UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Faculdade de Educação

Marisa da Silva Dias

FORMAÇÃO DA IMAGEM CONCEITUAL DA RETA REAL
Um estudo do desenvolvimento do conceito
na perspectiva lógico-histórica

São Paulo
2007

Marisa da Silva Dias

FORMAÇÃO DA IMAGEM CONCEITUAL DA RETA REAL
Um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica

Tese apresentada à Banca Examinadora da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, como exigência parcial à obtenção do título de doutora em Educação, sob orientação do Professor Doutor Manoel Oriosvaldo de Moura

São Paulo
2007

Catalogação na Publicação
Serviço de Biblioteca e Documentação da FEUSP
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo

375.3 Dias, Marisa da Silva
D541f Formação da imagem conceitual da reta real : um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica / Marisa da Silva Dias ; orientação Manuel Oriosvaldo de Moura. – São Paulo, SP : s. n., 2007.
252 p. : il. , figs. + anexo.

Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

1. – Matemática – Estudo e ensino 2. – Formação de professores 3. – Números reais 4. – Ensino e aprendizagem 5. – Prática de ensino I. Moura, Manuel Oriosvaldo, orient.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Marisa da Silva Dias
Formação da imagem conceitual da reta real: Um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica

Tese apresentada à Banca Examinadora da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, como exigência parcial à obtenção do título de doutora em Educação, sob orientação do Professor Doutor Manoel Oriosvaldo de Moura.

Aprovado em:

Banca examinadora

Prof. Dr. ____

Instituição: ____________________________________Assinatura:____________________

Prof. Dr. ____

Instituição: ____________________________________Assinatura:____________________

Prof. Dr. ____

Instituição: ____________________________________Assinatura:____________________

Prof. Dr. ____

Instituição: ____________________________________Assinatura:____________________

Prof. Dr. ____

Instituição: ____________________________________Assinatura:____________________

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida.

À Lúcia Mônica, minha mãe, com amor, admiração e gratidão por sua compreensão, carinho, presença e incansável apoio ao longo do período da elaboração deste trabalho.

À minha família pela compreensão, apoio, carinho e auxílio.

Ao Prof. Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura, meu orientador, pela confiança, amizade e contribuições para meu crescimento pessoal e profissional.

À banca de qualificação pelas valiosas sugestões a este trabalho.

Aos amigos do GEPAPe, Ori, Bel, Eliza, Silvia Pereira, Silvia Tavares, Wellington, Humberto, Anne, Vanessa, Silem, Sérgio, Luciana, Flávia, Elaine, Rosa, Marta e aos novos integrantes pelos momentos de estudo que constituíram para meu desenvolvimento.

Aos queridos amigos e educadores do grupo Caraça, Luciano, Anna Regina, Ori, Rosemary, Micheline, Roberto, Dulce, Rosana, Olga, Maria do Carmo, Esther e Érica pelos momentos de estudo humanizador, por combinarmos nossas vidas, por compensar-me.

Aos queridos amigos e companheiros de jornada do Perseverança.

Às amigas Rosemary e Eliza pela disponibilidade e valiosa ajuda neste trabalho.

Ao prof. Dr. José Manuel que me deu a oportunidade de realização do estágio na Unidade de Investigação da Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa e por todo auxílio que me foi prestado.

Ao prof. Dr. António Domingos pela contribuição ao trabalho e pelo auxílio prestado em Portugal.

Aos colegas dos grupos de estudo coordenados pelo prof. Dr. José Manuel pelos momentos de estudo e amizade.

Às amigas Marta, Célia, Sandra, Sonia, Gracinda, Simone, aos amigos Ricardo, Adecio, Pedro, à família Migués, à família Mesquita por compartilharmos bons momentos em Portugal.

À CAPES pela bolsa de doutorado e de estágio no exterior, para realização desta pesquisa e formação profissional.

Ao CEETEPS pela concessão do afastamento para a pesquisa.

Aos funcionários da FEUSP pelo apoio necessário.

Ao Pérsio pela leitura e revisão deste texto.

RESUMO

DIAS, M. S. *Formação da imagem conceitual da reta real: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica*. 2007. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2007.

O trabalho constitui-se na formação da imagem conceitual do professor, na inter-relação indivíduo-coletividade, a fim de compreender a relação da imagem conceitual com o desenvolvimento da reta real na perspectiva lógico-histórica desse conceito. Os procedimentos metodológicos fundamentam-se nas contribuições teóricas da pesquisa-ação, cujo problema social se configura no campo do ensino e da aprendizagem da matemática. Os sujeitos são educadores matemáticos: pesquisadora e professores do Ensino Fundamental e Médio. O desenvolvimento da imagem conceitual e aspectos de seu ensino realizou-se por meio de um curso de formação contínua para professores organizado sob os pressupostos da atividade orientadora de ensino e da perspectiva lógico-histórica do conceito. O curso abordou a transição de um campo numérico a outro, com foco na reta real, partindo da formulação do sistema de numeração posicional e a transição para o número natural, seguindo a fração como número racional, o irracional resultante da incomensurabilidade e o contínuo numérico – a reta real – como a captação numérica do movimento. Os aportes teórico-metodológicos do materialismo dialético e da atividade contribuíram para a compreensão do movimento da imagem conceitual. A análise da imagem conceitual orientou-se pela reprodução dos principais nexos conceituais no desenvolvimento do pensamento numérico. A intertextualidade, como recurso que proporciona evidenciar o movimento da imagem conceitual dos sujeitos na exposição e análise dos dados, possibilitou perceber que a dialética do pensamento numérico transita entre discreto-denso-contínuo, comensurável-incomensurável, finito-infinito, cardinalidade-ordenação. Neste movimento do pensamento revelam-se dilemas, a negação de um conhecimento, negação da negação, lógica dialética e lógica formal e as categorias dialéticas: forma e conteúdo, aparência e essência, análise e síntese, empírico e teórico, lógico e histórico, intuição e dedução. Conclui-se que o desenvolvimento da imagem conceitual individual de conceito matemático, ocorre na relação indivíduo-coletividade e, pode ser coerente com o significado científico elaborado historicamente por meio da realização de uma atividade orientadora de ensino fundamentada em pressupostos lógico-históricos do conceito.

Palavras-chave: imagem conceitual, reta real, número real, lógico-histórico, educação matemática.

ABSTRACT

This work consists of a study of the formation teachers' concept image by the individual-collective inter-relation, in order to understand the relation of concept image with the development of the number line in a logical-historical perspective of the concept. The methodological procedures are based on the action research theoretical contribution, whose social problem appears in the mathematics teaching and learning field. The subjects are mathematics educators: the researcher and secondary school teachers. The development of the concept image and its teaching aspects were achieved during a teacher continuous training course, which was organized according to the teaching oriented activity contributions and the logical-historical perspective of the concept. One approach of this training course was the transition from one numerical field to another; a special attention was focussed on the number line, beginning with the formulation of the positional number system and the transition to the natural number, regarding the fraction as a rational number, the irrational number as a result of the incommensurability. Other approach was the arithmetic continuity – as the numerical capitation of the movement. The theoretical and methodological basis of the dialectical materialism and the activity theory contribute to the understanding of the concept image movement. The concept image analysis was guided by the reproduction of the main internal connections of numerical thought development. The intertextuality, as a resource which highlights the subjects' concept image in the exposition and in the data analysis, made possible to realize that the dialectic of the numerical thought oscillates between the discreet-dense-continuous, the incommensurable and the commensurable, the finite and the infinite, the cardinality and the ordinance. Dilemmas, negation of knowledge, negation of negation, dialectical and formal logic and dialectical categories: form and content, appearance and essence, analysis and synthesis, empirical and theoretical, logical and historical, intuition and deduction, are revealed in this movement. In conclusion, the individual concept image's development of the mathematical concept takes place in the individual-collective relations and it can be coherent with the historically elaborated scientific meaning by performing a teaching oriented activity based on the logical-historical concept assumptions.

Keywords: concept image, number line, real number, logical-historical, mathematics education.

LISTA DE MAPAS CONCEITUAIS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O mais importante na vida não é a situação em que
estamos, mas a direção para a qual nos movemos.
(Oliver W. Holmes)

Esta pesquisa se propôs desenvolver a noção de *imagem conceitual* iniciada por Tall e Vinner. Esses autores, com base em princípios cognitivistas, concluíram que os estudantes diante de uma tarefa cognitiva utilizam as imagens conceituais em vez de definições matemáticas. Essa forma, ainda segundo os autores, tem resultado na dificuldade de aprendizagem da matemática avançada no nível superior de ensino.

Nosso estudo sobre a imagem conceitual e imagem da definição iniciou-se com a pesquisa de mestrado (DIAS, 2002), sobre o conceito de densidade da reta real. As indicações de semelhança das imagens conceituais entre professores e estudantes e as imagens de *reta discreta, reta racional* para a reta real, formaram indícios da necessidade de novas pesquisas.

Entre os procedimentos metodológicos na pesquisa do mestrado, uma entrevista foi realizada por meio de discussão sobre questões previamente respondidas pelos sujeitos. Em dupla, os professores debateram suas respostas que apresentavam inicialmente divergências. Durante a entrevista, os argumentos e contra-argumentos foram sendo explicitados e reformulados. Com isso, observou-se a possibilidade de desenvolvimento das imagens conceituais por meio da interação entre os sujeitos.

Na atual pesquisa, sobre a formação da imagem conceitual da reta real, partimos do pressuposto de que os indivíduos podem utilizar imagens do conceito científico não só para responder problemas escolares. Assim, procuramos compreender de que modo a aquisição do conhecimento teórico é elemento potencializador da formação de nexos conceituais que dão sentido ao que se aprende como contributo para a vida. Portanto, investigamos a formação e o desenvolvimento do conceito para que se torne propiciador do desenvolvimento humano. Para esse fim, investimos nos elementos formadores do pensamento matemático de modo a realizar a apropriação e a objetivação de conceitos que desenvolvam as aptidões humanas nele encarnadas.

Os pressupostos da psicologia histórico-cultural, fundamentalmente a teoria da atividade (LEONTIEV, 1964?, 1983, 1988), e do materialismo histórico dialético (KOPNIN, 1978), constituíram base teórica fundamental para a apropriação e objetivação de conceitos matemáticos presentes na investigação.

A contribuição da teoria da atividade caracteriza-se na compreensão do desenvolvimento humano. Para essa teoria, a passagem à humanidade difere o ser humano dos outros animais, pois se submete às leis do desenvolvimento sociohistórico. É também seu pressuposto que o ser humano não nasce humanizado. Para sua humanização, é necessário que ele se aproprie da cultura, produto do desenvolvimento histórico humano. Essa apropriação consiste em um processo ativo, por meio do qual o ser humano reproduz na mente os traços essenciais da atividade de produção e desenvolvimento dessa cultura. Nesse processo, o indivíduo desenvolve as faculdades especificamente humanas, tornando-se sujeito, historicamente situado, produto e produtor de cultura.

Os pressupostos do materialismo histórico dialético, em particular a lógica dialética, permitiram-nos um modo de apropriação do conceito tendo como fundamento o seu desenvolvimento lógico-histórico. Consideramos que este é mais amplo que a lógica formal. Enquanto a lógica formal se interessa pela própria forma lingüística de expressão de uma idéia como, por exemplo, de uma definição matemática, a lógica dialética estuda, sobretudo, o conteúdo mental, dando atenção especial à relação desse conteúdo com a realidade objetiva, no próprio processo de pensamento. Liberto das casualidades históricas, o lógico do conceito evidencia o movimento de criação e desenvolvimento deste, na sua essência, pondo a descoberto seus nexos conceituais.

Os pressupostos teóricos fundamentam assim a organização da pesquisa que concebe a atividade do professor organizador do ensino uma forma de promover a apropriação do conhecimento teórico do estudante, ao terem acesso a conceitos historicamente elaborados.

Para investigarmos essa apropriação, propomos, em um curso de formação contínua de professores de matemática do Ensino Fundamental e Médio, situações-problema fundamentadas no lógico-histórico do conceito, com propósito de desencadear o pensamento teórico dos conceitos matemáticos envolvidos.

Esse trabalho orientou-se pelo desenvolvimento do pensamento numérico nos principais nexos conceituais que compreendem a transição de um campo numérico a outro, com foco na reta real, ou seja, no conjunto dos números reais compreendido como além de uma união de números racionais e números irracionais.

Compreender o processo de formação da imagem conceitual da reta real em relação com o desenvolvimento desse conceito na perspectiva lógico-histórica, na interação indivíduo-coletividade, objetivo desta investigação, desencadeou uma atividade: a atividade orientadora de ensino. Esta, como particular da atividade humana, procura atender aos princípios da teoria da atividade, tendo como objeto a organização do ensino que, no caso de nossa pesquisa, teve como uma de suas ações a realização de um curso com a intencionalidade de promover o movimento conceitual no compartilhamento de significados.

Com base em pressupostos da pesquisa-ação, um curso de formação contínua de 40 horas foi desenvolvido junto com aproximadamente 80 professores. Situações-problema elaboradas com propósito de desencadear a mobilização do pensamento permitiram a construção do conceito para si.

A imagem conceitual constituiu o ponto de partida e de chegada neste estudo. Iniciamos com a formulação teórica desse conceito seguida da análise crítica, definindo o percurso da investigação. Após as unidades didáticas, o capítulo *Formação da imagem conceitual* apresenta a síntese dos resultados das análises realizadas nas unidades didáticas.

A primeira unidade didática – sujeito histórico – evidencia os princípios humanizadores da proposta de desenvolvimento do curso. Nela pudemos iniciar uma tomada de consciência do indivíduo como sujeito histórico.

As unidades didáticas seguintes apresentam o conceito de número em movimento de apropriação e objetivação. Inicia-se pela *unidade didática: sistema de numeração posicional*, na qual parte da correspondência biunívoca para a criação de sistemas de numeração. Dentre os sistemas propostos, avalia-se a eficácia do sistema como o controlador da variação quantitativa.

A unidade *número natural* busca compreender como os professores ensinam números naturais. Desse modo, evidenciam-se concepções de ensino e imagens conceituais desse número.

A *unidade didática medida* aborda a criação do processo da medição e conseqüentemente os nexos conceituais como a fração, acumulados em instrumentos de medida.

A *unidade número racional* relaciona a medida com o número racional com a superação do primeiro, percurso que parte da comensurabilidade à significação da racionalidade do número.

A *unidade densidade*, *comensurabilidade*, *incomensurabilidade e o número* apresenta uma discussão que parte de um problema envolvendo medida e se articula com os conceitos de sucessor, divisibilidade, racionalidade e irracionalidade.

A *unidade didática: atividade orientadora de ensino da reta real* está dividida em três partes: uma que explora o conceito de continuidade em um dos argumentos de Zenão, outra que contém as propostas dos professores para o ensino da reta real e uma última que faz uma síntese das partes anteriores juntamente com a dos professores sobre o conceito de reta real.

A última unidade didática, *número complexo*, apresenta brevemente como o número imaginário surgiu e como ficou constituído o conjunto dos números complexos.

Os nexos conceituais e as formas de pensamento de cada criação numérica estão apresentados nas unidades didáticas, no movimento de manifestação e desenvolvimento das imagens conceituais, nas quais também consta uma zona de possibilidades para posteriores encaminhamentos. Durante o curso, as imagens conceituais transitaram nos pensamentos empírico, teórico (DAVIDOV, 1988), ou seja, do lógico-formal, que compreende conceitos do cotidiano e a forma empírica da ciência, ao teórico como forma de elaboração conceitual, que corresponde à essência do fenômeno.

No capítulo *formação da imagem conceitual*, é realizada a releitura teórica do conceito de *imagem conceitual*, apontando os elementos formadores e as formas de pensamento observados nas unidades no desenvolvimento do pensamento numérico, em particular da reta real.

2 IMAGEM CONCEITUAL, PONTO DE PARTIDA

O que é, exatamente por ser tal como
é, não vai ficar tal como está. (Brecht)

Neste capítulo, expomos os princípios do desenvolvimento da noção de imagem conceitual, a qual analisamos no item seguinte juntamente com as indagações que constituíram o objetivo desta investigação.

O estudo a respeito da imagem conceitual do indivíduo referente a conceitos matemáticos iniciou-se por meio dos artigos de Vinner e Tall (1981), Vinner (1983; 1991), o qual sintetizamos em seguida seu processo de desenvolvimento.

No âmbito da pesquisa em Educação Matemática, Vinner (1991) aborda o papel da definição sob dois enfoques: como concebida pelos profissionais da matemática e no processo cognitivo da aquisição de conceitos. Ele defende que há um conflito entre esses dois enfoques quando se encontram no processo de ensino e aprendizagem da matemática. É nesse contexto que as noções imagem conceitual (*concept image*) e definição do conceito (*concept definition*) foram criadas.

Esse autor refere-se à concepção da matemática pelos docentes como uma ciência dedutiva. Em suas palavras: "Parece que ninguém na comunidade matemática discorda com a asserção que a matemática é uma teoria dedutiva e, como tal, começa com noções primitivas e axiomas" (VINNER, 1991, p. 65, tradução nossa) [1].

Embora destaque que não foi assim que a matemática foi criada, salienta que é assim que ela aparece nos livros textos de matemática do Ensino Superior. Vinner (1991), ao buscar compreender o fenômeno de aquisição de conceitos pelos estudantes, iniciou seu estudo afirmando que "[...] o ensino deve levar em consideração os processos psicológicos da aquisição cotidiana dos conceitos e a dedução lógica" (p. 65, tradução nossa)[2], ou ainda, "[...] quando se vai decidir sobre a pedagogia do ensino da matemática deve-se levar em

---

[1] It seems that no-one in the mathematical community disagrees with the claim that mathematics is a deductive theory and as such, it starts with primary notions and axioms (VINNER, 1991, p. 65).
[2] [...] the teaching should take into account the common psychological processes of concept acquisition and logical reasoning (VINNER, 1991, p. 65).

consideração não somente a questão como *se espera* que os estudantes adquiram os conceitos matemáticos mas também, e talvez principalmente, como os estudantes *realmente* adquirem tais conceitos" (p. 67, tradução nossa) [3].

Com esse propósito, o autor analisou o papel da definição no contexto cotidiano e no contexto científico, focando esse último na relação com o ensino da matemática.

Vinner (1991) admite que "adquirir um conceito significa formar uma imagem conceitual deste" (p. 69, tradução nossa)[4] e que a imagem conceitual é constituída na estrutura cognitiva do indivíduo associada a certo conceito, científico ou não, coerente ou não com o conceito construído socialmente. Essa associação contém representações mentais como: imagens de representações visuais, impressões, experiências e propriedades. Essas propriedades podem ser elaboradas pelo indivíduo por intermédio de processos de pensamento sobre suas representações mentais (TALL; VINNER, 1981).

A imagem conceitual pode não ser a mesma para toda situação. No momento em que o indivíduo é estimulado por uma situação, uma imagem do conceito é evocada em sua mente. A imagem conceitual evocada (*evoked concept image*) foi considerada pelos autores apenas como imagem conceitual. Tal imagem não se constitui necessariamente em um todo coerente devido aos impulsos sensoriais excitarem certas partes neuronais que podem não ser as mesmas toda vez em que há estímulo.

Conseqüentemente, partes da imagem conceitual podem ser conflitantes. Nesse caso, caracteriza-se no indivíduo o fator de conflito potencial (*potential conflict factor*), tornando-se fator de conflito cognitivo (*cognitive conflict factor*) quando essas partes forem evocadas simultaneamente. Dias (2002) pôde inferir a transição de um fator de conflito potencial ao cognitivo por meio da resposta à questão:

> Existe um maior elemento em cada conjunto explicitado abaixo? Explique sua resposta em cada caso:
> $\{x \in \boldsymbol{R} | x < 1{,}25\}$
> $\{x \in \boldsymbol{Q} | x < 1{,}25\}$
> $\{x \in \boldsymbol{I} | x \leq 1{,}25\}$ (***I*** é o conjunto dos irracionais). (p. 69)

---

[3] [...] when coming to decide about the pedagogy of teaching mathematics one has to take into account not only the question how students are *expected* to acquire the mathematical concepts but also, and perhaps mainly, how students *really* acquire these concepts (VINNER, 1991, p. 67).

[4] [...] to acquire a concept means to form a concept image for it (VINNER, 1991, p. 69).

Inicialmente a resposta foi dada por escrito e posteriormente foi realizada uma discussão. Nesta, o conflito das imagens de existência de um maior elemento com a impossibilidade de representá-lo pôde ser conscientizada pelo indivíduo.

Esses conflitos ainda podem ocorrer entre parte da imagem conceitual com a imagem da definição do conceito. O fator de conflito cognitivo pode ser conscientes ou inconscientes, como também um conflito gerado no subconsciente pode tornar-se consciente depois de algum tempo (TALL; VINNER, 1981).

A imagem da definição do conceito (usada pelos autores freqüentemente como *definição do conceito*, entendida como pessoal – *personal concept definition*) é também formada na estrutura cognitiva do sujeito, e é a especificação do conceito que o indivíduo expressa em forma de palavras. Em particular, na matemática, "todo conceito, exceto os primitivos, tem definição formal" (DREYFUS, 1990, p. 117).

Essa definição pode ser apreendida pelo indivíduo na escola, ou não, relacionando-se em maior ou menor grau com a definição constituída na comunidade cientifica. Uma das maneiras na formação da imagem da definição do conceito pode ser no ato em que o indivíduo é questionado para explicar um conceito. Por exemplo: o que é conjunto dos números reais? A resposta pode ser uma reconstrução pessoal de uma definição formal, sem que ela e a definição atual instituída pela comunidade científica tenham necessariamente significados coincidentes ou, ainda, a definição do conceito pode ser uma descrição da imagem conceitual.

A definição do conceito pode ser inexistente quando ainda não foi formada, foi esquecida, ou ser inativa. Essa última podendo ser a memorização mecânica de uma definição. Uma imagem da definição inativa foi observada[5] quando um sujeito manifestou a definição de irracional como sendo o número que não pode ser escrito na forma *a* sobre *b*, *a* e *b* inteiros e *b* diferente de zero. No entanto, em uma tarefa de classificar o número 3,33301579321..., o sujeito não julgou o número como irracional, não apresentando qualquer argumentação que justificasse tal afirmação. Isso evidencia que tanto a imagem conceitual como a imagem da definição do conceito pode ser formada independentemente. Além disso, essas imagens podem ou não interagir.

[5] Cf. DIAS (2002).

Para Vinner (1991), a definição do conceito é considerada inexistente quando "nenhum significado é associado com o nome do conceito" (p. 70). Na pesquisa de Dias (2002), a relação entre o nome do conceito com seu significado foi ampliada. Essa superação aconteceu ao observar que, para o indivíduo ter uma imagem da definição do conceito ligada a um conceito matemático, não é necessária a relação com um determinado nome do conceito. Por exemplo, um indivíduo não formou qualquer imagem conceitual relacionada ao nome densidade de conjunto numérico, mas sim quando questionado diretamente sobre o próprio conhecimento relativo a esse conceito matemático.

Análises realizadas pelos autores de respostas manifestadas por estudantes a problemas e questões nortearam suas conclusões sobre o papel das noções de imagem conceitual e definição do conceito. A figura abaixo mostra um dos esquemas desejáveis pelos professores quando os estudantes executam uma tarefa cognitiva.

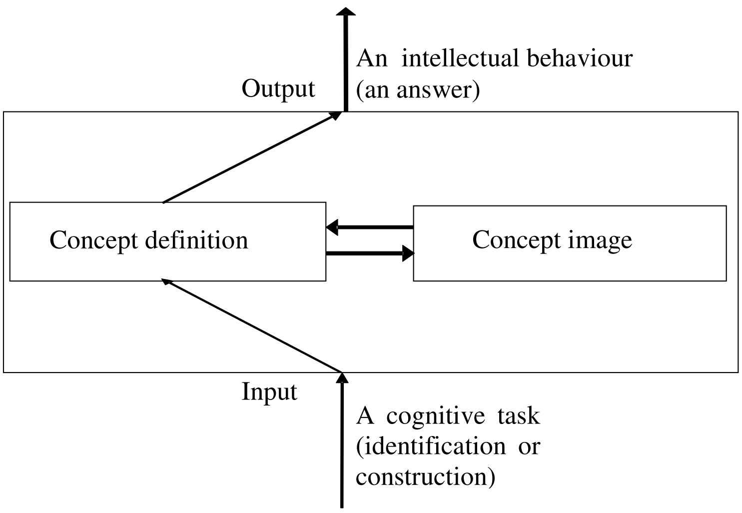


Figura 1 – Modelo do sistema cognitivo desejável
Fonte: Vinner (1983, p. 295)

As conclusões indicaram que, em um processo de aprendizagem no qual um conceito científico é utilizado, professores esperam que o estudante ative no seu pensamento a definição do conceito coerente com o científico. No entanto, "é difícil treinar um sistema cognitivo para agir contra sua natureza e forçá-lo a consultar definições, seja em um processo de formação de uma imagem conceitual ou de execução de uma tarefa cognitiva"[6] (VINNER,

[6] It is hard to train a cognitive system to act against its nature and force it to consult definitions either when forming a concept image or when working on a cognitive task (VINNER, 1991, p. 72).

1991, p. 72). O que é esperado pode não ocorrer, pois, na maioria das vezes, as respostas para uma tarefa cognitiva são apresentadas via imagem conceitual.

O autor argumenta, baseado em experimentos realizados envolvendo os conceitos de função, tangente e limite de seqüência, que a maioria dos estudantes do nosso equivalente Ensino Médio e universitário não desenvolve "os hábitos de pensamento necessários para contextos científicos"[7] (VINNER, 1991, p. 73). Embora tenham parcial sucesso no sistema de ensino, as imagens conceituais inadequadas impedem o desenvolvimento da teoria formal na mente do estudante (TALL; VINNER, 1981).

Imagens conceituais da reta real de professores do Ensino Fundamental e Médio se revelaram semelhantes às dos estudantes desse mesmo segmento de ensino em Dias (2002). Além disso, "muitos termos expressos por professores eram idênticos aos que os estudantes apresentavam nas pesquisas tomadas como referência" (DIAS, 2002, p. 77).

Outra pesquisa que tratou de imagem conceitual foi o de Domingos (2003). A noção de imagem conceitual evocada nessa pesquisa permitiu criar um lócus de análise para inferir o nível de compreensão de um determinado conceito. Nesse sentido, seu estudo desenvolveu-se na criação de uma hierarquização de imagens conceituais comparadas aos níveis da matemática elementar e avançada. Ao analisar as manifestações de estudantes universitários em relação ao conceito de seqüências, seus resultados apontaram a identificação de três níveis diferentes de imagens conceituais: o incipiente, relacionado à matemática elementar; o relacional, com características mais próximas à matemática avançada; e o instrumental, compreendido numa zona de transição entre os dois anteriores.

Domingos (2003) concluiu que imagens conceituais de função, derivada e seqüências reveladas pelos estudantes privilegiaram um modo operacional que dificultam a aprendizagem de novos conceitos ligados à matemática do nível superior de ensino. O problema da aprendizagem se torna mais complexo devido à confluência dessas imagens à abordagem estrutural com base no lógico-formal do Ensino Superior.

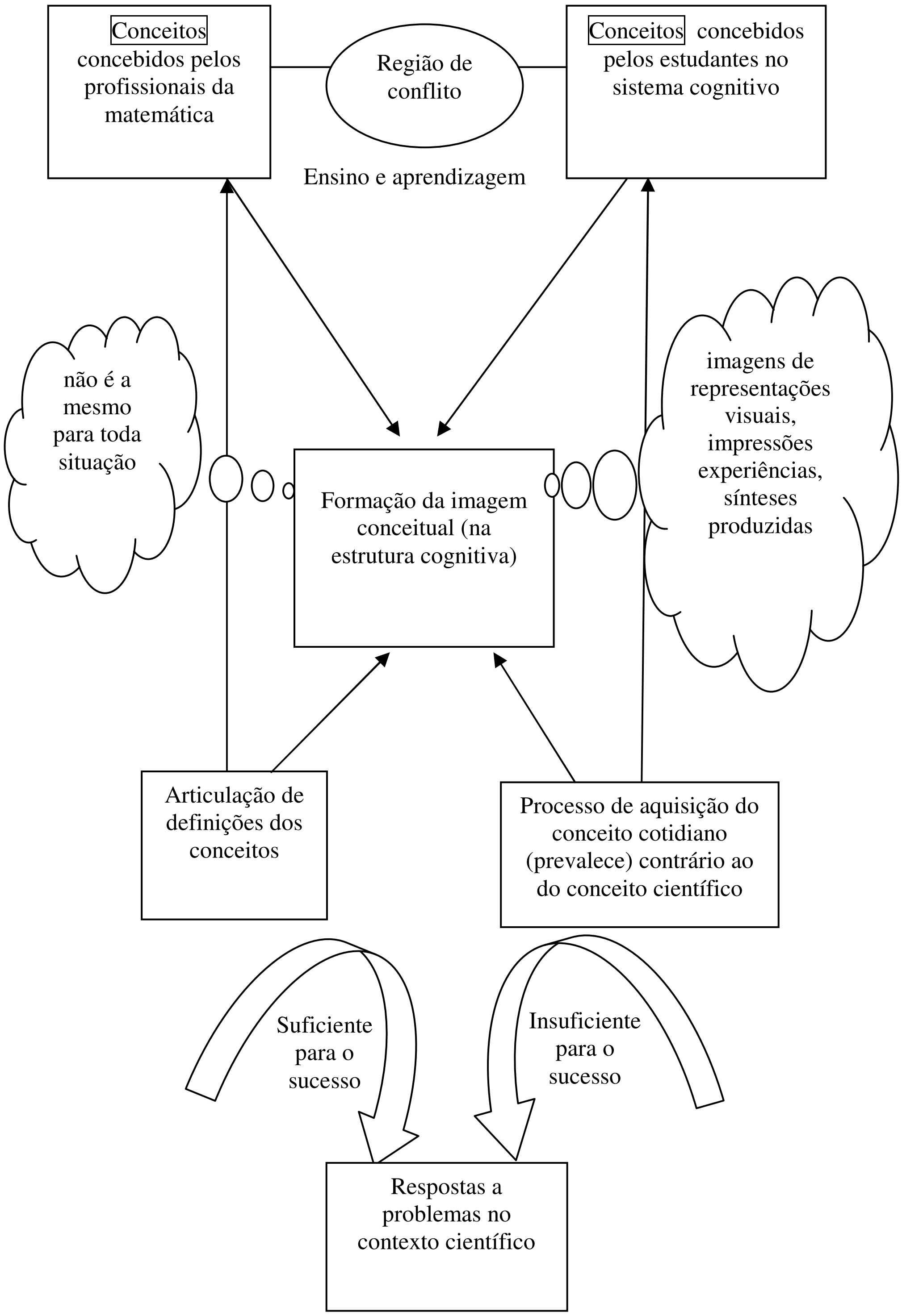
Esses indícios têm nos motivado ao prosseguimento do estudo sobre as imagens conceituais de conceitos matemáticos no sistema educativo, mas não somente na evocação destas e sim na compreensão de sua constituição. Por esse motivo, não buscamos uma classificação como a realizada por Domingos (2003).

---

[7] [...] the thought habits needed for technical contexts (VINNER, 1991, p. 73).

IMAGEM CONCEITUAL

(elaborado a partir do estudo desta noção em Tall e Vinner (1981), Vinner (1983, 1991)



2.1 CONSTRUÇÃO DO OBJETIVO

No item anterior, focamos a fundamentação da imagem conceitual de modo a explicitar os principais conceitos relacionados, em seguida evidenciaremos alguns elementos que deram a base para críticas e construção do objetivo desta investigação.

Vinner (1991), ao buscar compreender o conflito do papel da definição na matemática na relação professor-aluno no Ensino Superior, observou a diferença da aquisição de conceitos no cotidiano e na educação formal.

A aquisição de conceitos espontâneos e científicos relacionada com o desenvolvimento mental foi abordada por Vygotsky (1987) na sua obra *Pensamento e linguagem* em relação às crianças[8]. Embora esse trabalho tenha focado o período infantil no início da escolaridade, ele possui indicações que auxiliam na compreensão em idade mais avançada.

A investigação de Tall e Vinner sobre as manifestações dos estudantes resulta que, na maioria das vezes, as definições não são consultadas pelos estudantes e que apenas são evocadas imagens conceituais, por sua vez, insuficientes para responder corretamente as situações propostas. Segundo os autores, o professor universitário espera que os estudantes consultem a definição para que obtenham melhor sucesso nas tarefas escolares. Por que os professores esperam que os estudantes façam isso? Os professores universitários, quando estudantes, o faziam? Como os professores alcançaram tal desenvolvimento do pensamento para consultarem as definições? O pensamento dedutivo não seria também uma capacidade do ser humano?

A nosso ver, não é suficiente investigar os processos cognitivos que os estudantes utilizam para resolverem problemas matemáticos, mas sim porque desenvolvem esse processo e não outro, principalmente no nível de Ensino Superior no qual já possuem longa trajetória no sistema de ensino. Logo, não basta investigar somente o estudante, mas quais os elementos mediadores dessas apropriações.

Outro resultado apontado por Vinner (1991) refere-se à insuficiência da imagem da definição. Por exemplo, sobre a potência de conjunto, um indivíduo pode dizer: "[...] que a potência de conjunto de um conjunto dado é o conjunto de todos os subconjuntos daquele

---

[8] Sugerimos a leitura de Sforni (2003) e Bernardes (2000, 2006).

conjunto dado, não quer dizer nada a menos que ele possa construir alguns conjuntos de potências de conjuntos dados"[9] (p. 69). O fato de o estudante construir tais conjuntos indicaria a apropriação do conceito? Ou seja, uma imagem conceitual apropriada seria aquela que reflete esse saber fazer?

Além disso, quando Vinner (1991) diz sobre *decidir a pedagogia,* conforme expresso no início do capítulo, temos que compreender quais elementos estão ligados a essa *decisão* e como a pedagogia vem se constituindo, inclusive como formadora das próprias imagens conceituais dos professores.

Para abordarmos o fenômeno da formação de conceitos científicos dos estudantes, não é suficiente analisarmos somente suas manifestações, pois sabemos que os conceitos não são inatos, visto que se formam por apropriações e objetivações. Para compreender por que as imagens conceituais se manifestam de uma forma e não de outra, necessitamos investigar sua formação, ou seja, como estão sendo realizadas as mediações no sistema de ensino.

Se nosso fenômeno é a aprendizagem de conceitos científicos, necessitamos compreender as relações entre formação de conceitos no seu processo histórico e sua apropriação. Qual relação que pode existir entre a formação dos conceitos científicos e sua apropriação?

Essas questões nos inquietaram e nos motivaram à busca de compreendê-las e transformá-las em objetivos. Nesse propósito, iniciamos pela análise de tais questões, buscando assim organizar o pensamento e a investigação.

Esta investigação se realiza na formação do educador, considerando as relações no sistema de ensino formal, como o escolar, e toma como princípio que a escola é um espaço construído socialmente para que os estudantes se apropriem de conceitos científicos.

Imagens conceituais manifestadas em algumas pesquisas[10] fornecem alguns elementos de sua formação no contexto escolar. Observamos que imagens da definição de número real foram coerentes com as definições apresentadas em livros didáticos, mas não foram suficientes para resolverem as situações propostas (DIAS, 2002). Embora Vinner (1991) aponte que o desejável seria consultar a definição antes de dar uma solução a uma tarefa, os resultados indicaram que a definição como está nos livros didáticos e,

---

[9] [...] that the power set of a given set is the set of all subsets of that given set, does not mean anythink unless one can construct some power sets of given sets (VINNER, 1991, p. 69).

[10] Cf. as pesquisas referenciadas em DIAS (2002).

conseqüentemente, como está sendo ensinada não se tem mostrado suficiente nem mesmo para responder a certas tarefas escolares, além de refletir uma concepção de conhecimento pronto e acabado.

A definição na matemática sintetiza um momento histórico do conceito e, para apropriar-se dele, é necessário compreender sua formação, seu movimento. Por esse motivo, inferimos que, para atuar no sistema de ensino escolar, é necessário um estudo que supere os limites da psicologia cognitiva realizada por Tall e Vinner (1981).

É na atividade humana que podemos compreender as singularidades das formações dos conceitos científicos. Concordamos com Kopnin (1978) que "todo o sistema de conceitos dessa ou daquela ciência é gerado pela prática multiforme do homem" (p. 209). Para compreender a essência de um conceito, tem-se que "examinar o processo de sua formação e desenvolvimento" (p. 206). Para isso, encontram-se na dialética as "teses metodológicas fundamentais" (p. 207).

Para estudar as leis do movimento do pensamento que constituiu e constitui um conceito, é necessário o "estudo das leis do movimento do pensamento" (KOPNIN, 1978, p. 183), isso significa o estudo da correlação entre as categorias do pensamento: histórico e lógico do conceito. Para o autor, o histórico é entendido como o processo de mudança, etapas de surgimento e desenvolvimento do objeto; e o lógico, como o meio pelo qual o pensamento realiza a reprodução do processo histórico, não no sentido de guiar o pensamento, impondo-lhe a história do objeto, e sim permitindo que a formação das idéias componha a lógica do pensamento na busca da essência do movimento do objeto, sua criação e seu desenvolvimento, até o estágio atual (KOPNIN, 1978).

A relação entre a formação de conceitos, cotidianos e científicos, na atividade humana, na sua genericidade, e sua apropriação pelos indivíduos se realiza pela mediação da sociedade. Na particularidade da apropriação do conceito cientifico, a mediação é feita sobretudo pelo sistema de ensino.

A apropriação e a objetivação do conhecimento se realizam na atividade do indivíduo, na sua prática. Ao mesmo tempo em que a atividade se desenvolve exteriormente, ela propicia a atividade interna, o desenvolvimento psíquico (LEONTIEV, 1983). Por isso, para estudarmos o desenvolvimento dos conceitos na mente do indivíduo, precisamos analisar sua atividade nas condições sociais e circunstâncias objetivas nas quais estão os elementos formadores da consciência. Portanto, a análise da atividade externa nos possibilita investigar o desenvolvimento das imagens conceituais.

A teoria de Leontiev sobre o conceito de atividade, inserida na perspectiva histórico-cultural, contribui para o entendimento dos processos psicológicos da formação da imagem conceitual, na medida em que a atividade se encontra na transição do objeto e sua forma subjetiva, ou seja, ela constitui a mediação no processo de apropriação da cultura pelo indivíduo. Para compreender a natureza da imagem subjetiva, na qual se formam as imagens conceituais, deve-se estudar o processo que a origina que, segundo Leontiev (1983), é externo.

Para compreender a formação das imagens de conceitos matemáticos, é necessário analisar a atividade na qual elas são apropriadas e objetivadas. Nesse estudo, escolhemos realizar nossa investigação na atividade educativa que se constitui na educação escolar, em particular na formação de professores.

Não encontramos em Tall e Vinner (1981, 1983, 1991) uma investigação quanto à formação da imagem conceitual, ou seja, um acompanhamento do desenvolvimento do conceito no sujeito. Encontramos somente sua manifestação em respostas a problemas e questões relacionadas num único momento, as imagens conceituais evocadas.

Com isso, interpretamos um enfoque empírico do indivíduo nesse modo de análise da imagem conceitual, ou seja, nas palavras de Saviani (1991), "uma das limitações da contribuição da psicologia à educação está no fato de que a psicologia tem tratado principalmente do indivíduo empírico [...]", este "é uma abstração, pressupõe um corte onde se definem determinadas variáveis que são objetos de estudo" (p. 85-86 *apud* DUARTE, 1993, p. 14). Isso significa que o interesse dos autores foi analisar os processos cognitivos por meio do comportamento nas suas manifestações, sem relação às formações, às práticas realizadas no sistema escolar, na interação social.

Por meio dessas inquietações, constituímos a questão norteadora desta investigação: que relações pode haver entre a formação da imagem conceitual de número real, elaborada pelo professor, e os fundamentos lógico-históricos do desenvolvimento conceitual dos números reais que configuram as atividades de ensino?

A hipótese é que a formação das imagens conceituais individuais de conceitos matemáticos ocorre na relação indivíduo-coletividade, e pode ser coerente com a significação científica elaborada historicamente por meio da realização de uma atividade que a *reproduza*[11].

Na busca de resposta a essa pergunta, definimos como **objetivo** da pesquisa investigar o processo de formação da imagem conceitual do professor, na inter-relação indivíduo-coletividade, a fim de compreender a relação dessa imagem com o desenvolvimento da reta real na perspectiva lógico-histórica desse conceito.

2.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Inseridos na problemática de apropriação e objetivação do conhecimento matemático no contexto escolar, um grupo de educadores matemáticos, como participantes representativos desse segmento social, reuniu-se para o desenvolvimento de uma solução a esse problema.

O compromisso da pesquisadora constituiu-se em compartilhar seus estudos com professores do ensino público, visando contribuir com a transformação no ensino escolar por meio da metodologia de ensino, particularmente neste estudo, da matemática.

A parte empírica se realizou por meio de um curso oferecido pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo aos professores do Ensino Médio do Sistema Oficial de Ensino Público desse mesmo estado. O oferecimento desse tipo de curso é comum e normalmente são denominados cursos de formação contínua ou continuada de professores. Há variação dos educadores que ministram esses cursos, devido o processo de licitação das universidades pela Secretaria de Educação.

A inscrição foi realizada pelos próprios professores, por sua iniciativa ou indicação da escola que lecionam. O segmento do curso oferecido referia-se à metodologia de ensino e neste a abordagem em disciplinas. Uma delas foi de matemática com o título “metodologia do ensino de matemática”. De todos os professores de matemática que se inscreveram nesse curso no estado de São Paulo, 80 da zona oeste da Grande São Paulo tiveram seus encontros no campus da Universidade de São Paulo, na capital. Estes formaram, juntamente com a pesquisadora, os sujeitos desta pesquisa. A carga horária total do curso foi

---

[11] No sentido de Leontiev (1964?) e Rubinstein (1976), constante no capítulo 3 – Atividade Orientadora de Ensino deste texto.

de 120 horas dividida em encontros de oito horas, aos sábados (das 8h às 12h e das 13h às 17h), no período de agosto a dezembro de 2004. No primeiro encontro, os professores receberam as informações de freqüência obrigatória de 80% para obtenção do certificado. Segundo os professores, eles tiveram uma pequena ajuda financeira, geralmente para cobrir pequenas despesas com deslocamento e alimentação.

O curso foi divido em três módulos destinados ao desenvolvimento do pensamento geométrico, aritmético e algébrico, os quais foram desenvolvidos por pesquisadoras diferentes. Esta pesquisa se refere ao módulo da aritmética nomeado também como módulo de números e, neste texto, comumente denominado simplesmente curso, quando não houver necessidade de diferenciar os módulos. A duração de cada módulo foi de aproximadamente 40 horas. Dos 80 professores, foram formadas duas turmas de 40, conseqüentemente o módulo de números foi desenvolvido em duas turmas, não simultaneamente, com a mesma pesquisadora.

A busca da realização deste trabalho com sujeitos no seu próprio movimento, caracterizado pelos cursos de formação promovidos pela Secretaria, buscou encontrar um isolado (CARAÇA, 1989) que representasse com maior fidelidade a totalidade.

> É claro que o próprio fato de tomar um isolado comporta um erro inicial – afastamento de todo o resto da realidade ambiente, - erro que necessariamente se vai refletir nos resultados do estudo. Mas é do bom-senso do observador recortar o seu isolado de estudo, de modo a compreender nele todos os fatores dominantes, isto é, todos aqueles cuja ação de interdependência influi sensivelmente no fenômeno a estudar. (p. 112)

A escolha de investigar o problema por meio da pesquisa-ação se relaciona com a hipótese e com o objetivo da pesquisa nesta metodologia, na medida em que, para investigar as imagens conceituais numa atividade que reproduza o significado do conceito científico elaborado historicamente, foi necessária a intervenção na perspectiva lógico-histórica do conceito na inter-relação indivíduo-coletividade. Esse processo, por sua vez, permitiu investigar a formação do professor como processo contínuo no próprio universo de formação (MOURA, 2004).

Consideram-se os pressupostos da pesquisa-ação (THIOLLENT, 2003) como procedimentos metodológicos desta pesquisa qualitativa pela sua característica dominante inserida na pesquisa social, pois “[...] além da participação, supõe uma forma de ação planejada de caráter educacional, [...] que nem sempre se encontra em propostas da pesquisa participante" (THIOLLENT, 2003, p. 7). Além da sua especificidade, ou seja, a base empírica, na qual se encontra compreendida ações que visam à resolução de um problema de aprendizagem da matemática, há a produção de conhecimento.

O objetivo prático-teórico geral foi alcançar níveis mais elaborados de consciência sobre apropriação e objetivação do conhecimento matemático por meio do sistema escolar. O objetivo da pesquisa de investigar a formação da imagem conceitual da reta real pelo professor de matemática na relação indivíduo-coletividade nos remeteu a um curso de formação contínua descrito acima.

Consideramos a inserção desta pesquisa em pressupostos fundamentados na dialética materialista, como método do pensamento teórico-científico, no qual

> [...] a evolução do pensamento pressupõe meios lógicos que, por um lado, orientem o pensamento para uma determinada direção e, por outro, permitam a liberdade de criação em certos limites. Como já dissemos é essa função que desempenham as categorias da dialética materialista. (KOPNIN, 1978, p. 30)

A imagem conceitual como objeto desta pesquisa é o ponto de partida e de chegada no movimento do pensamento do abstrato ao concreto. Estas são categorias elaboradas "para refletir a *mudança* da imagem cognitiva tanto no que concerne à multilateralidade da abrangência do objeto nessa imagem quanto à profundidade da penetração na essência dele" (KOPNIN, 1978, p. 154, grifo do autor).

Pelo exposto, esta pesquisa se realiza nas três características apontadas por Thiollent (2003): a resolução de problemas, a tomada de consciência e a produção de conhecimento. Compreendendo a tomada de consciência como o objeto que

> [...] deve apresentar-se ante ao homem como conteúdo psíquico impresso na atividade, quer dizer, em seu aspecto ideal. A compreensão deste último, não pode, no entanto, compreender-se abstraindo-se das relações sociais que de modo necessário estabelecem os participantes no trabalho, da comunicação que entre si produz a linguagem, que serve para denotar o objeto, os meios e o próprio processo de trabalho. (LEONTIEV, 1983, p. 23)

Os pressupostos humanizadores por meio dos quais desenvolvemos o curso foram explicitados aos professores no primeiro encontro (unidade didática sujeito histórico), para que a consciência dos modos de produção do conhecimento para si alcançasse níveis mais elaborados de compreensão dos processos pedagógicos, contribuindo assim para a formação geral do educador.

A organização proposta do curso se vincula à hipótese da pesquisa, de realização de uma atividade que *reproduza* (RUBINSTEIN, 1976) o objeto matemático estudado. Essa atividade é fundamentada na atividade orientadora de ensino (MOURA, 1996) e na categoria lógico-histórica (KOPNIN, 1978) como perspectiva de abordagem do conceito matemático.

A atividade de pesquisa se aproximou da atividade orientadora de ensino no sentido do desenvolvimento da própria pesquisa-ação na inter-relação dos objetivos, como acima mencionados, e na elaboração de planos de ação para atingir uma meta, desencadeada por uma situação-problema. Durante a atividade, analisou-se a situação e produziram-se sínteses. A pesquisadora, em atividade orientadora de ensino, também foi nomeada no texto como organizadora, pois também organizou os encontros e participou das discussões.

No seu aspecto geral, a atividade da pesquisadora, como organizadora, buscou desencadear junto com os professores uma atividade de estudo para o desenvolvimento do pensamento numérico. Atividade essa ligada ao processo de conscientização da necessidade de apropriação e objetivação do conhecimento humano desenvolvido historicamente. Nesse processo, buscamos observar o movimento das imagens conceituais no coletivo pelas manifestações verbais e escritas.

A opção de não controlar as manifestações individuais foi pela prevalência da não-manipulação no processo como princípio educativo que busca autonomia. Ou seja, a dinâmica proposta inicialmente, indivíduo-grupo-classe (unidade didática sujeito histórico), constituiu-se pela vontade dos participantes no primeiro encontro do módulo de número em dinâmica grupo-classe. Observou-se que houve uma tendência de permanência na formação dos pequenos grupos, embora não tenha constituído variável de controle desta investigação.

A organização em unidades didáticas constituiu o modo de exposição neste texto. Embora essa seqüência tenha sido a mesma da investigação, não houve explicitação dessa denominação aos participantes.

A estrutura básica das unidades didáticas se caracteriza por iniciar, com os objetivos propostos, seguindo a exposição de uma situação-problema e a produção dos professores da solução. Esta, juntamente com a exposição e discussão delas no coletivo, é intercalada com as análises. Algumas unidades compõem os momentos de síntese realizados pela organizadora no curso, que por sua vez suscitaram discussões.

A solução à situação-problema era elaborada em pequenos grupos que por vezes a organizadora participava brevemente, sobretudo com questões e formas de organização. Posteriormente esses grupos expunham suas soluções que suscitavam discussões. Na seqüência de apresentações, já eram incorporadas menções em relação às discussões precedentes em forma de reformulações ou ratificações dos seus juízos (KOPNIN, 1978).

A pesquisadora, organizadora, nos momentos de apresentação, além de registrar manifestações da apresentação, selecionava alguns aspectos da apresentação para promover discussões de aprofundamento, quando não realizada por outro professor. Seu papel também foi de elaborar sínteses referentes às relações conceituais discutidas, as quais eram apresentadas ao coletivo, surgindo novas reflexões. O próprio corpo do texto anuncia quando elas foram realizadas. A síntese que se apresenta após cada unidade didática não se refere à síntese realizada no curso, e sim ao movimento da pesquisadora na busca apreensão do fenômeno, no seu processo de análise e síntese.

A dinâmica do curso buscou também proporcionar uma reflexão da sua possibilidade com os estudantes. Com isso, a síntese elaborada e discutida com os professores constitui uma avaliação formativa do movimento conceitual do coletivo.

Os momentos de avaliação dos encontros foram realizados por meio de sínteses reflexivas solicitadas aos professores dos encontros precedentes, realizada fora dos encontros; de manifestações orais iniciada por um ou mais professores e discutidas no coletivo e de reflexão da organizadora-pesquisadora. Estas reorganizaram os encontros subseqüentes. Nas unidades didáticas, as sínteses reflexivas não foram explicitadas. Nem os momentos em que elas foram discutidas, poucos professores a realizaram, e no decorrer do curso elas foram se tornando mais raras. Os professores argumentavam a falta de tempo e o aumento de tarefas nas escolas. Pelo seu caráter mais descritivo do que crítico, essas sínteses auxiliaram mais na produção do relatório.

As fontes dos dados desta pesquisa que compuseram a exposição em unidades didáticas foram:

1. O plano de ação de cada encontro elaborado pela pesquisadora, com os encaminhamentos intencionados – as propostas. Esse plano é a síntese sistematizada do diário de estudo que contém anotações de parte dos estudos realizados para organização dos encontros.

2. Produções escritas individuais e coletivas dos professores. Um dos tipos dessas produções refere-se às sínteses realizadas pelos pequenos grupos como solução ou reflexão às

situações-problema. Outro se refere às elaborações de situações-problema e planos de ação para o ensino. Houve também sínteses reflexivas realizadas individualmente de encontros precedentes e o que nomeamos por avaliação que se refere às respostas individuais produzidas a algumas questões no último encontro.

3. Relatório descritivo de cada encontro sistematizado por escrito pela pesquisadora, buscando recompor o encontro, descrevendo as manifestações dos professores, da organizadora, as situações e interferências externas.

4. As sínteses apresentadas pela organizadora, realizada por meio de transparências apresentadas em retroprojetor ou digitalizadas (*power point*) e visualizadas por meio de uma televisão.

5. Registros descritivos de observadores externos. Quatro pesquisadoras em momentos distintos escreveram as manifestações dos professores e da organizadora. Uma delas somente participou do primeiro encontro; outra, de dois encontros (30/10 e 4/12/2004) e uma manhã (6/11/2004); e a terceira, de um encontro (13/11/2004) e uma tarde (6/11/2004). A organizadora também realizou registros de observação com mais intensidade no primeiro encontro e, nos demais, em partes destes.

6. Registro de uma síntese do módulo de álgebra realizado pela professora-formadora deste.

Quanto à utilização das fontes, no início de cada unidade didática, na qual se descreve objetivo, intencionalidade, situação-problema e outros itens da organização prévia ao encontro, a base de registros é da fonte 1, sem marcas textuais.

Os registros das manifestações dos professores estão organizados de modo a expor o movimento conceitual do coletivo. Por esse motivo, foi privilegiado o conceito e não as turmas, ou seja, em uma unidade pode haver registros das duas turmas que participaram da mesma proposta, somente as diferenciamos quando julgamos necessário.

As situações-problema eram as mesmas em geral para as duas turmas, quando não, encontra-se descrito no corpo do texto. Os resultados em essência não se dispersam, o que permitiu esse tipo de exposição. Para esse fim, o texto recupera as produções das fontes 2, 3, 4 e 5 de forma intercalada. O conteúdo das fontes e as análises encontram-se em intertextualidade.

> Intertextualidade é basicamente a propriedade que têm os textos de ser cheios de fragmentos de outros textos, que podem ser delimitados explicitamente ou mesclados e que o texto pode assimilar, contradizer, ecoar ironicamente, e assim por

> diante [...] uma perspectiva intertextual é útil ao acentuar que não é apenas 'o texto', nem mesmo apenas os textos que intertextualmente o constituem, que moldam a interpretação, mas também os outros textos que os intérpretes variavelmente trazem ao processo de interpretação. (FAIRCLOUGH, 2001, p. 114)

A intertextualidade é um dos elementos que Fairclough (2001) utiliza para o desenvolvimento de uma teoria social da linguagem. Para o autor, o discurso é uma prática dialética que constitui a estrutura social e é constituída por ela.

No texto das unidades didáticas, essa dialética é fundamental, uma vez que se pretende representar o próprio movimento na mente do leitor na complexidade das relações sociais e conceituais em um texto. Ao mesmo tempo em que o texto reproduz o movimento lógico na ocultação do histórico das situações vivenciadas, ele dialoga, por meio das análises, com outros textos.

Embora o termo intertextualidade não seja de Bakhtin e sim de Kristeva, o desenvolvimento de uma abordagem intertextual foi o principal trabalho da carreira de Bakhtin. Como analisa Fairclough (2001),

> Para Bakhtin todos os enunciados, tanto na forma oral quanto na escrita, do mais breve turno numa conversa a um artigo científico ou romance, são demarcados por uma mudança de falante (ou de quem escreve) e são orientados retrospectivamete para enunciados de falantes anteriores (sejam eles turnos, artigos científicos ou romances) e prospectivamente para enunciados antecipados de falantes seguintes. (p. 134)

Essa forma para elaboração do texto das unidades foi propícia uma vez que realizamos a análise inter-relacionada com as produções do curso (escritas, apresentações, discussões), caracterizadas como eventos discursivos. Um evento discursivo caracteriza-se por qualquer exemplo de discurso. Compõem-se de falas, gestos, episódio, produções escritas, ou seja, as manifestações produtoras de comunicação socialmente elaboradas. Pela caracterização da intertextualidade, como a compreendemos, pudemos também preservar as particularidades de cada unidade didática, devido à interdependência da formação textual com as circunstâncias sociais. Dessa maneira, há uma heterogeneidade textual, como a unidade realizada somente em uma das turmas, outra com maior ênfase nas análises de produções escritas e a unidade diferenciada na abordagem da reta real.

> A intertextualidade implica uma ênfase sobre a heterogeneidade dos textos e um modo de análise que ressalta os elementos e as linhas diversos e freqüentemente

> contraditórios que contribuem para compor um texto. Tendo dito isso, os textos variam muito em seus níveis de heterogeneidade, dependendo de suas relações intertextuais são complexas ou simples. Os textos também diferem na medida em que seus elementos heterogêneos são integrados, e também na medida em que sua heterogeneidade é evidente na superfície do texto. (FAIRCLOUGH, 2001, p. 137)

O texto também constitui uma forma de expressar como a organizadora, em atividade de ensino, realiza a leitura do movimento do coletivo e do conceito na interação desse coletivo para organização de suas ações, imediatas e posteriores a um evento. Além disso, buscou-se expressar como a pesquisadora analisa tal movimento. Nesse sentido, o texto possui uma heterogeneidade entre as particularidades de um a outro evento discursivo. O duplo papel de pesquisadora e organizadora permeia o próprio discurso das unidades didáticas, compondo a dualidade da falante.

A forma escolhida de expor os dados permitiu um modo de analisar a hipótese na medida em que explicita o movimento das imagens conceituais e do conceito elaborado historicamente e na captação do movimento do fenômeno no seu movimento.

Para isso, também utilizamos as dimensões *horizontais* e *verticais* da intertextualidade (FAIRCLOUGH, 2001). A *dimensão horizontal* que consideramos refere-se à interlocução direta entre os sujeitos em situação não necessariamente no sentido seqüencial, como pergunta e resposta. Nessa dimensão, foi utilizado tanto o discurso direto como o indireto.

Exemplo 1 – utilizando discurso direto:

Notamos esta idéia expressa também na resposta: "Serve para representar inteiros ou partes, valores inferiores a unidade" à pergunta "para que serve os racionais?", dita pelo próprio grupo.

Exemplo 2 – utilizando discurso indireto:

... houve sugestões para colocar os símbolos mais afastados, indicando uma posição vazia.

A *dimensão vertical* (FAIRCLOUGH, 2001) refere-se a relações intertextuais que ocorrem entre um texto e outros textos que constituem seus contextos imediatos ou distantes, como àqueles historicamente ligados, contemporâneos ou não. Outros parâmetros podem também indicar essa dimensão. O que utilizamos foi com o contexto discursivo referentes ao desenvolvimento do conhecimento matemático e das práticas na educação escolar. Por exemplo, a relação entre manifestações dos sujeitos e procedimentos de livros didáticos, outras pesquisas, como também do conceito matemático.

Esta se constituiu na análise pelas ligações do movimento lógico-histórico do conceito historicamente construído com o movimento lógico-histórico de apropriação e objetivação dos sujeitos. As análises nas unidades didáticas também apontam o campo de possibilidades de desenvolvimento do conceito analisado. Essa forma evidencia que o conhecimento não é restrito aos encontros e sempre produz extensões no movimento do pensamento.

A intertextualidade como prática discursiva para o processo de produção do texto das unidades didáticas caracterizou uma interpretação de nível superior, na medida em que analisa as produções no seu significado.

> Os níveis superiores dizem respeito ao significado, à atribuição de significados às frases, a textos completos e a partes ou a 'episódios' de um texto que consistem de frases que podem ser interpretadas como coerentemente conectadas. (FAIRCLOUGH, 2001, p. 110)

Essa forma foi possível devido a todos os participantes serem do mesmo *contexto de situação* (FAIRCLOUGH, 2001), o que permitiu uma leitura da situação que reduz ambivalência na interpretação devido à inserção na prática social da qual o discurso faz parte.

Existe a predominância da intertextualidade manifesta, ou seja, a explicitação das manifestações dos sujeitos, sendo esta realizada na sua forma direta e indireta. A citação direta referente à produção escrita dos professores (fonte 2) aparece no corpo do texto entre aspas se tiver até três linhas, e do modo de citação longa se ultrapassar três linhas.

Exemplos:

1) citação curta:

... com os números, como "5/4 expressa o número inteiro 1 mais 25% de uma parte inteira, ou seja, um quarto (fracionado)".

2) Citação longa:

> A partir da construção do conhecimento humano, deu-se a criação de conceitos como:
> * contagem * organização
> * análise * padronização
> * qualidades

Se for descrição da produção pictórica, será acrescido o código (d) após a descrição entre aspas. Exemplo:

> ... substituição de agrupamentos de pedras por outro material, como “graveto, riscos em osso” (d)...

Esse tipo de representação ocorreu somente na unidade didática do sistema de numeração.

Quando se referir às enunciações dos professores captadas pelas observadoras, registrado em discurso direto, seguem-se as normas de citação com o acréscimo do código (o) posterior à citação.

Exemplo:

> “meu pai trabalhava na roça” (o).

À citação de discurso direto de professores transcritos no relatório (fonte 3), será acrescido o código (r) quando necessário, ou seja, quando houver outros registros intercalados. Exemplo:

> ...como “graveto, riscos em osso” (d), “folhas” (r).

No texto das unidades didáticas, aparecem momentos, trechos, característicos de discussão, o que evidencia se tratar de uma única turma como, por exemplo, a caracterização de pergunta-resposta e comentário de apresentação de um grupo. Estes se referem basicamente à fonte 3, pois se for da fonte 5 leva marca textual.

Exemplo:

> ...o conceito de sucessor no conjunto dos inteiros teria mudado quando se conheceu o conjunto Q? Um dos integrantes disse que sim e que iria defender essa tese por que “em Q, todo número teria vários sucessores, infinitos”.

A utilização da fonte 3, relatório, é a própria da unidade didática sem a análise e as citações das produções, pois é a partir desta que foi reconstruída a situação. Algumas manifestações captadas pela organizadora-pesquisadora no encontro e transcrita neste relatório encontram-se entre aspas; as outras se referem à descrição do evento posterior ao encontro.

Exemplo:

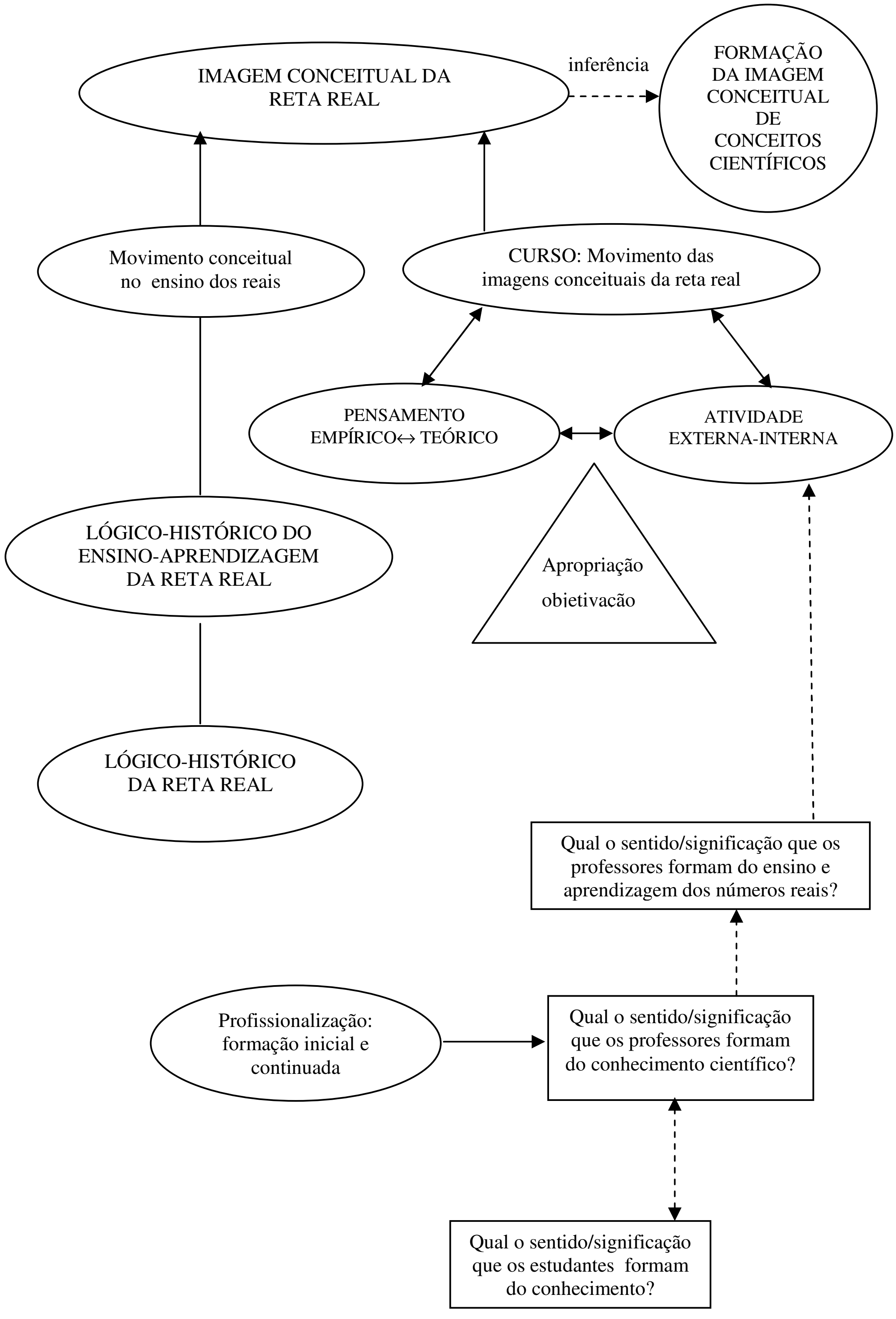
Aos poucos alguns interagiam com seus companheiros de grupo, expondo alguma idéia na procura de uma solução conjunta. Um dos sujeitos fez referência a um curso que havia participado...

Referente à fonte 4, as sínteses realizadas pela pesquisadora estão anunciadas no próprio corpo do texto.

A unidade sujeito histórico apresenta uma especificidade em relação às demais, pois a base de dados – fontes 5 e 2 – estão explícitas em nota de rodapé.

Em geral a fonte do evento discursivo está explícita no corpo do próprio texto, evitando marcas textuais e favorecendo a fluidez deste.

MAPA DA PESQUISA



3 ATIVIDADE ORIENTADORA DE ENSINO

> a atividade é a reunião dos esforços de todos para atingir um fim menos grandioso, mas que prova a elevação intelectual de uma época. (Lázaro).

A atividade orientadora de ensino elaborada por Moura (1992, 1996, 2000, 2001, 2003, 2004) tem seu papel neste trabalho pela contribuição na organização do ensino no processo de ensino e aprendizagem como atividade humana. Fundamentada nos pressupostos da Teoria da Atividade, principalmente os desenvolvidos por Leontiev (1964?, 1983, 1988), a necessidade, o motivo, a ação e o produto da atividade orientadora constituem-se em ligações que consideram a atividade humana como fundamental.

A necessidade é a origem da atividade, o ponto de partida para criação do motivo que mobiliza o desenvolvimento de ações para apropriação do objeto para o qual se dirige o objetivo. No caso da educação escolar, o objetivo é promover por meio do ensino sistematizado a apropriação do conhecimento desenvolvido pelas gerações precedentes.

> [...] somente no gênero humano são encontradas necessidades de caráter social, as consideradas por Leontiev (1969) como superiores. Estas, conforme o autor, podem ser classificadas como *necessidades materiais superiores e necessidades funcionais superiores*. As primeiras estão relacionadas às carências de instrumentos e objetos no desenvolvimento da atividade vital humana. As segundas, intrinsecamente vinculadas com as primeiras, referem-se aos próprios processos de desenvolvimento da atividade vital humana, como o trabalho, as interações estabelecidas entre os membros de uma coletividade, etc. Decorrentes dessas encontram-se ainda, e principalmente, as *necessidades espirituais*, relacionadas à produção de objetos ideais, culturais, como a arte, o conhecimento e suas respectivas materializações em obras, livros etc. (SERRÃO, 2004, p. 106)

Na relação com o mundo, atividade humana é aquela que responde a uma necessidade particular, própria do humano, do homem, na qual o caráter fundamental é a intencionalidade. A atividade caracteriza-se como humana por que só o ser humano é capaz de idealizar seu objeto e suas ações antes de agir. Ao realizar ações para satisfazer sua necessidade, o ser humano transforma a realidade externa como também se transforma.

A passagem à humanidade que difere o ser humano dos outros animais refere-se à submissão às leis do desenvolvimento sociohistórico. Nessa perspectiva, o ser humano não nasce humanizado, pois para sua humanização é necessário que ele se aproprie da cultura, produto do desenvolvimento histórico humano.

> Mas em que consiste o processo de apropriação deste mundo, que é ao mesmo tempo o processo de formação das faculdades específicas do homem?
> Devemos sublinhar que este processo é sempre ativo do ponto de vista do homem. Para se apropriar dos objetos ou dos fenômenos que são o produto do desenvolvimento histórico, é necessário desenvolver em relação a eles uma atividade que se reproduza, pela sua forma, os traços essenciais da atividade encarnada, acumulada no objeto. (LEONTIEV, 1964?, p. 286)

A atividade orientadora de ensino propõe, para o ensino escolar, orientações para a organização do ensino com finalidade humanizadora, em contraposição a alienante, que permita a apropriação. Neste trabalho buscamos caracterizar a *reprodução* do objeto matemático como proposta didática que permita a relação da atividade externa e interna do indivíduo, a formação das imagens conceituais. Rubinstein (1976) esclarece com mais detalhes como ocorre a reprodução na mente do indivíduo que lhe permite a apropriação.

> Tal como a retenção não é apenas uma conservação passiva, muito menos a reprodução é uma reprodução mecânica do que foi inculcado ou aprendido. No processo de reprodução, aquilo que se deve reproduzir não se reproduz apenas, mas forma-se de certo modo. Até o próprio conteúdo significativo se forma através da formulação lingüística. O pensar está contido na reprodução, capta o conteúdo de uma forma mais exata, generaliza-o, sistematiza-o, aperfeiçoa-o e reconstrói-o. Por isso a *reprodução* do reproduzido é a essência da própria reprodução como resultado da sua elaboração ideológica, como aspecto essencial da reprodução. (p. 47)

No ensino escolar, ao reproduzir o conceito para si o indivíduo se apropria dele, da sua significação, construindo sua imagem conceitual. É nessa perspectiva que encaminhamos esta pesquisa.

O objeto da apropriação, material ou ideal, possui a atividade humana acumulada, o trabalho. Trabalho entendido no conceito marxista como processo de ação do homem na natureza, mas diferenciado dos outros animais, pois tal processo caracteriza-se fundamentalmente pela criação de instrumentos e pela atividade coletiva, ou seja, social. O instrumento não é um objeto material simplesmente, é um objeto social que cristaliza a atividade humana, ou seja, a necessidade, a intencionalidade, as ações intelectual e física nas condições objetivas para atender a uma finalidade, compondo a mediação entre o ser humano e a natureza. Esse processo de produção, material e intelectual, é a objetivação da atividade humana que compõem os elementos da cultura.

No processo de apropriação e objetivação da cultura, o papel da educação é fundamental e temos como um dos seus segmentos a educação escolar. Esta é capaz de potencializar o desenvolvimento das aptidões dos indivíduos que compartilham uma atividade humanizadora, não só no sentido do saber usar, saber fazer, mas, sobretudo no sentido dialético com o pensar, a fim de que se vejam como integrantes do gênero humano.

Portanto, se almejamos que a escola contribua para o desenvolvimento humano, sua função é de proporcionar a apropriação e a objetivação da cultura no processo de desenvolvimento das aptidões humanizadoras.

> A escola, enquanto um dos organismos da sociedade civil, é o local por excelência para o desenvolvimento do processo de transmissão-assimilação do conhecimento elaborado. Isto é: a escola é o local onde o indivíduo estaria se instrumentalizando para atuar no meio social ao qual pertence. Nesse sentido, a prática social global é o ponto de partida e o ponto de chegada da prática educativa. Esta é, assim, uma atividade mediadora enquanto atividade que estaria garantindo a democratização do saber escolar a todos que integram um determinado meio social. (OLIVEIRA; DUARTE, 1992, p. 92)

A atividade orientadora de ensino considera e articula os conceitos de apropriação, objetivação, desenvolvimento de aptidões e atividade humanizadora, atuando na educação, principalmente na escola.

Compreendemos que a atividade educativa é a unidade das atividades de ensino e de aprendizagem inseridas na atividade humana e, nesse sistema, escolhemos, para este estudo, a atividade de ensino na escola, inserida na atividade pedagógica, como eixo principal, e a atividade orientadora de ensino como atividade particular, do professor.

Sabemos que a relação professor-aluno é uma das partes do sistema escolar que possibilita a apropriação e a objetivação de conhecimentos historicamente construídos. Contudo, não ignoramos a existência da totalidade de aspectos, internos e externos à escola, que influenciam nessa interação. Entre os agentes que se inserem na atividade escolar, que produzem a escola, focaremos neste estudo a singularidade da atividade do professor.

A atividade principal, ou dominante, segundo Leontiev (1988), configura o lugar social ocupado pelo sujeito na atividade humana. Para o professor, a atividade principal é o trabalho, que o insere na atividade de ensino, dialeticamente ligada à atividade de estudo e a de aprendizagem, constituindo-se educador.

Ao considerar o ensino da matemática no sistema escolar como atividade principal realizada pelo professor-educador matemático, seu objetivo caracteriza-se em propiciar a apropriação do conhecimento matemático pelo estudante. Ao mesmo tempo, é uma contínua aprendizagem para seu processo de formação como educador matemático, que compõe aspectos no campo da pedagogia, da matemática, da psicologia, da sociologia, da filosofia, da linguagem, … ou seja, da complexidade da relação com a atividade humana. O professor de matemática constitui o sujeito a que se dirige esse estudo.

Objetivando a formação contínua do professor, a atividade de ensino "passa a ser a solução construída de uma situação-problema [...]" (MOURA, 1996, p. 31). Temos uma situação-problema que se constituiu no decorrer da história do ensino escolar que, no século passado, configurou-se como *ensino industrial*, o modo mecânico de aprender como reflexo do modo industrial de produção (LIMA, 2005, p. 194). Esse ensino satisfez o mercado de trabalho industrial durante muito tempo e encontramos ainda seus vestígios tanto no modo de ensinar como na concepção da função escolar, de *formar* pessoas para o trabalho alienado. No modo de ensinar, configura-se na priorização do saber fazer repetitivo em detrimento do saber pensar e, na função escolar, "a produção em massa da força de trabalho, adestrada para a atividade mecânica" (LIMA, 2005, p. 198).

Podemos dizer que a problematização da situação se configura "em como fazer a transição do *currículo industrial para o educacional*" (LIMA, 2005, P. 199, grifo do autor). Essa transição está relacionada às questões principais escritas por Moura (1996): para que (ou por que) ensinar, a quem ensinar, o que ensinar e como ensinar. Questões que compõem a atividade de ensino na qual a busca da resposta é um projeto de vida, "[...] pois tomar a ação educativa como uma situação-problema é assumir que formar-se é uma ação constante, já que na dinâmica das relações humanas os problemas produzidos exigem a cada momento novas soluções onde o ato educativo se faz necessário" (p. 31-32).

A solução se constrói na inter-relação entre os membros de um coletivo, com a formação da coletividade, pois nem todo coletivo é coletividade, visto que "para ser uma coletividade é preciso que haja um objetivo comum que una os sujeitos em busca de sua concretização" (MOURA, 2001, p. 156). A coletividade se constrói no movimento de construção do objeto. O objetivo comum orienta a solução da situação-problema, dessa forma, os objetivos determinam conteúdos e estes são os objetivos tornados possíveis (MOURA 1996, 1998). Esse movimento integrado de objetivos e conteúdos concretizam o currículo.

As ações desencadeadas na busca de solução permitem que os integrantes da coletividade compartilhem significados presentes no processo de análise e síntese, elementos essenciais na totalidade da atividade orientadora de ensino.

A especificidade da atividade orientadora de ensino como uma atividade de ensino está no seu *motivo-objetivo* – motivo consciente (LEONTIEV, 1983). Enquanto os motivos-objetivos da atividade de ensino e aprendizagem se caracterizam na objetivação e na apropriação do conhecimento historicamente construído, o motivo-objetivo da atividade orientadora de ensino é, também, a organização do ensino capaz de proporcionar tais apropriação e objetivação de conhecimentos, compondo o seu objeto, a formação do estudante, o seu próprio desenvolvimento.

É a atividade dominante do professor que se realiza mesmo fora do convívio com os estudantes, pois as ações a serem realizadas com eles são planejadas e objetivadas no plano de ação, baseado em intenções e estudo, considerando as condições reais, a fim de que o estudante entre em atividade de estudo e de aprendizagem.

Moura (2001) define a atividade como orientadora "porque define os elementos essenciais da ação educativa e respeita a dinâmica das interações que nem sempre chegam a resultados esperados pelo professor" (p. 155). Por esse motivo, o professor avalia as ações sintetizando em motivos para novos planos de ação.

Isso não quer dizer que as ações são mecanizações de procedimentos anteriormente planejados, pois estas estão mais amplamente organizadas nos níveis de compreensão do desenvolvimento humano. São nas condições reais, na totalidade das relações com os instrumentos – materiais e teóricos – e com as pessoas que as ações se objetivam, caracterizando o conteúdo, evidenciando o campo de possibilidades de apropriação.

> O professor, de posse dos objetivos, dos conteúdos e conhecendo as possibilidades de aprendizagem de seus alunos, está munido de dados que lhe permitem a elaboração da atividade que possa colocar o pensamento da criança em ação, partindo de situações-problema que sejam significativas. Estas são o que chamamos de problemas desencadeadores de aprendizagem. (MOURA, 1996, p. 35)

Os problemas desencadeadores do plano de ação são elaborações do professor com a finalidade de aproximar o estudante do objeto de estudo, da sua significação. É na organização do ensino que o educador objetiva seu papel de mediador da apropriação da cultura pelo estudante. Isso quer dizer que, na atividade orientadora, a metodologia de ensino e o conhecimento que se quer ensinar, ou seja, a forma e o conteúdo dessa atividade, são apropriações conjuntas, interligadas, que se constituem uma unidade.

Forma e conteúdo são categorias da dialética que estão organicamente ligadas resultando sua unidade. O conteúdo "[...] determina a forma e suas mudanças acarretam mudanças correspondentes na forma. Por sua vez, a forma reage sobre o conteúdo, contribui para seu desenvolvimento ou o refreia" (CHEPTULIN, 1982, p. 268). Além disso, na forma tem-se um repouso relativo,

> [...] porque ela é um sistema relativamente estável de ligações de momentos (elementos) do conteúdo. Estando ligado a um movimento absoluto, conteúdo muda constantemente, enquanto que a forma, que deve seu aparecimento e sua existência a um repouso relativo, permanece imutável e estável durante um tempo mais ou menos longo. (CHEPTULIN, 1982, p. 286)

Por exemplo, se nas aulas de matemática o professor só ensina os algoritmos, cria-se a concepção no aluno, um conteúdo mental, de que o desenvolvimento da matemática pelas gerações precedentes se resume na elaboração de tais procedimentos, e ainda, que tais *engenhocas* foram inventadas por gênios.

Ao objetivar a formação do estudante, a atividade orientadora de ensino tem a intenção de proporcionar ao estudante a realização da sua atividade, a atividade de estudo.

> O estudo é considerado uma particular 'atividade humana' porque, assim como na 'atividade humana' em geral, a pessoa que a realiza se transforma ao mesmo tempo em que transforma os objetos materiais e simbólicos com os quais interage. Por meio da 'atividade de estudo', atitudes e habilidades de investigação são desenvolvidas nos estudantes, tornando-os capazes de se apropriarem de conhecimentos de um modo semelhante ao que historicamente ocorreu. Logo, não é algo possível de ser realizado sozinho, é uma atividade conjunta, social. Pressupõe necessariamente a comunicação e a relação com o 'outro', tanto pela produção cultural materializada em algum objeto material ou simbólico, quanto pela presença física desse 'outro'. (SERRÃO, 2004, p. 119)

Ambas as atividades, de estudo e orientadora de ensino, têm dimensão externa, interpsíquica, e interna, intrapsíquica, que permitem o desenvolvimento psíquico humano.

Às vezes, os estudantes podem participar das propostas do professor, mas isso não garante a sua atividade, somente sua ação. Por sua vez, sua ação pode servir de indício para mobilização da sua atividade dominante. A interação na coletividade escolar e a execução de tarefas intencionalmente organizadas pelo professor podem gerar um motivo – motivo gerador de sentido – da apropriação do conhecimento, a partir de motivos-estímulos (LEONTIEV, 1983) como, por exemplo, de certo desafio, certa curiosidade.

O motivo da atividade de aprendizagem para humanização pode não ser consciente quando se pertence a uma sociedade que procura romper com essa compreensão, a sociedade de classes. O fato de a relação professor-aluno não se integrarem em atividade humanizadora não quer dizer que o estudante não aprenda, e que o professor não ensine, mas nessas condições a aprendizagem geralmente é fragmentada, vinculada a um saber fazer, ao nível do pensamento empírico, que pouco auxilia no desenvolvimento da capacidade psíquica do estudante.

> [...] nem todo ensino ou educação escolar promove o desenvolvimento psicológico da criança. Para que isso ocorra, faz-se necessário organizar a 'atividade' dos estudantes na escola com o objetivo de promover situações que contribuam para superação, pelo menos, do pensamento empírico, forma de pensar originária e circunscrita ao cotidiano vivido. Esta é a conclusão a que chegaram importantes pesquisadores russos e alemães ao investigar, no decorrer dos anos 1970, as neoformações psíquicas de estudantes, pautando-se nos referenciais teórico-metodológicos da Psicologia Soviética, especialmente os formulados por Vigotsky, Elkonin, Leontiev e Galperin.. (SERRÃO, 2004, p. 116)

Por isso, a atividade orientadora de ensino tem como finalidade organizar a atividade do estudante, para que ele se conscientize do seu direito de apropriação do conhecimento desenvolvido pelo gênero humano e, nesse processo, desenvolva suas aptidões. As aptidões humanas não são herdadas biologicamente, mas são desenvolvidas no processo de apropriação da cultura (LEONTIEV, 1964?). Assim, ao tomar como referência o conceito, a atividade orientadora de ensino possibilita ao aluno conscientizar-se do modo humano de produção do conhecimento.

Na base da atividade de estudo, como a principal do estudante, fundamenta-se o processo formativo da consciência e do pensamento teórico por meio dos quais se desenvolvem "as capacidades correspondentes (reflexão, análise, organização mental) e também as necessidades e motivos de estudo" (DAVÍDOV, 1988, p. 74).

Dependendo da fase do estudante, essa atividade é combinada com outras atividades, chamada por DAVÍDOV de *atividade socialmente útil*, como a desportiva, a artística, a de trabalho. A necessidade inicial de trabalhar gera uma combinação, *a atividade de estudo e profissional,* na qual "começam a se formar atitudes investigativas, capacidade de construir planos vitais, qualidades ideológico-morais e cívicas e uma concepção estável do mundo [...]" (DAVÍDOV, 1988, p. 75).

A intencionalidade da atividade orientadora é mobilizar o estudante, orientando suas ações, para que ele desenvolva autonomia na apropriação e objetivação do conhecimento. Por isso, salientamos que o entendimento, pelo educador, dos pensamentos empírico e teórico permite distinguir um saber fazer de um *saber pensar*, e também do conhecer ao de se apropriar.

Para que o motivo da atividade de estudo seja consciente e permita o estudante encontrar o sentido pessoal na significação da sua atividade, na relação com a atividade humana, é imprescindível que ele se veja como um ser genérico, como pertencente ao gênero humano, histórico e socialmente se construindo. Essa é a busca do processo educativo.

Leontiev detalha a relação entre sentido pessoal e significação nas obras *O desenvolvimento do psiquismo* (1964?) e *Atividade, consciência e personalidade* (1983). Indicamos alguns aspectos gerais que nos auxiliam na compreensão dos processos educativos.

> A significação é aquilo que num objeto ou fenômeno se descobre objetivamente num sistema de ligações, de interações e de relações objetivas. A significação é refletida e fixada na linguagem, o que lhe confere a sua estabilidade. Sob a forma de significações lingüísticas, constitui o conteúdo da consciência social, torna-se assim a 'consciência real' dos indivíduos, objetivando em si o sentido subjetivo que o refletido tem para eles (1964?, p. 100).

O indivíduo se apropria do objeto ou fenômeno, imprimindo-lhe um sentido pessoal. Nesse processo, para a compreensão do objeto ou fenômeno na sua significação histórico-social, o indivíduo deve criar para si o sentido pessoal correspondente.

A criação do sentido não necessariamente corresponde à significação, devido sua mediação por particularidades do indivíduo, "experiências passadas, peculiaridades de seus objetivos, temperamento, etc" (LEONTIEV, 1983, p. 120). Isso não quer dizer que a significação na consciência do indivíduo perde seu conteúdo objetivo, reproduzindo o exemplo dado por Leontiev (1964?),

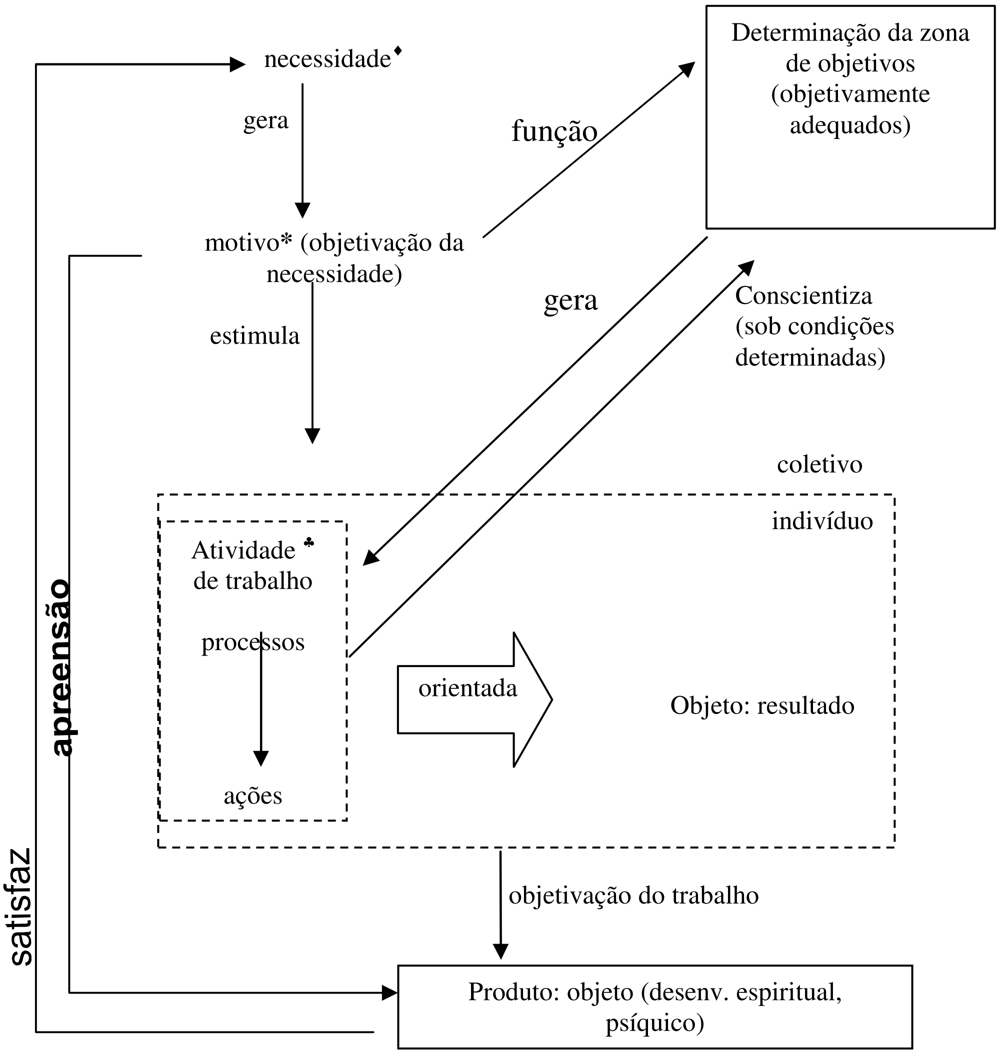
> Naturalmente o que eu penso, compreendo e sei do triângulo, pode não coincidir perfeitamente com a significação 'triângulo' admitida na geometria moderna. Mas não é uma oposição fundamental. As significações não têm existência fora dos cérebros humanos concretos [...]. Por conseqüência, não podemos opor uma significação 'geométrica', lógica e, em geral, objetiva, a esta mesma significação de um indivíduo enquanto significação psicológica particular. A diferença não é entre o lógico e o psicológico, mas entre o geral e o particular, o individual. (p. 101)

Esta pesquisa direciona-se as observações no campo das significações dos conceitos matemáticos, na tomada de consciência da apropriação e da objetivação do conhecimento elaborado historicamente, para, com isso, colaborar com a transformação do ensino[12].

---

[12] Recomendamos a leitura Bernardes (2006) para um estudo da relação da consciência com o processo educativo.

ATIVIDADE HUMANA



* no nível consciente motivo-objetivo
♣ tipos de atividades diferenciadas por:

distinção → por objetos { • forma • vias de realização • tensão emocional • característica espacial/temporal • mecanismos fisiológicos

♦A análise psicológica das necessidades se transforma inevitavelmente na análise dos motivos. A necessidade se torna capaz de orientar e regular a atividade quando há o "encontro" com o objeto que a responde.

4 UM CURSO: FORMA E CONTEÚDO DE UMA ATIVIDADE ORIENTADORA

De tudo, ficaram três coisas: A certeza de que estamos sempre começando...
A certeza de que precisamos continuar...
A certeza de que seremos interrompidos antes de terminar...(Fernando Pessoa)

Um curso de metodologia de ensino de matemática com 120 horas oferecido pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo foi organizado por três educadoras que elaboraram suas características gerais. Inicialmente o curso foi dividido em três módulos: número, geometria e álgebra. Oitenta professores se inscreveram e formaram duas turmas de quarenta, que, exceto no primeiro e no último encontro, tiveram seus encontros em salas separadas.

Ambas as turmas iniciaram pelo tema geometria devido à disponibilidade das organizadoras do curso. Depois uma turma trabalhou primeiramente o módulo de número e, depois, o módulo de álgebra, e a outra turma, a seqüência contrária. A duração de cada módulo foi de aproximadamente 40 horas.

O módulo de número, nas duas turmas, foi organizado e desenvolvido pela investigadora desta pesquisa, compondo sua *atividade orientadora de ensino e de pesquisa*.

O problema social relacionado à dificuldade na aprendizagem da matemática no contexto escolar caracterizado, sobretudo pelo já citado *currículo industrial*, é gerador do motivo comum das atividades da pesquisadora e dos professores, ou seja, dos educadores matemáticos, que se reuniram para construção da solução.

No currículo industrial, destacamos a *matemática industrial* ou *mecânica* concebida como a-histórica, pois o conteúdo aparece como pronto e acabado e o ensino configura-se em mostrar seqüências de definições intercaladas por exemplos e muitos exercícios, e que para aprender basta saber fazer os algoritmos. Esse modo representa um currículo que "[...] não nos coloca a finalidade de emancipar o humano do mecanismo programável, continuamos formando mentes disciplinadas, máquinas programadas para o saber fazer repetitivo" (LIMA, 2005, p. 199).

O processo de operacionalização e fragmentação nessa constituição do ensino da matemática reflete no modo de pensar matemática, com isso, o sujeito fetichiza a produção do conhecimento ao alienar-se do processo de criação e desenvolvimento como atividade humana, distanciando-se assim do gênero humano. O professor se torna produto e produtor desse sistema e sua atividade reflete em forma e em conteúdo na aprendizagem dos estudantes. A forma é caracterizada pela objetivação no sistema de ensino escolar que, por sua vez, expressa um conteúdo de pensamento. A forma de pensar e organizar a aula tem seu conteúdo didático, matemático, ideológico, psicológico, sociológico.

> ‘Ensinar’ no método industrial não é um equívoco de algum professor que parou no tempo e não se ‘reciclou’ ou não se atualizou. Trata-se de um sistema que foi criado no século XIX, na Europa, para atender às necessidades de industrialização e que se espalhou pelo mundo, junto com as fábricas. E, até hoje, é dominante nas escolas. (LIMA, 2005, p. 9)

Concordamos com Lima (2005) que a transição da *matemática industrial* para a *matemática educacional* “é uma questão de essência e não de aparência” (p. 194).

Essa situação caracterizou o motivo da atividade orientadora ao mesmo tempo em que configurou a pesquisa-ação, a busca de contribuir para transformação no ensino da matemática.

Os objetivos da atividade orientadora de ensino e de pesquisa se interligaram na investigação do processo de formação como desenvolvimento das imagens conceituais dos sujeitos, com a organização do ensino capaz de promover a apropriação e a objetivação do conhecimento científico da reta real. Essa proposta fundamentou-se no movimento conceitual compreendido como o lógico-histórico do desenvolvimento do conceito, tomado como hipótese para a *reprodução* do objeto de estudo pelos sujeitos da pesquisa.

O plano de ação propôs uma forma de interação entre os sujeitos que permitiu organizar o movimento do coletivo nas condições objetivas em busca da formação de uma coletividade. A dinâmica básica indivíduo-grupo-classe constituiu-se no modo de interação almejada, indivíduo-coletividade, na construção da solução às situações-problema propostas. Primeiro, havia um momento individual; depois, em pequenos grupos; e por fim uma síntese coletiva. A forma de compartilhamento entre os grupos foi realizada, sobretudo, por meio de apresentações de um representante a todos os outros, em plenária. Durante a apresentação de cada grupo, os outros professores interagiam manifestando suas reflexões.

Em momentos determinados, uma síntese do grupo-classe realizada pela pesquisadora-organizadora era apresentada ao coletivo que, por sua vez, suscitava novas reflexões.

As situações-problema elaboradas tinham como intenção o desenvolvimento do pensamento numérico dos sujeitos, no movimento de reprodução[13]. As manifestações dos sujeitos permitiram apreender o fenômeno investigado no seu movimento, o processo formativo da imagem conceitual.

Ao considerarmos a importância de investigar as imagens conceituais de professores, estamos compreendendo-as como instrumento mediador no processo de ensino, em relação, portanto, com sua atividade principal. Nesse sentido, o conteúdo da imagem conceitual e o seu desenvolvimento são essenciais tanto para sua profissão, pelo lugar social que ocupa, quanto para a apropriação do conhecimento produzido pelo gênero humano, ou seja, sua formação humanizadora.

Portanto, não é suficiente conhecer a definição de um conceito matemático, mas é necessário compreender, "determinar as *razões* de sua produção, descortinar as *ligações* de uns com outros" (CARAÇA, 1989, p. 64, grifos do autor).

Atuar no mundo buscando compreender os objetos e fenômenos é o conteúdo da apropriação humanizadora para a objetivação também humanizadora.

> Quanto mais alto for o grau de *compreensão* dos fenômenos naturais e sociais, tanto melhor o homem se poderá defender dos perigos que o rodeiam, tanto maior será o seu domínio sobre a Natureza e as suas forças hostis, tanto mais facilmente ele poderá realizar aquele conjunto de atos que concorrem para a sua segurança e para o desenvolvimento da sua personalidade, tanto maior será, enfim, a sua *liberdade*. (CARAÇA, 1989, p. 64, grifo do autor)

4.1 O LÓGICO-HISTÓRICO

Ao propormos um curso orientado a uma Educação Matemática que humanize, estamos considerando os princípios da atividade humana na criação e no desenvolvimento de conceitos como método de organização do pensamento e como conteúdo para o desenvolvimento do humano.

Em relação à formação conceitual, o histórico do objeto refletido no pensamento constitui o conteúdo do pensamento e o lógico, reflexo desse conteúdo, reproduz[14] "a essência

[13] Ver sobre 'reprodução' também no capítulo anterior: Atividade Orientadora de Ensino.
[14] Idem a nota anterior.

do objeto e da história do seu desenvolvimento no sistema de abstrações" (KOPNIN, 1978, p. 183).

Nesse contexto, a partir da categoria do lógico e do histórico do materialismo dialético como forma de pensamento, desenvolvemos uma abordagem do conteúdo matemático que relaciona o histórico do conceito e sua essência[15], o lógico, com o desenvolvimento dos sujeitos no processo de apropriação, com a finalidade da formação do conceito para si, ou seja, o movimento da formação das imagens conceituais.

Com a abordagem lógico-histórica, pode-se ter a compreensão, por exemplo, da inexistência de verdades absolutas, concepções freqüentes de estudantes em relação à matemática, gerada pelo método de ensino que aborda somente a lógica formal.

A intenção de considerar o lógico-histórico do conceito científico como perspectiva didática (LANNER de MOURA; SOUSA, 2002) tem sua importância também na conscientização do estudante e do professor da sua genericidade e, por sua vez, de que a atividade matemática, como outros campos do conhecimento, é uma atividade humana e, portanto, inacabada. Para abordar as características gerais desses princípios, elaboramos a unidade didática sujeito histórico.

Ao considerar uma das leis principais da lógica do movimento do pensamento, ou seja, o movimento do simples ao complexo e do inferior ao superior, do empírico ao teórico, buscamos propiciar o desenvolvimento do pensamento na dialética materialista (KOPNIN, 1978).

O lógico do histórico, considerado como lógica dialética, é mais amplo que a lógica formal. Enquanto a lógica formal se interessa pela própria forma lingüística de expressão de uma idéia como, por exemplo, de uma definição matemática, a lógica dialética estuda, sobretudo, o conteúdo mental expresso na forma lingüística, dando atenção especial à relação desse conteúdo com a realidade objetiva no próprio processo de pensamento, no próprio processo de aquisição do conhecimento.

A relação da lógica formal com a matemática é tão estreita que, muitas vezes, se toma uma pela outra.

---

[15] A essência como categoria forma sua unidade dialética com a aparência a qual reflete a essência nas suas determinações. As determinações que a distinguem são determinações da própria essência. (LENIN, 1963).

> A aproximação da lógica formal com a matemática é o resultado natural da evolução de ambas. O objeto da lógica formal tem muita afinidade com o objeto da matemática: ambas estão relacionadas com o reflexo de relações extremamente gerais que se expressam em abstrações de longo alcance, cuja ligação com o mundo objetivo é de caráter bastante complexo e mediato; as relações estudadas pela lógica formal são semelhantes às relações estudadas pela matemática, são permanentes, podem ser desmembradas em elementos discretos relativamente homogêneos, suscetíveis de análise quantitativa. (KOPNIN, 1978, p. 75)

Essa forma avançada da matemática, *lógica matemática*, tem se refletido na metodologia de ensino da matemática tanto no Ensino Básico como no Superior, objetivando em um conhecimento empírico desta. Temos, como características principais da matemática do século XX, o formalismo e o rigor na estrutura (lógica formal) dos conceitos matemáticos que levaram aos conceitos à forma de axioma, definição e teorema. Essa forma de apresentar os conceitos matemáticos teve seus reflexos no ensino, principalmente por meio das produções dos bourbakistas (EVES, 1995; BOYER, 1993). No Brasil, Sousa (1999) conclui que ainda temos os vestígios da proposta curricular elaborada para o ensino da matemática moderna nos processos educativos escolares.

Ao propor um curso – expressão ora usada para o módulo de números – que busca uma transição da matemática industrial à educacional, consideramos como foco a abordagem dos conjuntos numéricos, presente no currículo industrial, mas com outra abordagem no ensino. Uma abordagem que permita compreender a transição de um campo numérico a outro. Não se trata de uma abordagem historicista, pois buscar a *reprodução* na consciência do indivíduo significa buscar a essência do movimento do conceito, ou seja, o lógico, que *"é o histórico libertado das casualidades que o perturbam"* (KOPNIN, 1978, p. 184, grifo do autor).

Por esse motivo, o lógico-histórico nessa pesquisa, além de perspectiva para abordar o conteúdo matemático, constitui categoria de análise do movimento do pensamento na formação das imagens conceituais de número, o pensamento numérico.

Inferimos que ao reproduzirmos a criação e o desenvolvimento dos números, além da compreensão do conhecimento, novos aspectos e novas relações do movimento do objeto no pensamento são descobertos, potencializando a objetivação no processo de ensino pelos professores.

Para organizarmos o curso com a finalidade de compreender a formação de conceitos científicos, necessitamos também compreender as formas de pensamento empírico e teórico.

4.2 O PENSAMENTO EMPÍRICO E O PENSAMENTO TEÓRICO

O pensamento empírico e o pensamento teórico são níveis do movimento do pensamento. A essência da diferenciação está no modo em que se obtém o conteúdo do conhecimento e pela sua importância prática e teórica. Por exemplo, saber a definição de número real, uma síntese do conceito, não quer dizer que o indivíduo se apropriou desse conceito teórico, pois depende do modo em que obteve tal conhecimento. Isso pode ter acontecido pela leitura dessa síntese que caracteriza um modo empírico de conhecimento.

Na matemática, os conceitos são essencialmente teóricos. Esse estágio de desenvolvimento dessa ciência foi alcançado por meio de abstrações substanciais e generalizações no processo de análise e síntese do seu desenvolvimento como prática humana. Isso não quer dizer que, no seu desenvolvimento, não tenha também sínteses do movimento de conceitos empíricos.

Ao pensar a função da escola como propiciadora de apropriação da cultura humana, e principalmente do conhecimento científico, julgamos necessário diferenciar o pensamento empírico do teórico.

Por serem formadores de conceitos e por auxiliar na organização do ensino, o pensamento empírico e o pensamento teórico tiveram dupla função inter-relacionada nesta pesquisa. Referenciamos nossos estudos sobre essas formas de pensamento, sobretudo, em Davídov (1988) e Kopnin (1978).

Ao concebermos um currículo educacional que visa à apropriação e à objetivação da cultura humana por meio da formação de conceitos – neste trabalho, os científicos –, consideramos como fundamental a organização do ensino de modo a propiciar a superação do pensamento empírico e o desenvolvimento do pensamento teórico.

O *currículo industrial* e particularmente a *matemática industrial,* mencionados no capítulo da atividade orientadora de ensino, reflete forma e conteúdo lógico-formais no ensino e na aprendizagem, que são formas empíricas do saber.

> [...] o pensamento que se realiza com ajuda das abstrações e generalizações de caráter lógico-formal só leva a formar os chamados conceitos empíricos. O procedimento de formação de tais conceitos opina B. Kédrov, pressupõe a possibilidade de operar com os traços sensoriais, dados diretamente, dos objetos estudados. É estritamente empírico. [...] .
>
> No esquema lógico-formal entra tanto a formação dos conceitos cotidianos como de conceitos empíricos da ciência. As abstrações e generalizações lógico-formais não expressam a especificidade dos conceitos científicos estritamente teóricos. (DAVÍDOV, 1988, p. 104)

O conceito empírico se expressa pela categoria de existência. Podemos ainda ter generalizações do pensamento empírico, pois o que caracteriza o pensamento não são os elevados níveis de raciocínio e sim sua base. Uma das formas de síntese do pensamento empírico é, como nomeou Davídov (1988, p. 123), por meio das "palavras-determinações" ou "palavras-termo" (p. 155).

A diferença de conteúdo entre o pensamento empírico e pensamento teórico reflete na diferença das respectivas formas. A forma empírica caracteriza-se pela descrição de observações sensoriais. No pensamento teórico aparece as inter-relações, nas mediações, no sistema de sua formação, reúne "os dessemelhantes, os diferentes, os multifacetados, não coincidentes" (p. 131).

Enquanto o pensamento empírico compara, classifica, cataloga objetos e fenômenos por meio de abstrações dos seus aspectos externos, o pensamento teórico revela suas leis de movimento, no processo de análise de suas relações no sistema.

Quando as transformações do objeto se referem às suas mudanças externas, temos ainda uma forma empírica do saber. Quando o conhecimento de uma transformação responde o por que ocorre, no que resulta, sobre que base e devido a que possibilidade se converte no que é e não em outra coisa, tem-se o pensamento teórico.

Na base de todo o conhecimento humano, o homem leva em consideração não somente as propriedades externas dos objetos como também as conexões internas, sua essência. São essas conexões que permitem ao ser humano a transformação dos objetos, produzindo seus instrumentos. E é na atividade produtiva dos instrumentos, materiais ou ideais, que o homem desenvolve o pensamento teórico. Essas formas de pensamento, de produção do conhecimento, orientaram-nos na elaboração das propostas das unidades didáticas com vistas a promover o pensamento teórico, por meio da *reprodução* dos traços essenciais desse processo.

A divisão em empírico e teórico é para evidenciar os níveis de pensamento. No nível teórico, temos o caráter universal, enquanto no empírico temos as transições entre singular e particular. Isso não quer dizer que devamos abandonar as relações sensitivas, pois são elas que possibilitam a forma primeira do pensamento.

No pensamento empírico, há raciocínios discriminatórios e designatórios das propriedades dos objetos no processo de comparação. O sensorial no pensamento teórico está presente na relação de concreticidade do sistema, como a contemplação do todo.

As manifestações das imagens conceituais em Dias (2002) e em Tall & Vinner (1981) refletem o pensamento empírico, tanto da cotidianidade quanto do lógico-formal. Este último, na maioria das vezes, está relacionado aos livros didáticos. Como observou Davídov (1988) essa concepção da lógica formal foi convertida nos livros didáticos e exerceu grande influência na psicologia e na didática nos séculos XVIII e XIX.

Ao buscarmos a reprodução da atividade acumulada no conhecimento matemático, em particular no número, sua construção e transformação no pensamento, significa uma abordagem didática que propicia o pensamento teórico.

Por isso, uma atividade que faça a mediação entre o objeto de conhecimento e sua apropriação pelo indivíduo é a função da atividade orientadora de ensino na escola. O professor, nessa atividade, muitas vezes, é o único sujeito mediador na apropriação do conhecimento teórico pelo estudante. Em particular, o conhecimento matemático é expresso nas relações sociais dentro e fora da escola fundamentalmente pelo seu aspecto superficial e utilitário, ou seja, empírico.

4.3 UNIDADES DIDÁTICAS

O termo unidade didática neste texto é um método de exposição e análise dos dados. Sua origem esteve ligada a unidade dos contrários, como lei dialética, almejada no decorrer do curso. Embora esteja na sua origem, e como tal tem suas marcas, as unidades didáticas tiveram a função de expor o movimento do curso: preparação da situação-problema, apresentação da proposta e a solução coletiva construída. A relação com a unidade dos contrários se caracterizou pela necessidade de elaboração de mais de uma situação-problema, para que pudéssemos abordar a contrariedade dos conceitos.

Além da relação acima, uma outra se estabeleceu, os processos de análise e síntese dos conceitos realizados com os professores no curso constituíram-se em objetos de análise e síntese da investigação.

Nas unidades didáticas, foi utilizado o recurso da intertextualidade, como detalhado nos *procedimentos metodológicos*, para comunicar o movimento das situações vivenciadas e as análises. Com isso, buscou-se descrever a visão do educador em atividade de ensino que possibilita ao leitor, a nosso ver, a compreensão de como a pesquisadora avaliou as ferramentas metodológicas como propiciadoras para educação escolar, esta como a concebemos: o lugar social de apropriação de conceito científico.

A elaboração do plano de ação, na criação de situações-problema para abordar o lógico-histórico do conceito de número, focou os diferentes tipos de números que compõem os saltos quantitativos de um campo numérico a outro. As situações-problema propostas tiveram o objetivo de desencadear reflexões e discussões na elaboração de soluções. Esse processo possibilita o movimento do pensamento para apropriação e objetivação dos conceitos em jogo, como também a organização do pensamento individual e coletivo, características da atividade orientadora de ensino.

Os estudos realizados para a elaboração das situações-problema e para a organização das discussões formaram também o que nomeamos de uma zona de possibilidades, cuja exposição se encontra nas unidades didáticas. A finalidade foi mostrar os encaminhamentos possíveis de continuidade no processo ao avaliar alguns encaminhamentos do pensamento.

Bento de Jesus Caraça (1989) se constituiu como a principal obra estudada, dentre outras, para o encaminhamento proposto, por conter na nossa interpretação os traços essenciais de conceitos matemáticos na perspectiva lógico-histórica.

Consideramos na elaboração das situações-problema e na organização das discussões os resultados de pesquisas que apontam as condições históricas da formação de professores do ensino público.

Na realização de cada proposta, buscou-se: o movimento do conceito no pensamento – na inter-relação indivíduo-coletividade –, o desenvolvimento do pensamento teórico, a apropriação e a objetivação do conceito, a autonomia na construção do próprio conhecimento, a construção da coletividade.

Procuramos identificar o movimento das imagens conceituais no processo coletivo na solução da situação-problema. Esse processo depende da transformação da proposta em um problema interno, o seu problema, a fim de realizar uma atividade interna, o desenvolvimento do conceito para si, na inter-relação com as imagens conceituais do coletivo. Nesse sentido, o grau de compreensão, o nível de aprofundamento e o direcionamento das situações são realizados no e pelo coletivo.

Ao tomar o problema para si, o individuo pode conscientizar-se de como se produz o conhecimento. A opção de se colocar nesse movimento possibilita a reflexão dos dilemas na educação escolar, relacionados ao desenvolvimento da consciência social e das apropriações do conhecimento desenvolvido pelo gênero humano.

Foram organizadas oito unidades didáticas. Na primeira, nomeada unidade didática sujeito histórico, buscaram-se reflexões no coletivo sobre: sujeito histórico, atividade humana e Educação Matemática, constituindo os pressupostos do curso.

As unidades seguintes relacionam-se com a organização do módulo de número: sistema de numeração, número natural, medida, número racional, densidade, comensurabilidade, incomensurabilidade e o número, atividade orientadora de ensino da reta real e número complexo.

A organização nessas unidades didáticas teve a intenção de promover o movimento do conceito da reta real e objetivou a reprodução, no pensamento, dos nexos internos desse conceito no pensamento numérico. Desse modo, compôs-se uma oposição metodológica no ensino comparada com o esquema lógico-formal e, por isso, caracterizou-se como uma proposta de transição didática.

A abordagem conceitual promove o desenvolvimento do pensamento, no sentido da autonomia de produção do conhecimento, em contraposição com a lógico-formal, focada na operacionalidade e funcionalidade.

Com o objetivo de analisar o processo de significação da reta real no movimento do pensamento numérico, priorizamos nas unidades didáticas a análise do lógico-histórico dos sujeitos nesse processo. A síntese das relações entre as unidades didáticas a seguir também compõe a linha geral da elaboração do plano de ação.

A *unidade didática sistema de numeração* foi organizada para captar a variação quantitativa e a *número natural*, para observar as concepções de ensino, bem como as imagens conceituais sobre esse conceito. A essência do número natural na sua forma mais evoluída está fundamentada no conceito de sucessor. É ele que é conflitado posteriormente com o conceito de densidade no conjunto dos números racionais, além de ser o modelo de conjunto discreto e de enumerável. O conjunto dos números naturais também é o início da formalização dos números em conjuntos.

A intenção na *unidade didática medida* foi abordar diretamente a criação de unidades e subunidades de medida, a comensurabilidade e a fração. A *unidade didática número racional* objetivou a relação da fração com número racional.

A *unidade didática densidade, comensurabilidade, incomensurabilidade e o número* buscou compreender, no movimento do pensamento dos sujeitos, as relações entre esses conceitos, pois eles fundamentam a disjunção dos conjuntos dos números racionais e irracionais, cuja união caracteriza o conjunto dos números reais.

A *unidade didática atividade orientadora de ensino da reta real*, diferente das demais, apresenta-se em três movimentos: o primeiro abordou o conceito de continuidade; o segundo, a produção de propostas didáticas para o ensino dos números reais; e o terceiro, uma síntese do conceito de reta real.

A *unidade didática do número complexo* foi organizada de modo a proporcionar a reflexão sobre sua criação e de certas propriedades em relação ao conjunto dos números reais.

A abordagem do processo de criação dos tipos de números que compõe os conjuntos numéricos procurou evidenciar o movimento do pensamento teórico na essência de cada processo formativo e confrontar com as imagens conceituais dos conjuntos numéricos explorados no sistema de ensino.

As primeiras unidades didáticas (sistema de numeração e número natural) compõem uma breve análise apontando os aspectos nefrálgicos, para que fossem detalhados os conceitos relacionados diretamente aos números reais, foco desta pesquisa. Também na elaboração do próprio curso, privilegiamos os conceitos que envolvem a reta real.

4.3.1 UNIDADE DIDÁTICA: SUJEITO HISTÓRICO

No primeiro encontro, três pesquisadoras em Educação Matemática propuseram a aproximadamente 80 professores uma reflexão dos nossos lugares na sociedade como sujeitos históricos da educação, indivíduos que constroem história ao mesmo tempo em que são produtos dela (KOSIK, 2002), em particular da Educação Matemática. A proposta foi inserir os indivíduos no processo de reflexão de que “embora em condições determinadas, são sujeitos de sua história” (SILVA, 2001, p. 43), contrária à concepção de que somente grandes homens, gênios, fazem história.

A constituição do sujeito (coletivo) histórico encontra-se na base do materialismo histórico (SILVA, 2001). Com o isolado desse coletivo social, formado pelos sujeitos desta pesquisa, buscamos desenvolver a consciência do ser histórico, que permite transformar a realidade e nos transformarmos.

Para promover o desenvolvimento dessa consciência, foram elaborados três momentos a fim de desencadear discussões e reflexões sobre a constituição do educador historicamente situado:

- *Túnel do tempo*;
- *O humano é fundamental*;

• *Ensino conceitual*.

A proposta *túnel do tempo* foi organizada de modo a permitir uma reconstrução da história individual e coletiva em relação à educação. O mesmo momento incluiu um posicionamento dos sujeitos de como eles projetam a continuidade da sua história em relação à educação. A intenção foi que houvesse o encontro entre os sujeitos que fazem a mesma história: *professores de matemática da educação básica*.

É na atividade humana que o sujeito histórico se forma e se desenvolve. Por isso, resolvemos introduzir um segundo momento iniciado com o texto *O humano é fundamental* a fim de discutir o processo de humanização.

A proposta de incluir esse momento se relaciona também com o objetivo fundamental do curso, o sentido humanizador da atividade educativa. Para explicitarmos a proposta, incluímos mais dois interlocutores (Leontiev e Moura) às nossas reflexões sobre atividade humana, juntamente com seus pressupostos que contribuiriam para o desenvolvimento da metodologia do curso.

Ao compor os momentos *túnel do tempo* e *o humano é fundamental* com o *ensino conceitual*, terceiro momento, procuramos aproximar as expressões dos sujeitos com um breve relato de elementos da história da educação escolar, como produção do gênero humano.

Com isso, foram apresentados elementos, com base histórica, constituintes de motivos desencadeadores de certos procedimentos pedagógicos como, por exemplo, da *matemática industrial*[16]. Esta foi realizada de uma forma interativa com questionamentos, comparações com a atualidade, buscando incitar uma reflexão conjunta de como fatores sociais refletiram e refletem no processo de aprendizagem de conceitos matemáticos ao longo da história. Esse momento constituiu em um exemplo de abordagem na perspectiva lógico-histórica, caracterizando a busca de compreensão do movimento do objeto no movimento histórico da atividade humana.

A forma de organização dos momentos dessa unidade didática (*túnel do tempo, o humano é fundamental* e *ensino conceitual*) objetivou uma maneira de relacionar a proposta humanizadora do curso com o desenvolvimento da compreensão do sujeito histórico da educação escolar e, em particular, da Educação Matemática.

---

[16] Cf capítulo 3 – Atividade Orientadora de Ensino.

A formação da imagem conceitual e a unidade didática se relacionam em forma e conteúdo. A forma da unidade didática caracterizou-se fundamentalmente nas ações de construção do conhecimento para si, na inter-relação entre os sujeitos por meio da dinâmica proposta, de indivíduo-grupo-classe. Essa dinâmica permitiu as formas inter e intra-psíquicas do movimento do pensamento, devido à ligação entre as atividades externas e internas dos indivíduos, que se fundamentam na perspectiva teórica da atividade (LEONTIEV, 1964?, 1983, 1988).

No conteúdo das imagens conceituais, participam as significações dos conceitos na vida do sujeito. Para isso, nessa unidade, propiciamos desenvolver a relação entre o conceito e a atividade humana, pois compreender a imagem conceitual requer entendê-la no seu sistema de formação, no movimento de apropriação e objetivação.

1º momento[17]

Primeiramente convidamos todos os professores a se apresentarem por meio do *túnel do tempo*. Iniciando uma escrita individual da reflexão de suas vidas na relação com a educação, apontando marcos dessa trajetória, situações que considerassem relevantes e que salientassem a qualidade dessa relação. Acrescentando também o *devir*, o que projetavam nos seus lugares sociais de professores de matemática.

Após as produções individuais, os professores de reuniram em pequenos grupos a fim de sintetizar a discussão para expor ao coletivo. Os marcos considerados nas suas relações foram: a família, seus professores, a faculdade e o trabalho de docência, esse último salientando três fases: o início, o atual e o devir.

Cada pequeno grupo iniciou uma reflexão da relação individual com o grupo ao se encontrarem, histórica e afetivamente, por meio das semelhanças e diferenças entre suas práticas sociais. Esse momento buscou o desenvolvimento da conscientização, mesmo que de uma forma inicial, do sujeito histórico, ou seja, ao observar sua história particular refletida na história do outro. Essa consciência pôde ser ampliada com a posterior exposição das sínteses de todos os grupos.

As produções dos grupos mostraram inicialmente a falta de ajuda dos pais nas dúvidas trazidas da escola, revelando o nível de compreensão deles diante da atividade do estudante. Hoje os professores dizem compreender que eles não tinham condições de auxiliá-

[17] Os dados utilizados referem-se ao registro de observação.

los, por que possuíam baixo grau de instrução e trabalhavam demais: “meu pai trabalhava na roça” (o).

A falta de instrução escolar dos pais, contrapondo-se com a possibilidade dos filhos, foi o reflexo de um período da história sobre a popularização do ensino, entre as décadas de 1970 a 1990. Nesse período, o aumento do número de escolas caracterizou a massificação da educação escolar (GATTI JR., 2004).

A compreensão do significado da escola foi se constituindo na sociedade de classes.

> Não se pode pressupor, como frequentemente acontece, que a escola seja uma instância isolada ou independente da prática social global, uma instância propedêutica que serve ao indivíduo durante alguns anos como uma passagem preparatória para a prática social que irá desenvolver depois. Esse é um modo mecanicista e unilateral de entender o significado do movimento implícito no conceito de passagem. A compreensão orgânica da categoria de mediação implica necessariamente a compreensão da relação recíproca, uma relação altamente dinâmica das partes entre si em função de uma determinada direção. (OLIVEIRA; DUARTE, 1992, p. 96)

Nessa classe social, a necessidade do trabalho, entendido como venda da força de trabalho para obtenção das condições de vida, aliada ao sentido atribuído à educação escolar levaram os atuais professores a ingressarem bem jovens no mercado de trabalho. Além disso, as escolas que freqüentaram, como estudantes, são do mesmo segmento das que lecionam atualmente, a escola pública. Nesse contexto, os relatos explicitaram o lugar social a que pertencem os sujeitos e também como este determina a qualidade de suas relações, a formação das significações e dos sentidos pessoais com a família, com a sociedade e com a educação escolar.

Por meio dos apontamentos sobre a relação aluno-professor, observamos a relevância da afetividade na aprendizagem. A severidade, o medo, o autoritarismo, a punição, a rigidez, a formalidade foram menções mais comuns na suas vidas estudantis. A aprendizagem como “decorativa” (o), no sentido de *saber de cor,* foi uma característica marcantemente apontada pelos sujeitos.

A opressão sentida por eles não os permitia fazer questionamentos aos professores sobre suas dúvidas, por isso inicialmente as levavam para casa a fim de que alguém os ajudasse, mas logo perceberam que não tinham a quem recorrer.

Paulo Freire (1987) já relatou substancialmente em *A Pedagogia do oprimido* o tipo de educação escolar como *depositária* do conhecimento que gera uma totalidade desumanizada e desumanizante e que atinge tanto os oprimidos quanto os opressores, mas que ao mesmo tempo estimula sua contradição. A educação libertadora.

O outro segmento do *túnel do tempo* foi a respeito do curso de graduação, no qual aproximadamente 97% dos professores o realizaram em faculdades privadas. As dificuldades apontadas para concluírem a graduação foram: a fadiga da rotina de trabalharem durante o dia e estudarem a noite e as limitações das condições financeiras para pagarem seus cursos. Em alguns casos a família pôde ajudar também financeiramente. Além disso, comentaram que suas formações na escola pública não os possibilitavam a aprovação no vestibular, além das poucas vagas nessas instituições. Esse comentário surgiu devido a um único professor ter se graduado em instituição pública.

O acesso ao Ensino Superior privado dos professores é o reflexo da constituição deste. Como interpreta Paulo Freire, tal sistema de ensino separa o "*produzir* conhecimento do *conhecer* o conhecimento existente, as escolas se transformam facilmente em espaços para a venda de conhecimento, o que corresponde à ideologia capitalista" (FREIRE; SHOR, 2001, p.19, grifos do autor). O crescimento das faculdades privadas, acompanhada da diminuição no crescimento do Ensino Superior público, evidencia o percurso desses professores.

> A atividade de educar no Brasil tornou-se importante fonte de criação e valorização de valor. Essa informação se confirma quando nos deparamos com o enorme crescimento no número de Instituições de Ensino Superior (IES) Privadas existentes. Em 1980 existiam 682 Instituições de Ensino Superior Privadas em todo o país; em 2003 esse número foi de 1.652. Um aumento de 142%, enquanto o Ensino Superior Público cresceu apenas 4% no mesmo período (INEP/MEC). (TRISTÃO, 2006, p. 1)

As escolhas dos cursos da graduação, para alguns professores desse curso, estavam relacionadas inicialmente com a atividade de trabalho na época, visto que não tinham a intenção de lecionar. Tais professores, hoje lecionando matemática no Ensino Básico público, inicialmente se graduaram em Administração, Contabilidade, Orientação Educacional, Pedagogia, Tecnologia. O ingresso no sistema de ensino foi uma opção alternativa frente à dificuldade de colocação no mercado de trabalho na área de formação.

A admissão de professores de diferentes áreas para lecionar matemática ocorreu devido à falta de professores dessa especialidade em número suficiente para atender à demanda do aumento das escolas públicas.

O início da docência foi emotivamente descrito por todos os representantes dos grupos ao apontarem a regularidade entre os membros do grupo e suas experiências particulares. O primeiro dia em que entraram na sala de aula para lecionar foi destacado por todos como marco que traz lembranças, na sua maioria, do “medo de errar, da insegurança, do nervosismo” (o). Frente ao inesperado, sentiram-se despreparados. Uma justificativa foi o distanciamento da sua formação com a realidade.

Essa lembrança da aula inaugural também permitiu uma análise comparativa desde o início até os dias de hoje, concluindo que suas práticas têm proporcionado uma melhoria na qualidade das aulas e o desenvolvimento da confiança. Atualmente buscam um bom relacionamento com os alunos a fim de tornar a sala de aula um ambiente mais harmônico e calmo e que lhes possibilitem desenvolver seu trabalho.

As dificuldades apontadas no desenvolvimento do seu trabalho atual referem-se à burocracia, falta de estrutura nas escolas para acompanhar as mudanças externas, precariedade de recursos materiais, principalmente relacionadas ao acesso à informação. Salientam a necessidade de novas tendências na educação e também a introdução de novas tecnologias, como computadores.

Refletindo sobre suas atuações na sala de aula, dizem que ainda estão aprendendo. Os professores mencionaram que atualmente um de seus problemas para ensinar é a relação com os estudantes. Apontam que eles não vêm educados para escola devido à “desestruturação da família” (o), e a indisciplina é justificada pelo “desinteresse do aluno” (o), falta de “compromisso” (o) e de “perspectiva” (o). O comportamento dos estudantes se mostra agressivo e disperso, dificultando o trabalho do professor. Como diz Freire (2002), “Para que a educação fosse neutra era preciso que não houvesse discordância nenhuma entre as pessoas com relação aos modos de vida individual e social, com relação ao estilo político a ser posto em prática, aos valores a serem encarnados” (p. 125).

A não neutralidade se revela pela busca, dos professores, de solução dos problemas de relacionamento com os estudantes, levando a mobilização dos professores a procurarem, nos cursos de formação continuada, algo que os ajudem, a fim de criarem um ambiente que consideram adequados para lecionar.

Temos notado que os professores de alguma forma sempre esperam que lhes dêem uma solução – rápida – que melhore essa situação. Acreditamos que a compreensão da relação histórica da escola com a sociedade é que permite ao professor se relacionar de outra forma no seu trabalho e, conseqüentemente, com os estudantes. Paulo Freire pode iniciar esse processo de compreensão.

> Sabemos que não é a educação que modela a sociedade mas, ao contrário, a sociedade é que modela a educação segundo os interesses dos que detêm o poder. Se é assim, não podemos esperar que a educação seja a alavanca da transformação destes últimos. Seria ingênuo demais pedir à classe dirigente no poder que pusesse em prática um tipo de educação que pode atuar contra ela. Se se permitisse à educação desenvolver-se sem fiscalização política, isso traria infindáveis problemas para os que estão no poder. Mas as autoridades dominantes não permitem que isso aconteça e fiscalizam a educação. (FREIRE; SHOR, 2001, p. 49)

No decorrer de sua prática profissional, os professores relatam que foram compreendendo o fenômeno educativo, as interdependências na fluência da relação ensino e aprendizagem, pontuando casos em que observam mudanças nos alunos: "Percebe-se que houve aprendizagem quando o aluno explicita relações de conhecimentos abordados em sala com sua vida fora da escola. Da mesma forma, nota-se que outros não alcançam esse desenvolvimento" (o).

No último item do *túnel do tempo*, no devir, todos os discursos, exceto um, apresentaram a forma otimista e esperançosa da educação escolar. A regularidade se concentrou na busca ao aperfeiçoamento de suas aulas, pontuando que o professor tem que inovar estratégias para superar as dificuldades, apesar da estrutura burocrática e opressora da situação atual. Apontaram também a necessidade de melhores condições nas salas de aula e na escola: número de alunos por classe, computadores e outros materiais didáticos.

Um discurso oposto, que mostrou pessimismo, foi justificado pelo desinteresse dos estudantes em aprender, sua "falta de perspectiva", ao descrédito na importância da escola no seu futuro, e que o estudante argumenta que a teoria não condiz com a prática. Por outro lado, esse mesmo grupo no momento anterior disse ter esperança, pois incentivava os alunos com situações diferenciadas.

Essas condições não são novas, Ira Shor na conversa com Paulo Freire diz:

> A maior parte dos que trabalham em salas de aula sabe que a docência exige muito de nós. É, também, uma atividade muito prática, embora tudo que ocorre em classe seja a ponta de um iceberg teórico. Mas os professores se interessam mais pela prática do que pela teoria. Apesar de toda prática ter um fundamento teórico e vice-versa, a maioria das pesquisas em educação não é de muita ajuda nas horas agitadas da sala de aula concreta. Os professores enfrentam aulas demais, alunos demais, e controle administrativo demais de tal modo que a necessidade de alguma coisa que funcione em classe é muito maior do que uma aparente necessidade de teoria. Entretanto, as preocupantes falhas do sistema escolar exigem novas idéias. Até mesmo professores sobrecarregados de trabalho têm curiosidade a respeito de alternativas. Querem saber como usá-las em classe, se o método do diálogo pode ser importante em sala de aula. (FREIRE; SHOR, 2001, p. 12)

Uma das frases exposta por outro grupo, após o que se mostrou desmotivado, foi: "quem acha que a Educação está perdida, ele é que está perdido" (o). Esse discurso foi proferido pela profissional em orientação educacional, justificando com exemplos de momentos de sucessos obtidos na sua prática docente, com alunos do terceiro ciclo fundamental (antiga 5ª série).

Uma das frases que evidenciou a esperança reflete um discurso que está já algum tempo no meio educativo: "resgatar o aluno para a educação" (o). No momento seguinte, pudemos melhor analisar essa expressão.

Relevante notar a explicitação de que "o novo assusta" (o). Notamos esse fato em outros cursos de formação contínua, mas que dificilmente são expostos. Se por um lado o professor busca *algo que dê certo*, por outro lado, por esse *algo* ser novo, acarreta uma insegurança à mudança.

Esse sentimento vem perdurando há pelo menos duas décadas e não é uma particularidade de professores brasileiros. Sobre isso, Ira Shor faz uma referência em relação ao EUA.

> Discutimos a transformação do professor mas creio que temos de examinar os temores que os professores têm de se transformar [...]. Temem perder o emprego por praticar a educação emancipadora, ao invés da pedagogia de transferência de conhecimento. Falam do risco que a utilização de uma ideologia de oposição causaria à sua carreira, se se envolvessem numa política de oposição dentro de suas instituições. Temem, também, o constrangimento de reaprender sua profissão diante dos estudantes. (FREIRE; SHOR, 2001, p. 67)

Ao mesmo tempo em que temem transformações, não querem mais as formas atuais e buscam mudar. O próprio professor que apresentava a síntese do seu grupo incitou os demais com as seguintes questões: "estamos gerando trabalhador para apertar parafusos? Vivemos de novo essa dualidade cruel, lidar com diferentes igualmente? A educação é só transmissão de conhecimento ou é afeto?" (o). Ele mesmo responde: "Também afeto. Se não tivéssemos ideal de melhora, o que estaríamos fazendo aqui?" (o).

De um modo geral, os sujeitos perceberam e verbalizaram as semelhanças nas fases apontadas pelos diferentes grupos. A diferença estava na particularidade, da história, mas a essência era a mesma, o que caracteriza o sujeito histórico pelo movimento lógico-histórico, ou seja, pela análise lógica da educação no histórico dos indivíduos.

Na reflexão histórica, os professores manifestaram seus incômodos e suas esperanças na relação com os alunos. Por meio de sua experiência como alunos, "as salas de aula eram silenciosas", o professor é quem "ditava as regras". Características essas da forma de abordagem do *currículo industrial* (LIMA, 2005).

Os professores foram se percebendo como produtos e produtores do sistema educativo.

2º momento[18]

Esse momento teve o objetivo de expressar o que entendemos sobre humanização ao mesmo tempo em que buscamos uma educação que humanize. Nesse sentido, encaminhamos uma proposta para reflexão do sujeito historicamente situado, ou seja, o indivíduo na atividade humana.

Iniciamos a proposta com o seguinte texto visualizado por todos:

> O humano é fundamental
>
> Parafraseando Vinicius de Moraes e recuperando Marx: Os idiotas que me perdoem, mas o humano é fundamental. O que é este tal de humano? Uma religião, uma filosofia? É material? Para que serve? Onde encontrá-lo? Em que *shopping*? É caro? O humano não é religião nem filosofia, nem ciência, nem técnica. Não é material, nem orgânico. Não brota em árvores, nem está embaixo da terra. Não é feito de átomos. No *shopping*, rareia. É caro ao coração, mas não está no mercado. Não custa nenhum tostão e não há dinheiro que o compre. É mais do que de graça: é uma graça. Da terra e não dos céus; do homem e não de Deus. Muita gente diz tê-lo ou sê-lo. Principalmente quem não o tem e não o é. Não tem partículas ou *quarks*. Não tem valor de troca, não provoca oscilações na bolsa, na cotação do dólar ou no risco país. Mas, existe.
>
> Se ele não aparece em nenhuma das cláusulas do FMI (é proibido aparecer!), em nenhuma análise econômica ou política: qual é a sua importância? O importante é a rosa, responde Gilbert Becaud. Sem o humano, não há mãe, pai, poeta, cientista, xaxado, farinha, computador e torcida do Corinthians. O humano é tudo, apesar de não

[18] Os dados utilizados referem-se às produções escritas dos professores.

> estar presente nos encontros dos sete grandes, dos vinte médios e das centenas de nanicos.
>
> (Elaborado por Luciano de Castro Lima)

Após uma breve interpretação coletiva do texto acima, foi solicitado uma reflexão individual escrita sobre o que é atividade humana. Organizamos as produções em três categorias inter-relacionadas.

A primeira refere-se a expressões que evocam a relação com órgãos sociais e com o "próximo".

Uma das formas de ver a atividade humana foi por meio das suas capacidades humanas de "conviver, compartilhar, entender, observar, opinar, escutar, ajudar, amar, gostar, aprovar, reprovar, repensar, familiarizar, harmonizar, refletir", ligadas aos órgãos sociais, ou seja, segundo Marx, órgãos da individualidade por meio dos quais se apropria da realidade humana (LEONTIEV, 1964?, p. 286).

Ainda nesse nível, a atividade humana se manifestou como: possuir as "necessidades básicas [...] o afetivo, o psicológico" e a "busca pela sobrevivência", representações estas, como disse Timiriazev em Leontiev (1964?), da luta pela existência; "satisfazer as suas necessidades, para que não tenha nem a indigência, nem a fome, nem a morte lenta…" (p. 282).

Na relação com o outro, existe um discurso de "respeitar", "conhecer", "ajudar", "olhar", "amar", "valorizar", "dedicar-se" ao, "pensar" no, "aprender" a, se "relacionar" com o "próximo", "conhecer a realidade do aluno". O sentimento aparente de assistencialismo em relação ao outro e para si – "aceitar ajuda do próximo" – revela a relação desagregada da coletividade e o seu contrário, a necessidade da coletividade, princípio fundamental na atividade humana.

Essa necessidade aparece mais também permeando as expressões:

> - Atividade é uma junção de ações de pessoas diferentes umas das outras que em benefício mútuo se unem em torno de um mesmo interesse.
> - [Atividade humana] É realizar algo que não é dado pela natureza. Onde haja envolvimento das pessoas na elaboração, criação e realização e tenha pessoas como objetivo.

Tal desagregação tem sua origem no dilaceramento da unidade humana proporcionada pela divisão em classes sociais, produto da desigualdade econômica e da exploração do homem pelo homem.

A segunda categoria constitui-se pela relação com a sociedade, como expressa em: "atividade humana se resume ao ser vivo, que age na sociedade de forma individual e coletiva, socializando com o seu meio ambiente (família, escola, trabalho, religião, etc.)".

A expressão de que "a atividade humana é desenvolver nossa capacidade de apropriar os conhecimentos que nos levem a socializarmos e conviver de maneira harmoniosa" caracteriza, a nosso ver, uma concepção da sociedade como universal, como a própria genericidade, não como meio de aquisição das aptidões desenvolvidas pelas gerações precedentes.

Essa concepção é gerada pela classe dominante, pois "possui não apenas os meios de produção material, mas também a maior parte dos meios de produção e de difusão da cultura intelectual e se esforça por os colocar a serviço dos seus interesses" (LEONTIEV, 1964?, p. 294). Devido a esse fato, manipula os meios, os acessos à cultura, à sociedade, ou seja, leva a "uma estratificação desta mesma cultura" (p. 294). Com isso, a classe dominada se aliena dos produtos da atividade humana.

O objetivo a ser atingido então fica sendo a sociedade e, portanto, a "necessidade de socializar-se". Concepção essa que revela que não é uma sociedade em que se identifica, por isso o esforço para desenvolver "ações de convivência com a sociedade" e ainda "dentro de um padrão preestabelecido".

Oliveira (2001) se refere a esse modo de compreender a sociedade, concebida na sua imediatez, nas relações mais próximas, como a vida do homem singular vista "como algo contraposto à totalidade social" (p. 19).

A terceira categoria compreende expressões de caráter menos imediato como também a relação com o trabalho e o conhecimento.

Aparece a concepção de atividade humana no sentido espacial e para todos em "É o que os seres humanos realizam em qualquer lugar do planeta, seja individualmente ou na coletividade [...]".

Relacionado a essa categoria, também há um sentido generalizante em relação à primeira categoria, como em "É estar construindo conforto para a humanidade, preparando para o mundo, ou seja, Planeta Terra. O bem para todos". Ou na declaração dos problemas mundiais, em "Se nós fossemos humanos [...], não precisaríamos enfrentar todos os problemas que existem no mundo como: armas, guerras, drogas, desigualdade social, violência, preconceitos".

No movimento do pensamento, os problemas apontados acima, quanto à destruição dos seres humanos, geraram o sentimento de esperança, os quais foram representados por: "sonhar, mesmo quando se parece impossível; atividade humana são os anseios e desejos [...], viver, tentando ser feliz".

A necessidade para uma atividade humanizadora foi expressa como: "dar significado a tudo que faz e participa" como também de "melhorar o seu meio e usufruir dele". A forma de realização se configura em "criar novos meios para se desenvolver", estar "em busca de aperfeiçoamento (individual e coletivo)".

Dar significado à produção humana compreende um desenvolvimento de aptidões que não são dadas pela aparência, na imediatez do fenômeno ou do objeto, como ele se apresenta no mundo, pois neste ele está somente posto. Para se apropriar, faz-se necessária uma atividade adequada, como disse Leontiev (1964?), que reproduza a essência do trabalho.

Se todos pudessem se apropriar da produção humana, das aptidões, o meio em que vivemos, a sociedade, seria melhor, mais humanizada, mas a divisão social do trabalho, além da exploração de uns pelos outros, separa o prazer do trabalho, a produção do consumo, ou seja, pertencem a homens diferentes. Assim, "globalmente a atividade do homem se enriquece e se diversifica, a de cada indivíduo tomado à parte estreita-se e empobrece" (LEONTIEV, 1964?, p. 294).

A comunicação necessária para o processo de apropriação foi refletida em dois pontos de vista: uma como necessidade, "é preciso diálogo", e outra como causalidade, ou seja, certas informações e seus meios estão resultando em um "desinteresse pela escola". Aqui temos duas interpretações: uma ligada aos jogos e entretenimento mais atraentes para o jovem estudante. A outra é a falta de estrutura tecnológica das escolas públicas que não permitem que os alunos mais pobres tenham acesso à tecnologia.

Dois professores expressaram que estão "tentando ser humano". Essa expressão faz-nos lembrar as palavras de Kosik (2002): "O homem se realiza, isto é, se humaniza na história. A escala em que se opera tal realização é tão ampla que o homem pode caracterizar o seu próprio agir como *inumano*, embora saiba que só um homem pode agir de modo inumano" (p. 237 grifo do autor).

Uma única expressão que relacionou atividade humana e história foi:

> A atividade humana está diretamente ligada com o progresso histórico e este por sua vez depende do desenvolvimento da educação. Desta maneira, a atividade humana está sendo prejudicada, pois nem todos os alunos têm acesso a uma educação de qualidade.

Leontiev (1964?) anunciava na sua época o papel da educação, tanto na sua forma geral como também da educação escolar, como necessária para apropriação dos resultados do desenvolvimento humano e para o desenvolvimento dos órgãos da individualidade, àqueles exclusivamente humanos.

O sentido mais geral da educação compôs-se nas afirmações:

> - Os seres humanos precisam ser educados (humanizados), deixarem de ser egoístas e materialistas, para que o efeito da atividade humana não venha a trazer a destruição do planeta.
> - É tudo que está relacionado com o mundo em que vivemos, o ser humano, o respeito, os limites. É o aprendizado que você adquire no decorrer da sua vida.
> - Estar sempre se aperfeiçoando, procurando estar sempre aprendendo, mas lutando pelos seus ideais.
> - É o indivíduo construindo conhecimento.
> - É adquirir conhecimento de acordo com suas necessidades.
> - É a busca do conhecimento, é saber lidar com o desconhecido a todo momento.

Nessas afirmações, encontramos tanto a necessidade humana de apropriação de conhecimento, como sua aptidão para construir conhecimento. Ao compormos essas afirmações com as outras categorias, ela pode revelar a atividade humana não compreendida na sua genericidade.

Concordamos com a análise de Leontiev (1964?) de que

> Quanto mais progride a humanidade, mais rica é a prática sócio-histórica acumulada por ela, mais cresce o papel específico da educação e mais complexa é a sua tarefa [...] Esta relação entre o progresso histórico e o progresso da educação é tão estreita que se pode sem risco de errar, julgar o nível geral do desenvolvimento histórico da sociedade pelo nível de desenvolvimento do seu sistema educativo e inversamente., (p. 291)

Uma afirmação especificou a relação da educação fora da escola "O aluno já vem de casa com uma base, um conhecimento (numérico, contar), através de jogos como (brincadeiras, esconde-esconde, amarelinha, bingo, etc.)". Esse pensamento é substancial para discutirmos a educação dentro e fora da escola. Pudemos fazê-lo durante o terceiro momento, durante o curso, ao abordarmos o pensamento empírico e teórico.

A expressão do trabalho como ocupação, ligada à atividade humana em: "Eu entendo, como uma ocupação, um trabalho", revela a subdivisão e despersonalização do trabalho gerando a forma de ocupação, apontada por Kosik (2002, p. 73).

Outras manifestações do trabalho relacionam a divisão deste na indústria com seus reflexos na consciência e no modo de vida das pessoas, no entendimento da atividade humana como: "trabalhar com pessoas. Não apenas tratá-las como máquinas, mas sim buscar uma convivência melhor em um processo de humanização".

Outras formas de expressar o trabalho com a atividade humana se efetiva na realidade imediata das pessoas.

> - É procurar entender o que está em seu redor. É procurar fazer tudo, sem atrapalhar a quem está a seu redor, fazer com que a sua atividade seja controlada de modo simples, com o seu comportamento satisfatório e amigavelmente em união na participação do trabalho e nas diversas formas de atividade social.
> - Respeitar, ser respeitado, viver o dia de hoje, sem se preocupar (tanto) com o amanhã.
> - Atividade humana é você poder mostrar a alguém a sua capacidade. Ajudar na formação do cidadão: sem pedir nada em troca

Essas expressões combinam com as demais, principalmente as mencionadas na primeira categoria, revelando a *práxis* cotidiana, em relação com a atividade humana, analisada por Kosik (2002) como a *práxis* fetichizada.

> Os fenômenos e as coisas fenomênicas se reproduzem espontaneamente no pensamento comum como realidade (a realidade mesma) não porque sejam os mais superficiais e mais próximos do conhecimento sensorial, mas porque o aspecto fenomênico da coisa é produto natural da *praxis* cotidiana. A *praxis* utilitária cotidiana cria 'o pensamento comum' – em que são captados tanto a familiaridade com as coisas e o aspecto superficial das coisas quanto a técnica de tratamento das coisas – como forma de seu movimento e de sua existência. O pensamento comum é a forma ideológica do agir humano de todos os dias. Todavia, o mundo que se manifesta ao homem na *praxis* fetichizada, no tráfico e na manipulação, não é o mundo real, embora tenha a 'consciência' e a 'validez' do mundo real: é o mundo da aparência (Marx) (p. 19, grifos do autor).

Após a reflexão individual, acrescentamos os interlocutores Leontiev (1964?) – por meio de uma síntese do seu estudo sobre o desenvolvimento humano, que consta no capítulo *O homem e a cultura* (p. 277-302) – e Moura – sobre atividade orientadora de ensino, conforme exposto no capítulo sobre esse assunto neste trabalho. As sínteses dos pensamentos desses autores foram expostas visivelmente e comentadas pela organizadora como também pelos outros professores do coletivo.

A seguir propusemos que em pequenos grupos discutissem a seguinte questão: quais seriam os princípios norteadores de uma Educação Matemática que humanize?

Esse momento permitiu-nos discutir como nos posicionamos diante da educação matemática escolar.

Devido à organização do encontro na sua relação com o tempo disponível, solicitamos somente que cinco grupos apresentassem uma síntese de suas reflexões, contudo todos entregaram suas sínteses individuais e do grupo escritas.

O reflexo da construção individual na produção dos pequenos grupos foi na relação com os órgãos da individualidade da forma:

- Interagir com o educando com amizade, confiança, respeito e amor. Resgatando a auto-estima quando necessário.
- Respeito – as diferenças e limitações
- Investigação – conhecimento prévio
- Apropriação – querer, tomar gosto ou necessidade.
- Liberdade
- Construir
- Motivação
- Saber conviver um com outros, respeitarem as diferenças.
- Ser solidário (compartilhar o conhecimento para que um ajude o outro).
- Atender e respeitar as aptidões.
- Não esquecer do relacionamento humano.
- Senso de justiça (ler e interpretar dados).
- Capacidade de mensurar.
- Sistematização do raciocínio.
- Poder de argumentação.

Às expressões dos professores, caracterizadas como princípios humanizantes, acrescentamos às de Paulo Freire (2002):

> É preciso que saibamos que, sem certas qualidades ou virtudes como amorosidade, respeito aos outros, tolerância, humildade, gosto pela alegria, gosto pela vida, abertura ao novo, disponibilidade à mudança, persistência na luta, recusa aos fatalismos, identificação com a esperança, abertura à justiça, não é possível a prática pedagógico-progressista, que não se faz apenas com ciência e técnica. (p. 136)

Notamos que as condições humanizadoras tornam-se de algum modo os objetivos dos professores, ao mesmo tempo em que revela a sua ausência na sociedade e, conseqüentemente, transforma a função da própria escola. Os sentimentos de luta dos professores para conseguirem lecionar, verbalizados principalmente no primeiro momento, referente à elevada carga horária que os fadigam, a desagregação do próprio trabalho, o reflexo da violência social na sala de aula, ampliam o universo da luta social.

Asbahr (2005), ao analisar a desintegração entre sentido pessoal e significação nas condições objetivas do trabalho pedagógico do professor de escola pública, aponta para a luta deste para manter o corpo são e a mente sã.

Lembrando também que a afetividade não é excludente do processo de desenvolvimento cognitivo, é condição humana. No processo da educação escolar, significa que não avaliamos um desempenho escolar por querer bem ao estudante, mas por meio de sua atividade específica, a atividade de estudo.

Outro reflexo da produção individual, a do grupo, relacionada com os princípios humanizadores da educação matemática, referiu-se à *práxis* cotidiana. As seguintes expressões foram apontadas:

> - [...] falar a língua do aluno, comunicar para ensinar [...] perigo ao fugir do rigor matemático. Ex. vértice (cantinho).
> - [...] não cobrar dele conhecimento que ainda não estão presentes no seu cotidiano.
> - Diante das necessidades, trabalhar atividades que envolvam o cotidiano de várias maneiras.
> - A relação de fora com o que está aprendendo (o que o pedreiro usa, marceneiro, no açougue, na feira, no supermercado, etc.).
> - Que o aluno trabalhe e pesquise a realidade do momento. O seu dia-a-dia, e tenha com isso um relacionamento com a necessidade do cálculo, da pesquisa e do conhecimento da sua vivência.

Trabalhar o dia-a-dia na sala de aula pode levar a uma abordagem da práxis utilitária, cotidiana, como estudada por Kosik (2002), mencionada acima. Isso não significa recusar essa prática, mas sim aprofundar-se, pois o objetivo da educação escolar é o desenvolvimento do pensamento teórico, a busca da compreensão do fenômeno. Tal desenvolvimento significa ir além da sociedade, se ver como gênero humano.

A relação da sociedade com o conhecimento foi refletida na Educação Matemática como:

> - Aprender através do conhecimento matemático a conviver e trabalhar na sociedade em que vive. Fazer com que o aluno entenda que a matemática não é uma disciplina isolada. O conhecimento matemático é necessário para o desenvolvimento das outras disciplinas (e vice-versa), para conhecimento e evolução da sociedade.
> - Entender e observar o mundo em que vive opinando e ajudando a transformá-lo. Despertar o aluno pelo interesse próprio e dos seus semelhantes.

Entendemos que a visão de mundo do professor se relaciona com sua visão da Educação Matemática. Ao conceber a sociedade como totalidade e esta por vezes no aspecto das relações mais próximas, a escola acaba por ser vista como a extensão do lar, onde na sua maioria se realiza o conhecimento empírico.

Esse modo de compreender o estudante e a escola aparece nos discursos dos professores que denotam importância de se "conhecer a realidade do aluno". Essa idéia foi escrita em expressões semelhantes como:

- Resgate do conhecimento desse aluno (formação cultural dos pais);
- Usar o cotidiano dos alunos dando significado aos números;
- Educador colhe os dados dos alunos diagnosticando suas necessidades;
- Observação da realidade individual do aluno;
- Dar um conteúdo contextualizado de acordo com a realidade do aluno;
- Visão dos alunos sobre o que entende por matemática e suas expectativas para mudar.

Klein (1997) nos auxilia compreender por que hoje tantos professores se referem a essa necessidade. É o resultado da crítica à escola tradicional, ou seja, uma escola que se dirigia a um aluno abstrato, oriundo da classe dominante: "[...] distante, portanto, do aluno concreto que freqüenta a escola pública brasileira, cuja clientela é basicamente, formada por alunos ligados à classe trabalhadora" (p. 40). Com isso, uma interpretação foi dada considerando ao que é imediato, a sua relação na comunidade – contrária à necessidade de considerar o homem concreto como homem historicamente situado.

Embora, como ressalta Klein (1997), a expressão "aluno da escola pública" (p. 41), possa sugerir "uma definição de sujeito a partir das determinações de classe", ele observou em artigos da literatura educacional que não é esse o percurso dos autores, e sim "uma definição do sujeito a partir das condições de vida imediata, ou seja, das condições locais da vida" (p. 41). Foi o que pudemos observar também ao longo do curso, quando essas expressões foram revelando mais particularmente seu conteúdo.

Outra expressão usada na síntese foi "dar significado". Não tivemos condições de explorar como o grupo a concebeu. Por meio da produção individual, acima descrita, observamos que relaciona o significado com a vida, no sentido individual e coletivo.

Salientamos que diante de condições objetivas, a não coincidência entre o significado, também denominado por Leontiev (1964?) por sentido pessoal, e a significação, que é o produto da humanidade, na consciência individual, gera alienação, devido à oposição entre ambos. (LEONTIEV, 1964?).

> A significação é a generalização da realidade que é cristalizada e fixada num vetor sensível, ordinariamente a palavra ou a locução. É a forma ideal, espiritual da cristalização da experiência e da prática social da humanidade. A sua esfera de representações de uma sociedade, e sua ciência, a sua língua existem enquanto sistemas de significação correspondentes. A significação pertence, portanto, antes demais ao mundo dos fenômenos objetivamente históricos (LEONTIEV, 1964?, p. 100).

Ao inserir a "significação" como princípio norteador da Educação Matemática, entendemos como sendo a apropriação da matemática desenvolvida historicamente pela humanidade. Isso é claro não quer dizer que o grupo tenha a mesma concepção, mas é indício da necessidade de compartilharmos significados, inclusive do que entendemos desse conceito.

Ainda referente às respostas dos grupos quanto aos princípios que norteiam uma Educação Matemática que humanize, alguns aspectos metodológicos foram apontados:

> - Música, gestos corporais, poesias, jornais, revistas.
> - Dobraduras, gráficos.
> - Brincar 'jogos de raciocínio'.
> - Através dos jogos e brincadeiras que se dá a humanização da matemática. Nas brincadeiras está explícita a sociedade em que a criança vive seu contexto histórico e sua relação com o mundo. Nos jogos, as regras que são impostas pela sociedade, a aceitação e validade depende da relação da criança com a família.
> - Mostrar fatos antigos e desenvolvimentos, os quais a matemática ajuda (resgate de valores).
> - Competência e habilidade

Exceto o jogo, as outras expressões não haviam sido apontadas anteriormente nas produções individuais. Esses aspectos referem-se às possibilidades metodológicas de desenvolver a relação ensino-aprendizagem, principalmente quanto a recursos materiais. A menção de competência e habilidade provavelmente se remete ao discurso dos Parâmetros Curriculares Nacionais[19].

---

[19] Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), documento oficial para a Educação Básica, se dividem em três textos: Os PCN de 1ª a 4ª séries do Ensino Fundamental, publicado em 1987; os PCN de 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental, publicado em 1998; e os PCN do Ensino Médio, de 2000. O texto dos parâmetros inclui a mudança de séries para ciclos, isso significa que os PCN de 1ª a 4ª séries são destinados aos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental; e os de 5ª a 8ª séries, aos dois últimos. Cada um dos dois PCNs para o Ensino Fundamental é composto de 10 volumes. Os títulos desses volumes não diferem substancialmente, sendo um dos volumes destinado à Matemática. Os PCNs para o Ensino Médio têm outra estrutura, dividem-se em quatro partes, são elas: Bases Legais; Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias; e Ciências Humanas e suas Tecnologias. Nesse nível de estudo, busca-se uma ampliação da interação entre as disciplinas. A parte do texto referente à matemática não explicita o conteúdo matemático a ser ensinado e sim as competências, habilidades e atitudes a serem desenvolvidas nos educandos. Em termos da organização disciplinar, a parte de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias é destinada às disciplinas de matemática, física, química e biologia.

3º momento[20]

O terceiro momento interagiu as sínteses dos anteriores com o movimento conceitual, a fim de refletir sobre a relação da matemática com a humanização. A intenção foi propor um curso sob princípios humanizadores na perspectiva lógico-histórica.

Iniciamos com a seguinte síntese como característica do sujeito histórico: “Nosso objetivo é estarmos sempre tentando sermos humanos [...], não sei quem são as Marias, Joãos [...] mas já conheço vocês” (o).

Na seqüência, expomos o que consideramos uma educação conceitual em matemática a qual foi realizada por uma das pesquisadoras[21]. Os princípios do modo de apropriação da matemática foram baseados em Caraça (1989) quando, no prefácio do seu livro *Fundamentos da matemática,* já anuncia *Duas atitudes em face da Ciência*

> *[...] no primeiro aspecto, a Ciência parece bastar-se a si própria, a formação dos conceitos e das teorias parece obedecer só a necessidades interiores; no segundo, pelo contrário, vê-se toda a influência que o ambiente da vida social exerce sobre a criação da Ciência.*
> *A Ciência, encarada assim, aparece-nos como um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação; aparece-nos, enfim, como um grande capítulo da vida humana social.* (CARAÇA, 1989, xiii, grifos do autor)

Como queremos nos apropriar da Ciência? Como vamos nos constituir mediadores para apropriação dos estudantes? O movimento conceitual refere-se à segunda atitude apontada acima por Caraça (1989) e é a que propomos no curso.

Uma outra síntese dos momentos anteriores foi relacionada com o desenvolvimento humano por meio de questões conceituais.

> O que é verdade? O que é um axioma? O que é verdade matemática? O que é concreto? O que é contextualização? O que é aprender? O que é ensinar? O que é pensar? O que é pensamento aritmético/algébrico/geométrico? Há diferença nesses pensamentos? Por quê? Como? (o)

---

[20] Os dados utilizados referem-se aos registros de observação.
[21] Representante do Grupo de Pesquisa Educação Conceitual - Faculdade Educação /Universidade Estadual de Campinas.

Muitas vezes, buscamos definições dadas, sistematizadas, e simplesmente a tomamos como nossa, sem mesmo pensar, refletir, discutir sobre elas. Essas questões foram feitas para romper com o modo mecanicista de captar a Ciência e dar lugar a um outro modo, permitir que o indivíduo mobilize seus conceitos, que os discuta, construa para si. Isso não quer dizer ficar na espontaneidade.

> A atividade do homem, quer considerada do ponto de vista individual, quer do ponto de vista social, exige um conhecimento, tão completo quanto possível, do mundo que o rodeia.
> Não basta conhecer os fenômenos; importa compreender os fenômenos, determinar as razões da sua produção, descortinar as ligações de uns com outros.
> Nisto, na investigação do «como?» do «porquê?» se distingue fundamentalmente a atividade do homem da dos outros animais (CARAÇA, 1989, p. 64).

A apropriação do movimento de criação e desenvolvimento de conceitos historicamente elaborados pela humanidade por professores e estudantes constitui nossos[22] princípios pedagógicos na luta contra a mecanização no ensino escolar. Outros pesquisadores também lutam para essa mudança, citamos Oliveira e Duarte (1992).

> Na medida em que se pretende que cada indivíduo possa/deva ser um agente consciente da sua prática social, é preciso que ele se torne capaz de dominar, o mais possível, o conhecimento elaborado existente na sociedade em que vive, inclusive o próprio modo de produzir esse conhecimento. (p. 92)

Durante a exposição de alguns tópicos da história da humanidade, principalmente decorrentes da criação e do desenvolvimento da indústria, foram incluídas relações com as expressões dos professores, ditas nos dois momentos precedentes e suscitando reflexões: "Estamos oferecendo de novo o que a sociedade quer?" (o).

A questão "como a tecnologia avançou tanto e o humano não?" (o) procurou organizar uma síntese reflexiva da história humana, da escola, dos sujeitos e as possibilidades.

Outros tópicos apontados nos momentos anteriores foram retomados propondo um outro nível de compreensão, como a afetividade. Concebemos esta não a do *coitadinho*, de fazer para o outro, subtraindo-lhe essa condição. Ao contrário, a afetividade é lutar com o

[22] Compartilham desses princípios o Grupo de Estudos e Pesquisa da Atividade Pedagógica da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo – GEPAPe – e o Grupo de Educação Conceitual ligado ao CEMPEM - Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática da Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (FE/UNICAMP).

outro para que todos tenham os mesmos direitos às apropriações das gerações precedentes e de objetivação para as gerações futuras.

> Cada geração começa, portanto, a sua vida num mundo de objetos e de fenômenos criados pelas gerações precedentes. Ela apropria-se das riquezas deste mundo participando no trabalho, na produção e nas diversas formas de atividade social e desenvolvendo assim as aptidões especificamente humanas que se cristalizaram, encarnaram nesse mundo.
> [...]
> O mesmo se passa com o desenvolvimento do pensamento ou da aquisição do saber. Está fora de questão que a experiência individual do homem, por mais rica que seja, baste para produzir a formação de um pensamento lógico ou matemático abstrato e sistemas conceituais correspondentes[…] De fato, o mesmo pensamento e o saber de uma geração formam-se a partir da apropriação dos resultados da atividade cognitiva das gerações precedentes. (LEONTIEV, 1964?, p. 284)

Finalizamos com questões que retomam idéias anteriormente apresentadas e sugerem uma reflexão, uma decisão no modo de ensinar: "contribuiremos para reprodução ou transformação social? Esconder ou pensar o que nos incomoda? Acalmar ou ensinar o estudante?".

Essas questões não eram para ser respondidas naquele momento, e sim para guiar ações que evidenciariam sua resposta.

Uma síntese

Os educadores puderam refletir por meio da particularidade as singularidades do sujeito histórico, por meio dos seus lugares sociais como filhos, estudantes e professores e o modo de interpretar a vida em cada um desses lugares, nas atividades dominantes que permeiam essas fases. Desse modo, foram construindo sua imagem de mundo, também na sua *quinta dimensão*, a dos significados. Nos estudos de Leontiev (*apud* Golder, 2004) sobre a percepção, além das três dimensões espaciais e a dimensão temporal, ele analisa uma *quinta dimensão*. A capacidade humana de diferenciar o estar diante da *coisa* e o estar diante da *imagem da coisa* é o princípio de criação e transformações das imagens de mundo na sua atividade mediatizada pelo mundo objetivo e real (GOLDER, 2004).

Martins (2004) também nos auxilia a sintetizar uma compreensão do desenvolvimento das emoções na estrutura da atividade humana, que permearam os relatos sobre as práticas educativas.

> Os estados emocionais do homem possuem uma história de desenvolvimento, pois em decorrência da complexificação da atividade humana foram também se complexificando e sofrendo diferenciações, adquirindo uma dimensão motivacional na medida em que sustentam o sentido do experimentado, podendo por esta razão tanto organizar quanto desorganizar a atividade. (p. 90)

O caráter de sentimento proveniente das emoções e dos afetos nas relações sociais dos professores foi revelado em diversos momentos também durante o curso. Embora sejam expressões individuais, sua natureza é sempre social e histórica, “originando-se de necessidades e vivências culturais e organizando-se em função das condições sociais de vida e das atitudes do homem perante suas experiências” (MARTINS, 2004, p. 90).

Inferimos que dessa forma as emoções também são mediadoras da formação dos sentidos pessoais que, por sua vez mediatiza as apropriações, as significações.

Por meio das manifestações, pudemos ter indícios das principais imagens sobre atividade humana, a constituição dos órgãos da individualidade, nas relações sociais imediatas, a necessidade da coletividade.

A sociedade concebida pelos educadores, não como meio, mas como fim, na compreensão da atividade humana, caracterizou o ocultamento da relação indivíduo-gênero humano. Essa imagem descaracterizou o direito à produção humana – material e ideal – como o caráter histórico do sujeito.

A forma de apropriação do conhecimento foi manifestada na sua generalidade, não propriamente em relação à matemática, como se havia questionado. As respostas indicam uma predominância na abordagem de ensino escolar baseada na cotidianidade, o que reforça o pensamento empírico de conceber a realidade. Pudemos analisar as concepções sobre a “realidade do aluno” compreendida como realidade imediata, baseada na sociedade e nas comunidades locais como totalidade. Concepção essa que pode ter sido constituída a partir de documentos como o Relatório de Jacques Delors destinado a UNESCO (Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura).

Sforni (2003), ao analisar esse relatório, salienta que o seu conteúdo aborda a formação do indivíduo para a vida no sentido de que o conhecimento possibilite uma compreensão do mundo que o rodeia e que o permita “viver dignamente, para desenvolver as suas capacidades profissionais” (p. 65 *apud* DELORS, 2001, p. 91). Numa sociedade de classes, significa colocar a educação pública a serviço do mercado de trabalho, no sentido da venda da força de trabalho e do pensamento empírico. Distante da compreensão do homem concreto, historicamente situado no gênero humano.

Ao buscarmos essa compreensão, colocamos algumas expressões verbalizadas durante o curso em outro sistema de relações, da atividade humana, do gênero humano, da humanização. Em particular, aproximando o sentido pessoal do trabalho dos professores com a significação do trabalho como atividade humanizadora.

Com isso, objetivamos contribuir com o desenvolvimento da consciência, pois

> [...] o desenvolvimento da consciência em cada indivíduo, não repete o processo sócio-histórico de produção da consciência. O reflexo consciente do mundo, não surge nele como resultado da projeção direta sobre seu cérebro de representações e conceitos elaborados pelas gerações antecedentes. Sua consciência é também o produto de sua atividade no mundo dos objetos [...]. (LEONTIEV, 1983, p. 23)[23]

A tomada de consciência dos participantes desta pesquisa como sujeito histórico foi a intenção almejada nesse encontro. A singularidade dos sujeitos históricos se caracteriza nesta pesquisa pela profissionalidade de educadores, ou seja, como participantes na formação do pensamento teórico dos estudantes.

Parece-nos plausível admitir que o desenvolvimento da consciência do homem concreto possibilita compreender a importância dos conceitos científicos e, conseqüentemente, da formação das imagens conceituais.

4.3.2 UNIDADE DIDÁTICA: SISTEMA DE NUMERAÇÃO

O objetivo desta unidade foi proporcionar a recriação dos nexos conceituais essenciais da criação da base numérica, partindo do movimento quantitativo da prática social. A intencionalidade se configurou na apropriação, no desenvolvimento de aptidões teóricas do pensamento numérico do indivíduo.

O movimento quantitativo como princípio do pensamento numérico, até sua forma organizada no conceito de base numérica e, conseqüentemente, no sistema de numeração, demonstra o percurso lógico desenvolvido pela humanidade. Para que o indivíduo se aproprie desse desenvolvimento, buscamos, a partir de uma história virtual, intitulada

---

[23] El desarrollo de la conciencia em cada individuo, no repite el proceso sócio-hisórico de producción de la consciência. El reflejo consciente del mundo, no surge em él como resultado de la proyección directa sobre su cerebro de representaciones y conceptos elaborados por lãs generaciones antecesoras. Su conciencia es también el roducto de su actividad em el mundo de los objetos (LEONTIEV, 1983, p. 23).

História do pastor Linus (descrita abaixo), a reprodução pelo indivíduo do conceito, sua imagem conceitual.

Antes da apresentação da situação-problema foi solicitado aos professores que se situassem historicamente num período em que o número não havia sido criado, conseqüentemente nem seu processo de escrita. E que durante o processo de solução discutissem o problema para o ensino escolar.

A partir desse momento, foi apresentada a seguinte história:

> A história do pastor Linus
> Há muito tempo atrás, o pastor Linus contava as suas ovelhas guardando uma pedra para cada animal. Certo dia, mostrou para seu vizinho Petrus a quantidade de ovelhas de seu rebanho. Petrus alertou o amigo dizendo-lhe que se o rebanho aumentar consideravelmente irá carregar muita pedra e acabou criando um problema para Linus: "Como contar a mesma quantidade com menos pedras?"
> (Elaborado por Ana Regina Lanner de Moura)

Observou-se que a história parte da correspondência biunívoca como conhecida[24]. Na seqüência solicitou-se aos participantes primeiramente a elaboração de uma solução individual, mas essa já não ocorreu, pois os professores já iam interagindo. Isso mostrou que o trabalho em pequenos grupos prevaleceu, alterando assim a dinâmica proposta.

Sendo assim, a cada grupo foram fornecidas algumas pedras, para que pudessem manipulá-las e vivenciassem os diversos aspectos do pensamento numérico na sua criação com o *numeral-objeto*[25] pedra.

Uma primeira solução para evitar carregar muitas pedras foi a troca do objeto. Ao invés de pedras, poderiam carregar um objeto que fosse mais leve, como folhas e gravetos. Essa solução foi rapidamente descartada pelos companheiros no sentido de que não resolveriam o problema, pois as folhas poderiam se desmanchar e os gravetos se quebrarem.

---

[24] Para abordagem didática da correspondência biunívoca com crianças, sugerimos a leitura de LIMA, L.; MOISÉS, R.P.; TAKAZAKI, M., 1994.
[25] "*Numeral objeto* é a representação do número por objetos" (LIMA, TAKAZAKI; MOISÉS, 1994, p. 145).

Na dinâmica dos comentários e de outras ações foi possível observar que a solução não era conhecida e teria que ser construída. A dificuldade foi percebida e sugestões começaram a ser verbalizadas e combinadas entre os integrantes do grupo. A negação do conhecimento dos sujeitos permitiu iniciar um movimento coletivo para encontrar uma solução.

A negação a que nos referimos é referente a lei da dialética. “Uma característica da negação dialética que a distingue da negação não-dialética é o fato de que a primeira desempenha o papel de elo de ligação entre o inferior e o superior... não é uma simples destruição desse ou daquele determinismo qualitativo...” (CHEPTULIN, 1982, p. 315).

A primeira idéia foi incorporada em outra solução no coletivo, a substituição de agrupamentos de pedras por outro material, como “graveto, riscos em osso” (d), “folhas” (r). Ou ainda, por pedras que tivessem qualidades diferentes, como ser “mediana, ser maior” (d), “ser mais escura/clara, mais arredondada, lisa/porosa” (r). Algumas dessas idéias continham informações vagas de algumas lembranças de aprendizagem sobre como certos povos antigos representavam suas contagens.

Os agrupamentos eram referenciados inicialmente ao objeto contado, ovelhas, na forma de desenho: “uma pedrinha equivalia a uma ovelha” (d), “uma pedra média a 10 ovelhas, pedra grande a 50 ovelhas” (d).

Em um outro momento os agrupamentos já eram feitos com o conjunto que conta: as pedras. Isso sugere a operação mental em outro nível de abstração do pensamento empírico. As quantidades de pedras que formavam os primeiros agrupamentos eram “2, 5, 8, 9, 10 e mão cheia”. Alguns usaram a mesma quantidade para os sucessivos agrupamentos, uma regularidade, mas nem todos. A justificativa para usar a mão cheia foi que naquela época não se conhecia “5” ou “10”. Pudemos então discutir sobre *senso numérico* (DANTZIG, 1970), a capacidade que também alguns animais têm de controle de pouca quantidade pela percepção.

A síntese elaborada no pensamento de equivalência de certa quantidade a uma qualidade, e a cada nova quantidade nova qualidade, também se realizou pelos nossos antepassados[26].

---

[26] Alguns exemplos podem ser encontrados no capítulo 3 – Invenção da Base, IFRAH (1998).

O encaminhamento para uma generalização foi a questão: “como ficaria se o ser humano fosse fazendo essas trocas sucessivamente?” (r). Essa questão permitiu mobilizar o pensamento para um segundo nível de generalização.

O aumento da quantidade de animais ocasionando conseqüentemente sucessivas trocas, sugeridas pelos grupos, permitiu a conscientização dos sujeitos que teriam muita informação a ser memorizada. Ou mesmo chegaria um momento em que a diferença no tamanho, ou na tonalidade, ou no arredondamento, ou na textura não seria perceptível, ou seja, a variação quantitativa da qualidade do objeto que conta.

O movimento qualidade–quantidade foi evidenciado no processo da elaboração de soluções. Primeiramente, na correspondência de certa quantidade por uma qualidade e, depois, o esgotamento desse processo. Ou seja, o aumento da quantidade de animais geraria, na solução apontada, a necessidade de fixar muitas relações entre quantidade de pedras e qualidade representativa no pensamento. Esse processo trata de uma elaboração mental, não está dado na natureza, o que exigiria uma complexidade de informações a memorizar e a operar.

No desenvolvimento do conceito, Caraça (1989) chamou de princípio da economia ao processo de criação de novas definições e de suas conseqüências que buscam “o menor dispêndio possível de energia mental” (p. 27). A conscientização desse dispêndio foi o motivo de busca de uma solução mais eficaz.

O problema para representar os agrupamentos caracterizados pela diversidade de numerais objeto, pela variação quantitativa de uma qualidade tomada como numeral objeto e pela falta de regularidade quantitativa dos próprios agrupamentos, constituiu um outro nível na construção do conceito. Ao mesmo tempo em que afirma o agrupamento como solução eficaz, gera outro problema.

Aos poucos alguns interagiam com seus companheiros de grupo, expondo alguma idéia na procura de uma solução conjunta. Um dos sujeitos fez referência a um curso que havia participado e o quanto havia de semelhança entre as situações, mas disse não se lembrar da solução. Ao relatar momentos fragmentados, o coletivo foi interagindo e juntos encaminhavam uma solução que superava a anterior, aproximando-se de um sistema numérico posicional. Os agrupamentos já compunham uma regularidade e a idéias que surgiam para a posição foram sendo aprimoradas.

A síntese alcançada foi um sistema posicional não da direita para esquerda como o nosso, mas com a unidade na extrema esquerda.

Continuando a discussão sobre a representação posicional de algumas quantidades, surgiu também a necessidade da recriação, no pensamento da função posicional ocupada no nosso sistema pelo zero. Esta não foi imediata, houve sugestões para colocar os símbolos mais afastados, indicando uma posição vazia[27].

Em uma das turmas, a relação com os símbolos matemáticos sempre aparecia nas discussões, dando indícios de identificação do numeral como número. A essa hipótese, a seguinte questão foi dita: "podemos considerar um sistema numérico posicional sem a escrita?". A resposta imediata foi que não. Com isso pudemos discutir a diferença sobre número e numeral, ampliando o conhecimento sobre os diferentes numerais.

Ifrah (1998) relata a questão da representação juntamente com a necessidade de criação de uma base da seguinte forma "*como designar* (concretamente, oralmente ou, mais tarde, por escrito) *números elevados com o mínimo de símbolos possível?*" (p. 52-53, grifos do autor).

Essa questão também mobilizou o coletivo na busca de um saber, pois embora não tivessem uma resposta, algo os dizia que deveria haver, talvez por alguma lembrança relacionada à história ou mesmo a uma intuição.

Na discussão, chegamos ao ábaco, como outro numeral objeto. Uma solução eficaz, a princípio, que possui todo o conteúdo necessário de um sistema posicional sem a necessidade da escrita. Pudemos ampliar as discussões também sobre o limite do ábaco. A possibilidade de homem poder *fabricar* números tão *grandes* quanto queira, com dez símbolos que temos no nosso sistema numérico, foi um momento de conscientização do poder da abstração, nesse grau de generalização do numeral escrito.

Uma síntese

A interação entre os sujeitos para solucionar o problema proposto evidenciou aspectos de coletividade, demonstrados pela confluência entre as diferentes idéias manifestadas.

O conceito de correspondência biunívoca estava pressuposto nessa situação, ou seja, sua recriação não foi abordada, mas seu significado era do conhecimento de todos. A

[27] Para estudos mais detalhados sobre os entraves e as soluções de sistemas numéricos posicionais, sugerimos capítulo 8 – O passo decisivo em IFRAH (1998) e capítulo 2 – A coluna vazia em DANTZIG (1970).

correspondência *um-a-vários* (CARAÇA, 1989) pôde ser recriada pelos grupos. As soluções diferenciaram-se pelo numeral objeto escolhido e na quantidade agrupada.

A utilização de uma qualidade para representar certa quantidade constituiu um movimento entre quantidade e qualidade essencial no pensamento numérico, ou seja, um nexo conceitual do conceito de número.

A variação quantitativa da qualidade escolhida como numeral objeto (do agrupamento) repete o processo mental do senso numérico, só que para a grandeza escolhida – tamanho, tonalidade – um senso de grandeza. Este, por sua vez, se mostrou ineficaz como solução definitiva ao problema. Controlar uma variação discreta por uma variação contínua seria demasiado complexo.

Observamos que os conceitos de correspondência (um-a-um e um-a-vários), qualidade, quantidade, senso numérico, posição, foram mobilizados como movimento do lógico-histórico para criação do sistema de numeração.

Constatamos que o fato de operar com números não significa possuir o conceito para si, de ter se apropriado, ou seja, apresentar uma imagem conceitual da formação do número coerente com a significação no desenvolvimento histórico humano.

A atividade realizada pelos sujeitos permitiu essa apropriação: o desenvolvimento das aptidões sintetizadas no numeral que não estão evidenciadas no próprio numeral ou na realização de operações algoritmizadas com os mesmos.

As ações realizadas pelos participantes caracterizaram o movimento de uma imagem conceitual de número dominante pela forma para outra compondo forma e conteúdo. Ou seja, do numeral, para outras possibilidades, potencializando a internalização do processo de criação do número, caracterizado na reprodução dele, para transformação das imagens conceituais sobre o sistema de numeração decimal, a um nível conceitual, de conhecimento teórico.

O numeral teve suas transformações no curso, dos numerais objeto ao numeral escrito como forma fixada na linguagem que adquiriu uma estabilidade na evolução social. O fato de reconhecer somente sua forma escrita e verbal atual, operar suas técnicas algorítmicas pertencem a um conhecimento empírico e a matemática industrial de ensino. Esse movimento histórico estava refletido na forma inicial de os participantes tratarem o número, o que desencadeou a dificuldade e posterior superação.

Compreender o numeral como forma de representar o número, uma elaboração do pensamento, que possui a atividade humana encarnada permitiu adquirir sua real significação para o sujeito. O numeral escrito vai continuar a fazer parte da vida dos sujeitos, mas o que intencionamos foi que a imagem dele no pensamento do indivíduo tenha mudado sua significação e, principalmente, que possa mudar a forma de ensinar esse conceito aos estudantes.

4.3.3 UNIDADE DIDÁTICA: NÚMERO NATURAL

O objetivo dessa unidade foi proporcionar uma reflexão sobre a abordagem dos conjuntos numéricos no Ensino Médio, em particular do conjunto dos números naturais, como também compreender a essência desse conjunto.

As situações-problema iniciais sugeridas para ambas as turmas se diferenciaram quanto à forma. Em uma turma, foi proposto que discutissem e escrevessem o que poderia contemplar uma proposta de ensino dos números naturais para o Ensino Médio.

Na outra turma, a proposta foi a elaboração de um mapa conceitual a respeito dos números naturais. A intenção dessa forma de síntese foi propiciar ao grupo mais tempo para discutir as relações conceituais e o ensino desse conjunto. O modo de apresentação visual dessas relações na forma de um mapa, por meio de transparência e retro-projetor, pôde auxiliar na organização do ensino de um conceito.

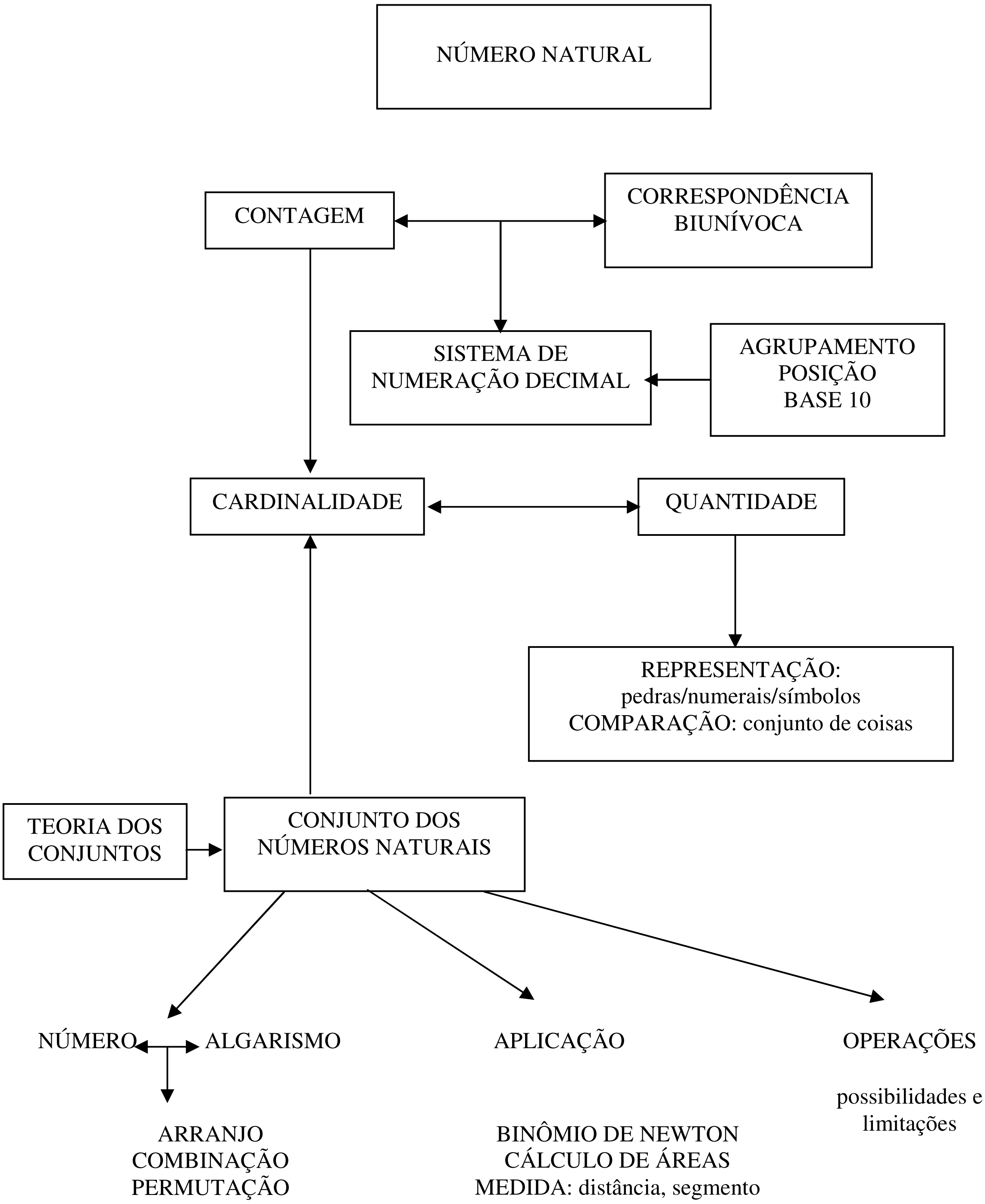
Sem nos determos ao estudo sobre mapas conceituais, foi mencionado que certos autores desenvolvem esses métodos de exposição, mas que no curso não pretendíamos fazer esse estudo e sim produzi-lo livremente. O importante era que os grupos apontassem as relações consideradas fundamentais com o conceito de número natural.

Para ambas as turmas, foram sugeridas as seguintes questões que poderiam orientar essa organização: qual a essência do número natural? Baseado em que o número natural foi criado? Em que situações o número natural tem sido utilizado? Em que situações o número natural se mostra insuficiente, por quê? Essas questões buscaram uma abordagem que fosse além daquela dos livros didáticos.

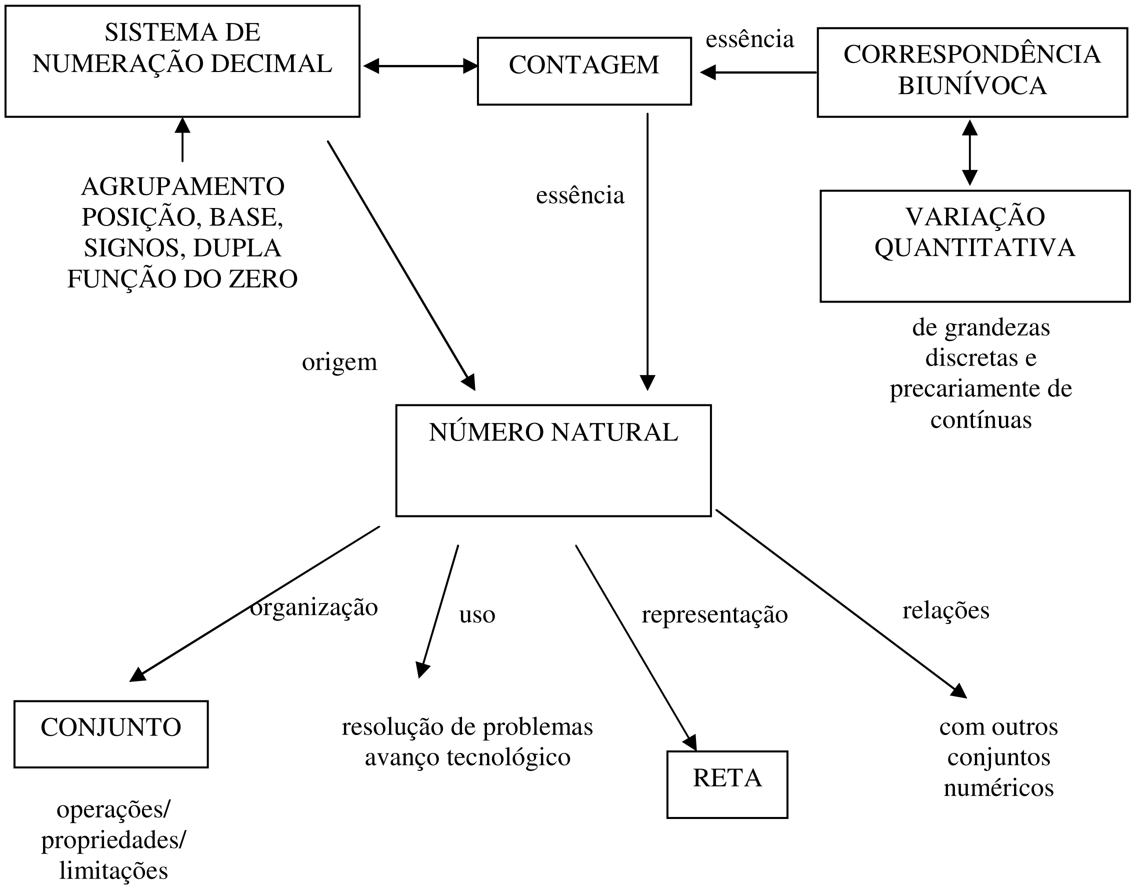
As situações-problema tiveram a intenção de movimentar o pensamento numérico na inter-relação dos sujeitos, pois ao exporem suas imagens conceituais do conjunto de números naturais, como também do seu ensino, poderiam refletir a respeito dos elementos essenciais nesse nível escolar.

Seguem os mapas conceituais produzidos como síntese do coletivo-classe em cada turma:

MAPA-SÍNTESE 1



MAPA-SÍNTESE 2



É comum em livros didáticos, destinados ao Ensino Médio, iniciarem com uma revisão dos conjuntos numéricos, iniciando pelo conjunto dos números naturais. Esse procedimento foi refletido em algumas propostas apresentadas: “Podemos então programar os conteúdos iniciando com a Teoria dos Conjuntos”. Acrescentou-se a essa idéia um desenho de certa quantidade de objetos circulados por uma linha fechada, representando um exemplo de conjunto típico da abordagem inicial sobre conjuntos. A representação da reta foi abordada, não no sentido de construção pela medida de segmentos, mas sim relacionada com os numerais da régua, ou seja, a correspondência entre os números naturais com a representação dos numerais na régua.

Ainda relacionada à idéia de revisão, uma justificativa desse procedimento nesse nível de ensino foi pelo esquecimento do aluno desse conteúdo: “Os alunos no Ensino Médio já conheceram os números naturais, porém já esqueceram da história sobre a criação dos mesmos e principalmente do número zero”. Pudemos interpretar que a relação com a história da criação dos números naturais referida não se relacionava à história propriamente da formação do conjunto dos números naturais e sim do sistema de numeração devido à continuação do texto: “Os números naturais são formados pelo sistema decimal, usando agrupamento e posições [...]”. Outras respostas possuem a mesma concepção como: “Os números naturais surgiram devido à necessidade de cada povo [...]”; “O número natural foi criado pelo princípio de agrupamento” (o).

No sistema de ensino, muitas vezes há a concepção de que quando o aluno aprende a contar, nos primeiros anos escolares, conseqüentemente conhece o conjunto dos números naturais. A imagem conceitual da associação do sistema de numeração com o conjunto dos números naturais ficou evidenciada também na expressão: “Durante o percurso histórico, a partir dos povos primitivos e através dos tempos, surgiu a necessidade de criar outras estratégias para facilitar e agilizar o registro, bem como, o cálculo, surgindo assim o sistema de numeração natural. Esse sistema é posicional [...]”

Essa concepção justifica as expressões dos professores de que não há problemas com o ensino dos números naturais, ou ainda o fato de alguns não abordarem esse tema no Ensino Médio.

O conjunto dos números naturais surgiu somente no século XIX, com a formalização que desencadeou nos axiomas de Peano, e sua necessidade difere substancialmente da formação do sistema de numeração. A não diferenciação desses conceitos reflete no ensino imagens conceituais contrárias ao movimento do conceito desenvolvido pela humanidade.

Na discussão, percebemos que muitos professores não lembravam ou nunca ouviram falar sobre os axiomas de Peano, alguns perguntaram onde poderiam encontrar tal informação.

O reflexo do pensamento lógico-formal foi exposto nas características estruturais do conjunto como “[...] os números naturais não possuem o oposto ou simétrico”. O cálculo de área citado no mapa-síntese 1 como aplicação não é específica do domínio dos naturais, e o Binômio de Newton, também citado, se relaciona pela utilização dos naturais no expoente na abordagem do livro didático.

Ainda em relação à aplicabilidade, alguns professores apontaram nos seus planos que o professor “[...] deve criar condições para que o aluno seja capaz de desenvolver os conceitos em sala, refletindo e aplicando em sua vida cotidiana”. O conhecimento necessário que reflete também o conceito de cotidianidade, do aluno abstrato, está inserido na afirmação:

“[...] ter o conhecimento global de todos os números e todas as operações aritméticas a eles concernentes. Com isso, facilitaria a vida do dia-a-dia [...]”.

Um movimento contrário à cotidianidade e focado no lógico-formal ocorreu na menção da insuficiência dos naturais como sendo os números negativos, frações e decimais.

Discutimos as relações apresentadas nos mapas dos grupos, buscando aprofundar o que eles pensavam ser essencial para o conjunto dos naturais. A contagem foi a característica essencial mencionada pelos participantes e apontada em um dos planos da seguinte forma: “A essência do número natural é estabelecer um método de contagem” (o) e, em outro, “a essência é a contagem ou seja correspondência biunívoca”.

A partir da caracterização da essência apontada, para aprofundar a discussão, foi feita a questão: “o que seria a contagem no conjunto dos números naturais?” Os conceitos mencionados e discutidos foram: quantidade, sucessor, ordem, e a correspondência biunívoca.

Durante a discussão nos pequenos grupos, um deles havia comentado sobre sucessor, mas esse conceito não havia aparecido na síntese do grupo. A organizadora na discussão sobre a contagem o retomou.

Ainda sobre a contagem, surgiu a questão: até quanto contamos? Essa situação pode também diferenciar a contagem em contextos práticos e teóricos. Outras questões vieram na seqüência como: os grãos da areia são infinitos? E as estrelas? E o universo? As discussões dessas questões mobilizaram mais os professores, que criaram falas sobrepostas entre perguntas e ensaios de respostas. Conversar sobre finito e infinito nesses questionamentos foi o direcionamento dado pelo coletivo.

Questões que partem dos fenômenos empíricos foram mais motivadoras para os professores, provavelmente pela afinidade com suas práticas educativas. A intenção de abordar a relação entre cardinalidade e ordinalidade não foi possível nesse momento e teve que ser repensada, considerando a organização geral do curso.

Outro assunto mencionado foi a dupla função do zero que estava em um dos mapas e que foi retomado no mapa-síntese. O zero foi explicitado pelo grupo na sua função posicional no sistema de numeração, e como *o nada*, (o). Nesse momento foi recomendada a leitura do livro do Ifrah, *Os números*. Posteriormente houve um professor que comentou ter gostado muito de uma parte do livro.

Uma síntese

Consideramos as imagens conceituais expressas nas respostas à situação-problema em três categorias: uma vinculada à unidade didática anterior; outra, à aplicabilidade, na própria matemática ou não; e uma terceira, à estrutura do conjunto, ao lógico-formal.

Os mapas-sínteses acima contêm os elementos dessas categorias. Na primeira, além de diretamente mencionado o sistema de numeração decimal, há agrupamento, base dez, signos, quantidade, pedras, numerais, símbolos, dupla função do zero, correspondência biunívoca, contagem como os elementos indicativos da unidade didática anterior.

A segunda representa os exemplos dados de aplicação: Binômio de Newton, medida, avanço tecnológico.

Quanto à estrutura, foram apontadas operações e propriedades dos números naturais e relações conjuntivas como pertinência, interseção, união, subconjunto, sintetizado em um dos mapas por "teoria dos conjuntos".

Ao discutirmos as sínteses, pudemos retomar sobre o ensino dos números naturais no Ensino Médio, não no sentido de revisão, mas ampliação de conhecimento, discutindo sua criação e sua essência. A intenção era discutir a identificação da criação do número com o número natural que gera apropriações incoerentes com o desenvolvimento desses conceitos.

A discussão foi breve e não houve interesse em aprofundar esse conhecimento nesse momento. O movimento talvez simples de "Reunir coleções distintas em uma única, e prever o resultado", seja realmente *banal* como disse Costa (1929), mas "é a gênese do pensamento matemático" (p. 73).

Abstrair o movimento quantitativo da prática humana, para um nível mais elevado, é uma sugestão para reflexões posteriores, para a mobilização do pensamento teórico. Como exemplo, podemos avaliar a mudança da relação qualitativa no contexto prático e no contexto de conjunto ao introduzir a seguinte questão: qual a qualidade entre os números naturais no conjunto? Seria uma forma de criar, em situação de ensino-aprendizagem, uma investigação dos elementos que se tornaram essenciais para a formalização da matemática. A partir dessa análise reflexiva, essa questão foi acrescentada na unidade didática número racional.

Ao observarmos os encaminhamentos nos planos propostos e os direcionamentos das discussões, percebemos a significação particular dos sujeitos na abordagem do número natural no Ensino Médio relacionada e a imagem conceitual deste. Interpretamos o salto das aplicações cotidianas do número natural, como contar objetos, para a sua formalização, como a não apropriação do lógico-histórico desse conceito. Isso foi evidenciado na relação entre seqüência numérica como produto da contagem e sua relação conjuntiva sem o conhecimento do por que, no desenvolvimento humano, se privilegiou certas relações e não outras.

Para um aprofundamento desse percurso, sugerimos o estudo de alguns discursos históricos como de F. L. G. Frege (1848-1925), G. Peano (1858-1932), ou mesmo J. W. R. Dedekind (1831-1916)[28] sobre a formalização do conjunto dos números naturais.

Considerando o objetivo do curso, optamos nesse momento não continuarmos abordando especificamente os naturais, pois devido à literatura conhecida de outras pesquisas, e mesmo do próprio lógico-histórico do conceito de número, essa questão foi retomada nas contradições entre discreto, densidade e contínuo. Por esse motivo, utilizamos esses conceitos para nomear uma das unidades didáticas.

É sempre possível retomar essa discussão, pois o pensamento é atemporal e os motivos que o fazem movimentar-se em um sentido ao invés de outro depende da complexidade da prática humana. Libertar o pensamento não é uma tarefa fácil para nós, seres objetivados da alienação da produção do conhecimento.

4.3.4 UNIDADE DIDÁTICA: MEDIDA

Inserido na perspectiva da atividade orientadora de ensino, foi elaborada uma proposta cujo objetivo foi propiciar reflexões sobre metodologia de ensino, tomando por tema o conceito de medida e mobilizar o pensamento numérico na origem da fração, ligada ao conceito de comensurabilidade na diversidade em que as grandezas se apresentam em objetos físicos.

A situação desencadeadora apresentada foi chamada de *Laboratório de Medida*, tal nome buscou, na significação social, alcançar a necessidade de certo rigor no processo de medição. A intenção foi mobilizar o pensamento no sentido dos nexos conceituais do conceito de medida e nele as significações do número.

---

[28] Sobre esse assunto sugerimos Caraça (1989) e, para análise da concepção formalista o capítulo Teory of sets, Bourbaki (1994).

A organização da proposta procurou reconhecer as qualidades quantificáveis e não quantificáveis e mensurar qualidades de objetos sem a utilização de instrumentos de medida industrializados, possibilitando desenvolver o conceito de comensurabilidade.

A cada grupo, de mais ou menos cinco pessoas, foram entregues os seguintes objetos: um retalho de tecido, um pedaço de fio de barbante, um dado, um copo com água, uma tesoura, dois tubos de guardar filme de máquina fotográfica – um contendo areia e outro pedras –, uma folha retangular de papel na qual estava escrito o conjunto de materiais. Um dos grupos tinha um objeto diferente, um pedaço de madeira em forma cilíndrica. Uma das turmas recebeu prendedor de roupas em vez da tesoura.

As quantidades de pedras e de areia, os volumes de água, os comprimentos dos pedaços de barbante e as formas dos retalhos de tecido não eram iguais para todos os grupos.

A intencionalidade na escolha dos objetos foi variar algumas qualidades como de rigidez, espessura, cor, tamanho, forma, natureza e a intensidade das qualidades. Com isso, poderíamos discutir aquelas intensidades nas quais se desenvolveu métodos de medição e a conseqüente fabricação de instrumentos de medida. Desencadear as relações entre necessidade de medir, elaboração de instrumentos, atividade humana e número nortearam os propósitos dessa organização.

Os objetos folha de papel, dado, tubo de filme, copo e fio de barbante apresentam formatos que comumente servem de modelo dos entes geométricos: cubo, retângulo, cilindro, tronco de cone e linha respectivamente. Alguns retalhos de tecido tinham formas mais semelhantes às geométricas que outros. A escolha buscou propiciar a manifestação de imagens conceituais sobre a relação objetos geométricos e objetos físicos, propiciando discutir conhecimento teórico e conhecimento empírico.

Areia, pedra e água formam um grupo de objetos naturais com formas não regulares para os padrões geométricos. Principalmente nesses três objetos, buscou-se possibilitar a relação do contínuo e do discreto do objeto (água – areia/pedra), suas grandezas e a forma de comercialização.

A proposta com os dois grupos de objetos mencionados acima previu também retomar reflexões sobre objetos naturais e objetos de produção humana, abordada no módulo de geometria desse curso.

A tesoura e o pregador (ou prendedor) de roupas tinham a especificidade da variação angular, além do formato irregular para os padrões geométricos, que observaríamos como os professores captariam o objeto pelo pensamento.

Em seguida foi apresentada a proposta:

> <u>Laboratório de medidas</u>
>
> Elaborar um relatório que contenha:
>
> • Tudo o que pode ser medido e o que não pode ser medido de cada objeto dado;
>
> • Realizar as medidas possíveis e descrever o procedimento, anotando também o resultado da medida;
>
> • Caso haja algo que não pôde ser medido, relatar o porquê e também sugerir como poderiam ser realizadas tais medidas;
>
> • Apresentar uma conclusão que contemple o que é medir.

Foi dito que não poderia ser utilizada régua, outro instrumento não foi mencionado, por ser pouco provável que alguém o possuísse naquele momento.

A não imediatez do início da elaboração do relatório, os questionamentos, o comportamento entre os grupos, no sentido de buscar uma referência para solução, formaram um conjunto de indícios de que a proposta era diferenciada em relação ao que eles estavam acostumados, caracterizando assim uma situação-problematizadora.

A interação não somente com o pequeno grupo, mas se expandindo com o coletivo no início da proposta, pode ser indício da organização da própria atividade coletiva. Além disso, a escolha de iniciar por meio da segunda questão indica a negociação dos motivos individuais no coletivo, que não dependia mais da forma proposta pela organizadora criando, assim, o próprio caminho para uma autonomia.

O objetivo inicial focado na metodologia de ensino foi redimensionado naquele momento, incluindo a necessidade de resolver um problema que se caracterizou em como *medir sem régua*.

Embora fosse conhecido o trabalho de Catalani (2002), na abordagem da medição sem régua – com crianças – para desenvolver os nexos conceituais da fração, o esperado foi que os professores resolvessem brevemente o problema da unidade de medida, mas a atividade coletiva orientou o encaminhamento para as próprias necessidades.

Um dos grupos iniciou o relatório com o juízo:[29] "tudo pode ser medido desde que se estabeleça a unidade padrão de medida". Esse pensamento nos remete as bases filosóficas da Escola Pitagórica, ao juízo de que *tudo é mensurável*.

Alguns grupos diziam não saber como medir sem os instrumentos industrializados como régua e balança graduadas ou mesmo um padrão pré-definido: "não dá para medir, não há um padrão".

O juízo verbalizado nos indica a contradição na forma de pensamento possibilidade-impossibilidade, ao mesmo tempo em que seu conteúdo evidencia a necessidade de um conhecimento, um padrão de medida.

O dilema aconteceu na tensão entre o conhecido – medir com instrumentos dados socialmente – e o desconhecido – medir sem eles.

Para avançar a níveis superiores de generalização, Caraça (1989) orienta a passagem pelo dilema, a formulação de caminhos no desenvolvimento do conceito diante de uma dificuldade. Nesse dilema, o que está em jogo é o ponto nevrálgico ou ponto fraco no qual reside uma negação de tal estágio do conceito. A negação é indicativa da necessidade de superação e, para isso, há de se negar tal negação.

O ponto fraco se caracterizou nas imagens conceituais sobre medição. Nesse movimento do pensamento, surge a necessidade de negar o conhecido. Negar o processo de medir com instrumento não significa ignorar, abandonar tal conhecimento, mas sim mobilizar, na atividade mental, as ligações[30] possíveis entre o processo conhecido e a nova situação. A negação dessa negação, ou seja, negar a impossibilidade de se medir sem régua, descortina um campo de possibilidades para o pensamento, a superação, o desenvolvimento de um conhecimento novo para si. Este exige que o indivíduo entre em atividade cujo motivo direcione suas ações externas e internas para o desenvolvimento de uma solução ao problema.

A situação particular de medir aqueles objetos exigiu dos participantes a mobilização de conceitos, procedimentos e relações que transformariam aquele problema particular num problema geral, ou seja, como criar um instrumento de medida, como *recriar a régua*.

---

[29] O juízo compreende idéias que envolvem aspectos gerais e essenciais do objeto, que relacionam o objeto com suas propriedades (KOPNIN, 1978).

[30] Nem toda relação é ligação, a relação é uma interdependência com certa autonomia, a ligação não, quando há modificação em um dos fenômenos supõe-se certa transformação do outro (CHEPTULIN, 1982).

A organização da proposta permitiu a passagem das singularidades do processo de quantificar grandezas, por meio particular dos objetos expostos, a um grau de generalidade. O retorno ao particular a partir daí foi objetivar as elaborações internas, a criação da régua no pensamento.

O processo de criação da unidade artificial[31] de medida não ocorreu de forma tranqüila e imediata, ao contrário, foi turbulenta e demorada. Os grupos se comunicavam procurando dicas, mas ninguém as possuía de início, caracterizando uma necessidade do coletivo-classe. Ao mesmo tempo, não desistiam e comentavam que a proposta era muito boa para levar para os alunos.

Aos poucos, reliam os itens da proposta discutiam nos grupos, questionavam uns aos outros, iam se articulando até o momento em que começaram a construir suas soluções. As respostas escritas no relatório de medidas foram organizadas na tabela que segue, a qual foi uma readaptação do modelo idealizado por um dos grupos. Algumas letras e abreviaturas representativas da unidade de medida foram utilizadas na tabela para facilitar a visualização, embora nem todas tenham sido usadas dessa forma no relatório dos grupos. Essas especificações encontram-se na descrição da simbologia utilizada após a tabela.

[31] *Unidade artificial* é a unidade criada para o processo de medição, diferindo da unidade de contagem que se encontra naturalmente separada uma da outra (LIMA; MOISÉS, 1998).

TABELA SÍNTESE DAS MEDIDAS[32]

<table>
<tr><th>Objeto</th><th>medidas possíveis</th><th>Medida</th><th>medidas não possíveis</th><th>procedimento/ instrumento sugerido, justificativa</th></tr>
<tr><td rowspan="7">dado</td><td>volume</td><td>$1u^3$, $1/8''^3$
1 aresta do dado</td><td rowspan="7">massa</td><td rowspan="7">balança</td></tr>
<tr><td>área da face</td><td>$1u^2$, 1 cm^2</td></tr>
<tr><td>comprimento das diagonais</td><td>$\sqrt{2}$</td></tr>
<tr><td>quantidade de faces</td><td>6, 6</td></tr>
<tr><td>comprimento, altura, largura (ou profundidade)</td><td>1u, 1/2”, 1cm, ½“f, 1 ds, uma medida de polegada pequena</td></tr>
<tr><td>massa</td><td>5 g</td></tr>
<tr><td>()</td><td>6 faces de 1 dedo</td></tr>
<tr><td rowspan="6">retalho de tecido</td><td>perímetro</td><td>24u, 11w, 20,5 ds = (9x6x5,5) ds, 16 un</td><td rowspan="2">volume</td><td rowspan="2">falta instrumento para medir a espessura do tecido</td></tr>
<tr><td rowspan="2">área</td><td rowspan="2">24+$\sqrt{5}$u, 10 dados na base e 4 na altura=20 faces do dado, 8 faces do dado, 14 pl, 1,875 “^{2}, 35 w^2, 91cm^2, 7 unidades quadradas</td></tr>
<tr><td>massa</td><td>balança</td></tr>
<tr><td>massa</td><td>1g</td><td rowspan="3">espessura</td><td rowspan="3">paquímetro, desprezíevel (irregular)</td></tr>
<tr><td>espessura</td><td>2mm</td></tr>
<tr><td>comprimento/largura</td><td>1palmo/5ds,13cm/7cm, 5”f/3,5”f, 5/2,5 dobra do fio</td></tr>
<tr><td rowspan="6">areia</td><td rowspan="4">volume</td><td rowspan="4">“relativo” 2u de diâmetro e 1u de altura, 3,14/8w^3, 1,5 cm^3, 1/10 do tubo, π/16 “^{3}</td><td>massa</td><td>balança</td></tr>
<tr><td>areia</td><td>copo graduado</td></tr>
<tr><td>densidade</td><td>falta valores</td></tr>
<tr><td>área</td><td>Pelo formato do grão de areia</td></tr>
<tr><td>massa</td><td>8g, 10 prendedores</td><td>volume</td><td>falta instrumento para medir a espessura</td></tr>
<tr><td>()</td><td>7ds de largura x 1dedo altura</td><td>volume</td><td>latas, caminhões</td></tr>
</table>

[32] Para facilitar a visualização, na tabela não foi usada aspas como marca textual informativa de que se trata de texto da fonte 2 (produções dos professores). Todos os dados se referem a essa fonte.

<table>
<tr><th>Objeto</th><th>medidas possíveis</th><th>Medida</th><th>medidas não possíveis</th><th>procedimento/ instrumento sugerido, justificativa</th></tr>
<tr><td rowspan="10">tesoura</td><td>comprimento das lâminas</td><td>7u</td><td>perímetro, volume, área, massa</td><td>falta instrumento</td></tr>
<tr><td rowspan="2">comprimento (altura)</td><td rowspan="2">3”f, 3w, 3”,7ds, 9cm tesoura fechada e 10 -12cm aberta, $1\frac{1}{3}$ prendedor, 6pol</td><td>massa</td><td>Balança</td></tr>
<tr><td rowspan="2">medida interna e externa da lâmina</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>perímetro</td><td>20 ds</td></tr>
<tr><td>largura</td><td>1¼”, 4ds</td><td rowspan="6">espessura do buraco</td><td rowspan="6">não tem como calcular</td></tr>
<tr><td>abertura</td><td>0 a 2 ds</td></tr>
<tr><td>raio</td><td>½“f</td></tr>
<tr><td>massa</td><td>4 - 5 g</td></tr>
<tr><td>área</td><td>6 pl</td></tr>
<tr><td>espessura</td><td>¼ da altura do dado</td></tr>
<tr><td rowspan="3">fio de barbante</td><td rowspan="2">comprimento</td><td rowspan="2">20u, 21 ds, 15“f, 7 ½ prendedores, 30 pl, 1 palmo, 47 cm, 9”, 8 partes, 17 arestas do dado, 16w, 5 tamanho(compr. tesoura)</td><td>volume, área, espessura, massa</td><td>falta instrumento, ()</td></tr>
<tr><td>diâmetro</td><td>não tem como medir</td></tr>
<tr><td>espessura</td><td>1/13“f</td><td>massa</td><td>Balança</td></tr>
<tr><td rowspan="6">pedras</td><td>volume</td><td>“relativo” 2u de diâmetro e 2u de altura, $\pi/64$ “^{3}</td><td>volume absoluto, área, massa</td><td>falta de instrumento</td></tr>
<tr><td>quantidade</td><td>6, 9, 5</td><td>volume</td><td>Empuxo, precisaríamos de unidade de medida de massa (latas, caminhões), em m^3 através da quantidade de latas ou carrinho</td></tr>
<tr><td rowspan="3">massa</td><td rowspan="3">1 prendedor</td><td>pedra</td><td>falta instrumento</td></tr>
<tr><td>massa</td><td>balança, não posso comprar por quilo</td></tr>
<tr><td rowspan="2">espessura</td><td rowspan="2">não pode ser medida por que esse objeto é deformado</td></tr>
<tr><td>()</td><td>3 ds de largura x 1 dedo de altura</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>objeto</th><th>medidas possíveis</th><th>Medida</th><th>medidas não possíveis</th><th>procedimento/ instrumento sugerido, justificativa</th></tr>
<tr><td rowspan="6">água</td><td rowspan="4">volume</td><td rowspan="4">“absoluto” 2u de diâmetro e 3u de altura (copo), ½ tubo de filme, uma mão cheia, raios do copo: 1“f e 2/3“f , ‘altura inclinada 2,3“f’, ½“f de água, $3\pi/16$ “^{3}, $3{,}14/8w^3$, 0,025 litros</td><td>área, massa</td><td>falta de instrumento</td></tr>
<tr><td>água</td><td>copo graduado</td></tr>
<tr><td>profundidade</td><td>não tem como medir</td></tr>
<tr><td>densidade</td><td>falta valores</td></tr>
<tr><td>quantidade</td><td>½ copo de água</td><td rowspan="2">volume</td><td rowspan="2">copo, garrafa</td></tr>
<tr><td>()</td><td>11 ds de largura x 1d de altura</td></tr>
<tr><td rowspan="6">folha de papel</td><td>perímetro</td><td>24u, 21 ds, 1 fio, 20 faces</td><td rowspan="3">volume, massa</td><td rowspan="3">falta de instrumento</td></tr>
<tr><td>área</td><td>$35u^2$, 6x4 ds, 24 faces do dado ou 4 vezes o pedaço de tecido, 15 pl, 4,81”^{2}</td></tr>
<tr><td>espessura</td><td>1 fio de cabelo, 0,01 mm</td></tr>
<tr><td>massa</td><td>0,05 kg</td><td rowspan="3">espessura</td><td rowspan="3">paquímetro, desprezível</td></tr>
<tr><td>comprimento (altura)</td><td>25 cm, 2/15 fio, 3”f, 6pol, 6 faces, 2¾ “</td></tr>
<tr><td>largura</td><td>15 cm, 1/5 fio, 2”f, 4 faces, 1¾ “</td></tr>
<tr><td rowspan="6">prendedor de roupas</td><td>altura</td><td>2“f</td><td rowspan="6"></td><td rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>largura</td><td>1/3“f</td></tr>
<tr><td>profundidade</td><td>1/3“f</td></tr>
<tr><td>perímetro</td><td>1 vez o fio</td></tr>
<tr><td>área</td><td>4 pl</td></tr>
<tr><td>()</td><td>5 ds de largura x 1 d de altura</td></tr>
<tr><td rowspan="4">tubo de filme</td><td>comprimento da circunferência</td><td>3 vezes menor que o comprimento do fio</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>raio da circunferência</td><td>½“f</td></tr>
<tr><td>altura</td><td>½ fio, 1 ½“f</td></tr>
<tr><td>volume</td><td>10 partes de areia, 80 pedras</td></tr>
</table>

Simbologia:

w - comprimento do pino de madeira de forma cilíndrica.

u - comprimento da aresta do dado.

pol - largura do dedo polegar de um dos componentes do grupo, denominado pelo grupo de polegada.

” – polegada de um dos membros do grupo (comprimento que vai da ponta do dedo polegar até a primeira articulação).

“f - denominada pelo grupo de polegada feminina (pol. fem).

pl - área da projeção do dedo polegar, unidade denominada “polegar”.

d ou ds - considera a largura de um ou mais dedos da mão juntos, exceto o polegar, denominada dedos.

un – comprimento do lado de uma parte do retalho de tecido de forma quadrangular.

() – item não mencionado

No movimento de construção de uma solução, um dos grupos criou primeiramente a unidade de área. Esta foi representada na forma quadrada a partir do retalho de tecido, cuja forma era retangular. A medida dessa tira de tecido foi registrada como "7 partes" da unidade quadrada e justificada como "um todo dividido em partes iguais".

Essa unidade de área não foi utilizada como padrão para mensurar outras superfícies. A cada objeto, criou-se uma nova unidade que era parte do objeto. Para o fio, o procedimento de elaboração da unidade foi descrito da forma: "dividir o barbante em 8 partes iguais, sendo que, uma unidade de medida é estabelecida por 1/8 da medida total do barbante".

Esse procedimento se repetiu com outros objetos caracterizando uma relação parte-todo explorada, sobretudo nos livros didáticos para explicar a utilização da fração. Embora a fração e o conceito de medida se configurem um nexo conceitual, a essência dessa relação está na medida da "sobra", ou seja, a elaboração das subunidades[33]. Essa situação evidencia a diferença entre o lógico-histórico da formação do conceito com o lógico-histórico da sua apropriação pelo sistema de ensino deste.

Com as pedras, o mesmo grupo sugeriu enfileirá-las e considerar o comprimento da fila como unidade: "se agruparmos a quantidade de pedra dada na amostra experimental (5 pedras) e colocarmos de forma linear, teremos a medida de um segmento de reta, esse segmento será a unidade de medida padrão".

Aparece novamente a idéia de parte-todo e, além disso, o fato de enfileirar as pedras pareceu ser um procedimento de busca de uma continuidade, característica da grandeza de comprimento, no discreto.

Essa idéia está dialeticamente ligada ao contrário da criação da medida. Na criação da medida está presente o pensamento de *discretização* da grandeza contínua ao

[33] Sugerimos a leitura da pesquisa de CATALANI (2002) em relação à abordagem desse processo com crianças.

efetuar o processo de *contagem*, ou seja, quantas vezes a unidade cabe no tamanho do que se quer medir.

Outra síntese de medir objetos por meio de grandezas contínuas ocorreu com as pedras e a areia. Embora a quantidade de pedras nessa proposta fosse pequena, os participantes generalizaram para qualquer quantidade de pedras, ou seja, utilizaram a grandeza contínua *volume* para medir um conjunto de *muitas* pedras.

Brolezzi (1996) ao analisar historicamente a relação contagem-medida e a noção de *muitos* observou que:

> Grandezas contínuas foram desse modo assimiladas pela linguagem humana, na medida em que se viam conjuntos "muito grandes" como contínuos. Um conjunto com um número "muito grande" de elementos tende a revestir-se com aparência de *continuidade* (pense-se, por exemplo, na areia da praia, cujo montante não se avalia pela *contagem* do número de grãos, mas pela medida, utilizando noções de volume ou massa). (p.17, grifo do autor).

A medição de muitas pedras por volume está dada nas relações comerciais da vida dos participantes. Dessa forma, ao dizerem que a medida se realiza "através da quantidade de latas ou carrinho", explicitam a forma de comprar, vender e transportar pedras para edificações de moradias. Nessa prática social, encontramos muitas vezes a frase: "o metro de pedra custa [...]", em vez de: "o metro cúbico [...]" Esse contexto também contém o juízo explicativo "não posso comprar por quilo," para justificar a não realização da medida da massa como possível.

Um grupo deu uma explicação científica para a medida do volume de pedras, descrevendo os procedimentos do empuxo como sugestão. Esse fato possibilitou a discussão da eficácia dos procedimentos apontados para medir volume de pedras e seus contextos.

Nem todos apontaram procedimentos para as medidas não realizadas. A maioria citou como sugestão instrumentos conhecidos socialmente como copo graduado, copo, garrafa, balança, paquímetro. Esse fato parece ter limitado o processo criativo para unidades de outras grandezas, visto que a predominância foi a criação da unidade de comprimento.

Para estabelecerem a unidade linear, utilizou-se a grandeza de um dos objetos fornecidos e também a mão.

Dentre as elaborações com a mão, para criação da unidade de medida de comprimento, foi usado o dedo polegar, seu comprimento e sua largura, dedos (união de quatro dedos sem o polegar) e o palmo (distância da ponta do dedo polegar ao mínimo com a mão aberta). Também foi usada a mão para medir outras grandezas: para unidade de volume a "mão cheia" e, de área, a projeção do dedo polegar.

A história dos nossos antepassados nos ensina o poderoso instrumento que foi nosso corpo, em particular mãos e dedos. Na matemática tivemos os dedos para contagem e cálculos, o corpo também para contagem, o braço para medida[34].

Como nos mostra CATALANI (2002), o palmo e os *dedos juntos* para medir pequenas quantidades lineares também foram utilizados pelos alunos do quarto ano do Ciclo I do Ensino Fundamental[35] no processo de elaboração da unidade de medida. Relações com a polegada provavelmente se tornaria difícil para essas crianças, mas não para os participantes desse curso. A polegada está de alguma forma na vida social de muitos adultos, o que pode ter refletido na elaboração de unidades de medida com o dedo polegar, pois a polegada com sua significação social foi utilizada por um dos grupos, o outro uso foi como largura do polegar.

Os grupos que criaram a unidade de medida linear com o dedo polegar tiveram a tendência de estabelecê-la como padrão. No entanto, esse procedimento não ocorreu com o outro, que utilizou várias unidades lineares (dedos juntos, palmo, polegada e fio de cabelo) para medir a mesma grandeza de diferentes objetos, todas baseadas no corpo humano.

A utilização de mais de uma unidade linear nos indica que o estabelecimento de um padrão não foi priorizado. Para um grupo, a necessidade do padrão surgiu no decorrer do processo: "levando em consideração formato, espessura, consistência, podemos estabelecer a unidade de medida padrão do volume". Além da busca do padrão, esse juízo revela relações diretamente ligadas à imagem conceitual de volume.

Um padrão de medida não foi priorizado, pois houve a comparação entre a mesma grandeza somente entre dois objetos, ou seja, a cada medida, uma nova unidade. Por exemplo, um único grupo realizou: para espessura da tesoura, "¼ da altura do dado"; para largura e comprimento do retalho de tecido, "2,5 x 5 dobra do fio". Outro caso foi a relação de reciprocidade para medir o volume do tubo de filme: "10 partes de areia" ou "80 pedras" e, para o volume de areia, "1/10 do tubo". A forma como foram escritas essas medidas nos dá indícios de uma síntese do procedimento de comparação e também da idéia, já citada, de parte-todo.

A altura do dado utilizada como unidade linear e a identificação do dado com o cubo geométrico permitiram a mobilização de conhecimentos de cálculo que resultaram na explicitação do volume, da área da face e do comprimento da sua diagonal.

[34] Sugerimos IFRAH, G. *Os números: a história de uma grande invenção*. São Paulo: Globo, 1998.
[35] Alunos em torno de 10 anos de idade.

Usar o cálculo foi uma das maneiras encontrada para quantificação de algumas qualidades, aproximando as formas dos objetos às geométricas. Esse fato evidencia a mobilização dos conhecimentos apropriados, relacionando-os àquela situação, contrapondo um movimento criativo de unidades para outras grandezas. Em alguns casos, o conhecimento não coincidiu com o científico, como em "3 dedos de largura x 1 dedo de altura" para medir o volume das pedras que estava dentro do tubo de filme.

Por outro lado, nesse juízo, pode estar presente uma forma generalizada de um procedimento dado socialmente. Expressões como "5 x 4" ou "5 x 4 x 2", nas quais se pode ler 5 por 4 ou 5 por 4 por 2 – a unidade nem sempre é mencionada por estar subentendida para os agentes que participam da situação – são usadas na prática cotidiana da nossa sociedade, como nas situações relacionadas à construção civil. Muitas vezes, não se pretende calcular área ou volume, ou seja, o sinal "x" não quer dizer necessariamente a operação de multiplicação. Um exemplo foi a escrita "9x6x5,5" associada ao "perímetro 20,5 dedos".

Quando se traz essas expressões para o contexto da matemática, ela adquire outra significação, e essa é a diferença quando se pretende ensinar e aprender ciência. As formas de expressão de conhecimentos científicos, que por vezes são iguais ou mesmo semelhantes às dadas socialmente, configuram conteúdos por vezes desconexos. A própria constituição de palavras-termo, representantes de conceitos, é também um exemplo.

Podemos encontrar um exemplo do uso de palavra-termo na expressão "levando em consideração a unidade do *lado* (1u), podemos calcular a área de uma das faces do dado (quadrado), podemos calcular o perímetro dessa face, podemos calcular o volume (*base* x altura x profundidade)" (grifo nosso), referente ao modo de medir certas grandezas do dado, identificado como cubo.

As palavras *lado* e *base*[36] utilizadas na descrição desse procedimento mesclam significação do senso comum com o conhecimento científico. A palavra *base* no contexto em que foi usada tem o significado de *medida da aresta* da base e *lado* como *aresta* do cubo – considerando o dado como modelo de cubo. Isso para ilustrar a importância de considerar também a formação da significação que as palavras adquirem em diferentes contextos, ou seja, nos diferentes isolados nas relações qualitativas com os elementos a ele ligados.

[36] Um exemplo didático da formação do conceito de base no campo geométrico foi elaborado por Bernardes (2000)

O *lado* poderia ser o lado do dado identificado como a face do cubo, ou ainda, o *lado* do quadrado, que é a forma das faces do cubo. Também a palavra *base* tem significações distintas, mesmo dentro da própria matemática, considerando o campo numérico, o geométrico e o algébrico. Significações estas criadas e desenvolvidas nas suas ligações qualitativas, formando um conceito nesse isolado e, representados por palavras-termo.

Outra palavra que foi usada nessa proposta com significação do senso comum foi *peso* no lugar de *massa.* Esse fato não gerou problema de compreensão desses conceitos, provavelmente por não estarem imersos no seu contexto de significação, da Física.

Usar termos da prática cotidiana na escola sem o esclarecimento aos estudantes pode levar a aprendizagens incoerentes com o conceito científico. Juízos como "a altura é 4 faces do dado", "V≅ 1 aresta do dado", para o volume do dado, e "altura inclinada 2,3 pol. fem" indicam que o resultado da medida está mais próximo ao próprio ato de fazer do que na articulação dos conceitos representados pelas palavras-termo *aresta*, *altura* e *face*, próprios da geometria. Estes formaram indícios de reflexo do pensamento empírico relacionado diretamente a ação externa no processo de medir.

Ao analisarmos as formas de representação no coletivo, desses e outros exemplos – "½″f de água", "precisaríamos de unidade de medida de massa" para o volume –, pudemos discutir os possíveis reflexos no ensino. Principalmente pelo fato desses juízos serem representativos de uma síntese do conceito de medida o qual está fundamentado na comparação de grandezas de mesma espécie.

Quanto à grandeza um professor questionou "face do dado é uma grandeza?" Essa questão, ao mesmo tempo em que reflete um desconhecimento, indica sua negação e o movimento das imagens conceituais para níveis mais elevados de compreensão. Em relação à proposta, a questão identifica a grandeza como um nexo conceitual no conceito de medida, grandeza ou magnitude na época grega de Euclides. Segundo o estudo histórico de Lintz (1999),

> [...] é procurar sentir seu aspecto plástico como extensão ou como coleção de objetos (número), como todo símbolo primário, seu conteúdo extravasa qualquer tentativa na explicação racional. Como primeira aproximação, do ponto de vista matemático, podemos considerar magnitude como algo que pode ser aumentado, diminuído ou agregado a outros objetos da mesma espécie, como por exemplo, um segmento, uma superfície, um número [...] o essencial da noção de magnitude ou grandeza é a possibilidade de fazer seus múltiplos. (p. 146)

Houve também o uso do nome do objeto – *polegar*, *prendedor, dado* e *dedo* – como nome da unidade da grandeza medida. Esse procedimento evidenciou dois possíveis movimentos do pensamento. Um quando o objeto foi tomado como a unidade de medida, ou seja, todas as quantidades de grandezas do objeto escolhido constituíram unidades de medida. Esse pensamento apareceu também durante as apresentações dos grupos, mas não necessariamente levando o nome do objeto. Por exemplo, em relação à pedra: "a pedra pode servir como unidade de equivalência de peso [...], podemos estabelecer a unidade de medida padrão de volume", e o pino de madeira, com a possibilidade da utilização de sua superfície lateral como unidade de área.

Outro pensamento foi o uso da grandeza mais representativa do objeto tomando-a como unidade. A eleição do que é mais representativo, ora foi priorizada a imagem sensível do objeto – como o comprimento no prendedor – ora as relações cotidianas – como o dedo, também para medir comprimento.

A discussão no coletivo sobre grandezas pôde também incluir a diferença entre capacidade e volume, com o exemplo: "10 partes de areia", colocado como volume do tubo de filme.

Um outro encaminhamento de solução da proposta *Laboratório de Medidas* foi por meio de estimativas. Inicialmente foi estimado 1 cm para a altura do dado e para sua massa 5 g, seguindo as dimensões do retalho de tecido e sua massa, do volume de areia, entre outras (conforme tabela síntese).

O conceito de estimativa tem sido incentivado atualmente por muitos meios como os livros didáticos e os Parâmetros Curriculares Nacionais[37]. Essa forma de construção da solução, juntamente com outras, como "mão cheia", "polegada pequena", massa de areia de "10 prendedores" serviu-nos para ilustrar a discussão posterior sobre o senso de grandeza, a percepção da quantidade de grandeza de objetos ou fenômeno por meio das sensações.

A repetição de processos de pensamento em diversos contextos, como a estimativa, pode impedir a criação e certas apropriações. O contexto apresentado como laboratório previu a necessidade de medir e não estimar. Por outro lado, não se constituiu como motivo para esse grupo.

---

[37] Ver por exemplo PCN (5ª a 8ª, p.56) e PCNEM (Parte III, p. 43)

Talvez uma situação envolvendo a comercialização de objetos cujos preços dependessem do tamanho de certas grandezas pudesse motivar. Isso evidencia que, embora o professor desenvolva suas propostas para atuar na esfera motivacional do estudante, isso pode não acontecer, pois depende das relações hierárquicas que estabelecem das significações[38].

Esse é um dos fatores que a atividade orientadora de ensino prevê: a proposta pode ser feita pela organizadora, mas é no coletivo que ela adquire forma e conteúdo no compartilhamento das significações.

A ausência da medida da própria unidade – do objeto que mede –, mesmo de outras grandezas desse objeto ou, ainda, a elaboração de outra unidade de medida, para medir as grandezas do objeto anteriormente tomado como referência para a criação da unidade, formaram procedimentos que refletem ou a não criação da unidade ou a não reflexividade da operação. Esses procedimentos foram coletivizados a fim de que todos pudessem, nessa etapa posterior, analisar os resultados coletivos para concretizar outro nível de síntese na criação de unidade.

Áreas e volumes foram, na sua maioria, calculados e poucos utilizaram medição direta. No caso do tecido de forma irregular, por exemplo, para determinarem a área da superfície maior (ou seja, excluindo-se a lateral), dividiam-no em formas que se aproximavam basicamente da retangular e da triangular – “dividimos a área em duas partes (retângulo + triângulo)” – e compunham as áreas para expressar a área total. Isso não aconteceu em retalhos que possuíam contorno curvo. O pensamento de decomposição de figuras relacionando-as ao pensamento infinitesimal parece não ter sido articulado.

As formas da tesoura, do prendedor de roupas e da pedra foram consideradas as mais diferenciadas – “deformada, não tem como calcular” – na comparação com as formas geométricas. Houve a divisão da imagem ideal do objeto em partes, principalmente da tesoura, aproximando-as das formas geométricas conhecidas, como “tem-se uma circunferência de raio ½ pol. fem. A partir da circunferência tem-se afinamento até a ponta ¼ pol. fem.”, “9 cm tesoura fechada e 10-12 cm aberta”. Nesse aspecto, observamos que o movimento do pensamento foi das formas conhecidas – geométricas – para os objetos e não contrário, caracterizando mais uma objetivação do conhecimento das formas do que uma apropriação.

---

[38] Para estudos mais aprofundados, indicamos a leitura de Martins (2004).

Após a síntese do relatório realizada pelos pequenos grupos, cada um expôs aos demais a análise de dois objetos, construindo assim a primeira síntese coletiva. A proposta desse momento foi de que o nome do objeto não fosse dito para que somente com as qualidades e quantidades os outros participantes adivinhassem o objeto apresentado. A intenção foi que, com questionamentos outras qualidades fossem observadas.

No início, observou-se que a qualidade social relacionada à funcionalidade do objeto prevalecia diante das analises realizadas. Aos poucos, um *olhar* mais científico foi sendo construído e os relatos foram focando características qualitativas e quantitativas dos objetos.

Na seqüência de apresentações, cada grupo ampliava sua resposta baseando-se em algo observado pelo grupo anterior, fazendo assim analogias para seus objetos, articulando novamente seu pensamento. A discussão da eficácia das medidas e da eficiência do procedimento foi gerada, principalmente, por ter havido diferentes resultados para o mesmo objeto (como a folha de papel) com a mesma escolha de unidade.

Embora a subdivisão da unidade no processo de medida não tenha sido realizada por todos os grupos, o conceito a ela ligado era conhecido de todos. A forma de medir a sobra – tamanho a ser medido menor que a unidade – com os materiais disponíveis foi diferenciada. Alguns estimaram e outros usaram os materiais mais flexíveis para dobrar em partes iguais.

O fato de medir a sobra pelo fracionamento da unidade não anulou outro, o de evitar a subunidade por meio da substituição de unidade.

Nesse momento, discutimos o movimento humano na gênese da criação de medidas de certas grandezas, refletindo sobre suas necessidades e seus desenvolvimentos. Pudemos articular nosso pensamento colocando-nos a pergunta do por que e como medir certas qualidades. As reflexões sobre a medida do tempo fizeram com que uma professora levasse essa discussão para seus alunos que, por sua vez, realizaram uma apresentação teatral sobre o tema de como seria a vida humana sem a medida do tempo.

Dentre os pensamentos desse momento, surgiram também questões sobre qualidades que ainda não mensuramos como: como medir o amor? Houve quem ensaiasse imediatamente algumas respostas, associando algo que já medimos, como “pelo volume de lágrimas”.

Observamos que todos aqueles que criaram uma unidade de medida linear não efetuaram medidas de outras grandezas. Alguns desses somente usaram cálculo, ao contrário dos grupos que não se preocuparam em estabelecer uma unidade padrão, mas somente fizeram comparações.

Nesse movimento de criação da unidade, surgiu a questão: *como medir a variação angular produzida pela tesoura se adotarmos o polegar como unidade padrão?*

Essa questão permitiu novamente avaliar os nexos conceituais da criação de uma unidade de medida, como a grandeza e a comparação. As sugestões foram sendo dadas no coletivo, como o uso de dois dedos da mão em forma de tesoura ou dos ângulos de outros objetos dados. Com isso, observaram que não haviam mencionado essa qualidade nos objetos. Esse é outro indício de que a gênese do conceito de ângulo está mais relacionada ao movimento do que à sua forma estática, como nos outros objetos. Inferimos que foi a variação quantitativa da qualidade que permitiu perceber a relação do fenômeno com a situação-problema.

Outras variações angulares foram relacionadas partindo da medida do tempo, por meio do relógio solar, evidenciando a flexibilidade do pensamento. Estamos considerando o pensamento flexível como Sousa (2004)

> O pensamento flexível contém o lógico-histórico do movimento do pensamento na busca incansável da verdade. Contém conceito, juízo e dedução. Contém a dúvida, a hesitação, a incerteza e o dilema. Não é tão organizado formalmente quanto o pensamento teórico nem tão sensorial quanto o pensamento empírico-discursivo, por isso, se constitui elo de ligação entre ambos. Abrange a totalidade do conceito porque permite-nos (re)conceituar e usar o conceito para interpretar a realidade. (p. 28-29)

Conceito, juízo e dedução a que se refere a autora, são formas interligados no movimento do pensamento. Na dedução, revela-se o como e o por que se forma um juízo. A dedução expressa o movimento de uns juízos e conceitos em outros que se realiza no pensamento. O conceito é o conhecimento da essência do objeto, síntese de juízos num sistema de deduções. (KOPNIN, 1978).

A discussão permitiu refletir o como medir o ângulo da tesoura, mas a conscientização do por que não se poderia medir ângulo com unidade de comprimento, nesse momento do processo, permitiu um salto qualitativo na compreensão da interdependência entre grandeza e medição. Conhecer as qualidades dos objetos, refletir quais possuem variação quantitativa não é suficiente para criação da unidade, pois a unidade de medida não está dada, é um processo do pensamento que entre outros momentos requer apreender qualidades para além da imagem sensível.

A comparação de grandezas de mesma natureza foi realizada na prática, mas a necessidade de sintetizar esse conhecimento como nexo conceitual da medida**,** no processo dedutivo do pensamento teórico, não havia sido explicitado até o momento dessa discussão.

Nas sínteses conceituais de medida, realizadas pelos pequenos grupos (conforme abaixo), a comparação entre grandezas de mesma natureza não foi um juízo presente em todas as definições. Esse fato, além de evidenciar as imagens da definição de medida também caracterizou sua necessidade apontada na discussão coletiva.

> Medida é o ato de comparar uma quantidade conhecida com uma quantidade desconhecida. Medir é quantificar.
>
> Medir é comparar estabelecendo uma unidade padrão de comparação de acordo com o que se deseja medir.
>
> É dimensionar um objeto através de recursos diversos que sirvam de parâmetros comparativos.
>
> Portanto medir é comparar tamanhos, distâncias e capacidades.
>
> É uma forma de expressar numericamente o tamanho de um determinado objeto.

No conjunto das definições (imagem) de medida, apareceram as ligações entre os juízos que reuniram a essência da imagem conceitual. A necessidade de comparar, quantificar, representar numericamente e da unidade de medida constituiu nexos conceituais essenciais apontados nessa fase. Depois da prática de medir objetos e das sucessivas discussões e reflexões, os conteúdos das ligações possibilitaram a transformação das imagens conceituais, atingindo um nível mais elevado, mobilizando o pensamento teórico.

Esse momento permitiu uma articulação com o motivo dominante do curso. Ao pensar em seus alunos, suas realidades nas escolas, os professores iam produzindo idéias para outros encaminhamentos didáticos, como também analisavam certos juízos dos alunos.

Após essa discussão, a organizadora elaborou uma outra síntese baseada nas discussões e que buscou organizar o pensamento sobre medição. A apresentação iniciou com as questões: *por quê*, *o que* e *como* medir. O *por quê* traduz a necessidade. Entre as questões discutidas, foi apresentada a referida em Caraça (1989).

> *Disseram-me que este rei (Sesóstris) tinha repartido todo o Egito entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e retangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Que se a porção de algum fosse*

> *diminuída pelo rio (Nilo), ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviava medidores ao local e fazia medir a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de terra [...]* (p. 32, grifo do autor)

Pudemos ampliar as discussões, ao mesmo tempo em que retomávamos as anteriores, como as relações da necessidade com a atividade humana, a atividade didática[39], a colocação do problema (MOISÉS, 1999).

Na reflexão *do que medir,* retomamos os conceitos qualidade, quantidade, grandeza e senso de grandeza, incluindo outras qualidades como alegria, cor, massa, amor, inteligência, altura, som, velocidade, tempo, luz.

As formas dos objetos propiciaram encaminhamentos de solução que diferenciariam se fossem com outros objetos, na particularidade das respostas, mas não quanto à essência da forma do pensamento no movimento conceitual da medição. Depois da interação com os objetos, pudemos realizar, somente com as imagens ideais, como mediríamos outras qualidades.

Nesse processo de organização também foi formulada a questão: "Qual a diferença da natureza da qualidade do que medimos em relação a que contamos?"

No tratamento dessa contradição entre o discreto e o contínuo, puderam ser relatadas a criação das unidades e a relação com o movimento do pensamento numérico. Analisar a contagem como medida pareceu um outro salto qualitativo no desenvolvimento das imagens conceituais.

A forma como o homem *discretiza* o contínuo para seu uso, como o engarrafamento de líquido, o empacotamento de certa quantidade de massa etc. permitiram relacionar a forma social de organização com o conhecimento científico, suas aproximações e contradições – como classificar a grandeza pela capacidade do instrumento de medida. O mesmo acontece com o movimento inverso, ou seja, *tornar contínuo* o objeto discreto: como quantificar a areia pela sua massa.

O *como* foi sintetizado na criação da unidade artificial, a unidade de medida, e da subunidade. Esta foi quantificada pela fração. A razão identifica os dois movimentos quantitativos, em quantas partes foi subdividida a unidade e a quantidade de subunidades utilizadas para medir o objeto. Esse movimento foi exemplificado conforme abaixo:

---

[39] Sugerimos a leitura da atividade didática sobre a medição de terra em Catalani (2002).

> [...]
> O comprimento medido é 4 unidades mais 2 partes da unidade subdividida em 5 partes iguais (subunidade).
> 4 unidades = 20 subunidades
> temos 22 subunidades
> Como a unidade foi subdividida em 5 partes a subunidade aqui é 1/5 da unidade
> O comprimento medido é 22/5 da unidade

Assim pudemos avançar na compreensão do que constitui a matemática como humanizadora.

> Classificar as coisas segundo seu tamanho e grandeza sempre foi tarefa bem mais difícil do que reconhecer as várias espécies existentes. Relaciona-se ela mais estreitamente com as realizações sociais da humanidade que com o seu preparo biológico. Nossos olhos e nossos ouvidos são capazes de perceber espécies distintas a grande distância, mas pra poder medir à distância o homem teve de construir para si novos órgãos sensoriais, tais como o astrolábio, o telescópio e o microfone. Teve de idealizar balanças capazes de acusar diferenças de peso a que nossas mãos são insensíveis. E, a cada novo progresso na evolução dos instrumentos de medição, o homem teve de apurar os instrumentos da linguagem das grandezas (HOGBEN, 1970, p. 37)

Uma síntese

Caracterizamos dois motivos que direcionaram as ações da atividade coletiva, um relacionado à metodologia de ensino e outro à criação da unidade de medida. As ações ora estavam mais direcionadas à proposta do *Laboratório de Medidas*, ora retomavam à metodologia, mas não de modo independente. Principalmente no início e no final da proposta, as manifestações da relação com a prática docente foram mais freqüentes, mas sabemos que na forma de organizar uma solução também estão presentes elementos da sua atividade principal, de educador.

As primeiras imagens conceituais direcionadas à solução da proposta provinham do como fazer, segundo item da proposta, medir com instrumentos pré-definidos, que compõe a prática dentro e fora da escola e mobilizam o pensamento empírico. Esse momento desencadeou um movimento do pensamento na contradição dialética entre conhecimento-desconhecimento. A negação do conhecimento existente, sintetizada na forma do problema: *como construir uma régua*, revelou o movimento do pensamento no sentido dos nexos conceituais acumulados nesse instrumento.

Tomar o problema para si é sempre uma escolha que depende da esfera motivacional individual e coletiva – aqueles que o fizeram puderam entrar no processo de criação. A disposição à reprodução na mente da criação de instrumento de medida conferiu o movimento conceitual de diferentes formas na inter-relação indivíduo-coletividade. Houve quem escolhesse outro caminho, o uso de estimativas, contrário à liberação do pensamento para essa criação, por que esta promove, muitas vezes, a exposição do desconhecimento, principalmente na proposta de *pensar coletivamente*, construir uma solução coletiva. Os motivos dessa escolha geralmente estão ligados à forma em que se vem constituindo o sujeito histórico professor. Como *o professor que detém o conhecimento,* ou ainda, como foi revelado pelos professores na primeira unidade didática – e também na avaliação: a insegurança diante desconhecido.

A atividade se realizou nas relações inter e intrapsíquicas, no exercício de produção para si dos nexos conceituais da medida, ou seja, esta não estava dada na imediatez do conhecimento empírico dos objetos nem na imagem mental da régua. Assim, configurou-se um pensamento teórico por meio de ligações determinadas, as constituintes de um sistema que reúne o diverso: a unidade de medida, a grandeza, uma comparação, o número. Propiciando, assim, o desenvolvimento das aptidões humanas acumuladas no instrumento de medida, principalmente da régua.

Após a constituição da solução na mente – na atividade com objetos e com os indivíduos –, a classificação de qualidades dos objetos, os processos estabelecidos para realização da comparação, a formulação de juízos de intensidade constituíram um movimento do pensamento empírico diante da construção do relatório de medidas. Pensamento que privilegiou as medidas relacionadas às três dimensões espaciais – comprimento, área e volume – e a massa dos diversos objetos.

Nesse processo, observamos o lógico-histórico dos professores ao articularem elementos da geometria métrica e da prática social. As relações de como se compra pedras e areia e os discursos da medida na construção civil formaram outra dimensão do pensamento empírico que sobrepôs o científico. Como foi analisado na unidade didática sujeito histórico, o predominância de pensar na *realidade do aluno*, no aluno abstrato, conduz o pensamento nas suas relações sociais imediatas. Embora o contexto de colocação do problema almejasse o científico, *o laboratório*, o coletivo relacionou-o com seu cotidiano que, por sua vez, não foi o do produtor e sim de consumidor.

Apesar da reprodução dos nexos conceituais da produção da régua no pensamento, as sugestões para outras medidas na sua maioria foram relacionadas aos instrumentos dados socialmente, como copo graduado, paquímetro, balança.

As ações puderam evidenciar, no movimento conceitual, a interdependência entre grandeza e medição em diversos momentos de sínteses. A análise da relação dos objetos discretos e suas grandezas contínuas – por exemplo, a areia e sua massa, pedra e seu volume e, o inverso, como a água e seu engarrafamento – permitiu o movimento conceitual da relação qualidade-quantidade no desenvolvimento humano.

Uma parte da discussão foi destinada à necessidade da unidade padrão e o fracionamento da unidade, as subunidades, com a introdução da razão. No nível do pensamento teórico, pudemos analisar e reconstruir no pensamento as relações da unidade que conta com a unidade que mede. Esse percurso permitiu a reprodução da criação e do desenvolvimento do conceito de medição na atividade interna dos indivíduos. Nesse movimento, cada indivíduo pôde mobilizar e, por vezes, reconstruir sua significação, suas imagens conceituais de medição, nas quais a forma lógico-histórica do pensamento do coletivo pôde propiciar apropriações do processo lógico-histórico do conceito.

As imagens das definições de medida foi um exemplo da construção coletiva delas, pois cada uma independentemente não continha todos os nexos conceituais necessários da medida. Juntas puderam se completar e, na síntese coletiva, alcançar outro nível de organização do pensamento e consciência dos seus elementos constitutivos.

A síntese por meio das questões *porquê*, *o que* e *como* medir pôde auxiliar na organização do pensamento teórico que reúne o lógico do histórico no desenvolvimento do conceito com as soluções apresentadas pelos professores. A forma como a organizadora conduziu o processo de análise e síntese da situação proposta pôde ser objeto de reflexão também sobre a metodologia de ensino.

As relações entre os pensamentos numérico geométrico e algébrico puderam ser mobilizadas e explicitadas: a geometria métrica mais diretamente, na utilização dos seus elementos e fórmulas de cálculo, e o algébrico, principalmente pela variação[40] das intensidades das qualidades. O que permitiu também reconhecer a interdependência desses pensamentos matemáticos.

---

[40] Para aprofundamento do estudo sobe pensamento algébrico indicamos a tese de Sousa (2004).

A formação da coletividade foi uma hipótese possível, além da mobilização do coletivo para a construção da solução à situação-problema, também por que ações de uns puderam motivar a integração de outros, que a princípio não se encontravam motivados.

A coletividade é um pressuposto da atividade humana para qual a atividade orientadora de ensino se dirige, pois ao constituir a coletividade, o indivíduo se constitui. A constituição da coletividade de educadores, por meio da prática educativa, é orientada pelo objetivo social, e é a partir das suas ações combinadas que surgem as possibilidades de mudança de qualidade do indivíduo e da própria coletividade (MOURA, 2000). A imagem conceitual é uma das qualidades do indivíduo e do coletivo que tanto orientou o encaminhamento das soluções nessa unidade didática como também do curso como um todo.

4.3.5 UNIDADE DIDÁTICA: NÚMERO RACIONAL

O objetivo da proposta foi desenvolver o pensamento teórico do número racional baseado na unidade didática de medida, ou seja, qual a apropriação do campo racional do conceito de medida.

Para isso, a situação compôs três questões que buscaram refletir e analisar a ligação entre medida e número, a fim de superar esse estágio no movimento do número, compondo elementos essenciais na formação do campo racional. Na interdependência do pensamento numérico, a situação também propôs um diálogo entre as unidades didáticas, no sentido de evidenciar os nexos conceituais que vão sendo criados no pensamento matemático que o permite transitar do empírico ao teórico.

As questões foram:

Laboratório de medida e os números racionais

No que a proposta Laboratório de Medida se relaciona com o conceito de número?

Qual a qualidade dos números 1, 2 e 5/4 considerando o contexto de medida? E considerando o campo racional?

Qual a apropriação da matemática do movimento humano da medição? Quais são suas limitações e seus avanços?

A indicação da dinâmica foi que individualmente refletissem e organizassem algumas idéias para discutirem posteriormente em pequenos grupos. Os professores não fizeram o momento individual e já foram conversando com seus pares. Essa postura nos dá indícios da priorização da atividade comum, de pensar com o outro, de formar uma coletividade.

A síntese da discussão à primeira questão recuperou o movimento do conceito de medida, nos juízos: "O ato de medir constitui em fazer comparação entre duas grandezas da mesma espécie (comprimento x comprimento, área x área, volume x volume, etc)" e "Laboratório tem a ver com o conceito de medidas [...], o barbante [...] como instrumento de medição. A areia (idéia de grandezas contínuas), o cubo (três medidas: comprimento, largura e altura). Comparar é medir quantas vezes a unidade de medida cabe dentro do objeto".

Esse momento possibilitou também rediscutir sobre grandezas discretas e contínuas na apropriação de quantidades por meio da prática humana.

A relação da medida com o número se fez sob três enfoques interligados. O primeiro parte da medida para chegar ao número, como à quantidade de vezes que se repete a mesma ação, "quantas vezes a unidade cabe numa outra grandeza de mesma natureza". A possibilidade de definir quando começa e quando termina essa ação, esse movimento repetitivo, reflete um pensamento do movimento quantitativo, também presente na contagem.

Nesse enfoque, consideramos também o movimento contrário, partindo do número para chegar à medida, expresso como:

> - Número é apenas a representação de uma quantidade. Para a informação de medida ser completa é necessária a unidade (padrão);
> - [...] a necessidade de estudo de outro campo numérico que não os naturais, para representar medidas não completas do padrão estabelecido;

Embora o número tenha sido criado como apropriação da quantidade, ou seja, a quantidade já existia na natureza antes de o ser humano criar uma forma de captá-la; a apreensão desta pelo número forma uma identificação que se reflete na prática do professor. Desse modo, a existência da quantidade e do número é tomada um pelo outro indistintamente. Uma variação desse pensamento foi relacionada ao numeral:

> Numeral independente do padrão de medida adotado não nos leva ao número, não dá a visualização de quantidade. No laboratório de medida percebemos que sem a unidade padrão estabelecida previamente [...], o numeral fica sem sentido.

A reflexão desse professor indica, a nosso ver, as relações do número com as unidades didáticas anteriores. O destaque feito da diferença entre número e numeral, interpretamos como uma apropriação em movimento.

Outro enfoque da relação do número com a medida foi a associação do padrão de uma unidade de medida de uma certa grandeza, como número: "No laboratório, descobrimos um padrão de medida numérica". Interpretamos que esse juízo identifica *a unidade de medida como unidade numérica* no sentido de que o número *um* é o princípio, a unidade representativa da propriedade reflexiva da medição. A exploração desse juízo pode levar também à imagem da construção da reta numerada.

O terceiro enfoque foi "a necessidade de ampliação do campo numérico", pois os naturais "no início da atividade e em alguns momentos não nos favorecia em respostas. Comparamos a nossa unidade de medida com outro objeto qualquer, verificamos que sobrava parte da unidade de medida sem o correspondente do objeto".

Essa resposta apresenta a criação da subunidade, que reflete a repetição do ato de medir com uma *parte* da unidade. A representação desses dois movimentos, ou seja, da quantidade de vezes que *cabe* a unidade e a quantidade de vezes que *cabe* a subunidade na grandeza a ser medida, foi a origem da fração. Sabemos que o tipo de número que representa cada movimento é o natural. Daí, a razão numérica, formada por esses dois movimentos, ser um único número, o que é um outro movimento.

Conta-nos Dantzig (1970) que foi Diofanto "o primeiro matemático grego a reconhecer francamente as frações como números" (p. 81), isso no ano 300 da nossa era. Mesmo o tratamento das frações em *Os Elementos* de Euclides se encontra na teoria das proporções (COSTA, 1929) e não no campo numérico.

> Na Grécia a palavra número era usada só para inteiros. Uma fração não era considerada como um ente único mas como uma razão ou relação de inteiros. (BOYER, 1993, p. 39)

O fracionamento da unidade, a fração, está na gênese do número racional e, portanto, no movimento do pensamento numérico. A qualidade do número, no contexto da medida, está relacionada à unidade, seu fracionamento e a quantificação no processo de comparação. No campo racional, a qualidade é outra, pois está ligada à ordem, à densidade, às operações.

Estamos usando aqui *qualidade* no mesmo sentido dado por Caraça (1989), como "conjunto de relações em que um determinado ser se encontra com os outros seres dum agregado" (p. 98). O agregado aqui está sendo chamado de contexto, parafraseando o exemplo dado por Caraça (1989): o ser humano se relaciona diferentemente conforme o agregado social em que está imerso, na família, no trabalho, para a Receita Federal, no mercado.

No sistema educativo, é comum a idéia de *parte-todo* como originária da fração e esta, por sua vez, do conjunto dos racionais, num ciclo vicioso, pois o número racional *serve* para representar situações de parte-todo. Esse pensamento se refletiu nessa unidade didática entre medida e número racional. Uma imagem conceitual, de que o conjunto dos números racionais foi criado para possibilitar a medida, foi revelada em: "[...] a necessidade de estudo de outro campo numérico, que não os naturais, para representar medidas não completas do padrão".

A mudança de qualidade do número como ferramenta para o contexto teórico que, na história, segundo Boyer (1993), se iniciou com a escola pitagórica, ocorreu devido a uma mudança do contexto social em que ele estava sendo pensado. Nesse sentido, é que os níveis de pensamento empírico e teórico se articulam diferentemente.

> O empírico e o teórico são níveis relativamente independentes, a fronteira entre eles é até certo ponto condicional; o empírico se transforma em teórico e, ao contrário, o que em certa etapa da ciência se considerava teórico torna-se empiricamente acessível em outra etapa mais elevada. No entanto a separação de dois níveis diferentes tornou-se possível somente no período do pensamento científico maduro; até para a ciência antiga a divisão do conhecimento em empírico e teórico perde o sentido. (KOPNIN, 1978, p. 153)

Por isso que, para pensar o número racional como teórico, deve-se mudar seu sistema de relações, que não é o da medida empírica, e sim no campo numérico, buscando-se as qualidades nesse campo.

Na segunda questão, houve também a identificação do número com a quantidade, e a relação com a medida em: "Expressam a quantidade de 'algo', mas em relação à medida, se torna um dado incompleto; é necessária a unidade para explicar o 'algo', objeto a ser definido".

O processo repetitivo de quantas vezes *cabe* a unidade na grandeza do objeto a ser medido e a fração, obtida pela medida da *sobra*, não foram claramente relacionados às respostas, embora em "Os números 1 e 2 expressam medidas inteiras e acabadas [...]" ensaiem essa idéia. Respostas como "o homem teve a necessidade de fracionar as partes do inteiro" talvez estejam mais próximas da concepção de *parte-todo* proveniente da influência dos livros didáticos, juntamente com:

> - O número racional foge da parte inteira são partes de um todo;
> - 5/4 é racional, estabelecendo a relação da parte com o todo;
> - Não tínhamos parte do todo então a necessidade de ampliação [...] (o);
> - Observamos que existe a necessidade dos números "quebrados", ou seja, os números que determinam as partes não inteiras. (o)

As expressões acima também identificam a fração com o número racional, sugerindo que tal identidade não tenha sido construída, somente admitida.

Uma generalização da medida foi realizada por meio da analogia do processo de fracionamento da unidade de medida com os números, como "5/4 expressa o número inteiro 1 mais 25% de uma parte inteira, ou seja, um quarto (fracionado)".

Outras imagens do campo dos conjuntos numéricos foi a expressão dos juízos dos números 1 e 2 somente como inteiros, não racionais, em "O número racional foge da parte inteira [...]", "1 e 2 são números inteiros e o 5/4 é racional". Discutimos que esses juízos dão indícios de um movimento de generalização do pensamento empírico ligado ao que é diferente do inteiro.

Embora os professores soubessem que o conjunto dos números inteiros é subconjunto do conjunto dos racionais na relação de ensino e aprendizagem, necessitamos cuidar da linguagem, pois ela é um instrumento mediador no processo de ensino-aprendizagem.

Os juízos referentes ao campo numérico racional foram a relação de ordem em "[...] obedecendo a uma ordem 1, 2", "5:4=1,25 que está entre 1 e 2" e "5/4 estava entre 1 e 2 enquanto inteiro absoluto". A partir desses juízos e de outros exemplos, questionamos se entre quaisquer dois racionais existia um racional. Pudemos então discutir a finitude entre dois inteiros distintos quando estes estão no conjunto dos naturais e a infinitude no campo racional, muito brevemente.

Além disso, a divisão realizada acima "5:4=1,25" é uma síntese do movimento do número, da fração em divisão e da mesma em número decimal. Esse percurso não foi realizado no curso, mas houve a indicação da leitura do livro de Bento Jesus Caraça, *Os fundamentos da matemática*, capítulo II, item 1, "Construção do campo racional".

A terceira questão sintetizou juízos já apontados nas questões anteriores, como "matemática se apropria dos números para indicar quantidades" e "descobrir um padrão de medida". Outros exemplos como "percentuais, probabilidades, indicando variação de bens, produtos, serviços, áreas de terras, produção agrícola, faturamento financeiro, etc." também constituem aplicações do número como quantidade.

Quanto às limitações da matemática, elas "são constantes e estão vinculadas às necessidades do homem em suprir suas necessidades [...]". As limitações e superações parecem estar relacionas ao próprio movimento da ciência, "uma ciência inacabada e em constante transformação", "o movimento humano alavanca o estudo de novos conceitos matemáticos [...]". As necessidades foram vinculadas aos avanços no desenvolvimento humano como em: "Ao longo dos anos o 'homem' foi em busca de solucionar certos problemas que lhe eram colocados para sobreviver [...]" e, embora seja comum encontrar a associação da necessidade com sobrevivência no discurso da classe dominada, sabemos que no processo evolutivo o ser humano supre as necessidades básicas para produzir outras.

Alguns desses avanços se relacionaram com as formas de representação do movimento quantitativo, como em: "Da necessidade de representar medidas e suas unidades, ela [matemática] utilizou o valor numérico e avançou [...]". Esse movimento aparece aliado à criação de instrumentos em: "De acordo com sua própria necessidade de comparação e de representação (numeralização de situações), assim se deu também a criação de instrumentos específicos que os auxiliaram nas comparações e registros de situações".

A apropriação da matemática pelo indivíduo como capacidade humana foi refletida em:

> Todo indivíduo tem plena capacidade de adquirir e apropriar-se do conhecimento matemático, mas para que isso ocorra é necessário que ele construa o conhecimento matemático de uma maneira significativa condizente com sua realidade.

O que é realidade? Dependente da imagem do conceito de realidade esse juízo adquire níveis distintos de compreensão do que seja a apropriação do conhecimento. Ainda no campo das apropriações, a expressão: "O movimento humano alavanca o estudo de novos conceitos matemáticos sistematizando as regularidades dos experimentos", indica que à matemática cabe também a elaboração de algoritmos, o desenvolvimento da técnica.

As condições objetivas de realização dessa unidade didática não propiciaram mais tempo para reflexões e discussões. Isso motivou incorporar, na elaboração da unidade seguinte, alguns elementos que propiciassem um avanço nas discussões a respeito do conjunto dos números racionais.

Uma síntese

O início da unidade revelou certa autonomia no modo dos professores se organizarem para a solução da proposta. A resolução individual não mais foi realizada, mesmo quando solicitada.

No movimento do pensamento numérico, a relação da medida com o número se realizou por meio do seu aspecto quantitativo na:

- quantidade de vezes que se repete a mesma ação;
- unidade de medida como unidade numérica; e
- subdivisão da unidade para medir a sobra, a fração.

Na síntese da medida, explicitamos a composição da razão, representando dois movimentos expressos por números inteiros que, na medida, o todo representa em quantas partes iguais foi dividida a unidade e, a parte, quantas subunidades são necessárias para medir o objeto. Esse pensamento não foi explicitado nesta unidade; por outro lado, aponta um caminho a ser investigado, principalmente se ele compõe a expressão *parte-todo*.

A transição no movimento do pensamento numérico, do nível empírico ao teórico, foi idealizada por meio de uma abstração da fração como racional, ou seja, o movimento do pensamento do coletivo indicou a ligação da fração como a gênese do campo racional, mas o pensamento teórico do campo racional não se revelou, e sim sua possibilidade.

As respostas dos professores foram indicativas de um salto no próprio pensamento empírico ao buscarem imagens conceituais representativas do conhecimento teórico do número racional. Essa interpretação foi devido à relação inicial do número com a medida, com a quantidade e posterior associação com *parte-todo*. A relação da fração com parte-todo é freqüente nos livros didáticos e foi característica da imagem conceitual de número racional apresentada nessa unidade didática.

O histórico do número racional, como anteriormente mencionado, conta-nos que o pensar teórico do número ocorreu em grupos sociais diferentes daquele da necessidade prática. Ao almejarmos a apropriação de ambas as formas, necessitamos reproduzir no pensamento o lógico-histórico desses momentos para compreendermos o desenvolvimento lógico dos números.

Os juízos relacionados à ordenação nos possibilitaram também refletir sobre a densidade, mesmo que brevemente.

Quanto às limitações e aos avanços, os comentários dos grupos não geraram discussões ou aprofundamento. As imagens conceituais se revelaram no nível do pensamento empírico da medida e do algoritmo.

4.3.6 UNIDADE DIDÁTICA: DENSIDADE, COMENSURABILIDADE, INCOMENSURABILIDADE E O NÚMERO

Retomamos em parte o objetivo da unidade anterior no desenvolvimento do conceito de número racional ligado ao nosso problema de pesquisa: o desenvolvimento da reta real. Assim, à intenção de propiciar, no movimento do pensamento, a superação da comensurabilidade, *a crítica do problema da medida*, como disse Caraça (1989), foi acrescentado um momento de reflexão e síntese sobre os racionais.

A proposta como aqui se encontra foi realizada com uma das turmas; com a outra, após a unidade didática anterior, seguimos com a elaboração e a discussão de sínteses sobre os números racionais, cujo mapa-síntese 1 encontra-se no final desta unidade.

A primeira questão buscou novamente contrapor a medida com o número racional, explorando o conceito de densidade. A pesquisa de Dias (2002) propiciou resultados que nos auxiliaram na elaboração da proposta e na dinâmica da discussão. A indicação de imagem conceitual do conjunto dos números racionais, como discreto, foi revelada, em certas situações, pela existência de uma finidade de números entre dois racionais dados e a existência de máximo no conjunto $\{x \in Q | x < 1{,}25\}$.

A primeira questão da proposta que segue se dirigiu para o coletivo classe, a segunda e a terceira foram sintetizadas pelos grupos após discussão.

1ª) Um alfaiate mediu a altura de um freguês e resultou em 1 metro e 67 centímetros. É possível que o próximo freguês tenha como altura um número racional imediatamente seguinte ao do primeiro freguês? Por quê? (LIMA; MOISÉS, 1998)

2ª) Existe alguma situação em que o número racional é insuficiente? Explique o porquê do ponto de vista prático e do ponto de vista teórico (a parte grifada foi adicionada depois da discussão da primeira questão).

3) Elabore uma síntese sobre o conceito de número racional.

A resposta imediata referente à primeira questão foi 1,68m. As justificativas eram que "número seguinte" na fita métrica era esse. Ao solicitar que considerassem o conjunto dos números racionais, núcleo da questão, alguns permaneciam com a mesma resposta, usando também a palavra sucessor como análoga à seguinte.

Esse pensamento associado ao conceito de sucessor também foi evidenciado por Santos (1995) ao propor "qual é o sucessor de: 1000 ½ 2/3 0,5 0,0001 3,6 3,69 3,4444..." (p. 215). Nessa questão, houve indicações para os sucessores de 2/3 0,5 3,69, como 3/3 0,6 e 3,70 respectivamente.

Com os professores no curso, uma contra-argumentação à resposta de 1,68, surgiu com: "entre dois racionais sempre se pode ter um no meio, a média, então pode ter vários, infinitos 'seguintes'".

Passamos a discutir o conceito de sucessor. A questão que procurou sintetizar a essência do movimento desse conceito foi: "o conceito de sucessor no conjunto dos inteiros teria mudado quando se conheceu o conjunto Q?" Um dos integrantes disse que sim e que iria defender essa tese porque "em Q, todo número teria vários sucessores, infinitos".

Pareceu-nos um dilema, pois ao mesmo tempo em que se afirma a existência de sucessor, afirma-se também que há infinitos. Na evolução da matemática, o formalismo *axiomatizou* essa palavra-termo, por meio dos axiomas de Peano, na definição do conjunto dos números naturais.

Identificamos o movimento de fluência e de permanência[41] no pensamento do conceito de sucessor. O conceito de divisibilidade também indicou a fluência no pensamento do professor que disse: "com o conhecimento dos números com vírgula 3 passa a ser divisível por 2". Essa fluência caracteriza uma reconstrução na imagem do conceito de divisibilidade para o campo racional.

Interrompemos por alguns instantes a discussão de sucessor para refletirmos sobre o conceito de divisibilidade. O problema se caracterizou em torno das significações de *divisão* e *ser divisível*.

As propriedades do número inteiro freqüentemente não são discutidas no ensino básico quando se conhece outros campos numéricos. Questionamos como o conceito de divisibilidade se relaciona com a criação dos números racionais. A abordagem no atual sistema de ensino de frações decimais, ou chamadas também de decimais exatos, sugere a

[41] Na categoria do movimento, existe a fluência e a permanência. A fluência está no desenvolvimento, na evolução, na transformação. A permanência não é ausência de movimento, é estabilidade, invariabilidade (CHEPTULIN, 1982).

idéia, baseada no conhecimento empírico de divisão exata, de ser divisível, conceito ligado à operação de divisão com números inteiros.

Para refletirmos sobre essa questão, primeiramente foi reconstruída a significação no conjunto dos inteiros, no qual a divisão com resto zero significa que o dividendo é divisível pelo divisor. Ou ainda, que o dividendo é múltiplo do divisor.

A discussão versou sobre as relações dos conceitos de múltiplo, divisibilidade e divisão. A questão era: se considerássemos 2 divisível por 5, como ficariam os conceitos de números pares, ímpares, primos, múltiplos. Foi proposto que pensassem quais seriam suas implicações. As interações se finalizaram, talvez por que necessitariam refletir individualmente.

No movimento do pensamento numérico, o conceito de divisão representa a fluência da fração ao conceito de número. Caraça (1989) explicita esse movimento de forma sintética.

> A divisão de números inteiros *m* e *n* agora pode sempre exprimir-se simbolicamente pelo número racional $\frac{m}{n}$ - o cociente de 2 por 5 é o número *racional fracionário* $\frac{2}{5}$, o cociente de 10 por 5 é o número racional inteiro $\frac{10}{5} = 2$. (p. 37)

Tornar-se número significa também se constituir no sistema de operações. No desenvolvimento das operações e propriedades, o movimento dos inteiros e suas propriedades são a sua base. Considerar a razão $\frac{m}{n}$ como quociente não basta, pois esse novo número tem certas relações operativas que o constitui como tal. Essa discussão não pôde ser realizada, mas sugerimos que o sistema de ensino busque esse movimento para compreensão sobre a contradição entre a razão que evidencia a relação entre dois inteiros e a numeralidade da divisão de inteiros, o racional.

Voltamos à discussão sobre seguinte/sucessor com outro nível de organização do pensamento, ou seja, separando a questão do alfaiate do ponto de vista prático e do ponto de vista teórico. O prático relacionado com o fazer do alfaiate e o teórico com os números racionais.

Do ponto de vista prático, houve um consenso: a medida seguinte possível do alfaiate realizar seria 1,68m. Do ponto de vista teórico, não houve coincidência entre as idéias apresentadas. Na intenção de desvincular o contexto da medida do problema, a organizadora questionou: qual o sucessor de 1 em Q? Houve três tipos de respostas: “1,0...01”, “2” e “não dá para saber, mas existe”. Essa última está relacionada à idéia, já exposta anteriormente, de que existem vários, infinitos sucessores, por isso não é possível eleger um.

Essas idéias se assemelharam às respostas dadas, em Dias (2002), à questão que solicitava a representação na reta do número real consecutivo ao número 1. Algumas respostas foram “1,000...1”; 1,1; 1,01 e “não é possível representar porque existem infinitos” (p. 51). Os estudantes em ALBADEJO (1997) consideraram 0,000...1 sucessor de 0,1. Embora essas questões estejam no campo real, o conceito envolvido em que ambos os conjuntos compartilham é o mesmo, a densidade.

Com a finalidade de propor um diálogo em relação à palavra-termo *sucessor* apropriada pela matemática, a organizadora questionou sobre sua significação no contexto matemático. A resposta caracterizou o sucessor como *mais um*. Esse juízo foi consensual, mas as inquietações ainda permaneceram naquele momento. A dúvida era se a mesma palavra poderia ter duas significações no mesmo contexto matemático, ou seja, nos campos numéricos. Um professor respondeu que sim e que iria defender essa tese.

Com a finalização do encontro, a sugestão foi que escrevessem suas opiniões ampliando as relações nos campos numéricos, apontando o que deveria mudar e o que permaneceria, mas ninguém o fez.

Notamos que a interdependência entre as imagens conceituais de sucessor e densidade manifestadas pelos sujeitos foi também observada em Dias (2002), referente ao campo real que, por sua vez, trouxe outras pesquisas em que essa relação se faz conflituosa.

Essa primeira questão gerou uma reformulação para a segunda, na qual foi acrescentada a sugestão de separarem as reflexões e respostas do ponto de vista prático e do teórico. Prático, nesse contexto, foi utilizado tomando referência o movimento das discussões anteriores, no sentido de elaborações empíricas, como no caso do alfaiate. A intencionalidade foi buscar uma síntese da discussão anterior, como também mobilizar o pensamento numérico para o nível teórico.

As sínteses produzidas pelos grupos nessa segunda questão (Existe alguma situação em que o número racional é insuficiente? Explique o porquê <u>do ponto de vista prático e do ponto de vista teórico</u>) estabeleceu uma oposição para ambos os pontos de vista, envolvendo o conceito de irracional e incomensurabilidade. Uma imagem conceitual de insuficiência do conjunto dos racionais foi referente à existência do número irracional e do número complexo *do ponto de vista prático*, expressa por meio das respostas:

> • Sim, exemplo o número π, que é a razão entre comprimento da circunferência pelo seu diâmetro: $C/d=\pi$, $\pi \approx 3{,}14...$, π é um número irracional. Raiz quadrada de número negativo não é possível em Q;
> • Sim, medida do comprimento de uma circunferência, raiz quadrada de número negativo.

A idéia oposta foi que tanto o irracional como o complexo são números desenvolvidos teoricamente:

> • Não há necessidade deste tipo de utilização (raiz quadrada de número negativo, número irracional). Estes conceitos foram desenvolvidos somente como teoria;
> • Não temos como obter o número irracional utilizando em método prático (concreto);
> • Números irracionais e raiz quadrada de número negativo;
> • Medida da diagonal do quadrado de lado 1, comprimento de circunferência e área de círculos devido à utilização do π.

Um dos grupos apontou a existência do número irracional no ponto de vista prático e no teórico. A diferença expressa foi que *na prática* está o processo de medição (primeira citação do *ponto de vista prático*), e no teórico os numerais: “quando o número escrito na forma decimal contiver infinitas casas decimais, sem, contudo, formar período. Ex. π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$..., conjunto dos números irracionais”.

Esse momento gerou uma discussão em torno do número pi, mas houve outra resposta que nem envolveu os irracionais nem os complexos, e sim o conceito de sucessor. A resposta de que o racional “Não consegue definir a teoria de sucessor” refletiu a discussão anterior e estava presente no movimento no pensamento. Essa manifestação pode indicar que o conceito de sucessor, ligado aos números inteiros, precisava ser reconstruído na relação com o novo campo numérico.

Quando o grupo-classe evidenciou a contradição se o número pi poderia ser obtido concretamente ou só teoricamente, o grupo que defendia sua empiria argumentou que comumente realiza um experimento com seus alunos. Este consiste em pegar um objeto como lata ou copo, pedir aos alunos que meçam sua circunferência e seu diâmetro e façam a divisão das medidas, obtendo assim o número pi.

O grupo que havia apontado o número irracional como teórico não apresentou qualquer argumento em defesa da sua resposta, embora dissessem não concordar. Para convencer esse grupo, os outros se mobilizaram em busca de objetos no próprio interior da sala que pudessem exemplificar concretamente, reafirmando que é uma situação que fazem freqüentemente com seus alunos na escola.

Ao encontrarem um copo, efetuaram as medidas obtendo 27,6 cm para o comprimento da circunferência e 8,9 cm, para o diâmetro. Um dos participantes fez a divisão na calculadora encontrando a resposta: 3,1011235. Esses números foram anotados na lousa. E os argumentos de que não havia resultado 3,14... era por conta da precisão da medida e também que a máquina de calcular não fornece todos os dígitos.

Importante notar que esse tipo de experimento e argumento não é novo. O número pi apresentado junto com a definição de irracionais começa a aparecer no final da década de 1960, segundo os livros didáticos consultados por Cobianchi (2001). Antes desse período, é comum somente nos livros cujo conteúdo é de geometria, na abordagem do comprimento da circunferência.

No livro português de exercícios de Crespo (esse autor publicava só livros de exercícios), de 1966, o conjunto de questões do 71º Exercício – Cálculo experimental do valor de π – aparece uma questão que pede a classificação do número pi.

No procedimento utilizado nesse item, o autor solicita ao estudante que, com auxílio de um fio, meça três objetos circulares e seus respectivos diâmetros, para em seguida colocar os valores na tabela, inclusive o da divisão do comprimento pelo diâmetro. O cabeçalho dessa última coluna é "P:D=π", e o próximo item: "Se as medições foram bem feitas, há-de verificar em todos os casos que o quociente P : D = 3,14 ... = π. Escreva a fórmula que lhe permite calcular o perímetro P de uma circunferência, conhecido o diâmetro" (CRESPO, 1966, p. 217).

Os livros portugueses de Andréa (1920), Ribeiro (1957) e Crespo (1966) apresentam o número pi pelo cálculo experimental da divisão do comprimento pelo diâmetro de circunferência, mas sob três métodos diferentes. O livro de Crespo apresenta o método acima; o de Andréa sugere dois processos: o primeiro da retificação de curva – sobrepor uma linha à curva e esticá-la (semelhante ao de Crespo) –, e o segundo utilizando linhas poligonais inscritas na circunferência, no qual dedica mais explicações, e conclui que

> Dividindo o comprimento de qualquer circunferência pelo seu diâmetro, obtém-se sempre o mesmo cociente, igual a 3,14. Compreende-se também porque é que a experiência não dá sempre 3,14 exactamente: é porque, ao medir, cometemos pequenos erros que influem no resultado; mas sabe-se que se essas medições se pudessem fazer sem êrro se obteria sempre para cociente o número
>
> 3,14159265... .
>
> que os matemáticos designaram pela letra grega π. (ANDREA, 1920, p. 73)

O livro de Ribeiro (1957) apresenta três circunferências, de raios distintos, retificadas em três retas cujo desenho sugere que as medidas de diversos arcos das circunferências foram transportadas para as retas utilizando compasso. Depois o autor pede que se meçam os segmentos formados e os respectivos raios, em seguida apresenta os resultados das divisões: 3,18; 3,13 e 3,12 em um quadro e justifica que as diferenças são devidas às imperfeições do seu trabalho e conclui:

> Estudos mais adiantados mostram realmente que o quociente do perímetro pelo diâmetro é sempre o mesmo para todas as circunferências, e que o seu valor por defeito a menos de 0,01 é 3,14. Este quociente representa-se pela letra grega π, que se lê pi e que corresponde ao nosso pi. (p. 65)

Os livros publicados posteriormente também abordam o número pi associado ao comprimento da circunferência, mas nenhum autor menciona sobre qualquer demonstração da irracionalidade de pi. É possível que também nessa época fosse formada concepções de que o número pi poderia ser o resultado da divisão de racionais e que, a menos da precisão das medidas e dos instrumentos não se obtinha tal número.

No curso, diante do questionamento se o número escrito na lousa poderia ser um número decimal exato ou periódico, não houve dúvidas, provavelmente proveniente do conhecimento de que o comprimento de uma circunferência dividido pelo seu diâmetro resulta no número pi, um irracional, historicamente difundido, inclusive por meio dos livros didáticos.

A questão orientadora da discussão foi se a resposta à divisão era um número racional ou irracional. Com o exposto até o momento, essa questão tinha como resposta que era um número irracional, mas como ter certeza? Aliás, perseguir certezas, como disse Guillen (1987), é bem típico dos matemáticos.

Um participante disse: "continuando a divisão", e foi o que ele se propôs a fazer. Enquanto o movimento de explicações continuava, ele foi realizando a divisão. De repente, ele interrompe o movimento das reflexões e diz com perplexidade: "pessoal, acho que achei o período, se não errei nenhuma parte da conta [...]", e como a olhar as contas, começou a verificar se realmente não havia errado em alguma parte do processo de divisão. A pergunta então foi retomada, agora com um dado novo, o silêncio se fez. Provavelmente devido ao pensamento dedutivo de alguns, ou seja, se há período nesse número decimal então ele não é irracional.

Interpretamos um dilema nas imagens conceituais:

1) Se a divisão entre as medidas do comprimento pela do diâmetro de uma circunferência for racional, tem-se que negar a irracionalidade de pi.

2) Se essa divisão é irracional, então o irracional tem período e, portanto, é também racional.

Nas imagens conceituais, há certos juízos que são dominantes frente a outros, mesmo não provenientes de pensamento dedutivo. Nesse contexto, alguns foram evidenciados como:

- O número irracional não tem período na sua representação decimal;
- É histórico que a divisão entre as medidas do comprimento pela do diâmetro de uma circunferência resulta no número pi; e
- Pi é irracional.

Esses juízos estão representados nas aprendizagens e práticas dos professores, estão também nos livros didáticos e, geralmente, ligado ao processo empírico de conhecimento.

Compartilhando com Guillen (1987), poderíamos supor que o silêncio representasse o medo da matemática relacionado à certeza de que ela, como ciência exata, tem uma resposta lógica sobre isso. Ou ainda, uma mescla do desconhecimento com as representações sociais do sujeito histórico professor que *deveria ter o conhecimento certo*, etc. Nesse momento, havia a irritação de alguns, o incômodo de outros, gerando emoções e atitudes diversas, diziam estar demorando, queriam a resposta certa. A solicitação de apresentação *da conclusão* foi justificada pelo longo tempo de discussão e, talvez, esse momento tivesse se caracterizado, como chamou Paulo Freire, de "momento indutivo", ou seja

> [...] é o momento em que o educador não pode esperar que seus alunos tomem a iniciativa do próprio progresso no sentido de uma idéia ou de uma compreensão, é quando o professor deve fazê-lo. Se os alunos avançam no estudo crítico espontaneamente, tudo bem! Temos de aplaudi-los quando o fazem. Mas há momentos em que os alunos não iniciam seu próprio desenvolvimento, e o educador deve fazê-lo [...] para juntar os fios num todo que propõe um problema ou uma percepção crítica, através da qual os alunos são estimulados a aprofundar o diálogo crítico[...]. (FREIRE; SHOR, 2001, p. 187-188)

E então, depois de algum tempo de silêncio e inquietações, a organizadora adicionou mais um elemento: se multiplicarmos a fração por 10/10, continuamos a ter o mesmo número? Houve consenso de que o número era o mesmo e então tínhamos uma fração de inteiros 276/89. Foi questionado se o número fosse 27,88/8,89, a resposta de outro professor foi imediata: "multiplicaríamos por 100 o numerador e o denominador". Houve aparentemente um consenso na generalização desse processo, de que sempre se conseguiria uma potência de dez que tornasse uma fração de decimais em fração de inteiros.

A partir dessa nova representação, foi solicitada a análise desse número, agora representado como fração de inteiros em relação com a definição de número racional. Esta não surgiu de imediato. Inclusive houve um comentário de que a organizadora tinha algo de novo para mostrar. Além de esse comentário ter proporcionado um indício de que a relação apontada não tinha se configurado, evidenciou-se que *o professor é revelador de conhecimento*, digno da *pedagogia da transmissão de conhecimento* (FREIRE; SHOR, 2001).

A organizadora retomou a proposta da discussão, defendendo o processo de desenvolvimento do conhecimento coletivo, buscando propiciar o movimento do pensamento teórico. Para isso, retomou os pontos principais das reflexões precedentes no intuito de organizar o pensamento.

Para esse fim, foi escrito na lousa qual a imagem da definição que eles tinham de racional (todo número que pode ser escrito na forma *a* sobre *b*, *a* e *b* inteiros e *b* diferente de zero), seguida da questão: há alguma contradição dessa definição com o julgamento da irracionalidade do número em questão?

Posteriormente foi acrescentado à discussão o argumento de um professor, "se a divisão feita for um irracional então a definição de racional que conhecemos não é suficiente", ou, acrescentou uma professora, "todo racional é irracional".

Embora surpresos com a contradição, não houve uma resposta que sintetizasse alguma organização lógica no pensamento. Identificamos que esse momento revela o confronto de imagens conceituais do coletivo, reveladas pela situação em relação ao número racional e ao número irracional com a imagem da definição de número racional.

As idéias que já tinham aparecido nas discussões foram reorganizadas, recompondo o lógico do histórico vivenciado desde o problema do alfaiate. A sensação da organizadora era que as ligações estavam se perdendo, pois alguns professores reclamavam que estavam cansados.

Após essa tentativa, foi feita à organizadora a seguinte questão: "qual é a *sua* definição de irracional?" A ênfase com que foi pronunciado o pronome *sua* é uma provável indicação de que existia *algo de novo que deveriam saber* e que a organizadora *possuía esse saber, por que o professor sempre sabe mais.* Idéias que refletem *a pedagogia de transmissão de conhecimento*, como mencionada anteriormente.

A organizadora disse a definição que consta nos livros didáticos do ensino básico: *o número é irracional se não pode ser escrito da forma a sobre b, a e b inteiros e b diferente de zero*. Um professor solicitou alguns exemplos, os quais foram escritos na lousa: $\sqrt{2}$, 1,2345... , dizendo que esse último seguia essa lei de formação.

A interação foi finalizando e o encontro também. A organizadora lembrou que esse exemplo é comum em livros didáticos e não se realiza a devida discussão. Dependendo do encaminhamento do professor, o estudante pode não se apropriar do conhecimento desenvolvido pela humanidade.

Despedimo-nos na expectativa de que os professores tomassem o problema para si e procurassem desenvolver sua solução e assim descobrissem a autonomia do seu conhecimento.

No encontro seguinte, ninguém falou de início sobre o problema discutido no último encontro. Foi encaminhada então a apresentação, ao grupo-classe, das sínteses dos pequenos grupos sobre os números racionais, a terceira situação proposta.

Uma parte das sínteses recuperou a relação com a medida, com ênfase à reciprocidade entre medida e número racional. Ou seja, ora justificando a criação da fração, como em "Com a medição foi observado que nem tudo se enquadrava na medição exata [...]", ora como o conjunto capaz de conter a representação de qualquer medida, em "para que serve os números racionais? Serve para [...] definir medidas através da comparação de grandezas". Isso significa que a construção do campo racional não é alheia à sua origem. Ao manter sua coerência, evidencia a permanência, o movimento da essência, mas a formação de um novo campo, o racional, requer superar a medida e pensar o número teoricamente.

> Como Euclides mais tarde o disse (Os elementos V.3), 'Uma razão é uma relação de tamanho entre grandezas de mesma espécie'. Um tal ponto de vista, que focaliza a atenção sobre a conexão entre pares de números, tende a por em relevo os aspectos teóricos do conceito de número e a reduzir a ênfase no papel do número como instrumento de cálculo ou aproximação de medidas. A aritmética agora podia ser considerada uma disciplina intelectual, além de uma técnica, e a transição para esse ponto de vista parece ter sido feita na escola pitagórica. (BOYER, 1993, p. 39)

Ao alcançar a lógica formal, o número racional não explicita na sua linguagem o pensamento empírico, mas ele ocupa um papel fundamental na sua criação e no seu desenvolvimento. Poderíamos, por exemplo, depois da criação da fração como número, inventarmos uma soma de frações como $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$, operacionalmente bem mais fácil e certamente os estudantes não teriam tantos problemas para aprender, mas como ficaria a medida?

Quando Caraça (1989) propõe refletir "sobre a natureza dos novos números e sobre a operação mental que levou à sua definição" (p. 36), ele encaminha as relações da medida com o novo número. Sintetiza a relação usando somente a medida linear, provavelmente pela própria história da sua criação, mas em vez de cordas, usa a forma geométrica, o segmento, e ao refletir sobre o racional, vai além da "expressão numérica de medição de segmentos".

No movimento de compreensão teórica do fenômeno da medida, do abstrato ao concreto, o conhecimento sobre esse conceito, numa determinada fase histórica, permite concluir que "é possível exprimir *sempre* a medida dum segmento tomando outro como unidade [...]" (CARAÇA, 1989, p. 36, grifo do autor). Essa operação mental evidencia um nível mais elevado de pensamento.

As expressões dos professores se caracterizaram na relação da medida, com números, e a necessidade humana, em:

> - Houve, por parte do homem a necessidade de se dividir o todo em partes (divisão de terras).
> - Os números naturais e os inteiros não atendiam mais a essas necessidades.
> - Criaram-se então os números racionais, ampliando assim conhecimentos de múltiplos e submúltiplos.
> - Surgiram outras formas de medidas com: km, m, dm, cm, mm.

E num caráter mais geral em: "Os números racionais assim como os naturais surgiram para suprir a necessidade de avanços do conhecimento".

Uma das sínteses apresentou palavras que, segundo o grupo, exemplificavam vários momentos de discussões ocorridas no curso.

> A partir da construção do conhecimento humano, deu-se a criação de conceitos como:
>
> | | |
> |---|---|
> | * contagem | * organização |
> | * análise | * padronização |
> | * qualidades | |

Percebemos que o movimento do pensamento numérico foi além das definições e representações formais. Somente um grupo representou o diagrama de Venn e outro, a definição “Todo número racional pode ser representado na forma a/b, onde $a \in Z$ e $b \in Z^*$”. A desconstrução dessa definição pôde ser observada em

> A construção da idéia do número racional é relacionada não só a divisão entre números inteiros, ou seja, desde que um número represente o quociente entre dois inteiros quaisquer ele é um número racional, excluindo-se o caso em que o divisor é zero.

Nessa definição, aparece a divisão como originária do racional diferente das definições que privilegiam a palavra ‘forma’, como anteriormente descrita.

Outra definição apresentada que também utiliza a ‘divisão’ foi:

> O que são números racionais?
> São todos os números possíveis de se representar por p/q, onde se efetuando a divisão pode-se obter N, Z; decimais exatos ou decimais periódicos.

Semelhante a essa definição foi apresentado: “Operação – todo número racional pode resultar em um número natural, decimal ou dízima periódica”. E, pela representação revelando a união de dois conjuntos, “pode ser escrito na forma decimal (decimal exato ou dízima periódica)”.

O compartilhamento de significados permitiu que oralmente aprimorassem suas sínteses e, como verbalizou um professor, saíssem da forma tradicional de definir racional. Interpretamos como uma forma de flexibilizar o pensamento, que de início pode mesmo assumir a forma de desconstruir uma definição para buscar melhor compreendê-la.

Todos esses juízos fizeram parte do movimento da apropriação a respeito do conceito de número racional, diferentemente do outro momento em que as imagens refletiam a identidade dos racionais somente com os fracionários. Neste outro, foram acrescentados os inteiros. Notamos que essa idéia se expressa também na resposta: “Serve para representar inteiros ou partes, valores inferiores a unidade”, quando da pergunta “para que servem os racionais?”, dita pelo próprio grupo.

O inteiro como racional é entendido por muitos, mas e o inteiro como fração? É muitas vezes fácil o entendimento da forma apresentada nos livros didáticos, de que, por exemplo, 3/1 representa *três dividido por um.* A dedução do resultado é feita por meio da divisão ou usando o conhecimento generalizado: *todo número dividido por um é igual a ele* *mesmo*, mas e na razão entre o movimento de dois inteiros? E na medida? Ou seja, antes de se considerar a fração como divisão.

Essas idéias podem ser discutidas e aprofundadas. Ifrah (1998) contribui a partir da sua análise histórica, que

> Com o desenvolvimento do cálculo e da aritmética, ficou claro que as frações se submetiam às mesmas *regras* que os inteiros e que eram, portanto, assimiláveis aos números (sendo um inteiro uma fração de denominador 1). (p. 326, grifo nosso)

Outra síntese apontada por um grupo sobre racionais refletiu um momento de discussão precedente sobre a divisibilidade: "Percebe-se então a diferença entre uma divisão exata e uma com resto diferente de zero". Retomamos o que o grupo queria dizer com essa afirmação e, brevemente, refletimos sobre a operação de divisão, divisibilidade e número racional, como também as representações possíveis do número racional.

No caminho das generalizações, observamos como a forma se relaciona com o conteúdo no desenvolvimento do objeto, retardando-o ou impulsionando-o. A notação das frações é um exemplo. Ifrah (1998) nos conta o que ocorreu numa determinada época com a criação da medida.

> Mas, apesar desse progresso, por causa de suas notações imperfeitas os antigos não foram capazes nem de unificar a noção de fração, nem de construir um sistema coerente para suas unidades de medida. (p. 327)

As relações entre fração e sistema de numeração foram realizadas primeiramente pelos babilônios que possuíam base sexagesimal e sistema numérico posicional. Hoje utilizamos notações como 5'20'' para designar 5 minutos e 20 segundos, não nos referimos a 5 minutos como 5/60 de hora nem 20 segundos como 20/3600 de hora. (IFRAH, 1998).

Nessa lógica, havia na matemática do século XVI uma preocupação das técnicas operacionais. Viète chegou a recomendar o uso das frações decimais, em vez das sexagesimais. Embora as frações decimais já fossem conhecidas na China, Arábia e Europa, elas não possuíam a notação que conhecemos hoje (BOYER, 1993).

A igualdade que sempre usamos $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5$ que é aparentemente simples, esconde um movimento nada trivial. O trabalho de Stevin acarretou numa grande contribuição à linguagem, ao usar o sistema de numeração decimal prolongando-o no sentido da direita da unidade, no que hoje nomeamos por décimos, centésimos, milésimos... Depois da publicação de Stevin, outros foram aprimorando as notações, e quanto à nossa vírgula, foi o neerlandês Wilbord Snelius que a inventou, no início do séc. XVII.

As conseqüências foram incalculáveis como diz Ifrah (1998), "a começar pela invenção do sistema métrico" (p. 328). Surge então a questão: *toda fração pode ser representada como fração decimal?* No curso, o decimal periódico pôde ser discutido num momento posterior.

Outro juízo que sintetizou reflexões de outros momentos do curso, indicando a relação de sucessor, número, medição e densidade, foi: "Com a medição, foi observado que nem tudo se enquadrava na medição exata, ou seja, entre um número natural e seu sucessor existia um espaço que poderia ser subdividido inúmeras vezes, rompendo assim com a questão da 'exatidão'". Essa resposta indica a possibilidade de o indivíduo tomar o problema para si e realizar ações em busca de suas respostas, da construção do conhecimento para si.

Retomamos a partir dessa síntese a discussão sobre o conceito de sucessor, que pôde alcançar outro nível de compreensão quando o próprio professor, que havia defendido a idéia de que um número racional apresentava vários sucessores, concluiu que estava considerando o sucessor como todos os números maiores que o número dado. Identificamos que à palavra *sucessor* estava sendo atribuída um pensamento da prática cotidiana no sentido *de tudo o que vem depois*.

Pudemos sintetizar como ocorre a formação de palavras-termos na matemática, representativas de um processo de conhecimento, um conceito, principalmente no caso dessa palavra ter outras significações em outros contextos. Nesse assunto, a opinião dos formalistas, segundo Dantzig (1970), é que "[...] o problema com as palavras humanas é que elas *possuem conteúdo*, enquanto o propósito da Matemática é construir formas puras do pensamento" (p. 93).

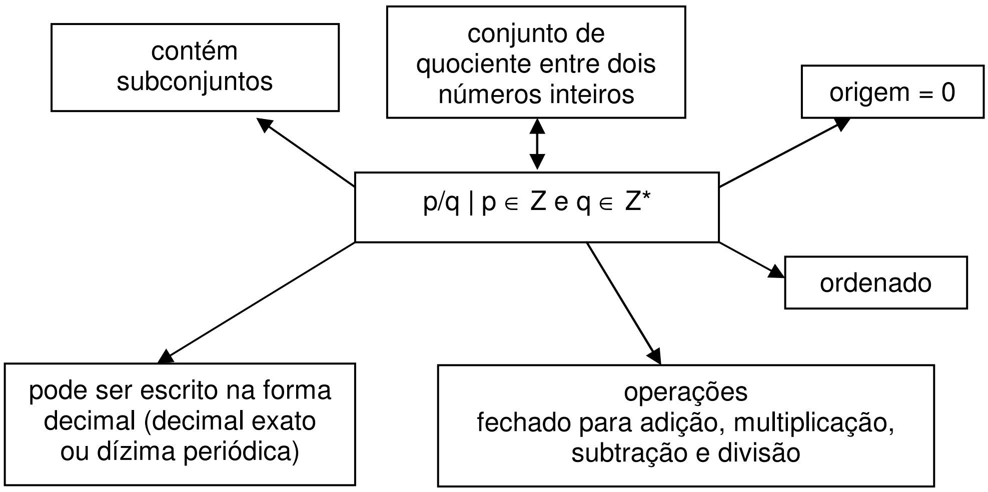
A retomada do problema do alfaiate foi refeita da seguinte maneira: As medições possíveis de o alfaiate realizar era um subconjunto de Q, definido assim Q_2={...;1,67; 1,68; 1,69; ...}. Nesse conjunto, o sucessor de 1,67 é 1,68. Foi consenso que no conjunto dos números racionais 1,67 não tem sucessor, pois entre 1,67 e 1,68 existem infinitos racionais. A generalização da obtenção de um número entre dois racionais distintos dados foi por meio da média aritmética.

A reestruturação do problema permitiu confrontar o pensamento empírico e teórico ligado à medida e ao campo racional. Essa organização do pensamento pode ter revelado uma transformação nas imagens conceituais de densidade do coletivo.

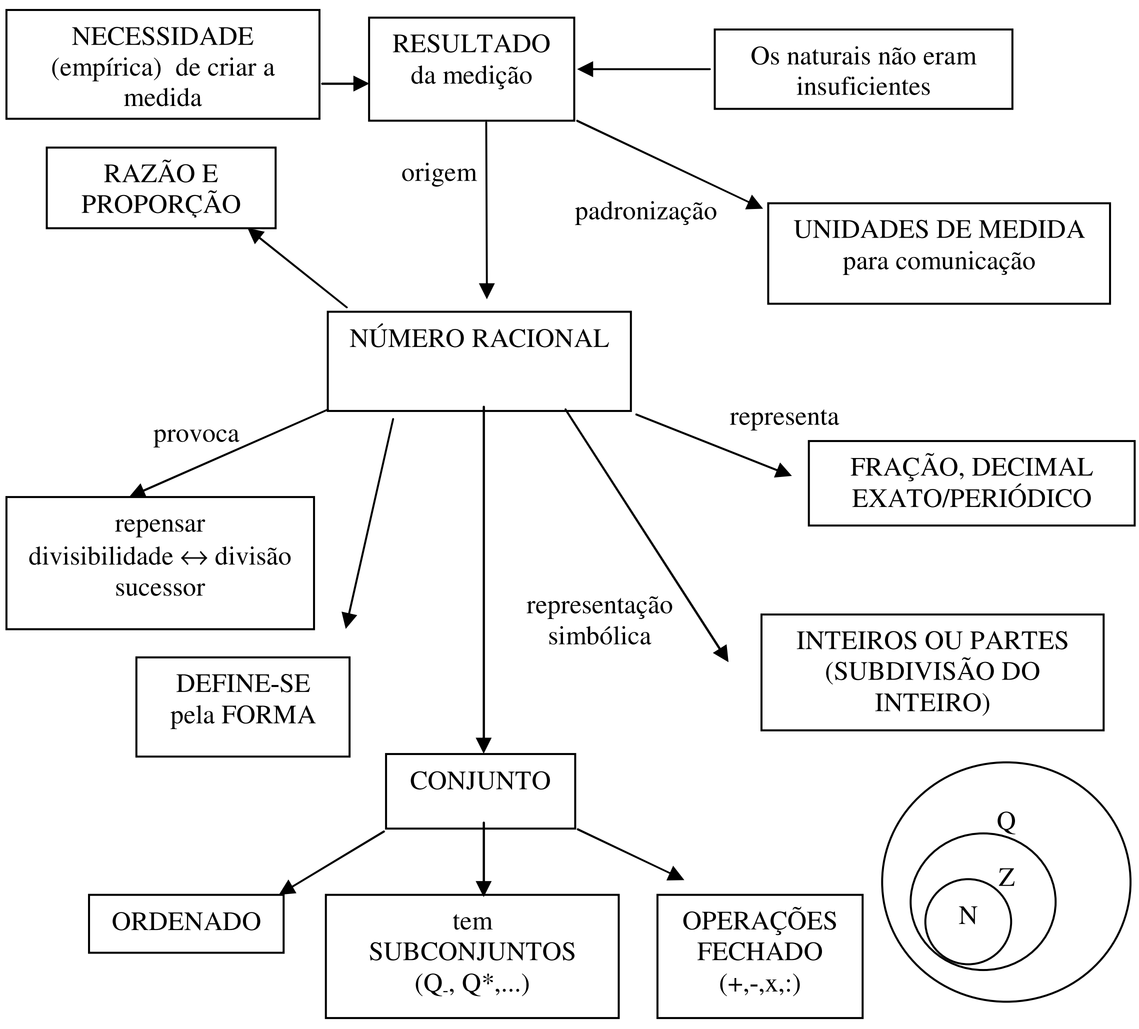
O conceito de ordem não havia sido discutido anteriormente, até que foi relacionado com o sucessor como mostramos no movimento da situação acima. Tanto o conceito de sucessor como de ordem puderam mostrar sua essencialidade para a formação dos conjuntos numéricos.

Outras relações que apareceram nos mapas conceituais que sintetizaram o (ver mapas-síntese na seqüência) conceito de racional naquele momento foram: "razão e proporção; subconjuntos de Q como Q*, Q_-, Q_+; Q é fechado para adição, multiplicação, subtração e divisão; número racional provoca o repensar divisibilidade, divisão e sucessor".

MAPA-SÍNTESE 1



MAPA-SÍNTESE 2



Uma síntese

Esta unidade didática caracterizou-se no movimento dialético entre as imagens conceituais de sucessor e densidade, divisibilidade e operação de divisão, número racional e número irracional.

A fluência do pensamento, no caminho percorrido desde a solução inicial dada ao problema do alfaiate até sua solução teórica, permitiu uma superação da imagem sensível – relacionada à fita métrica – e da generalização para o campo dos racionais, referente ao conceito de sucessor. Além da particularidade do juízo que configurou uma *sucessão de decimais*, a imagem de sucessor também produziu resposta como “1,000...1” como sucessor de 1. Essa resposta não foi a que gerou discussão, e sim a outra que indicava a possibilidade de ter infinitos sucessores.

O sucessor, na formação das imagens conceituais, caracterizou-se na dualidade do conteúdo ora mais próximo da *práxis* cotidiana – *tudo o que vem depois* – ora do formalismo matemático – n+1 –, ambos imersos na mesma forma empírica de apreensão.

O salto na compreensão de que só os inteiros têm sucessor, e que no campo dos racionais não se poderia ter o sucessor de 1,67, foi realizado pela autonomia do professor ao manifestar que estava considerando outro significado. Justificando com a própria imagem definição de densidade coerente com a significação matemática.

A síntese do coletivo compôs, na lógica dialética entre densidade e sucessor nos campos numéricos, a unidade dos contrários[42] nas imagens conceituais.

Essa discussão apontou para uma outra: a relação de ordem que não aprofundamos no curso e, nesse texto, descrevemos como uma possibilidade para futuras discussões. O campo racional, com a ordem que é proveniente da generalização de processos empíricos – *maior que* –, abordada no ensino, possui a propriedade de densidade. Algumas pessoas talvez se surpreendam, tanto quanto os matemáticos muitas vezes foram tocados por esse sentimento. Essa surpresa pode surgir no pensamento ao admitir que *todo número racional tenha sucessor*, considerando outra relação de ordem, um arranjo em espiral[43]. Com isso, o conjunto dos números racionais é equivalente ao dos naturais, denominado assim de enumerável.

As discussões do problema do alfaiate e da medida empírica do pi puseram a descoberto o próprio conceito de medida na sua *concreticidade*. A medida empírica foi superada com sua teoria, com a comensurabilidade e com conceito de densidade. A ilusão da medida também pode ser realizada com a negação da comensurabilidade, a incomensurabilidade.

As discussões sobre a irracionalidade de pi evidenciaram o problema da própria racionalidade de um número no seu aspecto teórico. As imagens das definições de número

[42] La identidad de los contrarios (...) es el reconocimiento (descobrimiento) de las tendencias contradictorias, *mutuamente excluyentes*, opuestas, de **todos** los fenómenos y procesos de la naturaleza (incluso el espíritu y la sociedad). La condición para el conocimiento de todos los procesos del mundo e su "*automovimiento*"... La unidad (...) de los contrarios es condicional, temporaria, transitoria, relativa. La lucha de los contrarios mutuamente excluyentes es absoluta, como son absolutos el desarrollo y el movimiento (LENIN, 1963, p. 351-352, grifos do autor).

[43] Sugerimos ver detalhes em Dantzig (1970).

racional e de número irracional dos professores não estavam sendo flexionadas no pensamento, num determinado momento. A hipótese é que tais imagens não tinham sido construídas pelo indivíduo, e sim aprendidas na sua sintaxe, produzindo um pensamento empírico desta e caracterizando assim uma imagem da definição estática nesse sistema de relações.

O movimento do pensamento numérico do coletivo avançou na discussão do campo irracional. As imagens conceituais ligadas à irracionalidade e à racionalidade do número puderam ser confrontadas no dilema em torno do número pi. O dilema colocou em evidência o homem inacabado, o problema da verdade, da certeza e das relações afetivas e emocionais agregadas, como também os significados de aula e de professor, que interpretamos como pertencentes ao currículo industrial.

O dilema pôde também evidenciar o lógico-histórico das imagens conceituais dos sujeitos provenientes do meio educacional.

A história do ensino da matemática por meio dos livros didáticos, como exposto anteriormente, pôde evidenciar seus reflexos até os dias de hoje quanto ao ensino da irracionalidade do número pi. Ao mesmo tempo, notamos como a história da matemática está sendo abordada na educação escolar. A mediação de elementos históricos na aprendizagem encontra-se por vezes em fragmentos e buscam suprir um caráter metodológico no desenvolvimento de um conceito.

Os movimentos do conceito realizados pela humanidade e pelos sujeitos não foram idênticos no sentido de repetição do histórico. E sim, na sua essência, no movimento dos nexos internos do conceito, na dialética destes, na apropriação mediada pelo histórico dos sujeitos.

As imagens conceituais de divisibilidade manifestadas identificaram-se com as da operação de divisão, reforçando a necessidade de apropriação do pensamento teórico da transição do campo dos números inteiros ao dos racionais. Essa necessidade foi manifestada em momentos anteriores, pela identificação do racional como a parte-todo.

As discussões possibilitaram um avanço no movimento do pensamento numérico, na confrontação das limitações empíricas ligadas à medida e à lógica formal, com as possibilidades teóricas do pensamento. Interpretamos que se iniciou um processo de pensar a matemática com seus próprios entes, processo ligado ao movimento de apropriação do lógico-histórico do conceito de número racional.

No processo lógico-histórico do conceito de racional,

> As considerações que levaram à construção do domínio racional foram os primeiros passos num processo histórico chamado aritmetização da Matemática. Esse movimento, que começou com Weierstrass na década de 1860, tem por objetivo a separação de conceitos puramente matemáticos, tais como número, correspondência e conjunto, de idéias intuitivas, que a Matemática adquiriu através de uma longa associação com a Geometria e a Mecânica. (DANTZIG, 1970, p. 93)

As sínteses dos professores, em relação ao campo racional, apresentaram tanto as imagens como definições provenientes do livro didático quanto algumas desconstruções. A passagem da definição escrita pela *forma* (de representar o racional) para o *quociente* pode ter desencadeado as transformações dessas imagens referente à transição ao conjunto dos números racionais.

Notamos que no mapa-síntese 2 houve mais articulação com o conceito de racional, embora ambos representem o conhecimento empírico, como anteriormente mencionado. O mapa-síntese 2 apresenta também os conceitos divisibilidade, divisão e sucessor, discutidos nessa turma, como sendo *provocados* ao se estudar o campo racional. Esse indicativo é revelador do movimento do conceito do indivíduo, suas imagens conceituais.

Na metodologia proposta para que o indivíduo seja o sujeito do seu próprio conhecimento, ou seja, realize também uma atividade de estudo, essas questões, dúvidas, incertezas poderão motivá-lo na busca de uma compreensão mais profunda do fenômeno, que vão além da sala de aula. Além disso, educador e educando vão percebendo aos poucos que o professor é realmente mediador e não o *informador* ou *o transmissor de conhecimento*. Os processos de discussão permitiram uma análise que versa sobre os *enlaces mentais* – da realidade à possibilidade – e que desvenda o processo humanizador de apropriação e de objetivação do conhecimento.

Sabemos que outros fatores são mediadores desse processo humanizador, principalmente das condições de trabalho do professor, tanto no que se refere à estrutura do sistema escolar, quanto também esta relacionada à condição social e psicológica. Asbahr (2005) investigou a influência das condições objetivas na atividade psicológica do professor e como estes elaboram seus sentidos pessoais.

Na unidade seguinte, esse problema alcançou outro nível de reflexão que possibilitou complementar, em termos de análise, o movimento na formação das imagens conceituais sobre os números racionais e irracionais, a comensurabilidade e a incomensurabilidade.

4.3.7 UNIDADE DIDÁTICA: ATIVIDADE ORIENTADORA DE ENSINO DA RETA REAL

O objetivo deste curso consonante com o da pesquisa foi o desenvolvimento do pensamento numérico dos sujeitos numa proposta didática cuja meta foi a reta real. Optamos por iniciar o curso desde a formação na unidade didática sistema de numeração, na gênese do número, para buscarmos uma compreensão do movimento lógico-histórico do número. Com isso, integrarmos no processo de apropriação do conceito e objetivação das imagens conceituais.

A intencionalidade no curso foi realizar uma atividade orientadora de ensino que organizasse uma proposta de transição de um ensino da matemática baseado ora na formalização dos números, ora na relação estreita com o cotidiano – como interpretamos o ensino até os dias de hoje – para uma matemática educacional. Esta sob princípios humanizadores de apropriação do conhecimento.

Essa proposta uniu propósitos metodológicos de ensino fundamentados *na atividade orientadora de ensino, na teoria da atividade*, *no lógico-histórico do conceito* e como conteúdo matemático: os campos numéricos. O motivo de investigação, de compartilhamento dos estudos realizados pela pesquisadora-organizadora, e das ações desenvolvidas, tanto na formulação de propostas como no desenvolvimento destes, caracterizaram a *atividade orientadora de ensino e de pesquisa* direcionada à transformação para a matemática educacional.

No decorrer do curso, trabalhamos com grandezas discretas e contínuas e sua relação com os números. Pudemos reproduzir o sistema numérico decimal pela contagem, recriar a *régua* – unidade didática medida – e *a régua racional* no processo de medição empírica de grandezas contínuas – unidade didática densidade, comensurabilidade, incomensurabilidade e o número –, mas não havíamos discutido continuidade.

Na constituição do número nos campos numéricos, discutimos os naturais, os racionais e mais brevemente os irracionais, mas ainda não havíamos discutido números reais. Embora o salto quantitativo e qualitativo do campo numérico dos racionais para o campo dos reais seja o conceito de continuidade ou completude. Há outros conceitos relacionados que permitiram que a continuidade tivesse alcançado o estágio atual. A continuidade dos reais não existiria sem os irracionais e sem o infinito real. No primeiro movimento (como denominamos), dessa unidade didática, explicitamos como foi abordado o conceito de continuidade – realizado com uma única turma de professores.

Essa unidade didática também uniu os propósitos metodológicos com o desenvolvimento conceitual, de um modo diferente das unidades anteriores. A proposta se constituiu na elaboração, pelos professores, de planos de ação que possibilitassem a apropriação do conceito de número real pelos estudantes, com a intenção de desenvolver suas atividades orientadoras de ensino. As propostas e sua análise se encontram abaixo no que nomeamos segundo movimento.

Os professores se conscientizaram que, para a realização de um plano de ação como estávamos vivenciando no curso, seria necessário realizar pesquisa, mas não tinham condições objetivas para isso. Assim, a proposta se configurou na elaboração de situações-problema. Em uma turma as situações foram desenvolvidas fora dos encontros e, na outra, durante os encontros.

À turma que elaborou as situações-problema fora dos encontros, foi solicitado que desenvolvessem a situação com os alunos. Devido às condições objetivas destes nas escolas, dois professores o fizeram. Como nem todos lecionavam no Ensino Médio, os professores selecionaram conceitos desenvolvidos no curso. Os que assim realizaram, analisamos no segundo movimento com subtítulo ‘outras situações-problema’. Essa mesma turma elaborou mapas-síntese de discussões sobre o que se deve contemplar no ensino dos números reais, que foram sintetizados no terceiro movimento dessa unidade didática.

A apresentação desta unidade está organizada na seguinte forma:

- Primeiro movimento: paradoxo de Aquiles e a tartaruga.
- Segundo movimento: as situações-problema.
- Terceiro movimento: uma síntese.

Primeiro movimento: paradoxo de aquiles e a tartaruga

Esse primeiro movimento assemelhou-se aos desenvolvidos nas outras unidades didáticas, ou seja, sob a introdução de uma situação-problema, buscou-se desencadear uma reflexão e uma discussão sobre os conceitos envolvidos. A diferença foi que nesta unidade didática buscamos detalhar um pouco mais o percurso da atividade orientadora de ensino e de pesquisa.

Para definir a situação-problema pesquisou-se o conceito de continuidade em obras de abordagem histórica, livros didáticos e pesquisas científicas que relacionam o ensino e aprendizagem desse conceito com os números reais. Esse movimento de busca do pensamento lógico dialético na história do desenvolvimento do conceito consistiu em recriá-lo na mente, reproduzi-lo, apropriar-se, num sistema de relações orientado pelo objetivo: a elaboração de uma proposta para discussão com os professores. Por isso, nesse sentido, o professor (nesse momento, a organizadora), ao exercer sua atividade orientadora de ensino, também compõe a necessidade de estudo.

> O estudo da história do desenvolvimento do objeto cria, por sua vez, as premissas indispensáveis para uma compreensão mais profunda de sua essência, razão porque, enriquecidos com o conhecimento da história do objeto, devemos retomar mais uma vez a definição de sua essência, corrigir, completar e desenvolver os conceitos que o expressam. (KOPNIN, 1978, p.186)

Aliado a esse estudo, no objetivo de organizar o ensino, existia o curso em movimento: uma construção conjunta de pensar forma e conteúdo no ensino e na aprendizagem da matemática. O movimento do curso nos indicou uma predominância, no pensamento do coletivo, da medida. As grandezas discretas e contínuas foram abordadas, buscando a relação com o número, constituindo um pensamento que se aproximou em essência da escola pitagórica.

A escola pitagórica tinha uma filosofia, *tudo é número*. O número a que se referia a escola era o número inteiro. Com o movimento da contagem e da medição que conheciam até uma determinada época, poderíamos traduzir sua filosofia em *tudo é mensurável.* Com essa turma, não havíamos desenvolvido nenhuma situação-problema a respeito dos incomensuráveis.

Os estudos também apontam a possibilidade de outro percurso, diferentemente da escola pitagórica, para o tratamento das grandezas como segmentos. Esse foi o caminho escolhido na época de Euclides que, em *Os elementos*, representava os inteiros por segmentos. Durante um período os problemas apresentados em *Os elementos* buscavam evitar o uso das razões e proporções de grandezas, pois as grandezas incomensuráveis ainda eram inquietações na mente dos pensadores da época. Essas grandezas começaram a ser aceitas no livro V d' *Os elementos* com a teoria das proporções de Eudoxo[44], como ficou conhecida[45].

O problema da incomensurabilidade, supostamente descoberto pelos próprios pitagóricos (DANTZIG, 1970) na relação entre o lado e a diagonal de um quadrado, e os

---

[44] Eudoxo de Cnido (408-355 A. C.).
[45] Para maiores detalhes recomendamos a leitura de Boyer (1993) e Cobianchi (2001).

paradoxos de Zenão[46] enfraqueceram a escola pitagórica. Com isso, a geometria então pôde se sobressair. A geometria teve êxito a partir da academia de Platão e associados, pois sua filosofia estava estampada na própria porta de sua escola, "que ninguém que ignore a geometria entre aqui" (BOYER, 1993, p. 63). Não que essa escola tivesse a solução ao problema dos incomensuráveis, mas buscava uma outra maneira de pensar a ordenação do universo, substituindo o *tudo é numero* dos pitagóricos, fundamentado no aspecto quantitativo para o que podemos dizer como *tudo é forma* dos platônicos, corrente essencialmente qualitativa.

A continuidade e a incomensurabilidade se constituíram a negação do pensamento da escola pitagórica. A crise dessa escola foi acompanhada pela superação e pelo desenvolvimento dos números.

A incomensurabilidade pelo caminho das medidas já havia sido iniciada no curso quando foi abordada a razão entre comprimento e diâmetro da circunferência. Além disso, ela se encontra no ensino escolar, mesmo de forma obscura, com a abordagem do teorema de Pitágoras.

Para abordar a continuidade, analisamos como ela vem sendo construída no ensino na sua ligação com o número real, ou seja, o lógico-histórico do ensino-aprendizagem da continuidade da reta real. Iniciamos analisando as sínteses das obras destinadas ao Ensino Fundamental, Médio e Superior em Cobianchi (2001) e Dias; Moura (2006), e em seguida as concepções de professores em relação ao ensino e a aprendizagem dos números reais e a continuidade.

No Ensino Fundamental, como atualmente é denominado, as dezenove obras analisadas por Cobianchi (2001), entre elas livros didáticos e propostas curriculares, cujas edições compreendem o período de 1969 a 1999, juntamente com os quatro livros didáticos brasileiros desse mesmo período analisados por Dias; Moura (2006), não contêm qualquer proposta de ensino sobre continuidade relacionada à abordagem do número real.

As menções que aparecem são notas históricas, como a indicação da Proposta Curricular para o Ensino da Matemática – Primeiro Grau, da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo –, publicada em 1992, que segundo Cobianchi (2001):

[46] Zeno de Elea (viveu por volta de 450 A. C.)

> Afirma que a questão da existência e caracterização do número irracional foi muito complicada, que os gregos não conseguiram superá-la, e que somente há pouco mais de cem anos é que esses números foram sistematizados. Afirma também estar por trás desse tema, o conceito de continuidade, que, embora tenha sido discutido por mais de 25 séculos, recebeu um tratamento rigoroso a partir de 1872 com a obra de Dedekind (continuidade e números irracionais). (p. 217).

A obra *Experiências matemáticas*, também uma publicação da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo –, de 1994, também faz uma menção sobre a sistematização dos irracionais e o conceito de continuidade.

> Afirma que, apesar de ser muito antiga a convivência do homem com os números irracionais, somente há pouco mais de cem anos é que esses números foram sistematizados por Dedekind, e que por trás desse tema está o conceito de continuidade. (Cobianchi, 2001, p. 221).

Nos dezoito livros brasileiros analisados por Cobianchi (2001) e Dias; Moura (2006) – dezesseis por Cobianchi – destinados ao atual denominado Ensino Médio, cujas edições compreendem o período de 1946 a 1995, a continuidade também não está presente, embora os números reais sejam mais abordados nesse nível de ensino, comparado ao anterior.

Cobianchi (2001) encontrou uma menção sobre continuidade no livro *Curso de álgebra*, de Sinésio de Farias, de 1946, "obra de referência para professores do ensino do antigo ginasial e colegial e também para uso dos candidatos à Escola Militar e à Escola de Aeronáutica" (p. 229). Nela a definição de números reais é um conjunto "ordenado, contínuo e ilimitado nos dois sentidos" (p. 229).

Outra menção que poderia sugerir uma relação com a continuidade foi a abordagem dos paradoxos de Zenão, mas o que aparece é um "breve relato" juntamente com a "estrutura das mônadas" (COBIANCHI, 2001, p. 229), no livro Lisa – Biblioteca da Matemática Moderna, tomo I, de Antonio Marmo de Oliveira e Agostinho Silva, edição de 1969.

O assunto funções contínuas está presente nos livros atuais brasileiros de cálculo diferencial e integral. Uma abordagem destinada ao ensino secundário foi encontrada no livro português de 1924 destinado ao Ensino Secundário Oficial – 6ª e 7ª classes, de Andréa, nomeado *Compêndio de álgebra – curso complementar*. O modo como ele inicia o tema da continuidade, anteriormente ao tratamento algébrico, mostra-nos o início de uma captação do fenômeno, com o olhar matemático.

> Tratemos apenas das funções de uma variável.
> Na linguagem vulgar diz-se que uma quantidade varia continuamente quando, aumentando ou diminuindo qualquer dos seus valores tam pouco quanto quisermos, obtemos outro valor da mesma quantidade.
> Assim, considera-se o tempo como uma variável contínua e do mesmo modo dizemos que a quantidade de líquido recebida por um recipiente que está a encher numa fonte cresce continuamente, etc., etc.
> Também, observando os fenómenos naturais, dizemos, *grosseiramente,* que uma grandeza é contínua se as variações que experimenta são pequenas quando os de outra grandeza de que ela é função são também pequenas[1].
> No caso anterior diríamos portanto que a quantidade de líquido recebido e uma função do tempo decorrido.
> …
> 55. Na prática, […] e se se tratar de um fenómenos que supomos variar continuamente, ligam-se todos esses pontos por uma linha passando por eles ou afastando-se deles o menos possível, e de modo a não apresentar nem variações bruscas nem irregulares.
> Assim, por exemplo, observando repetidas vezes o brilho, da estrêla variável *SS Gygni* e tomando para abscissas os tempos e para ordenadas a grandeza da estrêla, obteremos um certo número de pontos, e unindo-os como dissemos, obteremos uma curva a que se dá o nome de *curva de luz* da estrela.
> […]
> 56. Até aqui temos empregado uma linguagem pouco precisa; vamos agora dar algumas definições que, embora mais abstractas, precisam rigorosamente o que havia do vago nos dizeres procedentes. (ANDREA, 1924, p.28-30).
>
> Nota[1]: Os antigos filósofos traduziam a sua crença na continuidade dos fenómenos naturais pelo aforismo: – Natura saltus non facit.

Nesse exemplo, ao pensar em continuidade no conjunto dos números reais, podemos pensar os fenômenos apresentados separadamente, não necessariamente dependentes, em relação funcional. O autor inicia salientando que se trata de uma 'linguagem vulgar' ao usar experimentos empíricos para intuir a continuidade, como o tempo e o enchimento de um recipiente com líquido. Notamos o pensamento dialético que primeiramente capta a continuidade e, após construir essa imagem, a recompõe em percepções discretas. Como fez no problema da estrela, usando o contínuo da linha do gráfico. Esse é um exemplo de abordagem que nos permite iniciar um pensamento sobre a apropriação da matemática da continuidade, um ponto de partida particular.

Continuando as análises nas obras, nas dezoito de cálculo diferencial e integral editados entre 1961 e 2001, analisados por Cobianchi (2001), a continuidade do conjunto dos números reais também não é um tema que tenha merecido tratamento. Uma possível aproximação poderia ter sido dada na obra de James Stewart, de 2001, por usar um paradoxo de Zenão, mas a abordagem está mais relacionada à representação do número decimal usando seqüência e limite (COBIANCHI, 2001).

A bijeção entre pontos da reta e números é tratada em algumas poucas obras (mais detalhes no segundo movimento) destinadas tanto ao Ensino Fundamental e Médio como no Superior, mas o porquê dessa necessidade não é abordado. O mais comum é a reta como modelo de representação dos números, principalmente por que é útil essa abordagem no tratamento das funções, da geometria analítica.

Pode-se dizer que ao invés da análise dos livros de cálculo diferencial e integral, dever-se-ia analisar os livros de análise real utilizados no Nível Superior de ensino. Porém, a realidade da formação dos professores nos orienta que 48% dos professores do Ensino Fundamental e Médio, sujeitos da pesquisa, não tiveram aulas de análise real, outros 36% não lembram e 16% afirmam que as tiveram (DIAS, 2002).

Esse breve percurso nos livros didáticos permitiu-nos acompanhar uma parte da história do ensino da continuidade da reta real. Aliado a esse processo, Cobianchi (2001) fornece-nos depoimentos de professores, quanto ao ensino e a aprendizagem, ao entrevistar quarenta e três estudantes de um curso de pós-graduação – para professores de matemática. Sendo, quatro professores de vários níveis de ensino e quatro do Ensino Superior, totalizando cinqüenta e um que responderam às questões:

> 10) Para você, qual a importância para a Educação Matemática, em se ensinar/aprender números reais e continuidade?
> 11) Como você introduz didaticamente para seus alunos a questão de números reais e continuidade? Quais as maiores dificuldades que você encontra ao ensinar esse assunto? [...]
> 12) Na sua compreensão, é satisfatória a maneira como os livros didáticos abordam a questão números reais e continuidade? (p. 284)

Em relação à questão 10 a importância se caracterizou em

> [...] uma decorrência natural para a ampliação dos conjuntos numéricos e suporte para o entendimento e aplicação em outros conceitos da Matemática.
> [...] compreensão da lógica e desenvolvimento do raciocínio.
> [...] um processo de enriquecimento [relacionado ao aprendizado do aluno].
> [...] uma necessidade [...] (p. 298-300)

Interpretamos que a importância apontada na primeira afirmação poderia se referir a qualquer conjunto, além disso, revela um caráter *naturalizante* do conhecimento, ou seja, como se a própria natureza desencadeasse esse percurso. Desse modo, o conhecimento não se concebe como produto humano. Esta, juntamente com a segunda questão, compõe indícios do pensamento matemático proveniente do lógico-formal, devido à aplicabilidade e lógica mencionada. Em geral, as afirmações não se referem a nenhuma especificidade dos números reais e da continuidade, caracterizando uma generalidade, frente a um desconhecimento da essência dessa relação. Cobianchi (2001) ressalta que dezessete dos entrevistados "desconhecem a importância em se ensinar e, logicamente, em aprender números reais. Porém, muitos consideram essa questão como fundamental para o ensino da Matemática" (p. 300).

Quanto ao ensino e à aprendizagem dos números reais – questão 11, – "Quase todos os entrevistados ministram esse conteúdo através da reta numerada [...]" (p. 301), realizando uma seqüência didática que parte do conjunto dos naturais e chega ao dos reais, e este como união dos racionais e irracionais. Além disso, dois entrevistados indicaram procedimentos de abordagem da densidade.

Ainda nessa questão, houve respostas de estratégias para explicar os números, usando "instrumentos do cotidiano" como "salas, igrejas, diagonais, desenhos [...] e para descoberta do número pi: [...], rodas, tampas [...]" (p. 302).

A dificuldade de se ensinar esse assunto

> [...] pode estar na falta de conhecimento de noções de infinito atual, e também na falta de noções de continuidade antecedendo a exposição do tópico: números reais. Outra dificuldade acrescentada muitas vezes à anterior, é a encontrada pelos alunos na comparação entre números pertencentes a diferentes conjuntos numéricos, e também a localização desses números na reta numerada. Essa dificuldade pode estar relacionada com a falta do conceito de ordenação. (COBIANCHI, 2001, p. 303)

Quanto à abordagem nos livros didáticos, as opiniões divergiram, uns disseram que os livros precisam ser "mais objetivos, claros e mais profundos" (COBIANCHI, 2001, p. 304). Outros estão satisfeitos ao mencionarem que a abordagem vem sendo melhorada. Também a falta de explicação e de uma "abordagem de natureza mais prática" (p. 304) compõem os aspectos que ligam a necessidade do professor aos livros didáticos.

Essas opiniões são coerentes com os procedimentos didáticos mencionados que versam entre o lógico-formal e a *práxis* cotidiana, que por sua vez, referem-se mais à abordagem do número real do que sua continuidade.

Além disso, *o porquê* indicado pela primeira questão, representado pela importância nas respostas dos professores, manifestou a significação construída por eles no seu processo formativo, incluindo seu trabalho como professores.

A abordagem lógico-formal no ensino escolar esconde as turbulências do pensamento matemático, da formação conceitual, ocorridas na sua história. Esconde o processo das escolhas, o pensamento intuitivo, a filosofia.

Na outra vertente, mais atual no Ensino Básico, nega-se o lógico-formal da matemática no seu estado mais elaborado, a formalização, para se abordar no ensino o imediato da cotidianidade. Nesse processo, uma síntese do conhecimento teórico é posto, não criado, e é utilizado para explicar os fenômenos empíricos. Com isso, o movimento do pensamento torna-se de um pseudo-universal ao particular, na medida em que a compreensão do universal não se efetiva.

Essa análise caracterizou um isolado que pretendeu captar o movimento lógico-histórico do ensino e da aprendizagem da continuidade dos números reais, com o objetivo de compreender seu movimento histórico, assim como do professor.

A partir do que foi analisado, compreendemos que a continuidade do conjunto dos números reais não foi pensada, o que existe é uma relação harmônica entre a reta e a representação dos números nesta, ou uma bijeção dada.

Esse cenário, juntamente com as condições objetivas, fez com que de início não proporíamos no curso a análise da continuidade na reta, para depois analisarmos as propriedades dos conjuntos. Porque, talvez, fosse um salto naquilo que é um processo de criação no pensamento, ou seja, a continuidade geométrica da reta.

A proposta se configurou na possibilidade de pensar a continuidade sem os elementos já formalizados na matemática, orientada pelo pensamento da escola pitagórica, para depois explorar modelos de continuidade. Seria realmente a reta o melhor modelo? Por que ela foi considerada como tal? Nesse movimento, a associação da reta – contínua – ao número seria unir novamente a geometria à aritmética, uma necessidade histórica, iniciada pela geometria analítica de Descartes.

A decisão foi então evidenciar esse movimento histórico e propor aos professores um dos paradoxos de Zenão para ser pensado e discutido. A escolha foi àquele que menor dificultasse a compreensão do problema em si, para que o pensamento pudesse buscar níveis mais elevados nos conceitos confrontados, o contínuo e o discreto.

Abordar um paradoxo pareceu coerente com a complexidade do movimento do curso. Repensar nas grandezas principalmente um aprofundamento àquelas que apareceram em sínteses anteriores, como espaço e tempo, relacionadas ao movimento, julgamos que seria um processo de transição adequado.

Segundo Dantzig (1970), pela análise do historiador Tannery, Zenão "utilizou a indubitável realidade do movimento para mostrar as flagrantes contradições existentes em nossas noções do espaço, tempo e continuidade" (p.115).

Nesse percurso, os argumentos de Zenão "mostram que espaço, tempo e movimento, da maneira que são percebidos por nossos sentidos (ou por suas extensões modernas, os instrumentos científicos), não são co-extensivos aos conceitos matemáticos de mesmo nome" (DANTZIG, 1970, p. 115).

Em pesquisas, é freqüente encontrar os paradoxos de Zenão ou variações dele para desenvolverem os conceitos de continuidade e infinito. Em Santos (1995), encontramos a seguinte formulação em uma conversa com estudantes do segundo e do terceiro ciclo do Ensino Fundamental:

> Imaginem uma pulga que conhece cálculo e ela quer alcançar a ponta do rabo de um cachorro, de um cãozinho que tá dormindo. Cada salto que a pulga dá é metade da distancia que a separa do rabo do cachorro. Então é possível dizer quantos saltos ela vai dar até chegar? (p. 129)

Outra variação é o *paradoxo do relógio,* intitulado por Nobre (1996), ao indicar essa abordagem para a sala de aula.

> Este paradoxo pode ser traduzido para os dias atuais como sendo o "Paradoxo do Relógio" que é expresso da seguinte forma: Se os ponteiros de um relógio estão sobrepostos às 12 horas, quando (exatamente) eles estarão sobrepostos novamente? Se considerarmos os mesmos procedimentos acima [referindo-se aos argumentos de Zenão no paradoxo de Aquiles e a tartaruga], os ponteiros nunca irão estar sobrepostos. *Por que isto acontece?* (p.34-35)

As opiniões quanto aos paradoxos também são muitas, Ávila (1999) no seu artigo diz:

> Vez por outra encontro um artigo tentando explicar os paradoxos de Zenão [...]. Mas as 'explicações' que eles apresentam não passam, a meu ver, de tentativas frustradas, que apenas transferem a dificuldade para outro domínio do conhecimento, sem resolver o problema. (p. 9)

Depois do desenvolvimento comentado das séries infinitas, conclui: "Dissemos que é provável que Zenão estivesse procurando, com seus paradoxos, evidenciar as deficiências das bases racionais do conhecimento. A ser isso verdade, poderíamos então dizer que Zenão seria muito atual em nossos dias!" (ÁVILA, 1999, p. 16).

Em artigo anterior, Ávila (1984) abordou, juntamente com a descoberta dos incomensuráveis, outras dificuldades enfrentadas pelos pitagóricos que rompiam com uma "suposta harmonia entre a Geometria e os números" (p. 8), os paradoxos de Zenão.

A diversidade nas particularidades de estudos dos paradoxos de Zenão, sejam eles históricos, filosóficos, matemáticos ou educacionais, significam sua riqueza cultural. Esse conjunto de contributos reforçou nossa escolha.

Então a proposta aos professores foi assim encaminhada:

<u>Proposta: Paradoxo de Zenão</u>

Analisando a situação abaixo, você concorda que se trata de um paradoxo? Por quê?

Aquiles e a tartaruga apostam uma corrida. A tartaruga sai a certa distância a frente de Aquiles. Eles iniciam a corrida ao mesmo tempo.

Quando Aquiles atinge a posição em que a tartaruga se encontrava inicialmente, a tartaruga já terá avançado, por mais rápido que seja Aquiles e por mais lenta que seja a tartaruga. E quando Aquiles cobrir essa distância, a tartaruga já terá avançado um pouco mais.

Esse processo continua indefinidamente e Aquiles nunca alcançará a tartaruga.

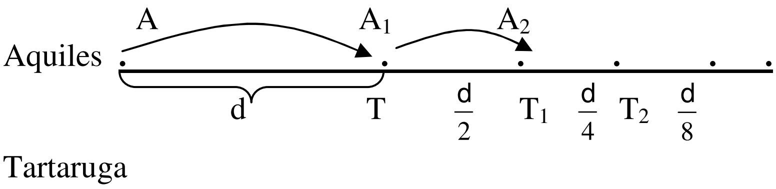
De início, os grupos não se envolveram com o problema. Alguns já tinham ouvido falar nesse paradoxo, mas nunca tinham analisado seus fundamentos. Uma relação com a sala de aula no sentido metafórico apareceu por meio da expressão "parece que os alunos não aprendem e eles estão aprendendo".

Depois de algum tempo, observou-se que os grupos estavam se dispersando. A intervenção foi realizada na tentativa de uma discussão coletiva que permitisse primeiramente compreender o problema. Uma sugestão foi admitir que a velocidade da tartaruga fosse metade da de Aquiles. Depois desse momento, os professores voltaram ao trabalho em grupos.

As sínteses dos grupos revelaram inicialmente três formas de pensamento na abordagem do problema. Uma delas relacionada à Física, na análise do movimento, outra, à matematização do percurso; e outra, à reflexão de alguns aspectos.

A resolução matemática usou recursos da progressão geométrica e o limite, ou seja, a soma infinita de uma progressão geométrica.

A interpretação do problema inicialmente foi feita por meio do esquema:



A partir desse desenho, outro foi feito, intitulado ‘com números’. No lugar da letra ‘d’, representativa da distância percorrida por Aquiles no primeiro momento, foi colocado o número 10. Nas outras marcas foram escritos os números $\frac{10}{2}$; $\frac{10}{4}$; $\frac{10}{8}$; $\frac{10}{16}$; $\frac{10}{32}$ e estas foram reescritas na seqüência 5; 2,5; 1,25; 0,625.

O esquema se aproxima de uma modelização pictórica do problema, embora os segmentos representativos das distâncias a partir de $\frac{d}{2}$ não evidenciam sua diminuição. Esta somente é captada pela seqüência numérica.

O desenvolvimento da solução continua:

$$\text{Somatória } S=\frac{a_1}{1-q}$$

$$S=\frac{d}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow S=\frac{d}{\frac{2-1}{2}}$$

S= 2d
Com número d=10
[repete as substituições na fórmula]
S=20
Eles irão se encontrar na posição 20

Depois da exposição, nenhum dos outros grupos comentou. Após um período de silêncio, voltaram a ler o paradoxo e disseram que Aquiles e a tartaruga se encontram, por exemplo, “na posição 20”. Quando questionado quais os conceitos que estão em jogo a resposta do mesmo grupo foi: “é lógica matemática e lógica física”.

Interpretamos que o grupo se refere a “lógica física” por que esse tipo de problema é comum no sistema de ensino de física e a “lógica matemática” pelo uso da progressão geométrica.

A migração do ‘S’ de somatória da fórmula matemática para o ‘S’ de posição de encontro não foi analisado no encontro. A seqüência acima se inicia com $\frac{d}{2}$ e numericamente com $\frac{10}{2}$, mas a substituição de a_1 na fórmula refere-se à distância inicial percorrida por

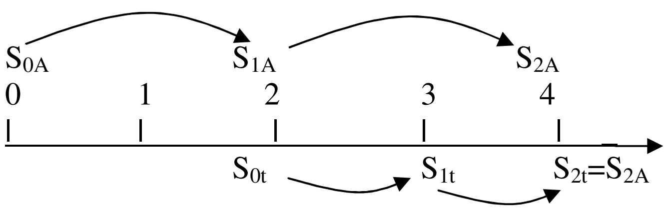
Aquiles de 10 u. c. (unidades de comprimento). Até aqui ‘20’ seria a somatória das distâncias percorrida por Aquiles e a passagem à posição seria possível considerando que ele tenha partido da posição inicial zero. Daí concluir que se encontrariam na posição 20 u.c. seria um salto. Fazendo o mesmo processo para a somatória das distâncias percorridas pela tartaruga e, portanto, considerando $\frac{d}{2}$ sua primeira distância vencida, como escrito na produção do grupo e reproduzido acima, teríamos $a_1=5$. A somatória das distâncias resultando em 10 u.c.

Daqui não podemos deduzir que *S=10*, pois a posição inicial da tartaruga é 10 u.c. e, portando, a posição seria 20 u.c. No entanto, chegariam a essa posição ao mesmo tempo? Essa relação não foi analisada por esse grupo, contrariamente ao seguinte que iniciou com a discordância da conclusão dada por Zenão: “não concordamos, pois nessa trajetória, adotando Vt (velocidade da tartaruga) a metade da Va (velocidade de Aquiles), no instante t=2s, Aquiles alcança a tartaruga”.

Em seguida apresentou-se a tabela

	Espaço (d)	
T(s)	Aq	Tart
0	0	2
1	2	3
2	4	4

E o esquema



Essa construção é um modelo mais completo de resolução de problema de cinemática, tanto pela tabela como pela trajetória representada pela reta e as posições pela letra ‘S’. Embora como no modelo anterior não se tenha considerado na representação dos segmentos que as distâncias percorridas vão diminuindo, as diferenciações entre as posições ocupadas por Aquiles e pela tartaruga estão representadas nos índices do símbolo de posição e o tempo pelas flechas.

Esta solução é uma aplicação do modelo conhecido da física do movimento uniforme em que cada móvel percorre distâncias iguais em tempos iguais, partindo de posições diferentes, o que permitiu exercer o poder de contrariar a conclusão de que Aquiles não alcançaria a tartaruga.

> O matemático livra-se desse argumento *por decreto*: Movimento? Ora, movimento é apenas uma correspondência entre posição e tempo. Tal correspondência entre variáveis é chamada de função. A lei do movimento é apenas uma *função*, na verdade o protótipo de todas as *funções contínuas*. (DANTZIG, 1970, p. 117, grifos do autor)

Com esse pensamento, a captação é do próprio movimento e não do argumento. Diferentemente da primeira solução que embora após apresentação o grupo tenha tratado como um problema de 'lógica física', não a tomou como ponto de partida. A regularidade foi sendo descoberta durante a construção da solução, que resultou no uso de um instrumento matemático conhecido, e por fim a associação à *posição* de encontro.

As respostas foram consideradas como iguais pelos professores dos dois grupos, embora a solução anterior não tenha analisado a relação espaço x tempo, e essa última, não tenha usado processos infinitesimais. Talvez, por que ambos concluíram que Aquiles alcançaria a tartaruga.

Identificamos nesses dois procedimentos que o movimento sensível não foi abalado, talvez por que "o homem prático raramente se interessa por argumentações" (DANTZIG, 1970, p. 116). Ao contrário da terceira solução, na qual o pensamento transita entre a interpretação do argumento e as certezas sensíveis.

A sensação diz "[...] espera-se que o homem ultrapasse a tartaruga [...]", ao mesmo tempo em que interpreta o argumento: "no entanto, o texto relata que a tartaruga estará sempre à frente de Aquiles". Em seguida, o grupo apresenta o modelo que representa sua captação do fenômeno:

A – 1 ____________ T 0,5
A – 0,5 __________ T 0,25
A – 0,25 _________ T 0,125
A – 0,125 ________ T 0,0625
... ...

A representação indica a tradução da retórica do argumento. Enquanto Aquiles (A) percorre uma unidade de comprimento, a tartaruga (T) percorre a metade. As retas que ligam A a T. Essa contradição teve a seguinte conclusão “A tartaruga e Aquiles ‘tendem’ a se encontrar [...]”, esse juízo nos pareceu semelhante ao dado por outro grupo: “É como a idéia de que duas retas paralelas se encontram no infinito [...]”. O que nos parece fornecer indícios de flexibilização do pensamento ao iniciarem um movimento do conceito de infinito.

A outra parte da resposta ao problema: “[...] para isso acontecer, deveriam se encontrar no marco ‘zero’ [...]” indica um pensamento de que se as distâncias ‘tendem’ a zero, significa que eles não sairiam das suas posições iniciais.

Com isso, pareceu-nos que esse grupo chegou a um dilema do problema, que foi resolvido com a argumentação: “[...] o que é impossível, pois a metade de um número diferente de zero é um número diferente de zero”. Observamos que não foi a percepção sensível a contra-argumentação de que os corredores não sairiam das suas posições iniciais. Ao menos não explicitamente, mas que pode ter influenciado na busca de um argumento matemático que o explicasse. Não levar esses *passos* ao infinito, ou ainda, interpretar a *tendência* como *sempre muito próximo, mas não alcança*, são concepções presentes no ambiente educacional (DIAS, 2002), ligadas ao conceito de limite. Ao não abordar o infinito, o grupo pode ter concluído que Aquiles e a tartaruga não se encontrariam, por menor que fosse a distância percorrida.

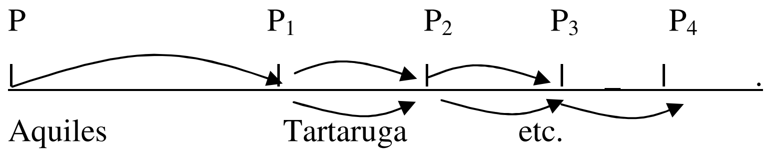
O problema histórico desse argumento está justamente no conceito de infinito potencial.

> [...] o corredor, antes de atingir a meta, deve alcançar o ponto médio da corrida, e é necessário um tempo *finito* para isso. Ele também tem de atingir o ponto médio da distância restante, e para isso também será necessário um tempo *finito*. Ora, *o que foi dito uma vez sempre pode ser repetido*. Existe um número infinito de etapas no percurso da corrida, e cada uma dessas etapas exige um tempo finito. Mas a soma de um número infinito de intervalos finitos é infinita. O corredor, portanto, nunca atingirá sua meta. (DANTZIG, 1970, p. 116)

É bem provável que a concepção de infinito de Zenão não o permitisse, nessa ocasião, perceber esse argumento como uma somatória infinita de uma seqüência convergente, o que, com o conhecimento posterior, verificou-se ser finita. Aliás, esses argumentos impulsionaram o desenvolvimento dos infinitesimais.

Ao final o grupo não explicitou se concordou ou não com o argumento, finalizando com o juízo: “Isso mostra que entre um número e outro há uma infinidade de números”. A utilização da imagem do conceito de densidade sugere que, por menor que seja a distância, ela sempre existirá. A relação da densidade com a continuidade também é histórica, isso revela os reflexos do lógico-histórico do conceito no movimento do pensamento desse grupo.

Outro grupo, que também utilizou um princípio de modelação do problema, fez o seguinte esquema:



Embora o modelo seja estático e esse grupo somente tivesse apresentado oralmente sua síntese, a nosso ver, a primeira seta na parte superior da linha, referente ao percurso realizado por Aquiles, representa uma equivalência temporal à primeira abaixo, percurso da tartaruga, e assim sucessivamente. Isso indica uma compreensão do argumento de Zenão de que eles não se encontrariam. A partir disso, foi escrita a conclusão de que se trata de uma "verdade [...] que ninguém poderia negar". Na discussão, o grupo expõe que o argumento foi realizado para frear o avanço do conhecimento.

Caraça (1989) interpreta que a concepção da escola eleática, na qual Zenão era integrante, "levantou um problema teórico, dominando todos estes – o problema do *conceito de verdade* e *meio de a adquirir*" (p. 80, grifos do autor).

Com as apresentações e reflexões dos grupos anteriores, essa idéia transitou a outro juízo: Aquiles e a tartaruga "se encontram [...] no infinito".

As imagens conceituais de infinito estavam sendo mobilizadas no coletivo, mas não estavam sendo relacionadas criticamente.

Um argumento que pareceu buscar uma síntese da discussão até aquele momento foi: "Embora saibamos que Aquiles é muito mais rápido que a tartaruga, o pensamento intuitivo nos leva a uma conclusão totalmente oposta. É como a idéia de que duas retas paralelas se encontram no infinito, e que se o infinito não tem fim, isto quer dizer que elas nunca irão se encontrar". A intuição no início desse pensamento refere-se à construção lógica do argumento, não como a percepção sensível da rapidez dos corredores mencionada no início da afirmação. O comum é encontrarmos a intuição relacionada ao pensamento sensível. Um aprofundamento de como esse grupo concebeu a intuição seria outro importante percurso de investigação.

A comparação com as retas paralelas como uma situação análoga faz com que o pensamento ora conclua que vão se encontrar ora não. Ao final foi ratificado: “O infinito nunca chega, então, elas não se encontram”. Em seguida, há um esquema semelhante a esse último, referente ao percurso de Aquiles e a tartaruga e, por fim, acrescenta que “tende ao infinito”. Pela analogia às retas paralelas, interpretamos que o grupo admite que Aquiles não alcança a tartaruga. Pensar sobre o infinito gerou pensamentos contraditórios e dúvidas. O próprio conceito de infinito vai sendo construído nesse percurso, em um sistema de juízos como: *o infinito nunca chega*, *o infinito não tem fim*, *o infinito tem lugar no espaço* (por que Aquiles e a tartaruga *se encontram no infinito*), *tem lugar no pensamento* (as retas paralelas *se encontram no infinito*).

Ainda sobre o infinito, o seguinte trecho de uma interpretação histórica realizada por outro grupo foi: “Acreditou-se sempre que a soma de um número infinito de quantidades poderia ser tão grande quanto se quisesse, mesmo que cada quantidade fosse extremamente pequena [...]”. Além disso, menciona que esse paradoxo era histórico e que iria contra o pensamento da escola pitagórica, a qual só conhecia os inteiros e fracionários.

Essa interpretação histórica não explicitou a continuidade, mas identificou uma dualidade histórica com o movimento dos juízos que estavam sendo expostos ao complementar: “o conflito entre o infinitamente pequeno e o infinitamente grande”.

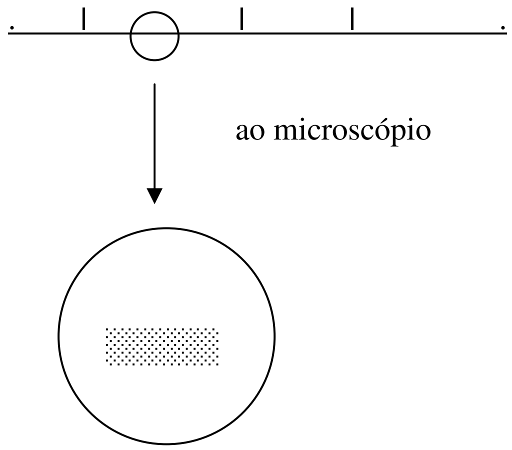
As respostas revelam o infinito como o nexo conceitual do próprio conceito de continuidade. Esse percurso também foi realizado na história da formação da continuidade aritmética.

A dinâmica de exposição das sínteses dos grupos diferiu comparada às outras. Nesta, dois grupos fizeram exposição em transparência das suas soluções (os dois primeiros também da exposição nessa unidade) e os demais a fizeram oralmente sem, contudo, uma seqüência determinada. Eles iam fazendo as relações e apresentando suas sínteses intercalando com comentários. Mesmo sem um posicionamento crítico, o coletivo pareceu estar assumido certa autonomia.

Com isso, a organizadora decidiu não fazer questionamentos durante a exposição. Ao final, sintetizou oralmente os percursos diferenciados que havia percebido em relação às respostas, sugerindo a continuidade das reflexões. Os apontamentos foram em relação às soluções baseadas na progressão geométrica e na cinemática, entre interpretação e solução e, como estamos analisando a história. Na seqüência, ninguém manifestou qualquer idéia para discutirmos, talvez por que a finalização do encontro já estava próxima.

A tensão entre a continuidade e os infinitésimos foi retomada quando da exposição de uma síntese realizada pela organizadora. Ao analisar as propriedades da reta, o coletivo denominou ‘Paradoxo da Lúcia’[47] o argumento de que os pontos da reta e o pó de giz podem ser colocados em equivalência.

O esquema a seguir foi feito por um professor para que todos pudessem visualizar e discutir.



Idêntica representação foi realizada por estudantes na pesquisa de Robinet (1986). A concepção atomista da reta evidenciada também pelos professores, sujeitos da pesquisa de Dias (2002), parece ser uma tendência no lógico-histórico da educação escolar. Na discussão, essa idéia foi aprimorada com a complementação de um professor: “poderia levar os alunos no laboratório para ver os átomos, prótons e nêutrons” (o). A contra-argumentação foi se, com isso, os alunos veriam os pontos e os números. A resposta foi “não, mas estaria dando uma idéia”.

Essa idéia não é nova: pensar no átomo como princípio de todas as coisas contempla uma busca filosófica. Para os pitagóricos, esse princípio estava relacionado aos números, aos conhecidos na época, aos inteiros – e à fração como relação de inteiros. No entanto, a forma que essa escola construiu essa idéia estava “ilustrada na geometria dos números figurativos” (BOYER, 1993, p. 55).

[47] O nome dado ao paradoxo foi o mesmo da pessoa que apresentou o argumento, mas neste texto foi usado um nome fictício.

Se por um lado olhar a reta como um conjunto de átomos compõe a intenção de uma proposta didática, Demócrito olhou a matéria com os corpúsculos cósmicos, as mônadas da escola pitagórica.

> O atomismo físico de Leucipo e Demócrito pode de fato ter sido sugerido pelo atomismo geométrico dos pitagóricos e não é de surpreender que os problemas matemáticos que mais interessavam a Demócrito fossem aqueles que exigissem alguma forma de tratamento infinitesimal. (BOYER, 1993, p. 55).

Foi exatamente essa idéia das mônadas, como a menor partícula que compõe todas as coisas, da escola pitagórica, capaz de compor o espaço e o tempo, que foi atacada pelos paradoxos de Zenão, na compreensão do movimento. Embora tais argumentos combatessem a filosofia pitagórica, não consistia uma nova teoria. Compreendemos que a crítica de G. Berkeley (1685-1753) era nesse sentido. A idéia do contínuo "como alguma coisa ininterrupta, indivisível, algo que não tivesse partes, porque qualquer tentativa de dividi-la em partes resultaria na destruição da propriedade analisada" seria vaga demais para matematizá-la. Aristóteles também já havia definido, segundo Costa (1929), "o contínuo: o que é divisível em partes sempre divisíveis" (p. 118).

No movimento do curso houve também ensaios para definir o contínuo. O paradoxo da 'Lúcia' e as idéias geradas por ele, como a de mostrar ao estudante a estrutura do átomo, constitui um modelo de ensino que se assemelha à mônada.

A ligação entre reta e campo numérico constitui o conceito do próprio ponto. O ponto para a escola pitagórica era a mônada. Estaríamos reconstruindo na educação atual a escola pitagórica? O que é um ponto?

A base em que se fundamentam os argumentos de Zenão é que se a reta fosse formada de mônadas, entre uma e outra haveria um espaço vazio, caso contrário não se poderia distinguir uma da outra mônada. Além disso, esse espaço tem que ser maior que a mônada, já que ela é o menor elemento que existe. Com isso pode-se colocar outra mônada nesse espaço e, portanto se criará dois espaços desses. Pode-se repetir esse processo infinitamente e o segmento não poderia ter um número finito de mônadas.

> [...] em qualquer hipótese, a reta não pode ser pensada como uma simples justaposição de pontos, mônadas ou não; há nela qualquer coisa que ultrapassa uma simples coleção de pontos; essa qualquer coisa – a sua continuidade – necessita dum estudo aprofundado, ligado com o aspecto numérico, quantitativo, da medida (CARAÇA, 1989, p. 80)

Começando a pensar no ponto da matemática, remetemo-nos à geometria, nesse campo ele é definido como um ente sem dimensão. Complementa Dantzig (1970): “Ora, a noção geral de ponto como um ente geométrico sem dimensão é, naturalmente, uma ficção; mas quando analisamos essa ficção descobrimos que por trás dela existem três idéias distintas” (128).

A primeira idéia a que Dantzig (1970) se refere é a linha descrita pelo movimento do ponto. “Essa idéia parece adaptar-se melhor à nossa idéia intuitiva de continuidade, que é o primeiro atributo que imputamos à reta”, e então o outro passo é “tomar essa concepção dinâmica como base para a analogia entre a reta e o domínio numérico” conhecido, os racionais, e então “verificamos que as duas são incompatíveis” (p. 128).

Na continuidade não dá para pensar em um ponto sem pensar nos pontos que o cercam.

> De modo que não poderemos certamente obter resultados no estudo do fenômeno [movimento] com a ajuda simples de números a marcar posições de *precedência* ou *seqüência* entre instantes ou pontos – esses números, por menor que seja a sua diferença deixam-nos sempre fugir uma infinidade de possibilidades da interdependência – aquelas que correspondem ao segmento que eles encerram. (CARAÇA, 1989, p. 218, grifo do autor)

Essa construção lógica (dialética) entre movimento e reta, parece dar início para “eliminar o abismo entre a continuidade de nosso conceito de tempo e a inerente descontinuidade da estrutura numérica” (DANTZIG, 1970, p. 151).

Os infinitesimais iniciaram sua jornada e encararam “com complacência o fluxo de duração como uma sucessão infinita de pulsações de ritmo furiosamente acelerado” (DANTZIG, 1970, p. 151). G. Cantor (1845-1918) levou adiante essa formalização, mas a idéia de infinitésimos não era nova. O problema foi que depois dos paradoxos de Zenão, argumentos “baseados em uma infinidade de infinitésimos já não eram aceitos” (BOYER, 1993, p. 59), como o princípio de Cavalieri.

Essas reflexões finais compõem uma zona de possibilidades para discussões futuras.

Segundo movimento: as situações-problema

Esse segundo movimento da unidade didática teve o objetivo de propor aos professores uma atividade orientadora de ensino constituída por meio de elaboração, e reflexão coletiva de planos de ação para o ensino da reta real. Um momento diferenciado nas práticas usuais dos professores, uma vez que na escola os professores geralmente desenvolvem seus planos isoladamente.

Para a formação das imagens conceituais de números reais, esse momento do curso foi fundamental, na medida em que o educador se remete, na mente, no seu lugar na atividade humana.

Para compreendermos como o movimento de apropriação e objetivação do conceito de reta real vem se constituindo na escola, ou seja, o lógico-histórico do ensino e da aprendizagem da reta real, analisamos alguns meios em que esse conceito se manifesta: livros didáticos, publicação científica e parâmetros curriculares.

Dividimos essa parte do texto nos seguintes tópicos:

- Os livros didáticos;
- Os livros didáticos: os números reais;
- Os livros didáticos: os números irracionais;
- Concepções de professores;
- Outras pesquisas;
- A atividade orientadora de ensino;

Os livros didáticos

Partimos das sínteses produzidas por Cobianchi (2001) e Dias; Moura (2006)[48] de obras didáticas brasileiras destinadas ao Ensino Básico e Superior editadas no período de 1952 a 2001, e análises de manuais didáticos portugueses[49] (DIAS; MOURA, 2006) de 1909 a 2000.

O livro didático vem se constituído um recurso que nos aproxima dos conhecimentos apropriados e objetivados na educação escolar. Esse foi o motivo pelo qual resolvemos analisar algumas produções.

Uma extensão cronológica e uma descentralização regional também são características que nos auxiliam na apropriação do movimento lógico-histórico do

---

[48] Trabalho apresentado no ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15, Monte Gordo: Portugal, 2006. Em processo de publicação.
[49] Os livros analisados encontram-se na bibliografia e se caracterizam como uma ampliação do trabalho de Dias; Moura (2006).

conhecimento matemático escolar, como produto do conhecimento humano, embora não tenha se constituído em pressuposto.

Os livros didáticos: os números reais

Parece simples ao lermos nos livros didáticos a definição do conjunto dos números reais como união dos números racionais e irracionais. Embora uma síntese da definição do conjunto dos números reais seja como a união acima citada, o pensamento ingênuo questionaria como pôde levar 25 séculos para ser definido o conjunto dos números reais uma vez que já se conhecia o conjunto dos números racionais e suas propriedades? Bastaria expandir esse conjunto acrescentando os irracionais.

É essa idéia ao menos que surge ao nosso pensamento quando estudamos os números reais na escola. Essa abordagem seqüencial já aparece em Oliveira, 1969 segundo Cobianchi (2001). Estes, em geral, segundo Cobianchi (2001) e Dias; Moura (2006) iniciam com a revisão dos conjuntos numéricos, primeiramente os naturais, em seguida o conjunto dos números inteiros, englobando o conjunto anterior. O conjunto dos números racionais é abordado como contendo o conjunto dos inteiros e as frações. Os irracionais, como um conjunto diferente e disjunto dos racionais, no qual contêm certas raízes e o número pi – por vezes outros transcendentes –, e é definido como o número que não se expressa na forma de razão de inteiros. A exposição se completa com a união destes, o conjunto dos números reais.

Concordamos com Cobianchi (2001) que

> De acordo com essa abordagem, o conjunto dos números reais aparenta ter sido construído praticamente sem nenhum percalço em toda a sua longa trajetória, pois os conjuntos numéricos, de acordo com essa ordem de apresentação, surgem pedagogicamente encaixados um após o outro. (p. 276)

Algumas variações ao longo da história dos números reais nos livros didáticos foram encontradas no *Compêndio de álgebra* português de 1963, destinado ao sexto ano liceal. No capítulo 1 temos “Evolução do conceito de número”; no item 3, “Números positivos”, a apresentação do número irracional positivo; e no item 4, “Números reais”, a introdução dos números negativos e o zero. A partir desses novos números, definem-se os números reais como sendo os números positivos, o zero e os números negativos. O texto segue com as propriedades operatórias que denomina “PRINCÍPIO DE CONSERVAÇÃO DE PROPRIEDADES FORMAIS”. Os números reais não são expostos sob a estrutura de conjunto e as propriedades de densidade e continuidade também não são abordadas, embora o desenvolvimento da teoria dos conjuntos já tivesse sido iniciado por Cantor desde 1883 (VILELA, 1996).

Quanto aos conjuntos, nos livros didáticos portugueses escritos por Crespo em 1966 e 1971 – livros somente de exercícios –, há uma abordagem da cardinalidade de conjuntos finitos e infinitos. Uma das questões é "Que diferença estabelece entre o *número cardinal* e o *número ordinal*?" (CRESPO, 1966, p. 29, grifo do autor).

A construção dos reais nos livros brasileiros analisados, usando os cortes de Dedekind, segundo Cobianchi (2001), aparece somente no livro de Lacaz Neto de 1952.

> Essa obra de Lacaz Netto começa com um capítulo que é um resumo histórico desse tema, discorrendo sobre a comparação entre a diagonal e o lado do quadrado, e da crise proporcionada na Escola Pitagórica com o surgimento das grandezas incomensuráveis, sobre a solução dada por Eudoxo, a exposição que Euclides fez sobre esse assunto, e a solução dada por Dedekind. O autor demonstra a irracionalidade de $\sqrt{2}$, apresenta os cortes de Dedekind definindo número irracional, e afirma que os números racionais e irracionais recebem a denominação de números reais, ampliando assim o campo dos números, somando ao conjunto dos números racionais novos entes, os números irracionais. (p. 228-229).

Esse não foi o modelo utilizado nos livros didáticos brasileiros posteriores. Ainda em relação aos cortes de Dedekind, encontramos no livro português de Monteiro (1945), no capítulo de Indução Finita, o seguinte trecho:

> Para abordar com facilidade o estudo da teoria dos números irracionais, parece deveras conveniente ter estudado, na teoria dos inteiros, a noção de CORTE, introduzida pelo célebre matemático alemão Ricardo Dedekind. (p. 79)

Na sequência, a definição de corte é realizada no campo dos números inteiros e, reciprocamente, a definição do inteiro por meio do corte: "*Dado um corte de Dedekind (A, B) na classe dos inteiros, existe um inteiro, e um só, que determina êsse corte*". (MONTEIRO, 1945, p. 80, grifos do autor). Essa obra não aborda os números irracionais nem os reais.

A representação dos números reais na reta é bem explorada nos livros analisados. Em alguns livros, há algo a mais do que a representação dos racionais com a possibilidade de representar também os irracionais, *completando a reta numérica*. A bijeção da reta com o conjunto dos números reais aparece nos livros brasileiros de Oliveira (1969), Lamparelli

(1976) e Iezzi; Dolce; Machado (1996) e as aproximações sucessivas na reta no de Lamparelli (1976).

Em geral, privilegia-se a reta somente como um *lugar* para se representar números e, pelos relatos de Cobianchi (2001), o tratamento didático dos autores que abordam a bijeção da reta com os números reais são lógico-formais.

A representação de que todo número real pode ser escrito na forma de dízimas – periódicas e não periódicas – como generalização das formas já apresentadas para os números racionais e irracionais, segundo Cobianchi (2001), aparece nas publicações de Oliveria (1969), Iezzi (1977) e Iezzi; Dolce; Machado (1996) (livros brasileiros).

A densidade e a continuidade dos números reais raramente são temas abordados nos livros didáticos destinados ao Ensino Fundamental e Médio do sistema educacional brasileiro e também não observamos no sistema português, para esses mesmos níveis. Alguns livros brasileiros analisados abordam a densidade no conjunto dos números racionais (SCHOOL MATHEMATICS STUDY, 1969; PIERRO NETO, 1984; SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO – SÃO Paulo, 1992, BIGODE, 1994; IEZZI; DOLCE; MACHADO, 1996). A análise da continuidade nos livros didáticos se encontra no primeiro movimento dessa unidade didática.

A densidade no conjunto dos números reais aparece no livro de Giovanni; Giovanni Jr. e Bonjorno, de 1994 somente com a afirmação "[...] assim como entre dois pontos de uma reta há infinitos pontos, também entre dois números reais quaisquer existem infinitos números reais", sem qualquer desenvolvimento.

O diagrama de Venn foi mencionado por Cobianchi (2001) como pertencente às obras de Jakubovic; Lellis (1994) e Iezzi; Dolce; Machado (1996), mas é muito provável o aparecimento em anos anteriores, pois já aparece no livro português de Crespo (1966).

Notas históricas sobre Teorema de Pitágoras (FUNDAÇÃO ROBERTO MARINHO, 1994), escola pitagórica (OLIVEIRA, 1969; BONGIOVANNI; VISSOTO; LAUREANO, 1995; SANTOS; MATTA, 1999?), incomensurabilidade (LACAZ NETO, 1952; OLIVEIRA; SILVA, 1969), Eudoxo e Dedekind (LACAZ NETO, 1952) e biografias (IEZZI, 1977; GENTIL, 1991; GIOVANNI; BONJORNO, 1992; PAIVA, 1995) por vezes são introduzidas nos livros didáticos brasileiros – e portugueses como em Rino (1998). A proposta curricular da Secretaria do Estado de São Paulo e os PCNs recomendam abordagem histórica.

A proposta curricular de 1992 para o ensino de matemática do primeiro grau (atual Ensino Fundamental), da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo, sugere que o conceito de número deveria ser abordado dando ênfase à contagem e às medidas, e não à ampliação dos conjuntos numéricos (COBIANCHI, 2001).

Dos vinte e dois livros de cálculo diferencial e integral analisados por Cobianchi, verificou-se uma única diferença na apresentação dos números reais no livro de Maurer (1969), que fez a exposição do conjunto dos números reais usando os cortes de Dedekind. Em obras que apresentam alguma definição de número real, esta é feita pelo método axiomático, constituindo-o como corpo ordenado.

A demonstração algébrica da irracionalidade de uma raiz quadrada, a representação decimal e a bijeção com a reta são abordagens não ligadas ao número real, nos livros de cálculo analisados.

Atualmente no programa português e nos livros didáticos portugueses – como de Neves, 2000 – e brasileiros, a reta real é introduzida para explicar a representação dos números reais e seus intervalos, abordando as variações de representação de intervalos de números reais.

Os livros didáticos: os números irracionais

Buscamos observar como são abordados os números irracionais, já que estes constituem no ensino o salto quantitativo para formação do conjunto dos números reais. Além disso, analisamos concepções de professores sobre número real que revelaram dificuldades na compreensão desse conjunto.

Nas obras portuguesas, anteriores a 1963, o tópico sobre números irracionais é introduzido sob forma e conteúdo variado. Encontramos os irracionais, nos livros de Andréa de 1909 e 1914, definidos como um corte, embora não utilizem esse termo, e sim "classes contíguas" que eram compostas de números racionais positivos. Nessa definição, ou existe um número racional compreendido entre as classes e que as separam, e nesse caso o número é racional, "ou não existe número algum nessas condições. Neste último caso, diremos, *por definição*, que as duas classes consideradas determinam um número *irracional*" (ANDREA, 1909, p.13 grifo do autor). Essa apresentação pode formar uma concepção da não numeralidade do irracional, como disse Dantzig (1970): o *inexprimível*.

Nos livros portugueses até 1956, no que se refere ao tópico de números irracionais, não aparece qualquer menção aos números irracionais negativos, ou seja, tanto os números racionais quanto os irracionais são sempre subentendidos como positivos. Esse tipo de organização parece ser uma opção condizente com o aparecimento dos números na história.

Nos livros de Ribeiro (1936) e Tavares (1940), ambos portugueses, também aparece a definição por formação de classes, mas não para introduzir o número irracional, pois eles iniciam pela incomensurabilidade. O livro de Ribeiro explica o processo de medida de segmentos e o tipo de número que resulta desse processo. Por meio de um exemplo, aborda os segmentos comensuráveis resultando nos números racionais e, se utilizando de um outro comprimento de segmento, introduz a incomensurabilidade e os irracionais.

O livro de Tavares introduz, num breve texto, que já é sabido sobre grandezas comensuráveis e incomensuráveis, apresentando a definição da primeira. Diz que tratará da medida das quantidades incomensuráveis as quais não podem ser representadas por números racionais e, esses novos números, serão chamados irracionais. Encontramos em uma obra brasileira de Santos e Matta (1999?), segundo Cobianchi (2001), uma abordagem pela incomensurabilidade da diagonal do quadrado em relação ao lado, cuja abordagem é indicada também pelos PCNs, não no sentido da incomensurabilidade diretamente e sim por meio dos irracionais

> O estudo desses números [irracionais] pode ser introduzido por meio de situações-problema que evidenciem a necessidade de outros números além dos racionais. Uma situação é a de encontrar números que tenham representação decimal infinita, e não periódica. Outra é o problema clássico de encontrar o comprimento da diagonal de um quadrado, tomando o lado como unidade, que conduz ao número $\sqrt{2}$. Nesse caso, pode-se informar (ou indicar a prova) da irracionalidade de $\sqrt{2}$, por não ser uma razão de inteiros. (BRASIL, MEC, 1998b, p.106)

A necessidade dos irracionais que consta nos PCNs é coerente com os enunciados dos professores da *necessidade de ampliar os conjuntos numéricos*, mas não indicam qual foi historicamente essa necessidade.

Podemos notar que, no percurso das publicações didáticas, a relação da incomensurabilidade com o número irracional vai sendo minimizada, chegando à forma coerente com a apresentada pelos PCNs acima citada, em que não se diferencia a incomensurabilidade da irracionalidade, como se bastasse saber o teorema de Pitágoras. Essa abordagem a nosso ver acarreta em um modo de tratamento da matemática na educação focada ao saber fazer, ao conhecimento empírico.

Dos livros portugueses consultados, o primeiro que utiliza a representação de um irracional na reta numérica é o de Tavares, de 1940. O autor inicia a correspondência dos pontos da reta com os números racionais, completando posteriormente com os irracionais. O autor finaliza o item, sobre irracionais, dizendo que todo número decimal infinito não periódico representa um número irracional.

A representação do irracional na reta, nos livros brasileiros, geralmente realiza-se pela transferência do segmento da hipotenusa, do triângulo retângulo isósceles de catetos de uma unidade, para a reta, sendo previamente calculado o comprimento desse segmento pelo teorema de Pitágoras.

A definição de número irracional como decimal infinito não periódico aparece na maioria dos livros analisados a partir de 1954, tanto portugueses quanto brasileiros.

Nota-se que o percurso das sínteses definitórias no sistema de ensino para os números irracionais não foi o mesmo da história, pois a definição por cortes de Dedekind é de 1872 e a de número decimal infinito não periódico é anterior ao século XIX.

O elemento novo que aparece a partir de 1954 (livros portugueses) é a utilização de número transcendente, como exemplo de irracional, não com essa nomenclatura. Observa-se que para iniciar as exemplificações de um número irracional geralmente aparecem raízes quadradas, mesmo quando não estão associadas a qualquer medida geométrica.

A utilização do teorema de Pitágoras para introduzir o número irracional é um procedimento constante nos livros analisados por Cobianchi (2001), desde 1969, especialmente o número $\sqrt{2}$ (OLIVEIRA; SILVA, 1969).

Pelas sínteses desse autor, o número pi como irracional aparece de diferentes formas nas obras didáticas: como exemplo de número irracional diferente das raízes, como determinação empírica ou simplesmente como uma afirmação do resultado da razão do comprimento pelo diâmetro de uma circunferência. Na *unidade didática densidade, comensurabilidade, incomensurabilidade e o número* apresentamos alguns exemplos de abordagens do número pi nos livros didáticos.

Observamos pelos livros analisados por Cobianchi (2001) que aparece mais frequentemente na década de 1970 a introdução dos números irracionais com a demonstração algébrica da irracionalidade de $\sqrt{2}$, com a conclusão da impossibilidade de representação em forma de fração de inteiros. Esse tipo de demonstração não permanece em muitos livros destinados ao atual denominado ensino básico brasileiro, mas sim somente sua classificação.

As relações abordadas entre incomensurabilidade, cortes (ou classes) e representação decimal dos números irracionais incorporadas nos livros didáticos portugueses de 1936 e 1940, mencionados acima, vão sendo minimizadas e até suprimidas no decorrer das publicações dos livros didáticos.

Tanto os PCNs para o Ensino Fundamental brasileiro como o programa curricular para o nono ano do Ensino Básico português instruem a abordagem dos números irracionais pela representação de dízima não periódica. Além dessa definição, os PCNs indicam:

> O importante é que o aluno [...] identifique esse número com um ponto na reta, situado entre dois racionais apropriados, reconheça que esse número não pode ser expresso por uma razão de inteiros; conheça números irracionais obtidos por raízes quadradas e localize alguns na reta numérica, fazendo uso, inclusive, de construções geométricas com régua e compasso. Esse trabalho inicial com os irracionais tem por finalidade, sobretudo, proporcionar contra-exemplos para ampliar a compreensão dos números. (BRASIL, MEC, 1998b, p.83)

A abordagem do número irracional como o número que não pode ser expresso por razão de inteiros aparece em exemplos de raízes quadradas (Ribeiro,1936) e vai se tornando propriedade definitória como em Calado (1954).

Observa-se também ao longo do histórico dos livros didáticos uma diminuição da linguagem retórica, sendo substituída pelos símbolos matemáticos e, posteriormente, o aparecimento de figuras, desenhos e imagens. Esses últimos principalmente relacionados à mudança no foco dos seus consumidores, do professor para o aluno.

Essas mudanças estão fortemente relacionadas à produção e distribuição dos livros didáticos (APPLE, 2002), como também o acesso à escola, como menciona Gatti Júnior (2004):

> A alegada democratização do ensino, que no caso brasileiro ganhou contornos de massificação, permitiu o ingresso de novos personagens no ambiente escolar, oriundos da classe operária (zona urbana) e mesmo do campesinato (zona rural). (p.37).

A abordagem da matemática no ensino, inicialmente mais próxima do próprio formalismo matemático com ênfase às definições, aos teoremas e às demonstrações, posteriormente foi dando lugar ao processo definição – exemplo – exercício. Ultimamente, tem-se privilegiado a abordagem de problemas e, por vezes, como forma de introduzir o assunto por um problema particular, geralmente buscando algo do cotidiano, seguido de um salto para a definição.

Observamos também os reflexos do movimento da matemática moderna, iniciado entre as décadas de 1960, nos livros didáticos e na formação de professores e alunos, constituindo um elemento de mudança no movimento em que vinham sendo constituídos seus textos. A teoria dos conjuntos e a forma de estruturação algébrica levadas ao ensino, se de alguma forma era o reflexo do movimento do rigor da matemática, por outro foi impositivo. Ocasionando assim reflexos na didática dos professores que observamos até os dias atuais, como concluiu Sousa (1999): “Os aprendizes, professores e alunos, do novo currículo formalista e rigoroso, foram levados a acreditar na idéia de que para entender e aprender Matemática Moderna bastava uma leitura atenta dos livros didáticos” (p. 51).

O movimento para minimizar o formalismo matemático também incentivou os PCNs a definirem seus interlocutores:

> Por outro lado, ancorar o estudo do conjunto dos racionais e irracionais no âmbito do formalismo matemático não é certamente indicado nessa etapa. Por esses motivos, julga-se inadequado um tratamento formal do conceito de número irracional no quarto ciclo. (BRASIL, MEC, 1998b, p.106)

Ligado a esse movimento, Cobianchi (2001) se refere ao posfácio do livro *Exame de textos*: análise de livros de Matemática para o Ensino Médio, organizado por Lima (2001), em que o autor após sua análise diz:

> [...] apesar de o livro atual estar bem impresso e diagramado, seu texto não induz o leitor (aluno) a pensar, e os problemas que exigem raciocínio não se relacionam com a matéria ensinada; e transmite a impressão de que as conclusões gerais da Matemática resultam do exame superficial de poucos casos particulares. (p.277)

A abordagem tanto nos livros antigos como os mais novos tomam a matemática como a ciência das afirmações, das certezas, do poder. Talvez seja o reflexo da lógica aristotélica ou ainda, com mais probabilidade dos Elementos de Euclides, “o tesouro da própria certeza”, como diz Guillen (1987, p. 20).

A exposição com definições, afirmações, a organização linear foi refletida nessas obras. Seria esse o caráter didático? Seria esse o conhecimento que nos fará conscientes do gênero humano? A matemática assim apresentada não conduz ao pensamento de que foi criada por gênios?

Dependendo do período histórico da produção didática, tem-se uma forma e um conteúdo particular, pois estes se relacionam com a classe social a que se destina, o modo de pensar a apropriação de conhecimentos científicos, as definições de políticas educacionais.

Quanto aos números reais nos livros didáticos analisados, o movimento se configurou de uma apresentação rara e formalizada dos cortes de Dedekind à sua ausência, da bijeção dos números com a reta, para o status de representação; a densidade e continuidade se tornaram notas históricas, por sua vez ilustrativas. A cardinalidade é praticamente ausente. O infinito, segundo os PCNs, pode emergir da curiosidade dos estudantes.

> Nesse ponto, o caráter especulativo da Matemática para além de seu aspecto técnico, e que também reside no âmbito dos limites das indagações do intelecto humano, pode despertar interesse nos alunos, como as considerações e investigações sobre a infinitude dos conjuntos numéricos, a infinitude de racionais entre dois naturais e a infinitude dos irracionais ou o impacto causado por uma representação de π com um bilhão de casas decimais sem o surgimento de um período (BRASIL, MEC, 1998b, p.78)

Interpretamos que as indicações dos PCNs para o Ensino Fundamental na abordagem do infinito, diferentemente da dos irracionais como citada anteriormente, depende do interesse dos alunos. A nosso ver, o conceito de infinito é essencial na abordagem dos conjuntos numéricos por se tratar de um nexo desse conceito, inclusive por ter sido a base da teoria dos conjuntos. Nesse sentido, abordar os conjuntos numéricos requer abordar o infinito potencial, o infinito real, a densidade e a continuidade.

O número real é a união de dois conjuntos – dos números racionais e irracionais –, porém, o que isso significa? Em alguns livros didáticos, o conjunto dos números reais é mostrado quando se juntam alguns irracionais na reta ou a adição desses números com os do conjunto conhecido, os racionais. Os números irracionais como conjunto não é abordado.

Essa forma de juntar os números é o *como* se está tratando a reta real nos livros didáticos, mas *porquê* está sendo abordado assim? Os autores podem responder que (ao menos atualmente) estão interpretando os PCNs para auxiliar o professor na sua prática. Além disso, podem também incluir o pensamento de que os livros vêm sendo editados dessa maneira, os professores já estão acostumados, se mudar muito pode não vender, etc.

Além disso, trabalhar com o lógico-histórico do conhecimento não é linear, não é tranqüilo, evidencia as incertezas e contrariedades o que significa transformar a pedagogia.

A transição do formalismo para as publicações que buscam abordar situações cotidianas ocorreu gradativamente. Entre outros fatores, destacamos a influência da nova classe de estudantes que tiveram acesso à escola. Com a massificação do ensino, conforme citado acima, surge a necessidade de mais professores. Na falta de profissionais formados em matemática, outros foram preenchendo as vagas.

Houve também, uma época em que os professores escreviam suas aulas, realizavam seus estudos para organizarem as aulas. Esse foi o início dos manuais. Os professores que os escreviam eram os mesmos que os utilizavam. Essa relação foi sendo rompida dando lugar a outra forma: os que publicam e os que consomem, contribuindo para o rompimento do trabalho do professor, ficando somente sua força de trabalho. Alguns podem dizer que o professor não precisa usar o livro didático, ele pode preparar suas aulas, o livro pode ser mais uma fonte de consulta. Essa certamente seria uma resposta ingênua frente ao que o professor vem se constituindo historicamente, como pudemos brevemente observar na primeira unidade didática, na sua formação profissional, nas condições objetivas.

Concepções de professores

A importância do estudo do conceito de números reais foi revelada por professores dos Ensino Fundamental, Médio e Superior, embora haja dificuldade de tratamento no ensino desse conceito. Os professores entrevistados em Cobianchi (2001) e em Dias (2002) revelaram suas dificuldades na abordagem conceitual e didática desse assunto. No primeiro movimento, foi detalhado como os entrevistados por Cobianchi (2001) se posicionam referente essa importância. Em outras questões, encontramos afirmações que designam ao conjunto dos números reais uma característica soberana em relação aos outros conjuntos. As justificativas concentraram-se na direção de que esse assunto é muito importante para entender o mundo que nos cerca.

Tal característica soberana se relaciona à concepção de um conjunto amplo e que comporta "todas as soluções de quaisquer problemas", que também constitui uma concepção dos professores participantes da pesquisa em Dias (2002). Embora saibam que algumas equações somente têm solução no campo dos complexos, o fato deste ser abordado muito pouco na educação escolar, quando o é, faz com que o campo real, devido ao longo tempo de suas aplicações, sobretudo no Ensino Médio, ganhe o caráter soberano.

Semelhantes a essa concepção, certos depoimentos ressaltaram que, com o aprendizado desse conjunto, o universo dos alunos passa por um processo de enriquecimento: "você sai de um mundo até então limitado para um conhecimento infinitamente rico" (COBIANCHI, 2001, p. 300).

A grande maioria dos professores entrevistados em Cobianchi (2001) e em Dias (2002) introduz didaticamente a questão do conjunto dos números reais da mesma maneira, a união dos conjuntos dos números racionais com dos irracionais, ou uma variação dessa, como a união dos naturais, inteiros, racionais e irracionais. Os irracionais, por sua vez, são definidos pela impossibilidade de representação do número como uma fração de inteiros. Formas de abordagem provavelmente influenciadas pelo livro didático.

Com isso, as concepções em relação aos conjuntos de números reais e de irracionais mostraram-se insuficientes em certas situações, como as analisadas em Dias (2002), tanto operacional como conceitualmente.

Os professores entrevistados por ambos os autores citados, ao refletirem sobre questões envolvendo propriedades dos números reais expuseram dificuldades em relação à ordem, à densidade, ao infinito, às definições de número racional e irracional e ao próprio conceito de número e suas representações. Convém observar que noções de ordem, densidade, continuidade formam nexos conceituais ligados à criação da reta real. Cabe destacar também que Dedekind, um dos formalizadores da teoria dos números reais, necessitou usar esses conceitos na sua construção. Estes constituíram indicadores para a abordagem no curso proposto aos professores nesta pesquisa.

A consciência de refletir no ensino concepções não coerentes com o desenvolvimento do conceito científico de números foi expressa por um professor em Dias (2002). Esta, aliada à semelhança de concepções sobre a reta real entre professores e estudantes, revelou a não apropriação do conhecimento historicamente construído, indicando sua necessidade que, por sua vez, indica outra: a necessidade de estudo e práticas educacionais. Com esse propósito, analisamos alguns procedimentos didáticos utilizados para o ensino dos números reais.

Com o objetivo de chegar à definição dos números reais como união dos conjuntos dos números racionais e irracionais, um procedimento caracteriza-se pela exposição direta dessa união precedida de um momento em que se explica algo sobre o número irracional. Como o número racional, ou melhor, a fração, nesse momento já é conhecida, o foco é introduzir a existência dos irracionais.

Alguns procedimentos didáticos utilizam objetos físicos. Com esse recurso, procura-se explicar a existência de alguns números irracionais que, juntamente com os racionais, formarão o conjunto dos números reais.

Alguns exemplos são: a medição com barbante de objetos redondos para *descoberta do número* π, comparação da escala da régua com a reta aritmética, como a explicação de que entre um decímetro há dez centímetros e entre um centímetro, dez milímetros; a utilização da calculadora principalmente para obter a raiz quadrada de um número (COBIANCHI; DIAS, 2004).

Observamos que o uso de calculadora ou medições empíricas pode produzir uma imagem conceitual de identificação de números distintos, a igualdade de um número com uma aproximação deste (DIAS, 2002). Medições empíricas também podem formar a concepção de que o número irracional é o resultado de operações com tais medidas.

A representação decimal infinita do número irracional, embora seja muito usada para introduzir o número irracional, pela impossibilidade de representá-lo na forma de fração de inteiros, não é muito explorada após esse momento inicial. No Ensino Fundamental e Médio, podemos observar que prevalece o uso dos irracionais algébricos, sobretudo das raízes quadradas, seja nos cálculos que envolvem o Teorema de Pitágoras, seja na relação lado e área de quadrado ou nas equações quadráticas de um modo geral.

Essas abordagens estão mais direcionadas a uma operacionalidade e aplicabilidade dos irracionais. A operacionalidade muitas vezes está ligada a uma abstração de situações empíricas desvinculadas de um pensamento teórico.

Uma outra forma de observarmos os procedimentos didáticos para ensinar número real foi por meio das respostas à questão "Escreva como você explicaria o que é o conjunto dos números reais para alguém que conhece o conjunto dos racionais" (DIAS, 2002, p. 22). As expressões dos professores indicam as ligações à definição dos irracionais como "números que não podem ser escritos na forma de fração" e "ao acréscimo de números novos" (p. 22), como raízes quadradas, o número pi, e às vezes alguns decimais infinitos não periódicos. Houve também o foco na raiz quadrada em: "calcularia a raiz de um número que não fosse raiz quadrada perfeita" e uma resposta que relaciona com a reta: "existem os irracionais [...] pois ao andarmos sobre a reta numérica dos racionais daremos pulos para chegar ao outro número, e que existe outro número entre um racional e outro" (DIAS, 2002, p. 22).

Tais procedimentos são coerentes com a abordagem nos livros didáticos atuais e, como já foi observado, contêm características de *formas de fazer*.

A aprendizagem com essas abordagens tem constituído imagens conceituais da reta real como sendo uma *reta racional* e por vezes discreta. Essa última relacionadas às considerações de inexistência ou finitude de números entre dois reais distintos, como também existência de um número máximo como atributo dos reais e de uma *sucessão de decimais*, e até de irracionais (DIAS, 2002). Também em Cobianchi (2001), percebeu-se, a partir dos depoimentos dos professores, que "os alunos sabem distinguir números, mas não pensam em continuidade, pensam apenas em grandezas discretas" (p. 428).

A não-distinção entre densidade e continuidade (DIAS, 2002; COBIANCHI, 2001) pode criar uma imagem conceitual de que a densidade seja concebida somente para o conjunto dos números reais. Por exemplo, dentre os poucos sujeitos que manifestaram uma imagem da definição de densidade, esta se apresentou pela existência da bijeção entre o conjunto dos reais e a reta (DIAS, 2002).

A concepção do conjunto dos números reais acaba por ser formada como um 'amontoado de numerais'. Os significados dos números, da formação dos conjuntos e de suas propriedades não são discutidos de forma a proporcionar uma compreensão da sua formação e de seu desenvolvimento.

A formação inicial[50] de professores pareceu-nos não ser capaz de proporcionar reformulações na sua imagem conceitual da reta real que, por sua vez, são possíveis de refletir na sua prática docente. Esse fato também nos mobiliza na defesa da formação contínua de educadores, pois a prática docente é propiciadora de motivos para o aprofundamento teórico dos conceitos matemáticos e metodológicos no sistema escolar.

Outras pesquisas

Outras pesquisas relacionadas com números reais têm sido realizadas nos níveis dos Ensinos Fundamental, Médio e Superior evidenciando dificuldades na compreensão desse conceito. Além das pesquisas analisadas em Dias (2002), outras como as de Tirosh (1991), Romero; Rico (1999), Arcavi; Bem-Avi; Bruckheimer (19--), Alphonse (1995), Pluvinage (1988), Douady (1990) e Albadejo (1997) identificaram dificuldades de apropriação dos números reais, nos aspectos: histórico, representação simbólica, potência de conjunto.

Concepções de número real, não coerentes com o conhecimento científico, também têm proporcionado dificuldades de aprendizagem e incompreensão de estudantes universitários no campo da análise e do cálculo diferencial e integral, como limite, continuidade, função e série. Para citar algumas: Tirosh (1991) observou que intuições sobre o

[50] Indicamos as pesquisas de Lopes (2004), Cedro (2004).

conceito de infinito permanecem inalteradas diante da confluência do ensino ou, ainda, há casos em que o ensino proporcionou um efeito negativo à apreensão desse conceito.

Tall e Schwarzenberger (1978) relataram a existência de conflitos (conscientes/subconscientes) entre decimal e limite, decimal e fração, número e limite. Artigue (1995) cita que Robert e Boschet (1984) evidenciaram que para a maioria dos estudantes universitários a propriedade $\forall n>0$, $|a-b|<1/n$, n natural não implica a igualdade dos reais a e b e, sim, somente uma grande proximidade entre eles.

Block (1995), em sua pesquisa *Abordagem didática no ensino dos primeiros conceitos da Análise*, também faz referência às dificuldades dos alunos na compreensão do campo numérico dos reais quando este compõe o domínio das variáveis de funções.

Grande parte das pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem dos números reais ainda se concentram no campo exploratório. Dentre as pesquisas consultadas até o momento, encontramos somente em Règine Douady (1990) e Isabel R. Albadejo (1997) indicações metodológicas para o ensino escolar.

Douady (1990) propõe uma metodologia para o ensino dos números reais. O objetivo foi construir o campo numérico real a partir de problemas envolvendo medidas de comprimento e área, para alunos de 6 a 11 anos. Com essa abordagem, o campo numérico dos números reais é sistematizado deduzindo suas propriedades. Para explorar o número irracional, por exemplo, a proposta sugere partir de um problema que solicita a medida do lado de um quadrado de área dada. Salientamos que esse tipo de problema também aparece nos livros didáticos brasileiros.

Na proposta de Douady, a síntese do número real recai na sua representação decimal infinita. A essência nessa abordagem é trabalhar o aspecto operacional do número real por meio de sua representação.

Semelhante objetivo foi traçado por Albadejo (1997) ao propor uma investigação-ação para introduzir o número real na escola secundária espanhola, para estudantes entre 14 e 15 anos. O objetivo apresentado em uma das unidades de análise foi introduzir o número irracional por meio da notação decimal infinita não periódica, para englobar todas as notações possíveis, resultando "um único conceito numérico, o conceito de número real" (p. 107). Um segundo foco é introduzir o modelo da reta "como um sistema de representação analógico" (p. 111) para conceituar a bijeção. Dois dos seus objetivos da pesquisa foram:

> - basear-se, de forma simultânea e complementar, nos sistemas de representações digitais e analógicos próprios do Número real e em um conhecimento claro, preciso e rigoroso de rede conceitual que sustentam;
> - estimular o progressivo aprofundamento nas componentes e inter-relações de ambos sistemas de representação, com objetivo de proporcionar uma base consistente para uma adequada formação dos alunos neste terreno. (p. 85)

As representações digitais que a autora se refere são as proposições e os símbolos matemáticos e as analógicas são as imagens, principalmente as visuais. Embora Albadejo (1997) tenha feito uma introdução histórica no seu trabalho, ela não propõe interação no sentido metodológico. Essa revisão parece ter sido útil para sua compreensão dos sistemas de representações desenvolvidos, ligados ao número real. Desse modo, não nos parece possível a apropriação do conceito pelo aluno, numa abordagem histórico-cultural.

Os resultados desses estudos nos proporcionam a identificação de uma concepção operacional sobre os números reais, por suas representações, privilegiando um saber-fazer, saber manipular os símbolos matemáticos corretamente nos seus sistemas, em detrimento do pensar neles, recriá-los.

A apreensão somente do aspecto operacional mascara uma aprendizagem devido a um parcial sucesso em tarefas escolares que possuem esse foco. Com isso, o *saber pensar*, formador de conhecimento, de desenvolvimento de aptidões humanas, torna-se disperso, fragmentado e por vezes ausente.

A necessidade da unidade do conceitual com o operacional no movimento do objeto são princípios, a nosso ver, que permitem ao indivíduo a apropriação do conhecimento científico. Neste trabalho, investimos maiores esforços no conceitual, em virtude do operacional ser mais abordado no sistema de ensino.

A atividade orientadora de ensino como proposta

A análise dos livros didáticos, das concepções de professores e produções científicas, de reta real e número irracional, realizadas nos itens acima, compõem elementos do lógico-histórico do ensino e da aprendizagem desses conceitos. Esse estudo juntamente com o histórico do currículo industrial, abordado no quarto capítulo, permitiu-nos compreender como esses conceitos se desenvolveram e assim, aproximamo-nos do por que do seu desenvolvimento.

O texto que segue expõe a proposta de realização de uma atividade orientadora de ensino pelos professores no desenvolvimento de planos de ação para ensinar números reais.

Inicialmente foi solicitado aos pequenos grupos um plano de ação detalhado para ensinar números reais, como mencionado no início desta unidade didática. Durante a execução, a organizadora foi percorrendo os pequenos grupos a fim de evitar dispersões, estimar o período de tempo para o trabalho dos grupos e interagir. Durante esse percurso os grupos iam fazendo perguntas, comentando situações vivenciadas nas escolas em que trabalhavam, como também das propostas que estavam desenvolvendo.

Nessa análise dos movimentos dos grupos, um deles havia listado os seguintes temas para serem desenvolvidos com os estudantes, visando à apropriação da reta real:

> Trabalhar com a reta numérica, mesclar com atividades do seu dia a dia;
> - saldo bancário;
> - compra na mercearia;
> - campeonato brasileiro de futebol;
> - clima e temperatura.
>
> Para trabalhar com números racionais
> - Gráfico de pizza;
> - associar o dinheiro: inteiro e partes (centavos);
> - ampliação de figuras;
>
> Números irracionais;
> - trabalhar a circunferência com o cálculo do π, utilizando lata, ficha telefônica, moedas, CDs, rodas, copos [...];
> - diagonal de um quadrado sempre pode dar um número irracional, trabalhar com pipa.

Ao observar tal movimento, a organizadora percebeu que não haveria tempo suficiente, no curso, para desenvolver cada item. Se deixasse seguir dessa maneira, provavelmente terminaríamos em um nível muito superficial de propostas.

As análises acima de concepções e de livros didáticos indicaram o que poderia aparecer nas propostas. O objetivo era discutir e avançar no sentido da mobilização do pensamento teórico e da transformação pedagógica. Com essa intencionalidade, foi realizada uma conversa e a reformulação daquela fase. Se houvesse tempo no curso, poderíamos ainda continuar o desenvolvimento nos grupos, senão poderiam formar grupos fora dali. A proposta foi apresentada como segue.

Proposta: elaboração de uma situação desencadeadora com objetivo de promover o desenvolvimento do conceito de número real com os estudantes.

Um dos grupos propôs a realização com os colegas da situação-problema elaborada e essa idéia foi difundida para todos. O grupo que sugeriu foi o primeiro a apresentar, os outros concluíram que despenderia muito tempo se todos resolvessem desenvolver suas propostas, pois estávamos no final do curso. Então resolveram expor oralmente como aplicariam com os alunos.

Após o trabalho nos grupos, houve a apresentação ao coletivo. Houve discussão e manifestações de sugestões, críticas, comentários. A proposta seguinte foi que o coletivo escolhesse uma das situações para aprofundar a partir das sugestões. A intenção foi proporcionar a coletivização das situações, ou seja, as produções da coletividade deveriam ser realmente do coletivo, pois na coletividade todos produzem e os produtos são de todos.

A contraproposta foi que os pequenos grupos reescrevessem suas situações, pois devido ao final do ano, alguns professores tinham outros compromissos e, portanto, não viriam ao nosso próximo encontro para discutirem com o grupo. Por fim, o coletivo decidiu que os pequenos grupos reformulassem suas próprias propostas. A organizadora imprimiria e distribuiria no último encontro a produção do coletivo.

A apresentação neste texto não segue a mesma seqüência do curso, pois julgamos que a apresentação por situação desencadeadora permite uma melhor compreensão do movimento do pequeno grupo, tanto internamente como em relação com o coletivo. Salientamos que nem todos os grupos reformularam suas situações-problema.

A exposição compõe a proposta do pequeno grupo, as análises e os um campo de possibilidades para prosseguimento de discussões, reflexões, intervenções futuras.

1ª situação-problema

Esse grupo elaborou rapidamente sua situação desencadeadora. A procura de materiais e a realização da proposta no próprio grupo é que despendeu mais tempo.

Uma característica comum desse grupo, em todo o curso, foi a rápida realização das propostas, visto que não discutiam muito. Uma tendência pragmática aliada à intervenção de uma das professoras que também era supervisora de ensino pareceu exercer uma relação de poder. Havia também reflexos das suas intervenções no coletivo, seus comentários e suas sugestões eram pouco discutidos e mais aceitos e ratificados. A formadora[51] do módulo de álgebra também relatou a inibição dos professores em relação à presença da supervisora. Após a discussão dessa situação proposta pelo grupo essa relação entre os professores pareceu ter sido amenizada. Não pudemos captar melhor essa suposta transformação do coletivo em virtude do curto período entre a discussão dessa situação-problema e o final do curso.

[51] Cf. fonte 6, capítulo 2.2 – Procedimentos metodológicos.

A apresentação do primeiro grupo iniciou com a introdução de que haviam reduzido a proposta para não tomar muito tempo da exposição dos outros grupos. Os pontos destacados foram que consideram importante para todo professor: realizar a dinâmica antes de levar para sala de aula; adaptar ao tempo de aula, pois "a aula tem que ter começo, meio e fim", com isso "o professor já tem algo para avaliar o aluno, por que tem uma parte escrita que traduz a participação, o envolvimento do aluno na atividade".

Esse discurso é revelador tanto do conturbado processo de avaliação em que vive o professor como da indicação institucional, pois a concepção de ciclos prevê avaliação contínua e formativa.

> Há aspectos bastante particulares da avaliação que deverão ser tratados em cada disciplina, no contexto de suas didáticas específicas, mas há aspectos gerais que podem ser desde já enunciados. É imprópria a avaliação que só se realiza numa prova isolada, pois deve ser um processo contínuo que sirva à permanente orientação da prática docente. Como parte do processo de aprendizado, precisa incluir registros e comentários da produção coletiva e individual do conhecimento e, por isso mesmo, não deve ser um procedimento aplicado nos alunos, mas um processo que conte com a participação deles. É pobre a avaliação que se constitua em cobrança da repetição do que foi ensinado, pois deveria apresentar situações em que os alunos utilizem e vejam que realmente podem utilizar os conhecimentos, valores e habilidades que desenvolveram. (BRASIL, MEC, 2000, p. 49-50)

Por outro lado, os professores relataram experiências de reclamações de pais e de gestores escolares sobre seus processos avaliativos. Isso tem acarretado na atitude de muitos professores a guarda de todas as produções dos alunos para evitar argumentações de que os estudantes estão sendo avaliados perceptivamente, no sentido lato.

Iniciada a dinâmica, objetos circulares e pedaços de barbante foram-lhes fornecidos. Os grupos realizaram os procedimentos indicados e a tabela dos resultados foi escrita na lousa.

A situação-problema foi escrita pelo grupo como segue:

> Plano de aula: números reais
> Tema: construção do π
> 1. Propor para os alunos trazerem algo com formato circular;
> 2. com barbante medir o comprimento da circunferência;
> 3. medir o diâmetro e o raio;
> 4. estabelecer uma relação entre raio e comprimento da circunferência;
> 5. solicitar que os alunos comparem as sobras no seu grupo
> 6. dividir o comprimento pelo diâmetro;
> 7. montar uma tabela com os resultados dos componentes do grupo;
> 8. observar a constância, porém não exata, portanto p/q.

Esses foram os procedimentos também propostos aos professores no encontro. As perguntas feitas durante a dinâmica foram sobre a utilização de régua e calculadora. O grupo organizador permitiu a utilização de ambos.

Os grupos realizaram os procedimentos indicados e a tabela foi escrita na lousa.

	1º	2º	3º	4º
C	23,30	35,1	22	52,3
d	7,4	11,2	7	16,6
C/d	3,1486	3,1339	3,1428	3,1506

Depois de preencherem o quadro, um dos membros do grupo sugeriu aos professores que poderiam pedir aos alunos, numa situação de sala de aula, a comparação das ‘sobras’ de barbante – o pedaço de barbante do comprimento da circunferência que não contém um número inteiro de vezes o comprimento do diâmetro. Com o objetivo de que os alunos constatassem que independentemente do tamanho do objeto, as sobras teriam o mesmo comprimento.

A indicação dessa comparação foi elogiada por alguns professores, pois o aluno teria a primeira idéia de que os resultados da razão C/d apresentados na tabela deveriam ser iguais. Complementando essa idéia, outra sugestão foi que eles fizessem primeiro o experimento todo sem utilização da régua e calculadora, inclusive medindo as sobras como no laboratório de medidas.

Na dinâmica de preenchimento da tabela, um dos valores do resultado da divisão, 2,68, chamou a atenção do grupo que estava apresentando. Este então sugeriu que refizesse as medições e a divisão. Argumentou em seguida: “por isso que se deve fazer o experimento antes de levar para sala de aula” (o).

Ao término da escrita dos valores na tabela, o grupo prosseguiu explicando como organizaria os comentários na aula:

> [...] observamos que chegamos com várias casas decimais na calculadora e colocamos só algumas casas para trabalhar a aproximação de pi e por convenção usa-se 3,14, um número aproximado. Quando faço c/d chego no pi, para introduzir o número irracional.

Um outro componente do grupo acrescentou: “para chegar ao valor, precisaria ser com paquímetro”. Encaminhando a finalização da proposta, o grupo ratificou: “a aula tem que ter começo, meio e fim. Com essa atividade, você já tem algo para avaliar o aluno”. E completa: “[...] um dos momentos a avaliar, quem trouxe, quem não trouxe o material [...]”.

A indicação didática foi “discutir os resultados com os alunos, por que a medição não é precisa, tem a questão do instrumento e também a precisão relacionada com a capacidade humana, o professor trabalha com o erro”, indicando as respostas da divisão C/d. “Importante que o aluno perceba que as respostas ficam bem próximas”.

Uma outra sugestão dada à proposta foi a explicitação do seu objetivo. Este talvez poderia ser a incomensurabilidade do comprimento da circunferência em relação ao seu diâmetro.

Uma reflexão verbalizada foi: se o professor está sempre usando arredondamento, como do pi para 3,14, como o aluno vai aprender o irracional?

Um professor do grupo da proposta respondeu inicialmente sobre o critério estatístico de arredondamento. A questão foi reformulada, “se usarmos sempre arredondamentos, como convencer o aluno que o número é irracional?”, já que era essa a proposta do grupo para chegar ao número real.

Pudemos então rediscutir a proposta. Retomamos um dos resultados, expressos na tabela: 52,3cm e 16,6cm respectivamente para comprimento e diâmetro de uma circunferência. Em seguida, foi solicitado que fizessem o cálculo da divisão utilizando a calculadora. O resultado 3,150602409 foi escrito na lousa.

A questão levantada foi: esse número é irracional? Disseram que sim, e não houve nenhum contra argumento, então a questão seguinte foi: como posso afirmar que é irracional? Essa questão pareceu reproduzir a inquietação levantada. As repostas foram:

- Por que a calculadora não dá todos os dígitos.
- Você pode pedir para o aluno fazer a operação inversa, esse número vezes 16,6, vai dar 52,299999.
- Por que não há dízima.
- Faltou os três pontinhos no final.

Na unidade didática anterior, já havia aparecido essa situação com a outra turma de professores, com isso buscamos evitar as repetições nas análises, evidenciando o processo e salientado as diferenças.

Uma parte do diálogo foi:

> Como se pode afirmar que não há dízima?
> Por que estamos vendo que os números não se repetem.
> Como saberemos que não vai se repetir depois das casas que estão escritas?
> [...]
> Seria interessante quando estamos nessa atividade com os alunos pedirem que façam pelo menos uma vez esse cálculo para discutir esse resultado.

As reticências indicam que essa pessoa não continuou o diálogo e outra entrou sugerindo a divisão. Esta por sua vez iniciou tal divisão.

Nesse momento, todos conversavam com seus pares e não compartilhavam com o coletivo. Como já havia ocorrido com a outra turma, havia algumas dispersões. O ponto em que estava a discussão foi retomado várias vezes com intuito de assegurar a participação de todos numa discussão coletiva.

Essa situação é indicadora de que os professores não estão acostumados a discutir matemática, contestá-la. Ao mesmo tempo em que demonstra ser esse um caminho pelo qual podemos iniciar uma transição na pedagogia escolar.

Da mesma maneira da unidade anterior, encaminhou-se a igualdade, $\frac{52{,}3}{16{,}6}=\frac{523}{166}$ e se esse número poderia ser racional e irracional.

A ausência de manifestação para analisar esse dilema ocasionou a intervenção de mobilizar o que conhecemos de número racional. A definição foi verbalizada e escrita na lousa (um número é racional se pode ser escrito da forma a/b com a e b inteiros e b≠0).

Retomou-se a questão anterior e três juízos foram explicitados:

> 1) Mas na definição é forma, lá é divisão.
> 2) Acho que não podemos afirmar, trata-se de um número híbrido.
> 3) Se continuarmos efetuando a divisão e virmos que existe uma dízima então ele se tornará racional.

O primeiro juízo foi indicativo da necessidade de apropriação do movimento conceitual da fração ao número racional na imagem conceitual, ou seja, as ligações de forma e conteúdo no desenvolvimento do número racional. A justificativa dada por um professor de que se tratava de uma igualdade não direcionou a discussão no coletivo.

O terceiro juízo pareceu estar ligado ao segundo. A questão: “[...] podemos ter um número que pode se transformar de irracional para racional e vice-versa?” com a sucessiva manifestação de discordância formaram indícios do movimento do pensamento flexível, pois não era mais só a questão de classificar o número que estava no pensamento, mas as próprias definições representativas do pensamento teórico elaborado.

Tomando a resposta sobre o que é período de uma dízima, foi escrito na lousa a representação da divisão pelo método da chave a partir da qual, sem efetuar a divisão (considerando-a no campo racional), a proposta foi pensar nos restos possíveis. Ao iniciarem a resposta pela seqüência numérica 0, 1, 2..., um professor interrompeu e disse: “zero não pode ser, pois daí seria um decimal exato”. A conclusão foi que haveria 165 possibilidades de restos distintos, um número finito de possibilidades.

O que significa ter uma finidade de restos possíveis? Que se for dízima periódica, a partir de algum momento, o resto vai se repetir. A esse movimento, foi acrescentado o resultado realizado por uma professora, a qual foi solicitado que escrevesse na lousa.

$$3{,}1\underbrace{50602409638554216867469879518072289156626}_{\text{41 algarismos}}506024096385542168 67...$$

Embora todos concordassem que o trabalho era ‘insano’, disseram que nunca tinham visto uma dízima com período tão longo (41 algarismos). Julgaram ser relevante que o estudante fizesse pelo menos uma vez essa divisão com um período longo, talvez nem tanto, mas algo que a calculadora não fosse capaz de evidenciar o período.

A questão foi retomada de outra forma: precisaria ter feito a divisão para saber que resultaria um número racional? A questão não foi respondida de pronto. Uma síntese coletiva começou a ser encaminhada no sentido de que se tratava de divisão ou razão de inteiros e, portanto, iria resultar um número racional.

Os comentários adjacentes a esse movimento se referiram: ao numeral, no caso de representações decimais infinitas, que nem sempre nos permite classificar corretamente, principalmente se está ‘solto’, não contextualizado; à importância de se usar o símbolo de aproximação quando estamos aproximando um irracional por um racional; e à limitação do instrumento de medida.

O problema da divisão pareceu ter sido resolvido, mas o problema ligado à proposta não. Inquietações outras foram evidenciadas:

> E a história do pi?
> Então estou ensinando tudo errado?
> Como mostrar para o aluno que pi é irracional?
> Então essa atividade não serve?

Essas questões identificam que houve mobilização na constituição da significação do que a situação-problema tem para o professor, na sua atividade de educador.

Conversamos sobre as notas históricas dos livros didáticos que podem levar a conclusões erradas e buscamos reconstruir um resumo histórico do número pi, para podermos localizar o problema.

Egípcios e babilônios já sabiam da existência de uma relação constante entre a circunferência e seu diâmetro e estes utilizavam 3 e aqueles, algo em torno de $3\frac{1}{7}$ (HOGBEN, 1970).

Na sugestão apresentada a essa proposta, de realizá-la inicialmente sem régua, os estudantes certamente chegariam a 3, e poderiam comparar as medidas da sobra entre eles, como também com os valores obtidos na história.

> O papiro de Ahmes (cerca de 1600 a.C.) dá à relação existente entre a circunferência e o diâmetro, o valor 3,16, em nossa notação. O papiro de Moscou contém uma fórmula para se calcular a área da esfera, em que se atribui a π o valor de 3,14. (HOGBEN, 1970, p. 64)

Outro método para determinar com mais precisão o valor do pi foi o chamado ‘método da exaustão’, que compreende inscrever e circunscrever polígonos à circunferência. À medida que se aumentam os lados dos polígonos, mais a forma do polígono se aproxima à da circunferência.

Até hoje existem potentes computadores calculando casas decimais do pi, mas sua irracionalidade foi demonstrada em 1761.

> Lambert mostrou que se x é um número racional não-nulo então tgx não pode ser racional. Como $tg\pi/4=1$, um número racional, segue-se que $\pi/4$ não pode ser racional, portanto π tão pouco. (BOYER, 1993, p. 340)

Os professores argumentaram que não haviam tido acesso a demonstração da irracionalidade de pi na sua formação e a organizadora disse o mesmo.

Dessa forma, conclui-se que o professor está se formando quando em atividade orientadora de ensino, pois ela comporta a necessidade do estudo, da pesquisa na organização do ensino.

No curso pudemos discutir que a demonstração envolvia recursos matemáticos do nível superior (Anexo) e que a intenção pode não ser demonstrá-la no nível básico de ensino, mas sua existência necessita ser evidenciada, assim como dialogar sobre os métodos, principalmente para construir no pensamento que o conhecimento empírico não é suficiente.

O grupo não alcançou a reformulação da proposta. No tempo destinado a esse fim, houve a discussão com os professores ausentes no encontro precedente do que havia ocorrido. Os professores do pequeno grupo apresentaram inquietações, desconforto, dúvidas, manifestando juízos que mesclaram a insatisfação com um impasse de não *saber o que fazer*, traduzido também nas suas emoções e nos seus comportamentos.

A proposta estava para ser rejeitada pelo próprio grupo, pois o argumento de um professor foi que a situação-problema somente servia para discutir o número racional. A sugestão foi que em vez de abandoná-la, desenvolvessem-na, uma vez que considerar o pi racional pertence à sua história. A organização do encaminhamento com os estudantes poderia se basear no que ocorreu no próprio encontro.

Observamos que os professores buscam abordar nas suas aulas situações que evidenciem certezas e desenvolvimento sem gerar grandes dúvidas, como se a matemática fosse desenvolvida tranquilamente passo a passo, como um algoritmo.

A necessidade do professor de *mostrar algo* ao estudante foi muito evidenciado em diversos momentos do curso e mesmo nessa proposta de abordagem do pi. Esse *mostrar* é principalmente ligado ao visualizar, ao processo empírico do conhecimento. Esse indicador metodológico está ligado historicamente pelo movimento do currículo industrial como mencionado no capítulo 2.

O movimento do coletivo causado pelo desenvolvimento dessa proposta possibilitou a apropriação da irracionalidade do número pi coerente com seu desenvolvimento lógico-histórico. A maneira pela qual foi desenvolvida a situação-problema, juntamente com a discussão no encontro, pôde também evidenciar o lógico-histórico como perspectiva didática a qual se opõe à idéia do conhecimento acabado, à verdade absoluta, à linearidade da construção do conhecimento e da tranqüilidade dos seus processos. Idéias muitas vezes refletidas na matemática escolar. Isso permite, no processo lógico-histórico dos professores, uma relação humanizadora com o conhecimento, com o desenvolvimento humano de apropriação do conhecimento historicamente elaborado.

A dificuldade de propor ao estudante o desenvolvimento do pensamento teórico e permitir os dilemas do processo de apropriação do conhecimento, interpretamos como diretamente vinculada à insegurança do professor na sua relação com o conhecimento, ao medo da mudança metodológica e à constituição do professor no imaginário social.

O percurso vivenciado pelos professores possibilitou uma reformulação das imagens conceituais sobre a irracionalidade do número pi como também um encaminhamento de transição pedagógica ao mobilizar a significação do processo de apropriação do conhecimento com seu desenvolvimento histórico.

Consideramos que essa proposta permite que o estudante se aproprie do desenvolvimento humano acumulado nesse conceito. Embora o ponto de partida seja empírico, a organização do ensino é justamente encaminhar o desenvolvimento dos conceitos coerentes com o do próprio objeto de estudo e, com isso, possibilitar o desenvolvimento do pensamento teórico na apropriação da construção do objeto pelo estudante, permitindo a aquisição das aptidões nessa formação. O próprio curso estava promovendo esse movimento.

Ao final do encontro, um professor do grupo mostrou um artigo de revista à organizadora que mencionava os irracionais como obra de Deus. A sugestão foi que abordasse na reformulação da proposta esse artigo, no sentido de discutir a compreensão dele com os estudantes. O professor poderia perceber que a forma de interação com o mundo depende diretamente do nível de conhecimento que temos dele.

2ª situação-problema

A primeira versão desse grupo compôs uma série de temas – listados anteriormente no início deste item como atividade orientadora de ensino – que apontava a utilização de números inteiros, racionais e irracionais em situações da prática cotidiana.

Por meio da discussão, o grupo pôde refletir como encaminharia uma situação-problema para abordar o número real. O grupo justificou que para explicar o real necessitaria explicar o irracional. A decisão foi abordar a diagonal do quadrado com o número irracional.

> Objetivo: Identificação dos números irracionais na reta numérica.
> Estratégia: construção da diagonal do quadrado através de compasso e régua
> Procedimentos:
> 1) Representar uma reta no papel.
> 2) Marcar a origem da reta (marcar o algarismo zero).
> 3) Adotar como parâmetro uma unidade de medida.
> 4) Marcar na reta comprimentos iguais à unidade estabelecida.
> 5) Com auxílio de um compasso, construir um quadrado em que um dos lados sobreponha a reta e que o vértice coincida com uma das marcações da reta.
> 6) Construir uma diagonal do quadrado.
> 7) Calcular a medida dessa diagonal através do teorema de Pitágoras.

8) Solicitar que os alunos realizem, com os instrumentos disponíveis, a medida da diagonal.

9) Solicitar que comparem o valor obtido pelo teorema com a medida obtida pelo instrumento.

10) O aluno deverá perceber que a medida obtida pelo teorema e o instrumento utilizado são diferentes.

11) Discutir em pequenos grupos:

a) os porquês das diferenças entre os valores obtidos
b) qualquer quadrado terá como diagonal um número irracional?

A análise do encaminhamento da proposta suscitou a sugestão na explicitação do objetivo como propiciar a apropriação da incomensurabilidade da diagonal do quadrado em relação ao seu lado.

Os quatro primeiros itens, relacionados à construção da reta numérica, recuperam a generalização da unidade de medida incorporada no pensamento numérico.

Na seqüência, itens 5 e 6, é solicitada a construção do quadrado e uma de suas diagonais. A utilização de procedimentos geométricos para construção de um quadrado permite refletir a relação do quadrado particular com as propriedades generalizadas deste – lados opostos paralelos e congruentes, ângulos internos de noventa graus –, essenciais para a compreensão da incomensurabilidade da diagonal com seu lado.

Os encaminhamentos 7 e 8 revelam as possibilidades de geração de um dilema. A solicitação 8 propicia ao estudante o movimento de suas imagens conceituais, principalmente se for instigado a procurar outros métodos de medição que além da régua graduada.

Por exemplo, considerar o lado do quadrado como unidade para medir a diagonal. A esse encaminhamento, pode seguir a subdivisão do lado do quadrado em um número determinado de partes construídas com régua e compasso, compondo uma subunidade para comparação com a *sobra* – parte da diagonal que tem comprimento menor que o lado do quadrado. Esse procedimento pode possibilitar ao estudante a apropriação ou objetivação do processo de medição e, ao mesmo tempo, discutir várias aproximações possíveis, levando até a conclusão de que esses comprimentos são comensuráveis. A discussão de resultados, métodos e instrumentos possibilitaria ao estudante realizar seu movimento conceitual na dialética entre comensurável e incomensurável.

Alguns conhecimentos desenvolvidos na história podem compor a discussão desse problema, como o desenvolvimento de uma prova geométrica. Esta consiste na construção de outro quadrado (AB’C’D’) de lado igual a *sobra* da diagonal, conforme Figura 1. Como esse processo pode ser repetido, como na construção de AB’’C’’D’’ e assim por diante, indefinidamente, resulta que nenhuma unidade de comprimento, por pequena que seja, pode ser encontrada de modo que a diagonal e o lado sejam comensuráveis (BOYER, 1993).

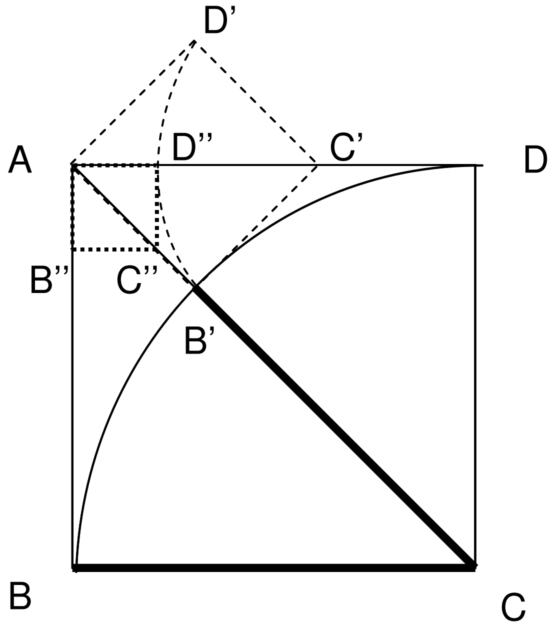


Figura 1

Os encaminhamentos 9 a 11 propõem reflexão, discussão, generalização e síntese de um processo. O item 11*a* se constitui num encaminhamento possível para a compreensão das diferenças de processos empíricos e teóricos da medição. O item b poderia partir de uma intuição a um processo de pensamento dedutivo. Este é compreendido não somente no processo sintético, formal mas também no dialético, como visto na unidade didática medida.

A própria escola pitagórica teve seu processo de transição, dos admirados triângulos pitagóricos ao "Alogon, o inexprimível" (DANTZIG, 1970, p 97). Transição nada tranqüila nem imediata, que culminou inclusive no seu declínio.

Entendemos que nesse último item se configura o objetivo da situação, contudo a mediação do professor nesse processo de discussão é fundamental para que o estudante realize seu próprio movimento conceitual. Nesse processo, os estudantes podem questionar a irracionalidade de $\sqrt{2}$. Os livros didáticos abordam as aproximações sucessivas, mas na interação com os estudantes talvez eles queiram saber se há outra forma. No próprio curso, a questão do uso da aproximação de um irracional se constituiu na motivação desencadeadora da discussão em busca da apropriação do conhecimento em jogo. A própria diferença entre aproximação estatística e processo de aproximações sucessivas constitui outro encaminhamento possível.

A construção da demonstração algébrica poderia também ser realizada juntamente com os estudantes. Ela consiste em supor a existência de um racional como sendo $\sqrt{2}$. Essa suposição equivale dizer que o seu quadrado é 2 que na linguagem simbólica teríamos $q^2=2$. Como estamos supondo q racional, ele deve ser uma razão de inteiros como m/n, sendo m e n inteiros positivos. Podemos também supor que m/n seja uma razão irredutível, pois se não o fosse poderíamos torná-lo dessa forma. Como por hipótese o quadrado desse número deve ser igual a dois, temos $(m/n)^2=2$, ou seja, $m^2/n^2 = 2$. Essa expressão é análoga a $m^2 = 2n^2$ e essa igualdade significa que m^2 é par e conseqüentemente m também. Por quê? Se m não fosse par, seria ímpar, simbolicamente como 2k+1, no qual k é qualquer inteiro que, ao quadrado, $(2k+1)^2$, resultaria $4(k^2+k)+1$, um número ímpar. Resumindo, se m for ímpar, m^2 é necessariamente ímpar.

Se m é par, então n deve ser impar, por que m/n é uma fração irredutível. Como m é par, m^2 é divisível por 4, ou seja, m=2k implica que $m^2= 4k$ e, lembrando da igualdade inicial $m^2 = 2n^2$, teríamos $4k=2n^2$ e consequentemente $2k=n^2$, dessa igualdade conclui-se que n^2 é par.

Verificamos uma inconsistência lógica: n é par e também ímpar. O que indica a falsidade da hipótese de que exista um número racional (m/n) cujo quadrado seja 2.

Aliada à proposta, também podem surgir dúvidas quanto ao próprio teorema de Pitágoras, pois algumas vezes no ensino ele é posto e não apropriado. A construção de quadrados a partir dos lados do triângulo retângulo e a comparação das áreas constituem um encaminhamento presente no ensino escolar.

A proposta desse grupo indicou um salto qualitativo nos procedimentos pedagógicos à medida que o professor propõe aos alunos entrarem num dilema e discutirem o problema histórico da incomensurabilidade. Esses são indícios da apropriação do lógico-histórico como proposta didática.

A situação desencadeadora configurou a relação com um problema fundamental na criação dos irracionais cuja origem não foi pela escrita de decimais com dízimas não periódicas como abordam certas propostas, e sim a incomensurabilidade da diagonal de um quadrado em relação ao seu lado. O contexto dessa descoberta nos auxilia a compreender o movimento desse conceito e o considerarmos na organização do ensino que busca o desenvolvimento das aptidões do processo de desenvolvimento do pensamento teórico da medida, constituídas historicamente.

Compreender o desenvolvimento do teorema de Pitágoras permite se apropriar da sua significação. Esse teorema foi exaltado e admirado pela escola pitagórica, principalmente pela união da Geometria, como os pitagóricos a viam, à Aritmética, com a valorização da última, devido à base filosófica dessa escola, que o número regulava o universo. Foi pelo mesmo teorema que se conheceu o incomensurável e o irracional, pois como conseqüência da generalidade desse teorema, a diagonal do quadrado não tem medida comum com seu lado.

Essa descoberta foi guardada em segredo "os membros da ordem juravam não divulgar sua existência a estranhos [...]. Menos de um século depois o segredo dos pitagóricos tornou-se propriedade de todos os pensadores" (DANTZIG, 1970, p.98). A conseqüência foi o declínio dessa escola, na sua base filosófica.

Esse contexto histórico permite-nos compreender o processo lógico do pensamento que se fundamenta na unidade dos contrários entre a comensurabilidade e a incomensurabilidade.

O aparecimento dos incomensuráveis foi um dos primeiros problemas enfrentados pela nascente idéia da continuidade, ou a falta dela, no conjunto dos racionais. E só foi possível por que o conceito número começou a ser pensado além da sua finalidade prática. A lógica grega (aritmética aplicada) empregava, nos cálculos relativos à geometria e à astronomia, números racionais vizinhos do valor irracional verdadeiro.

A abordagem dessa proposta pode gerar a discussão da incomensurabilidade com o número irracional em 11*b*. Essa relação não é automática, pois os estudantes de Albadejo (1997) dizem que a diagonal do quadrado e seu lado não se pode medir por fração de inteiros porque as raízes quadradas (analisadas no contexto) têm uma expressão decimal infinita não periódica. Por outro lado, os próprios estudantes não compreendem a inexistência de uma parte alíquota comum entre a diagonal e o lado do quadrado.

Os alunos não associaram esses dois juízos. Albadejo (1997) concluiu que o tratamento didático essencialmente baseado na Matemática Moderna tem resultado pobre em significações.

Embora essa situação proposta pelo grupo não tenha sido vivenciada no encontro, ela foi divulgada a todos, possibilitando seu desenvolvimento nas suas relações pedagógicas e também por meio das objetivações do professor, outras reflexões.

A abordagem do teorema de Pitágoras para introduzir um número irracional é também proposta dos PCNs e dos livros didáticos, mas notamos as diferenças nos encaminhamentos do grupo, como a colocação para discussão do dilema entre o conhecimento empírico e o teórico e também para uma generalização. Compreendemos que essa produção revela um movimento de apropriação do grupo, de significação desse conceito, das suas imagens conceituais de irracionalidade que orientam suas apropriações sobre a unidade dos contrários: comensurabilidade e incomensurabilidade.

3ª situação-problema

A primeira proposta do grupo consistiu numa série de procedimentos de cálculo de raízes quadradas de números racionais. O grupo introduziu dizendo que a situação foi desenvolvida para estudantes da sétima série (quarto ciclo). A intencionalidade consistiu em

> [...] introduzir aos poucos alguns complicadores. O primeiro seria a utilização da calculadora, propondo que fizessem os quadrados de alguns números como 1, 2,.... Depois os alunos iriam iniciar a extração das raízes, começando por quadrados perfeitos e depois "números com vírgula" [...]

Em uma parte da proposta, anuncia o encaminhamento para percepção da regularidade de certas raízes quadradas, conforme quadro abaixo, para que os estudantes dispensem a calculadora.

$$\begin{array}{ccccccc} \sqrt{0{,}16} & \sqrt{0{,}16} & \sqrt{0{,}49} & \sqrt{0{,}81} & \sqrt{1{,}21} & \sqrt{1{,}44} & \sqrt{1{,}69} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}9 & 1{,}1 & 1{,}2 & 1{,}3 \end{array}$$

Conclui-se que essa parte constitui um procedimento para extração de raízes de alguns números racionais, ou seja, alguns racionais que resultam em decimais exatos.

Observamos um direcionamento para uma generalização de um processo empírico de observação da regularidade proveniente de raízes quadradas de números quadrados perfeitos, que são os decimais na sua forma fracionária: $\sqrt{16/100}$, $\sqrt{36/100}$ e assim por diante.

O último encaminhamento da proposta consistiu em localizar $\sqrt{2}$ na reta.

Encontre $\sqrt{2}$ sabendo que:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{1} & \sqrt{2} & \sqrt{4} \\ \hline 1 & & 2 \end{array}$$

A intenção mencionada é o acompanhamento dos procedimentos dos alunos na localização do ponto em que se situa $\sqrt{2}$.

O grupo concluiu que a proposta permite: “Conhecimento das raízes exatas e não exatas dos números naturais de 0 a 9, dízimas não periódicas”. Para isso, iniciaria a seguinte seqüência: “[...] cálculo das raízes não exatas, trabalhar aproximação de casas decimais de duas casas, três casas [...]”.

As questões sugeridas aos estudantes são: “Como são chamados esses números?”, referindo-se à primeira parte da proposta – a solicitação da extração da raiz usando calculadora. Depois, “Os conjuntos dos números racionais dão conta desses números?”, “Quais são os números racionais?”

Com isso, conclui: “já que os racionais não conseguem abranger esses números, criou-se o conjunto dos números reais”.

Após a apresentação da proposta do grupo, alguns professores fizeram seus comentários, entre eles

> - Gostei do trabalho com as raízes: localização das raízes, números quadrados, discussão da calculadora, número inacabado como o irracional;
> - Interessante o trabalho com as raízes por que os alunos têm a concepção de que se a raiz não dá exata é por que não existe.

Discutimos que a proposta aborda aspectos operacionais da raiz quadrada. A raiz quadrada no seu aspecto funcional, $f(x)=\sqrt{x}$, com domínio inicialmente nos naturais e depois um subconjunto do conjunto dos números racionais.

Depois dessa abordagem, segue com a questão da localização de $\sqrt{2}$ na reta, supondo que os alunos, ao trabalharem a extração de raízes anteriormente, talvez utilizem aproximações sucessivas com decimais, sugerindo uma seqüência metodológica que pode influenciar na aprendizagem de construção do conhecimento também nessa linearidade.

Voltamos à análise da proposta dessa unidade didática com o coletivo. Qual aspecto conceitual do número real estaria propondo encaminhar com os estudantes? Alguns professores disseram sobre irracional, outros densidade, continuidade.

Havia dois direcionamentos na proposta desse grupo. Um operacional que se tratava da extração de raízes quadradas e outro que, se visto independentemente da seqüência, poderia proporcionar a discussão de procedimentos para localização de um irracional na reta numérica, inclusive sua possibilidade. Ou ainda, discutir o método de aproximações sucessivas e a densidade.

A reformulação foi encaminhada para o desenvolvimento do conceito de densidade e continuidade, como segue abaixo.

O objetivo foi reescrito como “Partiremos da localização de pontos numa reta para proporcionar ao aluno o entendimento da continuidade da reta”.

Pudemos discutir brevemente a relação entre *continuidade da reta* e *continuidade da reta real*. A continuidade na reta geométrica poderia ser discutida com os estudantes antes mesmo de propor a relação com os números.

A continuidade na geometria não era um problema, visto que os geômetras haviam resolvido o problema com um postulado, mas por que ela não foi o resultado de um pensamento dedutivo? Questões como essa possibilitam mobilizar o pensamento e a interação dos estudantes para construção do seu conhecimento. A indicação de uma outra questão, com intenção generalizante é: quais são as características necessárias de um contínuo?

Discussões sobre contínuo são indicadoras da mobilização do seu contrário, o discreto. Estes continuem momentos de reflexão coletiva cuja mediação do professor para conduzir ao objetivo é fundamental.

O pressupondo da proposta do grupo foi que o estudante conhecesse a representação decimal de $\sqrt{2}$ com algumas casas decimais como 1,41142135….

A primeira questão foi “existem números entre 1 e 2 ? Se existe ou não, justificar a resposta. Se existe, localizá-los na reta”.

Uma sugestão consiste em discutir com os alunos considerando os conjuntos dos números naturais e dos racionais, mesmo antes de pensar na reta numérica, e também iniciando o desenvolvimento do conceito de densidade.

A intenção colocada foi que ao responder à primeira questão, as perguntas seguiriam nessa mesma lógica como: “existe número entre 1 e 1,5 ou 1,5 e 2?” Numa seqüência de intervalos que vai se aproximando de $\sqrt{2}$: “E entre 1,25 e 1,5? Questioná-los até chegar a intervalos menores que se aproximem de $\sqrt{2} = 1,41...$”. A mediação consistiu em proporcionar uma generalização do processo. ”Se o aluno entendeu a idéia que sempre em um intervalo haverá um ponto médio (essa questão poderá introduzir continuidade que há entre dois números sempre)”.

Essa idéia se assemelha a seqüência de intervalos encaixantes por meio da qual K. T. W. Weierstrass (1815-1897) produziu uma definição para o número real.

> Consideremos qualquer seqüência I_1, I_2, I_3, ..., I_n, ... de intervalos sobre a reta numérica, com pontos extremos racionais, e com cada um contido no anterior, e de tal forma que o comprimento do n-ésimo intervalo I_n tenda a zero à medida que n aumenta. Uma seqüência deste tipo é chamada de seqüência de intervalos encaixados. No caso de intervalos decimais, o comprimento de I_n é de 10^{-n}, mas pode muito bem ser 2^{-n} ou meramente restrito à exigência mais moderada de que seja menor do que 1/n. (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 81-82).

No caso desta proposta o intervalo de partida foi I_0=[1,2] e a seqüência [1;1,5], [1,25;1,5], [1,375;1,5]... caracterizando intervalos de comprimento 2^{-n}. Essa abordagem suscita uma discussão sobre processos infinitos.

Essa relação, com o desenvolvimento da continuidade da reta real historicamente construído, permite ao estudante desenvolver aptidões humanas encarnadas no conceito, como compreender que a matemática não é uma questão de genialidade.

O encaminhamento continuou da seguinte forma: "A partir do momento que localizar a √2 na reta provar que existe uma descontinuidade no conjunto dos racionais e que √2 preenche uma lacuna tornando o conjunto contínuo". A idéia é generalizar que os irracionais *preenchem as lacunas* para evidenciar a equivalência entre número e ponto.

> [...] correspondendo a cada uma destas seqüências de intervalos encaixados existe precisamente um ponto sobre a reta numérica que está contido em todos eles. Este ponto é chamado por definição de número real; se não for um número racional é chamado de número irracional. Com essa definição estabelecemos uma perfeita correspondência entre pontos e números. (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 82).

Tomar o irracional por uma seqüência infinita de intervalos de extremidades racionais, não é nada simples, é um salto no conceito de número, principalmente por envolver processos infinitos.

No exemplo, vimos o caso do número √2 cuja representação muitas vezes é interpretada somente como um valor da função √x. A compreensão, não como uma operação, mas como representação de uma sucessão de intervalos, significa uma mudança na relação forma e conteúdo do conceito de número. Esse conteúdo contém o pensamento repetitivo, na construção dos intervalos, e este, por sua vez, não finito no caso do número irracional.

O grupo encaminha uma conclusão: "Portanto √2 ou qualquer número irracional não têm função de mensuração, não podendo ser usado empiricamente".

Compreendemos que essa conclusão não se encontrou articulada com o desenvolvimento da proposta. Este parece ser o reflexo da discussão da segunda situação. O fato de terem tido um intervalo de tempo entre a primeira apresentação das propostas e a sua reformulação permitiu que nessa última aparecesse os reflexos da mobilização das imagens conceituais de discussão anterior, bem como indícios do processo de apropriação indicativos de que elas estavam sendo transformadas.

A nosso ver, o encaminhamento da proposta do grupo se dirigiu para construção da reta real, ou seja, a equivalência entre o conjunto dos números reais com a reta. Essa construção passa por um processo de análise comparativa de qualidades do conjunto dos números reais com as do de pontos da reta. Os números reais como união dos números racionais e irracionais já era conhecida desde o século XVI, mas não como conjunto contínuo. (GUILLEN, 1987).

O campo racional já possuía a ordenação, a infinidade potencial e a densidade, mas com a descoberta dos irracionais observou-se que na reta racional havia *buracos. C*omo saber se os irracionais *preencheriam* os *buracos*? Não haveria outros *buracos*?

> Para responder essa pergunta Cantor decidiu provar a diferença fundamental existente entre o domínio racional e o real.
> O conjunto dos números racionais, apesar de bem ordenado e compacto, é *imperfeito*. É imperfeito porque *não é fechado* com respeito a processos infinitesimais [...] porque existem seqüências racionais infinitas, convergentes, cujos limites não são números racionais. Em suma, o conjunto dos números racionais é imperfeito, porque não contém todos os seus próprios *valores limites*. (DANTZIG, 1970, p. 149)

No mesmo sentido de análise, demonstra-se que os números reais é um conjunto perfeito e esse conjunto estava pronto para ser nomeado o *continuum aritmético*. “Veja-se só o que isto significa! Na linha numerada racional, os números adjacentes encontram-se infinitamente juntos, mas na linha numerada real os números adjacentes encontram-se mais do que infinitamente juntos” (GUILLEN, 1987, p. 45).

Pudemos compor o potencial da proposta para o desenvolvimento do movimento conceitual da continuidade da reta real. Reforçamos uma vez mais que a mediação do educador é imprescindível, pois ele que organiza as manifestações do grupo, insere questões que possibilitam o desenvolvimento do pensamento, gerencia a discussão.

O movimento de transformação da proposta, da primeira para a segunda, na inter-relação pequeno grupo e coletivo, pôde transitar de procedimentos relacionados ao pensamento empírico ao pensamento flexível. Na primeira proposta, o foco era a extração de raízes e a localização na reta pareceu constituir uma aplicação. À similaridade de uma seqüência escolhida de raízes quadradas, buscava-se uma generalização pela forma, características do pensamento empírico.

Na proposta reformulada, há indícios de desenvolvimento de conceito e não apenas de processos de cálculo. A generalização objetivada pela seqüência de intervalos de extremidades racionais é de outro tipo, pois reúne a diversidade num sistema. Intervalos, média aritmética, processo infinito, seqüência são conceitos interligados que organizam a generalização para a variável que traduz o movimento do comprimento dos intervalos. No sistema, esse movimento tem um significado: o de convergência, essencial para definir o número real, o conhecimento teórico. A proposta encaminha esse pensamento, mas não o explicita. Pelos indícios apontados, caracterizamos um pensamento flexível, pois a descrição do objetivo constitui-se no desenvolvimento da continuidade da reta real.

Esse processo realizado pelo grupo nos fornece indícios do movimento lógico-histórico do professor no seu processo de apropriação do conceito de continuidade e sua objetivação para o ensino na elaboração da situação-problema.

Ao mudar o foco da elaboração da situação-problema, também a forma do pensamento se alterou: do pensar no fazer para o pensar em compreender o fenômeno. Com isso, as imagens conceituais também se manifestam e se transformam. Nas interações com o grupo, as relações interpsíquicas puderam propiciar esse movimento das imagens conceituais que se ligam ao desenvolvimento da continuidade aritmética.

4ª situação-problema

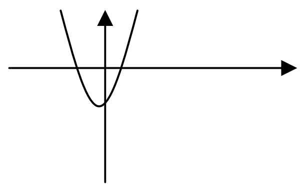
O grupo que desenvolveu a proposta abaixo não a reformulou significativamente, consistindo apenas no aperfeiçoamento da escrita. Então mostraremos somente a versão final da situação-problema.

No discurso inicial da apresentação, o grupo introduziu que o ponto de partida seria o conhecimento dos alunos em relação aos conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais e então fariam uma relação com a função quadrática.

A intenção foi "após realizar um estudo comparativo entre os campos numéricos citados, discutir qual seria a real necessidade de ampliação do campo numérico que contemple o universo observado no gráfico obtido".

A situação foi assim apresentada:

A função escolhida foi f(x)= x^2+x-2, o esboço do gráfico:



Os encaminhamentos seriam direcionados pelas questões:

Observando a parábola, onde o universo **N** é utilizado?
Onde o universo **Z** é suficiente?
E em **Q**?
Será que é possível unir todos os universos numéricos em um único?

A explicação do grupo para a primeira questão foi que o objetivo consistia em que os estudantes assinalassem os pontos sobre a parábola e comparassem o conjunto de todos os pontos da parábola com os assinalados, referentes ao domínio dos números naturais. Com isso, descobririam que um dos zeros da função é natural, o número 1. Fariam o mesmo em relação aos inteiros e, ao acrescentarem os negativos ao conjunto anterior, descobririam que o outro zero da função é negativo, o número -2. E embora fossem encontrados os zeros da função, a parábola ainda não existiria, e sim somente alguns pontos. Continuando, nesse percurso, solicitaria que eles fizessem também em relação aos racionais.

Para esse último já teriam alguma dificuldade em representá-los, devido à densidade do conjunto dos racionais, mesmo que seja num intervalo, seria impossível com lápis. Talvez nesse momento surgisse o impasse se os números racionais compreendem todos os pontos da curva. Afinal, os racionais são tão densos que poderiam ter a intuição de que completam a reta. Esse pensamento não nos surpreenderia, pois ele faz parte da história do pensamento numérico.

Uma discussão desse impasse colocaria em jogo a densidade, o irracional, a continuidade, a ordem.

Uma crítica a essa proposta foi que “não fica claro na atividade da parábola o buraco irracional. E não ficou claro o começo, meio e fim que o plano de aula deve ter”.

Essa crítica sugere que poderia escolher outra função, como f(x)= x^2-2, já que a intenção é que os estudantes percebam os ‘buracos’ causados com o universo dos racionais em relação a linha, a reta, e iriam “em busca de resolver esta situação”.

Essa proposta se insere num pensamento numérico relacionado com as funções que expressavam movimento que impulsionaram o rigor na definição dos números reais.

Foi Weierstrass o primeiro, segundo Kline (1992), a sinalizar que, para estabelecer com precisão as propriedades das funções contínuas, seria necessária uma fundamentação teórica para o contínuo numérico, pois para demonstrar o teorema, que chamamos hoje de Teorema do anulamento ou de Bolzano ou ainda do valor intermediário, precisaria ter um conjunto numérico que não tivesse 'buraco'.

Esse teorema é formulado da seguinte forma: se f for uma função contínua no intervalo fechado [a,b] e se f(a) e f(b) tiverem sinais contrários, então existirá pelo menos um *c* em [a,b] tal que f(*c*)=0.

O que quer dizer que essa função *corta* o eixo x em *c* e a chamamos de raízes da função. O problema que Bolzano dizia era relacionado justamente à existência desse número. Na função exemplificada $f(x)=x^2-2$, temos que f(1)=-1 e f(2)=2, então deve existir algum c no intervalo [1,2] tal que f(*c*)=0, pois se a função passa de um valor negativo a um positivo, então ela será nula para algum valor de x. Só podemos fazer essa formulação devido à boa ordem do conjunto dos números reais.

Se a função admite somente números racionais, então *c* não existe, e era esse o problema. O conjunto dos números racionais não é um contínuo numérico, não se comporta analogamente como o eixo da geometria analítica, um contínuo geométrico, como gostariam os matemáticos (algebristas) da época.

Afinal *c* existe? A álgebra já tinha a resposta, já sabiam calcular as raízes dessa função, o que significa que $c=\sqrt{2}$ no intervalo [1,2].

Nesse sentido, podemos escolher intervalos cada vez menores nos quais os sinais da função ainda são contrários, como [1,4,1,5] em que se obtém f(1,4)=-0,04 e f(1,5)=0,25, ou [1,413,1,42] em que se obtém f(1,413)=-0,003431 e f(1,42)=0,0164, iniciando um pensamento de infinitesimais. A sucessão desses intervalos, como acima citado, compõe o conceito de número real iniciado por Weierstrass.

Também a geometria analítica já havia permitido a *visualização* da existência desse ponto por meio do gráfico. Só faltava mesmo a Aritmética, caso contrário, ela poderia ser acabada, contradita logicamente pela simples insuficiência do conjunto dos números reais, pela falta do contínuo aritmético.

Não basta conhecer os irracionais, ou seja, não basta *juntar* os racionais com os irracionais, isso eles já faziam. A álgebra e a análise avançaram sem uma sistematização dos reais até certo ponto. Isso mostra o quanto a matemática progrediu 'ilogicamente' (KLINE, 1992), pois a compreensão intuitiva parecia ser suficiente, até que não se pôde mais avançar sem bases seguras.

A síntese teórica que conhecemos hoje do conjunto dos números reais foi finalizada por Dedekind e Cantor no séc. XIX. Vinte e cinco séculos de elaborações do conceito de continuidade foram necessários para atingir uma definição de continuidade aritmética, a reta real, aceita pela comunidade científica.

Além de Dedekind, Cantor, Weierstrass, outros matemáticos investiram esforços para elaborar uma definição aritmética para os números reais que incluísse a continuidade. Bolzano havia feito uma tentativa no desenvolvimento de uma teoria para os números reais, usando limites de seqüências de números racionais, mas não foi reconhecida nem publicada, segundo Boyer (1993), até 1962.

Dedekind (1963), conforme prefácio de *Essays on the theory of numbers* diz que sentia necessidade de uma definição de continuidade numérica, porque ao lecionar esse assunto sempre tinha que recorrer à geometria. Não que esse recurso didaticamente não fosse bom, salienta, ao contrário. O problema era a insatisfação do ponto de vista formal, científico.

Foi então que ao comparar o conjunto dos números racionais com a reta, modelo ideal da continuidade, Dedekind criou o conceito de corte e, por meio deste, definiu o número racional e o número irracional na unidade de um sistema, um conjunto contínuo pela sua equivalência com a reta, formado não por pontos, mas por números. Depois da construção da continuidade aritmética, a reta real, a geometria seria negada, considerando o pensamento dialético. E assim, Dedekind poderia lecionar com a coerência formal do campo numérico, o cálculo diferencial.

A elaboração de Dedekind inicia-se pela comparação das qualidades da reta com as do conjunto dos números racionais: cada número corresponde um comprimento, cuja unidade de comprimento corresponde ao número um. Todos os outros comprimentos são comensuráveis com a unidade estabelecida.

Em seguida, lembra da existência de comprimentos incomensuráveis com certa unidade. Esse fato já era conhecido desde a antiguidade grega, em que o comprimento da diagonal do quadrado era incomensurável com seu lado. Resulta então que existem pontos na reta que não há correspondência com números racionais.

Paralelamente, a questão principal era: o que consiste a continuidade? Para Dedekind, a continuidade da reta é a capacidade que ela tem de poder ser dividida em duas classes, a dos pontos à esquerda e a dos pontos à direita, e que existe um único ponto que satisfaz essa condição. Esta não é uma demonstração, é um princípio que julgou ser evidente.

Como ficaria esse princípio no conjunto dos números racionais? Usando esse princípio, qualquer separação no conjunto dos números racionais em duas classes, A_1 e A_2, significa que todo racional a_1 em A_1 é menor que todo a_2 em A_2; para abreviar, chamou essa propriedade de corte e representou como (A_1,A_2) (DEDEKIND, 1963). Observa-se aqui a importância da ordenação no conjunto dos racionais, pois sem ela esse corte não seria possível.

No caso dos racionais, todo número racional produz um corte, mas há muitos cortes que não são produzidos por números racionais. Isso significa a incompletude do conjunto dos números racionais.

Exemplifiquemos um corte no conjunto dos números racionais: $A_1=\{q\in Q|q^3\leq 2\}$ e $A_2=\{p\in Q|p^3>2\}$ apresentado na pesquisa de Dias (2002). Todos os elementos de A_1 são menores que todos os elementos de A_2 e todos os elementos de A_2 são maiores que os de A_1. Todos os racionais pertencem a união desses dois conjuntos, ou seja, não há nenhum racional que ficou fora desses conjuntos. Então (A_1,A_2) é um corte em Q. A questão é: qual o número que define esse corte? Ele não é racional, é o irracional $\sqrt[3]{2}$. Dessa forma, $\sqrt[3]{2}=(A_1,A_2)$ define o corte e é definido por ele.

O texto de Dedekind (1963) segue com as demonstrações de que com essa definição de número real forma-se um conjunto bem ordenado, que satisfaz as propriedades operatórias e as infinitesimais.

Assim foi que Dedekind construiu a equivalência entre o conjunto dos pontos da reta e o conjunto dos números reais, resultando para esse último a apropriação da continuidade da reta.

A ligação da construção de Dedekind acima com o exemplo das funções quadráticas, propostas anteriormente, é a própria existência das coordenadas de qualquer ponto, ou seja, não existe nenhum ponto que não se associe a um par de números.

Os estudantes podem considerar *óbvio* e ainda justificarem que estão *vendo* pelo gráfico. É justamente esse o lócus na constituição das imagens conceituais que diferenciam a continuidade formada por meio do pensamento empírico da formada pelo pensamento teórico.

A crítica apresentada não foi explicitamente contemplada na produção escrita, mas somente verbalizada que, na dinâmica com os alunos, seria desenvolvido o problema dos ‘buracos’ na reta racional.

A proposta inicia com uma intenção a nosso ver de mostrar no gráfico os pontos de coordenadas naturais, inteiras e racionais que podem chegar a níveis bem complexos dependendo da mediação. Tomando o domínio e o contradomínio da função dada $f(x)= x^2+x-2$ como o conjunto dos números naturais, a função não está definida para o zero. A condução da proposta se torna ainda mais interessante com o domínio racional. Primeiro se a função está definida para todo número racional e, depois, se existiria alguma coordenada que não estivesse na relação $f:Q \rightarrow Q$.

Um encaminhamento considerando a interdependência dos campos algébrico, ligado à função; geométrico, às propriedades da reta; e aritmético, ao campo real, possibilitaria articular o desenvolvimento do conceito de continuidade nesse sistema de relações e, com isso, criaria também as possibilidades do desenvolvimento teórico do pensamento e a apropriação da significação da continuidade.

5ª situação-problema

O grupo iniciou a exposição da primeira elaboração dizendo que, ao propor a situação para seus alunos, o objetivo era diagnosticar o que eles lembravam sobre a classificação dos números em conjuntos.

Para isso, realizaria algumas situações-problema com os alunos e exemplifica que poderiam ser as apresentadas pelos outros grupos do curso. Com os números de tais situações, os estudantes iriam preenchendo uma tabela, associando ao conjunto a que pertencem.

A metodologia foi descrita como:

> Metodologia: propor situações-problema envolvendo operações para que os alunos discutam, reflitam, questionem, analisem seus resultados, construindo desta forma o conhecimento dos números reais. O professor sempre mediando, organizando e fazendo intervenções para que haja avanços do processo ensino/aprendizagem.

Na seqüência há uma exemplificação do que consiste a forma de abordar operações para posterior classificação dos números.

> Ex. 1) Adicionar frações por equivalência.
> 1/3+2/6=2/3; 1/4+1/8=3/8
> 2) De quantas maneiras diferentes posso me vestir, se tenho 3 blusas e 4 calças?
> 3) Elaborar junto com os alunos um mini-mercado utilizando sucatas (embalagens) de produtos; separá-los por áreas (limpeza, alimentação, etc.). Todos os alunos fazem compras (clientes, caixa, atendentes e outras funções).
> A partir dessas 3 situações, assinale os conjuntos numéricos em que os números utilizados estão inseridos:

situação	N	Z	Q	I	R
1			X		X
2	X	X	X		X
3			X		X

Após a apresentação houve o comentário: "gostei do quadro por que o aluno vai colocar o mesmo número em vários lugares [...]", outro complementa que poderia questionar por que isso ocorre. E continua: "a sugestão a essa atividade é pedir aos alunos que escrevam outras representações do mesmo número". A situação foi caracterizada como uma proposta de síntese da classificação numérica em conjuntos. Embora o grupo não tenha se proposto a desenvolver propriamente situações para o preenchimento do quadro, pois o próprio quadro era a situação-problema desenvolvida pelo grupo, notou-se a coluna vazia referente aos irracionais. Na reformulação o grupo buscou abordar também os irracionais.

O grupo, na segunda elaboração, detalha um pouco como pensou sobre a análise sugerida para o aluno em relação ao quadro: "O aluno, ao analisar a tabela, deverá observar as diferenças entre os conjuntos numéricos: a função dos números racionais e a dos números irracionais e que juntos formam o conjunto dos números reais".

O que é possível concluir pelo quadro, em relação aos reais, é que qualquer que seja a situação, sempre se vai assinalar na coluna dos reais, pois o grupo não intenta trabalhar com os números imaginários.

O grupo sugere uma análise de números irracionais que contemple:

> [que] São os argumentos pela contradição dos números que são racionais que permitem supor que são irracionais.
> Características dos números Irracionais:
> Idéia da infinitude (não periódico), [que] não é possível estabelecer seu sucessor [e que] não é possível colocá-los na categoria dos comensuráveis.

Completa assim com algumas sugestões de problemas para construção e compreensão dos números irracionais: "Qual é o sucessor de $\sqrt{3}$? E de $\sqrt{5}$?" Esse tipo de questão também poderia ser feito com alguns números nos outros campos numéricos, a fim de encaminhar uma generalização. A elaboração dessa questão também foi um indício de que o conceito de sucessor deve ser rediscutido em outros campos numéricos. Além disso, evidencia um movimento da significação que esse conceito vai se tornando para os sujeitos, ampliando seu sistema de relações.

Outra sugestão dada foi: “Na divisão de 13:7, qual é o resultado? Há repetição de algarismos após a vírgula? É possível definir alguma regularidade na seqüência desses algarismos? Você define esse número como sendo um numero racional ou irracional?” Com essa questão, pode-se discutir com os estudantes as possibilidades de resto e por que o número não pode resultar em um irracional, como foi visto no curso.

Definir o número real pela possibilidade de representar na forma decimal foi aceito até meados do séc. XIX. J. Wallis (1616-1703) em 1696 havia identificado números racionais com números decimais periódicos, mas foi O. Stolz que “mostrou que cada número irracional poderia ser representado como um decimal não periódico e isso poderia ser usado como propriedade definitória”. (KLINE, 1992, p. 1302, tradução nossa)[52].

Além disso, poderia ser abordada a generalidade de que todo número real tem uma representação decimal infinita. No ensino atual, são exploradas as dízimas periódicas e nas não periódicas têm-se os irracionais. A questão seria em torno da representação dos inteiros e dos decimais exatos que os alunos poderiam criar.

Representações como 2,0000... e 0,250000... poderiam facilmente ocorrer. As formas 1,99999... e 0,2499999... para os números acima exemplificados poderiam ser demonstradas do mesmo jeito que se faz para transformar uma dízima periódica em razão de inteiros.

A compreensão dessa forma de representação também compõe, na relação forma e conteúdo do conceito, nexos capazes de discernir que o número 1,9999... é exatamente 2 e não uma aproximação, como algumas concepções encontradas em Dias (2002) e em pesquisas que usou como referência.

As questões acima que buscam diferenciar qualidades de conjuntos, como àqueles que possuem sucessor, representação como fração de inteiros, são comensuráveis etc. e poderiam compor um quadro, por exemplo, como o que segue.

ORDEM	SUCESSOR	DENSIDADE	CONTINUIDADE	INFINITO POTENCIAL	INFINITO REAL

---

[52] [...] mostró que cada número irracional puede representarse como um decimal no periódico, y esto puede utilizarse como propriedad definitoria (KLINE, 1992, p. 1302).

Em Caraça (1989), encontramos um quadro com o cabeçalho “ordenado, infinito, denso, tipo do numerável, tipo do contínuo” e nas linhas, os conjuntos dos naturais, dos racionais, dos reais e dos pontos, já que os negativos são abordados posteriormente. A sugestão do quadro síntese também pode ser feita para as propriedades operatórias, como também para fenômenos.

Além disso, a mediação do professor poderia organizar questões que possibilitassem o movimento do pensamento numérico no sentido do por que um número ou é racional ou é irracional, o que também poderia ser percebido pelos estudantes ao analisarem o quadro preenchido com uma certa variedade.

O quadro síntese teve como objetivo a classificação dos números e não o surgimento de determinados tipos de números. A abordagem propicia uma síntese de como os conjuntos se relacionam uns com os outros, não só pelo tipo de número que contém, mas como esse número se diferencia em suas qualidades conjuntivas quando está em um ou outro conjunto.

Embora a proposta apresente como possibilidade o desenvolvimento do pensamento teórico das qualidades conjuntivas e do movimento da representação, na relação forma e conteúdo, o que foi explicitado transita entre o lógico-formal com algumas questões diferenciadas. Interpretamos a primeira proposta como a que promove o desenvolvimento do pensamento empírico no sentido lógico-formal de classificação dos números. A reformulação indicou um direcionamento para explorar algumas relações entre racionais e irracionais, devido à busca do objetivo de analisar que todos os números apresentados são reais.

Observa-se que a primeira situação abordava problemas da *práxis* cotidiana, nas operações com números, no movimento do pensamento empírico. Na situação reformulada, o tipo de questão foi alterado ao pensar em sucessor e nas diferenças de representações dos números racionais e irracionais. Houve, a nosso ver, um reflexo das discussões ocorridas do curso que se revelaram como em processo de apropriação. A organização da situação-problema que busca discutir essas questões evidencia a mobilização de imagens conceituais dos números racionais e irracionais e que essas se encontram em transformação, comparando com a primeira proposta. Conforme analisado na primeira unidade didática, dificilmente o professor leva para sala de aula algo em que se sinta inseguro de trabalhar com os alunos.

Embora nossa pretensão seja buscar o pensamento teórico não abolimos o pensamento empírico. A insistência em analisar as possibilidades no pensamento teórico é devido, como já abordado em outras partes deste texto, à necessidade no sistema escolar de propiciar a apropriação dos conhecimentos historicamente produzidos.

Outras situações-problema

As cinco situações anteriores foram desenvolvidas e discutidas no curso, nessa seção indicamos algumas propostas diferentes da turma de professores que as desenvolveram de maneira independente dos encontros.

Houve propostas semelhantes a alguma parte das apresentadas anteriormente, contudo é relevante mencionar que apresentavam questões abertas para discussão no sentido do pensamento teórico, como, por exemplo, "é possível determinar o sucessor de qualquer número racional?", "no conjunto dos números naturais, podemos determinar o sucessor e o antecessor de qualquer número?" e outras que buscavam orientar a organização do pensamento do estudante no sentido de generalizar e sintetizar como: "O que você entendeu sobre quantidades discretas?" "E por quantidades contínuas".

Essas duas últimas questões provêm de um tipo de proposta desenvolvido por mais de um grupo, considerando o terceiro ciclo do Ensino Fundamental.

Uma delas inicia solicitando a classificação entre grandezas discretas e contínuas representadas por meio de fotografias, entre elas, livros em uma estante, parte de uma rocha, amontoado de canetas, fio condutor de eletricidade passando pelo poste, relógio pendurado na parede, balança com um saco de açúcar sobre ela, chafariz. Essa situação-problema foi realizada com os estudantes e o professor, na sua conclusão, apontou as dificuldades deles em relação à grandeza e sua forma de uso, como tempo e os números no relógio, igualmente ocorrendo com os números digitais na balança em relação à medição da massa.

Discutir com os estudantes a relação entre grandeza e instrumentos de medida permite constituir um processo de apropriação da prática humana na apreensão das grandezas. Isso significa discutir a própria grandeza. O tempo, por exemplo, flui de modo contínuo ou por instantes? E a relação com o desenvolvimento da matemática?

> [...] enquanto os cientistas continuam a perguntar se o tempo é contínuo ou não, os seus colegas matemáticos mudaram a definição prática de continuidade, de uma que era cientificamente sensível para outra que é, na aparência, cientificamente imponderável. (GUILLEN, 1987, p. 41)

Ainda sobre grandezas contínuas, outra proposta consistiu na construção de uma tabela em que os estudantes relacionaram sua idade com a respectiva altura (consultando a carteira médica como fonte). A partir da tabela a professora fez algumas perguntas.

Captar um processo contínuo do crescimento das crianças pela medição pode compor uma proposta para discutir a continuidade. Uma tabela correspondia à idade de 6 anos com 110cm de altura e 7 anos com 118cm. Poderia ser questionado se ela em algum momento, teve a altura 112cm, 111,111cm, 115,1234567...cm, $110\sqrt{1{,}1}$ cm.

Outra proposta aponta a discussão sobre processos infinitos. Inicia com o desenho de um quadrado e divide-o em quadro partes iguais, como mostra a figura 2a. Em seguida, o processo consiste em fazer o mesmo com o quadrado superior esquerdo resultante dessa divisão, como mostra a figura 2b. E assim sucessivamente.

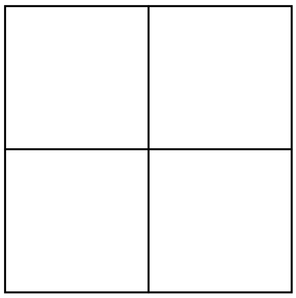


Figura 2a

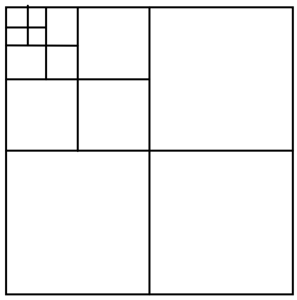


Figura 2b

Discutir processos infinitos como esse permite ao estudante perceber a diferença entre poder desenhar e poder pensar no processo e que a infinidade só existe no pensamento.

Santos (1995) sugeriu abordar situações como essas para o desenvolvimento da noção de infinito matemático com estudantes do terceiro ciclo para se discutir

> - O procedimento adotado na subdivisão da figura;
> - a representação de cada parte através de um número na forma fracionária ou decimal;
> - a relação entre partes dessas figuras;
> - analisar a idéia de que a figura inicial representa o limite da soma das partes" . (p. 162)

Outra questão sugerida em um dos planos foi: "o movimento é sempre contínuo?" Esse juízo interrogativo sugere um pensar mais livre, filosófico, não somente vinculado à matemática. Significa pensar no que seja movimento como também contínuo.

Se o movimento for pensado nas suas ligações com a Mecânica e a busca do ser humano em se apropriar dessa classe de fenômenos, para compreendê-lo, prevê-lo, controlá-lo e criá-lo, um encaminhamento para o ensino da matemática pode ser justamente pensar nas suas características essenciais e como matematizá-lo. Ou seja, propor aos estudantes a elaboração de um modelo matemático que capte o movimento contínuo da mecânica, em vez de fornecer a reta. A outra parte da questão formulada nessa produção buscou pensar o que é o contínuo.

Com isso, pudemos perceber pelas objetivações nas produções o movimento de apropriações de conceitos e da metodologia abordados no curso. Nessa síntese, observamos o movimento das imagens conceituais de discreto, contínuo, processos infinitos, sucessor que possibilitam o desenvolvimento do pensamento teórico.

Referente à metodologia, observou-se a abordagem de situações-problema e dos tipos de questões que possibilitam organizar e desenvolver o pensamento além da *práxis* cotidiana, na qual as situações-problema em sua maioria se situaram, para um movimento conceitual. Esse processo situa o movimento lógico-histórico do professor que se assegura na organização de situações-problema que motivam os alunos para poder introduzir questões e encaminhamentos que suscitem discussões no movimento do pensamento teórico.

Terceiro movimento: uma síntese

Nesse tópico analisamos as sínteses realizadas pelos professores sobre o conjunto dos números reais e posteriormente *uma síntese reflexiva do movimento do pensamento numérico do curso* como uma leitura do movimento do curso..

A turma de professores, que não desenvolveu as situações-problema nos encontros, realizou uma síntese do que poderia ser contemplado da reta real no sistema de ensino. Os mapas conceituais representantes das sínteses dos pequenos grupos apresentaram relações conceituais para o ensino dos números reais que articularam o lógico-formal com formas flexíveis do pensamento. Diagrama de Venn (d), a relação “R=QUI” (I conjunto dos números irracionais), a reta numerada, expressões verbais como “junção de conjuntos”, “dízimas periódicas e não periódicas” compuseram as formas mais conhecidas de expressão do pensamento lógico-formal no sistema de ensino. “Movimento quantitativo discreto e contínuo”, “divisão infinita”, “fluência dos contrários”, “relações entre grandezas”, “maior elemento do universo”, “escola pitagórica”, “mônadas” formaram um conjunto de idéias representativas de um outro modo de pensar o ensino dos reais, que normalmente não aparece nos livros didáticos mais atuais. Nem são expressões de concepção de professores, conforme análise de produção científica – realizada no segundo movimento – e por esses motivos indicam formas flexíveis do pensamento.

Os juízos como "o que os inteiros/racionais são insuficientes" indicam reflexos metodológicos do curso de pensar o lógico-histórico de um conceito nas suas limitações e superações. Palavras-termo representativas de conceitos – incomensurável, continuidade, infinito, contagem – também foram mencionadas. As manifestações analisadas nas unidades didáticas indicaram que as palavras-termo como também expressões lógico-formais podem estar se transformando no pensamento. Esse é o próprio movimento dialético entre conteúdo e forma no pensamento. Nesse momento, a forma permanece, mas o conteúdo pode estar fluindo.

Embora tenhamos discutido somente algumas expressões, o coletivo revelou indícios de pensamento flexível, no movimento conceitual de apropriação e objetivação da reta real, ao combinar o conhecimento relacionado às experiências vividas no curso, nas salas de aula com a ligação da forma mais elaborada do conceito, na perspectiva didática desenvolvida. A expressão "a contagem do todo, suas partes e a relação que leva a divisões e subdivisões comuns dentro do seu próprio espaço [...]" parece também articular um modo mais livre de pensar matemática.

Pensar a realidade no sentido da totalidade permitiu desenvolver aptidões que vão além do imediato. Com a sugestão apresentada na síntese dos professores, sobre o 'maior elemento do universo', é provável que tal discussão gere também o seu contrário 'menor elemento do universo'. Salientamos uma vez mais que a mediação do professor é fundamental para que questões como essas não se dispersem em divagações, mas oriente a um pensar científico, como concebemos a função do ensino escolar.

As condições objetivas da educação escolar podem não proporcionar, nesse momento histórico, uma discussão sobre os números algébricos e transcendentes, como uma outra união que resulta no conjunto dos números reais, mas talvez haja momentos propícios para abordar a cardinalidade.

Existe um movimento de permanência no pensamento do número real na educação escolar, como pudemos analisar nos livros didáticos e nas concepções de professores, que se configurou na máxima R=QUI, ou uma variação como expressa pelos professores "junção de todos os conjuntos", "todos os campos numéricos revisados" e a representação de qualquer número real na reta numérica. Essa permanência por um lado parece o reflexo de uma parte da história do próprio conceito. Antes da continuidade aritmética, os matemáticos já se utilizavam dos números reais como a união acima citada. No entanto, a história desse conceito fluiu, alcançando outros níveis de conhecimento. Uma análise nos diferentes níveis de ensino evidenciou que o mesmo não ocorreu na educação escolar, ao contrário, com o passar dos anos as extensões desse conhecimento tem se revelado cada vez mais raro.

No último encontro, uma síntese em relação ao ensino e a aprendizagem da reta real foi elaborada e apresentada pela organizadora-pesquisadora às duas turmas que estavam, como no primeiro encontro, reunidas na sala.

Inicialmente foi exposta a importância de procedimentos didáticos como mediação para apropriação do conhecimento pelo estudante. Este foi realizado por meio de exemplos fundamentados em pesquisas científicas, livros didáticos e no próprio curso. Ao expor cada item: medição com barbante de objetos redondos para determinação do pi, utilização de calculadora para cálculo de raízes, utilização sistemática de aproximações, consideração sistemática do conjunto dos números reais como domínio de todas as funções, pudemos discutir que não é a abordagem em si que causa aprendizagens incoerentes com o desenvolvimento histórico de determinado conceito e sim a mediação didática.

As concepções de que um irracional pode ser gerado pela divisão de racionais, o resultado mostrado pela calculadora sempre é o resultado do cálculo, tudo e comensurável, a reta é uma sucessão de decimais ou de pontos e uma reta racional foram resultados apresentados na pesquisa de Dias (2002) e que permearam também nos encontros do curso. Pudemos exemplificar com os professores os momentos em que eles apareceram e como se possibilitou a superação.

Referente às propostas didáticas para a apropriação da irracionalidade do número pi como também do número $\sqrt{2}$, pudemos superar o conhecimento empírico baseado na comensurabilidade e no número racional do experimento para abordar a incomensurabilidade e a irracionalidade. A análise dos livros didáticos realizada revela que, no percurso das publicações, a ligação entre a incomensurabilidade e a irracionalidade não são evidenciadas, ficando a cargo do professor.

A abordagem do teorema de Pitágoras e do número pi, nos livros didáticos atuais analisados, aparece como exemplos para introdução de número irracional e o *como* eles são obtidos. O teorema de Pitágoras é demonstrado por meio dos recursos geométricos de cálculo de área e o pi, como razão de medidas.

O lógico-histórico do número pi e do teorema de Pitágoras revela o *porquê* do desenvolvimento desses conceitos e suas conseqüências. Distanciado desse percurso, esses e outros conhecimentos têm se constituído em procedimentos descontextualizados que acarretam na fragmentação no ensino, assumindo por vezes caráter informativo e mecanizado.

As definições dos números racionais e irracionais pela sua forma, ou seja, baseadas no quociente de inteiros e representações decimais, constituem uma síntese de um processo de desenvolvimento. Quando no ensino o desenvolvimento do conteúdo se realiza a partir dessas sínteses, observou-se por meio das concepções apontadas no segundo movimento e, também durante o curso, suas limitações. Em virtude de resolverem um certo conjunto de situações, principalmente as que possuem uma relação mais direta com o pensamento empírico. Com isso, a apropriação das aptidões essencialmente humanas, acumuladas no desenvolvimento desses conceitos, como as relações com a própria incomensurabilidade, não são desenvolvidas pelos estudantes e, por vezes, nem pelos professores.

Nesse sentido o desenvolvimento do conceito de medição no curso foi fundamental, pois permitiu expor suas relações com o desenvolvimento histórico desse conceito como também com a apropriação dos professores. Como a abordagem de grandezas discretas e contínuas que apareceram nas propostas didáticas dos professores. As situações-problema vivenciadas no curso geraram formas de pensar a medição, a criação da unidade, a limitação dos instrumentos em processos empíricos e também processos teóricos na comensurabilidade e sua negação, a incomensurabilidade.

O número irracional foi abordado na terceira proposta no âmbito geral: qualquer número irracional tem seu ponto correspondente na reta. A equivalência entre número real e pontos na reta tem seu percurso nos livros didáticos, nos quais aparecem explicações sobre bijeção que, posteriormente, vão sendo suprimidas, restando a representação. Esse percurso, a nosso ver, reflete-se no conhecimento de reta no sistema de ensino, como pudemos observar nas análises de concepções e no curso, o seu caráter atomístico. Embora esse pensamento reflita um período histórico, da escola pitagórica e das mônadas, o sistema de ensino parece não superar esse conhecimento.

Essa proposta, ao propor encontrar o ponto na reta numérica correspondente a um irracional, encaminha um processo de intervalos como elaborado por Weierstrass. Os livros didáticos encaminham também processos infinitos com o chamado *aproximações sucessivas*. O problema se constitui na falta de discussão do conceito de infinito, principalmente nesse caso os processos infinitos. A conseqüência dessa ausência se relaciona também com a apropriação da continuidade da reta real. Nos alerta Dantzig (1970): "Expulse-se o processo infinito e a Matemática pura e aplicada será reduzida ao estado em que era conhecida dos pré-pitagóricos" (p. 126). O sistema de ensino básico estaria nos formando no conhecimento dos pré-pitagóricos? O salto qualitativo entre a densidade do conjunto dos números racionais e a continuidade significa a introdução de um *bom reagente* (como diria Caraça, 1989) do infinito.

Os processos infinitos também foram abordados no primeiro movimento desta unidade, na proposta do argumento de Zenão, por meio do qual pudemos analisar tais processos com a idéia de movimento. A dificuldade de apreensão do movimento pelo campo numérico representado pelas mônadas no seu desenvolvimento lógico-histórico foi definido por Caraça (1989) como

> [...] o *movimento* não pode ser compreendido como uma sucessão de estados particulares; considerá-lo assim, equivale a abordar o seu estudo por um *método estático* que traz consigo o gérmen da infecundidade e da incompreensão [...] (p. 215)

A apropriação do contínuo aritmético requer um pensamento teórico que incorpora as sensações e generalizações do fenômeno contínuo do movimento em um sistema de conceitos teóricos da matemática.

No último encontro foi apresentada a seguinte relação da definição de número real com o conceito de eternidade sugerida por Dantzig (1970):

> Nossa intuição nos permite por um ato mental, dividir *todo o tempo* em duas classes, o *passado* e o *futuro*, que são mutuamente exclusivas e que juntas compreendem todo o tempo, a *eternidade.* O *presente* é a partição que separa todo o passado de todo o futuro; qualquer instante do passado foi outrora o *presente*, qualquer instante do futuro será *presente*, e assim qualquer instante pode agir como tal partição [...] por mais paradoxal que possa parecer, o *presente é verdadeiramente irracional*, usando-se a palavra no sentido de Dedekind. Pois, apesar de agir como partição, não é nem parte do passado, nem do futuro (p. 156).

Por essa forma de flexionar o pensamento entre a eternidade e a reta real, pudemos discutir posteriormente a definição de corte de Dedekind.

Concordamos com Dantzig (1970) que, na teoria de Cantor há na fundamentação o aspecto aparentemente mais dinâmico do que na de Dedekind, pois "o valor limite é gerado numa maneira que pareceu fortemente com o movimento de um ponto atraído para o centro" (p. 155). Na teoria de Dedekind, o aspecto estático é aparente, pois a determinação de qualquer irracional pelo corte envolve processo infinitesimal, como exemplificado na quarta situação dessa unidade. A síntese desses pensamentos resultou no chamado axioma de Dedekind-Cantor: a bijeção ou equivalência entre os números reais e os pontos da reta.

Já salientamos em outro momento que a aprendizagem por meio somente da síntese teórica, como uma definição, não permite a apropriação do seu desenvolvimento. Conhecer a síntese e aplicá-la em exercícios tem constituído metodologias que impedem o desenvolvimento dos estudantes, dos conceitos para si.

A quarta situação-problema proposta também constituiu, a nosso ver, uma possibilidade para abordar a continuidade. Geralmente se abordam funções contínuas não para estudar os conjuntos numéricos dos domínios e imagens, pois estes são justamente as bases para a definição de uma função. Encontramos em livro didático português[53] a abordagem de funções contínuas no ensino básico, mas pelo que conhecemos não é uma prática no ensino público brasileiro nesse mesmo nível.

Essa proposta, ao pensar na função contínua para analisar os campos numéricos, pereceu-nos se aproximar do problema histórico da continuidade do conjunto dos números reais. Como foi relatado nessa parte do texto, o desenvolvimento da mecânica havia impulsionado o da matemática que necessitava de bases sólidas para se fundamentar.

O gráfico proposto e as questões indicaram a busca da relação do campo numérico com a reta ou a curva da função, que parece colocar mais evidente a existência da correspondência ponto e número pela lei da função. Conforme apresenta a intenção do grupo, o domínio dos naturais, inteiros e racionais não constrói a parábola, é necessário um campo numérico contínuo que consiga traduzir a curva geométrica em números. Esse pensamento indica o quanto a continuidade está diretamente ligada à variável, como pudemos analisar pelo seu movimento histórico: "a própria função pode, em última análise, ser reduzida ao Número" (DANTZIG, 1970, p. 61).

No momento em que o livro aborda o número real, pela adição dos irracionais aos racionais, a reta se chamará reta real, porque todo número real tem representação na reta. Nessa etapa da educação escolar, representar números na reta já é um processo comum, pois

---

[53] NEVES, M. A. F.; VIEIRA, M. T. C.; ALVES, A. G. (1986).

desde a abordagem dos naturais aparece a representação na reta. A ligação essencial da reta com os números reais, a continuidade, não aparece nos livros.

A quinta situação-problema mostrou-se próspera para sintetizar pensamentos, conceitos, juízos, enfim impôs essa necessidade na educação escolar. Embora a intenção inicial fosse classificar os números nos conjuntos para a generalização de que os números reais compreendem os números racionais e irracionais, a reformulação forneceu indícios de análise de certas qualidades dos números nas suas relações conjuntivas. Pudemos discorrer algumas possibilidades como conjuntos densos, discretos, contínuos.

O processo de análise e síntese é essencial na atividade orientadora de ensino, como pudemos abordar no capítulo três. A síntese para o educador, que interagiu no processo de análise com os estudantes, compreende uma avaliação formativa, ou seja, representa um nível de compreensão do objeto estudado, do movimento de apropriação dos estudantes e também orienta a organização do ensino, a atividade do professor nas novas abordagens.

A atividade orientadora de ensino da reta real, como proposta desta unidade didática, buscou expressar a dualidade entre a realidade e a possibilidade. Nela, não interagiram todos, alguns faltaram aos encontros e não buscaram se integrar no movimento; outros, embora presentes, aparentemente não se envolveram.

Por outro lado, pudemos observar, pelas ações e pelos produtos, a atividade de outros que buscaram organizar o ensino. As discussões em torno das propostas puderam revelar algumas transformações na busca do desenvolvimento conceitual e da própria forma didática.

Dois relatos significativos ilustram possibilidades de que, ao interagirem com os alunos, novos encaminhamentos vão sendo construídos. Um deles foi a criação de uma peça teatral envolvendo o conceito de tempo, que se mostrou próspera para abordar a continuidade, conforme relato da professora.

Outro foi a introdução de questões mais abertas para que os alunos discutissem. Segundo relato do professor, os estudantes se expressavam conjuntamente, elevando o nível de ruído da sala. Depois de alguns instantes, a aula foi interrompida por uma autoridade escolar, mesmo antes de o professor conversar com os estudantes. Quando o professor respondeu que estava experimentando uma metodologia que estava aprendendo no curso, a repreensão foi amenizada.

Nosso objetivo neste trabalho não foi investigar o movimento dos sentidos pessoais que as significações do conceito matemático vão se configurando na vida do professor. Embora os exemplos acima citados formem indícios dessa possibilidade.

A síntese das imagens conceituais analisadas nesta unidade didática está presente na composição do capítulo *formação da imagem conceitual*. Na seqüência, apresentamos uma síntese reflexiva do movimento do pensamento numérico no curso.

Uma síntese reflexiva do movimento do pensamento numérico do curso

Encaminha-se em seguida uma leitura reflexiva da pesquisadora e organizadora, em sua atividade orientadora de ensino, quanto ao desenvolvimento do pensamento numérico realizado no módulo de números. Objetivos, interações e sínteses dialogam as experiências vivenciadas com as possibilidades do desenvolvimento do pensamento.

Pensar em número real envolve pensar nos nexos conceituais ligados na sua formação lógico-histórica. Significa compreender os contrários discreto-contínuo, comensurável-incomensurável, finito-infinito, cardinalidade-ordenação.

Iniciando uma reflexão pela comensurabilidade cuja base é a medida, a captação da grandeza contínua, pode-se buscar a relação na necessidade humana da medição. Esta parece estar relacionada à distribuição de porções de terra entre os egípcios para cobrança de tributos pelo rei. O problema da cheia do rio Nilo causava variação na porção de terra destinada a cada família, com isso, como cobrar o imposto se o tamanho da porção havia variado? O problema teórico emergente foi o controle da variação quantitativa de grandeza contínua.

A variação quantitativa já estava resolvida para objetos organizados em unidades naturais, um conhecimento estável na época. O novo problema se estabeleceu justamente por que a terra não é organizada em unidades discretas e, então, como contar o contínuo?

A necessidade social estava evidenciada e o problema precisava ser solucionado. A lógica do pensamento foi mobilizada em direção à criação de uma unidade para contagem da terra. O processo de elaboração da contagem teve que ser revisado, mobilizado no pensamento.

Se não era possível contar terra com pedras, existiria na própria natureza algo que poderia ser o numeral objeto do contínuo? Ou deveria se discretizar a terra? A resposta surgiu de uma combinação dessas duas idéias-hipóteses: a captação de grandezas contínuas discretamente, contar o contínuo por método discreto da mesma forma que se percorre um caminho vencendo-o passo a passo.

A partir daí, outras questões substanciais em relação a esse processo são conseqüentes: Um passo teria o mesmo tamanho do seguinte? Seria preciso isso acontecer?

Então, para medir, é necessário que tanto o objeto a ser medido, quanto aquele que mede (numeral objeto) tenham a mesma grandeza, e é essa grandeza que é associada, comparada, relacionada, de certa forma, para estabelecer uma correspondência.

A grandeza do numeral objeto comparada com a grandeza que se deseja quantificar tem como resposta um número. O número de vezes que a quantidade da grandeza, que o numeral objeto possui, cabe na quantidade da grandeza do objeto que se quer medir. Por isso, o numeral objeto, instrumento de medida, precisa ser manipulável e ele determina a unidade. Se houvesse 'várias unidades', não teríamos uma economia de memória e provavelmente muitos problemas de comunicação.

Nesse processo, um outro problema aparece: como medir a sobra? Ou seja, pode ocorrer que uma parte da grandeza do objeto que está sendo medido seja menor que a unidade criada.

Esse foi o outro movimento do pensamento numérico que identificamos como um salto qualitativo: a criação da fração, dois movimentos quantitativos representados de uma só vez. Pensamento que transformou tempos depois o conceito de número. Esse número constituiu o fundamento do número racional.

Embora no curso não tivesse sido abordado diretamente a divisão de terras – somente o foi em uma síntese –, os nexos conceituais puderam ser pensados a partir da situação-problema *laboratório de medidas*.

Um outro movimento da prática humana, menos diretamente relacionada com problemas empíricos, começou a se desenvolver. O pensamento teórico avançou e somente nele poderia ser pensado o incomensurável. O movimento abstrato volta ao concreto e observa o mundo. O mundo é comensurável e incomensurável. Outro pensamento numérico, outra representação, os irracionais.

Álgebra, geometria e número voltam a se unir após um período longo de recesso e nasce a geometria analítica. A geometria não precisaria mais de régua e compasso, apenas de número num certo movimento. O número alcança seu conteúdo na variação. A continuidade mais uma vez precisou ser captada, na sua variação, no seu menor movimento, na sua menor variação, os infinitesimais.

Do infinito potencial ao infinito real, a matemática não sobreviveria mais sem esses conceitos. Por isso que o número real é um conceito, tem movimento próprio, continua no seu desenvolvimento base para os hiper-reais.

4.3.8 UNIDADE DIDÁTICA: NÚMERO COMPLEXO

A proposta desta unidade foi desenvolver uma reflexão inicial coletiva em relação à gênese do número complexo e à ordem numérica. Essa reflexão foi prevista para aproximadamente duas horas e foi organizada para o último dia do curso, antes da apresentação da síntese coletiva sobre a reta real. A intenção foi evidenciar a mudança de qualidade do número real como complexo.

Em outro momento do curso, os professores disseram que no conjunto dos números racionais não havia raízes quadradas de números negativos. No ensino, o número imaginário geralmente é introduzido por meio de equações quadráticas que não possuem solução real. Esse constituiu o ponto de partida para iniciar uma introdução sobre o assunto, não por meio de equação quadrática, como se supõe conhecido, mas buscando abordar o histórico do número imaginário.

Ao iniciarmos por meio da história, buscamos evidenciar ações de uma atividade orientadora de ensino que visa uma organização de ensino para a formação conceitual, o estudo da história do objeto.

O problema dos complexos foi enfrentado por Cardano e Bombelli. A história nos conta que Cardano em 1545

> [...] foi o primeiro que ousou fazer a notação do sem-significado através de um símbolo. Ao falar sobre a impossibilidade de dividir o número 10 em duas partes, cujo produto fosse 40, ele mostrou que a solução formal levaria às expressões impossíveis:
>
> $$5+\sqrt{-15} \text{ e } 5-\sqrt{-15}$$
>
> Mas, como aconteceu no caso dos números negativos, aqui também a simples escrita do impossível lhe deu uma existência simbólica. (DANTZIG, 1970, p. 161).

Embora esse tenha sido um início, foi a equação cúbica $x^3=15x+4$ que impulsionou o desenvolvimento desses novos números. Considerada histórica, essa equação foi abordada por Bombelli em sua Álgebra publicada em 1572 (DANTZIG, 1970, p. 162).

Por que essa equação impulsionaria o desenvolvimento dos complexos se ela tem três soluções reais, 4, $(-2+\sqrt{3})$ e $(-2-\sqrt{3})$? Aí é que há a interação com Cardano. Ele tinha desenvolvido uma fórmula para resolução desse tipo de equação, só que ela falhava quando as três raízes são reais, pois os radicais que entram na fórmula são negativos. Para essa equação, pelo método de Cardano, a resposta seria x=$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ + $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. O salto que parece ter desvendado esse problema foi quando Bombelli mostrou que os dois radicais cúbicos tinham a solução 2+$\sqrt{-1}$ e 2-$\sqrt{-1}$ cuja soma é 4. Ou seja, $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ = 2+$\sqrt{-1}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ =2-$\sqrt{-1}$ e portanto $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ +$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ =4.

Esses entes serviam às operações algébricas, "Bombelli, encorajado por seu sucesso, passou a desenvolver regras para operações com esses entes complexos". (DANTZIG, 1970, p. 162).

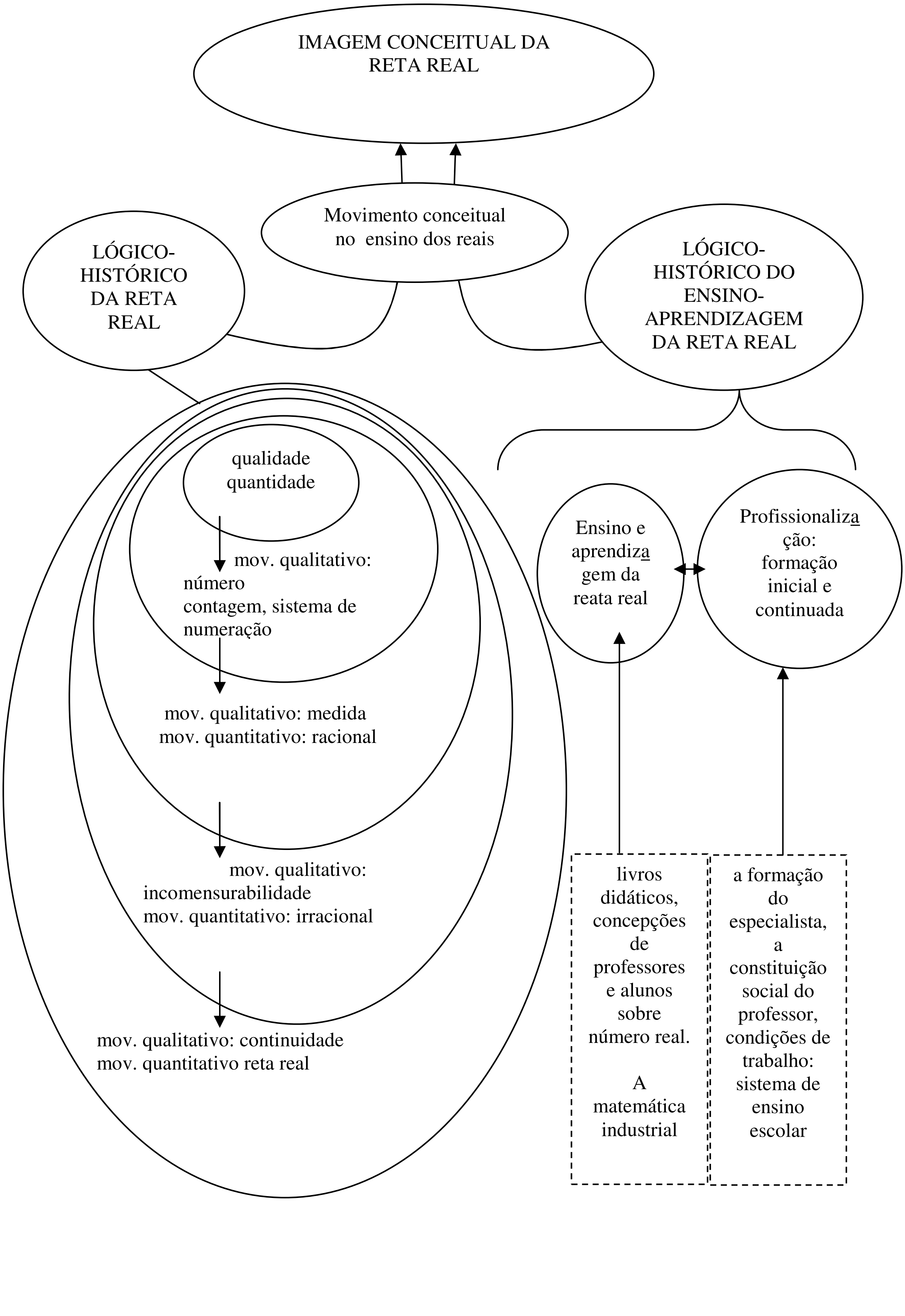
Seria esse novo ente matemático um número? Essa questão feita pelo próprio Bombelli a si mesmo, é possível ser feita também aos estudantes.

A partir desta, outras poderiam suscitar como: "Qual a qualidade desse novo número? Será que **C** é denso? Será que **C** é contínuo?" (o). Saberemos qual número é maior entre 1+i e 2-√2i? A essa última questão alguns professores lançaram sua intuição dizendo que era 1+i, resposta justificada pela soma. Pudemos brevemente discutir que o conjunto dos números complexos não é ordenado, como concebemos a ordem dos outros conjuntos abordados.

Muitos professores disseram que não "conseguem" chegar a ensinar números complexos, "não dá tempo". Houve também uma professora que pediu bibliografia por que gostaria de estudar mais sobre o assunto.

Após essa breve apresentação, foi comentado como realizamos pesquisas para introduzir um conceito com os alunos e que os professores poderiam prosseguir na elaboração de uma situação-problema para ensinar número complexo.

LÓGICO-HISTÓRICO DA RETA REAL E SEU ENSINO



5 FORMAÇÃO DA IMAGEM CONCEITUAL

Sabeis por que aconselhamos a escolha das sementes,
que deveis plantar na lavoura mental? (Miramez)

A imagem conceitual, como noção inicialmente desenvolvida por Tall e Vinner, teve como fundamento a análise de constituição do conceito matemático na estrutura cognitiva do indivíduo. Para inferir sobre os processos que o sistema cognitivo realiza, os autores analisaram respostas manifestadas por estudantes de questões formuladas pelos pesquisadores (TALL; VINNER, 1981; VINNER, 1983; VINNER, 1991). Com isso, os autores inferiram sobre os processos cognitivos que os estudantes podem realizar diante de uma tarefa cognitiva. A utilização da definição matemática para produzir uma resposta é o processo desejável pelos professores. A conclusão indicou que na maioria das vezes as definições dos conceitos matemáticos não são utilizadas, e que isso dificulta a apropriação desse conceito no nível formal.

Esta investigação direcionou-se para os aspectos da formação das imagens conceituais, seus elementos constitutivos. O pressuposto para compreender por que os estudantes utilizam certo procedimento para resolverem as propostas didáticas, e não outro, está ligado com a atividade de formação das respectivas imagens conceituais. Com isso, a investigação se orientou em captar o fenômeno em seu movimento. Para esse fim, a pesquisa-ação constituiu uma ferramenta metodológica que permitiu, por meio de objetivo prático e teórico, analisar o movimento das imagens conceituais na inter-relação indivíduo-coletividade, a fim de compreender a relação desse movimento com o desenvolvimento de um conceito matemático, a reta real, na perspectiva lógico-histórica desse conceito.

O contexto da análise do fenômeno também foi, como dos autores, o da educação matemática. Um curso sobre metodologia do ensino de matemática, a interação entre os educadores matemáticos – pesquisadora e professores do ensino público do Estado de São Paulo – permitiram o desenvolvimento das imagens conceituais na inter-relação indivíduo-coletividade.

A formação da imagem conceitual por meio do sistema de ensino é mediada pelas atividades que se realizam nesse contexto. Nesse sentido, os pressupostos teóricos da atividade, na perspectiva histórico-cultural, contribuíram para análise das atividades particulares da atividade humana que se desenvolveram no curso. Além disso, considerou-se o fundamento da própria teoria da atividade, o materialismo histórico e dialético, nas leis e categorias do movimento do pensamento, como recurso lógico para investigação científica, que permitiu a transição a um novo conhecimento.

A atividade orientadora de ensino possibilitou os recursos metodológicos, entendidos em forma e conteúdo de uma atividade humana particular, para organização do curso. Essa atividade, combinada com a de pesquisa, foi realizada pela pesquisadora neste trabalho. A interdependência dos seus objetivos culminou no movimento de apropriação e objetivação de conceitos matemáticos elaborado historicamente, com a formação das imagens conceituais. A atividade como mediadora entre o sujeito e o objeto de conhecimento, neste estudo dos conceitos matemáticos, particulariza-se no sistema de ensino nas relações entre a atividade do professor, ligada a seu trabalho, e a principal do estudante, a atividade de estudo. Na especificidade da atividade orientadora de ensino como principal do educador, há ações que compõem momentos de estudo tanto do conceito desenvolvido historicamente, que se pretende que seja apropriado pelo estudante, quanto das interações no coletivo e deste com o conceito, na formação da coletividade.

O lógico-histórico como perspectiva didática orientou os estudos do movimento do conceito historicamente constituído para organização do curso e das discussões no desenvolvimento do conceito dos professores na inter-relação indivíduo-coletividade. O lógico-histórico também foi considerado como uma das formas do pensamento que relaciona o desenvolvimento da imagem conceitual individual, uma vez que o lógico organiza, sintetiza o processo histórico do próprio indivíduo. O lógico-histórico do conceito desenvolvido pela humanidade e o lógico-histórico das imagens conceituais dos sujeitos formaram a unidade dialética de análise entre o geral e o particular nesta pesquisa. Citamos o problema da incomensurabilidade entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro que no ensino básico permite o desenvolvimento de uma fase histórica do número pi. Isso não quer dizer que se deve deixar que o aluno construa o conceito de pi vinculado à medida empírica.

A atividade orientadora de ensino e a perspectiva lógico-histórica do conceito fundamentaram a mediação entre o conceito de número, objetivado pela humanidade, e a apropriação pelo sujeito no curso.

A organização básica de cada unidade didática constituiu-se em uma situação-problema que desencadeou soluções organizadas pelos professores em pequenos grupos e, posteriormente, discutidas no coletivo que proporcionaram novas sínteses e soluções. O conteúdo da situação-problema e a orientação da pesquisadora buscaram formas dialéticas de organizar o pensamento do coletivo no desenvolvimento das suas imagens conceituais entre o lógico e o histórico. A dinâmica grupo-classe e indivíduo-grupo-classe constituíram em um modo de desenvolver o pensamento lógico, o histórico liberto das casualidades. Um exemplo disso ocorreu na primeira unidade didática. Nesta, as produções individuais do *túnel do tempo* foram se encontrando com as do pequeno grupo e, depois, com o coletivo classe, constituindo o que era significativo para os sujeitos. O geral constituiu-se, dessa forma, em uma maneira de refletir o particular. Outro exemplo, da dinâmica grupo classe, foi o desenvolvimento da unidade didática medida, em que cada grupo usou sua unidade de medida particular e todos puderam perceber que o lógico estava na criação de uma unidade e não na unidade específica.

Consideramos a ligação entre a formação de imagens conceituais e a atividade do sujeito, este entendido como ser histórico professor de matemática, como princípio investigativo. Pesquisas científicas, histórico de produção didática e manifestações dos sujeitos desta pesquisa formaram relações de constituição das imagens de conceitos matemáticos com as imagens da realidade.

Ao iniciar o curso com a unidade didática denominada sujeito histórico, compreendemos uma imagem de realidade que os professores elaboram do seu próprio lugar social na atividade humana que ocupam de professores do ensino público. A relação do indivíduo com o gênero humano não foi concebida pelos professores e, conseqüentemente, houve a indicação da sociedade, a sociedade de classes, como totalidade. Assim, o lugar do professor na atividade humana caracterizou-se para os sujeitos fundamentalmente como mediação da aprendizagem do estudante na sua imediatez, na relação social presente, do conhecimento que se caracteriza na *práxis* cotidiana, fetichizada. Essa imagem de realidade permeou todo o curso, e pudemos identificá-la pela motivação manifestada em procedimentos metodológicos relacionados com experimentos manipulativos e nas discussões de conceitos matemáticos, focado no saber fazer. Além disso, observamos um processo em que as condições humanizadoras apontadas, como respeito, entendimento, observação, amor, refletir etc., transformam-se em objetivos da educação escolar, ou seja, os meios transformam-se em fins. Processo esse que caracterizamos como reflexo da estratificação cultural.

O distanciamento dos sujeitos como sujeitos históricos, resultado da divisão social de classes, impede a sua caracterização como sujeito, sujeito concreto. Como sintetiza Kosik (2002), o indivíduo se perde na absorção pela objetividade social do mundo da manipulação. Neste, o sujeito real é ele próprio mistificado e a apropriação do produto do gênero humano torna-se manipulada pelos interesses da classe dominante.

Nesse contexto geral, a formação dos conceitos pelos indivíduos, suas imagens conceituais, não são alheias, pois a apropriação do conceito encontra-se diretamente ligada à significação nessa sociedade. Por esse motivo, a primeira unidade didática teve o objetivo de evidenciar a atividade humana e também elementos indicadores da constituição do sujeito histórico.

A organização dos encontros, para o modo humanizador de apropriação e objetivação do conhecimento elaborado historicamente, proporcionou uma atividade que reproduzisse na mente a formação do conceito, este fundamentado nos princípios lógico-históricos dos conceitos matemáticos, constituindo os motivos-objetivos da atividade orientadora de ensino, explicitados aos professores. Especificamente, o curso caracterizou uma proposta de transição das formações das imagens conceituais de número baseadas na lógica formal, como vem sendo formadas pelo currículo industrial, para a lógica dialética. A análise de produções científicas indicou manifestações provenientes do esquema lógico-formal que compreendem tanto os conceitos cotidianos como os conceitos empíricos da ciência. Por esse motivo, configuramos esta pesquisa como uma possibilidade de transição para o currículo educacional.

Nessa proposta, o papel da definição assumiu o caráter de síntese e não de princípio na formação conceitual, pois admitimos conceito como movimento cujo conteúdo depende das relações criadas. A definição é um estado, um momento de síntese do conceito expresso em uma determinada forma.

A síntese de conceitos matemáticos construída pela humanidade não revela em si todo o movimento do pensamento que a constituiu. Por esse motivo, a aprendizagem da definição que produz uma imagem (imagem da definição) coerente desta, não significa que mesmo quando consultada seja capaz de resolver situações em que é necessária. Um sistema de ensino que estabelece o formalismo matemático como perspectiva didática não propicia a apropriação dos conceitos matemáticos no seu movimento. A lógica dialética como lógica mais ampla que a formal indica caminhos para a prática educativa. A aprendizagem pelo formalismo cria concepções de linearidade na produção do conhecimento, de conceito fixo, acabado.

A compreensão entre o lógico e o histórico, como categorias dialéticas do pensamento no desenvolvimento do conceito matemático, como também no seu processo de ensino e aprendizagem, permitiu a realização de um curso orientado à superação da forma empírica do conceito para o desenvolvimento do pensamento teórico. Esses princípios, ligados à atividade orientadora de ensino, constituíram o conteúdo que possibilitou a *reprodução* da atividade acumulada no desenvolvimento do conceito matemático abordado nas unidades didáticas como, por exemplo, na elaboração de uma reflexão do paradoxo de Aquiles e a tartaruga. A compreensão do movimento e os recursos aprendidos da Física resolveram o problema do movimento para um grupo. Um outro grupo, ao compreender o argumento, percebeu a dualidade e refletiu sobre ela, concordando com a lógica construída. Ambos os grupos pensaram no problema, mobilizaram conhecimentos, perceberam as diversidades de soluções que dependem das interações do conhecimento de cada indivíduo na relação com o grupo. Na época, também muitos refletiram e expuseram sua opinião.

Ao pensarem no argumento, os conceitos de movimento, de seqüência, de limite estiveram presentes conceitualmente mesmo que sem suas denominações.

Especificamente na realização do curso, núcleo desta pesquisa-ação, o foco foi a abordagem dos nexos conceituais na transição de um campo numérico a outro relacionado à criação de cada tipo de número. A organização para esse fim compôs as unidades didáticas: sistema de numeração; número natural; medida; número racional; densidade, comensurabilidade, incomensurabilidade e o número; atividade orientadora de ensino da reta real; e número complexo.

A unidade sistema de numeração foi desencadeada por meio de uma história virtual, partindo da correspondência biunívoca *pedra-ovelha* como a primeira elaboração humana de controle de variação quantitativa. As interações indivíduo-coletividade permitiram a manifestação de imagens conceituais e seu desenvolvimento, na elaboração de soluções de como contar uma quantidade qualquer com menos pedras. O agrupamento – um a vários – foi mobilizado pelo pensamento em forma e conteúdo. O conteúdo caracterizado pela organização quantitativa de cada agrupamento e a forma pela sua representação para comunicação, os numerais. A diversidade das soluções apresentadas pôde evidenciar que há várias soluções a uma situação, o que caracteriza o movimento humano diante de um problema no qual uma síntese eficiente depende da interação coletiva. As categorias qualidade e quantidade foram mobilizadas especificamente para a situação, promovendo a solução mais eficiente. Fixar a quantidade em uma qualidade e suas correspondentes variações formaram um percurso de análise e síntese de soluções, juntamente com o propósito de economia do pensamento. Controlar uma variação discreta (pedras, ovelhas) por uma variação contínua (tamanho) não se constituiu em uma solução eficiente. A humanidade e também os sujeitos puderam fixar uma forma de representar o pensamento de número em uma qualidade que varia discretamente como a contagem, ou seja, a posição. A economia do pensamento fixou a regularidade nos agrupamentos e a ordem das posições para permitir a comunicação.

A formação da imagem conceitual do sistema numérico posicional constituiu-se na atividade inter e intrapsíquica mobilizada por cada indivíduo na interação com o coletivo. As atividades externa e interna compuseram, no movimento coletivo, a reprodução dos nexos conceituais, a essência, do conceito do sistema de numeração posicional: a correspondência – um-a-um e um-a-vários –, o numeral, a posição.

O conhecimento anterior, baseado no lógico-formal que identifica o número com o numeral, precisou ser negado para que o pensamento entrasse em atividade, para uma superação. Forma e conteúdo, movimento, qualidade e quantidade, discreto e contínuo foram algumas das categorias do pensamento mobilizadas na formação das imagens conceituais do sistema posicional de numeração, que constituem o pensamento numérico.

A unidade didática número natural constituiu no desenvolvimento de um plano de ações para o ensino do número natural. Os aspectos relacionados pelos professores foram com a teoria dos conjuntos (pertinência, intersecção, união), com a contagem e com as aplicações desse tipo de número. Identificamos as propostas didáticas desenvolvidas pelos professores como uma forma empírica no desenvolvimento do pensamento, evidenciando o lógico-histórico do ensino e da aprendizagem, em particular desse conhecimento. As imagens conceituais do conjunto dos números naturais se identificaram com o sistema de numeração. Embora os conceitos de ordem e de sucessor tivessem sido evidenciados, não caracterizaram, para os sujeitos, como a essência explícita do conjunto dos números naturais, mas sim mediada pelo processo de contagem.

A unidade didática medida partiu de uma situação empírica de medição de objetos, em que os sujeitos mobilizaram suas imagens conceituais de medida, caracterizadas fundamentalmente pela utilização de instrumento, avançando para uma forma teórica de criação deste. A negação da negação, efetivada na negação da impossibilidade de medir sem instrumento, constituiu a atividade do pensamento criador de possibilidades. O senso de grandeza utilizado por meio de operações sensíveis também teve que ser superado. A situação proposta permitiu desencadear ações motivadas pela reprodução do conceito de medida, que resultaram na criação da unidade e do método de comparação entre grandezas para a quantificação. A diversidade de qualidades possíveis de serem mensuradas, de criações de unidades de medida e de métodos de quantificação expressou o movimento de produção do conhecimento humano, permitindo o desenvolvimento das aptidões essencialmente humanas.

O instrumento de medida pôde ser reproduzido nos seus nexos essenciais do pensamento teórico. O encaminhamento do pensamento para síntese do conceito de medida fixou o que é essencial, os nexos conceituais: unidade de medida, a grandeza, a comparação. A forma que esses conceitos se articularam permitiu o desenvolvimento das imagens conceituais da medição. A natureza da grandeza a ser medida, diferentemente da que se conta, é contínua e, portando, a unidade de medida teve de ser criada.

A unidade criada pelo pensamento e objetivada em um objeto físico tornou-se o objeto que conta. O método de comparação específico exigiu um procedimento repetitivo: o processo que incorpora o método da contagem de grandezas discretas.

A medida da *sobra* – tamanho a ser medido menor que a unidade de medida – não foi problema para os professores, mas teve que ser reproduzido no pensamento para expressar a medida. Representar na forma escrita os dois movimentos: da unidade e da subunidade, de uma só vez, gerou a razão.

Durante a atividade coletiva, imagens conceituais provenientes do sistema de ensino como parte-todo e estimativa foram manifestadas. A transformação das imagens foi possível devido à condução do processo de análise e síntese no coletivo que encaminhou ao pensamento teórico, à essência. A organização do pensamento do *por quê*, *o que* e o *como* medir reproduziram o movimento humano da necessidade histórica de mensurar grandeza contínua e elaborar método e representação. Esses articularam pensamento empírico (a comparação, percepção das grandezas) e pensamento teórico, em processos de criação no diverso (como das unidades e subunidades, do método, da representação) para compor o conceito para si.

Categorias do pensamento anteriormente mencionadas também estiveram presentes nessa unidade didática como forma e conteúdo no movimento de objetivação e apropriação do conceito, quantidade e qualidade – na variação da intensidade da qualidade observada – e do discreto e contínuo nas grandezas. No movimento do pensamento, algumas formas de pensamento foram mais evidenciadas em algumas unidades didáticas do que em outras, mas isso não revela sua ausência.

Os pensamentos geométrico e algébrico puderam ser articulados com o numérico na situação-problema proposta nessa unidade didática, nas formas geométricas e nos conceitos como base, altura, lado, cálculos de área, volume e a variável no campo de possibilidades das intensidades das qualidades.

Materiais, cujas grandezas não seriam possíveis de ser mensurada no curso, foram intencionalmente colocadas na situação, para que o pensamento exercitasse a possibilidade e a necessidade de outros conhecimentos como cor, rigidez, textura, som, inteligência. Criou-se assim um campo de possibilidades de pesquisa da criação de instrumentos desenvolvidos pela humanidade.

A atividade coletiva na unidade didática número racional evidenciou a necessidade de pensar o número sem a quantidade, desvinculados dos processos da prática da medida. Os sujeitos abstraíram da unidade didática anterior a generalização da quantificação, localizada na unidade de medida e no movimento repetitivo que gerou a razão de inteiros. A reciprocidade do número vinculado à quantidade, tanto à medida como à contagem, tornou-se um conhecimento a ser negado para o estudo dos racionais. Essa reciprocidade se revelou pela explicação da existência do racional *para medidas não inteiras*, a fração, e a medida como origem da fração, do racional. Na unidade seguinte, esse conhecimento se mostrou também evidente. Nos encontros do curso, não desenvolvemos a passagem da razão de inteiros ao número racional especificamente, mas foi recomendado seu estudo. A sua necessidade foi evidenciada no movimento do conceito de número como conteúdo e forma. Essa última ligada aos números decimais. Tal necessidade fez com que a imagem conceitual que o coletivo possuía de parte-todo ocupasse o lugar do conhecimento teórico de número racional. Embora a forma da razão seja a mesma, tanto para representar dois movimentos discretos – por inteiros – quanto o número racional, o conteúdo desenvolveu-se ao longo da história.

A abordagem no sistema de ensino do número racional no modo empírico não permite a formação de imagens conceituais coerentes com o desenvolvimento historicamente elaborado desse conceito. Posteriormente, o desenvolvimento da razão como número racional possibilitou à humanidade a variação da própria forma.

O número racional também foi abordado na unidade didática densidade, comensurabilidade, incomensurabilidade e o número. A confrontação das imagens conceituais de racionais se realizou com os conceitos de discreto e densidade em campos numéricos. Uma seqüência de decimais concebida para os racionais, em um determinado sistema de relações, determinou um conhecimento a ser superado pela apropriação da densidade no conjunto dos números racionais. A imagem conceitual de reta racional como discreta já havia sido manifestada em pesquisas anteriores (DIAS, 2002; SANTOS, 1995). A atividade coletiva evidenciou os caminhos constitutivos tanto dessas imagens ligadas ao conceito de sucessor e ao instrumento de medida, quanto às possibilidades de superação na generalização de um processo infinito, de se poder calcular a média aritmética entre dois números distintos, caracterizando o movimento do pensamento empírico ao teórico.

A divisibilidade e a operação de divisão foram outros dois conceitos confrontados nas imagens manifestadas pelos sujeitos nessa unidade didática, caracterizando nexos conceituais a serem abordados no ensino na transição do campo dos inteiros aos racionais.

As imagens conceituais de sucessor foram evidenciadas e transformadas no compartilhamento de significações desencadeado pela proposta. A fluência desse conceito para além do campo dos inteiros estava vinculada à cotidianidade e talvez ao próprio sistema de ensino. A imagem da permanência desse conceito, fixada em termos algébricos (n+1) e o estudo deste, permitiu a apropriação pelos sujeitos dos modos de constituição do formalismo matemático. Esse percurso evidenciou a relação da permanência e fluência na formação dos conceitos.

Os nexos conceituais do campo racional se constituíram na comensurabilidade, como conceito teórico que supera a mensuração empírica; no quociente de inteiros, como superação à divisibilidade no conjunto dos inteiros; e na densidade, como superação do discreto. Outros nexos como o infinito e a enumerabilidade não foram evidenciados nesse momento do curso.

O desenvolvimento do conceito de incomensurabilidade e de número irracional revelou procedimentos didáticos que possibilitaram a manifestação de imagens conceituais, relacionadas ao pensamento empírico, na razão entre o comprimento e o diâmetro de circunferência e sua superação. Análises de livros didáticos e concepção de professores em pesquisas científicas apontaram a existência, no sistema de ensino, desse experimento para obtenção do número pi.

O dilema criado, por meio desse experimento nas imagens conceituais da história do pi apropriadas pelo ensino e da racionalidade da operação com as medidas, gerou um sistema amplo de relações conceituais. As imagens das definições de números racional e irracional e o lógico-histórico do ensino do número pi formaram o sistema de confronto de juízos. O juízo da irracionalidade de pi, ligada à sua obtenção empírica, provinha de sua história e inicialmente foi dominante em relação às imagens das definições, o que indicou que essas imagens não foram construídas por uma atividade que as reproduzisse no pensamento. O conhecimento empírico da definição de número racional foi pensado possibilitando uma ampliação da própria significação: a relação da dízima periódica com a razão de inteiros. As dízimas no sistema de ensino normalmente aparecem com períodos reduzidos. O número em questão, com período de muitas casas decimais, pôde desestabilizar o conhecimento dos professores, ao mesmo tempo em que revelou seu fundamento no pensamento empírico.

A conscientização da racionalidade das medidas colocou em evidência o conhecimento da história do pi e da produção do conhecimento e da didática. O homem inacabado, o problema da verdade, da certeza, a demonstração da irracionalidade de pi puderam ser pensados pelos sujeitos como pertencentes ao modo de produção humana do conhecimento.

As vozes institucionalizadas de que *o aluno não pode levar a dúvida para casa*, *o professor é quem deve concluir*, *o professor detém o conhecimento*, entre outras também puderam ser pensadas para que o professor se constitua mediador.

A identificação do confronto das imagens conceituais, manifestadas como conseqüência das discussões do experimento, orienta a necessidade de conceituação da medida, ou seja, pensar a medida teoricamente, a comensurabilidade, e também a sua negação, a incomensurabilidade.

Uma das situações-problema elaboradas pelos sujeitos para abordar o número real relacionou a incomensurabilidade e o número irracional a partir da diagonal do quadrado. Essa situação não foi vivenciada pelos sujeitos, contudo é indicativa da interdependência como necessária para apropriação do conceito de número irracional.

A unidade didática atividade orientadora da reta real promoveu três movimentos: um foi o desenvolvimento de uma situação-problema envolvendo o conceito de continuidade; outro relacionado a propostas de ensino; e por fim, uma síntese do conceito da reta real e possíveis recorrências de certas práticas educativas.

O salto qualitativo do conceito do conjunto dos números reais, como união dos racionais e irracionais concebido no século XVI, para a reta real, ou seja, o conjunto dos números reais equivalente a reta, está no contínuo aritmético. O desenvolvimento da continuidade envolveu os conceitos de incomensurabilidade, número irracional, processos infinitesimais, insuficiência da densidade, ordem e conjunto dos racionais.

Devido o conceito de continuidade ser o salto qualitativo da reta real, investigamos as imagens conceituais de continuidade e as possibilidades de desenvolvimento destas. A análise de livros didáticos e produções científicas referentes a concepções de professores da interdependência entre a reta real e a continuidade compuseram o lógico-histórico desse conceito no sistema de ensino. Os professores entrevistados em Cobianchi (2001), ao responderem sobre a importância dos procedimentos didáticos e da avaliação desse conceito em livros didáticos, focaram somente nos números reais e não na continuidade dele. O desenvolvimento do conceito de continuidade no sistema de ensino básico e superior tornou-se praticamente ausente nas manifestações dos entrevistados.

Nas obras didáticas, o tema continuidade não está diretamente ligado ao de números reais e sim às funções. Os números reais caracterizam-se no sistema de ensino basicamente pela união dos conjuntos dos números racionais com os dos irracionais. Notas históricas sobre Dedekind foram apresentadas em propostas curriculares destinadas ao ensino básico, porém o reflexo não foi substancial nos livros didáticos cuja abordagem apareceu em um (de 1952) dos dezoito analisados. No Ensino Superior, um dos vinte e dois livros de Cálculo analisados por Cobianchi (2001) definiu número real por meio dos cortes de Dedekind.

O paradoxo de Aquiles e a tartaruga foi a situação-problema proposta aos sujeitos para abordar a continuidade, cujas manifestações das imagens conceituais se relacionaram aos conceitos de infinito, movimento, reta, mônada, limite, infinitésimo. A diversidade nas respostas apontou para a complexidade do movimento do pensamento manifestado pela dualidade do formalismo e do sensível, e mesmo o conceito de verdade mostrou-se permear a situação. Os pensamentos intuitivo e dedutivo baseados na interpretação do argumento de Zenão e na solução matemática não atingiram a criticidade do argumento, mas apontaram as possibilidades nessa direção. A situação proposta evidenciou a necessidade do desenvolvimento das imagens conceituais de continuidade e infinito ligadas à reta geométrica e ao número. Uma das propostas dos professores buscou abordar a continuidade da reta real pela inserção, por aproximações sucessivas, do irracional na reta numerada e outra por meio do gráfico de parábola.

Na outra parte da unidade didática, os professores desenvolveram situações-problema para abordar a reta real no sistema de ensino. A análise de livros didáticos e de pesquisas científicas permitiu compreender como a aprendizagem desse conceito vem sendo realizado no sistema de ensino. As análises evidenciaram o processo de introdução no ensino dos números reais, como a inserção de alguns irracionais ao conjunto dos racionais, por vezes introduzindo-os na reta completando-a. Uma das propostas desenvolvidas evidencia esse procedimento, por meio das aproximações sucessivas de intervalos com extremidades racionais. O encaminhamento da proposta para que o estudante chegue à generalização desse processo infinito, de construção dos intervalos, interpretamos como o salto qualitativo para o desenvolvimento de imagens conceituais de irracionais que permitem a apropriação do desenvolvimento lógico-histórico desse conceito.

A introdução dos irracionais também foi explicitada em outras duas propostas: uma do número pi e outra do $\sqrt{2}$. A proposta que introduz o pi foi a mesma que aparece nos livros didáticos – desde 1920[54] – e também nos procedimentos relatados por professores em outras pesquisas. O salto qualitativo nessa proposta ocorreu com a realização da discussão no curso que permitiu a reformulação de imagens conceituais em relação à obtenção empírica do número pi. Esta, juntamente com a outra proposta, que confronta a medida empírica da diagonal do quadrado de lado unitário com o procedimento baseado no teorema de Pitágoras, revelou o movimento lógico-histórico do conceito de número irracional, que normalmente não se discute no sistema de ensino, o qual simplesmente o define. A abordagem da ligação do irracional com a incomensurabilidade foi um dos aspectos apontados pelos sujeitos como relevantes para compreensão do número irracional.

Algumas propostas para obtenção de irracionais algébricos utilizam o teorema de Pitágoras e equações algébricas sem, contudo, abordar sua origem. A relação da incomensurabilidade com o número irracional esteve presente em publicações didáticas (de 1936 e 1940 como vimos no capítulo anterior), mas foi sendo sintetizada, de modo que, por meio do teorema de Pitágoras, a medida da hipotenusa irracional fosse simplesmente transportada à reta numérica, evidenciando a existência do irracional na reta real.

A visualização foi uma característica almejada nas propostas. Na quarta situação-problema, a visualização ocorreu por meio do gráfico de uma parábola. A proposta consistiu em variar o domínio da função quadrática, percorrendo os conjuntos dos naturais, inteiros e racionais, com objetivo de demonstrar que esses conjuntos não são suficientes para descrever a parábola. A intenção foi que o estudante se apropriasse da linha como modelo ideal da continuidade e que os conjuntos numéricos buscavam essa propriedade.

A discussão das relações dos pontos com os números pode encaminhar o desenvolvimento de imagens conceituais de continuidade. Pode-se também partir de um gráfico que expressa um movimento contínuo e analisá-lo antes mesmo de chegar ao gráfico e à reta como modelo matemático de continuidade.

---

[54] Para mais detalhes ver Unidade didática: densidade, comensurabilidade, incomensurabilidade e número.

A situação proposta pelo grupo de professores contém possibilidades de encaminhamento que podem promover a apropriação do desenvolvimento da continuidade dos números reais, na necessidade para descrever a parábola.

A outra situação-problema proposta por um grupo de professores, de classificar números em conjuntos, procedimento comum no sistema de ensino e característica do pensamento empírico, revelou o lógico-histórico do sistema de ensino do pensamento numérico. A reformulação da situação realizada pelo grupo permitiu a elaboração também de questões que envolvessem um diálogo de conceitos entre os conjuntos.

Os conceitos de sucessor, densidade, infinito, ordem são alguns que, ao se relacionarem com os conjuntos numéricos, permitem o desenvolvimento das imagens conceituais do pensamento numérico. O salto qualitativo foi a introdução de análise do conjunto dos números irracionais, normalmente não desenvolvido no sistema de ensino. A inserção de irracionais particulares é comum no ensino, pois essa forma também foi revelada em três das situações propostas pelos professores. A generalização normalmente é realizada pela definição de irracional, na impossibilidade de representação como razão de inteiros ou na representação decimal infinita, como se pôde observar pela análise dos livros didáticos. As propriedades do conjunto dos irracionais não são discutidas. Por esse motivo, interpretamos que os sujeitos nesse curso se mobilizaram mais especificamente para compreender os irracionais do que a continuidade da reta real. Uma expressão escrita na avaliação corrobora essa interpretação.

> O que mais me chamou atenção e muito me fez refletir foi a questão das relações matemáticas e históricas existentes entre os conjuntos numéricos; destaco o conjunto dos números irracionais como um grande desafio para o processo de ensino/aprendizagem e o curso possibilitou um melhor entendimento matemático desse conjunto.

Outras situações para o ensino foram elaboradas envolvendo conceitos de grandezas discretas e contínuas, instrumentos de medida e processos infinitos que normalmente não encontramos nos livros didáticos. Nos encaminhamentos didáticos, aparecem questões abertas e inclusive geradoras de dilemas que revelam a intenção de discutir conceitos.

No conceito da reta real, os conceitos de continuidade, densidade, irracionalidade e racionalidade se relacionaram num sistema, de uma certa forma, para que o conjuntos dos números reais fosse mais que uma junção de números racionais e números irracionais.

Continuidade e infinito se tornaram conceitos da matemática partindo da contemplação dos fenômenos, transformando-os, criando-os para si. Esses movimentos são reveladores da formação dos conceitos e buscamos abordá-los no curso.

Tivemos, nas situações desencadeadoras produzidas pelos sujeitos desta pesquisa, um determinado *lugar* na reprodução do conceito de reta real, constituído na relação com a significação científica, possível de se objetivar no sistema de ensino. A compreensão da relação do movimento conceitual da reta real, desenvolvido pela humanidade, e a possibilidade de apropriação pelo indivíduo, configurou a relação entre conceito e imagem conceitual. A ação da construção e transformação do objeto mental constituiu o ato principal para compreensão do conceito, o descobrimento de sua essência e movimento. Pudemos também apontar, nas unidades didáticas, possibilidades para posteriores reflexões que sempre um pensamento propicia.

Os sujeitos em atividade orientadora de ensino manifestaram suas concepções de ensino e aprendizagem nas formas de colocação de uma situação-problema ao estudante bem como reflexos do curso. Nesse momento, evidenciamos a transição de significações, e talvez de sentido pessoal, entre o lógico-formal e as possibilidades promover o movimento conceitual.

O desenvolvimento de um conceito envolve as imagens conceituais do coletivo que são guiadas pela imagem de realidade, que envolvem significações particulares e sentido pessoal. A totalidade do desenvolvimento coletivo evidenciou o movimento possível, caracterizado pelo histórico dos próprios sujeitos em interação coletiva. A atividade coletiva, na dinâmica do desenvolvimento das situações-problema, pôde ser um indício de coletividade.

Outros conceitos como cardinalidade, algébricos, transcendentes, hiper-reais normalmente não são abordados no ensino básico, embora sejam nexos conceituais do pensamento numérico. Isso significa a fluência do pensamento numérico e a limitação desse curso, que se constituiu um isolado.

Embora a densidade no conjunto dos racionais apareça em algumas obras didáticas, quando se propõe o ensino dos números reais, esse conceito não é rediscutido no novo campo numérico. Nessa proposta, pudemos iniciar essa discussão também no campo real.

A síntese dos números reais apresentadas pelos professores revela uma transição entre o lógico-formal, baseado nos livros didáticos, e um movimento do pensamento no sentido de apropriação de nexos conceituais. Esse movimento também foi manifestado na avaliação do curso, como conceitos pertencentes ao pensamento numérico: o “discreto e o contínuo”, “incomensuráveis”, “infinito”, “continuidade”, “divisão infinita”, “fluência dos contrários”, “escola pitagórica”, “mônadas”. O movimento das imagens conceituais pôde transitar entre o pensamento empírico e o pensamento teórico, sendo algumas vezes caracterizadas como pensamento flexível, no movimento conceitual de apropriação e objetivação da reta real, ao combinar as imagens relacionadas ao lógico-formal desse conceito, com as experiências vividas no curso. O reflexo dessa transição, além do próprio movimento no curso, foi revelado na avaliação pelas expressões referentes ao desenvolvimento do pensamento numérico.

As respostas que sintetizaram um movimento do curso foram:

1. Correspondência um a um, a partir da necessidade do homem organizar seus bens, visto que ele passa a ser produtor, a lei dos contrários [...], o homem percebe que estes conjuntos não dão conta das quantidades contínuas em sua íntegra e cria dois outros conjuntos, para suprir a necessidade de medir (Q e R).
2. Percebi que o conjunto dos números vai sendo construído a partir da necessidade de explicar variações quantitativas e compreender a natureza.
3. Creio que este foi bastante ampliado, a idéia de número passou para um plano diferente, bem maior e não tão específico.
4. [...] onde um determinado conjunto não dava conta surgiu um novo campo numérico. Com isso hoje temos os números reais. Outra vez a idéia de movimento.
5. Numero natural; inteiro; racional; irracional; complexos; representação na reta numérica; a continuidade; a densidade e a discreção; infinitude e amplitude dos conjuntos numéricos.
6. O pensamento numérico ressaltou a importância filosófica do numero desprendendo-se da representação gráfica.
7. Conceito de número vem da criação e necessidade dos números naturais [...] a partir da contagem como diz a história. A partir daí a necessidade de fracionar [...] racionais, irracionais. Os problemas de continuidade e do infinito foram sentidos nas tentativas de medição de segmentos, retificação de curvas [...] uma das primeiras aparições desse problema pode ter sido na Grécia antiga, na escola pitagórica.
8. Números discretos – N, Z, Q, números contínuos, irracionais.
9. A criação dos números partiu de um contexto da necessidade de registro do homem, ou seja, de quantificar objetos, animais e outros. Conhecemos a representação simbólica de vários povos criamos a nossa própria representação simbólica de números expomos no coletivo. Realizamos um histórico começando pelos naturais, frações, (partição de inteiros), decimais (medidas), números racionais e irracionais ampliando as idéias. Conceitos através de problemas historicamente colocados.

Outras respostas que somente apresentaram somente alguns conceitos foram:

10. Buscar o infinito, números irracionais.
11. Fração: sobras no conceito de medida, senso numérico, medir.

As respostas que privilegiaram a dialética de alguns conceitos foram:

> 12. Grandezas contínuas e descontínuas. Há objetos ou “coisas” que podemos contar uma após outra, ou seja, “um a um”, como os dedos das mãos, e também o que não podemos contar como por exemplo (sic) como cresce um fio de cabelo.
> 13. Estudei o conceito de discreto e contínuo. Os conjuntos numéricos e a idéia de continuidade, densidade, incomensurabilidade.
> 14. No meu entendimento: os conceitos de geometria, de álgebra e número estão relacionados. Eles movimentam-se, para formar a matemática viva e real fazendo parte do dia-a-dia. Os três conceitos estão unidos e é impossível separá-los, porque um necessita do outro. Um exemplo: o ponto pode estar relacionado a um número na reta, este número poderá ser uma incógnita. Então a base de um dos segmentos da matemática são estes três conceitos, por onde a matemática movimenta-se.
> 15. Movimento contínuo e discreto.

Na concepção deste trabalho, a síntese revela alguns fragmentos que os professores, em um tempo de vinte minutos, se dispuseram a escrever. Com isso, o pensamento seleciona muitas vezes o que foi marcante para o indivíduo, como algo do conceito em que o indivíduo não havia se conscientizado, mesmo uma dúvida ou algo que fez mais sentido do que outros.

A mobilização das imagens conceituais envolvendo o conceito de número durante o curso revelou seu desenvolvimento e suas possibilidades. Além disso, proporcionou refletir sobre o processo de formação dos professores e suas práticas no sistema de ensino.

A abordagem do lógico-histórico do conceito promoveu elementos possíveis de integração na metodologia do ensino da matemática e também na perspectiva didática.

Na avaliação, também havia a questão “para que ensinar números reais”. Esta objetivou promover uma reflexão da própria significação desse conhecimento. Algumas respostas gerais foram: “Importante no dia-a-dia de quaisquer pessoas e indiferente da classe social” e “ensinar números reais é mostrar aos alunos a evolução da humanidade”.

Outras respostas refletiram o pensamento numérico, não especificamente o número real:

> 1. Sucessor, antecessor, densidade dos racionais, questões de divisibilidade, limitação dos instrumentos de medida.
> 2. Entender que quando um conjunto [...] não dá conta temos que partir para outro [...]. Entender o que é sucessor, antecessor.
> 3. Para que o aluno tenha um campo numérico capaz de suprir necessidades relacionadas a contagem e a medida.
> 4. Para que os alunos compreendam a evolução do campo numérico.
> 5. A idéia de partir de um todo e chegar nas partes, porém com conceitos dados pela sala [...], partimos para um estudo de medições em grupo e suas representações [...], pela necessidade contínua de não serem suficientes os números naturais, etc.
> 6. O que assistimos na sala de aula [...], a maioria dos alunos tem dificuldade de realizar certas operações [...]. Logo após indagam [...], quem criou as frações? números decimais? números periódicos infinitos? [...] Por que não se trabalha a

> parte histórica, um contexto que proporcione significado para que o aluno, através da vivência, frente a situações desencadeadoras, possa fazer a construção para si, refletir sobre idéias [...].
> 7. Devemos ensinar números reais para mostrar a diversificação dos números e promover o desenvolvimento das pessoas mediante a aquisição de tal conhecimento.
> 8. [...] partir da necessidade dos povos para medir, quantificar, classificar grandezas que não estão na natureza. Ensinar números reais é mostrar a evolução da humanidade em toda sua complexidade.

Em relação ao número real as respostas foram:

> 9. A necessidade de ensinar os números reais é porque ele dá conta de praticamente todas as situações.
> 10.Porque é parte da construção do conhecimento humano. Dá-nos o conceito de continuidade.
> 11.Ensinar números reais para ampliar entendimento dos alunos nos campos numéricos, um conjunto de números que incorpore os naturais, inteiros, racionais e irracionais, afim que ele perceba a continuidade e densidade em cada conjunto numérico.
> 12.Conforme afirma Dedekind, devemos ter um procedimento igual para uma reta, que consta idéia de conjunto infinito, propriedades de ordem de conjunto, a definição de densidade, a idéia de secção de conjuntos. Verificando a não correspondência biunívoca entre esses dois conjuntos, isto é, a existência de lacunas nos conjuntos dos números racionais.
> 13.Eu entendo que o "o conjunto dos números reais" é a junção dos conjuntos dos números racionais com os irracionais, portanto todas as apresentações numéricas são contempladas pelos números reais.
> 14.Os números reais devem ser ensinados para que o aluno possa situar-se quanto a dar as respostas aos exercícios propostos.
> 15.Para que os alunos tenham uma visão ampla de intervalo de um número ao outro, percebendo que de um número ao outro existem infinitos números.

As respostas 9, 13 e 14 refletem idéias lógico-formais, destas a 9 e a 13 estão mais diretamente ligadas à idéia de *conjunto amplo*, anteriormente abordada. Nas respostas 10, 11 e 15 aparecem menções de conceitos abordados no curso: densidade e continuidade, e a resposta 12 detalha um pouco mais sobre a não bijeção entre o conjunto dos racionais e os pontos da reta. Não temos a ilusão de que o curso possa imediatamente revelar mudanças de suas concepções e práticas educativas, pois isso depende também de outros sistemas de relações. Inferimos que essas expressões evidenciam, ao menos, a tomada de consciência desses conceitos na formação dos conceitos de números.

Na atividade do professor, está presente a multilateralidade de aspectos que envolveu e envolve o desenvolvimento de suas imagens conceituais. Na dinâmica do sistema de ensino, desenvolver uma proposta humanizadora compreende também uma luta constante no próprio sistema que permita alcançar condições do professor como mediador do processo de apropriação dos conceitos científicos pelo estudante. A luta se amplia com o desenvolvimento da consciência da sociedade e do gênero humano.

O lógico-histórico da educação escolar revelou seu produto nas imagens conceituais dos sujeitos, por meio das significações dadas aos conceitos matemáticos. Alguns exemplos, relacionados à cotidianidade e à reprodução do livro didático, permearam as unidades didáticas. As respostas dadas abaixo (1 a 4) também revelam alguns elementos constitutivos que permeiam as significações do ensino escolar da matemática.

Por esse motivo, o desenvolvimento das imagens depende da significação e, por vezes, do sentido pessoal, que o conhecimento possui para o indivíduo, para um coletivo e mesmo para classe social. A reprodução desse produto foi evidenciada nas discussões, na elaboração das propostas pelos sujeitos e na avaliação. A concepção de realidade do aluno na imediatez, a *práxis* cotidiana, o pensamento empírico formaram os principais organizadores gerais que permeiam a prática na escola. Ao final do curso, essas idéias puderam ser expressas também nas repostas à questão: *o que desse curso você levaria para sala de aula? Como?* "Atividades concretas", "Cálculos, medidas, funções [...] atividades que permitam a hora aula". Como também ao que não levariam para sala de aula:

> 1. Algumas reflexões que estão muito acima das 'necessidades' dos nossos alunos, algumas poucas. Ex. números complexos.
> 2. Não levaria tudo, pois os alunos não têm condições de assimilar.
> 3. Não levaria algumas discussões que ainda considero pouco esclarecidas e também muito filosóficas para compartilhar com meus alunos [...] como a definição de numero racional e irracional.
> 4. Filosofar em cima de alguns temas, como fora discutido, não levaria para sala de aula. Porque o nosso aluno necessita de aplicação real dos conteúdos.

A atividade orientadora de ensino realizada pela pesquisadora buscou desenvolver elementos que promovessem a atividade dos sujeitos no sentido humanizador. Isso não quer dizer que todos realizaram a reprodução do conceito para si e menos que implica na transformação imediata de suas práticas. Buscamos ao menos possibilitar o desenvolvimento de aptidões humanas, que pertencem à elaboração do conceito e que não são evidenciadas, como estão postas na maioria das obras didáticas e no sistema de ensino público.

Algumas possibilidades foram apontadas no desenvolvimento deste trabalho nas discussões, elaborações e na avaliação do curso. Nas repostas à questão sobre o que os professores levariam para sala de aula, a predominância ocorreu em relação à história, como em: "levaria o desenvolvimento da história, a evolução da matemática", "evolução da humanidade", "[...] considerando sempre a história". Em relação à metodologia, algumas respostas foram:

> - A tarefa de conceitualização, através de questionamentos, fazer com que os alunos construam seu pensamento [...], busquem soluções.
> - A metodologia que vivenciamos no curso [...], trabalhar com o assunto dentro de um contexto, proporcionar situações problematizadoras que desenvolva o raciocínio, pensamento empírico-discursivo para descobrir caminhos e chegar no teórico, pois é importante que o aluno participe do pensamento teórico para que passe a ter conhecimentos.

Ainda sobre a relação com os conceitos e as possibilidades:

> - Levaria a idéia central que é a construção de conceitos e os porquês das generalidades.
> - Levaria para a sala de aula, depois de alguns estudos, que farei destes módulos.
> - Os laboratórios, o conceito de movimento (da matemática) além do conceito de humanização.
> - Tudo, fazendo algumas adaptações.

Com a compreensão do sistema escolar como instituição responsável pela apropriação de conhecimento científico, caracterizamos este trabalho como uma forma de transição entre o currículo industrial ao educacional, na reflexão coletiva de conceitos matemáticos, com objetivo de promover o desenvolvimento do pensamento teórico e uma luta contra a alienação na educação escolar.

A escola é às vezes o único meio na vida do indivíduo na apropriação do conhecimento teórico e pelo qual o indivíduo se compreende como genérico. Leontiev (1964?), na sua época, já questionava se todos têm acesso à cultura desenvolvida pela humanidade. Além de sabermos que não, ainda questionamos quais aquisições estão sendo realizadas por meio das nossas escolas? A prática e as pesquisas revelam que o conhecimento, nos seus diversos aspectos, dentro e fora da escola, tem se revelado no nível da aparência do ponto de vista dialético de apropriação do conhecimento humano, ou seja, o conhecimento empírico.

A representação abaixo identifica não somente como concebemos o lugar da educação escolar, mas também da formação da imagem do conceito científico, na atividade humana.

FORMAÇÃO DA IMAGEM CONCEITUAL

INDIVÍDUO	←— SOCIEDADE —→	GÊNERO HUMANO
↕		↕
IMAGEM DO CONCEITO CIENTÍFICO	←— EDUCAÇÃO ESCOLAR —→	CONCEITO CIENTÍFICO
↕		↕
ATIVIDADE INDIVIDUAL (INTERNA/EXTERNA)	←— ATIVIDADE ORIENTADORA DE ENSINO —→	ATIVIDADE HUMANA

Ao realizar uma atividade orientadora de ensino, na relação com os pressupostos lógico-históricos do conhecimento, como forma humanizadora de apropriação, consideramos o lógico-histórico dos próprios indivíduos, negando a manipulação como procedimento didático. Assim, buscou-se promover a libertação do pensamento, o desenvolvimento conceitual para si àqueles que se dispuseram. O reconhecimento da insuficiência de um conhecimento, a busca de negar um estágio do conhecimento e a disposição de construir a superação deste, nas relações inter-pessoais, exigem uma mudança de concepção em relação ao processo de aprendizagem escolar, pois inicia um movimento da lógica dialética na apropriação do conhecimento.

No movimento do pensamento, pudemos compreender as manifestações de dilemas, a negação de um conhecimento, a negação da negação, o movimento das formas e do conteúdo de um conceito, a aparência e a essência, a análise e a síntese, o empírico e o teórico, o lógico e o histórico, a intuição e a dedução, a lógica dialética e a lógica formal.

Consideramos que esse encaminhamento permitiu ao indivíduo o desenvolvimento de aptidões para compreensão por que um determinado conhecimento teve tal percurso e não outro. Nas unidades, pudemos desenvolver situações que permitiram refletir sobre a criação: do sistema numérico posicional e da régua, da incomensurabilidade criando o número irracional, da necessidade da continuidade numérica para o desenvolvimento da Análise matemática. Por meio da diversidade de soluções desenvolvidas nas situações-problema, pôde-se pensar por que uma determinada solução é mais eficaz que outra.

A objetivação do conhecimento, por meio do trabalho do professor, pode formar e transformar a consciência dos estudantes das significações sociais do conhecimento. A didática, como atividade educativa, constitui a mediação da apropriação do conhecimento desenvolvido pelas gerações precedentes. Admitimos que na didática a atividade orientadora de ensino contém os pressupostos educativos para a organização do ensino humanizador.

As imagens conceituais se encontram no nível da aparência quando a atividade não é humanizadora, ou seja, essa característica se obtém, por exemplo, na memorização de definições e procedimentos de resolução para passar em um exame. Quanto às definições, pudemos observar às de números racionais e irracionais como estas se revelaram desarticuladas na situação envolvendo o número pi. Dessa forma, o conceito, como movimento das aptidões humanas objetivadas, não é apropriado, dificultando a constituição da significação e de significado (sentido pessoal) para sua vida.

É por meio da atividade adequada realizada com objeto ou fenômeno que se proporciona a possibilidade de superação da imediatez destes, adquirindo uma existência mediatizada, e que revela, em seu movimento, as conexões internas, essenciais, que permitem a criação de novas propriedades humanizadoras, que satisfazem a necessidade humana, desenvolvendo assim o conhecimento teórico.

Para resolver muitas tarefas de caráter utilitário, é suficiente o conhecimento dos traços identificadores externos dos objetos, dos fenômenos, o conhecimento empírico. Entretanto, para compreender as relações entre os objetos no seu movimento, é indispensável apoiar-se no conhecimento de suas propriedades essenciais, possível somente com o pensamento teórico. A atividade mental que opera com conceitos é o pensamento teórico, é ele que se desenvolve ao reproduzir mentalmente o movimento do objeto.

Nesta pesquisa, o desenvolvimento da imagem conceitual do educador permitiu a tomada de consciência do próprio movimento do pensamento na construção do conhecimento. Talvez essa consciência seja indício de constituição do sujeito no indivíduo, no desenvolvimento de suas próprias potencialidades e práticas. A consciência de sujeito pode não mudar o mundo, mas sim sua imagem de mundo e, com isso, sua atitude diante do mundo, conscientizando-se como sujeito histórico na atividade humana.

A tomada de consciência do sujeito (coletivo) histórico professor de matemática pode ter se iniciado por meio da particularidade das soluções às situações-problema, que conduziram o desenvolvimento do pensamento matemático. A constituição desse sujeito depende da hierarquização em que as imagens conceituais são colocadas nas atividades realizadas pelo indivíduo. Citando um exemplo, um professor que defendia que no campo racional um número tinha vários sucessores, em um problema de álgebra, questionou as respostas possíveis no campo numérico em que a situação se desenvolvia.

A hierarquização é determinada pelas condições sociais objetivas da vida do indivíduo como também a determina (MARTINS, 2004, p. 94), seja nas relações sociais que permeiam a manifestação no coletivo, seja na concepção de sociedade que transita da imediatez, dos valores de uso, das relações de poder, ao gênero humano.

Pudemos acompanhar, por meio do processo lógico do pensamento numérico, como este reproduziu aspectos do processo lógico-histórico do conceito de número, como do sistema escolar, na sua objetividade, complexidade e contrariedade.

Sensações, percepções, noções foram elementos que fizeram parte da formação do conceito, como pudemos exemplificar nas unidades didáticas sistema de numeração, medida e densidade, comensurabilidade, incomensurabilidade e o número. Isso não quer dizer que todos os conceitos surgem da imediatez das sensações e percepções. No reflexo subjetivo do movimento do objeto, destacaram-se propriedades que serviram de base ao pensamento matemático. No movimento do pensamento, as imagens subjetivas, inicialmente sensitivas, transformaram-se, tornaram-se mais complexas, ligando-se em um sistema de diversidade no processo de análise e síntese. Pôde-se observar esse processo na discussão e no encaminhamento do experimento empírico da razão entre comprimento e diâmetro de uma circunferência, que envolveu uma diversidade de conceitos para compreensão do desenvolvimento histórico do número pi.

A ascensão do simples ao complexo se realiza devido à formação de novos conceitos, tomando por base outros conceitos. Todo pensamento científico está subordinado à formação de conceitos teóricos. Se no processo de desenvolvimento do próprio conceito está presente o surgimento de novos conceitos, como também seu aprofundamento, o sistema de ensino, em particular, responsável pela formação de imagens de conceitos teóricos, não pode ficar alienado desse fato.

Ao entrar em atividade externa e interna, o sujeito se insere no próprio processo de desenvolvimento do conceito. A partir da atividade externa, o conteúdo do pensamento manifestado, nas relações interpsíquicas, transforma-se em conteúdo da atividade interna, nas relações intrapsíquicas, em processo de interiorização, como é denominado na psicologia histórico-cultural.

Nesse processo, imagens conceituais são formadas e transformadas e serão novamente manifestadas nas relações interpsíquicas. Isso não quer dizer que será a mesma, pois na atividade interna, a imagem se relaciona com seu próprio sistema, produto da atividade individual que também é social. Talvez possamos inferir que a atividade interna, das relações intrapsíquicas, passa de atividade a objeto produzindo as imagens conceituais.

6 CONCLUSÃO

> Você não pode ensinar nada a um homem; você pode apenas ajudá-lo a encontrar a resposta dentro dele mesmo (Galileo Galilei).

Ao tomarmos por base o pressuposto do materialismo histórico dialético, consideramos nesta investigação a imagem conceitual como o ponto de partida e também o de chegada da ascensão do abstrato ao concreto. Por isso, iniciamos no capítulo dois com a síntese da constituição das noções imagem conceitual e imagem definição e, no capítulo cinco, com o pensamento que permitiu elevar o nível de compreensão no desenvolvimento dessas noções.

A parte inicial desta conclusão apresenta algumas reflexões sobre questionamentos do desenvolvimento da imagem conceitual, imagem definição e fatores de conflito. Segue-se com algumas considerações sobre a lógica dialética e uma breve descrição sobre o movimento da pesquisadora-organizadora em atividade de ensino. No final, comentamos a relevância dos recursos metodológicos e apontamos algumas contribuições deste trabalho.

Os estudos sobre imagem conceitual de conceitos científicos iniciada por Tall e Vinner (1981) suscitaram alguns questionamentos que guiaram esta pesquisa. Os autores direcionaram seus estudos da imagem conceitual e da imagem da definição de estudantes evocados em determinado momento. A análise da imagem conceitual evocada sem a análise da sua formação, na sua atividade, não revela a casualidade do fenômeno, seu movimento, sua essência, mas somente sua manifestação. Ao investigarmos a formação das imagens conceituais, pudemos compreender por que se manifesta de determinada forma com determinado conteúdo. No capítulo anterior, pudemos discorrer mais detalhadamente as origens de tais manifestações, vinculadas ao lógico-histórico do ensino escolar. Os principais elementos que constituem a formação das imagens conceituais provêm dos livros didáticos, da cotidianidade e da imagem de realidade dos sujeitos. Em nossa análise, os reflexos da formação inicial dos professores, referente ao curso da graduação, não se revelaram nas imagens conceituais do pensamento numérico investigado.

Concluímos que, para analisar a formação da imagem conceitual, devemos analisar a atividade do indivíduo. A atividade externa realizada pelo indivíduo na relação com o coletivo interage com uma outra, a interna, que possibilita o desenvolvimento psíquico. As imagens conceituais não se formam isoladamente na atividade interna, e sim na interação entre as relações inter e intrapsíquicas. Ao propiciar o desenvolvimento psíquico, também se possibilita o desenvolvimento das aptidões humanas.

Tall e Vinner concluíram que, embora as imagens conceituais se revelem impróprias na aprendizagem da matemática formal, o parcial sucesso do estudante não o estimula a alterar seu modo de pensar a matemática. Consideramos que a imagem conceitual de conceito científico não se destina somente a responder tarefas escolares, mas acima de tudo desenvolver as aptidões humanas constitutivas da imagem de realidade do indivíduo, que medeia suas relações com o mundo.

A justificativa dada pelos autores, de que os estudantes não utilizam as definições matemáticas para resolverem os problemas no contexto escolar, é dada pela formação da imagem conceitual por modos cotidianos de aprendizagem de conceitos. As definições matemáticas, essenciais na análise dos autores, constituíram nesta pesquisa não como elementos principais, mas sim no movimento do próprio conceito, ou seja, uma síntese deste, pois compreendemos conceito, como já mencionado, como movimento, no qual estão presentes formas e conteúdos do pensamento elaborados pelo indivíduo na relação com o outro.

Esta pesquisa forneceu indicadores de que a dificuldade apontada dos estudantes não é devido à desconsideração da definição, e sim como esta se constitui como imagem. A abordagem formalista da matemática no ensino sugere a formação de conceitos por meio da interpretação de definições e, nesta investigação, observamos que essa forma é geradora do pensamento empírico. Para se apropriar de uma definição, o indivíduo tem que reproduzi-la no pensamento por meio de atividade que o permita essa realização. Isso quer dizer que ele precisa se apropriar do conceito, do seu movimento, para poder realizar sua síntese. No curso de formação de professores desta pesquisa, pudemos observar o movimento das sínteses dos conceitos, por exemplo, de número natural, número racional e número real.

Salientamos que a formação da imagem conceitual não é alheia às formações dos conceitos científicos. O que pode ocorrer é o tratamento dado pelo sistema de ensino, contrário a lógica da construção desse conhecimento. Ou seja, a abordagem escolar que consiste em primeiro se aprender as definições, para depois aplicá-las aos problemas, é contrária à produção do conhecimento pela humanidade, que desenvolveu conceitos por meio de problemas. Compreendemos que o ensino formalista mecaniza procedimentos e não proporciona a apropriação dos conceitos.

Quando Vinner (1991) diz sobre o professor decidir a pedagogia, pudemos analisar a interdependência de outros fatores. A decisão não depende somente do professor, que algumas vezes é idealizado, mas também das relações objetivas em que se realiza sua atividade, de professor concreto, historicamente situado. Principalmente pela primeira unidade didática, compreendemos como este ocupa seu lugar social na atividade humana e em que constitui sua concepção de ensino e aprendizagem. Essa última se revelou ligada fundamentalmente ao conhecimento empírico e à concepção de sociedade como totalidade. Com isso, o que seriam as condições humanas para a apropriação do conhecimento científico estão se transformando em objetivo na educação escolar.

Ao pensarmos concretamente na formação da imagem conceitual, não a concebemos somente como capacidade individual, como se o indivíduo fosse o único responsável por essa formação. O indivíduo nasce no mundo de objetivações e por meio deste apreende os objetos e fenômenos. A escola é a responsável pela mediação na apropriação dos conceitos científicos elaborados historicamente.

Por esse motivo, a teoria da atividade, o lógi-histórico do conceito e o materialismo dialéitco contribuíram nesta pesquisa para explicitação de elementos constitutivos da formação da imagem conceitual e as possibilidades da apropriação do conceito matemático.

As formas de pensamento da lógica dialética foram indicativas tanto para compreender a formação das imagens conceituais como para organizar o processo ensino. Um exemplo de forma e conteúdo constituiu-se na unidade didática do sistema de numeração, cujo conteúdo era a quantificação de grandezas discretas. A forma se realizou na organização de idéias e representações mentais para controlar a variação de quantidade. Outro movimento da forma se realiza nas expressões, por meio das formas socialmente elaboradas que permitem a comunicação. Outro exemplo refere-se à reta. O conteúdo desse conceito envolve um pensamento teórico próprio como: pontos sem dimensão, entre dois pontos existem infinitos pontos, os pontos são ordenados etc. O traçado com lápis não é o objeto matemático, é uma forma de comunicação que sintetiza o conteúdo de um pensamento que constitui o conceito de reta. Os níveis de forma e conteúdo vão se alterando com a complexidade do sistema de relações. Por exemplo, a bijeção dos pontos da reta com os números reais pode não ter se constituído como conteúdo na mente, na significação particular coerente com a significação historicamente elaborada, mas somente como uma forma lingüística na qual seu conteúdo mental é a própria interpretação da forma, característico do pensamento empírico.

Outras formas de pensamento estiveram presentes como o lógico-histórico, empírico-teórico, intuição-dedução. Algumas mais freqüentemente explicitadas neste trabalho do que outras. As situações-problema constituíram-se como mediadora no desenvolvimento mais intensamente de certas formas de pensamento do que outras. Por exemplo, no argumento de Zenão, a relação entre intuição, analogia e dedução pareceu propícia para discutir os processos de dedução matemática, além do conceito de infinito e continuidade. Sugerimos essa hipótese para investigações futuras.

Quanto aos fatores de conflito potencial e cognitivo tratados por Tall e Vinner (1981), também concebemos sua formação na atividade externa. Compreendemos que os dilemas e as confrontações ocorridas na inter-relação do coletivo, no movimento conceitual, são elementos que permitem o desenvolvimento da consciência do processo de constituição do conhecimento para si. Citamos o conceito de sucessor, abordado na unidade didática densidade, comensurabilidade, incomensurabilidade. Os juízos apresentados de que no campo racional um número tem infinitos sucessores e no campo dos inteiros somente um puderam ser confrontados no processo de apropriação desse conceito.

A imagem da definição de racionais foi um outro exemplo de dilema que, no contexto gerado pelo experimento do pi, permitiu a confrontação de uma divisão de racionais com a possibilidade desse resultar um número irracional.

O dilema, como o compreendemos, tem seu fundamento na conscientização de limitação de um conhecimento e na formação de um sistema de juízos contraditórios, que não podem coexistir. O confronto entre idéias ou juízos na consciência originários de um dilema permite a superação de um conhecimento. No exemplo citado sobre o sucessor, o dilema de um racional ter vários sucessores e o sucessor ser $n+1$, n inteiro, pôde ser confrontado pelo indivíduo que resultou na compreensão do conceito nesse sistema de relações.

O desenvolvimento particular desta investigação evidenciou os nexos conceituais de um determinado conceito, a reta real, num determinado percurso, do pensamento numérico constituído com certos indivíduos. Uma proposta que partisse diretamente do conceito de continuidade da reta real talvez pudesse constituir outro modo de promover a apropriação desse conceito. Dependendo da mediação, das imagens conceituais dos indivíduos, poderia mesmo remeter aos números naturais, como na história da formalização desse conceito.

Sugerimos esta como uma hipótese a ser investigada. Outra possibilidade seria remeter ao campo dos irracionais, como ocorreu nesta investigação, mas com o avanço no estudo desses números para a apropriação dos números algébricos e transcendentes.

Um movimento conceitual identifica os nexos conceituais na dependência do movimento do próprio coletivo e do próprio conceito, pois este não é estático nem acabado, por isso não se esgota e depende de seu sistema de relações. O seu grau de ligação depende também da apropriação, ou seja, pensar que a base do número real seja o número natural pode ser inconcebível para uns, mas, para o movimento da formalização, foi essencial. Por isso, quanto mais nos apropriamos do movimento lógico-histórico de construção do conhecimento, melhor compreendemos a atividade humana.

Nesta investigação, o desenvolvimento da consciência da atividade humana e os princípios humanizadores guiaram a elaboração e realização do curso de formação contínua com professores do Ensino Fundamental e Médio. A escolha de nos integrarmos no movimento de formação do professor, por meio do curso oferecido pela Secretaria do Estado de São Paulo, não significa que as condições de formação contínua de professores atuais sejam as melhores, e sim que nos forneceu um isolado da realidade que propiciou a fidedignidade da investigação. Por esse motivo, a necessidade da pesquisa se submeteu ao movimento social e não ao contrário.

Interpretamos que esse modo de pesquisa, caracterizada também por princípios da pesquisa-ação, potencializou a transformação das práticas educativas, como da formação do sujeito histórico professor de matemática.

A realização do curso permitiu a avaliação dos recursos metodológicos utilizados para o ensino e a pesquisa. A atividade orientadora de ensino nesta investigação permitiu a compreensão desta à medida da sua realização, no seu próprio movimento. Essa atividade foi evidenciando suas necessidades e formando motivos gerais e particulares. A necessidade geral se caracterizou pela contribuição ao processo formativo do professor em termos pedagógicos e conceituais. Estes geradores de motivos para a interação coletiva na avaliação de procedimentos pedagógicos para apropriação dos conceitos matemáticos historicamente elaborados. Com a finalidade de transitar de uma matemática industrial para uma matemática educacional.

Os procedimentos pedagógicos fundamentados no lógico-histórico e na atividade orientadora de ensino propiciaram a mediação adequada à reprodução do conceito, elaborado historicamente, pelo indivíduo, ou seja, o processo de formação e desenvolvimento das imagens conceituais. Essa mediação revelou-se propícia tanto para o desenvolvimento de juízos, conceitos, formas de pensamento como pelos dilemas e pelas confrontações promotoras do desenvolvimento de aptidões humanas próprias do conceito.

As necessidades da atividade orientadora de ensino foram surgindo na elaboração de cada encontro de cada situação-problema, gerando os motivos e as intencionalidades de compartilhar um movimento conceitual. A organização das ações, por encontro e por unidade didática, foi refletida na dinâmica de constituição dos planos de ação para atingir o objetivo no tempo disponível, com as intervenções ocorridas, na diversidade de uma sala de aula. Um dos motivos de realizar a pesquisa em um curso foi justamente essa: a semelhança com a sala de aula, apontando assim possibilidades de realização com os estudantes.

Por meio das análises do lógico-histórico do ensino escolar da matemática, identificamos a influência de processos de pensamento que estiveram muito tempo no sistema de ensino, provenientes do movimento da matemática moderna, no qual o formalismo foi admitido como forma ideal de apropriação de conceitos, em um nível elevado de desenvolvimento. Hoje, compreendemos melhor essa realidade do próprio desenvolvimento humano, das instituições educativas, da formação de professores, da sociedade. Por compreender melhor, necessitamos transformá-las também para nos constituirmos sujeitos.

Para isso, investimos esforços para nos apropriarmos do modo humano de produzir matemática. Ao encaminharmos no curso o pensamento numérico, outros campos da própria matemática estiveram presentes, bem como de outras áreas hoje desmembradas, o que um dia constituiu-se o campo da filosofia. A ligação da filosofia com a matemática foi abandonada na abordagem lógico-formal do sistema educativo, a sua origem foi descartada e, com ela, a capacidade de pensar dialeticamente. Ao buscarmos um currículo educacional, concebemo-lo fundamentado no desenvolvimento do conceito, que compreende pensá-lo, discuti-lo na sua multiplicidade de relações, na lógica do pensamento.

As ações da atividade orientadora de ensino permitiram tanto observar o conceito em movimento – as imagens conceituais – na inter-relação indivíduo-coletividade, quanto analisar uma zona de possibilidades para novas discussões e propostas de aprofundamento. Conseqüentemente, pudemos abordar a certeza do conhecimento inacabado e da permanência de zonas de possibilidades na totalidade das relações da realidade.

As zonas de possibilidades particulares, descritas nas unidades didáticas para o desenvolvimento do pensamento numérico, também constituem uma zona de possibilidades de investigação. Dentre elas, destacamos o movimento conceitual da formação do campo racional e do sujeito histórico.

Além disso, investigar reflexos da abordagem deste curso na vida dos sujeitos, na formação dos seus sentidos pessoais, seria uma contribuição valiosa tanto para a sua formação quanto para sistema de ensino.

Desenvolver uma atividade orientadora de ensino exige pesquisa e estudo, condições que são subtraídas da maioria dos professores das escolas públicas. Muitas vezes, a única oportunidade que eles têm são os cursos de formação oferecidos pelas secretarias de educação, que por outro lado subtraem seu escasso tempo livre. As condições sociais para o desenvolvimento da atividade orientadora a regulam, principalmente por que respeita as condições humanas.

As condições objetivas na sociedade atual, por vezes, acabam por minar o movimento do pensamento e, conseqüentemente, da imagem conceitual em direção à apropriação humanizadora da cultura e a livre objetivação. Características essas de constituição da autonomia da produção do conhecimento para si. O processo de consciência das condições objetivas pode mudar a relação do indivíduo com a realidade e consequentemente modificá-la.

A conscientização do modo de produção do conhecimento constituiu um processo no curso. Inferimos assim, por algumas manifestações nas discussões e na avaliação, que houve ao menos uma tomada de consciência desse processo. O confronto com o lógico-formal foi uma característica que pôde permitir o desenvolvimento da constituição do sujeito.

Pensar na própria atividade orientadora requer pensar na atividade humana como princípio. Libertar o pensamento das condições institucionais realizou-se em certos limites, tanto para os professores quanto para pesquisadora, produtos sociais do currículo industrial.

A atividade humana requer pensar na coletividade, na integração do coletivo que potencializa as possibilidades de humanização. Nesse curso, a integração dos sujeitos nas propostas formou indícios dessa formação, que promoveu a diversidade das soluções, o desenvolvimento da consciência da produção do conhecimento e o encaminhando do próprio curso. O movimento de pensar coletivamente caracterizou-se na interdependência da manifestação que cada indivíduo realiza ao refletir sobre a manifestação do outro na direção do mesmo objetivo, desenvolvendo assim a multilateralidade de aspectos que compõe a atividade educativa.

A complexidade de investigar um fenômeno no seu movimento desencadeou também uma organização diferenciada da exposição dos dados neste texto. A descrição das unidades didáticas, por meio da intertextualidade, permitiu relacionar a heterogeneidade textual com a heterogeneidade do movimento humano em que se compuseram os dados do curso. Além disso, localiza também o leitor do lugar do pesquisador-organizador no processo. Ao buscarmos refletir no texto o movimento do coletivo, das imagens conceituais, da interpretação destas em determinados momentos e como elas se transformam no coletivo, evidenciamos a não linearidade da produção do conhecimento e, conseqüentemente, da imagem conceitual.

A dimensão horizontal da intertextualidade permitiu avaliar o movimento do coletivo, a exposição das produções e ações; e a vertical, a relação com o lógico-histórico do conceito e da educação escolar, por meio dos textos historicamente ligados. Outras interpretações podem ser realizadas por meio das situações apresentadas e, com isso, avançarmos no conhecimento, característica soberana da produção científica.

Com esse recurso, qualificamos uma forma de constituição textual que evidencia o educador que investiga sua atividade.

Com isso, consideramos este trabalho como contribuição no processo formativo do educador matemático que promove na escola a apropriação dos conceitos científicos.

A formação da imagem conceitual como a investigamos, no ambiente educacional com os instrumentos metodológicos para a prática de ensino, constituem possibilidades para a transformação da qualidade do ensino escolar público no desenvolvimento humanizador.

O percurso do desenvolvimento dos conceitos matemáticos sobre os números, desde a formação da sua base até os números complexos, buscou o desenvolvimento do pensamento numérico do educador. Com isso, apresentamos contribuições na formação inicial e continuada de educadores matemáticos.

Caracterizamos o método de investigação, na articulação com os aportes teóricos, uma contribuição às noções de imagem conceitual e imagem da definição, fundamentalmente, no seu processo formativo.

REFERÊNCIAS

ALBADALEJO, I. R. *La introducción del número real en enseñanza secundaria: una experiencia de investigación-acción*. Granada: Mathema colección, 1997.

ALPHONSE, M. Problémes didactiques liés aux écritures des nombres. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, Genoble, v. 15 n. 2, p. 31-62, 1995.

ANDREA, E. I. S. *Aritmética prática e geometria 1ª classe: Ensino secundário oficial*. Lisboa: Imprensa Nacional, 1910

ANDREA, E. I. S. *Complementos de álgebra: Apêndice aos Elementos de Álgebra da 3ª classe. Ensino secundário oficial. 4ª e 5ª classes*. Lisboa: Imprensa Nacional, 1909.

ANDREA, E. I. S. *Complementos de álgebra: Apêndice aos Elementos de Álgebra da 3ª classe. Ensino secundário oficial. 4ª e 5ª classes*. Lisboa: Imprensa Nacional, 1914.

ANDREA, E. I. S.; SILVA, L. M. P. *Compêndio de geometria: volume 1 geometria intuitiva e experimental classes I e II.* Lisboa: Imprensa Nacional, 1920.

APPLE, M. *Manuais Escolares e Trabalho Docente*. Lisboa: Didática Editora, 2002.

ARCAVI, A.; BEM-AVI, R.; BRUCKHEIMER, M. *História da matemática para professores: o caso dos números irracionais*. Série Reflexão em Educação Matemática, MEM/USU, v. 2, p.11-24, [19--].

ARTIGUE, M. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: Gómez, P. (Ed.). Ingeniería didáctica en educación matemática. México: Grupo editorial Iberoamérica S. A., 1995. p. 97-140.

ASBAHR, F.S.F. *Sentido pessoal e projeto politico pedagógico: análise da atividade pedagógica a partir da psicologia histórico-cultural*. São Paulo, 2005. Dissertação (Mestrado em Psicologia) – Instituto de Psicologia, Universidade de São Paulo.

ÁVILA, G. Grandezas incomensuráveis e números irracionais. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 5, p. 6-11, 1984.

ÁVILA, G. Os paradoxos de Zenão. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 39, p. 9-16, 1999.

BERNARDES, M. E. M. *As ações na atividade educativa*. 2000. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

BERNARDES, M. E. M. *Mediações simbólicas na atividade pedagógica: contribuições do enfoque histórico-cultural para o ensino e aprendizagem*. 2006. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

BLOCH, I. *Approche didactique de l'enseignement des premiers concepts de l'analyse*. Bordeaux, 1995. DEA (Didactique des Mathématiques), Université de Bordeaux I.

BOURBAKI, N. *Elements of history of mathematics*. Berlin: Springer-Verlag, 1994.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgar Blucher, 1993.

BRASIL. MEC. (1998b). *PCN de 5ª a 8ª série*. Brasília: MEC/SEF. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2006.

BRASIL. MEC. (2000). *PCNEM.* Brasília: MEC/SEF. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf >. Acesso em: 23 mar. 2006.

BROLEZZI, A. C. *A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino de matemática.* 1996. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

CALADO, J. J. G. *Compêndio de Álgebra: 3º, 4º e 5º ano Ensino liceal 2º ciclo*. Lisboa: Livraria Popular Francisco Franco, 1954.

CALADO, J. J. G. *Compêndio de Álgebra: 3º, 4º e 5º ano Ensino liceal 2º ciclo*. Lisboa: Livraria Popular Francisco Franco, 1956.

CARAÇA,B.J. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática Ltda,1998.

CATALANI, E. M. T. *A inter-relação forma e conteúdo no desenvolvimento conceitual de fração.* 2002. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

CEDRO, W. L. O espaço de aprendizagem e atividade de ensino: o clube de matemática. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

CHEPTULIN, A. *A dialética materialista: categorias e leis da dialética*. São Paulo: Alfa-omega, 1982.

COBIANCHI, A. S. *Estudos de continuidade e números reais: matemática, descobertas e justificativas de professores*. 2001. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

COSTA, A. A.; ANJOS, A. O.; LOPES, A. A. *Matemática Jovem 9º ano de escolaridade*. Porto: Porto Editora, 1983.

COSTA, M. A. *As idéias fundamentais da matemática*. Rio de Janeiro: Bibliotheca Scientifica Brasileira, 1929.

COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é a matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

CRESPO, J. S. *Matemática Aritmética e Geométria: Exercícios 1*. Porto: Porto Editora, [1966?].

CRESPO, J. S. *Matemática Aritmética e Geométria: Exercícios 2*. Porto: Porto Editora, 1971.

DANTZIG, T. *Número: A linguagem da ciência*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970.

DAVÍDOV, V. *La enseñanza escolar y el desarrollo psiquico*. Havana: Editorial Progresso, 1988.

DEDEKIND, R. *Essays on the theory of numbers*. New York: Dover Publications Inc., 1963.

DIAS, M S. *Reta real: conceito imagem e conceito definição*. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro das Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

DIAS, M. S.; COBIANCHI, A. S. Correlação do lógico e do histórico no ensino dos números reais. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7. 2004, São Paulo. Anais... São Paulo: FEUSP, 2004. 1 CDROM.

DIAS, M. S.; MOURA, M. O. A atividade de ensino e a constituição do professor de matemática como sujeito histórico. In ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15, Monte Gordo: Portugal, 2006. *Anais*... em fase de publicação.

DOMINGOS. A. M. D. *Compreensão de conceitos matemáticos avançados: a matemática no início do superior*. 2003. Dissertação (Doutorado em Ciências de Educação) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

DOUADY, R. Approche des nombres reels en situation d'apprentissage scolaire - enfants de 6 à 11 ans. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, Genoble, v. 1.1, p. 77-111, 1980.

DREYFUS, T. et al. Advanced Mathematical Thinking. In: NESHER, P.; KILPATRICK, J. (Ed.). A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education, *ICMI Study Series Mathematics and Cognition*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990, p. 113-134.

DUARTE, N. *A individualidade para si – Contribuição a uma teoria histórico-social da formação do indivíduo*. Campinas: Autores Associados, Coleção educação contemporânea, 1993.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

FAIRCLOUGH, N. *Discurso e mudança social*. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2001.

FREIRE, P. *A Pedagogia do Oprimido*. São Paulo: Editora Paz e Terra, 1987.

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Editora Paz e Terra, 2002.

FREIRE, P. SHOR, I. *Medo e Ousadia – o cotidiano do professor*. São Paulo: Editora Paz e Terra, 2001.

GATTI JR, D. *A escrita escolar da história: livro didático e ensino no Brasil (1970-1990)*, Bauru: EDUSC, Uberlândia: EDUFU, 2004.

GIOVANNI, J.R., GIOVANNI JR., J.R & BONJORNO, J.R.. *Matemática Fundamental*, 2º grau, volume único. São Paulo: FTD, 1994.

GIOVANNI, J.R., GIOVANNI JR., J.R & CASTRUCCI, B. *A Conquista da Matemática*, v. 7. São Paulo: FTD, 1998.

GIOVANNI, J.R., GIOVANNI JR., J.R & CASTRUCCI, B. *A Conquista da Matemática*. v. 8, São Paulo: FTD, 1998.

GOLDER, M. (org.) *Leontiev e a psicologia histórico-cultural: um homem em seu tempo*. São Paulo: GEPAPe: Xamã, 2004.

GUILLEN, M. *Pontes para o Infinito: o lado humano das matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1987.

HOGBEN, Lancelot. *Maravilhas da matemática*. Porto Alegre: Globo, 1970.

IFRAH, G. *Os números: a história de uma grande invenção*. São Paulo/SP, 9ª. Edição, Editora Globo, 1998.

KLEIN, L. R. *Alfabetização: Quem tem medo de ensinar?*. São Paulo: Ed. Cortez/Ed. UFMS, 1997.

KLINE, M. *El pensamiento matemático de la antiguidad a nuestro días*. Madrid: Alianza Editorial S. A., 1992.

KOPNIN, P. V. *A dialética como lógica e teoria do conhecimento*. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

KOSIK, K. *Dialética do concreto*. São Paulo: Paz e Terra, 2002.

LENIN, V. I. Cuadernos Folosóficos. Buenos Aires: Estudio, 1963.

LANNER DE MOURA, A R.; SOUSA, M.C. O lógico-histórico: uma perspectiva didática da álgebra na formação de professores. In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO, 11, 2002, Anais…1 CDROM.

LEONTIEV, A. *Atividad, conciencia, personalidad*. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1983.

LEONTIEV, A. N. Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: VIGOTSKII, L.S; LURIA, A. R. e LEONTIEV, A. N. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem*. São Paulo: Ícone/Editora da Universidade de São Paulo, 1988.

LEONTIEV, A. *O desenvolvimento do psiquismo*. Lisboa: Horizonte universitário, [1964?].

LIMA, L. C. Currículo: mecanismo e personalidade na aprendizagem da matemática. In: BITTENCOURT, A. B.; OLIVEIRA JR., W. M. *Estudo Pensamento e Criação*. Campinas: FE-UNICAMP, 2005. p.185-206.

LIMA, L. C.; MOISÉS, R. P. *A fração: a repartição da terra.* São Paulo: CEVEC/CIARTE, 1998.

LIMA, L. C.; MOISÉS, R.P.; TAKAZAKI, M. *Momento de criar matemática: contando com coisas*. São Paulo: CEVEC/CIARTE, 1994.

LIMA, L.; MOISÉS, R. P. *Número real: à procura do infinitamente pequeno*. São Paulo: CEVEC, [1998].

LINTZ, R. G. *História da Matemática*. Blumenau: Ed. da FURB, v. 1, 1999.

LOPES, A. R. L. V. *A aprendizagem docente no estágio compartilhado*. 2004. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

MARTINS, L. M. A natureza histórico-social da personalidade. *Cadernos Cedes*, Campinas, v. 24, n. 62, p. 82-99.

MOISÉS, R. P. *A resolução de problemas na perspectiva histórico-lógica: o problema em movimento*. 1999. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

MONTEIRO, A. A.; PAULO, J. S. *Aritmética Racional*. Lisboa: Livraria Avelar Machado, 1945.

MOURA, M. O. *A construção do signo numérico em situação de ensino*. 1992. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo.

__________. de. A educação escolar como atividade. In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICA DE ENSINO, 9. 1998, Águas de Lindóia. *Anais II: olhando a qualidade do ensino a partir da sala de aula*. São Paulo: Vozes, 1998. p. 510-528.

__________. A atividade de ensino como ação formadora. In: CASTRO, Amélia Domingues e CARVALHO, Ana Maria Pessoa de (org.) *Ensinar a ensinar*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning Ltda, 2001. p. 143-162.

__________. A atividade de ensino como unidade formadora. *Bolema*, Rio Claro, n. 12, 1996. p. 29-43.

__________. O educador matemático na coletividade de formação. In: TIBALLI, Elianda F. Arantes e CHAVES, Sandramara Matias (org.). *Concepções e práticas em formação de professores: diferentes olhares*. Rio de Janeiro: DP&A, 2003.

__________. *O educador matemático na coletividade de formação: uma experiência com a escola pública*. 2000. Tese (Livre Docência em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

__________. Pesquisa colaborativa: um foco na ação formadora. In: BARBOSA, Raquel Lazzari Leite (org.). *Trajetórias e perspectivas da formação de educadores.* São Paulo: Editora UNESP, 2004.

NEVES, M. A. F.& FARIA, M. L. M. *Matemática 9º ano*. Porto: Porto Editora, 2000.

NEVES, M. A. F.; VIEIRA, M. T. C.; ALVES, A. G. *Matemática*, 11º ano, vol. 1. Lisboa: Porto Ed., 1986.

NOBRE, S. Alguns “porquês” na história da matemática e suas contribuições para a Educação Matemática. *Cadernos Cedes*, Campinas, n. 40, p. 29-35.

OLIVEIRA, B. A dialética do singular-particular-universal. In: ENCONTRO DE PSICOLOGIA SOCIAL COMUNITÁRIA, 5. 2001, Bauru. *Anais: O método materialista histórico dialético*. Bauru: ABRAPSO, 2001. p. 16-22.

OLIVEIRA, B. A.; DUARTE, N. *Socialização do saber escolar*. Cortez e Autores Associados: São Paulo, Polêmicas do nosso tempo, n. 18, 1992.

PLUVINAGE, F. Deux questions sur les nombres reels soulevees par l'article de R. Duval. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, v.1, 1988. p. 27-31.

RIBEIRO, A. S. *Compêndio de Álgebra e trigonometria para os anos 4º, 5º e 6º dos liceus.* Lisboa: Livraria Popular Francisco Franco, 1936.

RIBEIRO, A. S. *Compêndio de Matemática para o 2º ano do curso liceal.* Lisboa: Livraria Popular Francisco Franco. 1957.

RIBEIRO, A. S. *Matemática segundo o programa do 1º ano dos liceus*. Lisboa: Livraria Popular Francisco Franco. RIBEIRO, A. S. (1952). *Compêndio de Matemática para o 1º ano do curso liceal.* Lisboa: Livraria Popular Francisco Franco, 1950.

RÍBNIKOV, K. *Historia de las matemáticas*. Moscou: Editorial Mir, 1987.

ROBINET, J. Les réels: Quels modèles en ont les élèves?. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, n. 17, p. 359-386, 1986.

ROMERO, I.; RICO, L. Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didática en secundaria, *Revista Ema*, vol. 4, nº 2, p. 117-151, 1999.

RUBINSTEIN, S. L. *Princípios de psicologia geral*. Lisboa: Estampa Ltda, 1976.

SANTOS, V. de M. *Infinito: concepções e conseqüências pedagógicas*. 1995. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

SERRÃO, M. I. B. *Estudantes de pedagogia e a "atividade de aprendizagem" do ensino em formação*. 2004. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

SFORNI, M. S. de F. *Aprendizagem conceitual e organização do ensino: constribuições da teoria da atividade*. 2003. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

SILVA, J. S.; PAULO, J. D. S. *Compêndio de Álgebra: Ensino liceal 1º tomo 6º ano*. Lisboa: Livraria Popular Francisco Franco, 1963.

SILVA, J.D.; FERNANDES V. S. *Matemática,* Coleção Horizontes, 7ª série. São Paulo: IBEP-Instituto brasileiro de Edições Pedagógicas. 19??.

SILVA, J.D.; FERNANDES V. S. *Matemática,* Coleção Horizontes, 8ª série. São Paulo: IBEP-Instituto brasileiro de Edições Pedagógicas, 19??.

SILVA, J.D.; FERNANDES V. S. *Matemática,* Coleção Horizontes, Curso Completo. São Paulo: IBEP-Instituto brasileiro de Edições Pedagógicas, 19??.

SILVA, L. F. Considerações sobrfe a afirmação do marxismo do século XXI. In: ENCONTRO DE PSICOLOGIA SOCIAL COMUNITÁRIA, 5. 2001, Bauru. *Anais: O método materialista histórico dialético*. Bauru:ABRAPSO, 2001. p. 42-50.

SOUSA, M. C. *A percepção de professores atuantes no ensino de matemática nas escolas estaduais da Delegacia de Ensino de Itu, do Movimento Matemática Moderna e de sua influência no currículo atual*. Faculdade de Educação. 1999. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

SOUSA, M. C. *O ensino de álgebra numa perspectiva lógico–histórica: um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental*. 2004. Tese (doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

TALL, D. O.; SCHWARZENBERGER R. L. E. Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, Derby, v. 82, p. 44-49, 1978.

TALL, D. O.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, v. 12, 1981. p. 151-169.

TAVARES, P. C. *Compêndio de Álgebra e Trigonometria: Aprovado pelo Ministério da Educação Nacional para os anos 4º, 5º e 6º dos liceus*. Porto: Edições Marânus, 1940.

TAVARES, P. C. *Compêndio de Aritmética e Álgebra: Aprovado pelo Ministério da Educação Nacional para os anos 1º, 2º e 3º dos liceus*. Porto: Edições Marânus, 1945.

THIOLLENT, M. *Metodologia da pesquisa-ação*. Cortez: São Paulo, 2003.

TIROSH, D. The role of student's intuitions of infinity in teaching the cantorian theory. In: Tall D. O. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 199-214.

TRISTÃO, E. L. A atividade de educar e a extração de mais-valia: o ensino superior 'capitalista'. In Encontro Brasileiro de Educação e Marxismo, 2. 2006, Cutitiba. *Anais: Marxismo: concepção e método*. Curitiba: UFPR, 2006. CDROM.

VILELA, D. S. *Análise das críticas de Frege a Cantor: a noção de número e o emprego da abstração nas definições*. Campinas, 1996. Dissertação (mestrado em Filosofia) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas.

VINNER, S. Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, Loughborough, v.14, n. 3, p. 293-305, 1983.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, In: Tall D. O. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 65-81.

VYGOTSKY, L.S. *Pensamento e Linguagem*, São Paulo: Martins Fontes, 1987.

ANEXO 1 – Uma demonstração da irracionalidade de π

Uma demonstração da irracionalidade de π

Cerca de um século mais tarde da "Memória" de Lambert, o matemático francês C. Hermite (1822-1901) publicou no journal de Crelle (t. LXXVI) uma demonstração muito elegante da irracionalidad de π, baseada na relação

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \cos\frac{\pi x}{2}\,dx = n!\left[A\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1} + \ldots + L\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1}\right] \qquad \text{(H)}$$

onde n é um número par e os coeficientes $A,\ldots,L$ são inteiros.

Se $2/\pi$ fosse racional, e igual a p/q com p e q inteiros, viria

$$\frac{q^{2n+1}}{n!}\int_0^1 (1-x^2)^n \cos\frac{\pi x}{2}\,dx = Ap^{n+1}q^n + \ldots + Lp^{2n+1}$$

o que é impossível, pois o segundo membro é sempre um inteiro e o primeiro é positivo e menor que 1 para n suficientemente grande, pois

$$0 < (1-x^2)^n \cos\frac{\pi x}{2} < 1, \text{ para } 0 < x < 1 \quad \text{e}$$

$$q^{2n+1}/n! \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Conclui-se assim que π é irracional desde que se prove (H).

Para $f(x) = (1-x^2)^n$, observe-se que as derivadas de ordem superior a $2n$ são nulas e, recorrendo ao desenvolvimento do binómio

$$f(h) = (1-h^2)^n = 1 - nh^2 + \binom{n}{2}h^4 - \ldots + h^{2n}$$

obtem-se $f'(0) = f'''(0) = \ldots = f^{(2n-1)}(0) = 0$.

Para as derivadas de ordem par,

$$f(1+h) = \left[1-(1+h)^2\right]^n = (2h)^n\left(1+\frac{h}{2}\right)^n$$

$$= (2h)^n\left[1 + n\frac{h}{2} + \binom{n}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^n\right]$$

obtem-se $f(1) = f''(1) = \ldots = f^{(n-2)}(1) = 0$ e

$f^{(n)}(1) = n!\,2^n$, $f^{(n+2)}(1) = (n+2)!\binom{n}{2}2^{n-2}, \ldots, f^{(2n)}(1) = (2n)!$.

Sendo n um número par, por sucessivas integrações duplas por partes para $k = 0,1,\ldots,n$, obtem-se

$$\int_0^1 f^{(2k)}(x)\cos\frac{\pi x}{2}\,dx = \left[\frac{2}{\pi}f^{(2k)}(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 f^{(2k+1)}(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}f^{(2k)}(1) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 f^{(2k+1)}(0) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\int_0^1 f^{(2k+2)}(x)\cos\frac{\pi x}{2}\,dx$$

donde se conclui facilmente (H) da equação

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \cos\frac{\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{\pi}f(1) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 f'(0)$$

$$-\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 f''(1) + \left(\frac{2}{\pi}\right)^4 f'''(0) + \ldots \pm \left(\frac{2}{\pi}\right)^{(2n+1)} f^{(2n)}(1).$$

Fonte: http://wwmat.ptmat.fc.ul.pt/aninf/2001/pdf/acetatos/h.jpg acesso 13.11.2006.