1	ok P2, conceito não é somente a definição, é tudo o que está relacionado ao tópico
27			
28	23:00:21	P1	e é o aluno que constrói
29	23:00:32	P2	entender o conceito, relacionar,... é uma particularidade de cada aluno e cada um compreende a sua maneira e a seu tempo. ?
30			
31			
32	23:00:50	P1	Ok
33	23:01:25	P1	P2 essa discussão surgiu por que a maioria dos prof. acaba associando conceito à definição,
34			
35	23:01:43	P2	o aluno que constrói (mesmo que as vezes com alguns equívocos), mas ele constrói.
36			
37			
38			

Encontro 17 – 30/11/2005

Início: 22h49

Término: 23h36

Professores Participantes desse encontro: P1, P2 e P3.

Objetivo: Discussão sobre intuição e rigor no Ensino de Cálculo.

	Hora	De	Mensagem
45			
46	22:51:19	P1	envio de novo então
47	22:51:24	P1	O símbolo de somatório era usualmente escrito S na época de Leibniz, e o símbolo é meramente um S estilizado. Embora o simbologismo de Leibniz seja muito sugestivo em relação à maneira pela qual a integral é obtida como o limite de uma soma finita, deve-se ser cauteloso
48			
49			
50			
51			
52	22:51:39	P1	para não atribuir excessiva importância ao que é, afinal de contas, uma pura convenção de como o limite deve ser representado. Nos primeiros tempos do cálculo, quando o conceito de limite não era claramente compreendido e certamente nem sempre lembrado, explicava-se o significado da integral afirmando que " a diferença finita é substituída pela quantidade infinitamente pequena dx, e a própria in
53			
54			
55			
56			
57			
58			
59	22:51:58	P1	integral é a soma de infinitas quantidades infinitamente

1			pequenas $f(x)dx$ ". Embora o infinitamente pequeno exerça
2			uma certa atração para mentes especulativas, não encontra
3			espaço na matemática. Não serve a qualquer finalidade útil
4			envolver a noção clara da integral com frases sem sentido.
5			(COURANT, 2000, p. 488)
6	22:52:17	P1	recebeu P3?
7	22:53:04	P3	ok? Estou terminando de ler
8	22:53:45	P2	Acho que não concordo com o autor. "A noção clara da
9			integral (será que é?) com frases sem sentido" (mas
10			provavelmente necessárias para a compreensão do que é
11			integral)
12	22:55:10	P2	Infinitamente pequeno encontra muito espaço na matemática,
13			ele aparece em (quase) tudo.
14	22:55:11	P1	errata afirmando que a diferença finita Δx
15	22:55:46	P3	Acho que num primeiro momento o simbolismo da
16			matemática é importante, mas é claro devemos mostrar os
17			dois lados da moeda.
18	22:56:19	P3	Quanto ao fato de que o infinitamente pequeno não contra
19			espaço na matemática? como não?
20	22:57:17	P1	Bom escolhi esse trecho para refletirmos exatamente porque
21			na sala de aula precisamos de termos como esse
22			"infinitamente pequeno" para explicar integral
23	22:58:24	P3	De fato, o simbolismo da integral pode ser visto
24			meramente como uma maneira diferente de escrever o
25			limite, mas que nos permite várias interpretações (alguma
26			as vezes de fato especulativas mas que para uma pessoa
27			que esta tendo o primeiro contato com a integral, possa
28			ser interessante)
29	22:59:14	P2	Você gostou do que o autor COURANT escreveu neste trecho
30			ou escolhe por ter críticas a ele?
31	22:59:33	P1	e o autor continua dizendo que como a introdução do conceito
32			de limites podemos evitar todo o obscurecimento todas as
33			dificuldades que perturbam o início do desenvolvimento do
34			cálculo
35	23:01:28	P1	Bom se o conceito de limite é a base para a definição de
36			integral e com ele podemos entender tudo, não precisaríamos
37			de frases como infinitamente pequeno certo?
38	23:02:14	P3	Acho, que depois do primeiro contato com a integral,
39			mesmo que intuitivo, mais tarde podemos fundamentar
40			tudo através dos limites. Acredito que assim seja melhor.
41	23:02:26	P2	oras, mas para entender o conceito de limite, precisamos
42			exatamente do infinitamente pequeno.
43	23:04:28	P1	Acho que estamos falando de campos distintos podemos falar
44			em infinitésimos definindo a noção de um número real ou
45			falar em limites, Baldino propõe uma abordagem infinitesimal
46			pro cálculo, tudo o que vemos com limites poderia ser
47			estudado com infinitésimos
48	23:05:54	P1	se não me engano os infinitésimos são utilizados pelos
49			engenheiros e físicos
50	23:06:26	P3	Seria fazer "cálculos com o dx" ?
51	23:07:14	P1	quando o P3 fala que para os alunos da engenharia eles
52			pensam em coisas pequenas
53	23:07:19	P1	e não em limites
54	23:08:33	P1	Bom não é bem fazer cálculos com o dx , posso passar pra vcs
55			alguns artigos do Baldino sobre isso, muda radicalmente toda
56			a abordagem, os conceitos são os mesmos, porém não se usa
57			limites.
58	23:09:00	P3	ok, depois eu gostaria de ver
59	23:09:21	P2	eu tb.
60	23:10:11	P1	P3 quando vc diz que depois vai fundamentar tudo com limites

1			o que vc quis dizer com fundamentar?
2	23:10:37	P1	Será que eles entenderão com essa fundamentação?
3	23:10:55	P3	Pensei na Análise com os epsilons e deltas....
4	23:11:49	P1	Bom eu dou aula de análise e posso afirmar que com épsilons e deltas piora ainda mais
5			a compreensão
6	23:11:58	P1	Acredito, no primeiro momento por mais que nos
7	23:12:59	P3	esforcemos, o aluno só consegue ter uma idéia intuitiva da integrale ai para facilitar é que a notação deve nos ajudar, mas nesse caso somos obrigados a deixar o formalismo de lado
8			
9			
10			
11			
12	23:14:08	P3	Também acredito P1, que certos aprendizados só são efetivamente realizados depois de um certo tempo, maturidade de cada um....uma evolução....
13			
14			
15	23:16:03	P1	concordo P3, mas o que penso é que geralmente damos ênfase demasiada a esse rigor da matemática, e nos policiamos demais quando falamos algo que não seja "exato"
16			
17			
18	23:16:39	P3	é verdade
19	23:17:31	P1	Por exemplo será que o aluno que sabe a definição de integral aprendeu o conceito de integral?
20			
21	23:17:48	P2	nem sempre.
22	23:17:58	P3	Também concordo P1, posso então dizer que o entendimento do "conceito de integral" se divide em duas etapas a intuitiva e a formada pelo rigor?
23			
24			
25	23:18:25	P1	ou será que outras coisas que falamos como "infinitamente pequeno"! ajudam o aluno na construção do conceito?
26			
27	23:19:04	P3	Sim, acredito que as simplificações das nossas falas auxiliam a construção do conceito
28			
29	23:19:09	P1	Vamos pensar, será que só em duas partes? o que vc acha P2?
30			
31	23:19:44	P1	Cito como exemplo a minha aula de integral
32	23:20:30	P2	eu prefiro que o aluno entenda o conceito do que a definição (e não saiba o que fazer com ela).
33			
34	23:20:59	P1	vc não sabia enquanto aluno P2?
35	23:22:07	P2	acho que se divide em duas partes (pelo menos) a intuitiva e O rigor (depois).
36			
37	23:22:50	P1	Voltando pra minha aula de integral, usei papel milimetrado, graphmat, flash atividades em grupo e mesmo assim os alunos não foram muito bem na prova não!
38			
39			
40	23:23:41	P2	algumas definições eu sabia (e não conseguia usá-las, aplicá-las corretamente) e outras eu não sabia direito e mesmo assim conseguia fazer os exercícios e entendia o conceito
41			
42			
43			intuitivamente.
44	23:24:07	P3	Boa parte dos alunos estão viciados em "fazer" cálculos e deixam de pensar
45			
46	23:25:00	P3	De qualquer forma, temos consciência de que esse assunto é complexo e traz muitas informações em pouco tempo.
47			
48			
49	23:25:20	P1	exatamente o que percebi na prova P3, coloquei questões referentes às atividades e uma questão dissertativa, eles responderam as questões de calcule determine, e não essas.
50			
51			
52	23:26:06	P2	me lembro que em Cálculo III (com a Nativi) eu não tinha entendido direito as definições sobre Máximos e mínimos condicionados, porém entendi o conceito e o método de resolução dos exercícios e tirei nota máxima na prova.
53			
54			
55			
56	23:26:17	P1	mas não sabiam o que estavam calculando, para a maioria era apenas um processo
57			
58	23:26:22	P3	É P1, acredito que isso vai demorar a passar. Talvez com aulas como a sua, aos poucos, podemos mudar isso...
59			
60	23:27:15	P1	se eu não tivesse colocado questões de interpretação na

1			prova todos teriam tirado notas boas, agora o que realmente
2			queremos?
3	23:28:25	P3	De qualquer, forma isso também nos leva a refletir sobre
4			nossas responsabilidades. As vezes me pergunto: será
5			que estou fazendo o certo? Será que realmente eles
6			entenderam?
7	23:29:33	P1	P2 acho que vc não tinha entendido o conceito, vc entendeu o
8			processo e tirou nota
9	23:29:53	P2	exatamente.
10	23:30:09	P2	fiz, fui bem, mas fiz tudo meio no escuro, inseguro.
11	23:30:09	P1	quando digito nh a aparece essa careta, desculpa pessoal
12	23:30:28	P3	nh
13	23:30:34	P3	no meu não!!
14	23:30:35	P1	é nha
15	23:30:50	P2	hoje em dia, sabendo o conceito, faço tudo aquilo com a maior
16			segurança, confiança, é muito melhor.
17	23:30:56	P1	passe o cursor sobre o desenho e clique em adicionar
18	23:31:34	P1	o que é saber o conceito pra vc P2?
19	23:32:49	P2	(@)
20	23:33:59	P2	hummm, é me sentir seguro quando aparecem questões
21			Que envolvam aquele conceito.
22	23:35:12	P1	Vcs acham que conceito é algo fechado acabado pronto ou
23			algo aberto que pode ser mudado de acordo com cada
24			pessoa?
25	23:35:29	P2	saber argumentar, perguntar, responder sobre o tópico.
26	23:36:02	P2	eu acho que algo aberto que pode ser mudado de acordo com
27			cada pessoa.
28	23:36:16	P1	Bom pessoal já está tarde, gostaria de agradecer
29			imensamente a participação de vcs
30			
31			

Encontro 18 – 17/05/2006

Início: 22h37

Término: 23h43

Professores Participantes desse encontro: PO, P1, P2 e P3.

Objetivo: Aprofundar a discussão sobre intuição e rigor no Ensino de Cálculo.

Hora	De	Mensagem
40		
41	22:40:18	P3 ok. Acho que agora estamos todos na mesma janela
42	22:40:24	P1 Bom convidei vcs para que pudéssemos discutir mais alguns
43		temas..
44	22:40:30	PO Ótimo agora somos 4, certo? E o P5?
45	22:40:46	P1 O P5 não entrou em contato
46	22:40:51	PO ok
47	22:40:57	PO desculpe continue
48	22:41:42	P1 Separei alguns trechos dos nossos encontros presenciais
49	22:41:52	P2 certo.
50	22:41:59	PO e?
51	22:42:12	P1 isso é o que sustenta realmente as definições do cálculo e
52		isso a gente não pode passar no começo,... acho que no
53		cálculo a idéia é começar pela intuição .
54	22:42:36	P1 Essa é uma fala do P3..
55	22:44:04	P1 Acho que todos concordam que no cálculo temos que usar
56		alguns artificios para ensinar conteúdos novos, certo?
57	22:44:30	P3 Certo
58	22:44:42	P1 Em geral dizemos que temos que recorrer à intuição como
59		ponto de partida, certo?
60	22:44:43	P2 Eu concordo e que devemos começar pela intuição (P3) tb

- 1 concordo.
- 2 22:45:07 P1 O que será que estamos querendo dizer quando falamos de
- 3 **intuição?**
- 4 22:45:31 PO **Lá vem a perguntadora: o q são artifícios? e depois**
- 5 **vamos ver o q chamamos de intuição**
- 6 22:45:54 PO **Intuição todo mundo tem?**
- 7 22:46:37 P1 Artifícios são técnicas que acreditamos que vão facilitar a
- 8 compreensão do aluno, certo?
- 9 22:47:07 P2 artifícios são meios alternativos à definição formal
- 10 propriamente dita.
- 11 22:47:27 PO **intuição então seria uma técnica? Meios alternativos?**
- 12 22:47:45 P3 Concordo com o P1, por exemplo quando explico a integral e
- 13 chamo a base do retângulo de dx, isso é um artifício para
- 14 explicar a integral
- 15 22:48:12 PO **obrigada P3, um exemplo vale mais q mil palavras hahaha**
- 16 22:48:25 P2 acho que artifício é uma coisa e **intuição** outra.
- 17 22:48:27 P1 Bom acho que devemos nos perguntar primeiro recorreremos à
- 18 **intuição** de quem?
- 19 22:48:42 P3 do aluno
- 20 22:48:46 PO **Chamar a base do triângulo de dx é uma intuição?**
- 21 22:49:20 PO **P2 concordo, qual a diferença aproveitando o exemplo do**
- 22 **P3?**
- 23 22:49:49 P3 não, mas quando eu peço para que pensem no ocorre com a
- 24 área quando a base do triângulo tende a zero, estou
- 25 recorrendo a **intuição**.
- 26 22:50:08 P2 na **intuição** vamos contar com idéias já conhecidas pelos
- 27 alunos (ou o instinto de cada um), artifício é um meio para
- 28 ensinar algo novo.
- 29 22:50:11 P1 Acho que chamar a base do retângulo de dx não é **intuição** e
- 30 sim imposição do professor!!!
- 31 22:51:21 PO **P2 "na intuição vamos contar com idéias já conhecidas**
- 32 **pelos alunos (ou o instinto de cada um)"**
- 33 22:51:35 PO **instinto e intuição é a mesma coisa?**
- 34 22:52:22 P2 retiro o parênteses da frase acima. Vai refletir melhor o que
- 35 quis dizer.
- 36 22:52:29 PO **P3 qdo vc pede ao aluno para pensar em dx tendendo a**
- 37 **zero de fato vc pede uma ação do seu aluno mas seria**
- 38 **intuição?**
- 39 22:53:04 P3 Creio, que sim
- 40 22:53:09 PO **P2, deixe o parênteses, o legal é pensarmos naquilo que**
- 41 **vem a cabeça sem muita elaboração e depois elaboramos**
- 42 22:53:30 P2 tá certo.
- 43 22:53:37 P1 **Intuição** seria uma percepção clara e imediata de algo?
- 44 22:54:12 PO **Sugiro que pensemos, como P3, via exemplos**
- 45 22:54:27 P3 Estou aproveitamento as idéias superficiais dos alunos (sem
- 46 entrar nos detalhes). Seria um primeiro pensamento (direto),
- 47 ou seja, sem usar muito a razão.
- 48 22:54:29 PO **P1 dê um exemplo de percepção clara**
- 49 22:54:55 P1 Não sei não!
- 50 22:55:29 PO **Ahnn por isso falo pra tentarmos exemplos senão vamos**
- 51 **usar jargões, o q acham? é só uma proposta**
- 52 22:55:36 P2 percepção clara: todo triângulo tem três lados.
- 53 22:56:02 PO **Legal, isso é intuição ou percepção? tem diferença?**
- 54 22:56:24 PO **Estamos falando disso pq falamos de conceito intuitivo**
- 55 **certo?**
- 56 22:56:35 P2 Acho que percepção.
- 57 22:56:40 PO **Seria um primeiro pensamento (direto), ou seja, sem usar**
- 58 **muito a razão. Como se mede o uso da razão?**
- 59 22:58:02 P1 Partir da **intuição** seria partir de algo que não precisamos de
- 60 esforço para compreender sem raciocinar muito?

- 1 22:58:53 P1 Bom mas o que **intuitivo** para o professor pode não ser para o aluno, certo?
- 2
- 3 22:59:40 P3 Acho que todos nós temos um pensamento **intuitivo** a respeito de determinado assunto.
- 4
- 5 23:00:08 P3 Temos apenas que tomar cuidado, pois nem sempre a **intuição** nos diz a verdade.
- 6
- 7 23:00:32 P1 P3, vamos voltar ao exemplo da integral então o que vc acha que os alunos tem de **intuitivo** a respeito desse assunto?
- 8
- 9 23:00:38 P2 Cada pessoa está num estágio de **intuição** diferente. Aí a medição do uso da razão tb parece ser diferente para cada um.
- 10
- 11
- 12 23:00:52 PO **Concordo com vcs existem pensamentos que temos sem precisar de muito esforço, por exemplo 2+2 ser 4 pra nós 4 é intuitivo?**
- 13
- 14
- 15 23:01:20 PO **silêncio.....**
- 16 23:01:30 PO **vamos ser mais intuitivos?**
- 17 23:02:06 P1 Estou esperando o P3 responder a minha pergunta
- 18 23:02:24 P3 Quando peço que observem o que ocorre com a área quando o número de retângulos "tende" infinito, acredito que estão tendo um pensamento **intuitivo**.
- 19
- 20
- 21 23:02:29 PO **ok, vejam o q achei num dicionário on line**
- 22 23:02:46 PO **acto de intuir; percepção rápida; conhecimento claro e imediato, sem utilização do raciocínio; predisposição especial para apreender rapidamente determinados conhecimentos; pressentimento; Filos., contemplação pela qual se atinge em toda a sua plenitude uma verdade de ordem diversa daquelas que se atingem por meio da razão.**
- 23
- 24
- 25
- 26
- 27
- 28
- 29 23:03:03 P2 Agora para 2+2 ser 1 (inteiros módulo 3) aí não basta a **intuição**.
- 30
- 31 23:03:09 PO **Para a filosofia precisamos da razão para o cotidiano não**
- 32 23:04:15 PO **P2 para nós 4 aqui 2+2 =4 ou 1 mod 3 pode ser tão simples de aceitar**
- 33
- 34 23:04:58 P2 para nós 4 sim.
- 35 23:06:06 P2 para um aluno de 1º ano de graduação 1 mod 3 não seria aceito tão imediatamente quanto 2+2=4.
- 36
- 37 23:06:47 PO **Bom, penso que temos 3 coisas por aqui 1. conceito matemático, conceitos na escola, conceito intuitivo. É isso?**
- 38
- 39
- 40 23:08:13 P3 Independentemente da definição dada a palavra **intuição**, creio que ela pode nos ajudar a explicar determinados assuntos.
- 41
- 42
- 43 23:08:13 P2 é isso.
- 44 23:08:24 P1 Conceito **intuitivo** é essencial para a aprendizagem do conceito matemático?
- 45
- 46 23:09:36 P1 POe o que vc quis dizer com conceito na escola?
- 47 23:09:37 P3 Essencial, acredito que não. Mas em determinados assuntos ela pode nos ajudar. Não apelaria para **intuição** para explicar congruência.
- 48
- 49
- 50 23:10:06 P2 não sei se é essencial!
- 51 23:10:56 PO **O conceito matemático seria a definição de um ente matemático, bem Bourbakista**
- 52
- 53 23:11:46 PO **O conceito na escola, pelo que vi nas falas do P5 era algo que ia mudando, partia da intuição**
- 54
- 55 23:12:15 P1 Me parece que quando colocamos a palavra conceito na história as coisas acabam ficando mais obscuras ainda, fugimos de entender o que é **intuição** para falar de conceito **intuitivo?**
- 56
- 57
- 58
- 59 23:12:31 PO **Para mim é mais fácil entender sistemas conceituais do q conceito de algo**
- 60

1	23:12:37	P3	Acho que isto está ficando confuso!!
2	23:12:49	PO	Pois é voltando aos exemplos
3	23:13:05	P1	Concordo P3!
4	23:13:12	PO	Quando se ensina integral
5	23:13:31	PO	dx tende a zero é algo intuitivo pq?
6	23:13:49	P2	E o que vc acha sobre a sua pergunta P1 (conceito intuitivo é essencial?)
7			
8	23:14:49	P2	pq o aluno vai ver na figura
9	23:15:07	PO	Como assim?
10	23:15:27	P1	Acho que não tem nada de intuitivo nisso!!
11	23:15:40	P3	Não estou detalhando o que ocorre com a área quando a base dos retângulos tende a zero, mas creio que os alunos observam (de forma intuitiva) que quanto maior for o número de retângulos mais próximos estaremos da área procurada
12			
13			
14			
15	23:16:01	PO	Aquele flash do P1 ajudava "na intuição"?
16	23:16:19	P2	acho que não é intuitivo mesmo, acabei de precisar usar a razão (parei para pensar) sobre.
17			
18	23:16:32	P3	Sim, pois nos dava um visual melhor
19	23:17:27	P1	Talvez o que pudéssemos considerar como intuitivo nesse exemplo seja a noção de área de retângulos?
20			
21	23:17:49	P1	Ou ainda simplesmente a noção de área?
22	23:18:00	P2	acho que ajudava (e muito) mas na compreensão (com o uso da razão)
23			
24	23:18:17	P1	Estou querendo entender o que é intuitivo para o aluno!!!
25	23:18:38	P1	PO cadê vc?
26	23:18:44	P3	Não P1, creio que intuitivo seja a passagem ao limite.
27	23:19:09	PO	estou aqui
28	23:19:37	PO	Como assim passagem ao limite?
29	23:20:06	P1	Estou entendendo que o intuitivo estaria ligado ao que o aluno acaba imaginando que vai ocorrer?
30			
31	23:20:11	P3	Ver o que ocorre com a área quando o número de retângulos tende a infinito.
32			
33	23:20:31	P3	Isso, P1.
34	23:20:37	P3	Acho que sim.
35	23:21:37	PO	E qual a diferença de intuição e conceito neste caso?
36	23:22:24	P3	No conceito entramos com os detalhes
37	23:22:43	P1	O que são detalhes?
38	23:22:52	P3	Na intuição seria apenas uma primeira percepção sobre o assunto.
39			
40	23:22:56	PO	roubou minha questão
41	23:23:06	P1	Estou aprendendo...
42	23:23:17	P3	como assim?
43	23:23:24	PO	Ver o que ocorre com a área quando o número de retângulos tende a infinito. Isto não tem detalhes? O q falta o q sobra?
44			
45			
46	23:24:10	PO	Os detalhes seriam a definição?
47	23:24:16	PO	rigor?
48	23:24:23	P3	Mas isso tudo seria de uma maneira informal.
49	23:24:29	P2	os detalhes seriam as formalizações matemáticas talvez.
50	23:24:53	PO	Então não são detalhes são formalizações
51	23:25:07	P2	mas no segundo momento, pós entendimento via intuição (mais informal, livre).
52			
53	23:25:19	PO	acho q tem mais detalhes qdo criamos n retângulos o q acham?
54			
55	23:26:00	PO	A formalização seria uma tradução direta para a linguagem matemática?
56			
57	23:27:01	PO	p.e. dx tende a zero vou diminuindo a base até ela sumir?
58	23:27:36	PO	nesta frase diminuindo até sumir é intuição e dx tende a zero detalhes ou formalização?
59			
60	23:27:48	P3	Quando entramos nessa discussão, ai não estamos mais na

1			intuição.
2	23:27:56	PO	pq?
3	23:28:31	P1	O P3 disse que devemos tomar cuidado com a intuição ,
4			certo? Porque vc diz isso P3?
5	23:28:56	P2	dx tende a zero formalização.
6	23:29:13	P3	Pois, há situações onde a nossa intuição (pensamento sem
7			razão) falha
8	23:29:18	P2	difícil dizer pq!
9	23:30:04	PO	P3, seria pq há situações na matemática ciência onde
10			nosso pensamento cotidiano natural não daria conta?
11	23:30:21	PO	Razão seria lógica matemática?
12	23:30:25	P3	Acredito que sim
13	23:30:42	P3	É isso aí.
14	23:30:49	P3	Estou certo???
15	23:31:17	P2	Prá nós 4 a soma dos ângulo internos de um triangulo ser
16			180° é intuitivo ? Mas e ser fosse numa geometria não
17			euclidiana?
18	23:31:42	PO	Pra mim entender pra entender continuidade como
19			Cauchy Weierstress definem é difícil se ficar pensando na
20			continuidade "natural", do cotidiano
21	23:31:56	PO	O exemplo do P2 corrobora
22	23:32:22	PO	Aí vamos ver que intuição assim como o tal conceito vai
23			variando
24	23:33:01	PO	como matemáticos pq usamos tantas coisas ambíguas
25			pra falar das nossas aulas? conceito de integral, intuição
26			etc...
27	23:33:18	PO	???
28	23:33:36	P3	Talvez seja o desespero para fazer com que eles entendam
29			algo.
30	23:33:42	PO	boa
31	23:34:07	P2	Tenho certeza q minha intuição é mais elementar do que a
32			do Galois quando tinha 20 anos (último de sua vida).
33	23:34:18	PO	desespero é uma boa imagem dos profs de cálculo q
34			querem compartilhar com seus alunos
35	23:34:19	P2	bem mais elementar.
36	23:35:30	P3	É que na verdade usamos essa idéias sem pensar muito em
37			suas definições. O que é conceito? O que é intuição ?
38	23:35:43	P3	Acho que assumimos isso como algo primitivo
39	23:35:59	PO	Será que é possível defini-las precisamente?
40	23:36:12	P3	Acredito que não.
41	23:36:47	P3	Nessa área parece que as "coisas" variam um pouco mais.
42	23:37:28	P1	Talvez não defini-las mas entender melhor o que de fato
43			fazemos na sala de aula e acho que se queremos entender
44			isso precisamos compreender um pouco melhor como
45			funciona a dinâmica da sala de aula
46	23:37:58	P1	o que de fato fazemos quando estamos usando esses termos,
47			certo?
48			
49			
50			
51			
52			
53			
54			
55			
56			
57			
58			
59			