MAÍSA PEREIRA PANNUTI

APRENDIZAGEM OPERATÓRIA E ARITMÉTICA INICIAL NA EDUCAÇÃO INFANTIL

Tese apresentada como exigência parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação no Programa de Pós-graduação/Doutorado em Educação. Linha de pesquisa: Educação matemática. Universidade Federal do Paraná.
Orientadora: Profª Drª Maria Lucia Faria Moro

CURITIBA

2007

Para Flávio, Pedro e Ana.

AGRADECIMENTOS

À querida mestra e amiga Maria Lucia Faria Moro, cuja dedicação, sabedoria e amizade propiciaram a realização deste trabalho.

Ao Flávio Pannuti, pelo apoio incondicional e revisão cuidadosa do texto original.

À Vera Miraglia, pelo incentivo e amizade.

À equipe de professoras de educação infantil da Escola Anjo da Guarda, companheiras de trabalho e aprendizagem.

À professora Maria Tereza Carneiro Soares, pelas valiosas contribuições e amizade.

Aos professores do Programa de Pós-graduação/Doutorado da Universidade Federal do Paraná.

À professora Cristina Maranhão, pelo carinho e observações oportunas.

À Lucília Falsarella Pereira, pelo apoio constante e cuidadosa tradução.

Às queridas crianças que participaram do estudo.

Aos meus filhos, que compreenderam.

À minha mãe, por ter plantado a semente.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

O interesse pela investigação sobre os exercícios operatórios na aprendizagem das noções aritméticas iniciais motivou a realização deste estudo. O pano de fundo para a discussão pretendida foi, inicialmente, a ruptura ocorrida na década de 70, com o advento da Matemática Moderna, apoiada em concepções estruturalistas, e conseqüente vinculação estrita das noções iniciais de número ao pensamento lógico, o que levou a uma mudança de paradigma: as crianças não poderiam aprender sobre números sem terem construído a noção de conservação numérica. Posteriormente essa abordagem foi questionada, de modo a ter havido uma desvalorização das atividades lógicas, anteriormente consideradas fundamentais para a construção das noções aritméticas iniciais, com conseqüente ênfase nos aspectos funcionais do número. Neste trabalho é examinado o papel das atividades de classificar e seriar, além daquelas envolvendo a noção de conservação numérica no âmbito do trabalho de matemática na educação infantil, especialmente no que diz respeito à construção das noções aritméticas iniciais. A hipótese examinada é a de que agregar essas modalidades de atividades (também denominadas "exercícios operatórios") ao trabalho de proposição de problemas de estrutura aditiva poderá favorecer a construção de noções aritméticas iniciais. O estudo seguiu modelo experimental com grupo controle, tendo sido realizadas intervenções diferentes para cada grupo: tarefas placebo para o grupo controle, exercícios operatórios para o grupo experimental 1, exercícios operatórios mais soluções de problemas de estrutura aditiva para o grupo experimental 2 e soluções de problemas de estrutura aditiva para o grupo experimental 3. Foram avaliadas as noções de composição aditiva de números e de inversão adição/subtração, além dos problemas de estrutura aditiva; foram exercitadas as noções de seriação, quantificação da inclusão de classes e conservação de quantidades numéricas, além de problemas de estrutura aditiva. Os dados obtidos nas avaliações foram analisados segundo critérios estabelecidos de acordo com os diferentes tipos de realizações dos sujeitos. Foram também analisadas as estratégias utilizadas pelos sujeitos durante as intervenções, não somente em sua qualidade, mas também suas transformações na intervenção. As diversas categorias de estratégias encontradas foram agregadas levando em conta as alterações de realizações detectadas, do que foi possível descrever padrões de alterações (ou ausência delas) para cada noção e/ou soluções dos problemas aditivos. A conexidade entre certos esquemas em jogo na elaboração de noções lógicas e/ou de problemas de estrutura aditiva pode explicar muitos dos resultados obtidos. Porém, tais relações de conexidade não podem ser vistas como se fossem lineares, que se generalizam fácil e automaticamente para todos os casos; tampouco são fechadas, pois requerem sempre acomodação das estruturas dos sujeitos aos objetos de conhecimento a serem assimilados. A hipótese deve ser admitida com restrições: os exercícios operatórios agregados à prática de soluções de problemas de estrutura aditiva podem ser responsáveis por avanços em certas noções lógicas e na solução dos referidos problemas, desde que levadas em conta as conexões entre esquemas e as extensões dos efeitos das intervenções, conforme as peculiaridades de cada noção ou conceito em construção como objeto de conhecimento a ser assimilado por um sujeito específico cujas experiências escolares devem ser lembradas. Algumas implicações para a educação infantil são consideradas.

ABSTRACT

This study was triggered by an interest in investigating the role played by operational exercises in the learning of initial arithmetic notions. The initial discussion background was the radical changes brought in the 70s about by New Math, which was based on structuralist conceptions, and consequently strictly linked initial notions of number to logical thought. New Math caused a change in paradigm: children could not learn about numbers without having first grasped the notion of conservation of numerical quantities. This approach was later put in doubt, and logical activities, which were previously deemed essential to the construction of initial arithmetic notions, were devalued. As a consequence, functional aspects of number were emphasized. This paper examines the role played by classifying and serialising activities, as well as those involving the notion of numerical conservation, in the teaching of maths in pre-school, in particular in relation to the construction of initial arithmetic notions. The hypothesis being tested is that aggregating these activities (also called “operational exercises”) to the proposal of problems of additive structure may aid the construction of initial arithmetic notions. This study followed the experimental model with a control group, in which each group was subject to different interventions: placebo tasks to the control group (CG), operational exercises for experimental group 1 (GE1), operational exercises plus the solution of problems of additive structures for experimental group 2 (GE2), and solution of problems of additive structures for experimental group 3 (GE3). Notions of the additive composition of numbers and of the inversion addition / subtraction, as well as problems of additive structures, were evaluated. Notions of serialization, quantification of class inclusion and conservation of numerical quantities, as well as problems of additive structures, were exercised. The data obtained in the evaluations was analysed against criteria established according to the different types of procedures expressed by the subjects. Strategies used by the subjects in the interventions were also analysed, in view of their quality as well as of their transformations in the intervention. The different categories of strategies found were aggregated in view of the alterations of the procedures detected, from which it was possible to describe patterns of alterations (or absence thereof) for each notion and/or solution of problems of additive structures. The connection found in certain schemata in the elaboration of logic notions and/or problems of additive structures may explain many of the results obtained. However, such connections cannot be seen as if they were linear relations that are easily and automatically generalized for all cases. Neither are they closed, because they always require the accommodation of the subjects' structures to objects of knowledge to be assimilated. The hypothesis must be admitted with restrictions: the operational exercises, together with the practice in solving addition problems may be responsible for the development of certain logic notions and for the solution of arithmetic problems. This is as long as the connections among schemata and the extension of the effects of the interventions are taken into account, according to the peculiarities of each notion or concept in development as an object of knowledge to be assimilated by a specific subject whose schooling experiences must be considered. Some implications to pre-school education are considered.

CAPÍTULO I

DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

A educação infantil é um segmento de escolaridade extremamente fértil em relação à construção de novos comportamentos, sejam eles sociais, afetivos ou cognitivos, sendo a criança dessa faixa etária capaz de estabelecer relações complexas entre os elementos da realidade que se apresenta.

Assim, freqüentar uma classe de educação infantil significa para a criança, além da convivência com seus pares, ter acesso a muitas oportunidades para a construção de novos conhecimentos, graças às ações que exercerá sobre o mundo real.

Dentre os conhecimentos que devem ser construídos nessa etapa da escolaridade, aqueles relativos à matemática ocupam um lugar de destaque, uma vez que estão presentes em muitas das atividades cotidianas realizadas pelas crianças, por exemplo: dividir porções de lanche, distribuir materiais entre os colegas, calcular a distância entre sua posição e um alvo a ser atingido, pensar no trajeto mais curto para se deslocar de um lugar a outro.

Numerosas pesquisas têm apontado a relevância do trabalho de matemática para crianças a partir de três anos, especialmente no que diz respeito à construção da noção de número, seja no que se refere ao aspecto conceitual, seja em relação à compreensão do sistema de notação numérica, podendo-se destacar, entre elas, Zunino (1995), Lerner e Sadovsky (1996), Nunes (1997) e Bideaud (1991).

Todas essas pesquisas têm demonstrado que as crianças, desde muito cedo, elaboram conhecimentos sobre matemática, o que vai ao encontro de nossa experiência profissional na observação de brincadeiras, conversas, resolução de situações-problema que se apresentam no dia-a-dia dos alunos da educação infantil. O que fazer, por exemplo, quando há mais pessoas do que lugares à mesa? Onde se posicionar para que a bola acerte o cesto? Como dividir entre os amigos as balas?

Não parece acertado qualificar a matemática como uma disciplina formalizada que deveria ser reservada apenas aos anos seguintes da escolaridade. A prática pedagógica em escolas de educação infantil da rede particular de ensino permite supor que, desde tenra idade, a maioria das crianças já sabe muito sobre relações matemáticas, uma vez que estão expostas todo tempo a esse gênero de conhecimento.

Assim, uma questão relevante em face das freqüentes críticas ao modelo de ensino de matemática vigente é fundamentalmente pensar como torná-lo significativo para os alunos.

Deixar para os ensinos fundamental e médio a discussão sobre os motivos que levam vários alunos a fracassar nessa disciplina revela-se uma opção desvantajosa, visto que a educação infantil não apenas faz parte da formação escolar das crianças, como também desempenha um importante papel na construção de conhecimentos. Dessa forma, a reflexão sobre os processos de ensino e aprendizagem nessa etapa da escolaridade poderá fazer parte de um quadro de referência sobre como as crianças aprendem matemática, o que aprendem e por que algumas delas não conseguem aprender.

Várias são as propostas metodológicas em relação ao ensino dessa disciplina, sendo que muitas delas têm enfoques bastante diferentes entre si, fato que merece detalhamento.

O Referencial Curricular Nacional para a educação infantil (RCN) (Brasil, MEC, 1998) desaconselha algumas das concepções vigentes que sustentam práticas pedagógicas no ensino e aprendizado da matemática para as crianças de três a seis anos.

A concepção de que se aprende matemática por meio de memorização, repetição e associação é uma das idéias censuradas naquele documento. Exercícios elaborados de acordo com uma suposta complexidade dos conteúdos, ordenados "do mais fácil para o mais difícil" e atividades mnemônicas, com meras repetições de exercícios ganham destaque negativo nesse tipo de abordagem.

O documento critica também concepções segundo as quais os números devem ser sempre associados a quantidades, assim como a elementos concretos da realidade ou à representação de tais elementos por meio de desenhos.

Outra idéia desaconselhada pelos RCN (Brasil, MEC, 1998), embora bastante difundida, é a de que se aprende matemática manipulando materiais concretos para a construção do raciocínio abstrato, havendo dissociação da ação física em relação à ação mental.

Destaca-se negativamente, ainda, a importância exacerbada dada aos jogos como metodologia de ensino de matemática, como se, desprovidos de um elemento desencadeador da construção de algum novo conhecimento e sem nenhuma interferência do professor, pudessem ser provocadores da aquisição de noções matemáticas (Brasil, MEC, 1998).

Por fim, e neste ponto será focada a discussão, o documento desaprova práticas pedagógicas representadas pelas atividades "pré-numéricas", assim entendidas as atividades de classificação e seriação, quando erroneamente elevadas a requisito indispensável para a construção do conceito de número (Brasil, MEC, 1998).

O documento aponta, após criticar as práticas acima citadas, quais os objetivos e os blocos de conteúdos que devem ser trabalhados nessa faixa etária. Os objetivos são:

> • "estabelecer aproximações a algumas noções matemáticas presentes no seu cotidiano, como contagem, relações espaciais etc;
>
> • reconhecer e valorizar os números, as operações numéricas, as contagens orais e as noções espaciais como ferramentas necessárias no seu cotidiano;
>
> • comunicar idéias matemáticas, hipóteses, processos utilizados e resultados encontrados em situações-problema relativas a quantidades, espaço físico e medida, utilizando a linguagem oral e a linguagem matemática;
>
> • ter confiança em suas próprias estratégias e na sua capacidade de lidar com situações matemáticas novas, utilizando seus conhecimentos prévios". (Brasil, MEC, 1998, p.215).

Para alcançar tais objetivos, os blocos de conteúdos estabelecidos são:

“números e sistema de numeração”, “grandezas e medidas” e “espaço e forma”.

Para o desenvolvimento do primeiro bloco de conteúdos (números e sistema de numeração) que ora nos interessa, são destacadas algumas estratégias fundamentais, constituídas pela contagem, notação numérica e resolução de problemas.

Como se pode observar, classificação, seriação e atividades ligadas à noção de conservação de quantidades numéricas não fazem parte dessa lista. Isso porque, para o RCN (Brasil, MEC, 1998), as ações referentes a classificar e ordenar são importantes para quaisquer áreas do conhecimento e não só para a matemática, não sendo necessário nenhum esforço didático para que sejam construídas.

Entre os autores que abordam a questão relativa à mudança de paradigma ocorrida a partir da década de 90, no que diz respeito ao ensino de matemática na educação infantil, Wolman (2000) destaca que durante muitos anos, especialmente nas décadas de 70 e 80, as propostas de trabalho de matemática para crianças, antes do ensino fundamental, tinham como ponto principal a idéia de que não se devia ensinar números e sim propor as já citadas atividades “pré-numéricas”, desconsiderando o conhecimento prévio das crianças sobre o tema.

Ainda segundo a autora, essa idéia estava apoiada em interpretações da teoria piagetiana, segundo as quais não se poderia ensinar números antes da conservação de quantidade numérica estar devidamente construída. Assim, mesmo nas séries iniciais, todo o trabalho de numeração era centrado nos aspectos lógicos da construção do número, em detrimento daqueles ligados a sua aplicabilidade (Wolman, 2000).

Serve de exemplo um documento da Prefeitura do Município de São Paulo (São Paulo, 1985) contendo uma série de sugestões de atividades matemáticas, com um breve comentário teórico antes de cada seqüência apresentada. Nele encontram-se propostas de atividades de seqüências, classificações, seriações, espaço, tempo e quantidades, então consideradas importantes para a construção do conceito de número.

Outros autores brasileiros levantam a mesma questão. Maranhão (2004) relembra as propostas curriculares da época do movimento denominado Matemática Moderna, quando as atividades pré-numéricas eram realizadas com o objetivo de promover o desenvolvimento do pensamento lógico e relacional antes do número propriamente dito ser abordado.

Nessa mesma época houve grande interesse pela teoria psicogenética de Piaget, o que levou muitos educadores a tentar realizar uma aplicação direta da teoria em sala-de-aula, tomando os estágios de desenvolvimento como limites determinantes do que as crianças eram capazes de aprender.

Com isso, parece ter havido uma interpretação bastante limitada da teoria piagetiana, provavelmente fundamentada no aspecto estrutural da psicogênese das categorias lógicas, em detrimento de uma abordagem funcional; atribuindo-se maior importância à teoria dos estágios de desenvolvimento, tal como formulada por Piaget, e descuidando-se da verificação do processo de passagem de um estágio para o outro. A idéia predominante passou a ser a de que, se há estágios definidos com leis próprias de funcionamento, deve-se respeitar o estágio de desenvolvimento de cada indivíduo, não sendo válidas intervenções além das possibilidades de cada um.

Analisando a questão, Nogueira (2002) conclui que não se pode justificar, a partir da teoria piagetiana, o privilégio dado às atividades de classificar e seriar, como pré-requisitos à construção do número. A autora defende a solidariedade entre as atividades lógicas e as numéricas, mesmo considerando a existência de domínios próprios para cada uma delas.

Em nossa experiência pessoal como aluna do ensino fundamental, durante a década de 70, o estudo da matemática esteve pautado pela utilização do livro didático Gruema (Sanchez e Liberman, 1977), e pelas várias atividades complementares de apoio à prática didática dos professores, tais como classificar, seriar e colocar elementos em correspondência termo-a-termo.

Posteriormente, na prática docente como professora de educação infantil, na segunda metade da década de 80, pudemos propor muitas daquelas mesmas atividades, percebendo, ainda que assistematicamente, que instigavam as crianças a pensar e reorganizar suas ações, em função dos problemas que tinham para resolver.

Com a publicação do RCN (Brasil, MEC, 1998), e de pesquisas sobre o ensino de matemática na educação infantil (especialmente na década de 90), esse gênero de atividades parece ter sido subtraído do foco principal dado ao ensino da disciplina, em face de um recuo na ênfase da abordagem estruturalista, inversamente proporcional à valorização dos conhecimentos matemáticos aplicados sobre a realidade. Tal situação está retratada no fato de que os três blocos de conteúdos propostos pelo RCN são: "números e sistema de numeração", "grandezas e medidas" e "espaço e forma".

Em nenhum momento este trabalho discutirá a relevância dos blocos de conteúdos eleitos pelo RCN, pois nossa prática pedagógica permite afirmar sua importância desde a educação infantil, sob a forma de atividades que envolvem situações de quantificação, sistema de numeração, assim como aquelas ligadas à exploração do espaço e à medida.

Pesquisas a respeito da natureza das elaborações aritméticas, realizadas em Genebra pelo Centro Internacional de Epistemologia Genética (na década de 60), apontavam que crianças ainda não ingressadas no ensino fundamental já detinham relevantes conhecimentos a respeito do uso de números e de contagem, antes mesmo de a noção de conservação de quantidade numérica estar desenvolvida. Foi constatada a existência de quase-estruturas numéricas mesmo antes da noção de número ser conceitualizada, o que já justifica a proposta de se trabalhar com contagem e uso dos algarismos desde idades precoces (Gréco, Grize, Papert e Piaget, 1960; Gréco, Inhelder, Matalon e Piaget, 1963; Gréco e Morf, 1962).

Por tudo isso, a discussão que se pretende realizar não buscará questionar a pertinência de tais conteúdos, mas sim investigar a real importância das atividades de classificação, seriação, bem como daquelas ligadas à idéia de conservação de quantidades numéricas na educação infantil.

Por outro lado, não se pretende resgatar práticas antigas por dificuldade em se desligar do passado, tampouco simplesmente descartar experiências passadas, em nome de novas idéias. O que se propõe é a reflexão sobre aquelas práticas e o resgate de seu real significado.

Como colocado anteriormente, durante muito tempo foram propostas a alunos de educação infantil atividades específicas de matemática, tematizadas e descoladas de qualquer conteúdo, envolvendo esquemas de classificar, seriar e estabelecer correspondência termo-a-termo, como se tais esquemas pudessem ser considerados conteúdos matemáticos.

Com isso, no caso específico da classificação, eram propostas atividades cujo objetivo era classificar, sem se importar com o objeto. Pode-se questionar a adequação dessas formas de intervenção, indagando-se qual seria, de fato, o objetivo de uma atividade desse gênero. Classificar para organizar materiais de uma sala-de-aula parece ser uma atividade diferente (ao menos no que diz respeito ao seu objetivo) de outra onde se questione, por exemplo, se há mais maçãs ou mais frutas (noção de inclusão de classes).

Dessa forma, há garantias de que as atividades em que se exercite a noção da quantificação da inclusão de classes ativarão organizadores lógicos responsáveis pela construção das noções lógicas pretendidas?

Seria de fato indispensável a realização de atividades sistemáticas e organizadas de seriação, classificação e outras ligadas à noção da conservação de quantidades numéricas para o aprendizado de noções aritméticas iniciais?

Voltando ao caso particular da classificação, mesmo considerando que indivíduos que nunca foram submetidos a esse gênero de atividades na escola sejam capazes de classificar, indaga-se: será que tal tipo de atividade apropriadamente conduzida na escola não favoreceria a construção de estruturas operatórias, consideradas básicas aos conhecimentos matemáticos?

É o que se pretende investigar neste estudo.

Vergnaud (1991) defende a necessidade da proposição de atividades que tenham a classificação como objetivo, pois, há aspectos da lógica que não são desenvolvidos sem intervenções sistemáticas, devendo ser ensinados na escola. Assim, mesmo que a grande maioria dos indivíduos consiga realizar classificações espontâneas (por exemplo, ao organizar documentos em pastas, ou ao arrumar roupas em um armário), ou sejam capazes de seriar pessoas em uma fila indiana por ordem de tamanho, ainda assim haveria relevantes aspectos lógicos dessas noções a serem desenvolvidos, mediante um processo de ensino e aprendizagem.

Resta verificar se tais aspectos são relevantes para a aprendizagem das noções aritméticas iniciais, ou se são importantes apenas para o desenvolvimento do pensamento lógico de uma maneira geral.

O pano de fundo para a discussão que se pretende realizar está ligado à elucidação da diferença entre conteúdo matemático e organizadores lógicos, estes últimos entendidos como esquemas invariantes que dão sustentação à construção de novos conhecimentos (dentre eles os conteúdos matemáticos). Por exemplo, um dos organizadores lógicos por trás da noção de adição e subtração, refere-se à noção de parte-todo, que evidentemente não precisa ser tematizada com o aluno para que ele possa aprender a somar e subtrair, mas serve como sustentação dessa aprendizagem (Vergnaud, 1990; 1991; 1994).

Assumida a idéia de que classificar, seriar e admitir a conservação de quantidades numéricas são organizadores do pensamento, o conceito de invariante operatório, tal como proposto por Vergnaud (1990; 1994), talvez possa ajudar a elucidar a questão, pois, uma vez aceita a idéia de que por trás de todos os conteúdos matemáticos há organizadores lógicos (esquemas invariantes) que lhes dão sustentação, ao desenvolver conteúdos matemáticos o aluno estaria tendo a oportunidade de refinar cada vez mais esses organizadores.

Dessa maneira, cabe discutir se são as atividades de classificar, seriar e outras ligadas à noção de conservação de quantidades numéricas por si sós, ou a ativação de organizadores lógicos que garantem a construção de noções lógicas? Ou seria uma intervenção adequada do professor, na própria atividade envolvendo estruturas aditivas, o fator responsável pela ativação dos invariantes operatórios e conseqüente aprendizagem de noções aritméticas iniciais?

Em última instância, as atividades de classificar, seriar e de conservar numericamente exercem algum tipo de influência na aprendizagem de noções aritméticas iniciais, ligadas ao campo conceitual "estruturas aditivas", tal como postulado por Vergnaud (1990; 1991)? Haverá diferenças quanto à aprendizagem de noções aritméticas iniciais a favor dos grupos de sujeitos que trabalham com esse tipo de atividade em comparação com os grupos que não o fazem?

Este trabalho tem como ponto de partida a observação de três tipos de atividades envolvendo as seguintes noções: quantificação da inclusão de classes, seriação e conservação de quantidades numéricas. A escolha se deve ao fato de serem justamente as duas primeiras as correspondentes às noções de classe e série estudadas por Piaget, as quais sustentam o desenvolvimento da noção operatória de número, além da conservação numérica, considerada requisito para o domínio pleno da noção de número.

Tais atividades serão denominadas “exercícios operatórios”, segundo as proposições de Inhelder, Bovet e Sinclair (1974) em pesquisa na qual é examinada, dentre outros aspectos, a hipótese da aceleração do desenvolvimento cognitivo, ao se provocar a aprendizagem de noções. Uma das condições para que isso possa acontecer são os exercícios operatórios, que têm o papel de potencializar a ação espontânea do sujeito, ao lhe permitir aprender em um contexto planejado por meio da reorganização de esquemas.

Se, por um lado, são criticadas propostas metodológicas que se utilizam de tal gênero de atividades, sustentadas pela idéia de que são pré-requisitos para a construção do conceito de número, por outro, as noções de classificação, seriação e conservação de quantidades numéricas são consideradas importantes para qualquer área do conhecimento, e não somente para a matemática. Algumas pesquisas sustentam ainda a convicção de que tais noções não precisariam ser trabalhadas sistematicamente, uma vez que seriam capacidades naturalmente desenvolvidas no decorrer do desenvolvimento individual.

Dessa forma, impõe-se o aprofundamento da discussão sobre o efetivo papel das atividades de classificar, seriar, além daquelas envolvendo a noção de conservação de quantidades numéricas no âmbito do trabalho de matemática na educação infantil, especialmente no que diz respeito à construção das noções aritméticas iniciais.

Parece fundamental investigar, ainda, possíveis diferenças na aprendizagem de noções aritméticas iniciais em desfavor dos grupos que não trabalham com essa modalidade de atividade.

Nossa hipótese é que agregar essas modalidades de atividades, doravante denominadas “exercícios operatórios”, ao trabalho de proposição de problemas de estrutura aditiva poderá, sim, favorecer a construção de noções aritméticas iniciais.

CAPÍTULO II

REVISÃO DE LITERATURA

Será apresentada a seguir a revisão de literatura realizada, a qual consiste em um apanhado das principais contribuições examinadas para enriquecer o tema sob investigação. Em primeiro lugar, será apresentado um breve histórico das concepções vigentes sobre a construção do conceito de número, desde 1954 até os dias atuais.

Em seguida, serão expostos alguns aspectos do movimento denominado Matemática Moderna, por meio do trabalho de Z. P. Dienes, um dos principais expoentes do movimento. Além disso, serão também apresentadas algumas críticas a seus trabalhos, assim como aos pressupostos da Matemática Moderna.

Na terceira parte, será exposta uma síntese dos resultados de Piaget e Szeminska (1971) a respeito da gênese do número. Também há resultados relativos às pesquisas realizadas no final dos anos cinqüenta e início dos anos sessenta no Centro Internacional de Epistemologia Genética em Genebra, examinando não somente a gênese do número do ponto de vista lógico, mas do ponto de vista da construção das relações aritméticas.

Na quarta parte, algumas abordagens a respeito da relação entre lógica e matemática serão expostas, para em seguida serem apresentados aspectos da teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud, os quais podem contribuir para a sustentação deste trabalho.

Finalmente, serão apresentados aspectos teóricos que permitirão embasar a concepção de noções aritméticas iniciais assumida neste trabalho.

1. Construção do conceito de número: aspectos históricos

Ainda que não se tenha por objetivo uma análise detalhada da história do ensino de números na educação infantil, é importante considerar a existência de dois momentos bem distintos no que diz respeito ao ensino dessa noção, os quais influenciaram de maneira marcante o desenrolar das propostas pedagógicas para as crianças em fase inicial de escolaridade.

Para tanto, serão tomadas como ponto de partida algumas publicações do Institut National de Recherche Pédagogique (INRP, 1988, 1995), de autoria de uma equipe formada por pesquisadores e professores franceses de séries iniciais, abordando a questão da construção do número por crianças entre cinco e sete anos, ao fazer uma breve análise do tema no decorrer da história do ensino da matemática na França. Tais publicações permitirão formar um pano de fundo para a discussão teórica pretendida.

Segundo a equipe do INRP, podem ser demarcados dois momentos na história do ensino dos números: o primeiro, compreendendo o período entre 1945 e 1970, marcado por uma concepção empirista, segundo a qual a aprendizagem dá-se por meio da experiência e da observação, partindo-se de conhecimentos mais simples e concretos para gradativamente se chegar aos mais complexos e formais. De acordo com esta posição, a repetição de exercícios como maneira de fixação de conteúdos tem grande destaque nas propostas pedagógicas.

Além disso, o número é considerado uma "coisa" que, como tal, deve ser dada a conhecer, mediante a apresentação de coleções de objetos e a proposição de atividades de formação do número por meio de representação figurativa, além de sua decomposição em conjuntos. Tem-se como pressuposto que se aprende primeiro para aplicar depois, não se colocando o aspecto cardinal nem o ordinal dos números. Especificamente em relação à educação infantil, esta etapa da escolaridade é considerada um ensaio geral para o ensino fundamental (INRP, 1995)

O segundo momento, a partir de 1970 e conhecido como movimento da Matemática Moderna, traz como idéias principais a importância do manuseio de materiais concretos, da correspondência termo-a-termo, das atividades de classificação e ordenação, além da noção de número natural, tudo isso com ênfase em concepções estruturalistas, por inspiração nos trabalhos de Piaget.

Assim, segundo os autores (INRP, 1995), a partir de 1970, solidifica-se a idéia de preparação para o estudo dos números, com ênfase nas atividades pré-numéricas (classificação, agrupamentos segundo diferentes critérios, correspondência termo-a-termo) nas propostas pedagógicas para a educação infantil. Segundo o texto, tais atividades podem ser interessantes para o desenvolvimento do pensamento lógico por si mesmo, mas não para a construção do número.

Segundo a equipe do INRP, ainda que tenham sido delimitados esses dois momentos (o primeiro entre 1945 e 1970; o segundo a partir de 1970), não houve uma verdadeira ruptura em termos de concepções de aprendizagem entre os períodos citados, uma vez que ambos postulam a aprendizagem de conceitos como pré-requisitos para a resolução de problemas.

Tem-se assim, como base da discussão que se pretende realizar, que o ensino de matemática, ou mais especificamente, o ensino das noções aritméticas iniciais sempre foi, e continua sendo, marcado pela concepção teórica vigente na comunidade docente em um determinado momento. Nossa intenção será, dentre outras, tentar elucidar parte da discussão teórica ocorrida no momento em que o número em si deixou de ser objeto de ensino e de aprendizagem na escola, para que outros tipos de atividades ocupassem o seu lugar.

2. O movimento da Matemática Moderna e suas implicações no trabalho com números

Durante as décadas de 60 e 70, um dos autores que exerceu forte influência sobre o ensino da matemática no Brasil foi Zoltan P. Dienes, sendo que muitas das propostas vigentes na época tinham como base seus trabalhos. Em relação à questão da construção do conceito de número, Dienes propõe uma série de situações anteriores ao desenvolvimento da noção numérica propriamente dita, especificamente, o ensino de conjuntos às crianças antes do ensino de números (Dienes, 1966).

Para o autor, discutir com as crianças se um elemento pertence ou não a um conjunto, refletindo sobre suas propriedades, leva ao desenvolvimento do pensamento lógico. O estudo das operações sobre conjuntos (reunião de conjuntos; intersecção de conjuntos; conjuntos complementares; diferença de dois conjuntos) é essencial como preliminar ao estudo das operações com números. Dessa maneira, quando se passa dos conjuntos aos números, muda-se de universo: do universo dos objetos ao universo dos conjuntos, havendo aí um salto na abstração, processo facilitado pelo uso de materiais concretos manipuláveis (Dienes, 1967).

Dienes (1966) propõe ainda uma série de situações denominadas "jogos conceituais", os quais teriam como base as idéias de verificar a experiência anterior da criança e a extensão de seus conceitos; reforçar conceitos fundamentais; introduzir e consolidar noções, tais como as cores .

Segundo o autor, para que aprendam sobre propriedades numéricas, as crianças devem praticar correspondência termo-a-termo. É indispensável que possam classificar conjuntos com base na equivalência entre eles, pois antes que as crianças comecem a escrever algarismos que representem tais propriedades numéricas devem praticar a correspondência termo-a-termo. Tal concepção repousa na idéia de que os jogos de correspondência ajudarão a construir a noção de conservação, sugerindo que sejam feitos exercícios sobre essa noção (Dienes, 1966).

Assim, ganham importância as atividades pré-numéricas, havendo uma desvalorização dos conhecimentos dos alunos em relação à récita dos números, considerada atividade mnemônica sem significado para a construção do conceito de número.

Tais propostas trazem implicitamente a idéia de pré-requisito para uma determinada aprendizagem, nesse caso a da noção de número. Para aprender números, a criança deve primeiro manipular materiais que permitam a construção de relações que embasarão tal aprendizagem, considerando que a construção dos conhecimentos matemáticos dá-se paulatinamente, devendo uma etapa ser cumprida para dar suporte à seguinte. Verifica-se assim, nas propostas de Dienes, um verdadeiro paradoxo: aprender sobre números sem poder lidar com eles.

Muitos autores opuseram-se a essa concepção, seja criticando especificamente as propostas de Dienes, seja o movimento da Matemática Moderna em geral.

Freudenthal (1979) considera tal movimento um verdadeiro fracasso, por ter sido baseado em uma falsa perspectiva. Para ele, a Matemática Moderna propunha um encurtamento do processo, sendo trabalhados, por exemplo, na educação infantil, conceitos adiantados e noções matemáticas extremamente formais, concretizadas de maneira absurda.

Ao analisar alguns fenômenos da didática, Brousseau (1998) lança mão de metáforas curiosas para esmiuçar alguns mecanismos específicos da didática da Matemática Moderna. Dentre eles, destaca o que chama de "Efeito Jourdain" (baseado em cena de *Bourgeois Gentilhome*, de Molière), referente ao fato de o professor substituir uma problemática específica por outra, por meio de uma metáfora que não dá sentido correto à situação. Um exemplo disso seria o uso das estruturas matemáticas da maneira como se propunha no movimento da Matemática Moderna, quando o aluno tratava de um exemplo e o professor já identificava ali a estrutura.

Assim, aponta Brousseau (1998), haveria uma confusão no processo psicodinâmico postulado por Dienes, no que diz respeito à estrutura da situação (os jogos propostos), à estrutura da tarefa, ao processo intelectual e ao conhecimento propriamente dito. Nessa perspectiva haveria uma abordagem independente de conteúdos, cabendo ao professor enfatizar situações não específicas da matemática, fornecendo materiais e encorajando seu uso, além de deixar o aluno pensar por si próprio.

Para Brousseau, há um problema grave nessa opção metodológica, pois os jogos de Dienes postulam que as regras propostas ao aluno (para que jogue) são as mesmas que o fazem aprender, de modo que a estrutura do jogo seria então idêntica à estrutura do saber. Assim, a compreensão da regra exigiria, por parte do aluno, o próprio conhecimento que deveria adquirir.

Por seu lado, Vergnaud (1990) lamenta que alguns tenham dado tanta atenção aos problemas de classificação e de categorização, ou que os que participaram da Matemática Moderna tenham sucumbido à "religião da lógica de classes".

Segundo Maranhão (2004), o movimento da Matemática Moderna acentuou a idéia de que a noção de conservação numérica seria a base para a construção do número, gerando o desenvolvimento de propostas de atividades pré-numéricas, centradas nos procedimentos de classificar e ordenar, assim como de construir a conservação, tendo como pano de fundo a convicção da necessidade do desenvolvimento de um pensamento lógico que embasasse a noção de número. A autora lamenta, assim, o fato de que tal concepção tenha gerado verdadeira desconsideração pelo aspecto funcional do número, uma vez que as crianças não podiam lidar com ele antes de ter construído um pensamento lógico que sustentasse aquela aquisição.

Também Brissiaud (2003) aborda essa questão por meio da metáfora de que "se jogou fora o bebê com a água do banho" ao mencionar os efeitos da reforma de setenta. Diz que, ao impedir que as crianças da educação infantil fizessem somas em colunas, acabaram por propor que não realizassem nenhum tipo de cálculo.

Lembra o autor que as atividades pré-numéricas foram inspiradas nos trabalhos de Piaget e Szeminska (1971) e na teoria dos conjuntos, tendo sido o ensino organizado em duas fases: primeiro preparava-se as crianças por meio de atividades que pudessem desenvolver capacidades lógicas mais gerais, para só depois elas poderem trabalhar com os números. Segundo ele, a interpretação de Piaget teria levado muitos pedagogos a defender o abandono do ensino de quantidades ou de números antes da conservação de quantidades numéricas estar construída, fato lamentado pelo autor, uma vez que as representações simbólicas e a comunicação dos adultos são fundamentais no processo de construção da noção de número (Brissiaud, 2003).

As críticas tecidas ao movimento da Matemática Moderna revelam que havia a preocupação de preparar previamente a criança, garantindo pré-requisitos para a aprendizagem do número, algo similar à idéia de prontidão para a alfabetização. Fazendo uma breve analogia com a aquisição da língua escrita, atualmente muitos já adotam uma perspectiva diferente: de acordo com as pesquisas de Ana Teberosky e Emilia Ferreiro (1985), é fato sabido que para aprender a ler e a escrever as crianças devem estar imersas em um ambiente alfabetizador, o qual permite que possam lidar com o próprio objeto a ser construído. No caso da matemática, não seria diferente. Então, como aprender sobre números sem, no entanto, poder lidar com eles?

Ao que tudo indica, na vigência do movimento da Matemática Moderna, houve uma tentativa de aplicação direta da teoria de Piaget na sala-de-aula, à medida que resultados de pesquisas acerca da psicogênese das noções numéricas iniciais transformaram-se em propostas pedagógicas. Assim, quando Piaget e Szeminska (1971) afirmaram ser o número a síntese entre classes e séries (conforme será apresentado adiante), muitos interpretaram que antes haveria que se lidar com tais noções para depois aprender sobre números, não sendo considerada a idéia de desenvolvimento solidário entre noções numéricas e estruturas de classificação e seriação.

Além disso, outro ponto que merecerá atenção neste trabalho é a interpretação realizada, também a partir da teoria piagetiana, do papel atribuído à conservação de quantidade numérica no desenvolvimento da noção de número. Muitas práticas pedagógicas foram elaboradas segundo a seguinte interpretação: só é possível ensinar números para crianças que já tenham construído a noção de conservação de quantidade numérica, que, por sua vez, só é alcançada a partir do momento no qual o pensamento torna-se reversível.

É possível que o fato de Piaget e seus colaboradores terem estabelecido níveis diferentes de respostas das crianças tenha gerado algumas interpretações particulares a respeito dos estágios de desenvolvimento. Talvez a principal delas tenha sido a de que não se pode ensinar números para crianças que ainda estejam em patamares iniciais da construção da noção de conservação de quantidades numéricas.

A lembrar, os autores genebrinos não colocam tal restrição, uma vez que não se detiveram na aplicação pedagógica de seus resultados. Piaget e Szeminska (1971) abordam a idéia de desenvolvimento solidário, correlato e concomitante entre a lógica das classes e das séries e o número, e não de pré-requisito entre as primeiras e o número, como será apresentado a seguir.

Uma vez colocadas essas questões, parece acertado retomar o que, de fato, dizem Piaget e Szeminska (1971) sobre a gênese do número, no sentido de trazer luz à questão.

3. A gênese do número segundo a Escola de Genebra

Pesquisas de Piaget e Szeminska (1971) realizadas nos anos 40, partem da hipótese de que o desenvolvimento da noção de número ocorre paulatinamente, sendo paralelo ao da própria lógica. A estrutura numérica decorre da síntese original de duas estruturas em um único sistema, a das classes e a das séries (ou relações de ordem). Segundo os autores:

> *Não existe, portanto, construção do número cardinal à parte ou do número ordinal à parte, mas ambos se constituem de maneira indissociável (no finito), a partir da reunião das classes e das relações de ordem. E esta síntese de elementos lógicos é ela própria numérica, porque vem a dar em propriedades novas, estranhas às dos "grupamentos" iniciais: a mais importante é a substituição da tautologia A+A=A pela iteração A+A=2A* (Piaget e Szeminska, 1971, p.15).

Os autores partem do princípio de que: "Todo conhecimento, seja ele de ordem científica ou se origine do simples senso comum, supõe um sistema, explícito ou implícito, de princípios de conservação" (Piaget e Szeminska, 1971, p. 23). Assim, a hipótese que guia tais pesquisas é a de que as noções aritméticas se estruturam progressivamente em função das exigências da conservação das quantidades numéricas (não sendo essa última uma organização anterior a toda atividade numérica), visto que a atividade racional implica em uma necessidade implícita de introdução de algum tipo de permanência em sua realização. Segundo os autores, a criança só descobre a quantificação real quando consegue construir totalidades que se conservam.

Dessa maneira, para a compreensão da gênese do número, inicialmente os autores examinam a conservação das quantidades, físicas e numéricas, o que acrescenta elementos importantes à elucidação desse processo. Ao descreverem e analisarem os resultados de suas pesquisas, os autores (Piaget e Szeminska, 1971) constatam a existência de regularidades nas respostas dos sujeitos, o que lhes permite sua categorização de acordo com fases.

Neste estudo importam menos os diferentes tipos de procedimentos, em termos de detalhamento de cada fase, do que o processo do desenvolvimento da conservação de quantidade numérica, uma vez que acreditamos ser este um ponto principal de críticas a respeito da concepção da equipe genebrina.

Em um primeiro momento do processo de desenvolvimento da noção de conservação das quantidades físicas e numéricas, as crianças ainda são incapazes de pensar em termos de quantificação. Isso faz com que concebam relações de comparação entre duas ou mais coleções de elementos em termos de "tem mais" e "tem menos". Predominam, dessa maneira, os aspectos figurativos, em detrimento da possibilidade de coordenação de duas ou mais relações.

Já em uma fase intermediária, começam a conceber a existência de um todo que permanece idêntico, mesmo quando dividido; ou ainda crer na equivalência de duas coleções mediante o estabelecimento da correspondência termo-a-termo, ainda que deixem de acreditar nela assim que os conjuntos tenham seus elementos arranjados de maneira diferente.

A invariância das quantidades só estará presente na terceira fase, quando as crianças já são capazes de, graças à reversibilidade do pensamento, pensar em termos de proporção e composição e decomposição de partes, além da possibilidade de multiplicar relações, o que significa serem capazes de conceber duas ou mais relações ao mesmo tempo.

Sempre que percebe e julga duas ou mais coleções de elementos, inevitavelmente o sujeito atribui qualidades a elas, o que só é possível mediante o estabelecimento de relações, as quais podem ser de dois tipos: as simétricas, as quais exprimem semelhanças; e as assimétricas, as quais exprimem diferenças. Assim diferentes tipos de relações implicam estruturas diferentes, quais sejam a de classe para as relações simétricas e a de série para as assimétricas.

No caso das relações simétricas há uma reunião de termos equivalentes por conta de atributos comuns, por exemplo, fichas azuis e vermelhas são, em última análise, fichas, o que constitui uma classe. Assim, duas classes podem ser reunidas em uma classe total de acordo com suas qualidades comuns.

Já as relações assimétricas, ao contrário, constituem a expressão da diferença e não mais da equivalência; por exemplo, no caso da seriação por tamanho.

Ao examinarem o problema da evolução da correspondência, ou seja, o de comparar quantidades, de imediato os autores partem da hipótese de que a correspondência termo-a-termo por si só não basta para garantir a compreensão da equivalência entre coleções (Piaget e Szeminska, 1971).

Os autores verificam um processo gradual de construção da correspondência, no sentido de que as crianças inicialmente só conseguem estabelecer uma correspondência global, baseada na percepção e, portanto, não quantificante, para depois começarem a crer na equivalência entre duas coleções, mediante correspondência termo-a-termo.

A criança concebe, nessa fase inicial, uma coleção de objetos descontínuos como se fosse um todo contínuo, o que faz com que seu julgamento recaia em aspectos puramente perceptivos, não havendo nenhuma possibilidade de ocorrência de correspondência termo-a-termo, pois a criança só consegue pensar em uma relação de cada vez.

Na fase intermediária, a crença na equivalência entre duas coleções cessa à medida que há uma modificação na configuração espacial, o que não ocorre na terceira fase quando, devido à reversibilidade do pensamento, a criança é capaz de perceber que toda transformação espacial pode ser corrigida por uma operação inversa. Assim, finalmente, a correspondência torna-se operatória, exprimindo igualdade numérica e não mais uma equivalência de ordem qualitativa.

Quando a criança já é capaz de multiplicar relações, por exemplo, no caso dos estudos a respeito da relação da correspondência e da determinação do valor cardinal dos conjuntos, observa-se a possibilidade de coordenar duas relações, nesse caso específico, densidade e comprimento das coleções. Ora, tal coordenação apresenta natureza aditiva e também multiplicativa: isto porque a densidade, ou espaçamento entre os elementos em uma fila, nada mais é do que a sucessão de intervalos que os separam, sendo a soma desses comprimentos dos intervalos idêntica ao comprimento total. Assim, coordenar densidade e comprimento total significa decompor este comprimento em segmentos, o que caracteriza uma seriação aditiva ou adição de relações. Por outro lado, fazer correspondência termo-a-termo significa multiplicar relações, uma vez que se faz duas séries com o mesmo comprimento e a mesma densidade (Piaget e Szeminska, 1971).

Assim, seguem os autores, quando a criança percebe que basta reconstruir as filas, mantendo-se a correspondência para provar que as quantidades se mantêm (o que já começa a acontecer na fase intermediária), ainda se trata de uma correspondência de ordem qualitativa. Mas, quando afirma que a equivalência se mantém, mesmo sem precisar reconstruir as filas, já intervém uma outra operação, mais complexa, de ordem aritmética e não mais qualitativa, o que pode ser explicado pela equalização das diferenças e, portanto, pela introdução (implícita ou não) da noção de unidade.

Dessa maneira, assiste-se ao início da possibilidade de realização da seriação aditiva, quando a criança torna-se capaz de conceber cada elemento de cada coleção como unidades equivalentes, sendo que aquilo que os difere é a ordem da enumeração; ou seja, a correspondência passa a ser explicada pela existência de uma mesma ordem de enumeração em relação a duas coleções de unidades homogêneas. O processo de passagem da correspondência qualitativa à correspondência numérica implica então a construção de unidades iguais entre si e, no entanto, seriáveis, o que acontece por meio da igualização das diferenças. Dizem os autores:

> *As ações executadas formam doravante um sistema de conjunto, do qual a reversibilidade é fonte de constância, e este sistema é, simultaneamente, o princípio de uma generalização das correspondências qualitativas ou coordenações simplesmente lógicas de relações e da correspondência numérica, ou "qualquer", a qual considera cada elemento como uma unidade independente de suas qualidades e, portanto, igual às outras, só diferindo*

delas por sua posição momentânea na seriação. (Piaget e Szeminska, 1971, p.133).

Ao destacar suas conclusões, Piaget e Szeminska (1971) trazem explicitamente uma preocupação sobre a confusão que se pode fazer quanto à filiação do número e a das relações de classe de ordem. A esse respeito, afirmam:

> *Bem entendido, não desejamos com isso pretender que o número se reduza às classes e às relações, mas simplesmente mostrar suas ligações mútuas. É tanto mais necessário prevenir um mal entendido assim por que, como veremos no decorrer do próximo capítulo, a classe não é anterior ao número, mas se conclui ao mesmo tempo que este último e sobre ele se apóia tanto quanto o inverso: sem a noção do número cardinal que intervém implicitamente nos termos "um", "nenhum", "alguns"' e "todos", não se poderia, com efeito, conceber a inclusão das classes umas nas outras: as classes são, portanto, num certo sentido, números não seriados, como os números são classes seriadas, e tanto a constituição psicológica quanto a constituição lógica das classes, das relações e dos números constituem um desenvolvimento de conjunto do qual os movimentos respectivos são sincrônicos e solidários uns com os outros* (Piaget e Szeminska, 1971, p. 219)

Dessa maneira, tem-se que o número pode ser considerado como sendo simultaneamente cardinal e ordinal, uma vez que se trata de um sistema de classes e de relações assimétricas fundidas em um mesmo todo operatório (Piaget e Szeminska, 1971).

Ao colocarem em jogo o exame da construção do número pela descoberta das estruturas aditivas e multiplicativas, os autores estudam a composição aditiva de classes, quando classes parciais são incluídas em uma outra total. Verificam que inicialmente as crianças não conseguem perceber simultaneamente o todo e as partes, ou seja, quando pensam no todo deixam de considerar as partes e vice-versa, o que exprime dificuldade em manejar a relação de inclusão, por falta de reversibilidade do pensamento. Há impossibilidade de decompor um todo e recompô-lo como resultante da composição aditiva das partes. Assim, a criança não concebe a permanência do todo por meio de suas transformações, o que já não ocorre nas fases posteriores, quando passam a pensar simultaneamente na classe total e nas parciais.

Mas, que relação há entre classes e números? Como passar das classes aos números? Há duas condições básicas para que isso aconteça: em primeiro lugar, no caso das classes, se forem tomadas duas subclasses, A´ e A´´, a adição delas será simplesmente A , ou seja, A+A=A (flores de um determinado tipo, mais flores de um outro, serão flores). Já no caso de números, a operação 1+1 terá 2 como resultado, ou seja, A+A=2A (o que significa dizer que no caso das classes não existe a iteração).

Assim, se os termos de uma classe forem considerados equivalentes, porém distintos (mediante uma abstração das diferenças), tal classe poderá ser considerada como um número. Mas, além disso, há que se considerar a segunda condição, que se refere ao princípio da seriação: trata-se de uma adição de diferenças, diferentemente da adição de classes, que é a adição de elementos equivalentes sob um determinado ponto de vista. Afirmam os autores: "Um número é ao mesmo tempo uma classe e uma relação assimétrica, com as unidades que o compõem sendo simultaneamente adicionadas enquanto equivalentes e seriadas enquanto diferentes umas das outras" (Piaget e Szeminska, 1971, p.252).

Em suma, esses resultados de Piaget e Szeminska (1971) mostram que a construção do número dá-se de maneira progressiva, não havendo de saída uma síntese das relações de série e de ordem, mas sim um processo dinâmico de construção paulatina daquele conceito. A noção de número é construída, dessa forma, a partir de uma interpretação da realidade, sendo a quantificação um processo progressivo, cujo ponto de partida é a qualificação absoluta (em termos de "tem muito, tem pouco"), que se refere a categorias de coleções, para depois chegar a uma quantificação intensiva em termos de ordem ("tem mais, tem menos"). Finalmente, é atingido o estágio onde se pode estabelecer as relações quantitativas "mais que, menos que", de ordem assimétrica com reciprocidade.

Alguns anos mais tarde, especificamente no final dos anos 50 e início dos 60, uma equipe do Centro de Epistemologia Genética de Genebra, tendo à frente Piaget, produziu uma série de pesquisas relativas à gênese do número, agora não mais sob o ponto de vista das operações lógicas, mas sim sobre as relações quantitativas que as crianças são capazes de estabelecer independentemente das práticas desenvolvidas na escola. O objetivo era identificar a natureza das elaborações aritméticas básicas das crianças e suas relações com as estruturas lógicas (Gréco, Grize, Papert & Piaget, 1960; Gréco, Inhelder, Matalon & Piaget, 1963; Gréco & Morf, 1962).

O próprio Piaget, no prefácio à terceira edição da obra acima mencionada sobre a gênese do número (Piaget e Szeminska, 1971), destaca duas contribuições principais dessas pesquisas de Genebra da década de 60. A primeira refere-se à confirmação da idéia de síntese entre a inclusão de classes e a seriação, que ocorre por volta dos 7 ou 8 anos, e que gera o número. Porém, com a diferença de que, de acordo com os resultados de Gréco (1962), isto não acontece de imediato para todos os números: primeiro para os números pequenos, ocorrendo uma aritmetização progressiva na série dos números naturais, de 1 a 7, de 8 a 15 e de 15 a 30.

A outra contribuição refere-se à idéia da conservação de cotidade (no sentido decorrente de cota ou parcela), como um estágio anterior à conservação de quantidade: a criança pode perceber que a cota de chegada de duas coleções é a mesma sem, no entanto, concordar que as quantidades sejam iguais, como se dissesse: “tem oito aqui e oito aqui, mas não tem a mesma quantidade”. Isto quer dizer que compreende igualdades numéricas antes mesmo de construir a noção de conservação de quantidades, sendo que tais igualdades numéricas não podem ser consideradas quantitativas, mas sim cotas, ainda bastante fincadas no aspecto figurativo.

Moro (1998) sintetiza as principais contribuições dessas pesquisas, dentre as quais serão destacadas as de maior interesse para o presente estudo.

Em *Problemas da construção do número* (Gréco, Grize, Papert e Piaget, 1960), primeiro volume de uma trilogia de publicações, é descrita a existência de noções ou quase-estruturas numéricas que antecedem a estruturação aritmética, não havendo assim compreensão aritmética anterior ao surgimento da estrutura operatório-concreta. Estas quase-estruturas numéricas seriam especificamente a conservação de cotidade e a composição limitada de relações iterativas por adição

"+1", o que quer dizer que as crianças realizam iterações com quantidades limitadas.

A iteração encerra um aspecto de repetição, sendo esse procedimento recorrente. Assim, verifica-se uma construção paulatina de relações aritméticas, a partir das quais vai se originando e se especificando a noção de número, não sendo esse processo reduzido à lógica, mas sim pertinente ao pensamento lógico. Assim, pode-se afirmar que as relações aritméticas em construção não coincidem com a presença da idéia de número, uma vez que compor quantidades numéricas não significa o domínio pleno da idéia de número.

O número é tido como o produto da coordenação de diferentes esquemas ligados às estruturas de classe e série, sendo a quantidade numérica construída do nível figurativo ao operatório, havendo inicialmente indiferenciação entre pré-estruturas numéricas, classes e séries, para posteriormente haver diferenciação (Moro, 1998).

O segundo volume da série, *Estruturas numéricas elementares* (Gréco & Morf, 1962), traz resultados significativos a respeito da já referida conservação de cotidade. Trata-se de conduta pré-operatória, não se manifestando ainda a noção de número. Além disso, aborda a importância dos procedimentos de correspondência termo-a-termo, como esquema poderoso para a progressiva construção da equivalência, e do esquema de contar. Este, combinado à correspondência termo-a-termo, mostra-se imprescindível para a noção de invariância numérica, pois retira gradativamente o caráter do número enquanto denominador de um conjunto para passar a ser numerador de um conjunto, instrumento de equivalência numérica.

Finalmente, em *A formação dos raciocínios recorrenciais* (Gréco, Inhelder, Matalon & Piaget, 1963) é descrito o progressivo aparecimento do número como idéia de número qualquer, a partir do exame da gênese das recorrências ou inferências recursivas, onde a iteração é de grande importância (passagem de *n* a *n+1*). Assim, compor um número qualquer é possível por meio de iterações, quando quantidades são compostas por meio de uma ação recorrente (Moro, 1998).

Tais resultados apontam para a importância das chamadas “quase-estruturas” numéricas, ao serem destacados os mecanismos de iteração e da conservação de cotidade. Verifica-se, assim, a possibilidade do surgimento de composições numéricas, mesmo sem ainda haver o pleno domínio da noção de número. Isto quer dizer que crianças que ainda não adquiriram a reversibilidade do pensamento e, por isso, não concebem a conservação de quantidades, já são capazes de compreender relações aritméticas iniciais.

Passaremos agora ao exame da questão da formação do conceito de número sob o ponto de vista de outros autores, alguns com perspectivas semelhantes àquelas dos pesquisadores genebrinos, outros com abordagens um tanto quanto diferentes.

4. Os caminhos do número: alguns pontos de vista.

Em *Les chemins du nombre,* obra organizada por Bideaud, Meljac e Fischer (1991), duas vertentes principais de pesquisa são apresentadas: aquelas norteadas pelo cognitivismo anglo-saxão (tratamento da informação), e as fundamentadas no neo-estruturalismo. Vale a pena o exame das contribuições de alguns autores para dar seguimento à análise da questão da construção do número, uma vez que todos eles têm em comum a preocupação em avançar no que diz respeito a uma melhor e mais completa compreensão dos mecanismos envolvidos na construção daquela noção, ainda que nem todos partam de perspectivas teóricas semelhantes.

Dentre o grupo de autores que buscam avançar partindo da teoria piagetiana, podem ser destacadas as contribuições de Catherine Sophian e Karen Fuson. As autoras analisam o papel da contagem no processo de aquisição da noção de número, analisando a relação entre o procedimento de contar e a idéia de cardinal, aspecto que, segundo as autoras, teria sido pouco explorado nas pesquisas de Piaget.

Enquanto Piaget centra sua atenção no aspecto da correspondência (dois conjuntos são de cardinais idênticos se puderem ser postos em correspondência termo-a-termo) combinando-o ao das transformações (ou seja, a cardinalidade se mantém igual mesmo que sejam feitos arranjos espaciais diferentes nas coleções), Sophian procura verificar somente o aspecto da correspondência.

Segundo aquela autora, ainda que desde cedo as crianças saibam sobre números, não estabelecem de início a relação entre esta noção e cardinalidade, havendo um caminho a ser percorrido. Dessa forma, a criança deve aprender que contar serve para alguma coisa e se orienta para um objetivo, caso contrário seria simplesmente imitação. Por exemplo, a primeira coisa que deve descobrir é que o último número contado de uma coleção é especial, pois é o cardinal do conjunto. Assim, a contagem não pode ser considerada como atividade mecânica, pois ela é ligada intimamente ao desenvolvimento cognitivo (Sophian, 1991).

A cardinalidade é uma noção cuja aprendizagem é relativamente tardia no desenvolvimento da contagem: as crianças não estabelecem de imediato relações entre a contagem e as relações numéricas entre coleções, de modo que, contagem e cardinalidade se desenvolvem de maneira independente uma da outra. Diz a autora: "o fato de que os aspectos cardinais da contagem sejam dominados relativamente tarde sugere que a contagem não é aprendida como uma atividade cardinal, mas que ela se integra pouco a pouco a essa atividade, à medida que sua compreensão se desenvolve na criança" (Sophian, 1991, p.38).

Ao apresentar as relações que a criança estabelece entre os diferentes sentidos do número, procurando preencher as lacunas das pesquisas de Piaget, Fuson (1991) estuda, além do procedimento de emparelhamento, a relação entre contagem e cardinalidade, lembrando que, mesmo não sendo suficiente para garantir a construção do conceito do número, ainda assim, a contagem é um procedimento importante nesse processo.

Desde pequenas, as crianças utilizam-se da percepção para comparar duas coleções, compreendendo que acrescentar elementos faz com que fiquem maiores e retirar faz com que fiquem menores. Mas, aos poucos, vão percebendo que para comparar coleções há outras ferramentas, tais como a enumeração e a correspondência. Assim, antes mesmo de escolherem conscientemente essas estratégias, as crianças já podem enumerar e emparelhar, utilizando a contagem e a correspondência termo-a-termo. Mas, muitas vezes, se pedimos que contem ou emparelhem coleções, ainda preferem usar estratégias perceptivas, mesmo que as informações obtidas pela percepção não correspondam à realidade. Logo, no caso da criança pequena, a informação perceptiva é privilegiada em relação à informação numérica; sendo somente mais tarde que conseguirão recorrer espontaneamente à enumeração e ao emparelhamento.

Ainda segundo a autora (Fuson, 1991), aos dois anos as crianças já começam a contar objetos, mostrando-os e enunciando os nomes dos números. O gesto de apontar liga os nomes pronunciados no tempo aos objetos arranjados no espaço, o que permite a correspondência termo-a-termo, atividade esta que é, no início, imitativa, não havendo ainda o objetivo de determinar o cardinal. É somente quando a criança passa a fazer a relação entre a significação da contagem e a significação cardinal que ocorre a "integração cardinal", ou seja, o nome do número passa de último elemento contado à referência cardinal de quantidade de elementos contados. Isto acarreta uma compreensão da equivalência numérica, sendo que, em alguns casos, as adições e subtrações já são realizáveis (Fuson, 1991).

A autora destaca, ainda, que há o movimento inverso, ou seja, a passagem da cardinalidade à contagem (por exemplo, "pegue cinco carrinhos"), quando a criança deve passar da significação cardinal do "cinco" à significação de contagem desse mesmo "cinco", sabendo que, quando ela conta, sua contagem deve parar quando o "cinco" é pronunciado.

Para crianças de cinco e seis anos, o desejo de contar é muito grande, mesmo que as coleções estejam emparelhadas. Havendo transformações nos arranjos das coleções, como na prova da conservação de quantidade numérica, as crianças dessa faixa etária optam pelas estratégias perceptivas quando algo as impede de contar. Vale considerar que se trata de crianças não conservadoras, caso contrário não sentiriam necessidade de contar. Uma vez atingido o estágio da conservação numérica, naquelas mesmas circunstâncias da prova, não sentirão mais necessidade de contar, nem de emparelhar, pois já saberão que os deslocamentos espaciais não alteram as quantidades.

Tal conhecimento é construído, seja por uma inferência indutiva a partir de situações anteriores de contagem e emparelhamento de coleções, seja por uma inferência dedutiva "baseada no conhecimento conceitual que autoriza a representação mental do objeto antes e durante a transformação" (Fuson, 1991, p.172). Em suma, a contagem e a correspondência podem desempenhar um papel importante nessas inferências indutivas e dedutivas.

A coordenação de conhecimentos a respeito de contagem, seqüência numérica e significação cardinal dos nomes dos números permite que gradativamente as crianças consigam resolver situações de adição e subtração. Assim, finalmente quando já se mostram capazes de começar a contar a partir de qualquer elemento de uma seqüência, passam a considerar "os objetos que representam um termo como representando, também e, ao mesmo tempo, a soma (um termo se confunde com a soma contada)" (Fuson, 1991, p.175). Nesse momento, a criança torna-se capaz de perceber que, por exemplo, o terceiro carrinho contado em uma coleção pode designar um valor cardinal "três", sem necessidade de contar novamente.

Ainda em relação ao procedimento de contagem, também Moro (2004) coloca que contar é um gênero de atividade importante para a criança, uma vez que ao fazê-lo poderá perceber que o mundo real pode ser quantificado. Ao interagir com os elementos do meio em que vive, a criança vai, gradativamente, estabelecendo relações e, a partir daí, inferindo novos conhecimentos.

Dentre eles, destaca-se a possibilidade do estabelecimento da correspondência termo-a-termo entre duas coleções, o que permite a aquisição das primeiras noções de igualdade ou equivalência numérica. Também, o conhecimento a respeito da idéia de que retirar ou acrescentar cada elemento de uma coleção modifica sua quantidade, gera a noção de que cada elemento acrescido ou retirado corresponde ao mesmo valor dos anteriores também acrescidos ou retirados (idéia da iteração).

Outra noção importante ligada à de iteração é a de conexidade, que permite a compreensão de que cada número está ligado ao outro formando a seqüência numérica, podendo haver duas formas de organização do pensamento aritmético envolvidas nessa noção: a inclusão (o 2 inclui o 1) e as relações aditivas (2=1+1; 3=2+1). Finalmente, destaca-se ainda a noção da comutatividade da adição e/ou ordem das unidades, consistindo na inferência a respeito da compreensão de que uma soma não se altera quando os elementos são dispostos de maneiras diferentes (3+4=7; 3+3+1=7) (Moro, 2004).

Outro autor que procura trazer luz à discussão sobre as noções numéricas iniciais é Brissiaud (2003), verificando como as crianças aprendem a calcular, também a partir da análise do procedimento de contagem. Segundo o autor, esse tipo de estratégia por si só não garante a compreensão do valor cardinal de um conjunto, pois mesmo que uma criança pequena saiba contar, ainda assim não é capaz de utilizar esse mecanismo para designar uma quantidade.

Brissiaud (2003) postula a importância do uso dos dedos como coleção de referência, o que permite que a criança tenha à disposição um sistema simbólico. Para explicitar tal argumento, retoma a metáfora do pastor que montou uma coleção análoga de pedras para saber a extensão de seu rebanho. Nesse caso, assim como para a criança, apesar da natureza concreta da coleção de pedras, há um aspecto simbólico nesse procedimento. Também a criança dispõe de um sistema simbólico que lhe permite comunicar a extensão de uma coleção: os dedos.

Além disso, defende a importância de se apresentar à criança uma coleção de referência em forma de decomposição. Assim, além de mostrar os dedos para uma criança e dizer "há três gatos, como aqui" (mostrando três dedos), o adulto deve mostrar os dedos e dizer "veja, tem um, um e mais um", ao invés de "tem um, dois e três" (Brissiaud, 2003).

Tal idéia é defendida a partir da verificação de que, quando uma criança vai contando e dizendo o nome dos números, é como se dissesse: "Há *o* um, *o* dois, *o* três...", sendo que o último número dito refere-se ao último objeto apontado e não ao cardinal, como se o nome do número dito fosse um nome qualquer, como: "caderno, papel, cachorro..."

Segundo o mesmo autor, quando o adulto estabelece um diálogo no qual apresenta uma forma de decomposição à criança, favorece a percepção de que na verdade não importam os elementos de um conjunto, mas sim o número de elementos. Dessa maneira, a criança compreenderá que cada elemento será "um", sendo associado a um dedo da mão, o que favorece o processo de abstração das unidades numéricas correspondentes aos elementos das coleções (Brissiaud, 2003).

O autor justifica a idéia de que para haver conceitualização dos primeiros números há que se abstrair as unidades numéricas de coleções correspondentes para dar-se conta de sua totalidade. Isto não implica na necessidade de correspondência termo-a-termo, como ocorre no procedimento de contagem, mas sim em enumerar as unidades, tomando-as uma de cada vez, o que pode ser feito pela estratégia de decomposição/recomposição.

Dessa forma, afirmar que uma criança "conceitualizou" o oito, por exemplo, significa dizer que ela não só sabe contar até oito, mas sabe que para formar uma coleção com essa extensão, pode reunir cinco objetos e depois mais três; consegue exprimir este número utilizando marcas como o 5 e o 10; pode retirar dois elementos de uma coleção de dez; acrescentar um a uma coleção de sete, sendo o nome "oito" e o número "8" símbolos de equivalência entre esse procedimentos. Todos os símbolos aritméticos são símbolos de equivalência entre procedimentos (Brissiaud, 2003).

Assim, segue o autor, conceitualizar significa dispor de muitos procedimentos para formar uma coleção determinada em um contexto dado, adotando aquele que melhor convém ao contexto de acordo com o critério que se deseja privilegiar (a economia, por exemplo). Isto quer dizer, estabelecer uma estratégia, que na verdade é o procedimento escolhido dentre muitos possíveis.

O autor distancia-se da teoria piagetiana no que diz respeito à concepção de quantidade, destacando que, para Piaget, a criança se torna conservadora quando a correspondência termo-a-termo torna-se quantificante, exprimindo igualdade numérica e não apenas equivalência quantitativa, não havendo assim distinção entre as noções de número e de quantidade (Brissiaud, 2003).

Para Brissiaud (2003), a idéia de quantidade é a representação simbólica da extensão de coleções, pois não é necessário quantificar para dizer que duas coleções têm a mesma extensão, assim como não é necessário medir duas varas para saber qual é a maior. A correspondência termo-a-termo garante a igualdade de extensões e não das quantidades (entendendo-se a quantidade como medida da extensão de coleções, abstraindo-se a natureza dos elementos), porque duas coleções em correspondência têm o mesmo cardinal.

O mesmo autor faz ainda uma diferenciação entre formas de representação numérica e de quantidade, sendo a primeira delas oposta à representação analógica de uma coleção de referência. Esta última é concebida como representação analógica da quantidade (pois a extensão de uma coleção é representada pela extensão de outra coleção); enquanto que no caso do número, uma pluralidade é representada por um signo único, sob uma forma convencional. Assim, a coleção de referência está para o símbolo, assim como o número está para o signo. Ele postula uma nova definição de número que se apóia sobre a diferenciação de dois modos de quantificação, um analógico, onde as coleções de referência são símbolos da quantidade; outro convencional, onde os números caracterizam-se como signos da quantidade (Brissiaud, 2003).

Por fim, o autor coloca duas funções para o número: comunicar quantidades e colocar em relação. Para o primeiro caso, isto é possível mediante uma forma analógica (coleções de referência) ou uma forma numérica (nomes dos números). Já para o segundo, é possível por meio do estabelecimento de relações, sendo a contagem com apoio de coleções de referência uma forma analógica e o cálculo a forma numérica.

Brissiaud (2003) defende que calcular é colocar em relação as quantidades a partir de suas representações numéricas, sem utilizar coleções de referência, o que significa progredir na apropriação do número.

Segundo Vergnaud (1991), a noção de número apóia-se nas noções de função, correspondência biunívoca, relação de equivalência e de ordem. Mas, o que garante o caráter específico da noção de número é a possibilidade de somar.

As primeiras formas de utilização da função numérica pela criança pequena são a récita e a contagem propriamente dita. Esta última ocorre quando a récita é acompanhada de movimentos dos olhos e das mãos, já havendo o estabelecimento de correspondência entre os objetos e a série numérica.

Por outro lado, segue o autor, há outros aspectos do número não necessariamente ligados ao uso da contagem, que são justamente as relações de ordem e equivalência (lembrando que a noção de número apóia-se nas relações entre objetos). Vergnaud destaca as diferenças, quanto ao nível de complexidade, entre as relações de ordem e de equivalência para objetos ou para conjuntos de objetos.

No caso de objetos, cita como exemplo de relação de equivalência "tem a mesma cor que"; para a relação de ordem, "chegou antes que". Já no caso de conjuntos, os exemplos trazidos são "tem o mesmo número de elementos que" para as relações de equivalência; e "tem menos elementos que" para as de ordem. Assim, as relações numéricas são mais complexas do que aquelas entre objetos (Vergnaud, 1991).

O autor, de acordo com sua concepção, destaca ainda as diferenças quanto às relações de ordem e de equivalência para conjuntos discretos ou contínuos. As relações nos casos discretos são menos ambíguas; por exemplo, "tem mais irmãos que"; "tem a mesma cor que". Já no caso dos conjuntos contínuos, cita como exemplo, as relações "tão grande quanto"; "mais bonita que". Ao que tudo indica, Vergnaud recupera a concepção piagetiana do número como síntese de classe de ordem.[1]

Para Vergnaud (1991), os números podem ser considerados como um sistema de medidas de cardinais de conjunto, o que facilita a comparação entre eles. Segundo esse autor, a contagem e o uso dos números fazem sentido quando a comparação entre cardinais de conjuntos por meio da correspondência termo-a-termo torna-se impossível. Dessa forma, a relação entre duas quantidades pode ser deduzida da relação entre os cardinais, o que significa que medir dois conjuntos implica em encontrar seus cardinais para depois ser estabelecida uma relação de ordem.

[1] São bastante controversas, sob o ponto de vista da matemática, as seguintes terminologias utilizadas por Vergnaud: "relação de ordem" e "relação de equivalência". Neste trabalho serão mantidas tais expressões, de acordo com o ponto de vista do autor.

Nunes (1997) também aponta o papel desempenhado não só pela contagem, mas também pela composição aditiva no processo de construção da noção de número. Segundo a autora, a contagem simples, por correspondência termo a termo, embora seja um começo muito importante, não é suficiente para que as crianças compreendam o sistema de numeração.

Em um sistema de numeração decimal, a composição aditiva do número por unidades diferentes é um conceito fundamental, baseado na adição, mais do que na correspondência termo a termo. Assim, a autora defende que situações nas quais as crianças possam lidar com a adição, conceito ligado à idéia de número, são fundamentais para a construção da noção de composição aditiva.

Tendo em vista todas as idéias apresentadas, é possível verificar que a publicação das pesquisas de Piaget e Szeminska (1971) a respeito da gênese do número contribuiu de maneira decisiva para a compreensão da maneira pela qual as crianças concebem essa noção. A idéia de que não se aprende por imitação, mas sim por meio de uma construção progressiva foi, sem dúvida, inovadora para a educação matemática, além de ponto de partida para novos estudos, os quais buscaram agregar elementos para uma melhor e mais completa compreensão desse processo.

Talvez a mais importante das contribuições subsequentes aos estudos realizados pela equipe de Genebra na década de 40, refira-se ao fato de que, crianças de idade precoce (antes de 7 ou 8 anos), que não tenham construído a noção de conservação de quantidade numérica, já detenham conhecimento sobre números.

Conforme já mencionado anteriormente, educadores inspirados nas pesquisas de Piaget e Szeminska (1971) e no movimento da Matemática Moderna inferiram que as crianças não poderiam aprender sobre números sem terem construído a noção de conservação de quantidades numéricas. Dessa maneira, os estudos dos autores genebrinos sobre a gênese do número, processo este fundado nas operações lógicas, podem ter contribuído para uma abordagem de vinculação estrita das noções iniciais sobre número ao pensamento lógico.

As referidas pesquisas do Centro de Epistemologia Genética, realizadas durante a década de 60, abordam esse aspecto com suficiente clareza, ao postularem a existência de quase-estruturas numéricas, formadas pela conservação de cotidade e de composição de quantidades limitadas por iteração +1, sem deixar de levar em consideração a importância dos procedimentos de contagem e de correspondência termo-a-termo.

É justamente sobre esses dois mecanismos que os demais autores apresentados centraram suas investigações, o que gerou a compreensão detalhada a respeito de como as crianças concebem a idéia de cardinal, mesmo sem ainda terem o pleno domínio da noção de número.

Dessa maneira, todas as publicações subseqüentes trouxeram luz a essa questão, mostrando o quanto lidar com números, no sentido de colocar as crianças em situações de quantificação, pode ser enriquecedor, não sendo necessário, tampouco desejável, um período preparatório para o ingresso no universo numérico.

Por essa razão, parece fundamental conhecer os mecanismos de contagem e correspondência, os quais também encerram um processo de construção.

Especificamente no caso da contagem, as crianças principiam por contar, sem saber exatamente para quê serve esse procedimento. Além disso, no caso da utilização da contagem como forma de buscar a soma de duas coleções, em um momento inicial, as crianças contam todos os elementos de um conjunto e todos do segundo, para determinar o valor total (*counting-all*).

Em um segundo estágio, já são capazes de contar na seqüência (*counting-on*), ou seja, partem do cardinal do primeiro conjunto, e seguem contando os elementos do outro, o que revela um progresso no domínio da noção de cardinal. Essa segunda forma de contagem revela a capacidade das crianças de tomar um conjunto como uma unidade maior a ser combinada com uma menor (Nunes, 1997).

Tendo em vista os elementos até aqui apresentados, permanece aberta a seguinte questão: mesmo que seja admitida como indiscutível a idéia de não ser necessário um período preparatório para o ingresso no universo numérico (pois é lidando com os números que as crianças poderão aprender sobre eles), ainda assim não se pode deixar de considerar que há elementos subjacentes à noção de número, os quais constituem invariantes necessários à construção dessa noção.

Quando Piaget e Szeminska (1971) postularam a ligação estreita entre número e relações de classe e ordem, não reduziram o número a tais relações, mas sim buscaram mostrar suas filiações e conexões com esquemas diversos. Dessa forma, segundo os autores genebrinos, a classe não é anterior ao número, pois sua construção se conclui ao mesmo tempo que a do número.

Isso colocado, não se pode deixar de considerar a existência de uma ligação entre número e as relações de classe e ordem, o que leva à necessidade da verificação da natureza dessa ligação. Dado que tais relações encerram invariantes lógicos subjacentes à noção de número, faz-se necessária a análise da maneira pela qual isso se revela na aquisição das noções aritméticas iniciais. O fato de que o conceito de número encerra as relações de classe e série faz com que seja necessário (ao menos no que diz respeito às práticas pedagógicas em uma sala de educação infantil) o desenvolvimento de tais relações, mediante atividades específicas? Ou seriam apenas necessárias as tarefas ligadas às relações aditivas suficientes para o ativamento de tais relações?

Tomando-se como exemplo o caso das situações de decomposição, tais como propostas por Brissiaud (2003), não existiriam ali invariantes, especificamente aqueles relativos à noção de parte-todo, ligados à noção de inclusão de classes?

Ou ainda, quando Nunes (1997) aponta a importância da composição aditiva para a construção do conceito de número, também não há invariantes envolvidos ligados à idéia de ordem e de parte-todo, o que também se refere à noção de inclusão de classes?

Na próxima sessão será examinada a relação entre a aprendizagem da matemática e as construções lógicas, na tentativa de elucidar o papel dos invariantes lógicos na construção das noções aritméticas iniciais.

5. Aprendizagem da matemática e sua relação com construções lógicas

Nunes (1997) aponta a relação bastante estreita entre a matemática e a lógica, dando como exemplo o caso da contagem: as crianças precisam entender a natureza ordinal do número, sendo essa atividade algo mais do que memorizar a seqüência numérica. Ou seja, precisam entender que se 3>2 e 2>1, então necessariamente 3>1, além de necessitarem entender que cada elemento de um conjunto só pode ser contado uma vez, não importando sua disposição espacial.

Segundo a mesma autora, Piaget foi quem primeiro considerou essa relação entre lógica e matemática, havendo dois pontos básicos a serem considerados: em primeiro lugar, é necessário um longo tempo para que as crianças consigam confiar nos mesmos princípios lógicos do adulto. Assim, ainda segundo Nunes, Piaget acreditava que os professores tentam ensinar coisas às crianças para as quais elas sequer estão preparadas. Em segundo lugar, as crianças devem captar alguns princípios lógicos antes de entender matemática (Nunes, 1997).

Nunes aponta alguns princípios ou exigências lógicas dentre os quais se destaca a noção de conservação, mediante a qual a criança é capaz de perceber que uma mudança no arranjo espacial de uma coleção não altera o conjunto. Além desse, existe ainda o princípio da noção de transitividade, o qual garante a compreensão de que se A>B e B>C, então A>C. Finalmente, há aquele relativo à composição aditiva do número, o que permite compreender que somar aumenta e subtrair diminui, além do fato de que uma operação cancela a outra, por exemplo, 5+2-2=5.

Nunes (1997) destaca que alguns autores consideram extrema a visão de Piaget, segundo a qual as transformações importantes no raciocínio matemático dependem de transformações lógicas. Tais autores contrapõem a essa concepção uma outra, que desconsidera o desenvolvimento lógico. A autora, por sua vez, não deixa de considerar que, concordando com Piaget, "a compreensão lógica das crianças muda radicalmente entre as idades de 5 e 15 anos, e que algumas destas transformações exercem um efeito considerável sobre sua compreensão da matemática" (Nunes, 1997, p.225).

Em pesquisa posterior, a mesma autora buscou verificar a relação entre o aprendizado da matemática e a lógica, guiada pela hipótese de que essa última forma a base para o aprendizado daquela primeira, impondo-se no ensino escolar da matemática o estabelecimento de relações entre ambas, a fim de que a compreensão lógica no início da escolaridade possa garantir uma melhor aprendizagem da matemática.

As conclusões do estudo revelam que a lógica tem um papel primordial na aprendizagem da matemática e, apesar das crianças desenvolverem muito de sua compreensão a respeito de relações lógicas de maneira informal, é necessário que a escola também promova esse desenvolvimento, conectando ganhos em raciocínio obtidos da aprendizagem informal e aprendizagem escolar (Nunes, 2006).

Dessa forma, Nunes (1997) assume uma posição intermediária, apoiando-se em Vergnaud, de acordo com a concepção de que nem tudo é marcado exclusivamente por uma transformação lógica, apesar da influência significativa desse aspecto (a lembrar que Piaget nunca centrou seu interesse nos sistemas convencionais).

Basta observar os casos nos quais uma criança é capaz de evocar invariantes lógicos para resolver um determinado problema, mas não consegue fazê-lo em uma outra situação na qual os mesmos invariantes ocupam um lugar central. Por que isso ocorre? Duas respostas para esta questão parecem pertinentes: uma, porque as situações são matematicamente diferentes, e pedem invariantes lógicos diferentes; outra, porque "a mesma relação lógica poderia estar conectada a um sentido de número novo em uma situação diferente" (Nunes, 1997, p.227).

A idéia de invariante operatório, tal como postulada por Vergnaud (1990), parece fundamental como pano de fundo para a discussão pretendida. Segundo o autor, conceitos e teoremas constituem a parte visível de uma conceitualização, enquanto que a parte não explícita são os invariantes, ou ainda, os conhecimentos contidos nos esquemas. Tal idéia será retomada na sessão seguinte.

Além desse aspecto, a autora levanta a forte relação entre lógica e sistemas convencionais (Nunes, 1997). Dependendo do momento de seu desenvolvimento lógico, uma criança pode não conseguir aprender sobre o sistema de numeração. Isso acontece, por exemplo, no caso da lida com os números escritos, em que as crianças devem saber sobre composição aditiva do número (hierarquia das unidades contidas nas dezenas, dezenas nas centenas etc), para trabalhar com o valor posicional. Além disso, podem até aprender um sistema convencional, sem saber para quê ele serve (exemplo da contagem, em que, no início, as crianças contam, mas ainda não sabem com que fim).

Muitos autores têm estudado o papel do sistema de numeração na construção do conceito de número. Dentre eles, destacam-se as contribuições de Lerner (1994) e Nunes (1997).

Lerner (1994) considera que, sendo a notação numérica um dado da realidade, é necessário que desde cedo a criança possa ter a oportunidade de tentar entender como ela funciona, para que serve e em que contextos usar. Sua proposta é a introdução na sala de aula da numeração escrita, devendo ser trabalhados os problemas inerentes a sua utilização. Ou seja, propiciar a análise das regularidades do sistema e trabalhar desde cedo com diferentes intervalos da sequência numérica pode ser um instrumento importante para que as crianças aprendam sobre numeração.

Nunes (1997), por sua vez, coloca que aprender matemática implica em ir além do domínio das regras lógicas, uma vez que existe um conjunto de convenções elaboradas pela cultura no decorrer do tempo, o qual também deve ser aprendido. A hipótese que guia tal idéia é a de que aprender sobre as invenções culturais pode aumentar a habilidade de respeitar princípios lógicos. Segundo a autora, o próprio sistema torna-se assim uma ferramenta para o pensamento, um meio para resolver problemas os quais não poderiam ser resolvidos sem o domínio do sistema de numeração.

Por fim, destaca a autora, parece provável que seja o uso de sistemas convencionais o ponto situado entre as relações lógicas já dominadas pela criança e as novas, o que poderia ser explicado pelo esquema: lógica prévia – sistemas convencionais – nova lógica.

Nunes afirma:

> *As crianças são mais do que máquinas lógicas e mais do que recipientes de ensino (...) Os sucessos e fracassos matemáticos das crianças não são apenas uma questão de suas habilidades lógicas. A compreensão das crianças de invariáveis lógicas é importante, conforme reconhecemos anteriormente, mas também o é sua representação social da matemática, que, às vezes, conduz as crianças a colocar seu conhecimento lógico de lado em vez de usá-lo.* (Nunes, 1997, p. 230).

Boule (1985) aborda a questão das atividades lógicas considerando que deve ser abandonada a idéia de que a lógica é uma disciplina particular no interior ou vizinha da matemática. É na verdade uma intersecção entre matemática e filosofia, que se ocupa dos fundamentos da matemática e da teoria da prova. A Matemática Moderna, segundo o autor, propunha atividades lógicas para se trabalhar com lógica, mas sem relação com o pensamento racional da criança:

> *Segundo a teoria piagetiana a construção do número repousava essencialmente sobre as operações lógicas associadas aos conceitos de conjunto, equivalência e ordem. As pesquisas mais recentes têm, pouco-a-pouco, descentrado o papel dos conceitos lógicos, acrescentando uma referência empírica, a de ferramenta disponível, fazendo aparecer noções menos clássicas, como aquelas de lista, situando as capacidades da criança em relação às situações locais. As atividades lógicas conservam uma importância central no desenvolvimento do pensamento racional e não somente na construção do número. As atividades lógicas consistem em estruturar o real."* (Boule, 1989, p.28)

Assim, Boule (1985) opta por não falar de lógica, mas sim de "atividades lógicas", trazendo duas idéias principais: atividades de simbolização incluem essencialmente a linguagem (a lógica está dentro da linguagem); a lógica não é um jogo puro e gratuito, devendo todas as atividades portar significações:

> *Devemos iniciar as atividades lógicas na educação infantil pelo exame das propriedades dos objetos, da construção de conjuntos, da simbolização. São situações indispensáveis à construção da edificação das matemáticas. Mas esta é uma redução excessiva, pois sabemos da importância, dentro da teoria*

> *de conjuntos, das operações de reunião e intersecção. Nós podemos defini-las, seja enumerando os elementos, seja dando as propriedades que as caracteriza.* (Boule, 1985, p.70)

Dessa maneira, visto que as atividades lógicas colocam em jogo informações, deve-lhes ser associada a idéia de custo: classificar objetos custa esforço e tempo, que podemos recuperar pelas economias ulteriores ou por informações suplementares. O autor propõe os seguintes gêneros de atividades: classificações (triagem, classificação e arranjos); semelhante/não semelhante; (semelhança/diferença); sinal, símbolo e signo; seriações, ritmos.

Hutin e colaboradores (1994) procuram fazer uma distinção do que é atividade matemática daquilo que é uma simples exploração de materiais. Assim, afirmam que esse gênero de atividade caracteriza-se pelos verbos seguintes: procurar, descobrir, organizar, estabelecer relações, destacar regularidades, simbolizar, compreender:

> *Não é porque a criança age que ela se desenvolve, mas sim porque ela reflete sobre sua ação. Pensava-se que era suficiente colocar as crianças em situações onde tivessem a possibilidade de agir e de manipular materiais diversos para que se desenvolvessem espontaneamente. Na realidade, é graças às questões e aos desafios que eles se colocam, através das trocas verbais que suas reflexões se alimentam e se enriquecem.* (Hutin, 1994, p.50)

Hutin (1994) afirma que a partir de sua própria atividade a criança progressivamente entra em um processo de abstração, apontando uma tendência de, na educação infantil, as atividades matemáticas serem reduzidas a simples constatações a partir de manipulações sobre materiais concretos. Segundo o autor, a atividade matemática deve ser caracterizada como um processo de antecipação sobre a ação concreta.

Especificamente no que diz respeito à lógica, Hutin (1994)) destaca a necessidade do desenvolvimento de atividades envolvendo o raciocínio lógico-matemático, seja no domínio numérico, seja no não numérico. Tais atividades teriam como objetivo o desenvolvimento de operações, tais como: classificar, ordenar, induzir, deduzir, comparar, contar, ou seja, colocar em relação, o que, segundo os autores, permite a aproximação dos conteúdos escolares ao domínio da lógica:

> *A lógica é, entre outras definições, um conjunto de regras claramente estabelecidas e definidas, permitindo organizar o discurso e o raciocínio de maneira dedutiva e sem ambigüidade. (...) lembremos que essas operações não intervêm somente na matemática, mas na maior parte das atividades cognitivas.* (Hutin, 1994, p.122)

Também Vergnaud (1991) defende o desenvolvimento de alguns tipos de atividades lógicas na escola, destacando dentre elas, as de classificação. Justifica sua posição lembrando que agrupar objetos é uma atividade precoce na vida da criança. Ela o faz por meio da comparação, analisando suas semelhanças e diferenças, sua equivalência ou complementaridade. Segundo o autor, há duas finalidades possíveis na ação de classificar: comparar objetos para agrupá-los em uma mesma classe ou de modo que se complementem, criando um todo novo e interessante. Vergnaud centra sua atenção sobre a primeira modalidade.

Ainda segundo o autor, as operações classificatórias mais elementares são aquelas nas quais se agrupam objetos que têm a mesma propriedade ou que são equivalentes entre si, do ponto de vista de um mesmo descritor. Vergnaud (1991) define "descritor" como um conjunto de propriedades distintas, por exemplo, "cor"; e "propriedade" como um valor tomado por um descritor, por exemplo, "azul". A idéia de classe decorre diretamente da idéia de propriedade, uma vez que a relação "pertence à mesma classe" é de fato uma consequência da relação "tem a mesma propriedade P que" (Vergnaud, 1991, p.78).

As atividades que envolvem classificação realizadas na escola podem ser propostas tomando-se como base tanto o descritor, por exemplo, ao pedir que agrupem todos os objetos de mesma cor; ou pela propriedade, ao pedido de agrupar todos os azuis.

O autor ressalta o cuidado que se deve tomar com consignas ambíguas do tipo: "agrupar os objetos iguais"; "agrupar os objetos que combinam". As crianças guiam-se por semelhanças simples globais, uma vez que nem sempre utilizam relações transitivas e classificatórias.

Por esse motivo, segundo Vergnaud (1991), a escola deve organizar exercícios sistemáticos de classificação com signos verbais que não sejam ambíguos e com materiais cada vez mais complexos. Seria essa a única maneira de introduzir uma análise cada vez mais rigorosa das propriedades dos objetos e a distinção entre a simples semelhança e a verdadeira equivalência.

Ainda segundo o mesmo autor, pode-se definir três níveis diferentes de critérios das propriedades dos objetos:

1. Equivalência simples: objetos diferentes com algumas propriedades em comum (ex: círculos vermelhos e quadrados vermelhos).
2. Quase-identidade ou limite superior da equivalência: objetos distintos, mas com todas as propriedades em comum (ex: botões de uma blusa que são iguais, mas não são os mesmos).
3. Identidade: um só objeto, evidentemente idêntico a si próprio.

A escola não deve reduzir tais exercícios de classificação apenas baseando-se no critério de quase-identidade, por exemplo, guardar bolas de um lado e carrinhos de outro (estes se aplicam às crianças em idades precoces). Há que se propor também exercícios baseados no critério da quase-identidade, por exemplo, pedir que separem o conjunto das peças grandes e vermelhas.

Já em relação às diferenças entre objetos, Vergnaud (1991) define-as em relação aos descritores, podendo ser de três tipos:

1. Descritores qualitativos: são aqueles que apresentam critérios “cujos diferentes valores possíveis não são ordenáveis, mas que permitem constituir categorias distintas” (Vergnaud, 1991, p.84). Ex: sexo, cor, forma geométrica, marcas de carros.
2. Descritores ordinais: são os que mantêm uma ordem objetiva de medida entre as diferentes categorias, permitindo associar aos objetos números de ordem ou de categorias ordenáveis. “Nesta categoria se colocam os descritores cujos diferentes valores possíveis são ordenados, mas não mensuráveis” (Vergnaud, 1991, p.85). Ex: potência de um carro, cor mais ou menos escura de cabelos.

3. Descritores quantitativos: são os descritores que permitem associar aos objetos os números que são sua medida, justificando a existência da escala de medida numérica, cujas categorias são valores numéricos ordenáveis. Ex: tamanho, superfície, preço.

Vergnaud (1991) destaca ainda as operações e relações de complemento, união, intersecção, inclusão como componentes da classificação. Segundo ele, a noção de complemento deve ser compreendida por extensão e por compreensão.

Em relação às noções de união e intersecção, verificam-se dois grandes casos:

1. União de classes disjuntas (que não têm parte em comum). Ex: conjunto dos blocos quadrados ou retangulares. É a mais simples e pode ser expressada de forma positiva, sem ser uma disjunção, por exemplo, o conjunto das crianças nascidas em janeiro, fevereiro e março não é outra coisa senão o conjunto de crianças nascidas no 1º trimestre. Outras vezes pode ser expressa negativamente, por exemplo, a classe dos blocos amarelos ou azuis não é outra coisa senão a classe dos blocos que não são vermelhos, em um conjunto de blocos amarelos, azuis e vermelhos.
2. União de classes não disjuntas (que têm eventualmente uma parte em comum). Ex: conjunto dos blocos vermelhos ou quadrados. Esta é mais difícil de trabalhar, pois soa artificial aos alunos alguns critérios e materiais utilizados, por exemplo, por que devem unir as classes de blocos vermelhos ou quadrados, se a 1ª está fundada sobre o descritor "cor" e a 2ª sobre o descritor "forma"? Assim, é interessante buscar exemplos de interesse na vida quotidiana dos alunos, que corresponda a uma preocupação natural.

No caso da intersecção, Vergnaud (1991) propõe a utilização de tabelas de dupla entrada para o registro, pois se trata do cruzamento de descritores independentes, o que não significa que de imediato as crianças compreendam a intersecção, mas que incitará ao desenvolvimento da atividade classificatória.

Em relação à noção de inclusão, trata-se de relação binária entre duas classes, sem que apareça nenhuma transformação de caráter temporal. Significa que todos os elementos de uma classe A são também elementos de B, se esta for mais extensa. Vergnaud lembra que Piaget estudou exaustivamente essa questão, no célebre experimento relativo às classes das flores, das rosas e das margaridas, quando perguntava se havia mais margaridas ou mais flores, verificando que a criança pequena não é capaz de perceber essa relação de inclusão.

Finalmente, o autor destaca algumas formas possíveis de representação das classificações, lembrando que os exercícios que permitem passar de uma representação a outra são muito importantes.

Parece haver, dentre os autores mencionados, um consenso no que diz respeito à ligação estreita entre matemática e lógica, ainda que garantidos os domínios próprios de cada uma delas.

Podem ser identificados três enfoques diferentes quanto à relação entre a construção do conceito de número e o desenvolvimento de noções lógicas: o primeiro considera o desenvolvimento lógico como pré-requisito para a construção do conceito de número; o segundo desconsidera totalmente tal relação. O terceiro, e sobre ele será centrado este estudo, considera o desenvolvimento de noções lógicas interdependente e solidário daquele das noções aritméticas iniciais, tendo em vista o papel de invariantes lógicos componentes das referidas noções.

Neste trabalho serão consideradas as atividades que encerram invariantes lógicos ligados à noção de número, especificamente aquelas relativas aos procedimentos de classificar e ordenar.

A teoria dos campos conceituais de Gerard Vergnaud poderá trazer luz a essa questão, especialmente pelo fato de ser uma teoria que busca verificar a relação entre o desenvolvimento cognitivo de uma maneira geral e os processos de aprendizagem de conceitos e conteúdos específicos, mediante a presença de um tripé que dá sustentação a esse processo: a situação, a representação e os invariantes, o que será detalhado a seguir.

6. Vergnaud e a teoria dos campos conceituais

Afirma Vergnaud:

> *No começo não é verbo, ainda menos a teoria. No começo é a ação, ou melhor ainda, a atividade adaptativa de um ser sobre o seu meio ambiente. É pela ação que começa o pensamento: mais exatamente e mais completamente pela ação, a tomada de informação sobre o meio ambiente, o controle dos efeitos da ação e a revisão eventual da organização da conduta* (Vergnaud, 1996, p. 275) [2]

A teoria dos campos conceituais de Gerard Vergnaud será tomada como um dos referenciais de base para este estudo. Segundo tal teoria, um conceito tem como base o seguinte tripé: o conjunto das situações que lhe dão sentido, as formas de representação e os invariantes que constituem suas propriedades. Isto se deve ao fato de que se desejamos saber como uma criança aprende um determinado conceito, não é suficiente verificar apenas sua definição, mas sim o sentido que ele tem para o aprendiz, em um contexto de uma determinada situação, com um problema real a ser resolvido, o que permitirá analisar as rupturas e filiações entre conhecimentos.

Como já abordado anteriormente, a idéia de invariante parece ser de fundamental importância para a compreensão do problema a ser estudado, o que permite supor que uma análise detalhada desse aspecto será útil para o objetivo perseguido.

Partindo da noção de esquema, tal como postulada por Piaget (1966), Vergnaud (1996) caracteriza-a como uma organização invariante da conduta para uma classe dada de situações, sendo que o que é invariante não é a conduta em si, mas sua organização. Trata-se assim, de uma totalidade dinâmica funcional, com o objetivo de que se manifeste em um determinado tempo em um conjunto de situações, podendo engendrar condutas diferentes em função de situações singulares.

A noção de esquema pode ser considerada a chave para a compreensão de como ação e teoria se unem, não sendo um estereótipo, mas sim a maneira de

[2] Tradução livre do original, assim como para as demais traduções.

regular a ação em função de características particulares da situação à qual se dirige. Os esquemas se desenvolvem em interação uns com os outros e formam repertórios para diversos ramos de atividade, existindo esquemas para todos os domínios de atividade, inclusive os mais elementares, que devem ser integrados aos de nível superior.

Dessa forma, a noção de esquema pode auxiliar na compreensão dos conhecimentos e competências matemáticas, por encerrarem aspectos automatizados e outros que constituem decisões conscientes, que permitem levar em conta os invariantes das situações (Vergnaud, 1996).

De acordo com o autor, um esquema é formado por muitas categorias de elementos, todos indispensáveis: objetivos e antecipações, regras de ação, possibilidades de inferências em situações e invariantes operatórios.

Os objetivos atribuem aos esquemas sua funcionalidade, mesmo que essa não seja evidente em primeira análise. Já as regras de ação engendram a atividade do sujeito; ao passo que as inferências são indispensáveis à aplicação de um esquema em cada situação particular (lembrando que um esquema não é um estereótipo, mas uma função que tem um caráter temporal, permitindo generalizar seqüências diferentes de ação e tomadas de informação, em função dos valores das variáveis da situação).

Por fim, os invariantes operatórios constituem a parte relativa à organização e estrutura do esquema: são os conceitos-em-ato e teoremas-em-ato que permitem selecionar e interpretar as informações. Vergnaud denomina "conceito-em-ato" e "teorema-em-ato" os tipos de conhecimento contidos nos esquemas, o que seriam, de maneira global, os invariantes operatórios, considerados chave para sua generalização. Tais invariantes podem ser de dois tipos lógicos, ainda segundo Vergnaud:

a) Tipo proposição: suscetíveis de serem falsos ou verdadeiros, por exemplo, os teoremas em ato.

b) Tipo função proposicional: elementos básicos na composição das proposições, por exemplo, os conceitos de cardinal e de coleção são indispensáveis à conceitualização das estruturas aditivas. Trata-se de conceitos-em-ato, não sendo explicitados pelas crianças, mas sendo construídos por elas na ação.

Um outro exemplo de conceito-em-ato, além do citado acima, refere-se à percepção de um estado inicial que sofre uma transformação, gerando um estado final, conceito este indispensável para a conceitualização das estruturas aditivas. Assim, os conceitos-em-ato podem ser concebidos como os "tijolos" que darão sustentação à construção dos teoremas-em-ato.

Há que se distinguir entre dois tipos de classes de situações:

- aquelas para as quais o sujeito dispõe em seu repertório, em um momento dado de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, de competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação.
- aquelas para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, obrigando-o a refletir, hesitar, explorar e tentar, levando-o algumas vezes ao sucesso, outras ao fracasso.

Assim, segue o autor, os esquemas não funcionam da mesma maneira nos dois casos, pois no primeiro caso há condutas automatizadas, organizadas em um esquema único; e no segundo caso, há vários esquemas que podem competir entre si, mas que devem ser combinados, recombinados, acomodados, gerando necessariamente descobertas.

Uma das manifestações mais evidentes do caráter invariante da organização das ações é a automatização. Por outro lado, ainda segundo Vergnaud (1990), não há só condutas automatizadas, mas também aquelas conscientes, de modo que nossas condutas comportam uma parte de automatização e uma de condutas conscientes.

Quando uma criança utiliza um esquema ineficaz para uma certa situação, tal experiência a leva a mudar de esquema ou a modificá-lo. Há sempre algo de implícito nos esquemas, o que torna difícil para a criança sua explicitação. Tomando-se como exemplo o caso do algoritmo da adição para números inteiros, há uma série de regras para que se faça a operação (começar pela coluna das unidades; passar para a das dezenas etc), mas explicitar tais regras é praticamente impossível para a criança (Vergnaud, 1991).

A opção pela teoria dos campos conceituais como um dos principais referenciais teóricos desse estudo recai no fato de que tal teoria busca responder a um vazio explicativo entre a construção de um conceito em uma situação a partir do repertório do sujeito, tendo em vista seus organizadores lógicos ou invariantes.

Dado que, segundo Vergnaud (1990), um campo conceitual é concebido como um conjunto de situações (não no sentido de situação didática, mas sim naquele de conjunto de tarefas), interessa destacar o campo conceitual estruturas aditivas. Segundo o autor, tal campo conceitual é definido por um conjunto de situações que demandam uma adição, uma subtração ou uma combinação de tais operações. Dessa forma, os principais conceitos componentes das estruturas aditivas são as noções de cardinal; de medida; de transformação por aumento ou diminuição; de comparação quantificada e de composição binária de medidas.

Ainda segundo o mesmo autor, o núcleo da noção de conceito é a de invariante e “a elaboração de invariantes é o instrumento decisivo na construção da representação: são os invariantes que asseguram a representação e sua eficácia, permitindo-lhe cumprir sua dupla função, refletir a realidade e prestar-se a um cálculo relacional. São os invariantes que dão à representação seu caráter operatório”. (Vergnaud, 1991, p.257).

Retomando os elementos que compõem o tripé que dá sustentação à teoria (a situação, a representação e os invariantes), é justamente sobre esse último aspecto que recairá a análise que se pretende realizar, pois são esses os elementos embutidos nas noções que fazem parte das noções aritméticas iniciais. Saber que somar aumenta e subtrair diminui (para os números naturais); que uma anula a outra (pois uma operação direta composta com sua inversa é anulada, resultando em um elemento neutro); assim como dominar a noção de composição aditiva supõe a idéia de inclusão (o 2 inclui o 1; o 3 inclui o 2 e o 1 e assim sucessivamente), são exemplos de invariantes necessários ao domínio das noções aritméticas iniciais.

Dado que nos procedimentos de ordenar e de classificar, além da noção de conservação de quantidades numéricas, estão embutidos invariantes que também compõem a noção de número, resta retornar à questão inicial: faz-se necessário exercitar tais invariantes por meio da inserção de atividades lógicas envolvendo a classificação, a seriação e a conservação de quantidades numéricas, ou tais invariantes serão inexoravelmente ativados por meio do desenvolvimento de atividades ligadas às estruturas aditivas?

A apresentação feita na próxima sessão, a respeito dos problemas de estrutura aditiva poderá trazer novos elementos para a análise que se pretende realizar.

7. Os problemas de estrutura aditiva

Vergnaud (1991) define estruturas ou relações aditivas como aquelas formadas por adições ou subtrações, destacando que não há apenas um tipo de estrutura desse tipo. Uma forma de relação aditiva é, por exemplo, somar duas medidas, o que resultará em uma outra, sem nenhuma transformação envolvida. Um exemplo de problema desse tipo seria: “Em uma festa há nove meninos e sete meninas. Quantas crianças há no total?” O autor usa ainda o seguinte modelo: estado inicial – transformação – estado final, o que implica em afirmar que sobre um estado inicial incide uma transformação, que engendrará um estado final, exemplo: “Pedro tinha quatro carrinhos, perdeu um, com quantos carrinhos ficou?”

As relações aditivas são ternárias, podendo encadear-se de diversas maneiras e gerar vários tipos de adições e subtrações. Vergnaud (1991) define ao menos seis categorias problemas, conforme as relações implícitas nas estruturas aditivas:

- Primeira categoria: duas medidas compõem-se para dar lugar a uma outra medida.
- Segunda categoria: uma transformação opera sobre uma medida gerando outra medida.
- Terceira categoria: uma relação une duas medidas.
- Quarta categoria: duas transformações se compõem gerando uma outra transformação.

- Quinta categoria: uma transformação opera uma relação, gerando outra relação (ou estado relativo).
- Sexta categoria: duas relações (ou estados relativos) compõem-se para dar lugar a um estado relativo.

Há que se considerar que, mesmo dentro de cada categoria há graus diferentes de dificuldade entre os problemas, uma vez que o cálculo relacional envolvido nas soluções de cada um é diferente. Por exemplo, nos problemas de segunda categoria encontram-se aqueles nos quais basta aplicar uma transformação direta a um estado inicial, seja por adição, seja por subtração. Já há outros problemas da mesma categoria, nos quais as crianças devem raciocinar por complemento ou por diferença, procedimentos muito complexos para as crianças mais jovens.

No caso do procedimento de complemento, as crianças devem buscar, sem fazer subtração, o que precisa ser acrescentado ou tirado de um estado inicial para se chegar ao resultado final. Tal procedimento já pode ser utilizado por crianças desde tenra idade, por não exigir nenhum tipo de cálculo relacional complexo, uma vez que só é possível com números pequenos ou com aqueles que permitam cálculo mental. Já o procedimento de diferença, mais complexo que o anterior, por requerer um tipo de cálculo relacional mais elaborado, tem como característica a busca por subtração entre os dois estados e a transformação.

A constatação de que há vários tipos de problemas de estrutura aditiva, definidos pelos invariantes diversos de cada situação, permite uma análise mais refinada das respostas das crianças. É possível identificar em cada forma de resolução e de representação empregadas, elementos que possam trazer luz à questão da construção das noções aritméticas iniciais. A maneira pela qual um sujeito resolve um problema e depois representa sua solução revela dados importantes a respeito dos invariantes em questão, das filiações e rupturas entre esquemas utilizados, além da possibilidade de verificação de como o sujeito pode ser capaz (ou não) de construir e de reorganizar dentre seu repertório de esquemas aqueles que possam dar uma resposta adequada ao problema proposto.

Segundo Nunes (1997), as crianças pequenas já conseguem resolver problemas de adição e subtração por meio da contagem, especialmente quando se trata de uma situação na qual uma transformação está envolvida. Um exemplo disso pode ser o caso da transformação de uma quantidade acrescentando ou tirando elementos, por exemplo, no caso do seguinte problema: “João tinha 3 figurinhas, ganhou 2, com quantas ficou?”. Porém, isto não quer dizer que todos os problemas de transformação tenham o mesmo grau de dificuldade.

Há outros casos, como as situações de comparação, quando ocorre a quantificação de comparações, por exemplo, “João tem 5 balas, Paulo tem 3, quem tem mais?”. Ou ainda as que tratam da noção de parte-todo, quando os números referem-se a conjuntos de objetos, por exemplo, “em um aquário 5 peixes são vermelhos, 3 são amarelos,quantos há ao todo?”.

Em consonância com a teoria de Vergnaud, Nunes (1997) afirma que as dificuldades de um problema são devidas aos invariantes da adição/subtração ou operações de pensamento envolvidas na situação. Assim, por exemplo, há problemas de transformação fáceis e difíceis, por exemplo, aqueles cuja transformação é desconhecida, são mais difíceis do que aqueles nos quais há a abordagem direta. Além disso, há formas diferentes de resolver problemas, como usar blocos ou dedos por meio de contagem ou por subtração (percebendo-a como o inverso da adição).

Assim, segue a mesma autora, a dificuldade de um problema está relacionada à análise das situações e os invariantes utilizados para resolvê-lo, assim como ao papel das ferramentas utilizadas pelas crianças; por exemplo, o uso dos dedos e objetos para contar, os sistemas de representação empregados, tais como as notações próprias, como marcas ou desenhos de dedos.

Há ainda um outro aspecto a ser considerado, o qual também influencia no grau de dificuldade de um problema, que se refere à extensão dos valores numéricos. Estas são contribuições que remetem à proposição já mencionada, de Gréco e Morf (1962), de que ocorre uma aritmetização progressiva dos números.

8. Os exercícios operatórios

Tendo como pano de fundo três aspectos básicos e indissociáveis da teoria piagetiana, quais sejam, a dimensão biológica, o ponto de vista interacionista e o construtivismo genético, Inhelder, Bovet e Sinclair (1977) buscaram examinar a possibilidade de se provocar, sob certas condições, a construção de noções operatório-concretas, condições essas caracterizadas pelos exercícios operatórios. Tais exercícios poderiam ampliar a atividade espontânea do sujeito, por meio do conflito cognitivo causado pela interação sujeito/objeto e a intervenção do experimentador.

Assim, segundo as autoras, a partir do conflito cognitivo podem ser construídos novos esquemas, uma vez que os exercícios operatórios alimentam os esquemas prévios do sujeitos, o que leva a uma necessidade de reorganização de seu sistema psicogenético, gerando extensão progressiva de esquemas já existentes a situações novas.

Inhelder, Bovet e Sinclair (1977) tinham como objetivo compreender os mecanismos de transição de um nível ao seguinte quanto às noções principais do desenvolvimento, no sentido de verificar as filiações e conexões entre elas, guiadas pela hipótese de que a aprendizagem requer modelos de regulação.

Vale considerar que tal abordagem apóia-se na diferença, tal como formulada por Piaget, entre aprendizagem em seu sentido estrito e no sentido amplo, considerada como o processo de desenvolvimento em si. Segundo Piaget (1971), o processo de aprendizagem refere-se ao que é aprendido por meio de algum tipo de interferência, à medida que envolve estruturas específicas, bem como conteúdos determinados.

O desenvolvimento para Piaget (1964) tem um caráter mais amplo, por ser um mecanismo que envolve estruturas do sistema nervoso, além das experiências de interação do indivíduo com a realidade. O desenvolvimento é que dá suporte para a aprendizagem, sendo determinado pelo processo de formação das estruturas de conhecimento. Já a aprendizagem refere-se a um conceito ou noção específica.

É no processo de equilibração que as estruturas são construídas. Talvez seja este o ponto principal da teoria da epistemologia genética, uma vez que explica a marcha inexorável do indivíduo em direção a graus maiores e melhores de equilíbrio.

Assim, Piaget (1964) assevera a ocorrência de aprendizagem que, quando concerne aos conceitos ou noções lógicas, ficou conhecida como aprendizagem operatória. Para que haja esta aprendizagem referente às estruturas, Piaget diz ser necessário respeitar três exigências ou critérios: em primeiro lugar, o aprendizado deve ser duradouro. O segundo fator a ser considerado é a possibilidade de generalização desse aprendizado, com extensão a outras estruturas. Por fim, deve ser levado em conta o nível operacional do sujeito antes da experiência e quais foram os acréscimos obtidos, em termos de estruturas mais complexas. Tais critérios serão empregados neste estudo.

CAPÍTULO III

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A pesquisa foi executada em fases, as quais caracterizam o estudo como seguindo um modelo experimental, do tipo pré e pós teste, com grupo controle. A primeira delas consistiu em um pré-teste; a seguir foi realizado um programa de intervenção; finalmente foram aplicados dois pós-testes.

1. SUJEITOS

Foram selecionados, mediante sorteio aleatório, 20 sujeitos de ambos os sexos, alunos de uma turma de Jardim III (entre 5 e 6 anos) de uma escola da rede particular da cidade de Curitiba (PR). Esses sujeitos foram escolhidos dentre um grupo numericamente mais extenso que foi submetido ao pré-teste.

A partir do resultado do pré-teste (vide adiante) é que foram sorteados os 20 sujeitos que seguiram no estudo. Esses foram escolhidos por sorteio aleatório do grupo dos que não obtiveram (no pré-teste) resultado que indicasse domínio das noções de composição aditiva de números; de inversão adição/subtração; assim como de problemas de estrutura aditiva. Também foi aleatória a distribuição desses sujeitos pelos sub-grupos, os quais foram compostos por cinco sujeitos.

Essa forma de selecionar os sujeitos teve como objetivo o controle dos grupos, pois, para que se pudesse verificar eventuais avanços nos grupos experimentais e no grupo controle, deveriam ser excluídos da amostra sujeitos que já apresentassem domínio das noções estudadas, assim como das soluções dos problemas.

Em razão do tamanho da amostra não foi aplicado nenhum tipo de análise estatística.

Foram realizadas três sessões individuais de trabalho (com intervalo aproximado de dois dias entre elas) para cada um dos sujeitos, os quais foram sorteados para serem submetidos a diferentes tratamentos. Cada grupo experimental foi composto por cinco sujeitos.

2. FASES DO ESTUDO

O estudo foi dividido em quatro fases distintas, abaixo identificadas.

2.1. FASE 1: PRÉ-TESTE

Foram aplicadas duas provas envolvendo respectivamente as noções de composição aditiva de números e da inversão adição/subtração. Além disso, foram propostos dois problemas de estrutura aditiva, sendo um de primeira categoria (duas medidas se compondo para dar lugar a uma outra medida) e outro de segunda categoria, envolvendo uma transformação (modelo: estado inicial – transformação – estado final). Os tipos de problemas foram extraídos de Vergnaud (1991).

A primeira prova teve como objetivo verificar a composição aditiva de números, ultrapassando a questão da correspondência termo-a-termo, no sentido de examinar o domínio do mecanismo operatório de estrutura aditiva. Tal prova consistiu em verificar a compreensão da identidade de um todo, por meio das diferentes composições aditivas de suas partes. A escolha de tal prova recaiu no fato de que a reunião de partes em um mesmo todo constitui uma das operações fundamentais que compõem a adição e estão na raiz da compreensão do número (Piaget e Szeminska, 1971).

A segunda prova tratou da noção da inversão adição/subtração, e teve como objetivo verificar o domínio da relação "tem mais" e "tem menos", no sentido de constatar se compreendiam e calculavam a quantificação da diferença, por conta da noção de que uma ação inversa compensa a anterior.

Quanto aos problemas de estrutura aditiva, foram escolhidos um de cada tipo, entre os de primeira e segunda categorias, por serem os mais adequados à faixa etária. Não foram apresentados problemas de transformação não-direta que envolvem os procedimentos de complementação; tampouco aqueles que envolvem o procedimento de diferença. Isso se deve ao fato de em estudo piloto ter sido verificada a impossibilidade de crianças dessa faixa etária trabalharem com tais procedimentos.

Há que se considerar que a complexidade dos problemas de estrutura aditiva pode variar em função de dois fatores: as já citadas diferentes categorias de relações numéricas, além das diversas classes de problemas que se pode formular para cada categoria. A título de exemplo, é possível destacar duas classes diferentes de problemas de segunda categoria: *em uma sala-de-aula há 4 crianças, entram mais 6, quantas há agora? Em uma carteira de dinheiro havia 7 reais, ficaram 12 reais na carteira após a criança receber sua mesada, de quanto foi sua mesada?*

Dessa maneira, o fator responsável pelos diferentes níveis de complexidade entre os problemas são os cálculos relacionais envolvidos. No primeiro exemplo acima citado, trata-se da aplicação direta de uma transformação sobre um estado inicial, ao passo que o segundo exemplo exige um cálculo relacional mais elaborado, uma vez que se trata de uma subtração, mesmo tendo havido aumento da quantidade final.

As provas e problemas aplicados no pré-teste foram as seguintes:

PROVA DE COMPOSIÇÃO ADITIVA DE NÚMEROS: compreensão da identidade de um todo mediante diversas composições aditivas de suas partes.[3]

Materiais

Duas coleções de fichas de plástico.

Procedimentos

O experimentador distribuía 8 fichas sobre a mesa, formando 2 quadrados (arranjadas de 4 em 4, de modo que cada uma delas fosse um vértice do quadrado). Dizia que se tratavam de balas, as quais poderiam ser ingeridas por uma criança, sendo as 4 primeiras pela manhã, e as 4 restantes de tarde. Em seguida, distribuía mais 8 fichas sobre a mesa, dessa vez, de maneira diferente:

[3] Prova inspirada em PIAGET, J. & SZEMINSKA, A. *A gênese do número na criança.* Trad.C. M. Oiticica. Rio de Janeiro: Zahar, 1971

colocava 1 ficha e depois arranjava as outras 7 e, apontando para a primeira ficha, dizia que a criança teve vontade de *comer este tanto de manhã,* apontando, em seguida, para as demais, dizendo que *a criança deixou para comer esse tanto de tarde*. A pergunta que se fazia era a seguinte: "A criança comerá o mesmo tanto de balas nos dois dias?"

PROVA DA NOÇÃO DE INVERSÃO ADIÇÃO/SUBTRAÇÃO[4]

Materiais

Duas coleções de tampinhas de duas cores diferentes com vinte elementos em cada uma.

Procedimentos

O experimentador alinhava em fila 5 elementos de uma coleção de mesma cor e convidava o sujeito a fazer o mesmo com a coleção de outra cor, caso ele não conseguisse, o experimentador levava-o a fazê-lo. Em seguida perguntava se havia o mesmo tanto de tampinhas nas duas coleções, pedindo que justificasse. A seguir o experimentador chamava a atenção do sujeito para o fato de que uma linha poderia ficar diferente da outra, com mais ou menos elementos, pondo ou tirando tampinhas. Mostrava retirando elementos de sua coleção e, após recolocá-los, pedia que o sujeito fizesse com que a linha dele ficasse com mais tampinhas do que a do experimentador, dizendo que ele poderia acrescentar quantas tampinhas quisesse. O experimentador ia perguntando: "O que aconteceu? Tem mais? Tem menos? Por quê?" A seguir, pedia que o sujeito deixasse sua linha com a mesma quantidade que a do experimentador, lembrando que ele poderia por ou tirar elementos de qualquer das coleções. Caso ele optasse por colocar todos os elementos de sua coleção, sem deixar sobras, o experimentador pedia que o sujeito deixasse sua fila com a mesma quantidade da fila do experimentador. Perguntava: "E agora, tem o mesmo tanto nas duas linhas? Por quê?" Uma vez estando as duas linhas com a mesma quantidade, o experimentador perguntava: "Agora a sua linha tem que ficar com mais tampinhas

---

[4] Prova inspirada em MORO, M.L.F. & BRANCO, V. *A aprendizagem construtivista no início da escola elementar e o papel da interação social das crianças*. Relatório preliminar de pesquisa. Curitiba, UFPR, 1990.

que a minha, só que dessa vez você não pode colocar nenhuma tampinha. O que vai fazer?" Se fosse necessário repetia a explicação, dizendo que poderia fazer outras coisas, exceto colocar mais tampas. No final, pedia que justificasse sua resposta.

PROBLEMA DE ESTRUTURA ADITIVA 1: composição de duas medidas resultando em uma outra medida

Em uma festa de aniversário há 9 meninas e 7 meninos. Quantas crianças há ao todo?

PROBLEMA DE ESTRUTURA ADITIVA 2: transformação positiva sobre um estado inicial

Um menina tinha 8 reais, ganhou de sua avó 9 reais, com quantos reais ela ficou?

2.2. FASE 2: PROGRAMA DE INTERVENÇÃO

Cada grupo experimental foi submetido às seguintes condições:

GE1: aplicação de exercícios operatórios.

GE2: aplicação de exercícios operatórios e de problemas de estrutura aditiva.

GE3: aplicação de problemas de estrutura aditiva.

GC (grupo controle): aplicação de tarefas placebo.

Os exercícios operatórios, assim como os problemas e as tarefas placebo, foram distribuídos ao longo das sessões, de acordo com o tempo estimado para cada uma delas (cerca de 20 minutos). Os encontros com cada sujeito tinham um intervalo aproximado de quatro dias. No total, a fase de coleta de dados teve duração de dois meses e meio. Cada sessão tinha lugar em uma sala na própria escola onde estudam. Pelo fato de o experimentador ser conhecido pelos sujeitos não houve necessidade de uma fase de aproximação.

Foram consideradas algumas condições para a realização dos exercícios operatórios, de acordo com as proposições de Inhelder, Bovet e Sinclair (1974), condições essas que foram estendidas à solução dos problemas de estrutura aditiva, quais sejam:

- Os sujeitos tinham possibilidade de manipular materiais concreto-manipuláveis, assim como suportes e instrumentos gráficos para a produção de notações.
- Foram levados em conta os níveis de partida dos sujeitos por meio da avaliação feita no pré-teste.
- Os exercícios e problemas foram compostos por procedimentos que levavam em conta todos os aspectos das noções lógicas focalizadas nas tarefas, assim como nos problemas.
- Os sujeitos tiveram liberdade de escolher suas estratégias.
- Procurou-se garantir a comunicação entre o experimentador e o sujeito durante o experimento, de modo que o experimentador buscava sinônimos quando alguma expressão não era bem compreendida.

Com o intuito de proporcionar um volume de trabalho similar para todos os grupos, as sessões foram programadas conforme a duração e a quantidade de tarefas propostas. Por esse motivo, os exercícios operatórios foram desmembrados em tarefas, com o intuito de dividir adequadamente a carga de trabalho para cada grupo, segundo os diferentes tipos de tratamento, assim como o tempo de duração de cada sessão.

Dessa maneira, o tempo de trabalho foi semelhante, mas a qualidade do tratamento dispensado foi diferente, o que significa que o GE3 foi submetido a uma carga maior de problemas de estrutura aditiva do que o GE2, tendo em vista que parte do tempo de trabalho desse último grupo foi dedicada também aos exercícios operatórios, o que não ocorreu no GE3. Da mesma maneira, o GE1 recebeu um volume maior de trabalho com exercícios operatórios do que o GE2, pois este grupo também teve parte de seu tempo dedicada aos problemas de estrutura aditiva.

Cabe considerar que durante a aplicação dos exercícios operatórios e dos problemas de estrutura aditiva a atuação do experimentador esteve pautada por uma postura ativa e não de mero espectador. Isto se deve ao foco da pesquisa em si, uma vez que interessava verificar a aprendizagem de noções aritméticas a partir da proposição de problemas de estrutura aditiva e de exercícios operatórios, o que implica, dentre outros aspectos, a interação entre o sujeito e o experimentador, entendido esse último como elemento desencadeador de conflitos cognitivos que levam à construção de novos conhecimentos. Neste modelo de intervenção interessa não somente observar as estratégias empregadas pelos sujeitos, mas também saber observar e escutar o que dizem, além de verificar os argumentos utilizados para justificar as respostas. Criar situações de contra-argumentação, tendo em vista alguma contradição que se apresenta, também faz parte da atuação do experimentador.

Os exercícios, com suas respectivas tarefas, foram os seguintes:

QUANTIFICAÇÃO DA INCLUSÃO DE CLASSES (Q).

<u>Materiais</u>

Duas coleções de animais de plástico, sendo uma amarela e outra vermelha, compostas por várias espécies, tais como cavalos, vacas, leões, ursos etc.

<u>Procedimentos</u>

Tarefa Q1: comparação sucessiva entre coleções modelo e coleções construídas pelos sujeitos em conjunto.

Inicialmente o pesquisador deixava os sujeitos à vontade com o material, para que pudessem manuseá-lo. Enquanto isso fazia perguntas sobre os nomes dos bichos, para verificar se conheciam as espécies apresentadas, além de se certificar que reconheciam a classe maior como sendo de “bichos”. Em seguida o experimentador montava para si uma coleção amarela, dizendo que aqueles eram os bichos dos quais cuidaria, propondo que o sujeito montasse uma coleção vermelha para que pudesse ter bichos para cuidar também. Para tanto, o experimentador dizia que a coleção vermelha da criança deveria ter o mesmo número de bichos da coleção amarela do experimentador. Foram montadas 3 coleções-modelo (amarelas):

- Coleção nº 1: 4 ursos e 2 camelos
- Coleção nº 2: 2 leões e 4 ursos
- Coleção nº 3: 4 leões e 2 camelos

As propostas feitas foram as seguintes:

Para a coleção nº 1: *Pegue mais camelos, mas lembre-se de que as duas coleções devem ter o mesmo número de bichos, para que ninguém fique triste.*

Para a coleção nº 2: *Pegue menos ursos, mas lembre-se de que as duas coleções devem ter o mesmo número de bichos, para que ninguém fique triste.*

Para a coleção nº 3: *Pegue menos leões, mas lembre-se de que as duas coleções devem ter o mesmo número de bichos, para ninguém fique triste.*

Tarefa Q2: perguntas diante de duas coleções presentes simultaneamente

O pesquisador montava uma coleção modelo e pedia que o sujeito montasse uma outra de acordo com as instruções:

- Coleção modelo (vermelha): 4 cangurus e 2 leões
- Coleção da criança (amarela): 2 cangurus e 4 leões

Em seguida fazia as seguintes perguntas:

Será que alguém tem mais leões?

Será que alguém tem mais bichos?

Será que alguém tem mais cangurus?

Eu quero cuidar de todos os cangurus (apontando a coleção vermelha) *e você vai cuidar de todos os bichos, quem vai cuidar de mais coisas?*

Tarefa Q3: perguntas diante de uma coleção

Pedia que o sujeito construísse 2 coleções assim constituídas:

- Coleção 1: 4 leões e 2 cangurus
- Coleção 2: 2 leões e 4 cangurus

Em seguida perguntava:

Coleção 1: *Você tem mais leões ou bichos?*

Coleção 2: *Você tem mais cangurus ou bichos?*

SERIAÇÃO (S)

<u>Materiais</u>

2 conjuntos de 10 faixas de papelão, com 3 cm de largura, alturas variando entre 20 e 32cm, e diferença de 1cm entre cada uma.

<u>Procedimentos</u>

Tarefa S1: construção de séries parcial e total

O experimentador distribuía 5 faixas, com uma diferença crescente de 2cm entre si, e pedia que fossem seriadas por ordem de tamanho, por exemplo, do menor para o maior. Em caso de arranjo incorreto, o experimentador deixava que assim ficasse.

Tarefa S2: construção, pelo experimentador, de um arranjo desordenado.

O experimentador fazia um arranjo desordenado com as 10 faixas e perguntava a opinião do sujeito sobre ele: *Está bem assim? Por quê?* Caso houvesse interesse, poderia arrumar a série. O experimentador perguntava: *Por quê você arrumou assim?*

Tarefa S3 (somente para caso de sucesso em S2): construção pelo sujeito de 2 séries no mesmo sentido.

A partir do arranjo feito em S2, o experimentador distribuía o segundo conjunto de 10 faixas e pedia que fosse feita abaixo uma série igual. Em seguida, independentemente de estar correto ou não, fazia perguntas:

Por quê você fez assim?

Qual faixa é a amiga desta aqui na outra fila?

Na outra fila, onde estão as faixas menores que esta aqui?

Esta é maior ou menor que esta?

Tarefa S4: construção pelo sujeito de duas séries de sentido inverso.

Mantendo uma das séries de S3, o experimentador desfazia a outra e pedia que o sujeito refizesse a série, mas em sentido inverso. Em seguida, pedia que explicasse por que fez daquela maneira e fazia as seguintes perguntas:

Qual faixa é a amiga desta na outra fila?

Por que esta fica neste lugar e esta outra fica em outro lugar?

Onde estão, naquela fila, os que são maiores que este aqui?

Este é maior ou menor que este aqui?

CONSERVAÇÃO DE QUANTIDADES NUMÉRICAS (N)

Tarefa N1:

Materiais

Palitos de fósforo.

Procedimentos

O experimentador certificava-se de que o sujeito soubesse contar até 10, pedindo que fizesse uma coleção de 10 palitos. O experimentador fazia também uma coleção de 10 palitos para si. Em seguida, fazia uma fila com 6 deles, de modo que ficassem lado a lado na posição horizontal, e pedia que o sujeito fizesse uma composição como a sua, com o mesmo tanto de palitos. Em seguida fazia uma série de montagens diferentes, por exemplo, intercalando um palito na horizontal e outro na vertical; fazendo um caminho em forma de “u”; desalinhando a coleção modelo em relação à do sujeito (de modo que as extremidades não coincidissem). O experimentador ia perguntando se havia o mesmo tanto igual de palitos, sempre pedindo que justificasse sua resposta.

Tarefa N2:

Materiais:

20 botões, sendo 10 pretos e 10 azuis.

Procedimentos:

O experimentador certificava-se de que o sujeito soubesse contar até 10, pedindo que escolhesse uma cor de botões e fizesse uma coleção de 10 deles. O experimentador fazia também uma coleção de 10 para si. Em seguida, montava uma coleção de 8 botões, arranjados em fila, e pedia que fosse montada uma coleção abaixo que tivesse menos botões que a coleção-modelo. Perguntava, então, quantos botões havia em cada uma delas e quantos a menos havia na fila feita pelo sujeito. Em seguida, passava a fazer deformações em sua fila, arranjando-a de modo que os comprimentos das duas filas ficassem iguais, e perguntava se continuava a haver menos botões na fila do sujeito. Depois arranjava as duas filas em forma de círculo; em pilha e aleatoriamente, sempre repetindo a pergunta (se continuava a haver menos botões na fila do sujeito) e pedindo que justificasse sua resposta.

PROBLEMAS DE ESTRUTURA ADITIVA (P)

Foram aplicados dois tipos diferentes de problemas de estrutura aditiva tal como colocado por Vergnaud (1991): aqueles de primeira categoria, os quais envolvem a composição de duas medidas para resultar em uma outra medida; além dos problemas de segunda categoria, que trazem uma transformação sobre um estado inicial resultando em um estado final.

Foram deixados disponíveis materiais de contagem, papel sulfite e canetas hidrocor. Ao final da solução de cada problema, o experimentador convidava o sujeito a marcar como descobriu a resposta, com perguntas do tipo: *Marque, desenhe, escreva com números, do jeito que você quiser, o que aconteceu com...*

Problema 1 (P1): transformação positiva sobre o estado inicial.

Em um ônibus havia 11 pessoas. Subiram mais 6, quantas ficaram no total?

Problema 2 (P2): transformação negativa sobre o estado inicial.

Mariana tinha 9 balas, deu 3 para sua amiga. Com quantas ficou?

Problema 3 (P3): composição de duas medidas resultando em uma outra medida.

Em um aquário há 8 peixes azuis e 5 peixes vermelhos. Quantos peixes há ao todo?

Problema 4 (P4): composição de duas medidas resultando em uma outra medida.

Em uma sala de aula há 12 meninos e 13 meninas. Quantas crianças há ao todo?

Problema 5 (P5): composição de duas medidas resultando em uma outra medida.

Um menino tem 9 carrinhos azuis e 5 amarelos. Quantos carrinhos ele tem ao todo?

Problema 6 (P6): transformação negativa sobre o estado inicial.

Um menino tinha 12 reais, gastou 5 reais. Com quantos reais ficou?

Problema 7 (P7): transformação positiva sobre o estado inicial.

Em um jogo de futebol um time fez 7 gols no primeiro tempo e depois fez mais 5 gols no segundo tempo, quantos gols fez ao todo?

Problema 8 (P8): transformação positiva sobre o estado inicial.

Uma menina tinha 7 lápis em seu estojo, depois ganhou mãos 6 lápis, com quantos ficou ao todo?

Problema 9 (P9): transformação negativa sobre o estado inicial.

Um menino tinha 12 figurinhas, deu 4 para um amigo, com quantas ele ficou?

A distribuição das sessões de trabalho foi a seguinte:

GE1 (Exercícios operatórios).

1ª sessão: para as noções de seriação (S) e quantificação da inclusão de classes (Q) foram aplicadas as tarefas S1, S2, Q1.

2ª sessão: em relação à noção de seriação, além daquela de conservação de quantidades numéricas (N) foram aplicadas as tarefas S3, S4, N1, N2.

3ª sessão: foram aplicadas as tarefas Q2, Q3 para a noção de quantificação da inclusão de classes (Q).

GE2 (Exercícios operatórios e problemas de estrutura aditiva).

1ª sessão: para as mesmas noções do grupo anterior foram aplicadas as tarefas S1, S2, Q1; além do problema P1.

2ª sessão: para as mesmas noções do grupo anterior foram aplicadas as tarefas S3, N1, N2; além do problema P3.

3ª sessão: para as mesmas noções do grupo anterior foram aplicadas as tarefas Q2, Q3, além do problema P5.

GE3 (Problemas de estrutura aditiva).

1ª sessão: Problemas P1; P3; P9.

2ª sessão: Problemas P2; P4; P7.

3ª sessão: Problemas P5; P6; P8.

GC (Tarefas placebo).

1ª sessão: Jogo da memória.

2ª sessão: Jogo da velha/forca.

3ª sessão: Cruzaletras (Grow).

FASE 3: PÓS-TESTE 1

Com o objetivo de verificar avanços em relação aos níveis identificados no pré-teste, foi aplicado um pós-teste, o qual consistiu em provas similares àquelas do pré-teste, quais sejam, aquelas relativas às noções da composição aditiva de números e de inversão adição/subtração. Foram empregados os mesmos procedimentos do pré-teste já descritos anteriormente, mas com outros materiais.

FASE 4: PÓS-TESTE 2

Com uma diferença de cinco semanas do primeiro, foi aplicado o segundo pós-teste, também com provas equivalentes às do anterior. Houve perda amostral no pós-teste 2, quando um dos sujeitos do GE1 não participou desta fase da avaliação.

O pós-teste 2 teve como objetivo a verificação da estabilidade da aprendizagem antes obtida a curto prazo (níveis das noções no pós-teste 1), admitindo-se que um dos critérios para que ocorra aprendizagem de uma estrutura é sua estabilidade (Piaget, 1964).

A justificativa para o fato de terem sido avaliadas noções diferentes daquelas treinadas nos exercícios operatórios também repousa em um dos critérios descritos por Piaget (1964): para que ocorra aprendizagem operatória deve haver extensão dos efeitos das noções exercitadas para as noções conexas. É por essa razão que foram avaliadas as noções de composição aditiva de números e de inversão adição/subtração, e exercitadas as noções de seriação, quantificação da inclusão de classes e de conservação de quantidades numéricas. Apenas os problemas de estrutura aditiva foram propostos tanto nas fases de avaliação como nas sessões de trabalho (nessas últimas apenas para o GE2 e GE3).

As sessões de trabalho do programa de intervenção foram filmadas em vídeo. Os dados ali registrados foram transcritos literalmente para análise posterior, resultando em protocolos correspondentes a cada sessão, tendo sido feitas duas revisões minuciosas das gravações e suas respectivas transcrições. A partir desse primeiro nível de registro dos dados foram realizadas as análises das estratégias empregadas pelos sujeitos em cada exercício ou solução de problema, assim como de suas transformações.

3. PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DOS DADOS

Os dados obtidos no pré-teste e nos pós-testes foram analisados segundo critérios estabelecidos de acordo com os diferentes níveis de realizações dos sujeitos, assim como em relação às várias formas de representação utilizadas.

Vale ressaltar que para a análise das provas de composição aditiva de números e para a da noção da inversão adição/subtração foram utilizados critérios disponíveis na literatura, sendo eles: não-operatório, intermediário e operatório (Moro, 1998).

Os critérios utilizados para a análise foram os seguintes:

NOÇÃO DE INVERSÃO ADIÇÃO/SUBTRAÇÃO

Primeiro nível: não operatório (NO).

1) Condutas não operatórias menos adiantadas (NO-).

O sujeito não consegue compor sozinho uma coleção igual à coleção modelo, exceto se obtiver ajuda do experimentador. Apresenta contagem insegura, respostas incorretas ou inseguras. Demonstra admitir alteração da quantidade de acordo com disposição espacial dos elementos.

2) Condutas não operatórias mais adiantadas (NO+).

Consegue realizar sozinho uma coleção igual à coleção modelo mediante correspondência termo-a-termo visual. Identifica o aumento e a diminuição de elementos das coleções expressando-se por meio de termos como “pôr mais; tem mais; tirando diminui” etc. Porém, mediante o pedido-chave para que uma linha fique com mais sem que seja acrescentado nenhum elemento a ela, altera sua disposição espacial, espaçando ou aproximando os elementos; afirma que não há solução; desalinha as filas.

Segundo nível: intermediário (I).

1) Condutas intermediárias menos adiantadas (I-).

Inicialmente apresenta condutas tais como de NO+ (quer espalhar os elementos), mas depois quando lhe é perguntado se houve alteração da quantidade, responde que não e retira elementos da outra coleção para acrescentá-los à primeira, misturando elementos das duas.

2) Condutas intermediárias mais adiantadas (I+).

Inicialmente apresenta condutas tais como de NO+, mas depois diz que não sabe como fazer. Argumenta dizendo não poder tirar elementos de uma linha e por na outra por não poder tirar de uma para colocar na outra. Só chega à solução correta quando o experimentador diz que ele pode mexer nas fichas da outra linha.

Terceiro nível: operatório (O).

O sujeito soluciona o problema-chave retirando elementos da outra fila.

NOÇÃO DA COMPOSIÇÃO ADITIVA DE NÚMEROS: compreensão da identidade de um todo mediante diversas composições aditivas de suas partes.

Primeiro nível: não operatório (NO).

O sujeito nega a igualdade dos dois conjuntos, mesmo que tenha contado e verificado a equivalência ainda assim continua negando.

Segundo nível: intermediário (I).

1) Condutas intermediárias menos adiantadas (I-): da equivalência obtida por correspondência ou enumeração.

O sujeito começa negando a equivalência, mas mediante contra-argumentação passa a afirmá-la, apoiando-se na verificação por correspondência termo-a-termo ou contagem, mas sem ainda apresentar justificativa operatória.

2) Condutas intermediárias mais adiantadas (I+): da equivalência afirmada sem justificativa operatória.

A equivalência é afirmada desde o início, mas não há justificativa operatória (justificativas apoiadas na contagem).

Terceiro nível: operatório (O): da equivalência imediata com justificativa operatória.

O sujeito afirma a equivalência justificando-a pela conservação da identidade inicial dos dois conjuntos.

Já para os problemas de estrutura aditiva, foram utilizados alguns indicadores para análise, retirados das obras de alguns autores de referência, dentre os quais Vergnaud (1991), Nunes (1997) e Moro (2004; 2005).

Do primeiro autor, foram tomados os indicadores que dizem respeito aos tipos de realizações empregadas pelos sujeitos nas duas categorias de problemas de estrutura aditiva propostos. Assim, para o caso dos problemas de transformação, foram analisados os aspectos envolvidos na concepção do sujeito de um estado inicial, do elemento transformador e de seu estado final. Além disso, foi também analisada a maneira como cada sujeito compunha uma grandeza a partir da composição de duas parcelas.

De Nunes (1997) foram retirados elementos importantes para a análise, referentes às constatações a respeito das formas de contagem empregadas pelas crianças, as quais podem expressar níveis diferentes de compreensão numérica. Assim, um sujeito que utiliza a estratégia de contar todos os elementos de duas coleções (*counting-all*), expressa um nível diferente de raciocínio daquele que se utiliza do procedimento de contar a partir do cardinal de um conjunto e seguir contando até o final (*counting-on*).

De Moro (2004; 2005) foram retiradas algumas categorias, determinadas em função dos tipos de realização, associadas às formas de notação empregadas. Assim, no caso dos problemas de estrutura aditiva, foram consideradas não somente as formas de resoluções dos problemas propostos, mas também os tipos de notações produzidas pelos sujeitos, além das interpretações dadas.

Os critérios utilizados para a análise dos tipos de soluções dos problemas de estrutura aditiva foram os seguintes:

Primeiro nível: menos adiantado (A-).

O sujeito não consegue conceber a inclusão de classes, não considerando, por exemplo, meninos e meninas como crianças; fornece um dos dados numéricos do problema como resposta; não consegue estabelecer uma estratégia de contagem, não realizando correspondência termo-a-termo; as parcelas contadas não guardam relação com os valores numéricos dados; fornece resposta aleatória; diz que não sabe; separa o material de contagem para uma das parcelas do problema e depois passa a contar aleatoriamente.

Segundo nível: intermediário menos adiantado (I-).

O sujeito separa o material de contagem, compondo as parcelas do problema, mas depois não sabe qual operação deve realizar; utiliza a estratégia de contar todos (*counting all*), sempre com o apoio do material concreto ou dos dedos, estabelecendo correspondência termo-a-termo entre os dedos/material e os algarismos.

Terceiro nível: intermediário mais adiantado (I+).

Utiliza a estratégia de contar na sequência (*counting-on*), ou seja, parte do total da primeira parcela e segue contando os elementos do segundo conjunto, sempre com o apoio do material concreto ou dos dedos.

Quarto nível: adiantado (A+).

O sujeito utiliza a estratégia de contar na sequência (*counting-on*) mediante cálculo mental, sem necessitar do apoio de material concreto nem dos dedos.

No que diz respeito aos dados obtidos no programa de intervenção, foram eles analisados levando-se em conta alguns de seus aspectos qualitativos, com apoio em uma análise microgenética, de acordo com as proposições de Inhelder e Cellérier (1992). Segundo os autores, tal tipo de análise tem relação com a maneira como um sujeito, partindo daquilo que já sabe, cria novas condutas para resolver uma situação. A opção por tal forma de análise vem ao encontro da necessidade de verificação dos procedimentos utilizados pelo sujeito mediante essa abertura a novos possíveis.

Em trabalho anterior, já foi colocada a pertinência desse tipo de análise, especialmente se for feita uma opção por uma análise funcional, em detrimento de uma estrutural (Pannuti, 1998).

Isso quer dizer que foram privilegiados aspectos das condutas dos sujeitos que dizem respeito às formas de realizações empregadas em cada situação, de modo que se pudesse estabelecer relações entre os diferentes procedimentos, tentando verificar quais são as conexões ou as rupturas entre eles. Além disso, ainda que o foco da análise pretendida não tenha sido as notações empregadas pelos sujeitos, tal aspecto foi analisado em sua estreita relação com as realizações, uma vez que revelam aspectos indicadores da compreensão dos sujeitos e de seus avanços no decorrer das tarefas.

Em síntese, foram analisadas as estratégias utilizadas pelos sujeitos durante a realização dos exercícios operatórios e dos problemas de estrutura aditiva, tendo em vista não somente a qualidade das estratégias, mas também suas transformações durante o programa de intervenção. Em última instância, não foram catalogadas as respostas em termos de acertos ou erros, mas em termos de tipos de estratégias empregadas, assim como de possíveis ligações entre elas e suas respectivas notações, no caso dos problemas. Cabe considerar que as mudanças quanto à qualidade das estratégias utilizadas podem ser explicadas pelo modelo de intervenção feita pelo experimentador.

As categorias encontradas para cada aspecto foram agregadas levando em conta as alterações de realizações detectadas, a partir do que foi possível descrever padrões de alterações (ou ausência dessas) das estratégias para cada noção e/ou soluções dos problemas de estrutura aditiva.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

Na primeira parte deste segmento serão apresentados os resultados quantitativos, relativos ao conjunto das alterações dos níveis evolutivos nas noções estudadas, assim como nos problemas de estrutura aditiva. A seguir, será exposta a análise qualitativa, quando serão apresentadas as estratégias principais utilizadas pelos sujeitos e os padrões de evolução observados em cada grupo.

1. DAS ALTERAÇÕES EVOLUTIVAS NAS NOÇÕES DA COMPOSIÇÃO ADITIVA DE NÚMEROS E DA INVERSÃO ADIÇÃO/SUBTRAÇÃO E NOS PROBLEMAS DE ESTRUTURA ADITIVA

1.1 RESULTADOS DO PRÉ-TESTE

Serão apresentados na tabela 1 os resultados das provas e problemas aplicados, de acordo com os critérios e indicadores já apresentados e detalhados anteriormente. Esta forma de avaliação teve como objetivo identificar os níveis de partida dos sujeitos de cada grupo, para verificar se há semelhança entre eles, de modo a que sejam comparáveis.

Tabela 1: Freqüência e percentual de sujeitos para as provas aplicadas no pré-teste em níveis para as diferentes condições.

	Composição aditiva de números				Inversão adição/subtração					Problema de estrutura aditiva 1 (composição de duas medidas)				Problema de estrutura aditiva 2 (transformação positiva sobre um estado inicial)			
	NO F%	I- F%	I+ F%	O F%	NO- F%	NO+ F%	I- F%	I+ F%	O F%	A- F%	I- F%	I+ F%	A+ F%	A- F%	I- F%	I+ F%	A+ F%
GE1 n=5	4		1			5				3	1	1		5			
	80		20			100				60	20	20		100			
GE2 n=5	4	1				4			1	3	2			4		1	
	80	20				80			20	60	40			80		20	
GE3 n=5	3	1	1			4			1	3	1	1		4		1	
	60	20	20			80			20	60	20	20		80		20	
GC n=5	4	1				4			1	3	2			2	3		
	80	20				80			20	60	40			40	60		

No que diz respeito à noção de composição aditiva de números, observa-se que a maioria dos sujeitos partiu de níveis iniciais (NO e NO+ respectivamente), o que parece indicar não haver diferenças significativas entre os grupos quanto ao nível de partida. Basta verificar a porcentagem de sujeitos que iniciaram o estudo obtendo nível de resposta não operatória para esta noção: 80% para o GE1, 80% para o GE2, 80% para o GC e 60% para o GE3.

A porcentagem de respostas de nível intermediário também é semelhante entre os grupos: 20% de intermediário menos avançado para o GE2, GE3 e GC; 20% de nível intermediário mais avançado para o GE1 e o GE3.

Isto mostra que, apesar de poder ser considerada uma leve vantagem do GE3 (que tinha 40% de sujeitos partindo de níveis intermediários), os grupos podem ser considerados semelhantes quanto ao nível de partida da noção de composição aditiva de números.

No que se refere à noção de inversão adição/subtração, ainda que 20% dos sujeitos do GE2, GE3 e GC tenham partido de níveis mais adiantados (O), a maioria obteve níveis menos adiantados, pois 80% dos sujeitos do GE2, GE3 e GC obtiveram resposta de tipo NO+, assim como 100% do GE1, que também obteve este mesmo nível de resposta. De qualquer maneira, ainda que tenha havido essa pequena discrepância quanto aos níveis de realizações nesses grupos, eles podem ser considerados semelhantes quanto aos níveis de partida.

Quanto aos tipos de realizações nas soluções dos problemas de estrutura aditiva, percebe-se que também a maioria dos sujeitos partiu de um nível menos adiantado, tendo sido expressas poucas soluções de nível intermediário por parte de alguns sujeitos.

No caso do primeiro tipo de problema, a maioria dos sujeitos começou o estudo expressando soluções menos adiantadas: 60% em todos os grupos. Quanto ao restante, obtiveram respostas intermediárias, menos ou mais adiantadas.

Já quanto ao segundo problema aplicado, a maioria partiu também de nível menos adiantado, porém com tendência de mais sujeitos expressarem resposta desse tipo do que no caso do primeiro problema: 80% no GE2 e no GE3, 100% no GE1 e 40% no GC.

Mesmo se consideradas algumas realizações de tipo intermediário e operatórias observadas, parece que os grupos podem ser comparáveis quanto ao nível de partida.

1.2 ALTERAÇÕES DOS NÍVEIS EVOLUTIVOS DAS NOÇÕES ESTUDADAS

A seguir serão apresentados os dados relativos à evolução das noções e respostas dos problemas. Em primeiro lugar, sob a forma de figuras, será exposta a evolução dos níveis de construção de cada sujeito em seus respectivos grupos em cada fase da avaliação. Posteriormente, tais resultados, traduzidos em pontos, serão expostos em tabelas, com o objetivo de verificar o desempenho, em termos quantitativos, de cada grupo.

Figura Ia: Evolução dos níveis de construção do GE1 para a noção de inversão adição/subtração.

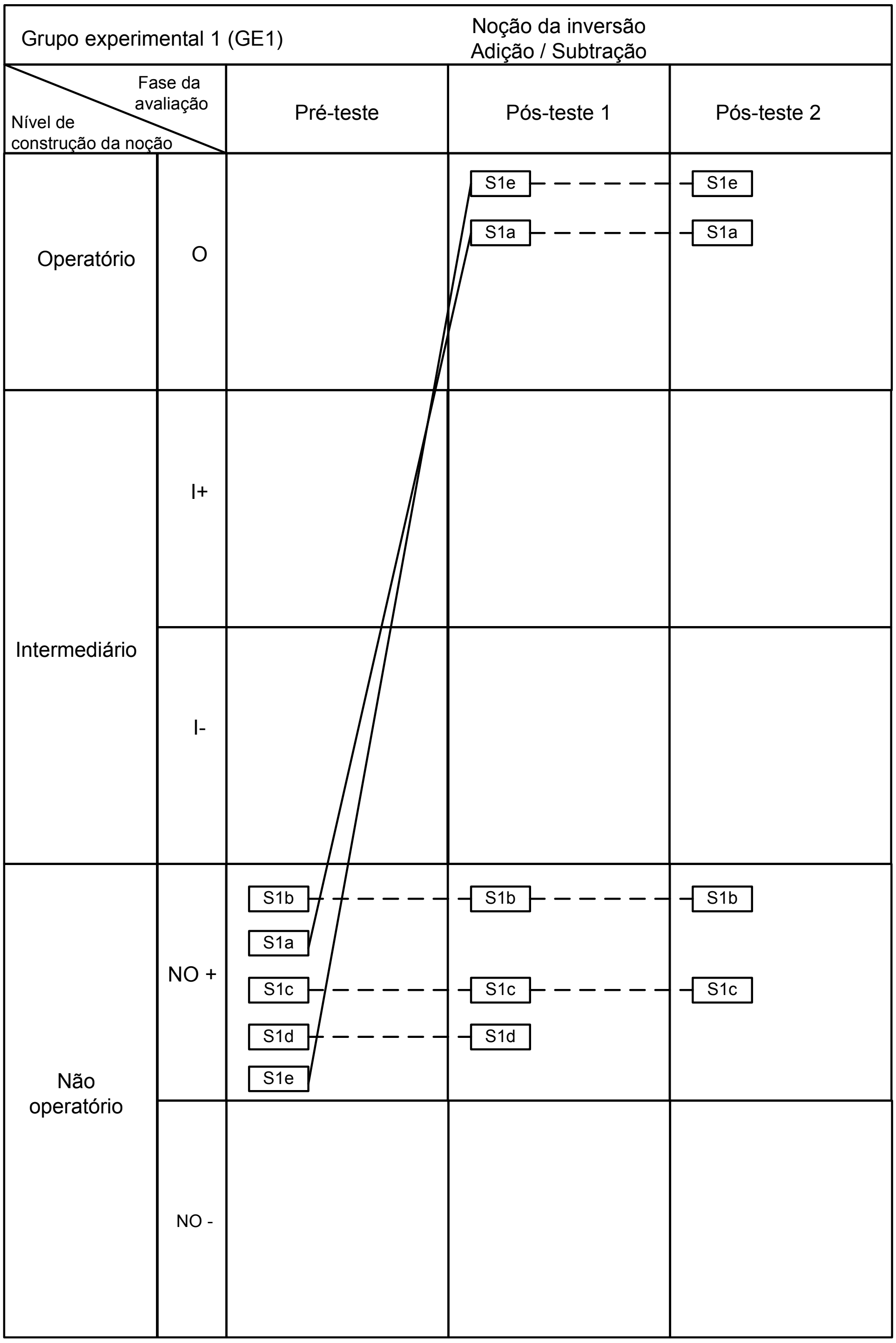


Figura Ib: Evolução dos níveis de construção do GE1 para a noção de composição aditiva de números.

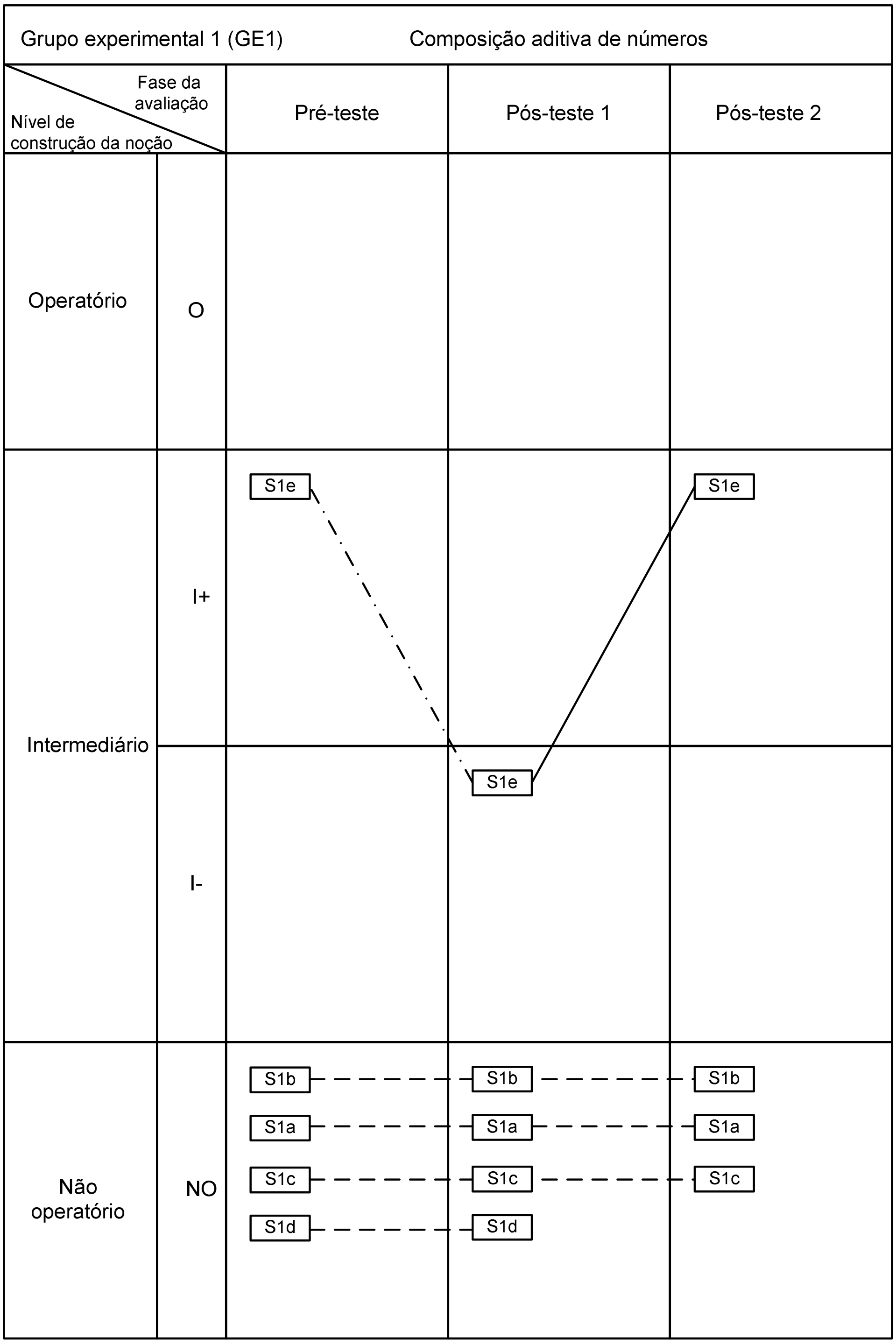


Figura Ic: Evolução dos níveis de resposta do GE1 para o problema relativo à composição de duas medidas.

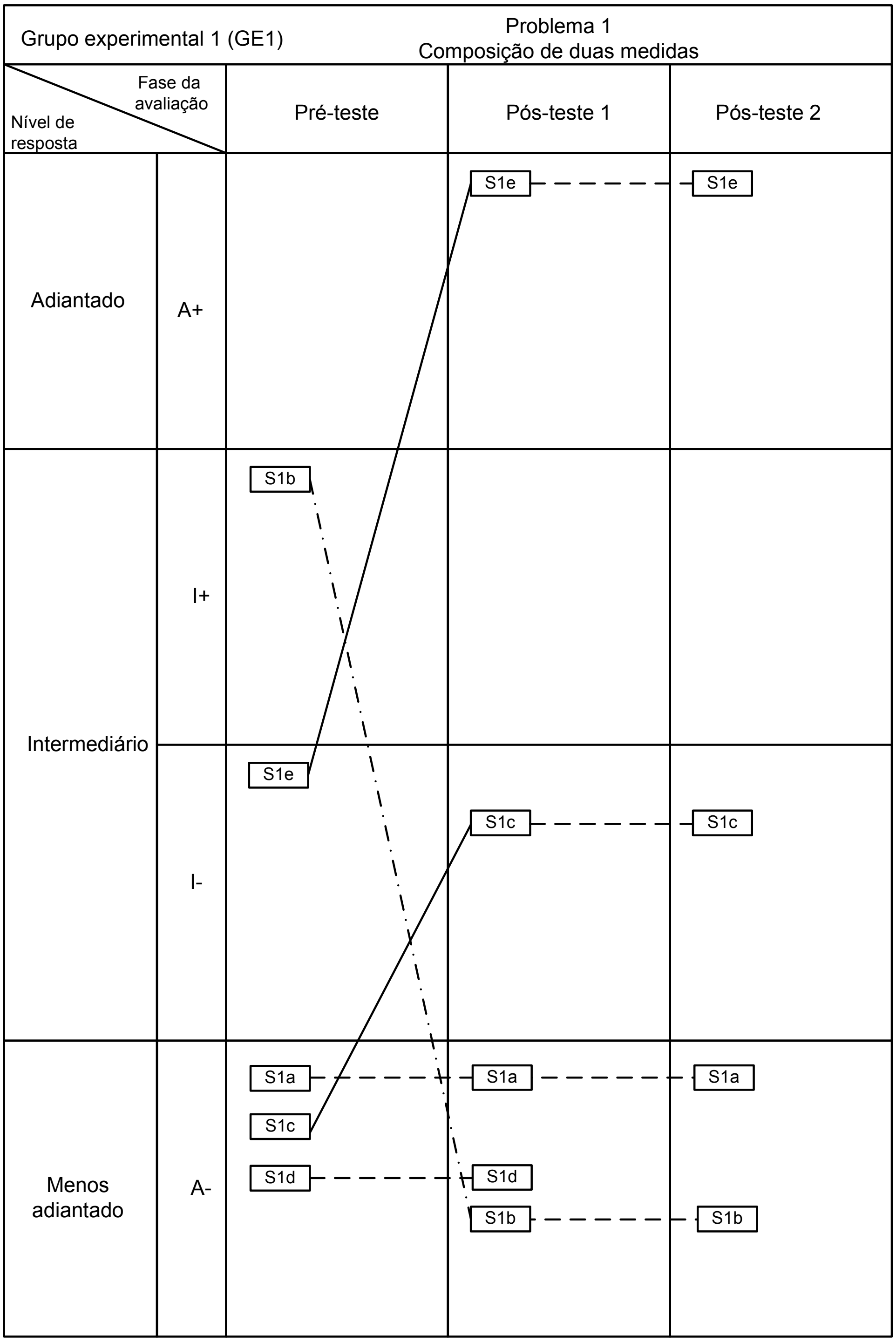


Figura Id: Evolução dos níveis de resposta do GE1 para o problema relativo à transformação positiva sobre um estado inicial.

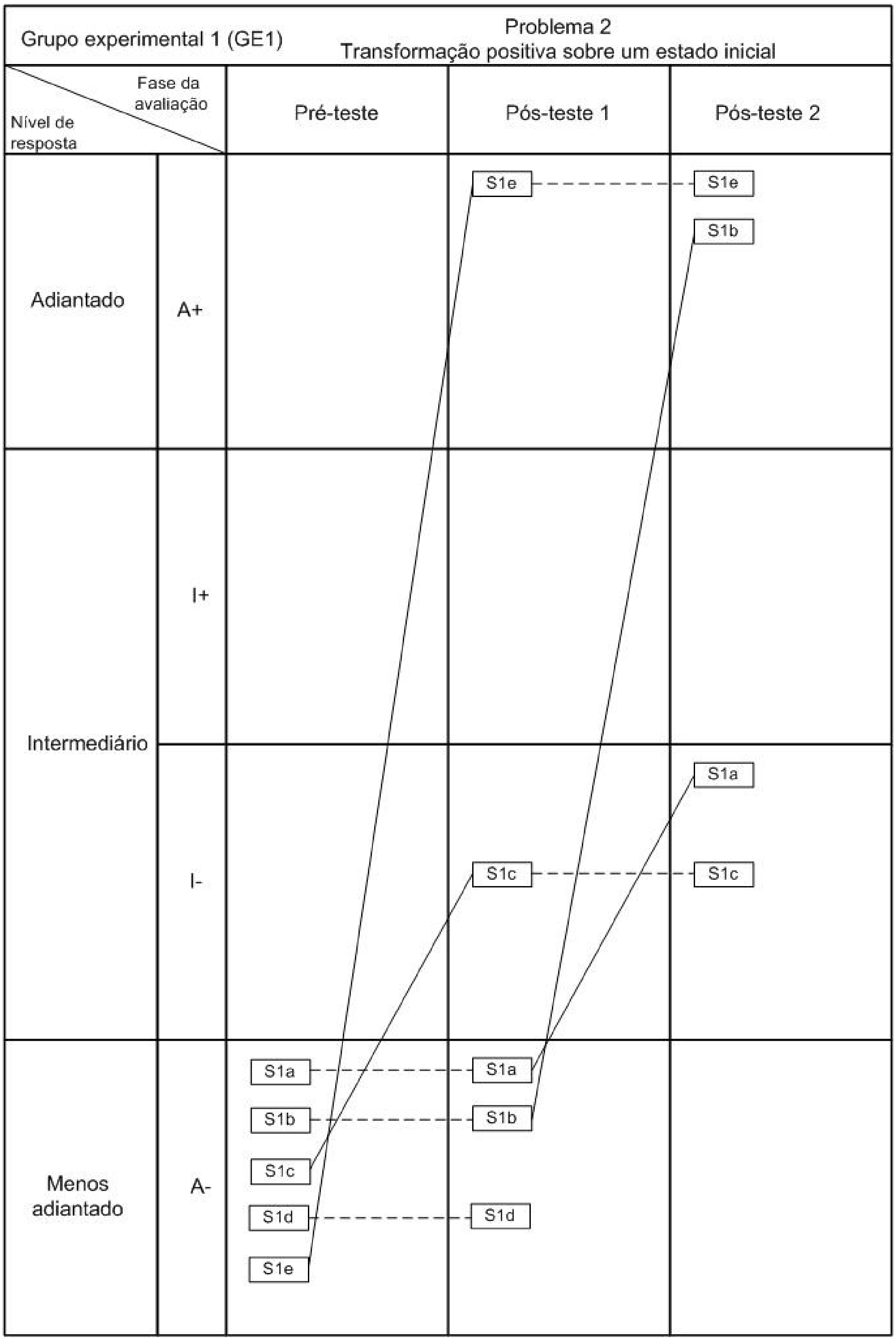


Figura IIa: Evolução dos níveis de construção do GE2 para a noção de inversão adição/subtração.

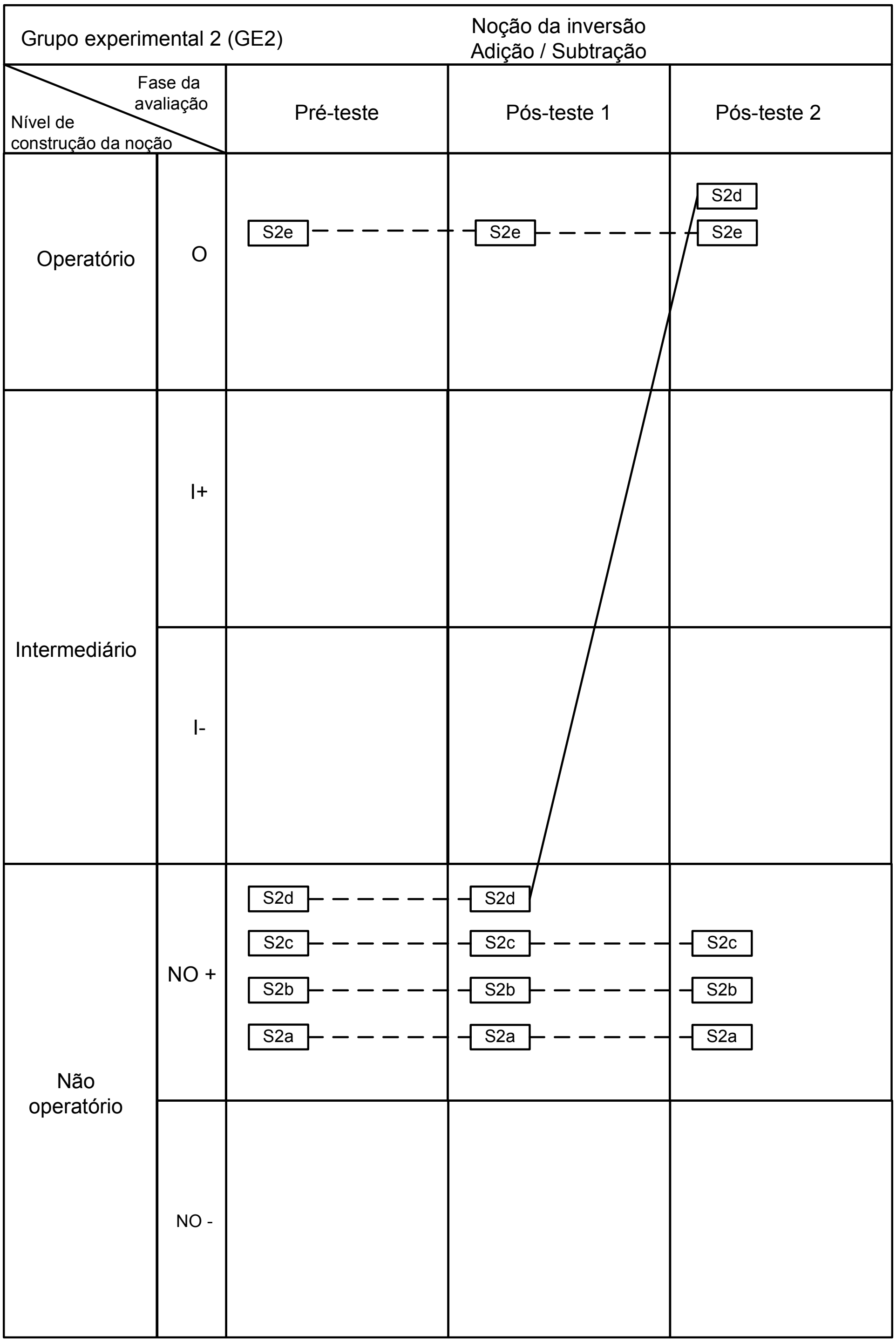


Figura IIb: Evolução dos níveis de construção do GE2 para a noção de composição aditiva de números.

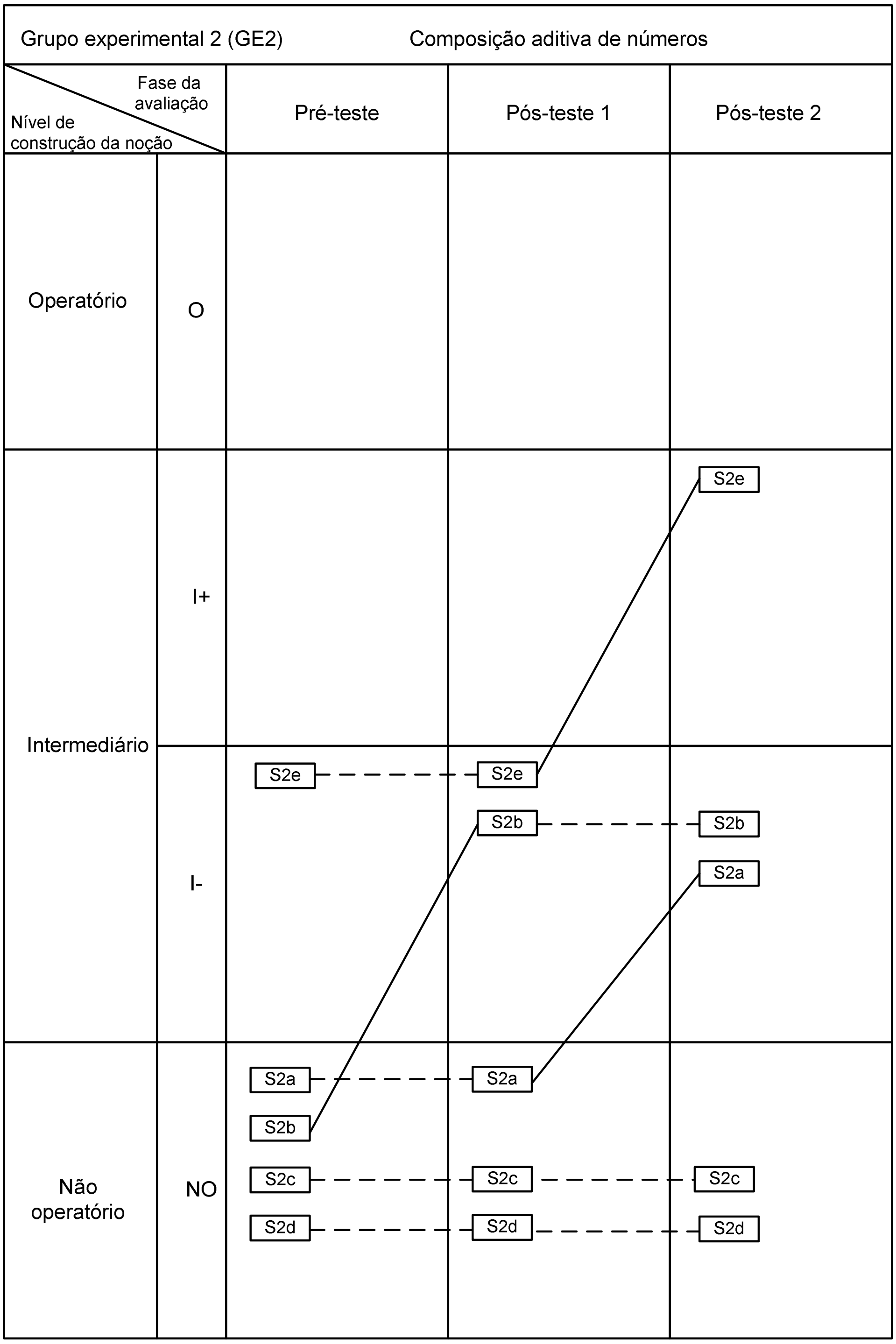


Figura IIc: Evolução dos níveis de resposta do GE2 para o problema relativo à composição de duas medidas.

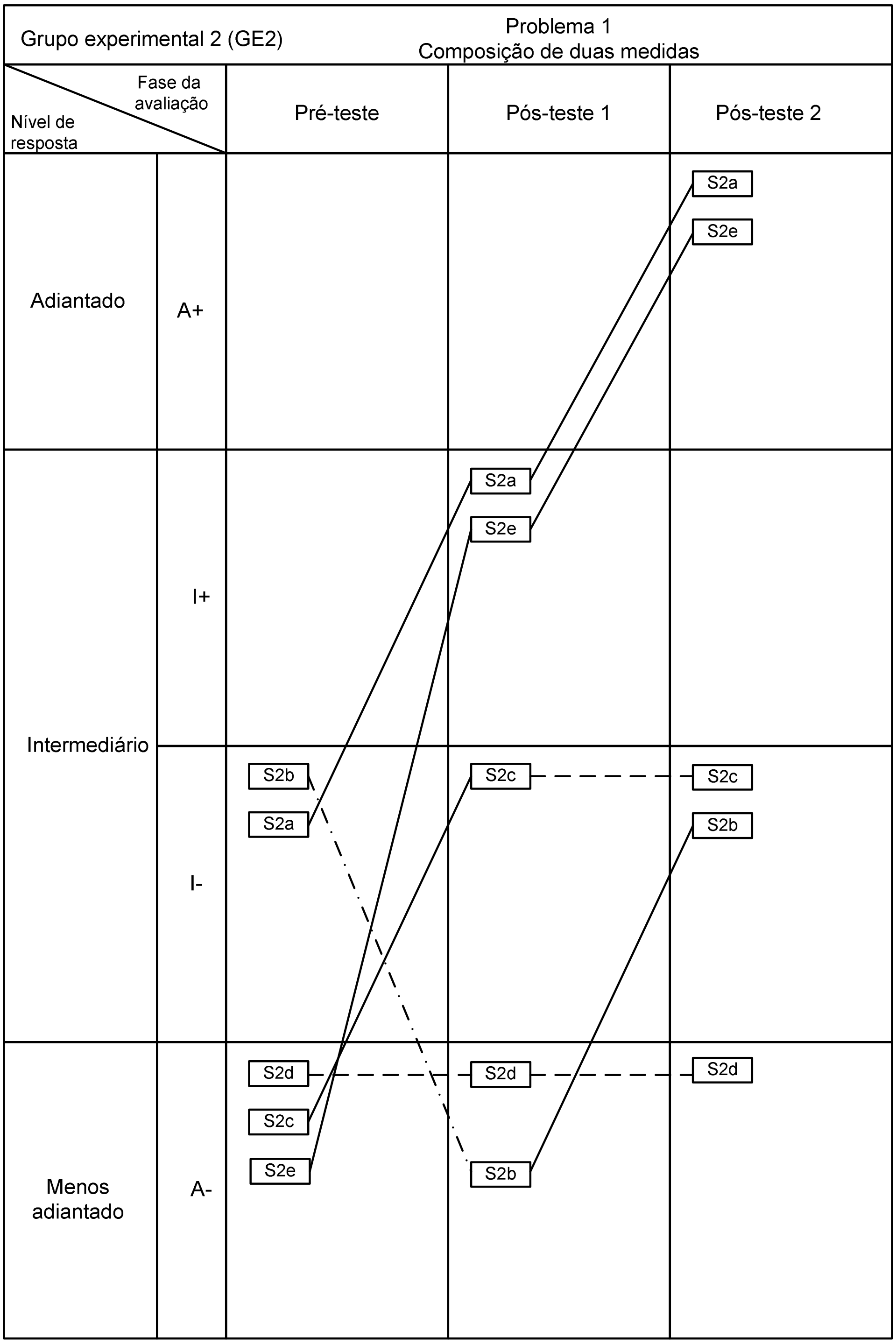


Figura IId: Evolução dos níveis de resposta do GE2 para o problema relativo à transformação positiva sobre um estado inicial.

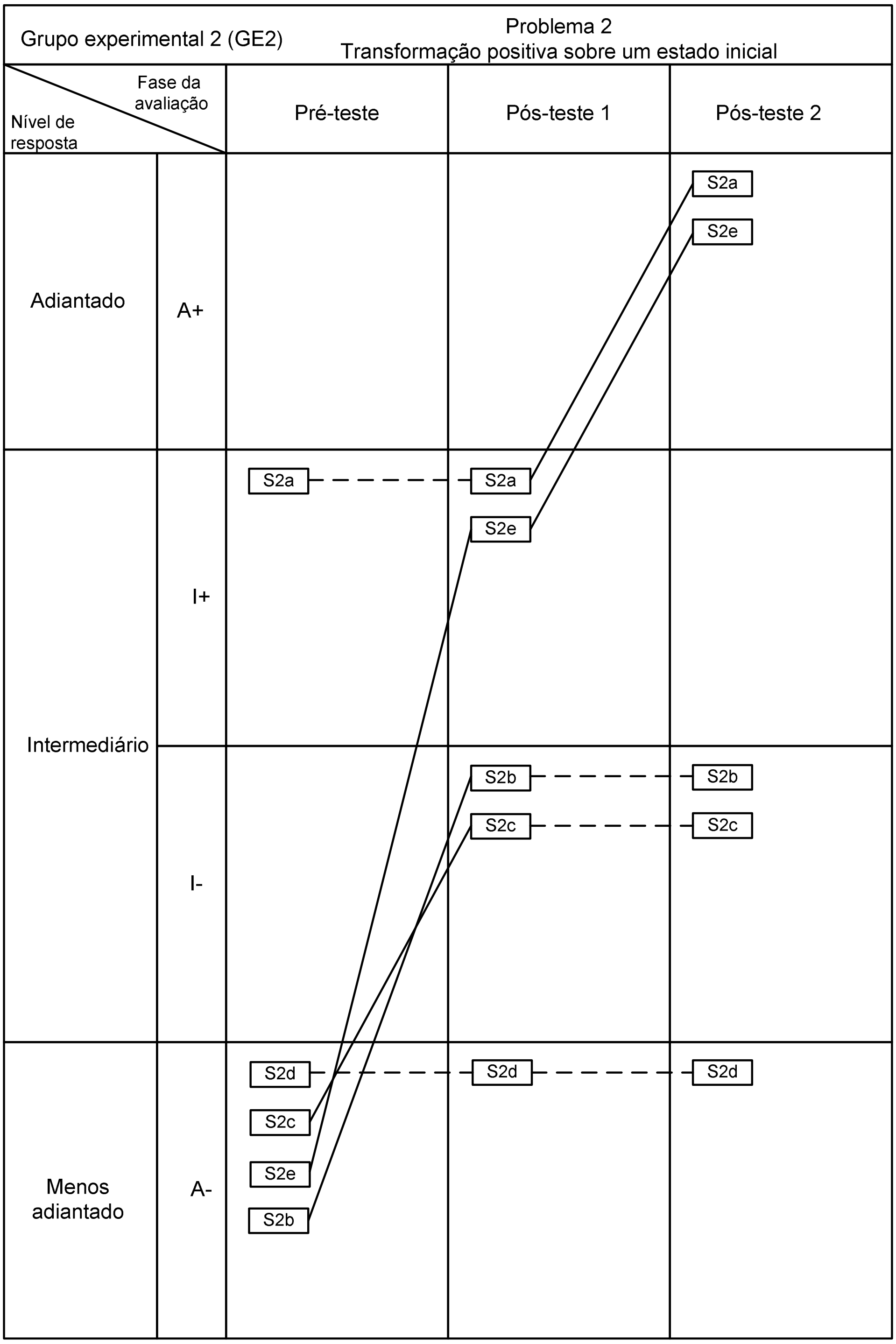


Figura IIIa: Evolução dos níveis de construção do GE3 para a noção de inversão adição/subtração.

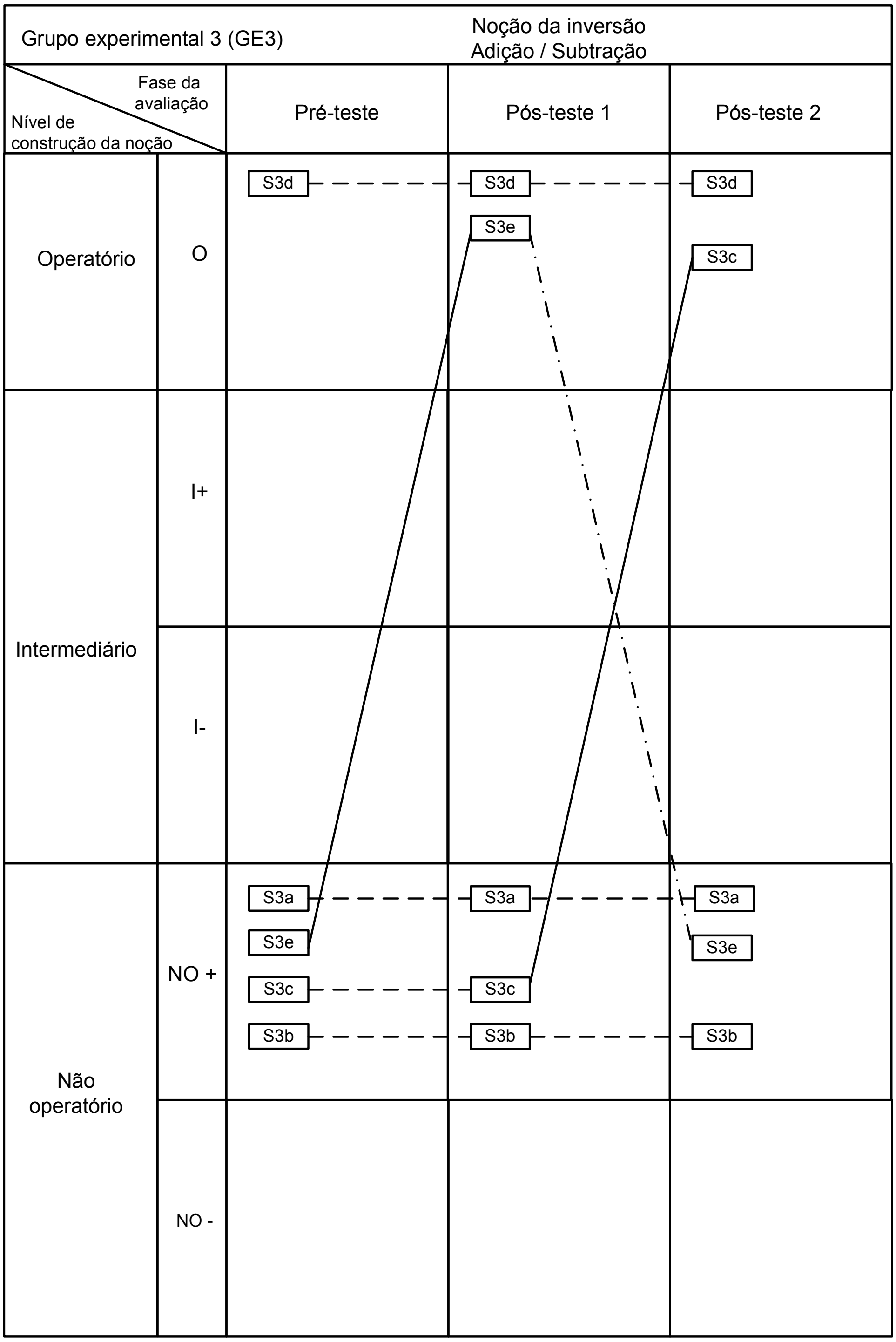


Figura IIIb: Evolução dos níveis de construção do GE3 para a noção de composição aditiva de números.

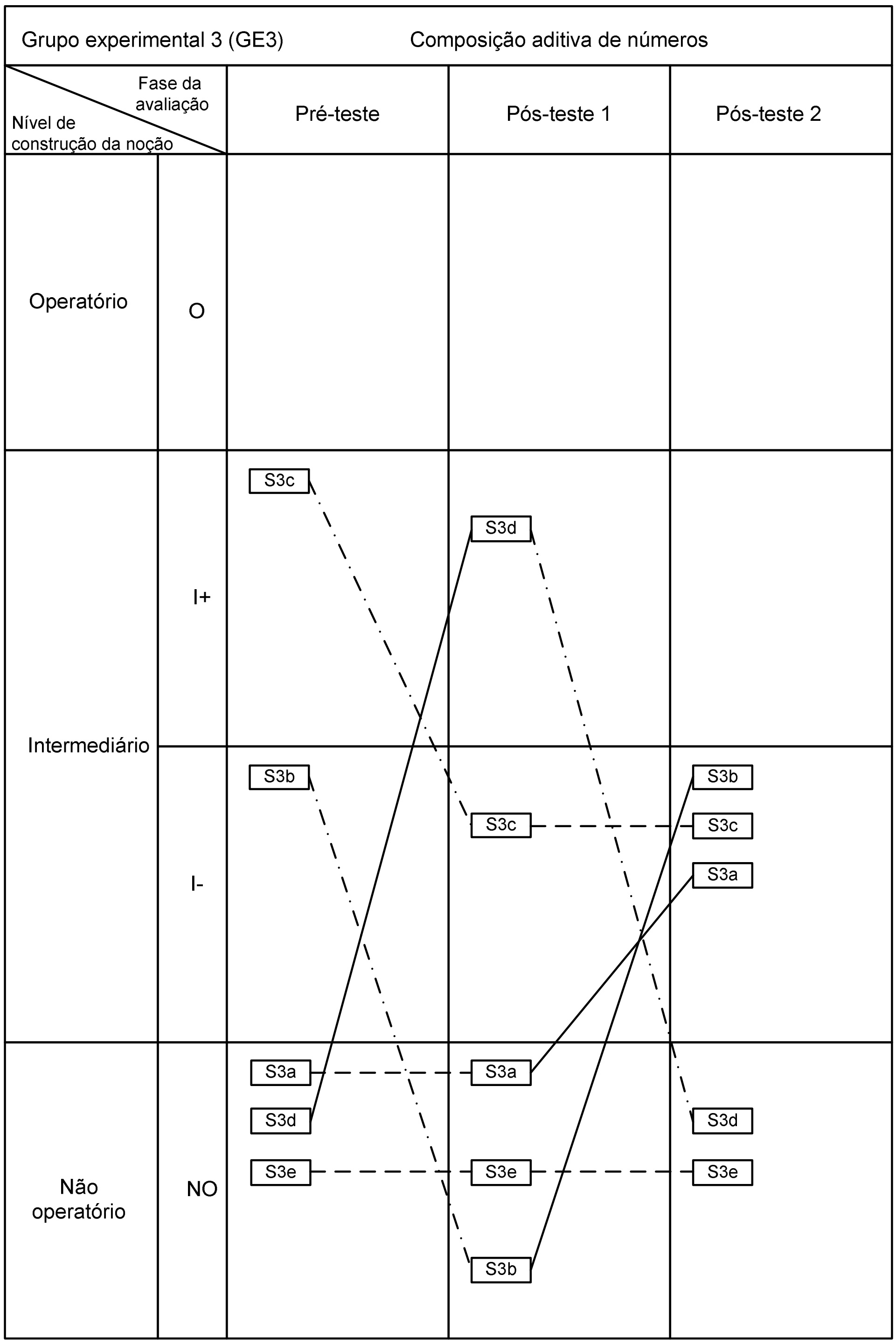


Figura IIIc: Evolução dos níveis de resposta do GE3 para o problema relativo à composição de duas medidas.

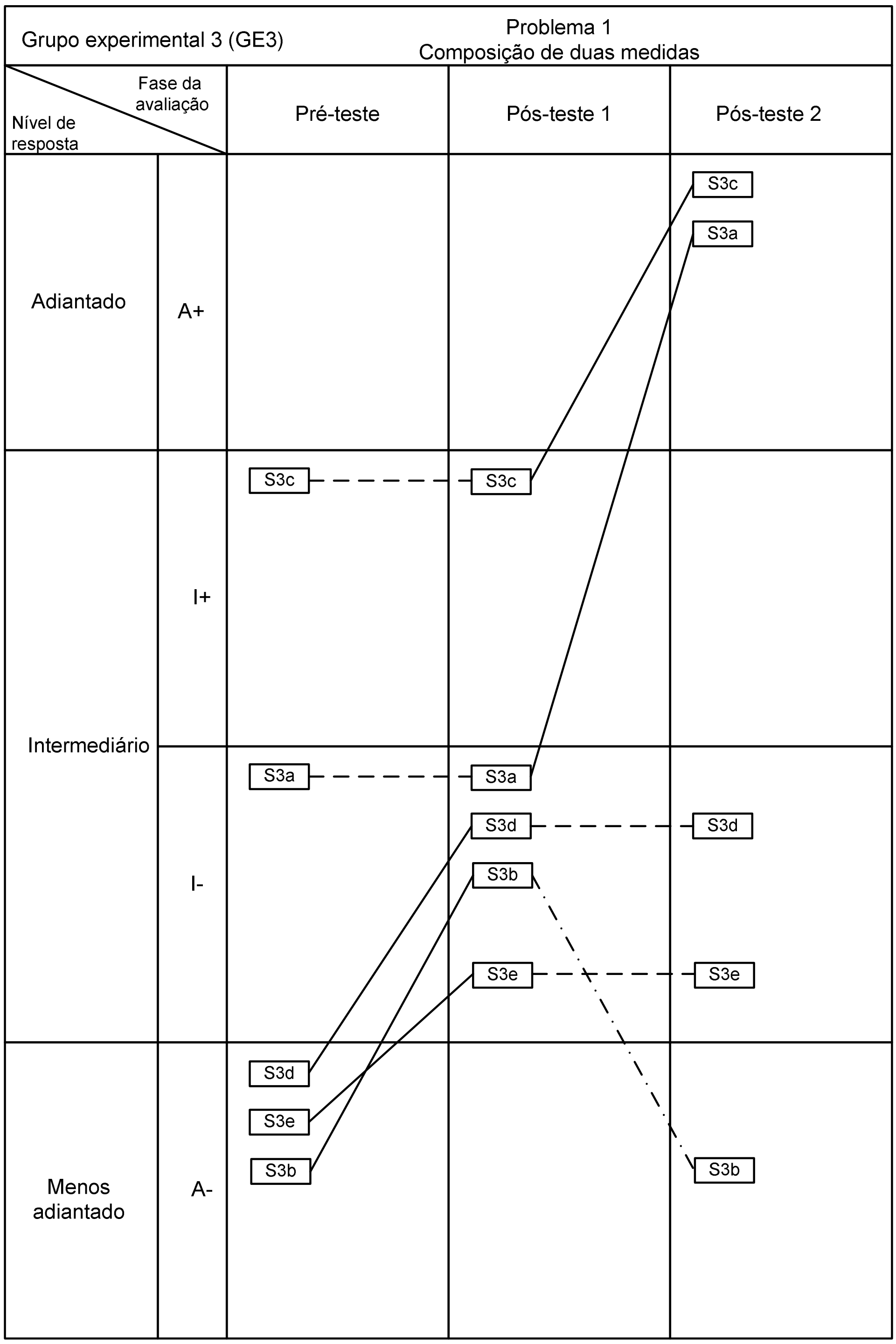


Figura IIId: Evolução dos níveis de resposta do GE3 para o problema relativo à transformação positiva sobre um estado inicial.

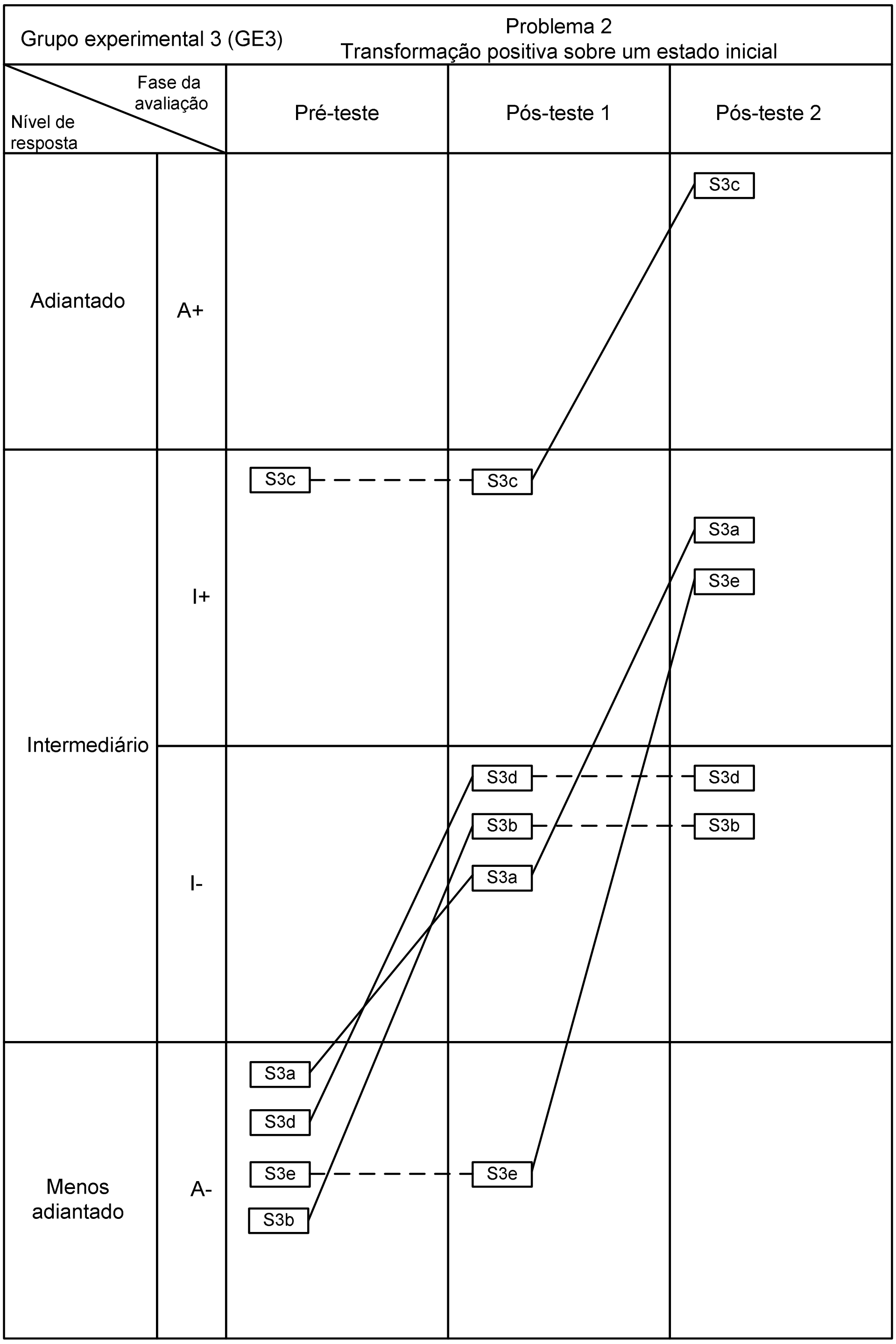


Figura IVa: Evolução dos níveis de construção do GE4 para a noção de inversão adição/subtração.

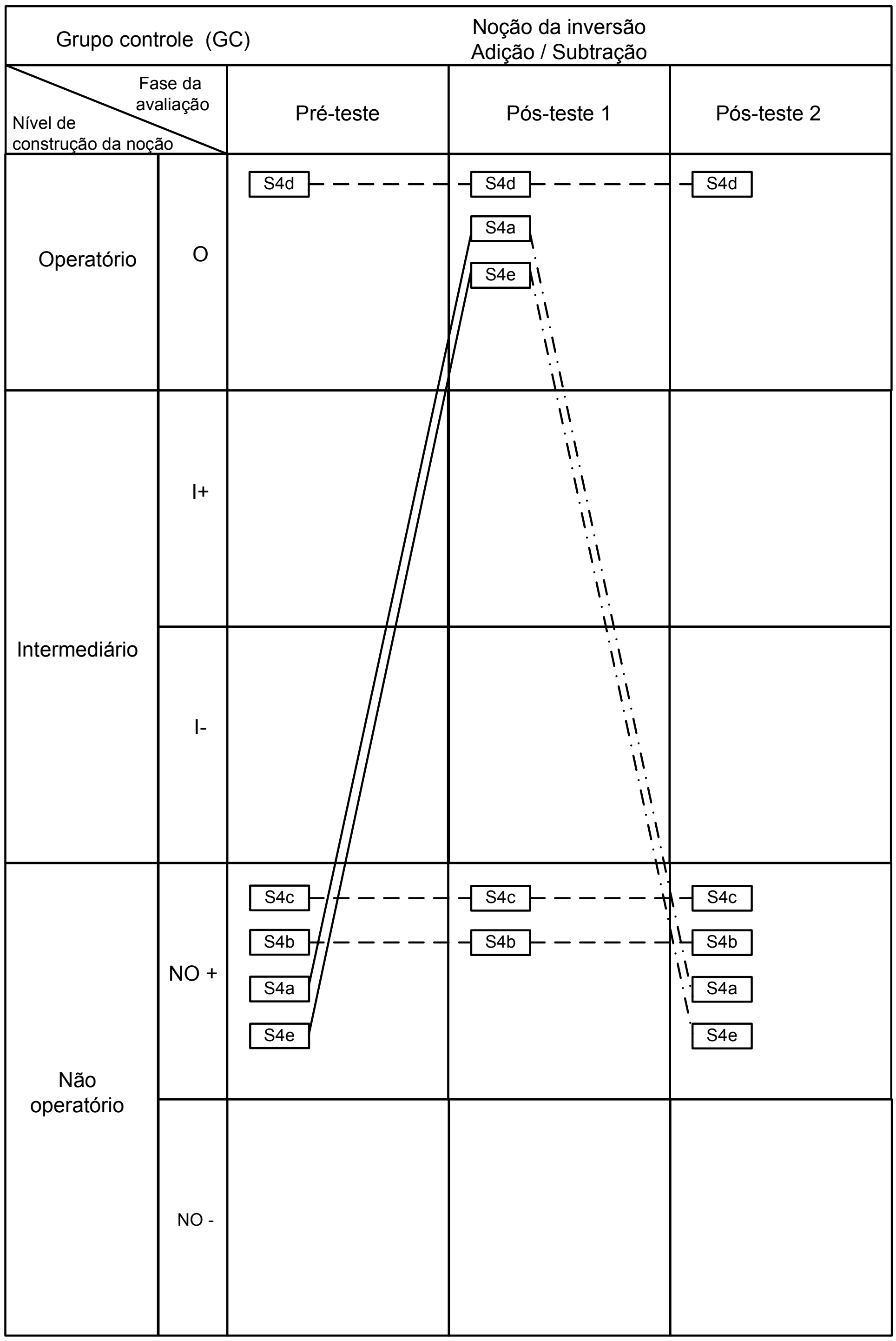


Figura IVb: Evolução dos níveis de construção do GE4 para a noção de composição aditiva de números.

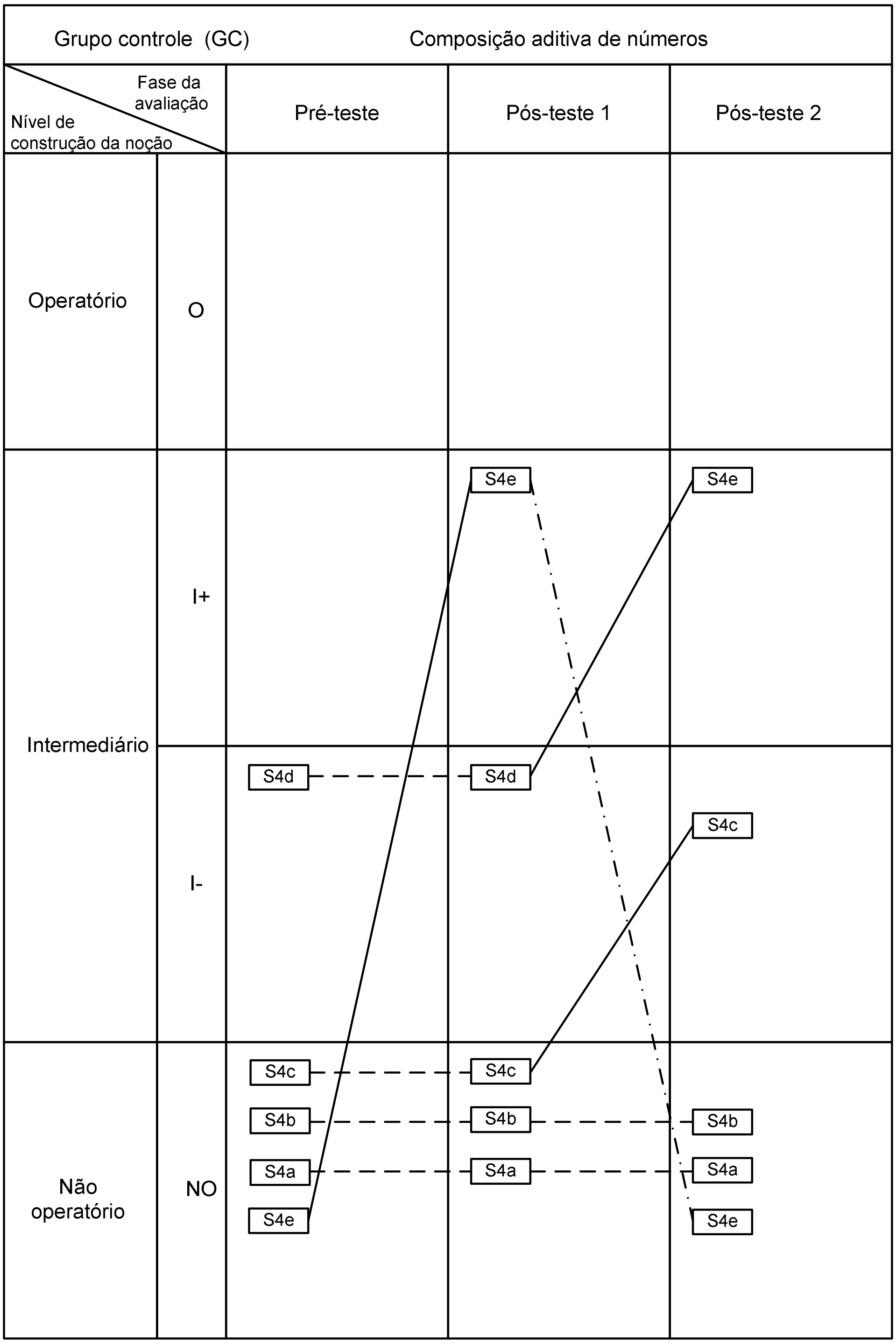


Figura IVc: Evolução dos níveis de resposta do GE4 para o problema relativo à composição de duas medidas.

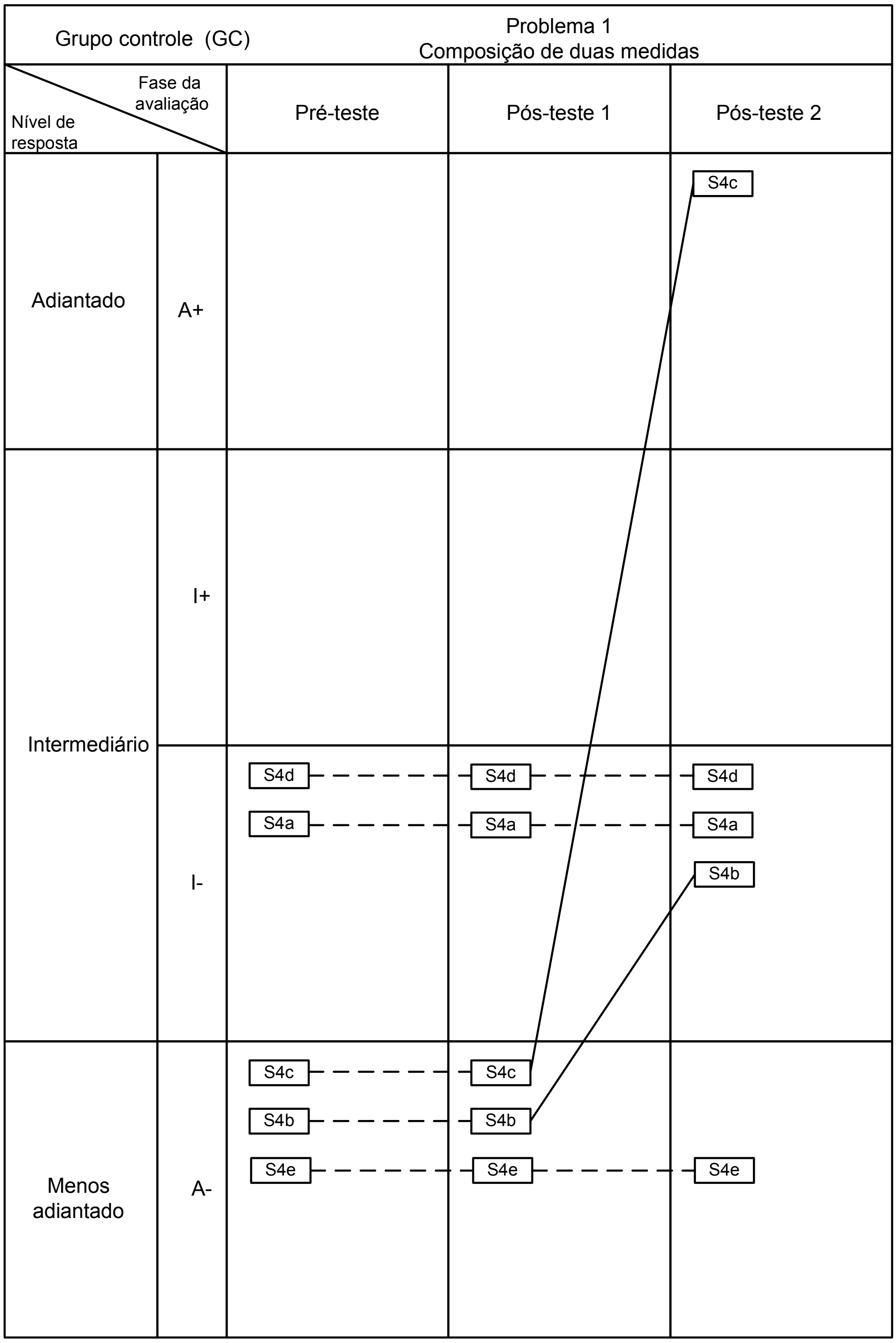
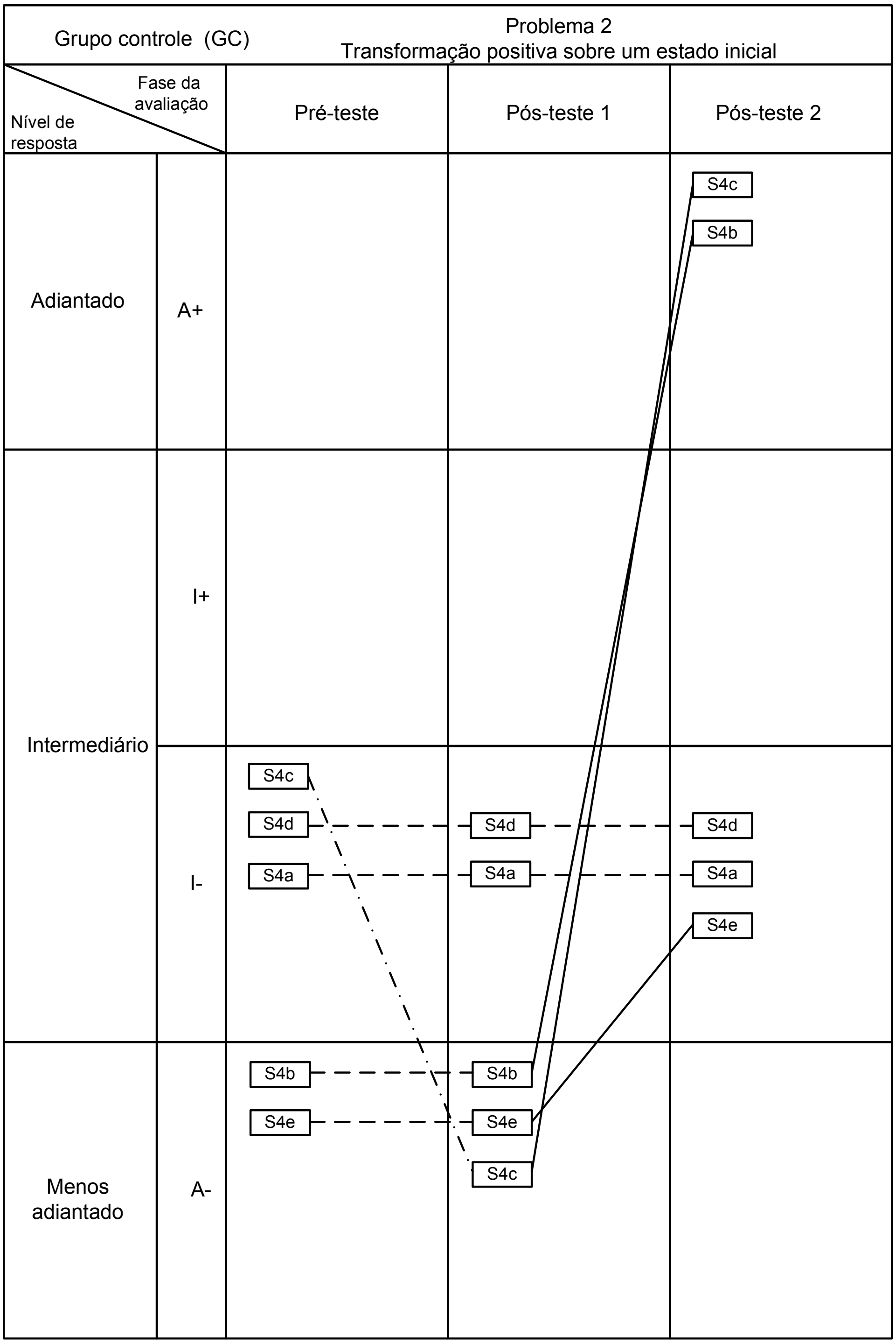


Figura IVd: Evolução dos níveis de resposta do GE4 para o problema relativo à transformação positiva sobre um estado inicial.



1.2.1 ALTERAÇÕES EVOLUTIVAS ENTRE PRÉ-TESTE E PÓS-TESTE 1 (CURTO PRAZO) NAS PROVAS E PROBLEMAS APLICADOS.

A seguir serão apresentados os resultados sob a forma de pontos, sendo que as tabelas 2, 3, 4 e 5 trarão, respectivamente, as alterações dos níveis evolutivos nas noções estudadas e nos dois problemas de estrutura aditiva para cada um dos grupos entre o pré-teste e o pós-teste 1. Serão considerados o número de sujeitos e a somatória de pontos para cada grupo.

Tabela 2: Alterações dos níveis evolutivos entre o pré-teste e o pós-teste 1 para a noção de composição aditiva de números.

		GE1				GE2				GE3				GC			
Pré-teste \ Pós-teste1		NO	I-	I+	O	NO	I-	I+	O	NO	I-	I+	O	NO	I-	I+	O
NO	Sujeitos	4				3	1			2		1		3		1	
	Pontos	0,0				0,0	0,5			0,0		1,0		0,0		1,0	
I-	Sujeitos						1			1					1		
	Pontos						0,0			-0,5					0,0		
I+	Sujeitos		1								1						
	Pontos		-0,5								-0,5						
O	Sujeitos																
	Pontos																
Σ sujeitos		5				5				5				5			
Σ pontos		-0,5				0,5				0,0				1,0			

A tabela 2 indica que o grupo que mais avançou no intervalo entre o pré-teste e o pós-teste 1 quanto à noção de composição aditiva de números foi o GC, com uma vantagem expressiva em relação ao GE1 e ao GE3, tendo sido os avanços sobretudo de NO para I+. Vale ressaltar que o GE1 chegou mesmo a expressar retrocesso quanto ao domínio da noção.

Em seguida, vem o GE2, que obteve avanço de NO para I-.

Tabela 3: Alterações dos níveis evolutivos entre o pré-teste e o pós-teste 1 para a noção da inversão adição/subtração.

		GE1					GE2					GE3					GC				
Pré-teste \ Pós-teste1		NO-	NO+	I-	I+	O	NO-	NO+	I-	I+	O	NO-	NO+	I-	I+	O	NO-	NO+	I-	I+	O
NO-	Sujeitos																				
	Pontos																				
NO+	Sujeitos		3			2		4					3			1		2			2
	Pontos		0,0			3,0		0,0					0,0			1,5		0,0			3,0
I-	Sujeitos																				
	Pontos																				
I+	Sujeitos																				
	Pontos																				
O	Sujeitos										1					1					1
	Pontos										0,0					0,0					0,0
Σ sujeitos		5					5					5					5				
Σ pontos		3,0					0,0					1,5					3,0				

A tabela 3 mostra que na noção da inversão adição/subtração, a evolução mais expressiva no intervalo entre o pré-teste e o pós-teste foi observada no GE1 e no GC, ambos com 3 pontos, depois no GE3, com 1,5 ponto. Todos os avanços foram de NO para O. Apenas o GE2 não avançou em relação a essa noção.

Tabela 4: Alterações dos níveis evolutivos entre o pré-teste e o pós-teste 1 para o problema de estrutura aditiva relativo à composição de duas medidas.

		GE1				GE2				GE3				GC			
Pós-teste1 / Pré-teste		A-	I-	I+	A+	A-	I-	I+	A+	A-	I-	I+	A+	A-	I-	I+	A+
A-	Sujeitos	2	1			1	1	1			3			3			
	Pontos	0,0	0,5			0,0	0,5	1			1,5			0,0			
I-	Sujeitos				1	1		1			1				2		
	Pontos				1,0	-0,5		0,5			0,0				0,0		
I+	Sujeitos	1										1					
	Pontos	-1,0										0,0					
A+	Sujeitos																
	Pontos																
Σ sujeitos		5				5				5				5			
Σ pontos		0,5				1,5				1,5				0,0			

A tabela 4 mostra que os avanços mais expressivos nas soluções dos problemas envolvendo a composição de duas medidas foram aqueles obtidos pelo GE2 e pelo GE3, os quais computaram 1,5 ponto cada. Os principais progressos referem-se à mudança de estratégias menos adiantadas para as intermediárias.

O GC não avançou, o GE1 obteve 0,5 pontos, com uma mudança de resposta A- para I-, uma outra de I- para I+, mas por outro lado um retrocesso, de I+ para A-.

Tabela 5: Alterações dos níveis evolutivos entre o pré-teste e o pós-teste 1 para o problema de estrutura aditiva relativo à transformação positiva sobre um estado inicial.

		GE1				GE2				GE3				GC			
Pós-teste1 / Pré-teste		A-	I-	I+	A+	A-	I-	I+	A+	A-	I-	I+	A+	A-	I-	I+	A+
A-	Sujeitos	3	1		1	1	2	1		1	3			2			
	Pontos	0	0,5		1,5	0,0	1,0	1,0		0,0	1,5			0,0			
I-	Sujeitos													1	2		
	Pontos													-0,5	0,0		
I+	Sujeitos							1				1					
	Pontos							0,0				0,0					
A+	Sujeitos																
	Pontos																
Σ sujeitos		5				5				5				5			
Σ pontos		2,0				2,0				1,5				-0,5			

A tabela 5 mostra que o GE1 e o GE2 foram os grupos experimentais que mais avançaram no que se refere à solução do problema envolvendo uma transformação positiva sobre um estado inicial, pois ambos obtiveram 2,0 pontos, seguidos pelo GE3, que obteve 1,5 ponto. Os avanços observados no GE1 referem-se a mudanças de estratégias menos adiantadas para intermediárias ou avançadas, enquanto que aquelas observadas no GE2 são de menos adiantadas para intermediárias. Os progressos obtidos pelo GE3 são de estratégias menos adiantadas para intermediárias. O grupo controle não expressou nenhum tipo de progresso, ao contrário, regrediu.

Em relação às possíveis alterações evolutivas a curto prazo (entre o pré-teste e o pós-teste 1), os resultados revelam que:

- Observa-se que no caso do GE1, foi na noção da inversão adição/subtração que houve avanços mais significativos, pois o grupo obteve 3,0 pontos. Em seguida, os progressos mais importantes referem-se àqueles ligados à resolução de problemas, tendo sido observados maiores avanços naqueles de transformação positiva sobre um estado inicial (2,0 pontos) do que na composição de duas medidas (0,5 pontos). O grupo regrediu na noção de composição aditiva de números (-0,5 pontos).
- No caso do GE2, os avanços mais expressivos referem-se à resolução de problemas, pois o grupo obteve 2,0 pontos para os problemas de transformação positiva sobre um estado inicial e 1,5 pontos para aqueles envolvendo a composição de duas medidas. No caso da noção da inversão adição/subtração o grupo permaneceu estável, não obtendo nenhum ponto, já quanto à noção de composição aditiva de números, o grupo avançou, conseguindo 0,5 pontos.
- O GE3 não obteve nenhum tipo de progresso na noção da composição aditiva de números. Quanto à noção da inversão adição/subtração, avançou, assim como no que se refere à resolução de problemas, obtendo 1, 5 pontos para cada um.
- O grupo controle obteve avanço mais expressivo na noção da inversão adição/subtração (3,0 pontos). Progrediu também na composição aditiva de números (1,0 ponto), o que não ocorreu na resolução de problemas, pois não obteve pontos para o primeiro tipo de problema proposto e regrediu quanto ao segundo (-0,5 pontos).

Em suma, parece ser possível afirmar que a curto prazo, entre o pré-teste e o pós-teste 1:

- Na noção de composição aditiva de números foi o GC que mais avançou (1,0 ponto), seguido do GE2 (0,5 pontos), sendo que o GE1 regrediu (-0,5 pontos) e o GE3 manteve-se estável.
- Na noção da inversão adição/subtração foram o GE1 e o GC que mais avançaram obtendo 3,0 pontos cada um. Em seguida ficou o GE3, com 1,5 pontos, sendo que o GE2 manteve-se estável.
- No problema envolvendo a composição de duas medidas foram o GE2 e o GE3 que mais progrediram, com 1,5 pontos cada um. O GC manteve-se estável e o GE1 regrediu (-0,5 pontos).
- No problema referente à transformação positiva sobre um estado inicial foram o GE1 e o GE2 que obtiveram mais pontos (2,0 pontos cada um), seguidos do GE3, com 1,5 pontos. Nesse caso o GC regrediu (-0,5 pontos).

Logo, a curto prazo, todos os três grupos experimentais obtiveram progressos nas soluções dos problemas de estrutura aditiva, o que não ocorreu em relação às noções lógicas. Nessas, tanto os progressos como a estabilidade e mesmo as regressões são irregulares, conforme a noção. Por sua vez, o GC expressou progressos interessantes nas duas noções lógicas focalizadas.

1.2.2 ALTERAÇÕES EVOLUTIVAS ENTRE O PÓS-TESTE 1 E O PÓS-TESTE 2 NAS PROVAS E PROBLEMAS APLICADOS.

A seguir serão apresentadas as tabelas 6, 7, 8 e 9, as quais apontarão as alterações dos níveis evolutivos entre o pós-teste 1 e o pós-teste 2 para as noções estudadas e problemas. Vale observar que a comparação de resultados entre pós-teste 1 e pós-teste 2 busca verificar a estabilidade das respostas dos sujeitos e sua extensão a outras noções, no sentido de analisar se houve de fato aprendizagem operatória com estabilidade, ou se ocorreu apenas efeito imediato do tratamento dado, sem amplificação de seus efeitos às outras noções.

Tabela 6: Alterações dos níveis evolutivos entre o pós-teste 1 e o pós-teste 2 para a noção de composição aditiva de números.

		GE1				GE2				GE3				GC			
Pós-teste1 / Pré-teste		NO	I-	I+	O	NO	I-	I+	O	NO	I-	I+	O	NO	I-	I+	O
NO	Sujeitos	3				2	1			1	2			2	1		
	Pontos	0,0				0,0	0,5			0,0	1,0			0,0	0,5		
I-	Sujeitos			1			1	1			1					1	
	Pontos			0,5			0,0	0,5			0,0					0,5	
I+	Sujeitos									1				1			
	Pontos									-1,0				-1,0			
O	Sujeitos																
	Pontos																
Σ sujeitos		4				5				5				5			
Σ pontos		0,5				1,0				0,0				0,0			

A tabela 6 mostra que na noção de composição aditiva de números, entre os dois pós-testes, o GE2 foi o grupo que mais avançou, obtendo 1,0 ponto. Tal avanço referiu-se à mudança de uma resposta NO para I- e uma outra I- para I+. O GE3 e o GC mantiveram-se estáveis, ou seja, não fizeram pontos, lembrando que o GC já havia avançado um ponto entre o pré-teste e o pós-teste 1. O GE1, que no intervalo anterior, entre o pré-teste e o pós-teste 1, não havia avançado (ao contrário, chegou a apresentar retrocesso), agora ganhou 0,5 pontos, obtendo assim avanço tardio. A mudança da resposta desse grupo foi de NO para I+.

Tabela 7: Alterações dos níveis evolutivos entre o pós-teste 1 e o pós-teste 2 para a noção da inversão adição/subtração.

		GE1					GE2					GE3					GC				
Pós-teste1 / Pré-teste		NO-	NO+	I-	I+	O	NO-	NO+	I-	I+	O	NO-	NO+	I-	I+	O	NO-	NO+	I-	I+	O
NO-	Sujeitos																				
	Pontos																				
NO+	Sujeitos		2					3			1		2			1	2				
	Pontos		0,0					0,0			1,5		0,0			1,5	0,0				
I-	Sujeitos																				
	Pontos																				
I+	Sujeitos																				
	Pontos																				
O	Sujeitos					2					1		1			1		2			1
	Pontos					0,0					0,0		-1,5			0,0		-3,0			0,0
Σ sujeitos		4					5					5					5				
Σ pontos		0,0					1,5					0,0					-3,0				

A tabela 7, a qual mostra as alterações dos níveis evolutivos para a noção da inversão adição subtração aponta que o GE1, que já havia avançado consideravelmente entre o pré-teste e o pós-teste 1, obtendo então 3,0 pontos, agora manteve-se estável, não avançando neste intervalo. Algo semelhante também ocorreu com o GE3, que no intervalo inicial havia avançado, conseguindo 1,5 pontos, agora se manteve estável, não pontuando.

O GE2, que inicialmente não avançou, agora obteve 1,5 pontos, o que caracteriza avanço tardio para essa noção. O avanço observado refere-se à mudança de uma resposta de NO+ para O.

Quanto ao grupo controle, que havia obtido 3,0 pontos entre o pré-teste e o pós-teste 1, neste intervalo perdeu-os, de modo a não ter conseguido manter estável seu avanço.

Os grupos experimentais, ao contrário do grupo controle, mantiveram-se estáveis ou avançaram nesse intervalo, caso específico do GE2, que progrediu.

Tabela 8: Alterações dos níveis evolutivos entre o pós-teste 1 e o pós-teste 2 para o problema de estrutura aditiva relativo à composição de duas medidas.

		GE1				GE2				GE3				GC			
Pré-teste \ Pós-teste1		A-	I-	I+	A+	A-	I-	I+	A+	A-	I-	I+	A+	A-	I-	I+	A+
A-	Sujeitos	2				1	1							1	1		1
	Pontos	0,0				0,0	0,5							0,0	0,5		1,5
I-	Sujeitos		1				1			1	2		1		2		
	Pontos		0,0				0,0			-0,5	0,0		1,0		0,0		
I+	Sujeitos								2				1				
	Pontos								1,0				0,5				
A+	Sujeitos				1												
	Pontos				0,0												
Σ sujeitos		4				5				5				5			
Σ pontos		0,0				1,5				1,0				2,0			

A tabela 8 aponta que o GE1 não avançou nesse intervalo, mantendo-se estável, uma vez que já havia avançado no intervalo anterior, quando havia obtido 0,5 pontos.

O GE2 e o GE3, que já haviam avançado entre o pré-teste e o pós-teste 1, continuaram a avançar, sendo que o GE2 obteve mais 1,5 pontos e o GE3 mais 1,0 ponto. No caso do GE2, o progresso foi de uma resposta A- para I- e de duas respostas I+ para A+. No GE3 foi de uma resposta I- para A+ e de uma resposta I+ para A+.

O GC avançou somente entre os dois pós-testes, o que não havia ocorrido entre o pré-teste e o pós-teste 1. Isto sugere que o grupo controle não obteve progresso imediato em função do tratamento recebido, apenas tardio.

Tabela 9: Alterações dos níveis evolutivos entre o pós-teste 1 e o pós-teste 2 para o problema de estrutura aditiva relativo à transformação positiva sobre um estado inicial.

		GE1				GE2				GE3				GC			
Pré-teste \ Pós-teste1		A-	I-	I+	A+	A-	I-	I+	A+	A-	I-	I+	A+	A-	I-	I+	A+
A-	Sujeitos		1		1	1						1			1		2
	Pontos		0,5		1,5	0,0						1,0			0,5		3,0
I-	Sujeitos		1				2				2	1			2		
	Pontos		0,0				0,0				0,0	0,5			0,0		
I+	Sujeitos								2				1				
	Pontos								1,0				0,5				
A+	Sujeitos				1												
	Pontos				0,0												
Σ sujeitos		4				5				5				5			
Σ pontos		2,0				1,0				2,0				3,5			

A tabela 9 mostra que todos os grupos avançaram no problema de transformação positiva sobre um estado inicial neste intervalo, tendo sido o grupo controle o que mais progrediu, obtendo 3,5 pontos, ao contrário do intervalo anterior, quando não havia avançado.

Os grupos experimentais submetidos às sessões de intervenção, que já haviam avançado entre o pré-teste e o pós-teste 1, seguiram progredindo entre o pós-teste 1 e o pós-teste 2: o GE1 e o GE3 avançaram mais, obtendo 2,0 pontos, e o GE2 obteve 1,0 ponto. No caso do GE1 o avanço consistiu em mudança de resposta A- para A+. No GE2 tratou-se de mudança de duas respostas I+ para A+ e no GE3 uma resposta A- passou a I+, uma I- passou a I+ e, por fim, uma I+ passou a A+.

Em relação às possíveis alterações evolutivas entre o pós-teste 1 e o pós-teste 2, os resultados revelam que:

- O GE1 manteve-se estável quanto à noção da inversão adição/subtração e quanto à resolução de problemas do primeiro tipo (composição de duas medidas), porém, seguiu avançando no segundo tipo de problema. Quanto à noção de composição aditiva de números, obteve avanço nesse intervalo, caracterizando progresso tardio, uma vez que entre o pré-teste e o pós-teste 1 havia regredido.
- O GE2 progrediu em todas as noções e problemas, especialmente na noção da inversão adição/subtração e no problema referente à composição de duas medidas.
- O GE3 não avançou de nível nas noções lógicas focalizadas nas provas, mas continuou avançando nas soluções dos problemas, especialmente naqueles relativos à transformação positiva sobre um estado inicial.
- O GC avançou apenas nos problemas, pois no que se refere às noções lógicas, manteve-se estável quanto à composição aditiva de números e retrocedeu na noção da inversão adição/subtração.

Em suma, quanto à estabilidade dos efeitos das intervenções e sua extensão a noções conexas, parece ser possível afirmar que:

- Na noção de composição aditiva de números foram o GE2 e GE1, respectivamente com 1,0 ponto e 0,5 pontos os que mais progrediram, tendo em vista que o GE3 e o GC mantiveram-se estáveis.
- No caso da noção da inversão adição/subtração, foi o GE2 o único grupo a avançar, considerando que o GE1 e o GE3 mantiveram-se estáveis e o GC retrocedeu.
- No problema de composição de duas medidas o GC obteve mais pontos (2,0 pontos), seguido do GE2, que fez 1,5 pontos. Também o GE3 progrediu, conseguindo 1,0 ponto, tendo sido apenas o GE1 o único grupo a manter-se estável.
- Quanto ao problema envolvendo uma transformação positiva sobre um estado inicial o GC obteve mais pontos (3,5 pontos), seguido pelos GE1 e GE3, ambos com 2,0 pontos, sendo que o GE2 fez apenas 1,0 ponto.

Logo, quanto às noções lógicas entre os pós-testes, o GE2 ainda progrediu em ambas, seguido do GE1, que progrediu apenas na composição aditiva de números, enquanto que o GE3 e o GC mantiveram estáveis suas alterações e/ou mesmo regrediram, como é o caso do GC. Porém, nas soluções dos problemas de estrutura aditiva os avanços do GC são mais expressivos em comparação ao demais grupos.

1.2.3 CONJUNTO DE TODAS AS ALTERAÇÕES EVOLUTIVAS DESDE O NÍVEL DE PARTIDA ATÉ A AVALIAÇÃO FINAL.

As tabelas 10, 11, 12 e 13 expõem as alterações entre o pré-teste e o pós-teste 2, as quais se referem ao conjunto dos avanços considerados desde a avaliação inicial correspondente ao nível de partida até a avaliação final.

Tabela 10: Alterações dos níveis evolutivos entre o pré-teste e o pós-teste 2 para a noção de composição aditiva de números.

		GE1				GE2				GE3				GC			
Pós-teste1 / Pré-teste		NO	I-	I+	O	NO	I-	I+	O	NO	I-	I+	O	NO	I-	I+	O
NO	Sujeitos	3				2	2			2	1			3	1		
	Pontos	0,0				0,0	1,0			0,0	0,5			0,0	0,5		
I-	Sujeitos							1			1					1	
	Pontos							0,5			0,0					0,5	
I+	Sujeitos			1							1						
	Pontos			0,0							-0,5						
O	Sujeitos																
	Pontos																
Σ sujeitos		4				5				5				5			
Σ pontos		0,0				1,5				0,0				1,0			

A tabela 10 mostra que o GE1 manteve-se estável entre o pré-teste e o pós-teste 2, pois havia perdido 0,5 ponto entre o pré-teste e o pós-teste 1, mas recuperou o valor perdido a longo prazo, o que o fez com que concluísse a avaliação sem nenhum ponto quanto à noção de composição aditiva de números.

O GE2, por sua vez, fez 1,5 ponto ao todo, pois havia feito 0,5 ponto a curto prazo e depois mais um ponto entre o pós-teste 1 e o pós-teste 2.

No que se refere ao GE3, em nenhum momento da avaliação houve avanço.

O GC permaneceu com o ponto obtido a curto prazo, não tendo havido nenhum avanço a longo prazo.

Tabela 11: Alterações dos níveis evolutivos entre o pré-teste e o pós-teste 2 para a noção da inversão adição/subtração.

		GE1					GE2					GE3					GC				
Pós-teste1 / Pré-teste		NO-	NO+	I-	I+	O	NO-	NO+	I-	I+	O	NO-	NO+	I-	I+	O	NO-	NO+	I-	I+	O
NO-	Sujeitos																				
	Pontos																				
NO+	Sujeitos		2			2		3			1		3			1		4			
	Pontos		0,0			3		0,0			1,5		0,0			1,5		0,0			
I-	Sujeitos																				
	Pontos																				
I+	Sujeitos																				
	Pontos																				
O	Sujeitos										1					1					1
	Pontos										0,0					0,0					0,0
Σ sujeitos		4					5					5					5				
Σ pontos		3,0					1,5					1,5					0,0				

A tabela 11 aponta que o GE1 obteve 3,0 pontos ao todo, pontuação obtida já a curto prazo que se manteve. Algo semelhante ocorreu no GE3, que entre o pré-teste e o pós-teste 1 obteve 1,5 pontos, que se mantiveram.

O GE2, por sua vez, conseguiu 1,5 pontos ao todo; como a curto prazo não havia conseguido avançar, essa pontuação foi obtida a longo prazo.

Já o GC terminou a avaliação sem pontuar, pois havia conseguido avançar a curto prazo, mas a longo prazo perdeu todos os pontos antes obtidos.

Tabela 12: Alterações dos níveis evolutivos entre o pré-teste e o pós-teste 2 para o problema de estrutura aditiva relativo à composição de duas medidas.

		GE1				GE2				GE3				GC			
Pré-teste \ Pós-teste1		A-	I-	I+	A+	A-	I-	I+	A+	A-	I-	I+	A+	A-	I-	I+	A+
A-	Sujeitos	1	1			1	1		1	1	2			1	1		1
	Pontos	0,0	0,5			0,0	0,5		1,5	0,0	1,0			0,0	0,5		1,5
I-	Sujeitos				1		1		1				1		2		
	Pontos				1,0		0,0		1,0				1,0		0,0		
I+	Sujeitos	1											1				
	Pontos	-1,0											0,5				
A+	Sujeitos																
	Pontos																
Σ sujeitos		4				5				5				5			
Σ pontos		0,5				3,0				2,5				2,0			

A tabela 12 mostra que o GE1 terminou com 0,5 pontos, pontuação que havia sido obtida a curto prazo. Já o GE2, avançou também a curto prazo, quando havia conseguido 1,5 pontos, mas seguiu progredindo também a longo prazo, o que fez com que concluísse a avaliação com 3,0 pontos.

Algo similar ocorreu no GE3 que, da mesma maneira que o GE2, obteve 1,5 pontos a curto prazo e depois mais 1,0 ponto, o que acarretou em uma pontuação total de 2,5 pontos.

O GC, que não havia feito pontos a curto prazo, progrediu entre o pós-teste 1 e o pós-teste 2, obtendo seus 2,0 pontos totais.

Tabela 13: Alterações dos níveis evolutivos entre o pré-teste e o pós-teste 2 para o problema de estrutura aditiva relativo à transformação positiva sobre um estado inicial.

		GE1				GE2				GE3				GC			
Pré-teste \ Pós-teste1		A-	I-	I+	A+	A-	I-	I+	A+	A-	I-	I+	A+	A-	I-	I+	A+
A-	Sujeitos		2		2	1	2		1		2	2			1		1
	Pontos		1,0		3,0	0,0	1,0		1,5		1,0	2,0			0,5		1,5
I-	Sujeitos														2		1
	Pontos														0,0		1,0
I+	Sujeitos								1				1				
	Pontos								0,5				0,5				
A+	Sujeitos																
	Pontos																
Σ sujeitos		4				5				5				5			
Σ pontos		4,0				3,0				3,5				3,0			

A tabela 13 demonstra que nesse problema, todos os grupos avançaram consideravelmente, especialmente o GE1, ao obter 4,0 pontos, seguido do GE3, com 3,5 pontos e dos demais, com 3,0 pontos cada um.

Todos os grupos progrediram a curto e a longo prazo. O GE1, que havia feito 2,0 pontos entre o pré-teste e o pós-teste 1, seguiu progredindo, obtendo mais dois pontos a longo prazo. O mesmo ocorreu com o GE2, que inicialmente fez 2,0 pontos e depois mais 1,0 ponto e com o GE3, que fez 1,5 pontos a curto prazo e 2,0 pontos a longo prazo, o que totalizou 3,5 pontos. Por fim, o GC, que entre o pré-teste e o pós-teste 1 havia regredido, perdendo 0,5 ponto, a longo prazo obteve 3,5 pontos, o que fez com que terminasse a avaliação com 3,0 pontos.

Em síntese, parece ser possível afirmar que, desde o nível de partida até a avaliação final:

- O GE1 não avançou em composição aditiva de números, mas progrediu especialmente na noção da inversão adição/subtração e no modelo de problema de estrutura aditiva envolvendo a transformação positiva sobre um estado inicial, ainda que também tenha apresentado um pequeno avanço quanto ao problema de composição de duas medidas.
- O GE2 avançou sobretudo nos problemas de estrutura aditiva, ainda que também tenha progredido nas duas noções lógicas tomadas como referência.
- Quanto ao GE3, obteve maior progresso nos problemas, ainda que também tenha avançado de forma modesta na noção da inversão adição/subtração. Já na composição aditiva de números não obteve nenhum tipo de progresso em nenhuma das fases avaliadas.
- O grupo controle progrediu especialmente no caso dos problemas de estrutura aditiva, não avançou na noção da inversão adição/subtração e progrediu razoavelmente na composição aditiva de números.

Em suma, parece ser possível afirmar que entre o pré-teste e o pós-teste 2:

- Na noção de composição aditiva de números foi o GE2 que mais progrediu, seguido do GC. O GE1 e o GE3 não progrediram em relação aos seus níveis de partida.
- Quanto à noção da inversão adição/subtração, o grupo que obteve maiores avanços foi o GE1, seguido pelos GE2 e GE3. O GC não progrediu.
- Em relação ao problema envolvendo a composição de duas medidas foi o GE2 o grupo a obter maiores avanços, seguido pelo GE3, GC e, por fim, o GE1.

- No caso do problema tratando da transformação positiva sobre um estado inicial, todos avançaram consideravelmente, tendo sido em primeiro lugar o GE1, seguido do GE3 e, finalmente, GC e GE2.

Conforme os resultados obtidos pela análise quantitativa, o que dizer por ora sobre a hipótese de que agregar exercícios operatórios ao trabalho de proposição de problemas de estrutura aditiva poderia favorecer a construção das noções aritméticas iniciais?

Os resultados obtidos parecem apontar para o fato de que, no conjunto das alterações evolutivas, desde o nível de partida até a avaliação final, os grupos experimentais foram os que mais avançaram, tanto no caso das noções lógicas estudadas, assim como em relação aos problemas de estrutura aditiva. Por outro lado, entre os grupos experimentais há diferenças quanto aos progressos entre as noções e os problemas avaliados.

No caso da noção de composição aditiva de números, a hipótese pode ser admitida, pois o GE2, grupo submetido ao tratamento composto por exercícios operatórios e problemas de estrutura aditiva, foi o que mais avançou. Este grupo progrediu tanto a curto como a longo prazo. O curioso, porém, é que na seqüência vem o GC como o grupo que mais progrediu nessa noção, mesmo em relação aos demais grupos experimentais.

Também no caso do primeiro tipo de problema de estrutura aditiva foi o GE2 o grupo que obteve melhores resultados, contribuindo com elementos para se olhar a hipótese como verdadeira.

Quanto à noção da inversão adição/subtração, o grupo que obteve maiores avanços foi o GE1, seguido pelo GE2. O GE2 não avançou a curto prazo, apenas a longo prazo. Nesse caso, a hipótese perde algo de sua força, pois o GE1 foi submetido apenas aos exercícios operatórios. Quadro semelhante ocorreu quanto ao segundo tipo de problema de estrutura aditiva, tendo sido também o GE1 o grupo que mais progrediu.

Em suma, o GE1 e o GE2 avançaram mais do que o GE3, sendo também importante destacar os progressos do GC nos problemas de estrutura aditiva e em composição aditiva de números, muito próximos daqueles dos grupos experimentais. Enfim, não parece ser possível apoiar consistentemente a hipótese em todos os casos, uma vez que se supõe haver efeitos diferentes dos tratamentos experimentais para cada noção.

2. ANÁLISE QUALITATIVA

Serão descritas as estratégias dos sujeitos identificadas em cada exercício operatório, assim como nos problemas aplicados. Em princípio tais estratégias foram classificadas em três grandes tipos:

a) Execução.
b) Explicação.
c) Notação (apenas para os problemas).

As do primeiro tipo referem-se àquelas concernentes às ações dos sujeitos tendo em vista o cumprimento das consignas dadas. Por exemplo, no caso do exercício de conservação de quantidades numéricas, uma das estratégias de execução observadas refere-se à composição correta do arranjo por compensação, ao aumentar ou diminuir uma subclasse.

As estratégias de explicação, por sua vez, são aquelas ligadas às justificativas dadas pelo sujeito frente as suas próprias ações ou ainda mediante as contra-argumentações do experimentador. Um exemplo disso refere-se à justificativa da diferença de quantidade entre duas coleções pelo uso da contagem dos elementos de cada uma delas.

As de notação, por sua vez, presentes apenas no caso dos problemas de estrutura aditiva, referem-se às diversas formas de registro empregadas pelos sujeitos, por exemplo, a utilização de marcas gráficas, tais como risquinhos ou bolinhas, para registrar as parcelas dos problemas.

Após a apresentação das estratégias, será realizada uma análise daquelas específicas de cada grupo, a fim de extrair traços típicos de cada um deles. Isto tem como objetivo responder questões interessantes para a verificação do valor da hipótese:

- Quais são as estratégias típicas de cada grupo?
- Com que freqüência elas aparecem?
- Qual é a relação entre os grupos que foram submetidos a tratamentos semelhantes, quanto às estratégias empregadas por seus sujeitos?
- Houve alterações das estratégias nos grupos no decorrer das sessões?
- Como se caracterizam tais alterações?

Para tanto, serão apresentadas tabelas contendo os percentuais de ocorrências observadas para cada estratégia, conforme a totalidade dessas ocorrências registradas pelo experimentador. Para cada grupo será exposta, sob a forma percentual, a presença de estratégias detectadas nos seguintes exercícios operatórios e problemas de estrutura aditiva:

GE1: quantificação da inclusão de classes; conservação de quantidades numéricas e seriação.

GE2: quantificação da inclusão de classes; conservação de quantidades numéricas; seriação e problemas de estrutura aditiva.

GE3: problemas de estrutura aditiva.

2.1 ESTRATÉGIAS DOS SUJEITOS NOS EXERCÍCIOS OPERATÓRIOS E NAS TAREFAS DE SOLUÇÕES DE PROBLEMAS

As estratégias apresentadas a seguir referem-se à totalidade de ocorrências observadas e registradas em todos os grupos. Para facilitar a análise posterior das tabelas relativas aos percentuais de ocorrências observadas, será colocada entre parênteses a sigla correspondente a cada estratégia como forma de identificá-las na seqüência do texto.

Foram observadas as seguintes estratégias nos exercícios de **quantificação da inclusão de classes** no GE1 e no GE2:[5]

1. Estratégias de execução:

1.1 Composição incorreta do arranjo, sem compensação entre aumento ou diminuição de uma subclasse. (Comp. inc.). Exemplo:

> Para a coleção nº 1, com 4 ursos e 2 camelos:
> E: *Agora eu quero que você faça uma coleção com o mesmo tanto igual de bichos, mas com mais camelos*.
> O S colocou 4 camelos e 4 cangurus.
> E: *Tem o mesmo tanto igual de bichos?*

1.2 Composição correta do arranjo por compensação, ao aumentarem ou diminuírem uma subclasse. (Comp. cor. compens.). Exemplo:

> Para a coleção nº 2, com 4 ursos e 2 leões:
> E: *Agora eu quero que você faça uma coleção com o mesmo tanto igual de bichos, mas com menos ursos.*
> O S pôs 2 alces, 1 camelo, 2 leões e 1 urso.

2. Estratégias de explicação para o caso de composição de coleções com a mesma quantidade, mas com subclasses diferentes:

2.1 Composição de apenas uma subclasse ao pedido de que ela fosse maior que a outra. (Comp. 1 subclasse). Exemplo:

> S: *Pra ficar com mais camelos é só por todas as partes camelos!*

2.2 Contagem como justificativa da equivalência entre as coleções. (Contagem). Exemplo:

> Para a coleção nº 2, com 4 ursos e 2 leões, foi pedido que ela fizesse outra com o mesmo tanto igual de bichos, mas com menos ursos. Ela pôs 1 canguru, 1 urso, 1 macaco, 1 leão e 2 camelos.
> E: *Tem o mesmo tanto igual de bichos?*
> Ela conta as duas coleções (6 e 6).

2.3 Correspondência termo-a-termo (com pareamento espacial) como justificativa da equivalência entre as coleções. (CTT). Exemplo:

[5] Serão utilizadas as siglas "E" para designar as faladas do experimentador e "S" para as do sujeito.

E: *Será que alguém tem mais bichos?*
S: *Não. Porque cada uma tá com uma coleção igual* (vai contando fazendo correspondência termo-a-termo, 1,1; 2,2; 3,3; 4,4; 5,5; 6,6).

3. Estratégias de explicação para o caso das perguntas referentes à relação entre classe e subclasse:

3.1 Afirmação de que subclasse é maior do que a classe. (Subclasse maior). Exemplo:

O experimentador faz uma segunda coleção com 2 leões e 4 cangurus e pede que ela faça uma coleção amarela com 4 leões e 2 cangurus. Pergunta se tem o mesmo tanto de bichos,e ela diz que sim.
E: *Se você tivesse que me falar que você iria cuidar. Você diria que iria cuidar de seus bichos ou de seus leões? Você tem mais leão ou mais bicho?*
S: Leão.
E: Você tem mais leão ou mais bicho?
S: Leão.
E: E eu, tenho mais canguru ou mais bicho?
S: Mais canguru.

3.2 Oscilação na afirmação de que a classe é maior que a subclasse, com predomínio de resposta incorreta. (Oscil. pred. resp. inc). Exemplo:

E: *Alguém tem mais bichos?*
S: Não, só se esse for com esse e esse for com esse. Tem o mesmo tanto.
E: Eu quero cuidar de todos os meus leões e você de todos os seus bichos. Será que alguém vai ter mais coisas para cuidar?
S: Eu acho que se eu for cuidar de todos os meus bichos, eu vou ter mais coisas para cuidar.
E: Por quê?
S: Porque eu vou ter que cuidar de 4 cangurus e 2 leões.
E: E você tem mais cangurus ou mais bichos?
S: Mais cangurus.
E: E eu, tenho mais leões ou mais bichos?
S: Mais leões.

3.3 Oscilação na afirmação de que a classe é maior que a subclasse, com predomínio de resposta correta. (Osci. pred. resp. cor). Exemplo:

E: *Eu vou cuidar de todos os meus cangurus e você de todos os seus bichos, quem vai cuidar de mais coisas?*
S: *Eu, porque eu vou cuidar de todos os bichos e você vai cuidar só dos seus cangurus.*
E: *Você tem mais leão ou bicho para cuidar?*
S: *Mais leão.*
E: *E eu, tenho mais canguru ou mais bicho?*
S: *Mais canguru. Por que ó, os 4* (pegando os cangurus do experimentador e colocando-os junto aos seus 4 leões) 1*, 2, 3, 4 cangurus e 1, 2, 3, 4 leões; dois grupinhos de cada um dá 4 leões.*
E: *Agora se eu puser meus leões aqui* (ponho 2 leões com 4 cangurus), *você acha que eu tenho mais cangurus ou bichos?*

S: *Mais bichos.*
E: *E você? Mais leões ou mais bichos?*
S: *Mais bichos.*
E: *E se eu disser, você tem que cuidar de seus leões e eu dos meus bichos, quem vai cuidar de mais coisas?*
S: *Você.*

3.4 Afirmação de que a classe é maior que a subclasse. (Classe maior). Exemplo:

E: *Eu vou cuidar dos meus cangurus e você de seus bichos, será que alguém vai cuidar de mais coisas, vai ter mais trabalho?*
S: *Eu.*
E: *Por quê?*
S: *Por que eu vou cuidar de todos e você só dos cangurus.*

3.5 Contagem como justificativa da afirmação de que a classe é maior que a subclasse. (Contagem). Exemplo:

E: *Será que alguém tem mais ursos?*
S: *Você.*
E: *Será que alguém tem mais bicho?*
S: *Não.*
E: *Como você descobriu?*
S: *Contando.*
E: *Será que alguém tem mais camelo?*
S: *Eu.*
E: *Eu queria cuidar de meus ursos e você cuidar de todos os bichos. Será que alguém vai cuidar de mais coisas?*
S: *Eu, eu vou cuidar de 2 a mais.*

Foram observadas as seguintes estratégias nos exercícios de **conservação de quantidades numéricas** no GE1 e no GE2:

1. Estratégias de execução:

1.1 Composição correta de coleção equivalente à modelo. (Comp. Cor. equiv.). Exemplo:

S: *Pra fazer o mesmo tanto igual é só ir vendo como tem em cima e ir pondo na fila, só que embaixo.*
E: *Esse é um jeito de saber se tem o mesmo tanto?*
S: *É.*
E: *Então, tem o mesmo tanto?*
S: *Tem!*
E: *Como você sabe?*
S: *Por isso* (mostrando as 2 filas*).*

1.2 Composição correta de coleção com menos elementos que a coleção-modelo. (Comp. Cor. menos). Exemplo:

Mediante o pedido de que ela fizesse uma fila com menos elementos do que a fila de 8 do experimentador, faz uma com 5 peças.

2. Estratégias de explicação para coleções equivalentes para o caso da composição de uma coleção equivalente à modelo.

2.1 Justificativa da equivalência entre as coleções conforme configuração espacial formada pelos elementos (aspecto figurativo). (Figura). Exemplo:

E: *Como você sabe que tem o mesmo tanto?*
S: *Olhando.*

2.2 Justificativa da equivalência entre as coleções pela correspondência termo-a-termo (com pareamento espacial). (CTT). Exemplo:

E: *Tem o mesmo tanto?*
S: *Tem.*
E: *Como você sabe?*
S: *Porque olha, tem 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 1, 2, 3, 4, 5, 6.*

2.3 Justificativa da equivalência entre as coleções pela contagem. (Contagem). Exemplo:

E: *Tem o mesmo tanto?*
S: Tem.
E: Como você sabe?
S: Porque olha, tem 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 1, 2, 3, 4, 5, 6.

3. Estratégias de explicação para coleções equivalentes para o caso das deformações feitas no arranjo espacial da coleção-modelo:

3.1 Mediante deformações feitas no arranjo, a equivalência deixa de ser admitida. (Comp. Cor. menos). Exemplo:

E: *E agora, tem o mesmo tanto igual* (o experimentador aproxima suas peças)*?*
S: *Não.*
E*: Por quê?*
S: *Porque você encolheu as suas e eu não encolhi.*
E*: Então você tem mais que eu?*
S*: Tenho.*
O experimentador volta suas peça à disposição original.
E: *E agora?*
S*: A gente tem o mesmo tanto igual.*
E*: E agora* (o experimentador afasta suas peças)*?*

S*: Você tem mais que eu.*
E*: Eu tenho mais? E agora* (o experimentador faz uma pilha com suas peças)*?*
S*: Você tem menos.*
E*: Por quê? Você sabe que tem criança que pensa que tem o mesmo tanto, que não mudou?*
S*: Mudou!*

3.2 Recomposição da coleção de acordo com a disposição original para justificar a equivalência. (Recomposição). Exemplo:

E: *Tem o mesmo tanto?*
S*: Tem.*
E*: Como você sabe?*
S: Eu fui botando de frente.
E: *E agora, a gente continua tendo o mesmo tanto igual* (o experimentador aproxima suas peças)*?*
Ele também aproxima suas peças e diz que continua.
E: *E agora, a gente continua tendo o mesmo tanto igual* (o experimentador faz fila vertical com suas peças)*?*
Ele faz arranjo igual com suas peças e diz que continua.
E: *E agora, a gente continua tendo o mesmo tanto igual* (o experimentador faz arranjo aleatório com suas peças)*?*
Ele faz arranjo igual com suas peças e diz que continua.
E: *Por quê?*
S: *Por que eu pus assim todos os que estavam ali.*

3.3 Justificativa da equivalência entre as coleções conforme configuração espacial formada pelos elementos (aspecto figurativo). (Figura). Exemplo:

E: *Tem o mesmo tanto?*
S: *Tem.*
E: *Como você sabe?*
S: *Ah, sei lá, olhando.*

3.4 Justificativa da equivalência entre as coleções por contagem. (Contagem). Exemplo:

O experimentador pede que pegue 10 peças, em seguida, pede que faça uma fila com o mesmo tanto igual à coleção modelo (6), ela faz e diz que sobraram 4.
E: *Tem o mesmo tanto?*
S: Tem.
E: Como você sabe?
S: Porque olha, tem 1, 2, ,3, 4, 5, 6 e 1, 2, ,3, 4, 5, 6.

3.5 Justificativa da equivalência mediante argumentos operatórios clássicos. (Arg. Operatórios). Exemplo:

E: *E agora, continua tendo o mesmo tanto* (o experimentador aproxima suas peças)?
S: *Continua.*
E: *Como você sabe?*

S: *Você só juntou.*
E: *Sabe que tem criança que pensa que quando eu faço assim não continua tendo o mesmo tanto, você acha que essas crianças estão certas ou erradas?*
S: *Erradas.*
E: *E agora, continua tendo o mesmo tanto* (o experimentador afasta suas peças)?
S: *Não sei.*
E: *Mas como você pode descobrir?*
S: *Tem, você só fez ficar grande.*
E: *E agora, continua tendo o mesmo tanto* (o experimentador faz um montinho com suas peças)?
S: *Continua, porque você só juntou.*

4. Estratégias de explicação para o caso da composição de coleções numericamente diferentes:

4.1 Justificativa da diferença entre as coleções pela contagem das quantidades em cada uma delas. (Contagem). Exemplo:

O experimentador faz uma fila com 8 elementos e pede que ela faça uma outra com menos peças, ela faz com 6, contando enquanto vai colocando suas peças.
S: *É assim eu fiquei com menos que você.*
E: Por quê?
S: Porque eu tenho 6.

5. Estratégias de explicação para coleções numericamente diferentes para o caso das deformações feitas na configuração da coleção-modelo:

5.1 Perda de crença na invariância diante deformações feitas no arranjo da coleção-modelo. (Deixa crer equiv.). Exemplo:

O experimentador aproxima suas peças.
E: *Eu continuo tendo mais e você menos?*
S: *Não! Eu tenho mais.*
E: *Por quê?*
S: *Porque essa aqui (*sua fila) *é uma fileira e essa aqui* (fila do experimentador) *você encolheu!*
E: *E se eu fizer assim* (o experimentador faz uma pilha com suas peças*)? Eu continuo tendo mais peças?*
S: *Não porque você encolheu*
E: *Como que eu tenho que fazer para ter mais que você?*
S: *Você tem que fazer assim...* (faz fila com as peças do experimentador, ajustando o tamanho das duas filas, mas mostrando que deixa um espaço onde duas das peças do experimentador não estão em correspondência com nenhuma das peças da fila dela).
E: *E se eu fizer assim* (o experimentador arruma suas peças em círculo)*?*
S: *Eu tenho mais assim.*

5.2 Crença na invariância sem nenhum tipo de justificativa diante das deformações feitas no arranjo da coleção-modelo (Não justifica). Exemplo:

E: *E agora, tem o mesmo tanto igual?*
S: *Tem.*
E*: Como você sabe*?
S: *Não sei.*

5.3 Justifica a diferença entre as coleções por meio da contagem das quantidades em cada uma delas diante das deformações feitas no arranjo da coleção-modelo, (Contagem). Exemplo:

O experimentador faz deformações em sua fila, primeiro afastando suas peças; depois as aproximando. Para as duas situações ele afirma que o experimentador continua tendo mais, *porque eu tenho 3 e você tem 8.*

5.4 Justifica a diferença entre as coleções pela recomposição do arranjo, tal como no início da prova diante das deformações feitas no arranjo da coleção-modelo (Recomposição).Exemplo:

O experimentador aproxima os elementos de sua fila e pergunta se continua tendo o mesmo tanto igual.
S*: Sim!*
E*: Por quê?*
S*: Porque eu também junto* (faz a mesma coisa com a fila dela).
Repete a mesma pergunta, dessa vez espalhando os elementos da fila. Ela diz que continua tendo o mesmo tanto e faz o mesmo com suas peças. O experimentador faz uma composição em forma circular e repete a pergunta, ela diz que continua tendo o mesmo tanto, sempre repetindo o mesmo com suas peças.

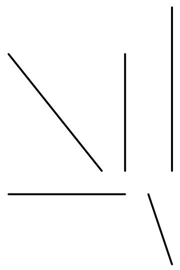
5.5 Justifica a diferença entre as coleções pelo emprego de argumentos operatórios clássicos diante das deformações feitas no arranjo da coleção-modelo, (Arg. operatórios). Exemplo:

E*: E agora, eu continuo tendo mais que você* (suas peças são espalhadas).
S: *Sim.*
E*: Por quê?*
S: *Por que você só mudou.*
E*: E agora, eu continuo tendo mais que você* (as peças do experimentador são aproximadas).
S: *Sim.*
E*: Por quê?*
S: *Por que você só juntou.*

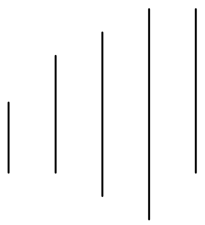
Foram observadas as seguintes estratégias nos exercícios de **seriação** no GE1 e no GE2**:**

1. Estratégias de execução:

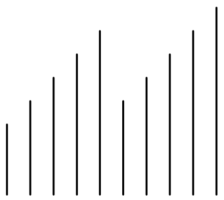
1.1 Composição de arranjo aleatório, sem nenhum tipo de critério lógico, apenas pela “boa figura”. (Arranjo aleatório).



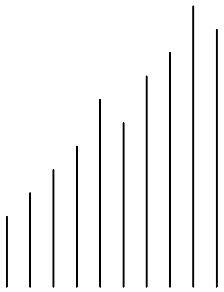
1.2 Composição aproximada de arranjo ordenado, sem preocupação em alinhar as bases. (Comp. aprox.).



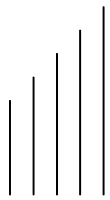
1.3 Justaposição de dois arranjos curtos mediante o pedido de intercalar duas séries para montagem de série longa. (Justap. 2 curtos).



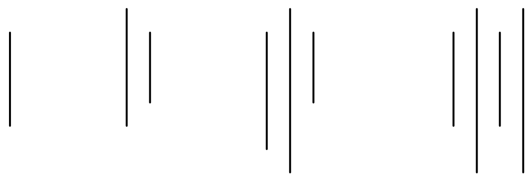
1.4 Composição parcial ou aproximada de arranjo longo mediante pedido de intercalar duas séries curtas. (Comp. parc. longo).



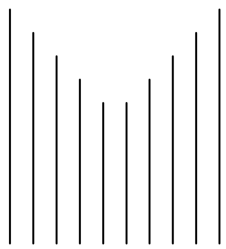
1.5 Composição correta de arranjo ordenado com bases alinhadas. (Comp. correta).



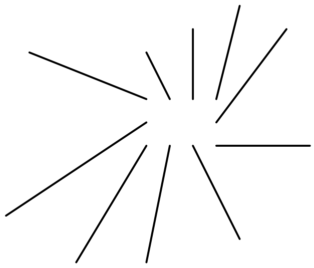
1.6 Composição de arranjo ordenado de acordo com o número de peças, não pelo tamanho. (Comp. nº peças).



1.7 Composição de arranjo em ordem crescente aproximada, sem formar uma linha, mas sim outra figura. (Comp. aprox. fig.).



1.8 Composição parcial ou aproximada de arranjo longo, mediante pedido de intercalar duas séries curtas, sem formar linha, mas outra figura. (Comp. longo fig.).



2. Estratégias de explicação:

2.1 Utilização de argumentos lúdicos para justificar composição parcial ou incorreta. (Lúdicos). Exemplo:

S: *É uma escada maluca!*

2.2 Identificação aproximada do elemento correspondente na série paralela. (Ident. aprox.).

2.3 Identificação do elemento correspondente na série paralela. (Ident. correta).

Foram observadas as seguintes estratégias nas soluções dos **problemas de estrutura aditiva** no GE2 e no GE3**:**

1. Estratégias de repostas aleatórias:

1.1 Resposta aleatória, sem a expressão de nenhum tipo de estratégia organizada para a resolução do problema. (Resp. aleatória). Exemplo:

E: *Em um ônibus havia 11 pessoas, depois subiram mais 6, quantas pessoas ficaram ao todo?*
S: *É, é, é... 20!*

1.2 Resposta aleatória recorrendo aos "nós" da seqüência numérica. (Resp. aleatória nós). Exemplo:

E: E*m um ônibus havia 11 pessoas, em um ponto subiram mais 6, quantas pessoas ficaram ao todo*
S: *10!*

2. Estratégias de composição e resolução para o caso de problemas de estrutura aditiva:

2.1 Composição incorreta das parcelas do problema. (Comp. incorreta). Exemplo:

E: E*m um aquário há 5 peixes azuis e 8 vermelhos, quantos há ao todo?*
O sujeito fica pensando. Após determinar quais serão os vermelhos e quais serão os azuis, separa 8 peças amarelas e 8 roxas.

2.2 Composição correta de apenas uma das parcelas do problema, gerando resultado errado. (Comp. cor. 1 parcela). Exemplo:

E: E*m um ônibus havia 11 pessoas. Subiram nele mais 6 pessoas. Quantas ficaram no total?*
S: *Pode usar as tampinhas?*
E: *Pode!*
S: *Pode ser 11 e daí subiram 6?*
E: Pode.
Vai pegando as tampas 1 a 1, contando até chegar em 11.
E: Subiram 6!
Segue contando enquanto vai tirando do pote: *12, 13, 14, 15, 16, 17, 18!* (não se preocupa em separar antes as 6 tampas).

2.3 Subtrair uma parcela no caso de uma adição. (Subtr. nas adições).

E*: Vamos pensar, tinham 11 pessoas, subiram mais 6, quantas ficaram? Será que as tampinhas podem ajudar?*
Ela começa a contar e se confunde, pulando do 7 para o 11, depois retira 2.
E*: Vamos contar para ver se tem 11 mesmo?*
Ela conta novamente até 12 e tira 1.
E*: Essas estavam no ônibus?*
S*: Sim.*
E*:E quantas subiram?*
S*: 6!*
Conta até 6 e retira 6 das 11.

2.4 Composição de parcelas por correspondência termo-a-termo, sem recorrer à contagem. (Comp. por CTT). Exemplo:

Na situação em que deveria compor duas parcelas, uma com 12 e a outra com 13 elementos:
S*: Aqui eu não preciso pôr até aqui, eu tenho que por mais um* (mostrando o fim da fila de 12).
E*: E como você descobriu isso?*
S*: É que é 13, né?*
E: *E 13 é um a mais que 12?*
S*: É!*

2.5 Composição correta das parcelas por meio de contagem do material concreto ou dos dedos. (Comp. cor. contagem).Exemplo:

S*: Eu sei que 11+6 é muito, então eu vou ter que usar muitas tampas!*
E*: Ah! Você sabe que é muito? Mas quanto será que é?*

Faz fila com 11.
E*: Quantas tem aí?*
S: *11!*
E*: Então: eram 11, subiram 6, quantas ficaram?*
Pega mais 6 tampas, contando-as.
E*: Então: quantas pessoas ficaram no ônibus?*
S*: 17!*
E*: 17! Como você descobriu?*
S*: Eu tava pensando assim: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11; do 11 eu segui até o 17.*

2.6 Utilização da notação como ferramenta para resolver o problema. (Notação como ferram.). Exemplo:

E: U*m menino tinha 6 lápis e comprou mais 7, com quantos lápis ficou?*
S: *Vou ter que fazer no papel.*
O sujeito desenha 6 bolinhas, depois mais 7 e conta tudo até 13.

3. Estratégias de composição e resolução para o caso de problemas subtrativos:

3.1 Composição incorreta do valor total do qual deve ser retirada uma parcela. (Comp. Inc. subtração). Exemplo:

E: *Uma menina tinha 9 balas e deu 3 para a amiga, com quantas ela ficou*?
S: 4! (sem preocupar-se em contar ou com qualquer tipo de estratégia).
E: *Vamos ver se essas peças podem ajudar a pensar?*
O sujeito coloca 10 peças e conta até 9, retira 3 dizendo:
S: D*eu 3 para a amiga dela...*
*O sujeito c*onta as 7 restantes, sem se preocupar em organizar as peças para contá-las (não faz fila e nem retira os elementos já contados).

3.2 Composição e soma das parcelas no caso de uma subtração. (Soma em subtração). Exemplo:

Frente ao problema de subtração 12-4 pega 12 tampinhas (contando alto), depois pega mais 4. Conta tudo até 15 (na verdade 16).

3.3. Composição correta da quantidade total dada, com subtração de uma parcela. (Subtração correta). Exemplo:

E: *Uma menina tinha 9 balas e deu 3 para a amiga, com quantas ela ficou*?
S: *Deixa eu ver... são 6!*
E: *Como você sabe?*
S: *Eu peguei 3 dedos, daí eu tirei 1 e ficou 8, tirei outro e ficou 7 e tirei outro e ficou 6.*

4. Estratégias de contagem:

4.1 Contagem sem correspondência termo-a-termo entre o número e o elemento contado. (Contagem s/ CTT).

Pega tampinhas e vai contando de 1 até 7 e já pula de 7 para 11.
E: *7 e 11? Depois do 7 vem o 11?*
S: *Não!*
E*: O que vem?*
S: *8! Ah, acho que a gente vai ter que contar tudo de novo!*
E: *Vamos pensar, tinha 11 pessoas, subiram mais 6, quantas ficaram? Será que as tampinhas podem ajudar.*
Ela começa a contar e novamente se confunde, pulando do 7 para o 11.

4.2 Contagem com correspondência termo-a-termo, mas ainda sem organização dos elementos para controle. (Cont. c/ CTT s/ contr.).

Frente ao problema no qual deveria somar 8 e 5, separa 5 fichas de uma cor e 8 de outra, mas na hora de contar não organiza em fila e não tira cada elemento contado, o que gera resultado errado, por contar duas vezes o mesmo elemento.

4.3 Contagem total dos elementos (*counting all),* seja nos dedos, seja com material concreto. (*Counting all).*[6]

S: *Eu sei que 11+6 é muito, então eu vou ter que usar muitas tampas!*
E: Ah! Você sabe que é muito? Mas quanto será que é?
Faz fila com 11.
E: *Quantas tem aí?*
S*: 11!*
E*: Então: eram 11, subiram 6, quantas ficaram?*
Pega mais 6 tampas, contando-as.
E: *Então: quantas pessoas ficaram no ônibus?*
S: 17!
E*: 17! Como você descobriu?*
S*: Eu tava pensando assim: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11; do 11 eu segui até o 17.*

4.4 Contagem na seqüência (*counting on*). (*Counting on).*

E: *Em um ônibus havia 11 pessoas, em um ponto subiram mais 6, quantas pessoas ficaram ao todo?*
Pensa e discretamente conta nos dedos.
S: *17!*
E: *Como você descobriu?*
S*: Contando!*
E*: Mas como? Me explica, no dedo, na cabeça?*
S*: Assim: contei no dedo e na cabeça, porque é assim ó, contei 11* (e a partir do 12 até o 17 foi mostrando nos dedos) *até o 17.*

4.5 Utilização de cálculo mental. (Cálculo mental).

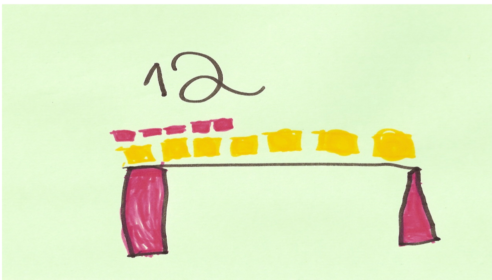
[6] Serão mantidas as expressões em inglês para contagem total de elementos (*counting all*) e para contagem na seqüência (*counting on).*

E: *Em um jogo de futebol um time fez 7 gols no primeiro tempo e 5 no segundo tempo, quantos gols foram feitos ao todo?*
S:*12! Foi mais fácil que o outro da escola.*
E*: Mas como você descobriu?*
S*: Eu pensei assim: 5! 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12!*

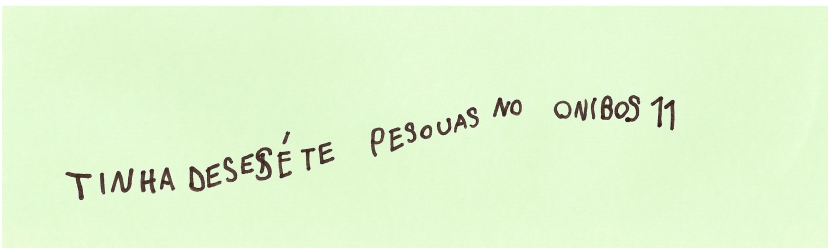
5. Estratégias de notação:

Registro pictórico de um aspecto do problema. (Pictórico). Exemplo:

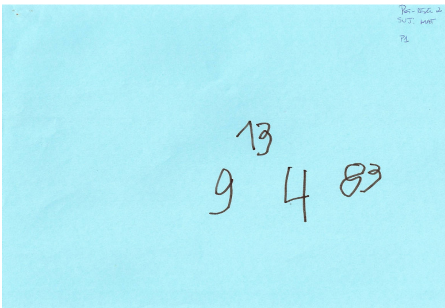
Produção de marcas gráficas (bolinhas, risquinhos) para cada parcela do problema. (Marcas gráficas). Exemplo:



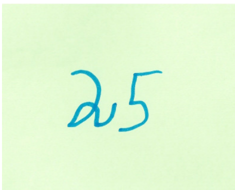
Escrita alfabética. (Alfabético). Exemplo:



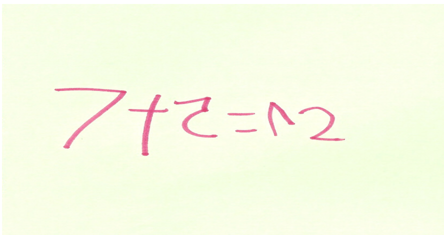
Registro numérico das parcelas do problema. (Numérico parcelas). Exemplo:



Registro numérico com o resultado final. (Numérico resultado). Exemplo:



Utilização da sentença matemática. (Sentença matemática). Exemplo:



2.2 COMPARAÇÃO DA PRESENÇA DAS ESTRATÉGIAS COGNITIVAS OBSERVADAS NOS EXERCÍCIOS OPERATÓRIOS E NAS SOLUÇÕES DE PROBLEMAS ENTRE OS GRUPOS.

A seguir serão apresentados em tabelas os percentuais das estratégias utilizadas pelos sujeitos de cada grupo. Cada percentual foi calculado tendo como base o número de ocorrências registradas durante todas as sessões do programa de intervenção.

Vale considerar que o número total de ocorrências (n) em cada grupo é variável, pois se refere às estratégias que puderam ser identificadas pelo experimentador. Por exemplo, no caso da noção da quantificação da inclusão de classes, foram detectadas 14 ocorrências no GE1, ao passo que no GE2 foram 11. Isso não quer dizer que foram verificadas 14 estratégias diferentes no GE1, mas sim 14 ocorrências de utilização de estratégias durante as diversas aplicações do exercício operatório relativo à noção.

A tabela 14 mostrará os percentuais das estratégias observadas no GE1 e no GE2 quando do exercício de quantificação da inclusão de classes.

Tabela 14: Percentual das estratégias observadas no GE1 e no GE2 nos exercícios operatórios de quantificação da inclusão de classes (Q)

	GE1 n= 17	GE2 n=18
1.1 Comp. inc.	6,0%	5,6%
1.2 Comp. cor. compens.	35,0%	27,7%
2.1 Comp. 1 subclasse	6,0%	0,0%
2.2 Contagem	23,5%	27,6%
2.3 CTT	0,0%	5,6%
3.1 Subclasse maior	0,0%	5,6%
3.2 Oscil. pred. resp. inc.	0,0%	5,6%
3.3 Osci. pred. resp. cor.	11,75%	5,6%
3.4 Classe maior	11,75%	5,6%
3.5 Contagem	6,0%	11,1%

A tabela 14 mostra que, especificamente em relação às estratégias de execução do GE1 observadas nos exercícios de quantificação da inclusão de classes, a maioria das ocorrências (35%) refere-se à composição correta dos arranjos por meio da compensação, ao aumentarem ou diminuírem uma subclasse, sendo que apenas 6% das ocorrências consistiram na realização de composição incorreta.

Já no que diz respeito às estratégias de explicações (para o caso de coleções com a mesma quantidade, mas com subclasses diferentes), o grupo recorreu, sobretudo, à contagem como maneira de explicar a equivalência entre a coleções (23,5% dos casos observados).

No caso das explicações solicitadas a respeito das relações entre classes e subclasses, 11,75% das ocorrências observadas revelaram oscilação na afirmação de que a classe é maior que a subclasse (ainda que com predomínio de resposta correta); também 11,75% referiam-se à afirmação da classe como maior, sendo que em 6% dos casos observados a contagem foi utilizada como forma de explicar essa relação entre classe e subclasse.

Em suma, quanto às estratégias de execução do GE1, o predomínio foi de composições corretas de coleções por compensação, ao aumentarem ou diminuírem uma subclasse para compensar a outra. No que se refere às explicações, a contagem foi utilizada predominantemente como forma de garantir a equivalência no caso das composições de coleções. Já no caso da relações entre classes e subclasses, houve predomínio de respostas corretas, ainda que tivessem ocorrido oscilações no domínio dessa noção.

Em relação às estratégias de execução observadas no GE2 em exercícios de quantificação da inclusão de classes, 27,7% das ocorrências referem-se a composições corretas dos arranjos, ao recorrerem ao mecanismo da compensação entre subclasses, diminuindo uma delas para que pudessem aumentar uma outra, mantendo assim as coleções equivalentes. Em apenas 5,6% das ocorrências observou-se composição incorreta dos arranjos.

Quanto às explicações a respeito da equivalência entre as coleções com subclasses diferentes, 27,6% das ocorrências são relativas à contagem como argumento para garantir a equivalência, ainda que apenas em 5,6% dos casos a correspondência termo-a-termo também tenha sido utilizada.

Já no que diz respeito às explicações dadas frente às perguntas relativas às relações entre classes e subclasses, novamente a contagem serviu como argumento explicativo em 11,1% dos casos. Em frequência menor, também apareceram estratégias tais como: afirmação de que a subclasse é maior do que a classe (5,6%); oscilação na afirmação de que a classe é maior que a subclasse, com predomínio de resposta incorreta (5,6%); oscilação na afirmação de que a classe é maior que a subclasse, com predomínio de resposta correta (5,6%) e afirmação de que a classe é maior que a subclasse (5,6%).

Em síntese, no GE2 houve predomínio de composição correta por compensação de subclasses quanto às estratégias de execução, assim como no GE1. Já no que se refere às estratégias de explicação nas composições de coleções, a contagem foi a mais utilizada por esse grupo, assim como no caso das explicações obtidas a respeito das relações entre classes e subclasses.

Conforme a análise das estratégias nos exercícios operatórios de quantificação da inclusão de classes e dos percentuais de ocorrências observados em cada um dos grupos, parece ser possível afirmar que:

- Os dois grupos apresentam estratégias de execução semelhantes, com predomínio da composição correta de coleções.
- O GE1 e o GE2 também apresentaram estratégias de explicação semelhantes para o caso de composição de coleções com a mesma quantidade, mas com subclasses diferentes, recorrendo predominantemente à contagem como forma de justificar a mesma quantidade de elementos e subclasses diferentes. Foi verificada apenas uma pequena diferença entre os dois grupos: no GE1 foi observada a estratégia de composição de apenas uma subclasse mediante o pedido de que uma subclasse fosse maior que a outra (6,0%), e no GE2 observa-se a correspondência termo-a-termo como forma de garantir a equivalência entre coleções (5,6%).
- No que diz respeito às explicações para o caso das perguntas referentes à relação entre classes e subclasses, no GE1 há percentual de justificativas maior do que no GE2.

Em suma, quanto às estratégias de quantificação da inclusão de classes o GE1 e o GE2 são semelhantes, exceto quanto à vantagem do GE1 nos argumentos empregados.

A tabela 15 mostrará os percentuais das estratégias observadas nos GE1 e GE2 para a noção de conservação de quantidades numéricas.

Tabela 15: Percentual das estratégias observadas no GE1 e no GE2 nos exercícios operatórios de conservação de quantidades numéricas (N)

	GE1 n=29	GE2 n=25
1.1 Comp. Cor. equiv.	17,3%	20,0%
1.2 Comp. Cor. menos	17,3%	16,0%
2.1 Figura	3,4%	0,0%
2.2 CTT	13,9%	4,0%
2.3 Contagem	3,4%	8,0%
3.1 Deixa crer equiv.	3,4%	0,0%
3.2 Recomposição	3,4%	16,0%
3.3 Figura	3,4%	0,0%
3.4 Contagem	0,0%	4,0%
3.5 Arg. Operatórios	10,4%	0,0%
4.1 Contagem	6,9%	12,0%
5.1 Deixa crer equiv.	3,4%	0,0%
5.2 Não justifica	0,0%	4,0%
5.3 Contagem	3,4%	8,0%
5.4 Recomposição	0,0%	4,0%
5.5 Arg. Operatórios	10,4%	4,0%

No que diz respeito às estratégias de execução nos exercícios de conservação de quantidades numéricas, foram observadas no GE1 ocorrências de composição correta de coleções, seja para o caso de coleções equivalentes (17,3%), seja para o caso de coleções numericamente diferentes (17,3%).

No caso das explicações a respeito das composições de coleções equivalentes, a maioria das estratégias observadas (13,9%) referem-se à utilização da correspondência termo-a-termo como maneira de explicar a equivalência das coleções. Apenas 3,4% dos casos consistiram no uso da contagem e também 3,4% no argumento da figura.

Ainda no caso das coleções equivalentes, especificamente quanto às explicações concernentes às deformações feitas na configuração da coleção-modelo, em 3,4% dos casos foi observada a estratégia de deixar de crer na equivalência mediante as alterações feitas no arranjo da coleção modelo. Da mesma maneira, em 3,4% das situações foi utilizada a estratégia de recomposição da coleção para justificar a equivalência e, em outros 3,4% dos casos, o argumento baseado na configuração espacial formada pelos elementos (aspecto figurativo) foi utilizado. A estratégia predominante nesse caso foi a justificativa da equivalência por meio de argumentos operatórios (10,4%).

Quanto às coleções numericamente diferentes, as estratégias de execução observadas referem-se, sobretudo, à contagem como forma de justificar a diferença entre as coleções (6,9%).

Já quanto às explicações observadas, a afirmação da invariância das quantidades das coleções, mesmo mediante as modificações feitas na coleção-modelo, foi a estratégia predominante. Os argumentos mais utilizados foram os operatórios clássicos (10,4%) e a contagem (3,4%). Apenas em 3,4% dos casos foi verificada a estratégia da afirmação de que as quantidades mudavam quando eram feitas alterações no arranjo dos elementos da coleção-modelo.

Em suma, o GE1 expressou predominantemente estratégias de composição correta de coleções, além de ter recorrido à correspondência termo-a-termo e a argumentos operatórios para explicar a invariância das quantidades.

Quanto às estratégias de execução observadas no GE2, 20% dos casos referiram-se à composição correta de coleções equivalentes à modelo e 16% à composição de arranjos com menos elementos que os do modelo.

Quanto às estratégias de explicação (composição de coleção equivalente à modelo), 8% das ocorrências referem-se ao uso da contagem para justificar a equivalência e 4% à correspondência termo-a-termo.

Conforme eram realizadas alterações no arranjo dos elementos da coleção-modelo (para coleções equivalentes), a maior parte das ocorrências observadas (16%) referem-se à recomposição do arranjo tal qual a disposição original e 4% à contagem.

Já quanto às composições de coleções numericamente diferentes, em 12% dos casos a contagem foi a justificativa utilizada para sustentar a diferença entre as quantidades.

No caso das explicações a respeito da invariância das quantidades, conforme eram realizadas deformações na coleção-modelo (para coleções numericamente diferentes), a maioria das estratégias observadas (8%) é concernente ao uso da contagem como forma de provar que as quantidades não se alteraram. Além disso, também foram observadas as estratégias: crença na invariância mediante as alterações no arranjo, mas sem apresentação de nenhum tipo de justificativa (4%); justificativa da invariância pela recomposição do arranjo tal qual a disposição original (4%) e, finalmente, emprego de argumentos operatórios para explicar a invariância (4%).

Assim, no caso das estratégias de execução, o GE2 expressou predominantemente aquelas ligadas à composição correta de coleções. No que se refere às explicações, recorreu especialmente à recomposição do arranjo, tal como no início do exercício, bem como à contagem.

A partir da análise das estratégias utilizadas pelo GE1 e pelo GE2 nos exercícios operatórios de conservação de quantidades numéricas e dos percentuais de ocorrências observadas em cada um dos grupos, parece ser possível afirmar que:

- Quanto às estratégias de execução os dois grupos são semelhantes.
- Em relação às estratégias de explicação para coleções equivalentes para o caso da composição de uma coleção equivalente à modelo, o GE1 recorreu predominantemente à correspondência termo-a-termo para justificar a equivalência, ao passo que o GE2, ainda que também tenha feito uso da correspondência termo-a-termo, apelou especialmente à contagem como argumento da equivalência.
- No que diz respeito às estratégias de explicação para coleções equivalentes para o caso das deformações feitas na configuração da coleção-modelo, o GE1 recorreu, sobretudo, a argumentos operatórios para justificar a equivalência a despeito das alterações feitas no arranjo, enquanto que o GE2 apelou predominantemente para a estratégia de recompor o arranjo tal qual a disposição original para provar a equivalência.
- No caso das explicações dadas nas composições de coleções numericamente diferentes, foi detectada uma tendência maior do GE2 de recorrer à contagem, ainda que no GE1, em menor escala, essa estratégia também tenha sido usada.
- No que se refere às estratégias de explicação para coleções numericamente diferentes para o caso das deformações feitas na configuração da coleção-modelo, o GE1 recorreu predominantemente aos argumentos operatórios clássicos para justificar a invariância das quantidades, a despeito das alterações feitas nos arranjos. Já o GE2, ainda que também tenha recorrido aos mesmos tipos de argumentos, predominantemente fez uso da contagem como justificativa.

Em suma, as diferenças nas estratégias de explicação mostram que o GE1 fez uso predominante de correspondência termo-a-termo e de argumentos operatórios clássicos, enquanto que o GE2 recorreu à contagem e à recomposição dos arranjos para justificar as invariâncias das coleções.

A tabela 16 mostrará os percentuais das estratégias observadas nos GE1 e GE2, expressas nas sessões de exercícios operatórios de seriação:

Tabela 16: Percentuais das estratégias observadas no GE1 e no GE2 nos exercícios operatórios de seriação (S)

	GE1 n= 18	GE2 n=12
1.1 Arranjo aleatório	5,6%	8,4%
1.2 Comp. aprox.	0,0%	25,0%
1.3 Justap. 2 curtos	5,6%	8,4%
1.4 Comp. parc. longo	11,1%	25,0%
1.5 Comp. correta	27,6%	33,2%
1.6 Comp. nº peças	5,6%	0,0%
1.7 Comp. aprox. fig.	11,1%	0,0%
1.8 Comp. longo fig.	5,6%	0,0%
2.1 Lúdicos	11,1%	0,0%
2.2 Ident. aprox.	5,6%	0,0%
2.3 Ident. correta	11,1%	0,0%

Quanto aos exercícios operatórios de seriação realizados pelo GE1, 27,6% das ocorrências observadas referem-se ao emprego de estratégias corretas de composição de série com as bases alinhadas, contra 5,6% de casos nos quais não foi detectado qualquer tipo de critério lógico, parecendo ter havido uma preocupação apenas com a composição da "boa figura".

No caso das consignas que envolviam intercalação de duas séries curtas para a composição de uma longa, foram observados dois tipos de estratégias: a justaposição de dois arranjos curtos (5,6%) e a composição parcial ou aproximada de arranjo longo (11,1%).

Por fim, surgiram também outros tipos de estratégias: composição de arranjo ordenado de acordo com o número de elementos e não com o tamanho (5,6%), composição de um arranjo em ordem crescente aproximada, sem formar uma linha, mas sim a figura de um sol (11,1%) e composição parcial ou aproximada de arranjo longo mediante pedido de intercalar duas séries curtas, sem formar linha, mas outra figura (5,6%). observadas no GE1.

Quanto às estratégias de explicação verificadas no GE1, foram observadas ocorrências de argumentos lúdicos para justificar a composição dos arranjos (em 11,1% dos casos); identificação do elemento correspondente na série paralela (11,1%) e identificação aproximada do elemento correspondente na série paralela (5,6%).

Em síntese, no caso do GE1 predominaram as estratégias de composição correta de séries, com alinhamento das bases. Quanto às estratégias de explicação, predominaram os argumentos lúdicos e a identificação correta de elementos entre duas séries paralelas.

Quanto aos exercícios operatórios de seriação realizados pelo GE2, a maioria das estratégias referem-se à composição correta do arranjo, em ordem crescente e com as bases alinhadas, o que foi observado em 33,5% dos casos. Apesar disso, também não deixam de ser significativas as ocorrências de montagens aproximadas de arranjos simples (25%), assim como daqueles arranjos provenientes da justaposição de duas séries curtas (25%). Em 8,4% das ocorrências observadas foram utilizadas as estratégias de composição de arranjo aleatório e, também, em 8,4% dos casos, a justaposição de dois arranjos curtos mediante o pedido de intercalar duas séries para a montagem de uma série longa.

Em resumo, no caso do GE2 houve predomínio de estratégias de composição correta do arranjo, ainda que em nenhum momento o grupo tenha expressado estratégia de composição correta de duas séries paralelas, para que chegasse ao caso das explicações relativas às relações entre elementos de séries paralelas.

A partir dessa análise das estratégias utilizadas pelo GE1 e pelo GE2 nos exercícios operatórios de seriação, parece ser possível afirmar que:

- No que se refere às estratégias de execução, os dois grupos são semelhantes, com predominância de composição correta dos arranjos.
- Quanto às estratégias de explicação, o GE2 não chegou a expressar qualquer tipo delas, uma vez que não chegou a compor séries paralelas, o que incitaria as perguntas relativas às relações entre elementos de duas séries.

Em suma, quanto aos exercícios de seriação GE1 e GE2 são semelhantes na execução de composição correta de arranjos, mas não nas explicações, pois apenas o GE1 expressou argumentos de tipo lúdicos e estabeleceu a equivalência de elementos isolados nas duas séries.

A tabela 17 mostra os percentuais das estratégias observadas nos GE2 e GE3 para a solução dos dois tipos de problemas de estrutura aditiva.

Tabela 17: Freqüência das estratégias observadas no GE2 e no GE3 nas soluções dos problemas de estrutura aditiva

	GE2 n=45	GE3 n=129
1.1 Resp. aleatória	4,5%	3,2%
1.2 Resp. aleatória nós	4,5%	0,0%
2.1 Comp. incorreta	2,2%	2,4%
2.2 Comp. cor. 1 parcela	4,5%	0,8%
2.3 Subtr. nas adições	0,0%	0,8%
2.4 Comp. por CTT	0,0%	1,6%
2.5 Comp. cor. contagem	22,3%	19,5%
2.6 Notação como ferram.	0,0%	0,0%
3.1 Comp. Inc. subtração	0,0%	1,6%
3.2 Soma em subtração	0,0%	0,8%
3.3 Subtração correta	0,0%	6,7%
4.1 Contagem s/ CTT	2,2%	3,2%
4.2 Cont. c/ CTT s/ contr.	0,0%	0,0%
4.3 *Counting all*	24,6%	15,5%
4.4 *Counting on*	2,2%	4,6%
4.5 Cálculo mental	0,0%	0,0%
5.1 Pictórico	8,8%	7,0%
5.2 Marcas gráficas	8,8%	7,0%
5.3 Alfabético	6,6%	0,0%
5.4 Numérico parcelas	0,0%	4,6%
5.5 Numérico resultado	8,8%	13,0%
5.6 Sentença matemática	0,0%	7,7%

A tabela 17 aponta uma diferença significativa do números de ocorrências observadas entre os dois grupos, ou seja, 129 ocorrências no GE3 e 45 no GE2. Isso se explica pelo fato de que, apesar dos dois grupos terem sido submetidos ao trabalho de soluções de problemas de estrutura aditiva, a quantidade de problemas propostos para os dois não foi a mesma. Isso se deve ao fato de que o GE2 trabalhou com os exercícios operatórios e com os problemas de estrutura aditiva, enquanto que o GE3 trabalhou apenas com problemas de estrutura aditiva.

No que se refere às soluções dos problemas de estrutura aditiva realizadas pelo GE2, a contagem total dos elementos (*counting all*) foi a estratégia detectada em 24,6% dos ocorrências observadas, enquanto que em 22,3% dos casos foi a composição correta das parcelas do problema no caso das adições. Estratégias menos adiantadas foram observadas em percentuais menores: resposta aleatória (4,5%); resposta aleatória recorrendo aos "nós" da seqüência numérica (4,5%); composição correta de apenas uma das parcelas do problema (4,5%); composição incorreta das parcelas (2,2%); contagem sem correspondência termo-a-termo (2,2%). A estratégia de contagem dos elementos na sequência (*counting on*) surgiu em apenas 2,2% das ocorrências.

Quanto às formas de notação empregadas, não foi observada alguma predominante, mas sim notações diversas: registro pictórico (8,8%); utilização de marcas gráficas (8,8%); registro numérico com o resultado final (8,8%); e escrita alfabética (6,6%).

Em suma, as estratégias predominantes no GE2 foram a composição correta de parcelas por meio da contagem dos elementos e contagem total dos elementos (*counting all*).

As principais estratégias empregadas pelo GE3 foram a composição correta das parcelas dos problemas, o que foi verificado em 19,5% das ocorrências, além da contagem total dos elementos (*counting all*), o que foi observado 15,5% dos casos, sendo que a contagem na seqüência (*counting on*) foi observada em apenas 4,6% dos ocorrências.

Outros tipos de estratégias também foram observadas, ainda que em percentuais baixos: subtração correta (6,7%); composição incorreta das parcelas do problema (2,4%); resposta aleatória (3,2%); contagem sem correspondência termo-a-termo (3,2%); composição de parcelas por correspondência termo-a-termo (1,6%); composição incorreta do montante do qual deveria ser subtraída uma parcela (1,6%); composição correta de apenas uma das parcelas do problema (0,8%); subtração no caso de uma adição (0,8%); soma no caso de uma subtração (0,8%).

Quanto às formas de notação empregadas pelo GE2 o registro numérico do valor final foi o predominante, seguido por outras formas de notação: pictórica (7%); produção de marcas gráficas (7%); uso da sentença matemática (7,7%) e registro numérico das parcelas do problema (4,6%).

Em suma, as estratégias predominantes do GE3 foram a composição correta de parcelas por meio da contagem dos elementos e contagem total dos elementos (*counting all*).

A partir da análise das estratégias utilizadas pelo GE2 e pelo GE3 nas soluções dos problemas de estrutura aditiva e dos percentuais de ocorrências observados em cada um dos grupos, parece ser possível afirmar que:

- No caso das estratégias de composição e resolução de problemas envolvendo a adição, os dois grupos são semelhantes, com predominância de composições corretas das parcelas dos problemas.
- Quanto aos problemas de subtração, apenas o GE3 trabalhou com essa modalidade, obtendo predominantemente respostas corretas.
- No que se refere às formas de contagem empregadas, na maioria das ocorrências observadas os dois grupos expressaram a contagem total dos elementos (*counting all*), tendo sido observada uma leve tendência do GE3 em também recorrer à contagem na seqüência (*counting on*).
- Em relação às formas de notação os dois grupos expressaram tipos semelhantes na mesma proporção (registro pictórico, marcas

gráficas e registro numérico do resultado final). Foi observada apenas diferença quanto ao uso da escrita alfabética, empregada no GE2 e o registro numérico das parcelas isoladas do problema no GE3.

Em suma, foram detectadas mais semelhanças do que diferenças nas estratégias ligadas às soluções dos problemas de estrutura aditiva utilizadas pelo GE2 e pelo GE3.

2.3 DAS TRANSFORMAÇÕES DAS ESTRATÉGIAS COGNITIVAS NOS GRUPOS NO DECORRER DAS SESSÕES DE TRABALHO

No programa de intervenção, que consistiu em três sessões individuais de trabalho para cada um dos sujeitos, foram observados alguns avanços no que se refere à qualidade das estratégias empregadas nos exercícios operatórios e nas soluções dos problemas de estrutura aditiva. Assim, em alguns casos, estratégias menos elaboradas foram substituídas por outras mais avançadas nas sessões finais.

Dessa forma, tendo sido apresentadas as tabelas concernentes aos percentuais de ocorrências observadas e a devida comparação entre os grupos, será apresentada a seguir a análise das alterações evolutivas detectadas nos grupos no decorrer das sessões de trabalho.

Para tanto, foram identificados padrões de alterações nas estratégias dos sujeitos, para que se possa comparar também os tipos de avanços em cada grupo.

Serão apresentados inicialmente os padrões encontrados para, na seqüência, serem expostos na tabela 18 os percentuais de presença dos padrões encontrados em cada grupo. Posteriormente será realizada, quando possível, a comparação entre os padrões presentes em cada grupo.

Padrões de alterações de estratégias nos exercícios operatórios e soluções de problemas de estrutura aditiva encontrados nos grupos:

Padrão 1: não avançou, empregando os mesmos tipos de estratégias desde a primeira até a terceira sessão, no que se refere à qualidade das respostas.

Padrão 2: avançou apenas nas estratégias ligadas à noção da quantificação da inclusão de classes (Q), mantendo os mesmos tipos de respostas quantos às demais noções.

Padrão 3: avançou apenas nas estratégias ligadas à noção da conservação de quantidades numéricas (N), mantendo os mesmos tipos de respostas quantos às demais noções.

Padrão 4: avançou apenas nas estratégias ligadas à noção da seriação (S), mantendo os mesmos tipos de respostas quantos às demais noções.

Padrão 5: avançou apenas nas estratégias ligadas às soluções dos problemas de estrutura aditiva (P).

Padrão 6: avançou na noção da quantificação da inclusão de classes (Q) e nas soluções dos problemas de estrutura aditiva (P).

Padrão 7: avançou na noção de seriação (S) e nas soluções dos problemas de estrutura aditiva (P).

Tabela 18: Percentuais dos padrões de alterações encontradas em cada grupo.

	GE1	GE2	GE3
Padrão 1	80%	20%	20%
Padrão 2	20%	0,0%	-----
Padrão 3	0,0%	0,0%	-----
Padrão 4	0,0%	0,0%	-----
Padrão 5	-----	20%	80%
Padrão 6	-----	40%	0,0%
Padrão 7	-----	20%	0,0%

No exame da tabela 18 cabe considerar que, em função dos tipos de tratamento diferentes aos quais cada grupo foi submetido, obviamente não foi possível encontrar determinados padrões nos seguintes grupos:

- No GE1 não surgiram os padrões 5, 6 e 7 (pois não foram aplicados problemas de estrutura aditiva a este grupo).
- No GE3 não existem os padrões 2, 3 e 4 (pois não foram submetidos aos exercícios operatórios).
- No GE2 havia a possibilidade de surgimento de qualquer um dos padrões, uma vez que foi o grupo submetido aos exercícios operatórios e aos problemas de estrutura aditiva.

Padrões do GE1:

Durante as sessões de trabalho, 20% dos sujeitos do GE1 progrediram em suas estratégias (padrão 2), especificamente naquelas ligadas à noção de quantificação da inclusão de classes. A qualidade do avanço refere-se à mudança de uma estratégia menos avançada (impossibilidade de composição de uma coleção com compensação de subclasses), para outra mais elaborada, caracterizada pela afirmação de que uma classe é maior que uma subclasse.

Já os 80% restantes usaram as mesmas estratégias nas três sessões (padrão 1), quer tenham sido mais elaboradas desde o início, quer não.

Padrões do GE2:

A maioria dos sujeitos do GE2 (80%) evoluíram em suas estratégias, sendo que apenas 20% não apresentaram nenhum tipo de progresso quanto à qualidade das estratégias (padrão 1).

Em 20% dos casos os sujeitos avançaram apenas nas soluções dos problemas de estrutura aditiva (padrão 5), uma vez que nas sessões iniciais eram empregadas estratégias de respostas aleatórias, além da contagem sem correspondência termo-a-termo e, ao final das sessões, tais estratégias foram substituídas pela composição correta de parcelas por meio da contagem, sempre com a correspondência termo-e-termo.

Para 20% dos sujeitos houve progresso nas soluções dos problemas e também nos exercícios de seriação (padrão 7). Se no início as composições de um arranjo eram feitas de maneira aleatória, ao final do programa de intervenção tal estratégia foi substituída pela preocupação em compor uma série correta, alinhando as bases. Já no que se refere às soluções dos problemas de estrutura aditiva, as estratégias iniciais de respostas aleatórias com o apoio dos "nós" da seqüência numérica e a composição incorreta de parcelas de um problema deram lugar às composições corretas de parcelas por meio da contagem.

Por fim, em 40% dos casos houve avanço nas soluções dos problemas de estrutura aditiva e nos exercícios de quantificação da inclusão de classes (padrão 6). O progresso consistiu na mudança de estratégias menos avançadas, tais como a oscilação na afirmação de que uma classe é maior que uma subclasse e na composição incorreta de um arranjo por compensação, para outras estratégias mais elaboradas, como a afirmação de que uma classe é maior que uma subclasse (com apoio na contagem dos elementos), e a composição correta de um arranjo por compensação.

Em síntese, no GE2 houve alterações expressivas em quantificação da inclusão de classes e nas soluções dos problemas de estrutura aditiva.

Padrões do GE3:

Em 20% dos casos não houve progressos nas soluções dos problemas de estrutura aditiva (padrão 1), de modo que os mesmos tipos de estratégias foram empregadas em todas as sessões.

No entanto, em 80% dos casos houve avanços nas soluções utilizadas (padrão 5). Os progressos consistiram nas mudanças de estratégias menos adiantadas, tais como respostas aleatórias, para aquelas mais elaboradas, como a composição correta de parcelas com contagem com correspondência termo-a-termo. Também foram observados progressos no caso dos problemas envolvendo subtração, quando nas sessões iniciais eram realizadas adições ao invés de subtrações e, na sessão final, eram capazes de retirar uma parcela do montante maior. Nas estratégias de contagem também foram observados avanços, uma vez que nas sessões iniciais surgia a contagem sem correspondência termo-a-termo, já no final a contagem com correspondência.

Em resumo, no GE3 foram observados progressos significativos nas estratégias de soluções de problemas.

2.4 DA RELAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS QUANTITATIVOS E OS QUALITATIVOS.

A seguir será apresentada a análise da relação entre os resultados quantitativos da avaliação e os qualitativos, esses últimos compostos pelas estratégias e identificação dos padrões de transformação dessas estratégias. Esta relação será buscada para cada grupo, como segue.

O GE1 avançou mais na noção da inversão adição/subtração (progresso obtido a curto prazo, que se manteve a longo prazo) e nos problemas de estrutura aditiva de transformação positiva sobre um estado inicial (com progressos tanto a curto, como a longo prazo).

Durante as sessões de trabalho, este grupo (submetido apenas a exercícios operatórios), apresentou, sobretudo, padrão 1 como traço típico (não avançou nas estratégias empregadas), com pequena presença de padrão 2 (avançou apenas nas estratégias de quantificação da inclusão de classes), sendo que as principais estratégias foram as seguintes :

- Na noção da quantificação da inclusão de classes predominaram as composições corretas de coleções por compensação, ao aumentarem ou diminuírem uma subclasse para compensar a outra; a contagem como forma de garantir a equivalência no caso das composições de coleções; as explicações corretas a cerca das relações entre classes e subclasses, ainda que tivessem ocorrido oscilações no domínio dessa noção.
- Na noção de conservação de quantidades numéricas houve predomínio das estratégias de composição correta de coleções, além

da correspondência termo-a-termo e de argumentos operatórios para explicar a invariância das quantidades.

- Na noção de seriação predominaram as estratégias de composição correta de séries, com alinhamento das bases, além dos argumentos lúdicos e a identificação correta de elementos entre duas séries paralelas no caso das explicações.

Os avanços mais expressivos obtidos pelo GE1 estão localizados na noção da inversão adição/subtração e nas soluções dos problemas de estrutura aditiva de transformação positiva sobre um estado inicial.

Nas sessões de trabalho com os exercícios operatórios foram detectados poucos avanços, o que caracteriza predominância de padrão 1, correspondendo à manutenção dos mesmos tipos de estratégias ao longo da sessões. Por outro lado, ainda que com baixo percentual, também surgiu o padrão 2, o que corresponde à evolução apenas na noção da quantificação da inclusão de classes.

Já o GE2 avançou mais nas soluções de problemas, tanto de composição de duas medidas como de transformação positiva sobre um estado inicial. A longo prazo, este grupo progrediu em todas as noções, assim como seguiu avançando nos problemas.

Durante o programa de intervenção, este grupo (submetido aos exercícios operatórios e aos problemas de estrutura aditiva), apresentou diversos padrões de avanço, sendo eles: 20% de padrão 1 (nenhum tipo de avanço nas estratégias empregadas), 20% de padrão 5 (avanços apenas nas soluções dos problemas de estrutura aditiva), 20% de padrão 7 (avanço nos exercícios de seriação e nos problemas) e 40% de padrão 6 (avanço nos exercícios de quantificação da inclusão de classes e nos problemas).

O GE2 expressou predominantemente as seguintes estratégias:

- Em relação à noção da quantificação da inclusão de classes, a estratégia mais utilizada foi a composição correta por compensação de subclasses para o caso das estratégias de execução. Já no que se refere às estratégias de explicação (para o caso das composições de coleções), a contagem foi a estratégia mais utilizada por esse grupo, assim como no caso das explicações obtidas a respeito das relações entre classes e subclasses.

- No que se refere à noção da conservação de quantidades numéricas, recorreu predominantemente às estratégias concernentes à composição correta de coleções. Quanto aos tipos de explicações, apelou principalmente à recomposição do arranjo tal como no início do exercício e à contagem.
- Quanto à noção de seriação, o grupo apresentou predominantemente composições corretas de arranjos curtos, apesar de não ter chegado a compor arranjos longos mediante o pedido de intercalar dois curtos.
- No caso dos problemas de estrutura aditiva a composição correta de parcelas por meio da contagem dos elementos e contagem total dos elementos (*counting all*) foram as estratégias mais utilizadas.

O GE2, por sua vez, obteve maiores avanços nos dois tipo de problemas e nas noções lógicas, sendo que o avanço nas noções ocorreu somente a longo prazo.

Nos exercícios operatórios e nos problemas de estrutura aditiva, os padrões de avanço foram de tipos diversos, com percentuais de alteração maiores nas soluções de problemas de estrutura aditiva e em quantificação da inclusão de classes, ainda que também tenham sido detectados avanços nas soluções de problemas nos demais padrões encontrados.

O GE3, por sua vez, avançou nos dois tipos de problemas e também na noção da inversão adição/subtração a curto prazo. A longo prazo, o avanço obtido na noção da inversão adição/subtração se manteve, mas o grupo seguiu progredindo nos problemas.

Durante as sessões de trabalho do programa de intervenção o GE3 trabalhou apenas com problemas de estrutura aditiva. Como mencionado anteriormente, o volume de problemas propostos foi maior do que o do GE2, uma vez que para este grupo não foram propostos exercícios operatórios. Quanto aos padrões de avanços verificados, 20% referem-se ao padrão 1 (nenhum tipo de avanço nas estratégias empregadas) e 80% ao padrão 5 (avanços apenas nas soluções dos problemas de estrutura aditiva).

Predominantemente surgiram as seguintes estratégias nas soluções dos problemas de estrutura aditiva realizadas pelo GE3:

- Composição correta de parcelas por meio da contagem dos elementos e contagem total dos elementos (*counting all*).

No caso do GE3, os maiores progressos referem-se às soluções dos dois tipos de problemas, ainda que também tenha ocorrido progresso em inversão adição/subtração a curto prazo que se manteve. Este grupo não avançou am composição aditiva de números.

Em suma, em relação à noção da composição aditiva de números, a curto prazo, foi o GC que mais avançou, em segundo lugar veio o GE2, que também progrediu, ainda que menos que o GC. Os demais grupos experimentais não avançaram, como é o caso do GE3 ou até retrocederam, no caso do GE1.

Já entre o pré-teste e o pós-teste 1 foi o GE2 que mais avançou nessa mesma noção, seguido do GE1. O GC e o GE3 permaneceram estáveis. Assim, entre o pós-teste 1 e o pós-teste 2 não foi o GC o grupo que mais avançou.

Dessa maneira, no conjunto de todas as alterações evolutivas desde o nível de partida até a avaliação final foi o GE2 o grupo que mais obteve progressos na composição aditiva de números, seguido pelo GC.

Quanto à noção da inversão adição/subtração foram o GC e o GE1 os grupos que obtiveram os avanços mais expressivos, ao menos a curto prazo, seguidos pelo GE3, tendo sido o GE2 o único grupo a não progredir.

Já entre o pós-teste 1 e o pós-teste 2, o GE1 e GE3 permaneceram estáveis e o GE2 avançou nessa mesma noção. Quanto ao GC, também permaneceu estável nessa noção, pois perdeu o que havia ganhado a curto prazo.

No conjunto de todas as alterações evolutivas, desde o nível de partida até a avaliação final, foi o GE1 que mais progrediu na noção da inversão adição/subtração, seguido pelos demais grupos experimentais.

No caso dos problemas, foram os grupos experimentais que mais avançaram, pois, a curto prazo, o GC não progrediu no primeiro tipo de problema (composição de duas medidas) e retrocedeu no segundo tipo (transformação positiva sobre um estado inicial). Dessa forma, esse grupo, que havia se beneficiado, pelo menos a curto prazo, do efeito da aplicação das provas (pois avançou entre o pré-teste e o pós-teste 1 nas noções de composição aditiva e de inversão adição/subtração), não obteve o mesmo tipo de benefício no caso dos problemas de estrutura aditiva.

Especificamente quanto ao primeiro tipo de problema (composição de duas medidas), o GE2 e o GE3 foram os grupos que mais avançaram a curto prazo, seguidos do GE1 e, por fim, do GC que não avançou.

Entre o pós-teste 1 e o pós-teste 2, o GE2 seguiu avançando nesse tipo de problema, assim como o GE3, ao passo que o GE1 estabilizou-se. O GC progrediu expressivamente apenas a longo prazo.

Quanto ao problema envolvendo uma transformação positiva sobre um estado inicial, foram os grupos experimentais os que mais progrediram a curto prazo, e o GC regrediu. Neste caso foram o GE1 e o GE2 os que obtiveram mais pontos, seguidos pelo GE3.

Entre o pós-teste 1 e o pós-teste 2, o GC avançou consideravelmente e os grupos experimentais continuaram a progredir, especialmente o GE1 e o GE3, ainda que o GE2 também tenha avançado. Este avanço tardio do GC talvez possa ser atribuído a fatores externos às provas aplicadas, tais como o trabalho realizado na escola, uma vez que a curto prazo não tirou proveito das provas e problemas do pré-teste.

Em síntese, no conjunto das avaliações evolutivas desde o nível de partida até o final, no primeiro tipo de problema foram o GE2, seguido pelo GE3 e pelo GC os que mais avançaram, sendo que o GE1 obteve um pequeno progresso. Já no caso do problema envolvendo uma transformação positiva sobre um estado inicial foi o GE1 que mais obteve pontos, seguido pelo GE3, GE2 e GC.

Em anexo constam tabelas auxiliares que sintetizam os resultados.

CAPÍTULO V

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Antes do início da discussão dos resultados propriamente dita, cumpre destacar alguns limites deste estudo: o tamanho da amostra e a perda amostral ocorrida no GE1 na última fase da avaliação, o que quer dizer que qualquer tipo de conclusão que se possa obter há que ser examinada com cautela, dados aqueles limites.

Para que se possa discutir os resultados apresentados, faz-se necessário retomar a hipótese inicial de que agregar exercícios operatórios ao trabalho de proposição de problemas de estrutura aditiva favoreceria a construção das noções aritméticas iniciais. Partimos do pressuposto de que tais exercícios permitem a construção de esquemas de ordem lógica que darão sustentação à construção das noções aritméticas iniciais. A lembrar a idéia de Vergnaud (1990; 1994) da existência de invariantes operatórios, organizadores lógicos por excelência, dentre eles as noções de parte/todo e de ordem, que sustentam os conteúdos matemáticos.

Por outro lado, resta verificar se há a real necessidade da proposição de atividades específicas para que isso ocorra, ou se apenas o desenvolvimento de atividades relacionadas ao conteúdo matemático por si só (neste caso os problemas de estrutura aditiva), já seriam suficientes para ativar os organizadores lógicos. Em outras palavras, seriam os exercícios operatórios condição necessária para a ativação dos organizadores lógicos implícitos nas noções aritméticas iniciais, ou uma intervenção adequada[7] nas próprias situações envolvendo o campo conceitual "estruturas aditivas" seria suficiente?

---

[7] O termo "intervenção adequada" refere-se a um modelo no qual o professor pauta-se por uma postura construtivista, buscando levar o aluno a construir novos conhecimentos, sem, no entanto, deixar de valorizar seus conhecimentos prévios, por meio da proposição de situações instigantes, nas quais o aprendiz possa confrontar seus pontos de vista com os conflitos cognitivos que a situação impõe.

No modelo de pesquisa experimental adotado, a intervenção do experimentador por meio dos exercícios operatórios e das proposições dos problemas de estrutura aditiva esteve pautada pelo objetivo de gerar conflitos cognitivos que levassem os sujeitos a construir novos esquemas.

Em face dos resultados obtidos, assim como dos pontos acima destacados, parecem ser fundamentais as seguintes questões:

1. Por que tanto o GC como os grupos experimentais tiveram avanços mais expressivos nos problemas do que nas noções lógicas avaliadas (com exceção do GE1 para o caso do problema envolvendo a composição de duas medidas)?
2. Por que o GC obteve avanço a curto prazo (que se estabilizou) em composição aditiva de números?
3. Dentre os grupos experimentais, por que apenas o GE2 avançou em composição aditiva de números?
4. Por que o GE1 foi o grupo que mais progrediu em inversão adição/subtração?
5. Por que GE1 e GE3 obtiveram avanço a curto prazo que se estabilizou em inversão adição/subtração e o GE2 apenas avanço tardio?
6. Por que o GE3 progrediu nos problemas e, no caso das noções, apenas em inversão adição/subtração?

Vimos antes que os resultados gerais não são uniformes quando olhadas as noções e os problemas, o que exige interpretação para cada aspecto e aponta que a hipótese levantada não é válida para qualquer caso.

Para responder a primeira pergunta, discutir os resultados do GC em relação aos demais grupos experimentais é, de início, fundamental para compreender o que ocorreu. Impõe-se a necessidade de verificar se as intervenções realizadas nos grupos experimentais engendraram algum tipo de modificação, em comparação ao tratamento recebido pelo GC (composto de tarefas placebo e pelas provas/problemas aplicados na avaliação).

Os progressos do GC e do GE2 foram muito próximos em composição aditiva de números, tendo o GE2 obtido pequena vantagem (0,5 ponto a mais) em relação ao GC. Quanto aos demais grupos experimentais, o GC avançou mais nessa noção, uma vez que tanto o GE1 como o GE3 não progrediram.

Não se pode deixar de considerar importante o avanço nessa noção obtido pelo GC ao final da avaliação, o que parece indicar que as provas aplicadas no pré-teste e no pós-teste não tiveram realmente efeito neutro, meramente diagnóstico dos níveis de partida e de chegada de cada grupo. Isto fica particularmente claro quanto é justamente o grupo controle aquele que mais avança entre o pré-teste e o pós-teste 1 (progresso que se estabilizou a longo prazo), mesmo sem ter recebido nenhum tipo de tratamento específico, tal como ocorreu nos grupos experimentais. Por outro lado, a notar que os grupos experimentais também sofreram os efeitos da prova.

Já em relação à noção da inversão adição/subtração o GC obteve progresso apenas a curto prazo, que não se estabilizou a longo prazo.

No que se refere aos problemas de estrutura aditiva, se a curto prazo o GC não avançou nada, ao final da avaliação, mesmo que não tenha obtido avanços equivalentes aos dos grupos experimentais, ainda assim obteve um progresso expressivo (com exceção do problema de composição de duas medidas, no qual o resultado final do GC foi mais adiantado que o do GE1).

Uma questão a ser considerada refere-se ao fato de que o avanço em problemas de estrutura aditiva relaciona-se à aprendizagem de um conteúdo específico e não de uma noção, como é a composição aditiva de números e a inversão adição/subtração, o que leva à necessidade de retomar a diferenciação entre o que é um conteúdo matemático específico daquilo que é um organizador lógico, esquema invariante que sustenta os conhecimentos matemáticos. Este esclarecimento é fundamental para que se possa analisar com cuidado os resultados obtidos, pois foram detectados avanços referentes a conteúdos específicos, quando os grupos aprenderam sobre problemas, como será apresentado adiante, mas houve também progressos nas noções que embasam a idéia de número, especificamente a composição aditiva de números e a inversão adição/subtração.

Em consonância com a suposição de que o trabalho relativo às noções aritméticas iniciais realizado na escola também possa ter influenciado os resultados obtidos, foram realizadas entrevistas informais com as professoras regentes das turmas em que sorteados os sujeitos, com o objetivo de levantar os principais conteúdos trabalhados durante o período da coleta de dados, assim como os procedimentos didáticos utilizados em sala-de-aula.

Vale considerar que a escola onde foi realizado o estudo não emprega materiais do tipo cartilhas, livros didáticos ou apostilas no Jardim III (último ano da educação infantil na ocasião da coleta de dados). Todas as atividades de matemática são propostas tendo em vista a importância da criação de um ambiente suficientemente desafiador e estimulante para que as crianças sintam-se seguras para expor suas hipóteses. Dessa forma, são oferecidos materiais concreto-manipuláveis, além da oportunidade de expressarem suas idéias livremente. Isto não quer dizer, por outro lado, que não sejam propostas situações de notações, sejam elas numéricas ou não.

No que diz respeito à área da quantificação e primeiras noções aritméticas, foi-nos relatado que as crianças foram submetidas a situações nas quais deveriam resolver situações do cotidiano como, por exemplo, distribuir materiais de modo que não sobrasse e não faltasse, tendo sido a contagem um procedimento amplamente explorado. Além disso, foram propostos vários tipos de jogos, os quais envolviam o domínio de noções aritméticas, além de diversas atividades ligadas à comparação de coleções, assim como situações-problema ligadas à composição e decomposição numérica.

Por todos esses aspectos relativos ao trabalho pedagógico, é possível que o ambiente escolar também possa ter desempenhado um papel importante na aprendizagem de noções aritméticas (aqui reveladas por meio das soluções dos problemas de estrutura aditiva), uma vez que no decorrer do período da coleta de dados os alunos seguiram trabalhando com os conteúdos e procedimentos didáticos acima descritos, sem deixar de levar em conta o questionamento feito anteriormente, de que uma intervenção adequada por parte do professor talvez pudesse ativar a construção de organizadores lógicos, independentemente da proposição de exercícios operatórios.

Logo, esses resultados do GC remetem à suposição de que, deve ser considerado não apenas o efeito da aplicação das provas e soluções dos problemas de estrutura aditiva nas avaliações, como também o efeito do trabalho paralelo realizado pela escola onde estudam os sujeitos, dado que este grupo não recebeu intervenção concernente à aplicação de problemas e aos exercícios operatórios.

Para responder as perguntas 2, 3 e 4, se forem comparados os resultados do GE1 e do GE2 (grupos que tiveram em comum a aplicação dos exercícios operatórios nas sessões de intervenção), verifica-se que apenas o segundo avançou em composição aditiva de números, ao passo que o GE1 progrediu em inversão adição/subtração de maneira expressiva frente aos progressos mais modestos obtidos pelo GE2 para esta noção.

No caso dos problemas de estrutura aditiva, os dois grupos avançaram consideravelmente no segundo tipo de problema (transformação positiva sobre um estado inicial), especialmente o GE1, sendo que no primeiro (composição de duas medidas) foi o GE2 que se destacou.

Vale considerar que o GE1 e o GE2 empregaram estratégias semelhantes nos exercícios de quantificação da inclusão de classes e nos de seriação durante as sessões do programa de intervenção, com uma leve tendência do GE1 em utilizar estratégias de explicação mais adiantadas que o GE2 em quantificação da inclusão de classes, ao dominarem as relações entre classes e subclasses.

Por outro lado, diferenças significativas surgiram nos exercícios de conservação de quantidades numéricas, pois o GE1 recorreu, sobretudo, à correspondência termo-a-termo e aos argumentos operatórios clássicos (seja para compor coleções equivalentes, seja para justificar a equivalência), ao passo que o GE2 apelou, sobretudo, à contagem e à recomposição dos arranjos para justificar a invariância das quantidades no caso das deformações feitas na coleção-modelo.

Dessa forma, além da conexão entre noções/problemas exercitados e noções/problemas avaliados, há que se considerar também as estratégias usadas primordialmente pelos grupos durante a intervenção, assim como os padrões de alteração verificados.

Tais padrões de avanços em relação às estratégias observadas no programa de intervenção foram diferentes nos dois grupos, pois no GE1 houve 80% de padrão 1 (nenhum avanço) contra 20% de padrão 2 (avanço apenas em quantificação da inclusão de classes), sendo este último padrão justamente relativo ao progresso observado quanto à relação entre classe e subclasse.

Já no caso do GE2, os padrões foram diversificados, tendo sido verificados apenas 20% de padrão 1 contra 20% de padrão 5 (avanço nas soluções dos problemas de estrutura aditiva), 40% de padrão 6 (avanço em quantificação da inclusão de classes e nas soluções dos problemas de estrutura aditiva) e 20% de padrão 7 (avanço em seriação e nas soluções dos problemas de estrutura aditiva).

Verifica-se assim, que no GE2 ocorreram mais avanços do que no GE1 quanto às estratégias observadas no decorrer das sessões (especialmente nas soluções dos problemas de estrutura aditiva), o que indica que nesse grupo parece ter havido um movimento mais intenso de reorganização de ações e conseqüente evolução de estratégias, ao passo que no GE1, apesar do padrão 1 ter predominado, tiveram lugar estratégias sofisticadas. Ao que tudo indica, as intervenções realizadas no GE2 foram proveitosas, resultando em efetivo avanço nas estratégias, guardadas as diferentes intervenções realizadas no GE1 e no GE2. Tendemos a afirmar que as sessões de trabalho com problemas de estrutura aditiva agregados aos exercícios operatórios no GE2 geraram interconexão de aproveitamento de uma sessão para outra, com consequente extensão de esquemas.

Nesse quadro, parece ser idéia explicativa importante a relação entre os esquemas típicos dos exercícios de inversão adição/subtração e dos problemas de transformação e as principais estratégias empregadas pelo GE1. Assim, qual seria a relação entre os esquemas de pôr e tirar, presentes nas provas de inversão adição/subtração (ao perceberem que acrescentar elementos a uma coleção faz com que fique maior e retirar faz com que diminua), a correspondência termo-a-termo e o uso de argumentos operatórios clássicos?

É plausível admitir que um argumento operatório do tipo: *tem o mesmo tanto, só que tá juntinho; tá igual porque você não pôs e nem tirou nada,* assim como a correspondência termo-a-termo, coloquem em jogo esquemas e relações de equivalência (ou não) na comparação entre coleções semelhantes aos da noção da inversão adição/subtração, os quais por sua vez, também se aplicam às soluções dos problemas de transformação positiva sobre um estado inicial.

Contar para garantir a equivalência entre coleções ou, mesmo, recompor um arranjo tal qual a disposição original são estratégias compostas por esquemas invariantes semelhantes aos embutidos na noção de composição aditiva e nas formas de solução dos problemas de composição de duas medidas. Ao recomporem as partes de uma coleção, a criança não estaria lidando com a idéia de que, independentemente da configuração, o todo permanece invariável? Ou ainda, ao solucionar um problema composto pela composição de duas parcelas já dadas, também não estaria a criança lidando com a idéia ali embutida de composição de duas parcelas que se mantêm a despeito das modificações no aspecto figurativo?

Ainda em relação aos grupos experimentais, mas agora respondendo as questões 5 e 6, se comparados o GE2 e o GE3, que tiveram como ponto em comum a proposição de problemas de estrutura aditiva, os resultados apontam que os dois grupos avançaram de maneira expressiva nas soluções dos problemas, especialmente nos de segundo tipo, ainda que no de primeiro tipo (composição de duas medidas) também tenham sido verificados progressos significativos.

O GE2 e o GE3, únicos grupos a serem submetidos à solução de problemas de estrutura aditiva no programa de intervenção, apresentaram estratégias semelhantes no decorrer das sessões: as composições corretas de parcelas no caso de problemas envolvendo a adição; a contagem total de elementos (counting all), além de formas de notação semelhantes, assim como obtiveram avanços equivalentes nos problemas e na noção da inversão adição/subtração. Por outro lado os resultados foram diferentes em composição aditiva de números, o que leva à suposição de que a intervenção realizada no GE2 composta por exercícios operatórios e pelos problemas possa explicar essa diferença entre os dois grupos.

Conforme mencionado anteriormente, Nunes (1997) aponta que as formas de contagem empregadas pelas crianças podem expressar níveis diferentes de compreensão numérica, o que quer dizer, em última instância, que um indivíduo que recorre à estratégia de contar todos os elementos de duas parcelas (*counting-all*), expressa um nível menos adiantado daquele que se utiliza do procedimento de contar a partir do cardinal de um conjunto e seguir contando até o final (*counting-on*).

Ainda em relação às estratégias observadas nos dois grupos durante as sessões do programa de intervenção, ambos obtiveram os mesmo tipos de progressos nas soluções dos problemas propostos, sem deixar de considerar que a carga de trabalho com problemas de estrutura aditiva para o GE3 foi mais intensa que a do GE2, o qual também foi submetido ao trabalho com exercícios operatórios. Apesar disso, mesmo tendo o GE3 trabalhado mais com problemas, isso não se refletiu nos resultados, os quais foram semelhantes entre os dois grupos.

O avanço do GE3 em problemas de composição de duas medidas não coincidente com o progresso em composição aditiva de números, pode ser explicado tanto pelas estratégias empregadas durante a intervenção, como pelos demais aspectos anteriormente destacados a respeito do trabalho da escola e da aplicação das provas de avaliação. É possível que as estratégias principais empregadas pelo GE3, tenham repercutido nos avanços nas soluções de problemas, pela conexidade entre esquemas, independentemente da composição aditiva. Por outro lado, a predominância da composição correta de parcelas e da contagem total de elementos (*counting all*) no GE3 pode ter repercutido na noção da inversão adição/subtração.

Os esquemas utilizados nas soluções dos problemas de estrutura aditiva correspondem aos envolvidos na noção da inversão adição/subtração. Assim, compor corretamente as parcelas de um problema por meio da contagem guarda alguma relação com os esquemas implícitos no jogo de adições e subtrações presentes na noção da inversão adição/subtração. Vale lembrar que este grupo foi o único a lidar com problemas de subtração durante o programa de intervenção, o que pode, ao menos em parte, explicar os progressos na inversão adição/subtração, quando alguns sujeitos, ao que parece, foram capazes de entender que para diminuir uma coleção sem acrescentar elementos bastava retirar um do outro conjunto.

Vale retomar o caso do GC, que recebeu apenas tarefas placebo: para ele não podem ser consideradas as estratégias como um dos elementos explicativos para seus avanços no problema de transformação, contra o fato de não ter progredido em inversão adição/subtração. Resta atribuir à escola ou ao efeito das provas de avaliação os progressos no segundo tipo de problema.

Em relação aos padrões encontrados no GE3, apenas 20% de padrão 1 foi verificado (nenhum avanço na qualidade das estratégias, assim como no GE2), contra 80% de padrão 5, que corresponde a avanços nas estratégias de resoluções de problemas. É curioso que tanto o GE2 como o GE3 expressaram, na maioria dos casos, avanços nas estratégias ligadas à resolução de problemas, mesmo se for considerado que no GE2 também foram detectados avanços nas demais estratégias.

Tomando os resultados obtidos pelo GE3, parece plausível afirmar que os avanços obtidos nas soluções dos problemas de estrutura aditiva (especialmente naqueles envolvendo uma transformação positiva sobre um estado inicial) estenderam-se à noção da inversão adição/subtração, mesmo não tendo sido este grupo submetido aos exercícios operatórios. Em outras palavras, a intervenção realizada no GE3, que se limitou à prática de problemas de estrutura aditiva, parece ter repercutido também na noção da inversão adição/subtração e não somente nas soluções dos problemas, de modo a ter havido ativação de organizadores lógicos que permitiram a extensão de efeitos para a noção citada. Por outro lado, o mesmo não ocorreu no caso da noção de composição aditiva de números, o que pode indicar alguma relação entre os esquemas utilizados nas soluções dos problemas de estrutura aditiva (com ênfase no segundo tipo) e a noção da inversão adição/subtração, o que será examinado adiante.

No caso do GE2, que também obteve progressos expressivos nas soluções dos problemas de estrutura aditiva (equivalentes para os dois tipos de problemas), houve avanços tanto na inversão adição/subtração como na composição aditiva de números (tendo sido o progresso em inversão adição/subtração equivalente ao do GE3), o que também parece sugerir alguma conexão entre soluções de problemas e as noções lógicas avaliadas.

Se parece ter havido conexão entre soluções de problemas (com ênfase no segundo tipo) e inversão adição/subtração no GE3; e no caso do GE2 entre as mesmas soluções e as duas noções lógicas avaliadas (e não somente a inversão adição/subtração), por que o GE3 avançou apenas em inversão adição/subtração e o GE2 progrediu, além desta noção, também em composição aditiva de números?

Deve ser levado em conta o ponto em comum entre os resultados do GE1 e do GE3, que consiste justamente em progressos em inversão adição/subtração e nos problemas de transformação positiva sobre um estado inicial, além do fato de os dois grupos não terem progredido em composição aditiva de números ao final da avaliação.

Para explicar esta questão, os resultados do GE1, que não avançou em composição aditiva de números, mas progrediu consideravelmente em inversão adição/subtração e nas soluções dos problemas de estrutura aditiva de transformação positiva sobre um estado inicial, podem ser úteis. O ponto principal parece residir na diferença entre os progressos para cada tipo de problema: é assim que para o primeiro tipo deles (composição de duas medidas), o GE1 avançou pouco, enquanto que no segundo (transformação positiva sobre um estado inicial), o grupo avançou de maneira expressiva.

Estes resultados sugerem a possibilidade de uma relação de conexidade, ao menos sob certas condições, entre, de um lado, a noção de composição aditiva de números e o tipo de problema envolvendo a composição de duas medidas; de outro, entre a noção da inversão adição/subtração e os problemas tratando da transformação positiva sobre um estado inicial. Uma possível razão para esta relação deve ser buscada nos invariantes lógicos ativados nas provas e nos problemas. A relação entre os esquemas empregados nas provas de inversão adição/subtração e aqueles utilizados nas soluções dos problemas de transformação positiva sobre um estado inicial deve ser levada em conta. Os esquemas concernentes a pôr e tirar, no jogo de adições e subtrações implícito na noção de inversão adição/subtração guardam, ao que tudo indica, relação com o esquema de introduzir um elemento transformador a um estado inicial para a obtenção de um estado final.

Devido à ativação do sistema cognitivo em certas noções que geram repercussões em noções conexas, cumpre verificar quais seriam as conexões conceituais de esquemas pertinentes às noções avaliadas e às treinadas. Em outras palavras, faz-se necessário verificar os efeitos de amplificação cognitiva causada por esquemas que são ativados (por serem os organizadores lógicos por excelência que dão suporte à construção de novos conceitos) e repercutem em noções conexas.

Parece plausível admitir que os problemas de composição de duas medidas, ao contrário do que possam parecer, são mais complexos para as crianças do que os de transformação, por envolverem a idéia de parte/todo. Também, contêm as parcelas a serem somadas, subtraindo da criança a oportunidade de agirem, no sentido de comporem parcelas, introduzindo ali um elemento transformador. É assim que, por exemplo, no caso de um problema cujo enunciado seja: *em uma sala de aula há 10 meninos e 13 meninas, quantas criança há ao todo?* a criança deverá somar duas parcelas já dadas, considerando que tais parcelas compõem duas partes de um todo. Neste exemplo ainda deve ser levado em conta o fato de serem duas subclasses (meninos e meninas) que compõem uma classe maior (crianças), o que pode trazer um grau de dificuldade maior ao enunciado.

Já no caso de um problema que traga a seguinte consigna: *um menino tinha 3 bolinhas, ganhou mais duas, com quantas ficou?* a criança é que deverá introduzir o elemento transformador, em uma ação afirmativa de composição de parcelas para realizar a soma. Cumpre ressaltar, dessa maneira, o forte papel ocupado pela ação da criança ao compor relações entre o estado inicial, o tipo de transformação feita e o estado final.

Se assumida a relação entre esquemas utilizados nas soluções dos dois tipos de problemas e as noções lógicas, é possível admitir que a noção da inversão adição/subtração pode conter os mesmo tipos de invariantes presentes nas soluções dos problemas envolvendo a transformação positiva sobre um estado inicial. Os esquemas relativos a por e tirar, identificados nas provas de inversão adição/subtração, também estão presentes, vimos, nos problemas de transformação, quando a criança, por uma ação afirmativa, complementa uma parcela para compor um novo estado final.

Já no caso da composição aditiva de números, a concepção de que um todo permanece invariável independentemente de sua configuração exige da criança a idéia de parte/todo, também presente no tipo de problema de composição de duas medidas, ao que tudo indica de maneira mais evidente do que no problema envolvendo uma transformação.

Porém, há que se fazer uma ressalva a essa explicação: apesar de o GE3 ter progredido mais no segundo tipo de problema, também avançou no tipo de problema envolvendo a composição de duas medidas (ainda que menos que o GE2), apesar de não ter avançado em composição aditiva de números. Já o GC progrediu tanto em composição aditiva de números como nos dois tipos de problemas (também menos que o GE2), mas não apresentou nenhum progresso em inversão adição/subtração.

Nestes dois casos, as suposições a respeito das conexões entre esquemas em jogo na noção da inversão adição/subtração e os envolvidos nas soluções dos problemas de transformação e entre esquemas próprios à composição aditiva de números e aos problemas de composição de duas medidas teriam que ser admitidas com cautela, por não ter sido verificada essa estreita relação nos dois grupos. Por outro lado, no GE1 e no GE2 esta relação parece mais sustentável, tendo sido os avanços do GE2 iguais ou mais expressivos que os do GC e que os do GE3 (sendo que apenas no segundo tipo de problema o GE2 não se destacou).

Também o GE1 obteve progressos mais expressivos que o GC e o GE3, exceto para o caso do problema de composição de duas medidas, no qual GE3 e GC se destacaram.

Dessa forma, a conexão entre esquemas de composição aditiva de números e os dos problemas de composição de duas medidas não foi verificada no GE3; enquanto que a relação entre esquemas de inversão adição/subtração e de problemas de transformação não se estabeleceu no GC. A lembrar que esses dois grupos foram os únicos a não serem submetidos aos exercícios operatórios.

No tocante às formas de notação empregadas pelos sujeitos, seja na avaliação, seja nas intervenções feitas, não foi observada nenhuma relação direta entre os tipos de estratégias utilizadas nas soluções dos problemas e as formas de registro, ou seja, entre estratégias mais elaboradas e notações mais sofisticadas. Um exemplo disso pode ser buscado nas realizações de um dos sujeitos do GE3, o qual foi capaz de compor corretamente as parcelas dos problemas e realizar as devidas operações, mas apelou para formas de notação pictográficas. Além disso, a notação não parece ter servido, ao menos para a grande maioria dos sujeitos, como ferramenta para ativar esquemas outros.

É curioso o papel desempenhado pelos exercícios de seriação ao longo do estudo, uma vez que não foram observados avanços significativos, tampouco qualquer tipo de filiação entre estratégias de seriação e as noções e problemas avaliados. Os esquemas pertinentes a esta noção, especificamente a idéia de “maior que” e “menor que” não parecem ter repercutido em nenhuma das noções avaliadas, tampouco nas soluções dos problemas de estrutura aditiva. Assim, ao contrário do que aponta a literatura especializada a respeito dessa noção (Moro, 1987), no presente estudo os sujeitos expressaram os mesmo tipos de estratégias durante a aplicação dos exercícios operatórios em todas as sessões, com pouca ou quase nenhuma variação. Resta verificar se isto se deve a pouca familiaridade dos sujeitos com atividades desse tipo ou se as consignas e os próprios materiais apresentados não foram adequados.

Uma outra possibilidade pode ser devida às atividades habituais propostas na escola onde estudam os sujeitos. Segundo o relato das professoras, as crianças dispõem de uma vasta gama de materiais concreto-manipuláveis para o desenvolvimento das aulas, o que pode ter levado a um certo desinteresse pelos materiais apresentados nas tarefas de seriação. Essa hipótese ganha força se forem considerados os resultados de estudo-piloto anteriormente realizado, quando, ao invés da faixas de papelão apresentadas, foram trazidos dois materiais diferentes: bonecas russas (*matriochkas)* e potes plásticos coloridos, sendo que, assim como no caso da bonecas, um se encaixava dentro do outro. Dessa forma, o material pode ter influenciado os resultados.

Logo, os resultados apontam restrições à hipótese inicial, a qual pode ser admitida como verdadeira apenas em alguns casos, sob certas condições.

Em relação à noção da inversão adição/subtração, impõe-se a conclusão de que a intervenção composta pela prática dos problemas de estrutura aditiva (seja no caso do GE3, seja no GE2) não foi imprescindível para a aprendizagem desta noção. Isto porque o exercitamento operatório das noções lógicas (sobretudo quantificação da inclusão de classes e conservação de quantidades numéricas) parece ter engendrado avanços mais expressivos no GE1, grupo que não trabalhou com os problemas (ainda que o GE2 também tenha progredido de maneira equivalente ao GE3). Dessa forma, ainda que tenha sido suposta a conexão entre a noção da inversão adição/subtração e os problemas de segundo tipo, não foi possível detectar uma relação de interdependência entre essa noção e a intervenção pautada pela proposição dos problemas de estrutura aditiva.

Para o caso da noção da composição aditiva de números, o trabalho exclusivo com problemas de estrutura aditiva também não parece ter desencadeado nenhum avanço na noção estudada, lembrando que o grupo que mais avançou (GE2), foi submetido ao tratamento de problemas de estrutura aditiva e exercícios operatórios, e o GE3, que trabalhou exclusivamente com problemas, não progrediu em qualquer dos intervalos estudados na composição aditiva.

Por outro lado, o fato do GE1 não ter progredido na noção de composição aditiva de números pode levar à conclusão de que, da mesma forma que o trabalho exclusivo com problemas de estrutura aditiva não gerou avanço em composição aditiva de números, o trabalho exclusivo com exercícios operatórios também não engendrou nenhum avanço nessa noção. Resta considerar o caso do GC, que mesmo não tendo sido submetido ao tratamento de exercícios operatórios e problemas de estrutura aditiva avançou em composição aditiva de números (ainda que um pouco menos que o GE2). Este resultado do GC vem a enfraquecer a hipótese, pois seu avanço foi bastante próximo ao do GE2.

Quanto aos problemas de estrutura aditiva, todos os grupos experimentais, assim como o GC, progrediram, o que indica que não foram somente as sessões de intervenção, seja de exercitamento operatório, seja de soluções de problemas, que engendraram tais avanços. Estes progressos de todos os grupos, ainda que guardadas as devidas diferenças entre eles, podem ser interpretados segundo os seguintes fatos, cujos efeitos podem ter se entrelaçado: o trabalho realizado pela escola durante o período de coleta de dados; os efeitos da aplicação das provas e problemas nas fases de avaliação; a extensão de efeitos do exercitamento de noções conexas.

Argumentamos que o caráter de conexidade entre certos esquemas em jogo na elaboração de noções lógicas e/ou problemas de estrutura aditiva pode explicar muitos dos resultados obtidos (também em termos de extensão de efeitos de intervenção). Porém, tais relações de conexidade não podem ser vistas como se fossem lineares que se generalizam fácil e automaticamente para todos os casos, tampouco são fechadas, pois requerem sempre acomodação do sujeito a objetos de conhecimento a serem assimilados em situações diversas.

Parece plausível admitir que a aplicação de exercícios operatórios, ainda que não seja condição suficiente para a aprendizagem das primeiras noções aritméticas, é relevante, especialmente se for considerada a extensão de efeitos a noções conexas.

Em síntese, para que a hipótese inicial, qual seja, a de que agregar exercícios operatórios ao trabalho de proposição de problemas de estrutura aditiva poderia favorecer a construção de noções aritméticas iniciais pudesse ser plenamente válida, o GE2 deveria ter sido o grupo que mais avanços tivesse obtido nas soluções dos problemas e nas noções avaliadas. Porém, isso não ocorreu em todos os casos, exceto para a composição aditiva de números e para os problemas envolvendo a composição de duas medidas. Não se pode deixar de levar em conta que o trabalho exclusivo com os exercícios operatórios (descolado das soluções de problemas) também pode engendrar avanços na aprendizagem da noção da inversão adição/subtração e nos problemas de transformação positiva sobre um estado inicial.

Por tudo isso, a hipótese deve ser admitida com restrições: os exercícios operatórios agregados à prática de soluções de problemas de estrutura aditiva podem ser responsáveis por avanços em certas noções lógicas e na solução de problemas aritméticos, desde que levadas em conta as conexões entre esquemas e as extensões dos efeitos das intervenções, conforme as peculiaridades de cada noção ou conceito em construção como objeto de conhecimento a ser assimilado por um sujeito específico cujas experiências escolares não devem ser desprezadas.

CAPÍTULO VI

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora algumas das questões formuladas neste estudo permaneçam sem respostas conclusivas, abrem a possibilidade de investigações futuras. Uma vez formulada uma pergunta ou levantado um tema de pesquisa, é natural que, ao final do processo, várias outras surjam, em um movimento de abertura para novos possíveis, tal como já formulado por Piaget. Segundo o autor genebrino, há um movimento constante de abertura para novos possíveis, pois, à medida que um acontecimento produz uma abertura sobre um possível, este se torna um novo possível, consistente em uma atualização que, por sua vez, dará lugar a aberturas para outras possibilidades de outros possíveis, e assim sucessivamente (Piaget, 1976).

Os resultados obtidos favorecem a revisão de alguns aspectos a respeito do ensino de matemática na educação infantil. Cabe ao educador ter em mente que, em seu sentido amplo, a aprendizagem assume o caráter de construção de estruturas, rumo a graus maiores e melhores de equilíbrio, tendo como centro um sujeito cognoscente, que constrói esquemas cada vez mais elaborados, os quais serão aplicados sobre a realidade, devendo ser continuamente reformulados. Dessa maneira, o professor deve recorrer a várias estratégias para criar um ambiente suficientemente estimulante e enriquecedor, o qual permita ao aluno expor suas hipóteses e, mediante os conflitos cognitivos gerados frente aos dados impostos pela realidade, reformulá-las.

É fato sabido que a criança aprende estabelecendo relações entre aquilo que já sabe e novos objetos de conhecimento, os quais impõem contradições ao sistema cognitivo, gerando desequilíbrio, que deverá ser superado em um jogo de assimilações e acomodações rumo a graus maiores e melhores de equilíbrio.

Se o professor tiver em mente a idéia de invariante operatório como organizador lógico que dará sustentação à construção de novos conhecimentos, poderá dispor, em seu repertório de estratégias didáticas, de recursos variados para a exploração dos conteúdos matemáticos na educação infantil.

Em sala-de-aula o professor dispõe de um grupo de crianças que aprendem em um âmbito coletivo, porém, cada processo de aprendizagem é único e particular. A variedade de estratégias, materiais e situações é imprescindível para que o educador consiga alcançar as necessidades de todos os aprendizes. Isso se aplica a todas as áreas do conhecimento e não somente à matemática. Por exemplo, no caso da alfabetização, alguns alunos são mais sensíveis às pistas visuais do sistema alfabético, outros às auditivas, o que gera a necessidade de um ambiente alfabetizador rico em ambos os tipos de pistas. Com a matemática não é diferente, devendo haver em sala-de-aula uma gama extensa de materiais e situações-problema com estruturas diferentes.

Assim, não parece satisfatório abandonar as práticas pedagógicas compostas por exercícios operatórios como se não tivessem valor. Ao contrário, agregar essa modalidade de atividade às demais estratégias de trabalho com a matemática pode ampliar o repertório de esquemas das crianças, no sentido de propiciarem a ativação de invariantes lógicos que permitirão a construção de novos conceitos.

Nesta pesquisa revelou-se fundamental o tipo de escola onde foram coletados os dados. Ao que tudo indica, os sujeitos aprenderam não somente devido às intervenções realizadas, mas também pelo trabalho realizado em sala-de-aula. Por outro lado, tais intervenções não foram inócuas, o que remete à suposição de que em uma escola onde as crianças não tenham oportunidades adequadas para seu pleno desenvolvimento cognitivo, são justificáveis vários tipos de intervenções que visem somar elementos ao repertório dos alunos, tais como agregar exercícios operatórios aos conteúdos de aritmética inicial.

Uma das funções da educação infantil é favorecer a construção do conhecimento pela criança, por meio de situações para ela ricas e significativas. Para que haja efetiva construção de novos conhecimentos em uma atividade, deve haver uma busca de alternativas para a solução de um problema por parte da criança, orientada por atuações adequadas do professor.

Na educação infantil, a sala de aula deve ser um lugar de exploração dos elementos da realidade que cerca os alunos, devendo o educador estar constantemente ocupado em desenvolver nos alunos a curiosidade e o interesse pela descoberta de soluções para os problemas impostos. Para que isso ocorra, eles devem ter a oportunidade de agir sobre sua realidade, para, somente então, poder transformar seus quadros anteriores de conhecimento. Não é porque a criança age que se desenvolve, mas sim porque reflete sobre sua ação, sendo graças às questões, aos desafios e às trocas verbais que suas reflexões se alimentam e se enriquecem.

Os resultados deste estudo apontam para uma certa conexão entre composição aditiva e problemas de composição de duas medidas e entre inversão adição/subtração e problemas de transformação positiva sobre um estado inicial. Dessa forma, mostra-se oportuna a proposição de atividades de tipo exercícios operatórios agregadas às demais atividades em sala-de-aula como recurso adicional importante para a construção da aritmética inicial. Em outras palavras, mesmo que não se possa estabelecer relação direta e linear entre exercitamento operatório e noções inicias de aritmética, ainda assim são válidas as propostas de atividades compostas por esquemas de seriação, classificação e daquelas ligados à noção de conservação de quantidade numérica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASHURST, F. *Fundadores de las matemáticas modernas*. Madri: Alianza Editorial, 1985.

BIDEAUD, J.; MELJAC, C.; FISCHER, J. P. (Éds). *Les chemins du nombre*. Lille: Presses Universitaires de Lille, 1991.

BOULE, F. *La construction des nombres.* Paris: Armand Colin, 1989.

BOULE, F. *Manipuler, organiser, représenter*. Prélude aux mathématiques. Paris: Armand Colin, 1985.

BRISSIAUD, R. *Comment les enfants apprennent à calculer*. Le rôle du langage, des représentations figurées et du calcul dans la conceptualisation des nombres. Paris: Éditions Retz, 2003.

BROUSSEAU, G. *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions, 1998.

DIENES, Z. P. *A matemática moderna no ensino primário*. Trad. A. Simões Neto. Rio de Janeiro: Ed. Fundo de Cultura,1967.

DIENES, Z. P. & GOLDING, E. W. *Conjuntos, números e potências***.** Trad. E. J. Dotto. São Paulo: EPU, 1977.

DIENES, Z. P. & GOLDING, E. W. *Lógica e jogos lógicos.* Trad. E. J. Dotto. São Paulo: EPU, 1974.

FERREIRO E. & TEBEROSKY, A. P*sicogênese da língua escrita*. Trad. D. M. Lichtenstein. Porto Alegre: Artes Médicas, 1985.

FREUDENTHAL, H. Matemática nova ou educação nova? Em*: Perspectivas*, revista de educação da UNESCO, vol. 9, nº 3, pp. 317-328, 1979.

GRÉCO, P.; GRIZE, J.-B.; PAPERT, S. & PIAGET, J. Problèmes de la construction du nombre. *Études d´Epistémologie Génétique*, vol. XI, Paris: PUF, 1960.

GRÉCO, P.; INHELDER, B.; MATALON, B. & PIAGET, J. La formation des raisonnements récurrentiels. *Études d´Epistémologie Génétique*, vol. XVII, Paris: PUF, 1963.

GRÉCO, P. & MORF, A. Les structures numériques elémentaires. *Études d´Epistémologie Génétique*, vol. XIII, Paris: PUF, 1962.

HUTIN, R. & le groupe mathématique. *Deux et deux font quatre.* SERVICE DE LA RECHERCHE PÉDAGOGIQUE. Département de l´instruction publique- Genève. nº 48 ,1994.

INHELDER, B.; BOVET, M. & SINCLAR, H. *Aprendizagem e estruturas do conhecimento.* Trad. M. A. R. Cintra e M. Y. R. Cintra. São Paulo: Saraiva, 1977.

INHELDER, B. & CELLÉRIER, G. *O desenrolar das descobertas da criança:* um estudo sobre as microgêneses cognitivas. Trad. E. Gruman. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE PÉDAGOGIQUE (INRP). *À descoberta dos números***:** contar, cantar, calcular. Trad. M. Pinto. Porto: Edições ASA, 1995.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE PÉDAGOGIQUE (INRP). *Un, deux...beaucoup, passionnément!* Les enfants et les nombres. Paris: INRP, 1988.

JAULIN-MANNONI, F. *Pedagogia das estruturas lógicas elementares.* Trad. José Morgado e outros. Lisboa: Editorial Semente, 1978.

KAUFMAN, A. M. *Letras y numeros:* alternativas didacticas para jardin de infantes y primer ciclo de la EGB. Buenos Aires: Santillana, 2000.

LERNER, D. & SADOVSKY, P. O sistema de numeração: um problema didático. Em: C. PARRA. *Didática da matemática*: reflexões psicopedagógicas. Trad. J. A. Llorens. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M.; NUNES, T.; GATIRANA, V*. Repensando adição e subtração*: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM, 2001.

MARANHÃO, M. C. S. A.; SENTELHAS, M. S. B.; MESQUITA, M. M. Atividades essenciais para o conceito de número na educação infantil. Em: R. M. PAVANELLO (Org.) *Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: a pesquisa e a sala de aula*. Coleção SBEM, vol. 2, pp. 49-68. São Paulo: SBEM, 2004.

MORO, M. L. F.; SOARES, M. T. C. A aprendizagem de estruturas aditivas elementares: alunos, professores e pesquisadores como parceiros de uma construção conceitual. Em: BRITO, M. R. F. (Org.). *Solução de problemas e a matemática escolar*. Campinas: Alínia Editora, 2006.

MORO, M. L. F. Adição/subtração: os caminhos de sua psicogênese em situações de aprendizagem. *Psicologia da Educação*, São Paulo, 12, pp. 89-119, 1º semestre de 2001.

MORO, M. L. F. *Aprendizagem construtivista da adição/subtração e interações sociais:* o percurso de três parceiros. Tese para o Concurso de Professor Titular de Psicologia da Educação, Departamento de Teoria e Fundamentos da Educação, Setor de Educação, Curitiba: UFPR, 1998.

MORO, M. L. F. *Aprendizagem operatória.* A interação social da criança. São Paulo: Cortez; Curitiba: Scientia et Labor, 1987.

MORO, M. L. F. Contar, emparelhar coleções. Colocar e retirar elementos das coleções... o longo e rico caminho das crianças para compreender os números. Em: *Pedagogia Cidadã.* Cadernos de Formação. Educação Matemática. São Paulo: Unesp, 2004.

MORO, M. L. F. Des structures additives aux multiplicatives dans l' initiation mathématique. Le partage d'une collection ou l'addition de collections equivalents*? Actes du colloque. Constructivismes: usages et perspectives en education. Sevice de la recherche em éducation*. Genève: 2000.

MORO, M. L. F. Notações da matemática infantil: igualar e repartir grandezas na origem das estruturas multiplicativas. *Psicologia: Reflexão e Crítica*, 17(2), pp. 251-266, 2004.

MORO, M. L. F. & M. T. C. Soares (org.). *Desenhos, palavras e números*: as marcas da matemática na escola. Curitiba: UFPR, 2005.

NOGUEIRA, C. M. I. *O desenvolvimento das noções matemáticas na criança e seu uso no contexto escolar*: o caso particular do número. Tese de doutorado. Marília: Unesp, 2002.

NUNES, T. Children´s reasoning and mathematical achievement. Department of Educational Studies. www.ox.ac.uk/edstud/research/childlearning, 2006 (mimeo).

NUNES, T. & BRYANT, P. *Crianças fazendo matemática*. Trad. Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PANNUTI, M. P. *Conhecimento físico e lógico-matemático em atividades de manipulação de materiais*. Dissertação de mestrado. Curitiba: UFPR, 1998.

PIAGET, J. *Abstração reflexionante.* Trad. F. Becker e P. B. Gonçalves da Silva. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PIAGET, J. *A equilibração das estruturas cognitivas*. Trad. M. M. S. Penna. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1976.

PIAGET, J. & SZEMINSKA, A. *A gênese do número na criança*. Trad. C. M. Oiticica. Rio de Janeiro: Zahar, 1971.

PIAGET, J. *A psicologia da criança*. Trad. O. M. Cajado. São Paulo: DIFEL, 1982.

PIAGET, Jean. Development and learning. *Journal of Research on Teaching*, XI, 3, pp. 176-86, 1964.

PIAGET, J. *O Estruturalismo*. Trad. M. R. de Amorim. São Paulo: Difusão Européia do Livro, 1970.

PIAGET, J. *Epistemologia genética*. Trad. A. Cabral. São Paulo: Martins Fontes, 1990.

PIAGET, J. *Sobre a pedagogia.* Trad. C. Berliner. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1998.

PIAGET, J. & BETH, E. W. *Epistemología matemática y psicología.* Trad. para espanhol de V. S. Zavala. Barcelona: Ed. Crítica, 1980.

PIAGET, J.; MAYS, W.; BETH, W. E. *Psicología, lógica y comunicación: epistemologia genética y investigación psicológica.* Trad. N. Bastard. Buenos Aires: Nueva Visión, 1959.

PREFEITURA DO MUNICIPIO DE SÃO PAULO- SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO- DEPARTAMENTO DE PLANEJAMENTO E ORIENTAÇÃO- DIVISÃO DE ORIENTAÇÃO TÉCNICA DE EDUCAÇÃO INFANTIL. Raciocínio lógico-matemático. São Paulo: PMSP, 1985 (mimeo).

RANGEL, A. C. S. *Educação Matemática e a construção do número pela criança*: uma experiência em diferentes contextos sócio-econômicos. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992.

SANCHEZ L. B. & LIBERMAN, M. *Grupo de Ensino de Matemática Atualizada*. Curso moderno de matemática atualizada. São Paulo: Ed. Nacional, 1977.

VERGNAUD, G. *Apprentissages et didactiques, où en est-on?* Paris: Hachette Éducation, 1994.

VERGNAUD, G. Au fond de l´action, la conceptualisation. Em: J. M. BARBIER (Dir). *Savoirs théoriques et savoir d´action*. pp. 275-292. Paris: PUF, 1996.

VERGNAUD, G.; RÉCOPÉ, M. De Revault d´Allones à une théorie du schème aujourd´hui. *Psychologie Française*, nº 45-1, pp. 35-50, 2000.

VERGNAUD, G. *El niño, las matemáticas y la realidad*: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. México: Trillas, 1991.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, nº 23, pp. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathétmatiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* vol. 2, nº 2, pp. 215-232, 1981.

VYGOTSKY, L. S. *Pensamento e linguagem.* Trad. J. L. Camargo. São Paulo: Martins Fontes, 1987.

ZUNINO, D. L. *A matemática na escola*: aqui e agora. Trad. J. A. Llorens. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

ANEXO: tabelas auxiliares que sintetizam os resultados obtidos pelos grupos.

Tabela 19: Síntese dos resultados do GE1.

	Composição aditiva de números	Inversão adição/subtração	Problema de composição de duas medidas	Problema de transformação positiva sobre um estado inicial
Entre pré-teste e pós-teste 1	-0,5	3,0	0,5	2,0
Entre pós-teste 1 e pós-teste 2	0,5	0,0	0,0	2,0
Total	0,0	3,0	0,5	4,0

Tabela 20: Síntese dos resultados do GE2.

	Composição aditiva de números	Inversão adição/subtração	Problema de composição de duas medidas	Problema de transformação positiva sobre um estado inicial
Entre pré-teste e pós-teste 1	0,5	0,0	1,5	2,0
Entre pós-teste 1 e pós-teste 2	1,0	1,5	1,5	1,0
Total	1,5	1,5	3,0	3,0

Tabela 21: Síntese dos resultados do GE3.

	Composição aditiva de números	Inversão adição/subtração	Problema de composição de duas medidas	Problema de transformação positiva sobre um estado inicial
Entre pré-teste e pós-teste 1	0,0	1,5	1,5	1,5
Entre pós-teste 1 e pós-teste 2	0,0	0,0	1,0	2,0
Total	0,0	1,5	2,5	3,5

Tabela 22: Síntese dos resultados do GC.

	Composição aditiva de números	Inversão adição/subtração	Problema de composição de duas medidas	Problema de transformação positiva sobre um estado inicial
Entre pré-teste e pós-teste 1	1,0	3,0	0,0	-0,5
Entre pós-teste 1 e pós-teste 2	0,0	-3,0	2,0	3,5
Total	1,0	0,0	2,0	3,0