TÂNIA STELLA BASSOI

UMA PROFESSORA, SEUS ALUNOS E AS REPRESENTAÇÕES DO OBJETO MATEMÁTICO FUNÇÕES EM AULAS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Tese apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor em Educação, Programa de Pós- Graduação, Linha de Pesquisa: Educação Matemática, Setor de Educação da Universidade Federal do Paraná.

Orientadora:
Profª. Drª. Maria Tereza Carneiro Soares

Curitiba
2006

À minha amiga Sílvia Gomes Vieira Fabro de quem sinto muita falta, seja no plano pessoal ou profissional.
À Juraci Morete Bueno que nunca me deixou só, mesmo nos piores momentos.
Aos meus filhos Adrianus e Manuela de quem tenho muito orgulho.
À minha irmã Vânia de quem tive suporte material e emocional.

AGRADECIMENTOS

À Profª Drª Maria Tereza Carneiro Soares, pela amizade, compromisso e zelo durante todo o processo.

Aos professores da linha de pesquisa em Educação Matemática e aos componentes da banca de qualificação, os meus agradecimentos por todas as contribuições.

Às secretarias Darci Terezinha Preuss Tissi, Francisca de Jesus Guimarães e Sonia Maria Fadel Gobbo pela atenção e desvelo.

Às minhas amigas Adair Lisboa Costa, Célia Finck Brandt, Denise Grein dos Santos, Driene Pizato Costa, Leila de Almeida de Locco, Marissil Regina S. Bassoi, Mirna Zeni Lunardi, Stella Marcia Jacopetti que me apoiaram em todos esses anos.

Aos amigos que fiz nestes anos de pós-graduação, em especial, Clélia Maria Isolani.

À Escola Municipal São Miguel e seu corpo docente e discente, que disponibilizaram o espaço onde foi realizado este estudo.

A todos que, de forma direta ou indireta, me levaram a concluir este trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS ii
LISTA DE FIGURAS ii
LISTA DE QUADRO ii
RESUMO iii
ABSTRACT iv

1 INTRODUÇÃO 01

2 JUSTIFICATIVA E DELIMITAÇAO DO PROBLEMA 03

3 REVISÃO DA LITERATURA 08
3.1 A APRENDIZAGEM E O ENSINO DE FUNÇÕES 08
3.2 O PROFESSOR E O SEU FAZER. 18

4 BASE TEÓRICA 23
4.1 AS CONTRIBUIÇÕES SOBRE REPRESENTAÇÕES E CONCEITOS 23
4.2 AS FUNÇÕES E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS: A CONTRIBUIÇÃO DE RAYMOND DUVAL 26
4.2.1 Os registros de representação e a congruência e não congruência semântica 35
4.3 PARA ALÉM DA CONTRIBUIÇÃO DE DUVAL 43

5 MÉTODO 48
5.1 PROCEDIMENTOS DE COLETA, REGISTRO E TRATAMENTO DE DADOS 50
5.1.1 Aproximação 50
5.1.2. Acompanhamento 51
5.2 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DOS DADOS 54
5.2.1 Aproximação 54
5.2.2 Acompanhamento 54

6 RESULTADOS 56
6.1 APROXIMAÇÃO 56
6.1.1 Perfil profissional 56
6.1.2 Escolha de recursos didáticos e organização do conteúdo 58
6.1.3 Relação entre o conteúdo que mais aprecia e o ensino de funções. 60
6.1.4 Pontos e passagens mais difíceis no estudo de funções 61
6.2 ACOMPANHAMENTO 61
6.2.1 O que apresentam os livros didáticos 62
6.2.2 O diálogo professora-alunos sobre representações de funções nas aulas selecionadas. 71
6.2.2.1 O uso de recursos representacionais e representações formais para a condução dos tratamentos ou conversões dos registros. 71

6.2.2.2 A realização de conversão entre registros nos dois sentidos 124

7 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS 148

8 CONCLUSÕES 164

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 169

ANEXOS

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Comparação de alterações nas expressões algébricas e gráficas. 41
Tabela 2 – Conversões 68
Tabela 3 – Tratamentos 69

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Esquema da organização semiótica e do funcionamento das representações gráficas 40

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática) 32
Quadro 2 - As representações semióticas não são internas nem externas - modo fenomenológico de produção 34

RESUMO

O objetivo desta tese foi identificar e analisar os registros de representação semiótica usados por uma professora e seus alunos de 8ª série em aulas de matemática sobre funções, em uma escola municipal da periferia de Curitiba. Após revisão de literatura do campo da Psicologia Cognitiva sobre as relações entre conceito e representação, adotou-se como referência teórica básica o pressuposto de autor da Psicologia da Educação Matemática, de que a compreensão em matemática passa pela distinção entre o objeto matemático e a diversidade de suas representações e supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica. Como método optou-se por uma observação natural do ambiente escolar onde a pesquisadora entrevistou a professora, acompanhou, gravou e anotou os registros produzidos por ela e seus alunos, em aulas sobre funções de 1º e 2º grau, selecionando e analisando 4 delas integralmente e 3 parcialmente, conforme indicadores de análise referentes aos tratamentos e conversões realizadas, o que foi identificado e analisado também no livro didático adotado (do qual a professora era co-autora) e nos outros dois livros usados como apoio. Da análise dos registros de representação utilizados, produzidos e elaborados pela professora e seus alunos em ambiente escolar, cabe ressaltar que: a professora empenhou-se em trabalhar com diferentes registros de representação destacando sempre o objeto matemático em questão; a linguagem matemática foi utilizada por ela como elemento catalisador que permeou todos os momentos de ensino, porém não se resumiu à linguagem matemática escrita, mas partiu sempre do uso de uma linguagem matemática oral, fundada na linguagem natural dos alunos, o que permitiu à professora estabelecer congruência entre a diversidade de escritas matemática para um mesmo objeto, principalmente quando os tratamentos com a escrita algébrica pareciam não fazer sentido para os alunos. Como conclusão pode-se destacar que devido à diversidade de representações do mesmo objeto matemático, o uso de diferentes registros de representação, não só para tratamentos do mesmo objeto, mas principalmente na conversão de registros nas diferentes formas de linguagem (natural, aritmética, algébrica, entre outras) auxiliou na caracterização do objeto matemático e teve um papel relevante na compreensão dos alunos, o que sugere-se seja levado em conta na elaboração de propostas de ensino de conteúdos matemáticos escolares.

Palavras-chave: educação matemática; funções; registros de representação semiótica.

ABSTRACT

The main goal of this thesis was to identify and analyse registers of semiotic representation of a teacher and her students during mathematical function classes. The students were from the 8º year period of a public school located in the suburbs of Curitiba city, Brazil. After the literature review of the “Cognitive Psychology” subject about the relationships between conception and representation, it was adopted a basic theory reference. This theory is a preview from a Mathematical Psychology Education author, which means that the mathematical comprehension go through the distinction of the object and the variety of its representations, considering the coordination of at least two registers of semiotic representation. The methodology was based in the observation of the school environment where the researcher interviewed the teacher, and also attended and recorded the classes. From these mathematical function (1º and 2º orders) classes, the researcher wrote down all the registers produced by the teacher and her students. Four classes were selected for a complete analysis and three for partial analysis, as indicators of the treatments and conversions. Moreover, it was also analysed in this matter the three didactic books utilized in the classes, which the lecture is the co-author of one of them. From the analysis of the representation registers utilized and produced by the teacher and her students in the school environment, it was possible to verify: (i) the teacher strived to deal with different registers of representation, always distinguishing the mathematical object of each representation; (ii) the teacher negotiated meanings exploiting mathematical language mutually with the social language of the group, though the oral mathematical language was more applied than the writing mathematical language. This permitted the teacher to establish similarities between the distinct writing mathematical languages for the same object, mostly when the algebra and numerical treatments still very difficult for the students. Concluding, it could be recognized that (i) the variety of the representations from the same mathematical object; and (ii) the use of different representation registers, not only for treatments from the same object but mainly in the conversion of the registers from a diversity of language forms (natural, arithmetic, algebra, and others); had allowed the exact characterization of the mathematical object. Finally, these aspects were extremely relevant for the students' comprehension, suggesting that they should to be taken into account during the elaboration of proposals for mathematical teaching material.

Key words: education, mathematical function, registers of semiotic representation.

1. INTRODUÇÃO

As idéias sobre funções percorrem o conhecimento escolar desde as primeiras noções de proporcionalidade nas séries iniciais até o ensino de Cálculo Integral e Diferencial na Universidade. Para Romberg, Carpenter e Fennema (1993) há um consenso geral de que funções estão entre as mais poderosas e úteis noções em toda a matemática e inclusive em várias outras ciências.

O impacto da tecnologia, sobre a maneira como as funções matemáticas podem ser representadas e manipuladas, está conduzindo educadores matemáticos a repensarem o modo como as funções são ensinadas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), acompanhando as tendências mundiais no ensino da matemática, sugerem que as idéias sobre funções sejam trabalhadas desde as séries iniciais com algumas sistematizações na oitava série.

O interesse da pesquisadora pelo conteúdo funções é marcado pela sua experiência profissional como professora do Ensino Médio e Superior, o que a levou a investigar o ensino de funções onde ele acontece: na sala de aula.

Concorda com Godino e Batanero (1996, p.6) ao afirmarem que:

> A matemática constitui um sistema conceitual logicamente organizado e socialmente compartilhado e os objetos matemáticos são entidades culturais cuja natureza sistemática e complexa não pode ser descrita meramente com as definições formais quando nos interessamos pelos processos de ensino e aprendizagem dos mesmos.

E encontra em Duval (1995) referencial teórico para destacar a importância da distinção entre os objetos matemáticos e suas representações ao analisar o diálogo entre uma professora e seus alunos em aulas sobre funções na 8ª série do Ensino Fundamental.

Na segunda parte desse trabalho, justifica-se a escolha do tema, delimita-se o problema, apresentam - se os objetivos e a hipótese adotada.

A parte 3 é dedicada à revisão da literatura sobre pesquisas, envolvendo: o ensino-aprendizagem de funções, e o professor e seu fazer.

As contribuições sobre representações e conceitos, e também a teoria sobre os registros de representação semiótica (Duval, 1998a, 1998b, 1993, 1995, 1996, 1998a, 1998b, 1998c, 2003) usados para a análise do diálogo entre uma professora e seus alunos em aulas de funções e outras teorias que falam sobre representações do ponto de vista pragmático são tratados na quarta parte.

Na quinta parte apresentam-se os procedimentos metodológicos de coleta, registro, tratamento e análise dos dados e, nas partes 6 e 7, a descrição e discussão dos resultados, respectivamente.

Na última parte destacam-se as dificuldades do estudo bem como as contribuições desta pesquisa e a necessidade da continuidade de investigações sobre o tema envolvido.

2 JUSTIFICATIVA E DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

Ao analisar o papel da escola, adotando como referência o ensino da matemática, Freudenthal (1973) afirma que ela, ao invés de cuidar da educação em seu sentido amplo, preocupa-se em preparar os alunos para serem matemáticos. Em sua opinião, colocar de lado a matemática que desempenha esse papel, não significa ensinar menos matemática, pois, para que o aluno aprenda a matemática, é necessário que estabeleça relações. Tais relações, para esse autor, não devem ser apenas intramatemáticas, isto é, relações entre conceitos, e sim, pontos de contato com a realidade vivida e experienciada pelos alunos. Dessa forma, as relações internas desenvolver-se-iam e, entre elas, as relações dedutivas.

A aprendizagem de um conhecimento sistematizado envolve dificuldades próprias, referentes a cada área específica, originada, possivelmente, pelo processo de elaboração deste conhecimento no âmbito da ciência e, também, pela forma como é realizada sua transposição para conhecimento escolar.

O fato de a pesquisadora exercer a docência na Licenciatura em Matemática, na Universidade Estadual no Oeste do Paraná, lecionando disciplinas obrigatórias, de conhecimento matemático específico, tais como Cálculo Diferencial e Integral, História da Matemática e, também, a disciplina Prática de Ensino e acompanhando o Estágio Supervisionado, levou-a a procurar entender o modo como o professor da escola básica preparava e tratava conteúdos de matemática com seus alunos.

Como professora de matemática do Ensino Médio, sentiu na prática a dificuldade de conciliar o conteúdo de matemática a ser ensinado com a matemática utilizada pelos alunos nas situações vivenciadas em seu cotidiano. As maneiras empregadas para ensinar determinado conteúdo matemático pareciam fugir às suas compreensões levando-os, por exemplo, a generalizar determinadas situações matemáticas expressadas numa escrita algébrica.

Certa vez, ao entrar em sala de aula, a pesquisadora deparou-se com dois alunos do 1º ano do Ensino Médio noturno, discutindo seus ganhos salariais: a moça trabalhava numa joalheria e com um pequeno salário fixo e mais 3% de comissão sobre as vendas; o rapaz, vendedor de peças para caminhões, ganhava 1% do total das vendas do mês, como salário. Na época, meados dos anos 80, percebeu-se ser esta uma excelente oportunidade para discutir o conceito de função, a partir das discordâncias sobre qual situação salarial seria a mais vantajosa. Os alunos concluíram que a obtenção de um salário maior não era apenas questão percentual, mas também, dependia da sazonalidade dos trabalhos: para a moça, as datas comemorativas: dia das mães, natal, páscoa e dia dos namorados; para o rapaz, as épocas de colheita de soja e milho, na região. Nessa situação, notava-se que os protagonistas e boa parte de seus colegas fazia estimativas mentais procedentes, utilizando as variáveis apresentadas. Porém, todos manifestavam dificuldades em transpor essa situação para outra forma de representação da matemática escolar, por exemplo, a da escrita algébrica. A dificuldade se intensificava ao percorrer o caminho inverso: traduzir uma função apresentada graficamente na sua representação algébrica correspondente.

Pesquisadores como Sierpinska (1994), Meira (1993), Trindade (1996) reconhecem que o estabelecimento de conexões entre as diferentes representações de funções é fundamental para sua aprendizagem.

Para configurar o ato de compreender em matemática, Sierpinska (1994) afirma que os objetos matemáticos são criações da mente humana e para explicar como esse objeto pode ser específico, vale-se de um exemplo sobre o substantivo "brancura", que caracteriza um aspecto da neve, dizendo:

> ...brancura pode ser considerada como um objeto porque nós podemos isolá-la como um objeto de nosso pensamento, de nossa compreensão. Neste sentido conceitos matemáticos abstratos podem ser objetos para nós. Funções reais definidas no intervalo fechado [0,1] podem ser objetos. Todo o conjunto real pode ser um objeto [...] Mesmo o conceito geral de função pode ser um objeto se alguém for capaz de considerá-lo dessa maneira. Também sentenças (teoremas, conjecturas, etc) raciocínios (provas, explicações) podem ser consideradas como objetos.(SIERPINSKA, p.29-30)

Por considerar os objetos matemáticos como produtos da mente humana, a autora assume que "conceitos abstratos e relações não podem ser transmitidos de uma forma ostensiva." (SIERPINSKA, 1994, p.30)

Pesquisas atestam que dificuldades de aprendizagem sobre funções se mantêm nos vários graus de ensino, Lochhead e Mestre (1995) mostram que, mesmo depois de passar pelo ensino da disciplina de Cálculo Integral e Diferencial, muitos alunos de engenharia apresentaram dificuldades na construção de uma função, ou mesmo de seu reconhecimento, em uma de suas formas representacionais.

O objeto matemático se dá a conhecer por suas representações expressas de forma oral, escrita, gráfica, numérica, diagramas (DUVAL, 1995). Para ele, o fosso que separa o cálculo mental da identificação e organização do objeto matemático, em suas diferentes representações, demonstra que "... existe um salto considerável da passagem da fala à escrita, quer dizer, a passagem de uma prática, transparente e não observada, da língua a uma prática na qual a expressão colocada à distância pode ser realmente controlada." (DUVAL, 2003, p.30)

Por exemplo: a passagem de uma forma discursiva em língua materna para a forma de escrita algébrica, de uma escrita algébrica para um gráfico, pressupõe uma coordenação entre registros de representação.

Por que não estudar como o professor aborda e negocia o conteúdo funções levando-se em conta as diferentes formas de representação que este conteúdo matemático propicia?

O pressuposto de Duval (2003, p.15) é o de que a compreensão de um conceito matemático supõe a coordenação de, pelo menos, dois registros de representação desse conceito. Neste estudo, optou-se por verificar esse pressuposto em relação ao conteúdo função.

Quando os alunos transitam pelas diferentes formas de representação, se requer que eles identifiquem as semelhanças e diferenças entre os vários registros. "É enganosa a idéia de que todos os registros de representações de um mesmo objeto tenham igual conteúdo ou que se deixem perceber uns nos outros", alerta DUVAL (2003, p.31).

A coordenação de diferentes registros de representação, ligada à objetivação ou ao tratamento de conhecimentos, não acontece espontaneamente, mesmo no curso de um ensino que mobiliza uma diversidade de registros. (DUVAL, 2003)

Assim, como não é permitido conhecer um cubo olhando apenas uma de suas faces, o objeto matemático[1] também não pode ser conhecido apenas por um único

---

[1] Duval (1995, p.1-2) considera como objeto matemático: os números, as funções, as retas, etc., e suas representações como as escritas decimais, fracionárias, os símbolos, os gráficos, os traçados de figuras...

de seus registros[2] de representação. O desenho de um cubo de uma determinada perspectiva, ou uma única de suas propriedades, não dá a conhecer esse objeto matemático.

O fato de os alunos tirarem boas notas nas avaliações sobre funções, sem as reconhecerem em outra situação como, por exemplo, nas interpretações matemáticas do conceito de movimento nas aulas de Física, deve-se, segundo Duval (1995), a aquisição desse conhecimento estar ligada à formação e ao tratamento da representação efetuados num único registro ou na ênfase a um só registro particular como, por exemplo, a escrita algébrica, ou os gráficos, ou tabelas ou, apenas, aos discursos em língua natural.

Como preparar um ensino que auxilie os alunos a coordenarem as diferentes representações de um objeto matemático com vistas a seu reconhecimento e aplicação?

Para se entender a complexidade do percurso de produção e difusão das representações de um conteúdo específico, no caso as funções, convém observá-lo em diferentes momentos: de objeto matemático a ser ensinado em objeto de uma lição específica, de objeto a ser aprendido, considerando a perspectiva teórica, em objeto aprendido pelo aluno.

Neste estudo, priorizaram-se os momentos de negociação no ensino do conteúdo de funções, entre uma professora e seus alunos, por ser um conteúdo matemático que permite explorar diferentes formas de representação.

Optou-se pela oitava série do Ensino Fundamental, uma vez que nesta série o ensino de funções é realizado de forma sistemática.

A escolha do tema e série deve-se, principalmente, ao resultado encontrado, como professora do 1º ano do Ensino Médio, nas avaliações de matemática em que alunos mostravam-se capazes de construir tabelas, gráficos, algumas leis de associação, porém, nos trabalhos em classe, pareciam cativos de representações matemáticas estereotipadas. Para eles, gráficos eram desenhos e não um registro de representação de uma dada função; a expressão algébrica era apenas uma

---

[2]Duval (1995) empresta o termo de Descartes para designar os diferentes tipos de representações semióticas utilizadas em matemática, como por exemplo, a escrita algébrica, os gráficos, tabelas, a língua natural.

fórmula e não um registro de representação em uma determinada linguagem - a algébrica - de uma função dada.

A opinião da maioria era a de que “toda a função tinha gráfico contínuo” ou, caso não se pudesse “traçar uma reta”, não era função. Resultados de estudo de Vinner (1992) confirmam que alunos relacionam o conceito de funções com somente uma das suas formas representacionais, por exemplo, função é fórmula.

Os objetos matemáticos não se encontram no plano sensível, isto é, não se encontra uma equação passeando pela rua, nem toros pendurados em árvores ou vetores mergulhadores. Se o ser humano necessita de múltiplas representações para acessar o objeto matemático, e se essas representações são produções sociais a serem compartilhadas, a perspectiva teórica de Duval (1995), dos registros de representação semiótica, parece fornecer elementos pertinentes para olhar o foco desta pesquisa, a qual se expressa na seguinte pergunta: de que forma a professora utiliza e mobiliza com seus alunos as representações do objeto matemático função?

Os dois tipos de transformação de representações semióticas apresentadas por Duval (2003, p.15) são: tratamento, transformação que permanece no mesmo sistema de representação; e conversão, transformação que muda de sistema de representação mantendo a referência ao mesmo objeto.

Nesta perspectiva, o estudo tem como objetivos:

- Identificar e analisar os registros de representação semiótica utilizados, produzidos e elaborados por uma professora e seus alunos em aulas de Matemática.
- Analisar os tipos de transformação, tratamento e conversão, dos registros de representação presentes na organização e condução do trabalho pedagógico da professora.

3. REVISÃO DA LITERATURA

O ensino-aprendizagem de funções não era, primordialmente, objeto desse estudo. Porém, a verificação de que as funções tinham diferentes formas de representação e a hipótese de que compreensão da matemática pressupõe a coordenação de pelo menos dois registros de representação, despertou o interesse de um estudo mais aprofundado.

Grande parte das pesquisas sobre funções investiga a concepção e as dificuldades apresentadas pelos estudantes, porém, poucas se debruçam sobre o conhecimento dos professores, ou como eles trabalham este assunto.

A pesquisadora organizou em dois eixos a literatura: o das que enfocam ensino e/ou aprendizagem de funções e suas representações, e o daquelas que tratam do fazer do professor.

3.1 A APRENDIZAGEM E O ENSINO DE FUNÇÕES

Ao longo da história do ensino da matemática, as funções têm enfoques diferenciados.

A discussão formal sobre funções começa no século XIX (Schubring, 1999), porém, suas raízes e formas de representação são anteriores.

Uma das primeiras formas de representação, a tabela, encontra-se em tábuas de argila da Mesopotâmia, no século XVII a.C, que exibem duas colunas de sinais para relacionar, por exemplo, taxação e fluxo de mercadorias. (Boyer, 1974; Ifrah, 1997; Eves, 1995) Essas variáveis, representadas pelos sinais em colunas, estabeleciam de maneira rudimentar, uma forma diferente da fala para expressar relações quantitativas.

O uso pelos gregos, de razões e proporções em uma variedade de problemas geométricos, no terceiro século antes de Cristo, propiciou considerável desenvolvimento matemático baseados nessas relações. A razão pode ser considerada como uma função linear da forma $y = ax$ onde a é a constante de proporcionalidade. (COLLETTE, 1979)

O desenvolvimento da matemática grega encontrou obstáculos, no campo da álgebra, pela falta de um sistema de representação satisfatório (Romberg, Carpenter e Fennema, 1993, p.3) capaz de atender não só à representação quantitativa, mas também operatória. Vale lembrar o impasse milenar que foram os irracionais em sua expressão algébrica.

A difusão no Ocidente do sistema hindo-arábico de numeração decimal no século XIII, por Fibonacci (Eves, 1995), e também as notações algébricas usadas pelos árabes, possibilitaram avanços na comunicação e tratamento de quantidades em problemas matemáticos.

O uso da letra para representar uma variável e a equação para relacionar duas variáveis, permitiu a representação compacta de um vasto número de relações. As contribuições de Descartes e Viète no século XVII (Collette, 1986) tornaram possível relacionar uma equação com seu gráfico, ou melhor, visualizar a relação entre duas variáveis por meio de um gráfico.

Em suma, o homem inventou tabelas, gráficos e expressões algébricas, para expressar a relação entre coisas que variavam. Essas representações e relações tiveram repercussões no ensino da matemática.

No Brasil, no período decorrido entre as décadas de 1960 a 1980, o Movimento da Matemática Moderna mantém o ensino de funções, com ênfase na Teoria dos Conjuntos. Nos Estados Unidos da América do Norte, por exemplo, o ensino enfoca a evolução histórica sobre funções. (ROMBERG, CARPENTER e FENNEMA, 1993)

As razões, proporções e raciocínios proporcionais ainda são, nos dizeres de Romberg, Carpenter e Fennema (1993), considerados necessários para o estudo de funções, embora estas conexões raramente sejam destacadas em textos contemporâneos e por muitos anos se ensina aos alunos como construir e interpretar as representações são basicamente as representações algébricas e subsequentemente os métodos de manipulação das outras representações que têm sido enfatizados na maioria dos cursos de matemática em sistemas tradicionais.

Esta ênfase é explicada por Freudenthal (1983) que diz existir, do ponto de vista matemático, duas características das funções que evoluíram com a estrutura de conjuntos e das regras que as relacionavam. Uma delas é a característica da arbitrariedade que se refere à relação entre dois conjuntos sob a qual a função é definida e os próprios conjuntos. A primeira significa que as funções não devem exibir nenhuma regularidade como, por exemplo, a relação entre tempo e temperatura. A natureza arbitrária de dois conjuntos significa que as funções não se definem por qualquer conjunto específico de objetos e, particularmente, os conjuntos não têm que ser conjuntos numéricos. A rotação de um plano é exemplo deste tipo de função, pois ela é definida pelo conjunto de pontos.

Enquanto a natureza arbitrária da função é inerente a sua definição, a segunda característica, o requisito univalente, que para cada elemento do primeiro conjunto a lei de associação fixa um único elemento do segundo conjunto, está explícito. Freudenthal (1983) atribui esta necessidade aos matemáticos de manterem as coisas controláveis. Portanto a característica univalente tornou-se uma parte aceita de todas as definições de funções.

Pedagogicamente, a noção de que as relações não necessitam apresentar nenhuma regularidade é um complicador para alunos e professores. (ROMBERG, CARPENTER e FENNEMA, 1993)

Embora as relações possam ser arbitrárias, em quase todas as situações práticas há uma relação de dependência implícita. É o caso, por exemplo, da relação entre a área de um quadrado e o comprimento de seu lado, relação funcional não arbitrária. Existem correntes pedagógicas que defendem ser estas relações, as que devem ser enfatizadas na escola. (THORPE, 1989)

Na década de 1990, a maioria das pesquisas sobre ensino considera a aprendizagem dos estudantes. (SIERPINSKA, 1992, 1994; SELDEN e SELDEN, 1992; ROMBERG, CARPENTER e FENNEMA, 1993)

Para a pesquisa em educação matemática, a década de 1990 foi um marco uma vez que se organizam as pesquisas em torno de temas e também se considera que o assunto a ser ensinado deve ser investigado no contexto de sala de aula. A tecnologia tornou possível, por exemplo, lidar com funções explorando novas idéias tanto no âmbito curricular quanto nas práticas em sala de aula. (ROMBERG, CARPENTER e FENNEMA, 1993)

Pesquisas feitas com alunos do ensino médio, ensino superior e professores destes níveis de ensino, em diversos paises como França, Inglaterra, Israel, Polônia e Estados Unidos, revelam que as concepções errôneas e as dificuldades são pontos comuns. (SELDEN e SELDEN, 1992)

Este fato trouxe à memória da pesquisadora a docência no Ensino Médio, na década de 1980, sobre funções via Teoria dos Conjuntos, e a frustração pelo fracasso na aprendizagem. (KLINE, 1976)

Estudos posteriores concluem que começar com a definição de função, a partir de par ordenado, como apresentado pelo grupo Bourbaki, conduz a uma passagem abstrata, mesmo para alunos pré-universitários (Sfard, 1992), que, embora conhecendo a definição, recorrem às idéias intuitivas e incompletas de funções. (NORMAN, 1992)

A definição como correspondência entre dois conjuntos, estabelecida por Dirichilet[3], tecnicamente, é muito similar à anterior, porém, do ponto de vista pedagógico, facilita a introdução de conceitos como domínio e imagem ou contradomínio, bem como a de correspondência um-a-um. (SELDEN e SELDEN, 1992)

O processo de construção do conhecimento sobre funções foi gerado a partir da necessidade do homem expressar e quantificar as leis do movimento na medida em que este conceito superou uma modelização de fenômenos como, por exemplo, calor e movimento da Física, ele

> ... ganhou em generalidade, porque se libertou da eventual forma de estabelecer a correspondência das variáveis, mas essa mesma generalidade o obrigou a afastar-se das condições de que nasceu. (CARAÇA,2000,p.196)

Ensinar um objeto da ciência em contexto diferente do que o originou é realizar uma tarefa difícil, uma vez que se ensina

> ...um saber exilado de suas origens e separado de sua produção histórica na esfera do saber sábio, legitimando-se, tanto em saber ensinado, como algo que não é de nenhum tempo ou de nenhum lugar, e não se legitimando mediante o recurso da autoridade de um produtor, qualquer que seja. (CHEVALLARD, 1991, p.18)

Sierpinska (1994) verifica a partir da observação de estudantes, que discutiam problemas matemáticos com conceitos novos para eles, que as dificuldades encontradas na resolução não dependem da falta de experiência matemática,

---

[3] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) matemático alemão, discípulo de Gauss (COLLETTE, 1986, p.322)

habilidades ou idiossincrasias de seus pensamentos, mas da natureza do próprio conceito matemático e da cultura onde o conceito se desenvolve.

Sierpinska (1992, 1994) diz que as dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem de conceitos matemáticos são as mesmas encontradas na evolução histórica do conceito, que ela denomina obstáculos epistemológicos.

Para atestar a complexidade de um objeto matemático, do ponto de vista pragmático, Sierpinska (1994, p.21) apresenta o significado do termo função expressada pelo seu uso:

> ...Como pode ser uma função? Ou, que adjetivos podem ser usados com o substantivo ‘função’? (Definida/ não definida, definida num ponto/num intervalo/ em todos os pontos, crescente, decrescente, inversível, continua num ponto/ num intervalo, diferenciável em um ponto/ em um intervalo; integrável,..., etc.) O que pode ter uma função? (Zeros, valores, uma derivada, limite em um ponto/ no infinito, etc.) O que se pode fazer com as funções? (Representar, calcular valores nos pontos..., calcular uma derivada, uma integral, combinar funções, construir seqüências, séries de funções, etc.) Como verificamos que uma função é... (contínua diferenciável... em um ponto, crescente em um intervalo)? Para que se podem usar as funções? (Representar relações entre magnitudes variáveis, modelar, predizer, interpolar, aproximar,...)

O caráter pragmático de um conceito necessita ser ensinado e o conhecimento matemático possui representações como escrita, algoritmos, gráficos, tabelas, figuras geométricas, propriedades já estabelecidas pelas instituições vigentes.

Em alguns livros didáticos da década de 1980 (Iezzi et al, 1981, Domenico, 1984, Bonjorno e Giovanni, 1982) as funções são apresentadas aos alunos pelas suas definições.

As definições nem sempre são o melhor caminho, atestam Selden e Selden (1992), pois mesmo os matemáticos, ao comunicar suas idéias, em vez de se valerem de definições, muitas vezes fazem uso de desenhos, como o diagrama de Venn. Em observações informais, estes autores verificam que alunos universitários, ao utilizarem essa forma de representação, parecem compreender melhor a composição de funções.

Para Norman (1992), Sfard (1992) e Vinner (1992) o conceito de função aparece algumas vezes atrelado à idéia de variável dependente e refere-se, normalmente, a uma fórmula ou expressão, envolvendo variável independente. Os estudantes que aprendem funções dessa maneira podem apresentar dificuldades em estender esse conceito, por exemplo, para funções de mais de uma sentença.

A dificuldade sobre a definição de funções e seus conceitos faz parte de um domínio cognitivo complexo, porém outros aspectos deste domínio devem ser considerados, como as representações algébricas ou simbólicas, gráficas, numéricas ou tabulares, uma maneira de ampliar a visão sobre o tema.

Para melhor compreender as dificuldades geradas pelas representações sobre funções, buscou-se verificar as transformações algébricas tratadas por alguns pesquisadores.

No início do trabalho com funções, parte-se do pressuposto de que o aluno já explorou aspectos algébricos, seja com a resolução de equações, decomposição de polinômios em produtos de binômios e, mesmo obtenção de uma fórmula, por regularidades numéricas ou pictóricas, uma vez que alguns livros didáticos contemplam esses aspectos.

Porém, na investigação de Lochhead e Mestre (1995), os alunos apresentam grandes dificuldades em escrever uma equação, para representar uma relação entre duas variáveis, a partir de uma forma tabular ou pictórica. Para os autores, um dos primeiros empecilhos ao ensino encontra-se na atribuição do significado das variáveis ao equacionar alguns problemas simples com duas variáveis.

Segundo Trindade e Moretti (2000), a identificação de regularidades, em situações como seqüências numéricas ou padrões geométricos, é uma habilidade essencial à construção do conceito de função. As tabelas permitem reconhecer as seqüências funcionais, bem como representá-las, escrita e graficamente, possibilitando melhor interpretação da dependência entre variáveis, seja na forma gráfica ou algébrica.

A tradução da linguagem escrita para a linguagem matemática em problemas simples parece não estar nem na manipulação dos símbolos algébricos e nem em alguma incapacidade para leitura, segundo resultados da pesquisa de Lochhead e Mestre (1995) com alunos de engenharia. Concluem os autores que os alunos apresentam dificuldades em três tipos de problemas: escrever uma equação para representar uma relação entre duas variáveis dada em forma tabular; para escrever uma sentença, a partir de uma equação linear simples com duas variáveis e escrever uma equação que represente a relação entre duas variáveis, no caso da relação ser apresentada de forma pictórica.

Do ponto de vista de Duval (1995) cada um destes problemas está ligado a conversão entre representações e as dificuldades são atribuídas à ausência de congruência entre cada um dos dois registros considerados, por exemplo, conversão de tabela em escrita algébrica, conversão de escrita algébrica em língua natural escrita, conversão de seqüência pictórica em escrita algébrica.

As dificuldades no equacionamento de alguns problemas simples, segundo outros pesquisadores, persistem nos alunos, desde os que iniciam o estudo algébrico até os que alcançam algumas áreas técnicas de graduação. (LOCHHEAD e MESTRE,1995; MONK,1992; DOWKER,1992)

A álgebra fornece um conjunto de técnicas que auxiliam a resolução de alguns problemas, a descrever modelos e regularidades de forma a torná-los facilmente comunicáveis. Enquanto uma linguagem pode ser usada para entender relações abstratas. Propicia meio para desenvolvimento e análise de relações e favorece uma melhor compreensão sobre funções, uma vez que permite reconhecer as relações entre os elementos pertinentes à situação, bem como as expressões analíticas de funções vinculadas às representações algébricas que resultam de relações entre grandezas. (ARTIGUE, 1992; FALCÃO, 1993; USISKIN, 1995)

Outra forma de abordar o objeto matemático requer uma representação diferente: os gráficos, especialmente aqueles que definem funções dos reais nos reais.

Ao ensinar é muito comum, embora se refira aos números reais, o professor utilizar números inteiros para construir pontos de curvas no gráfico cartesiano. Este fato tem algumas implicações para leitura e interpretação gráfica.

É na aprendizagem de gráficos que os alunos apresentam mais facilidade, dizem Markovits, Eylon e Bruckeimer (1995). Ressaltam dois pontos importantes: os alunos lidam melhor com funções na forma gráfica do que na forma algébrica e recomendam trabalhar com o conhecimento matemático em contexto de uma história, porque aprendem melhor em situações que lhes fazem sentido (Meira, 1993) ou que tenham familiaridade.

O acesso rápido às imagens auxilia na explicação de pontos de máximo, mínimo, concavidade e pontos de inflexão de funções, mas, na opinião de Monk

(1992) os alunos vêem os gráficos como ícones dos quais retiram informações sobre pontos.

Embora a visualização permita um acesso rápido à representação gráfica de funções, a leitura, construção e interpretação gráfica não é tão simples, como atesta Ponte (1984), na pesquisa com alunos do Ensino Médio, na resolução problemas com gráficos e raciocínio funcional.

O mesmo autor relata que, comumente, os alunos obtêm êxito na interpretação gráfica, nas situações concretas, o que não acontece, quando devem interpretar e discutir relações subjacentes. Muitos apresentam dificuldades no uso e construção de escalas; tendem a usar as variáveis como discretas e, normalmente, não percebem que o gráfico representa um fenômeno contínuo ou mesmo situações não lineares, como nos gráficos de funções de 2º grau. Estas são pensadas e feitas como lineares.

Graham e Ferrini-Mundy (1990) usam problemas que requerem representações em forma de gráfico e tabelas com o objetivo de que os alunos trabalhem na perspectiva das múltiplas representações de uma função. Concluem que alunos universitários têm muita dificuldade em discriminar, seja num gráfico ou tabela, uma função de uma não função, apesar de haverem cursado a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

O impacto da tecnologia sobre a representação das funções leva pesquisadores a repensar em como as funções são usadas e ensinadas.

Moschkovich, Schoenfeld e Arcavi (1993), ao introduzir e elaborar um modelo para compreender funções, consideram duas maneiras de olhar para elas: na perspectiva de um processo ou na perspectiva de um objeto e as três mais proeminentes representações de função: a tabular, a gráfica e a forma algébrica. Concluem que a competência neste domínio consiste em transitar por essas representações e perspectivas, ou seja, ser capaz de ver retas no plano, na sua forma algébrica ou na forma tabular, como objetos quando qualquer dessas perspectivas for conveniente, mas também mudar para a perspectiva processo (no qual um valor de x produz um valor de y) quando for apropriada.

Moschkovich (2004) usa um estudo de caso para descrever como uma aluna se apropria de dois aspectos cruciais para o trabalho com funções (Even, 1990; Sfard, 1992; Schwarz e Yerushalmy, 1992; Moschkovich, Schoenfeld e Arcavi, 1993): uma perspectiva considerando retas como objetos e a ação de associar uma reta com sua equação correspondente na forma y = mx + b. A aluna é submetida a duas sessões tutoriais para esclarecer como o tutor apresenta as três tarefas (estimar e interceptar, avaliando a inclinação e explorando parâmetros) que refletem os dois aspectos das práticas matemáticas nesse assunto. Moschkovich (2004) descreve como a apropriação funciona em termos de foco de atenção, significado para linguagem, e as metas para as três tarefas e verifica que a aluna não repete as metas do tutor, mas transforma algumas dessas metas.

Muitas vezes os alunos compreendem como função somente as parábolas e as retas. Clement (2001) ao entrevistar alunos do ensino médio americano sobre quais, dentre sete diferentes gráficos, eram função e porque, verificou que particularmente o gráfico maior-inteiro não era considerado função pela maioria deles (60%).

Ao identificar as estratégias utilizadas por alunos do 2º ano do Ensino Médio na resolução de problemas que envolvem o conceito de função linear, Souza e Cordeiro (2002) e Souza (2003) constatam que ao utilizarem os registros de representação na resolução o fazem preferencialmente em linguagem algébrica e tabular e apresentam dificuldades na utilização de gráficos.

Com o objetivo de identificar e descrever diferentes significados produzidos por estudantes do curso de Licenciatura da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Carneiro, Fantinel e Silva (2003) ressaltam que a disciplina de Geometria, proposta pelo curso, não faz a relação entre transformação geométrica e função. A noção é considerada comunicada como uma correspondência, associação, relação, porém não como transformação.

Em interação com a plataforma de ensino virtual Teleduc, as pesquisadoras Bianchini e Puga (2005) criam um curso denominado Cálculo 1 e 2 para servir de apoio as aulas presenciais. Durante a interação é perguntado aos alunos, por exemplo, o que entendem por função e as respostas que aparecem são fragmentos de concepções como: “é para representar, imagem, domínio e contradomínio” ou “relação entre dois conjuntos em que para cada elemento do primeiro conjunto existe apenas um elemento do segundo associado”. Ao ser perguntado como uma função poderia aparecer, um dos alunos responde: de forma algébrica, gráfica e por tabelas. Ao serem questionados sobre a preferência deles por algumas das representações citadas, um outro responde “no dia–a-dia a linguagem natural, nas aulas de cálculo a algébrica é mais simples, gasta menos espaço, mas para visualizar é bem melhor o gráfico”.

O uso de calculadoras gráficas e do computador para explorar conceitos matemáticos é motivo de preocupação para diversos pesquisadores.

Dentre os que exploram funções e suas representações encontram-se os estudos de Bardini, Pierce e Stacey (2004) que usam calculadora gráfica para introduzir o ensino de álgebra para alunos do ensino médio em situação contextualizada que permita explorar a função linear. Como resultados apresentam um progresso considerável ao descreverem as relações lineares algebricamente e o uso de calculadora gráfica afetando a escolha de letras por alguns estudantes.

Santos (2002) aplica um software elaborado por ele, o Funcplus, adaptado do software francês Functuse, construído por Olivier Artigue e Antoine Dagher. Elabora uma seqüência didática como um jogo envolvendo função afim e objetivando verificar a conversão do registro gráfico em algébrico. Observa que os alunos, da 2ª série do Ensino Médio de uma escola particular, escolhem predominantemente as estratégias pontuais (utilização exclusiva e explícita das coordenadas dos pontos na pesquisa dos coeficientes) se enganando nos cálculos algébricos. O software permite melhorar a capacidade de precisar e estimar os coeficientes do registro algébrico de uma função afim e uma melhor visualização, entendida pelo autor como um modo particular de conhecer.

Em estudo exploratório inicial com alunos da 2ª série do Ensino Médio de uma escola particular no interior de São Paulo, Pelho (2003) verifica que esses mesmos alunos quando interrogados sobre o que é função respondem que é apenas seu gráfico e que a expressão algébrica e as tabelas são apenas instrumentos para a construção do mesmo. A professora utiliza o Cabri- Geomètre II para conduzir as atividades e observa que alguns alunos escolhem responder a uma expressão matemática usando expressões algébricas ou relações numéricas. Nos que optaram pela língua natural, as explicações careciam de clareza e rigor. Os 6 grupos de 2 alunos cada apresentam dificuldades na construção gráfica. Destes com o desenvolvimento das atividades propostas, 5 melhoram na condução da construção e 1 não.

A manipulação simbólica e a utilização de representações algébricas são supervalorizadas na escola. Knuth (2000) afirma que a dificuldade dos estudantes reside mais em fatores instrucionais do que em cognitivos.

Um dos responsáveis pelos fatores instrucionais é o professor, sujeito que filtra e difunde os conhecimentos instituídos.

3.2 O PROFESSOR E O SEU FAZER

Pesquisas anteriormente citadas mostram que a mobilização ou transferência entre representações, pelos alunos, desempenha um papel importante na compreensão de conteúdos matemáticos, principalmente o de funções.

A responsabilidade pela tarefa do ensino sistematizado cabe a um ser humano com possibilidades, necessidades e limitações: o professor.

Este professor constrói, ao longo de sua trajetória profissional, saberes e práticas que, muitas vezes, não são considerados, ao se propor um curso de formação. Embora não valorizados, cada vez mais as pesquisas demonstram que eles se constituem em alicerces de sua prática e competência profissional conforme será visto a seguir.

A atuação didática revela o perfil do profissional seja pelo conhecimento que o mesmo demonstra do conteúdo a ser trabalhado, seja pelas intervenções que realiza sobre o conhecimento dos alunos. (CHEVALLARD, 1991; LLINARES, 1999; GARCIA, 1992).

Parte do conhecimento prático do professor vem dos cursos de formação, porém os saberes legitimados academicamente, "... ao não serem legitimados pela prática docente passam a ter pouca relevância em sua aprendizagem" (HERNÁNDEZ, 1998, p.12). Muito do que aprendem vem da sua própria prática ou da interação com colegas.

Na impossibilidade de se prescrever a boa prática, deve-se partir do princípio de que existem docências bem sucedidas e refletir sobre alguns fatores que lhes dão sustentação.

Não há como separar o professor do ser humano, com seus valores, crenças, interesses, expectativas pessoais e profissionais. Não há como normatizar, racionalizar um fenômeno aleatório e imprevisível como o ato educativo. (NÓVOA, 1995)

Para ser um bom professor, Fernández (1998) destaca que são necessárias qualidades não inatas mas que podem ser desenvolvidas, tais como: senso de humor ao lidar com situações inusitadas ou contraditórias, pois supõe autocrítica sem o medo de parecer que sempre sabe tudo; que tenha amor pelo conhecimento, que sinta paixão pelo que faz e que não se aborreça com o ensinar; “ensinar é uma atividade que está na interseção da ciência e da arte” (Fernandéz, 1998, p.28); e saber que o mais importante não é responder perguntas, mas como provocar as perguntas nos alunos.

Para Fernández (1998), os professores são agentes que colaboram na formação da imagem do aluno como pessoa e influenciam de forma direta ou não para torná-lo um sujeito aprendiz ao longo da vida.

Boa parte do dia de um aluno é passada na escola e, nos dizeres de Bicudo (2003, p.42-43)

> A realidade escolar faz sentido para esses sujeitos no próprio cotidiano que aí vivenciam. O sentido se dá na vivência das atividades realizadas nesse mundo escolar em que trabalha-se, ensina-se, instrui-se, comunicam-se conhecimentos, produzem-se conhecimentos, aprende-se, avalia-se, deseja-se, repudia-se. Em que a realidade dos objetos culturais[4]permeia os conteúdos programáticos. Em que os valores e aqueles conteúdos são veiculados pela linguagem. Em que as pessoas presentificam-se na materialidade encarnada de seus corpos, expondo-se, interferindo, comunicando sua compreensão do mundo, do outro e de si.

O professor preocupa-se em bem ensinar (Curi, 2004) e para Grillo (2001) o bem ensinar reverte-se em práticas docentes bem sucedidas agrupadas como: características pessoais e profissionais, representadas pelo domínio do conhecimento, segurança, respeito mútuo, gosto pela docência e exigência; espaço da sala de aula e interação professor aluno; competência profissional explicada por saber e saber fazer; abertura ao contexto social e político.

As tendências européias sobre pesquisas com o professor incluem, segundo Krainer (2001), o estudo da prática docente. Esta prática, segundo o próprio autor, não é competência apenas das instituições de pesquisa, mas também, de pesquisas

[4] Os objetos de arte, produtos da ciência, da tecnologia, valores, formas de organização social,etc.(idem,p.42)

de estudantes e prática dos professores. Aprender a investigar os comportamentos nas práticas de sala de aula, diz ele, fornece mais elementos à educação de professores.

Krainer (2001) destaca um modelo com quatro componentes para descrever a prática profissional:

Ação – atitude em direção à competência em - experimentação construção e trabalho com objetivo e direção;

Reflexão – atitude em direção a competência em autocrítica em suas próprias ações num trabalho sistemático e reflexivo;

Autonomia – direção a competência em – auto iniciativa, auto-organização e autodeterminação;

Trabalho integrado - direção a competência em trabalho cooperativo e com aumento de relevância pública.

O pesquisador, em várias experiências com professores de matemática e escolas, mostra que há na prática muita ação e autonomia e pouca reflexão e trabalho integrado.

Muito embora todos os fatores, anteriormente considerados, possam dimensionar o fazer docente, Garcia Blanco (1998) desenha as referências teóricas do conhecimento profissional do professor de matemática, em especial o conhecimento que este tem sobre funções, procurando estabelecer os limites do campo de atuação da pesquisa no que diz respeito à atuação do professor.

Uma aproximação da caracterização do conhecimento profissional, segundo a autora, faz-se em duas dimensões: os aspectos característicos e processos interpretativos, explicitados mediante a estrutura e conteúdo do conhecimento matemático pertinente.

A reflexão lhe mostrou que o conteúdo matemático é parte de um processo de elaboração cognitiva do conteúdo de distintos componentes do conhecimento e crenças, fruto da ação profissional, que parece produzir uma integração cognitiva de diferentes componentes do conhecimento.

Para Garcia Blanco (1998, p.211-216), o processo de elaboração e integração cognitiva compõe o núcleo da ação profissional e o conhecimento profissional, respectivamente.

Segundo a mesma autora, tanto os aspectos característicos como os processos interpretativos são fundamentais na caracterização do conhecimento profissional do professor de matemática em sua complexidade e magnitude; a estrutura e o conteúdo sejam dos aspectos característicos, seja dos processos interpretativos do professor, são específicos de cada professor; as trocas de idéias entre professores de diferentes campos do conhecimento podem contribuir para uma elaboração cognitiva mais rica, tornando o conhecimento profissional mais amplo e flexível.

O professor tende a organizar seu trabalho enfatizando os conteúdos que prefere e domina.

Llinares (1999, p.26-27) confirma esse fato ao verificar como dois professores do Ensino Médio ensinam funções, ambos vindos da mesma universidade e com a mesma graduação. Esses professores enfatizam aspectos diferentes no ensino de funções: um prioriza o conceito de função baseado em um uso flexível de diversas formas de representação, outro se detém enfatizando as representações algébricas e alguns procedimentos algébricos.

O mesmo ocorre nos estudos de Cunningham (2005) ao acompanhar 28 professores de álgebra, com diferentes tempos de serviço, observando quanto tempo eles se dedicam a diferentes tipos de problema que exigem mudanças de representação e quantas vezes esses problemas aparecem em testes para seus alunos.

Como resultado constata que os professores dedicam menos tempo aos problemas da mudança de gráfico para número[5] e estes problemas aparecem com menor freqüência nos testes dos alunos. O resultado da pesquisa sugere aos professores de álgebra um cuidado maior com a escrita dos estudantes que, apesar de pouco usada em aulas de matemática, pode fornecer indicativos sobre a aprendizagem.

O professor tende a organizar seu trabalho dando ênfase a conteúdos que domina melhor e pelo qual tem preferência.

[5] A passagem de gráfico para número é definida pelo pesquisador como um problema onde eram apresentadas a função linear e sua representação gráfica e pedia-se aos alunos para determinarem um par ordenado no gráfico que fosse solução para a equação.

As diferentes concepções vinculadas ao conceito de funções (Dubinsky e Harel, 1992) e a habilidade para tratar conjuntamente com diferentes representações de funções, um dos principais componentes, do que Einsenberg (1992) denomina de sentido funcional, são elementos relevantes para o estudo em questão.

O levantamento bibliográfico desenha os contornos da pesquisa, uma vez que considerando as dificuldades de aprendizagem aliadas aos propósitos de ensino, a pesquisadora retorna ao problema deste estudo como uma forma de entender melhor os recursos, as intervenções e os elementos auxiliares do fazer do professor, como o livro didático, em aulas que possibilitem a utilização e compreensão das representações como forma de acessar o objeto matemático em questão, uma vez que é o professor quem decide a forma de abordagem (Garcia Blanco, 1998; Llinares, 1999; Garcia Blanco e Llinares, 1999) e os recursos utilizados para o ensino de conteúdos matemáticos.

A contribuição dessa pesquisa versa sobre o ensino de funções na perspectiva da dinâmica da sala de aula adotando o pressuposto de Duval de que: a compreensão de um conceito matemático supõe a coordenação de, pelo menos, dois registros de representação desse conceito.

4. BASE TEÓRICA

4.1 AS CONTRIBUIÇÕES SOBRE REPRESENTAÇÕES E CONCEITOS

Buscando auxilio na psicologia, esse estudo focalizará as contribuições de Piaget, Vygotski e Vergnaud, para entender o processo ensino-aprendizagem de representações de uma área especifica do conhecimento: a matemática,

Para Piaget a representação é um processo interno. Em *A formação do símbolo na criança* (1978) defende duas teses. A primeira delas enfatiza que é no terreno do jogo e da imitação que se pode acompanhar a passagem da assimilação e acomodação sensório-motoras para assimilação e acomodação mentais que caracterizam o início da representação, reconhecendo que o processo assimilação/acomodação parece ser essencial na constituição das formas primitivas e pré-verbais da inteligência. Segundo o autor, a representação começa quando ocorre, simultaneamente, distinção e coordenação entre significantes e significados. Essa primeira tese é um prolongamento de *O nascimento da inteligência na criança* (1987) e propõe-se a tratar da continuidade funcional entre o sensório motor e o representativo, continuidade essa que vai orientar a constituição das sucessivas estruturas. Em suma, nessa primeira tese o autor tenta mostrar como o símbolo é preparado pela organização pré-representativa.

A segunda tese é a da interação das diversas formas de representação. Existe representação ao imitar-se o modelo ausente. O autor questiona se há elementos comuns nas diversas formas de representação e se é possível sustentar que elas comportam mecanismos comparáveis. A psicologia associacionista clássica resolvia esse problema defendendo que todas as formas de representação derivavam de uma única realidade, que era a imagem como continuação direta da sensação.

Para Piaget, a representação é interna, porém, ele nunca descartou a importância da vida social na elaboração do conceito e dos esquemas representativos ligados à expressão verbal. Em sua opinião, o que a vida social não explica é o início da imagem ou do símbolo, como observados na imitação diferida ou nos primeiros jogos de imaginação da criança de um ano.

Piaget destacou o papel da função simbólica como mecanismo comum aos diferentes sistemas de representações, seja como mecanismo individual cuja existência viabiliza a interação do pensamento entre indivíduos e conseqüentemente a constituição ou aquisição das significações coletivas, seja reconhecendo que a razão supõe a cooperação e a reciprocidade. Também justificou que o estudo das funções simbólicas deve abranger todas as formas iniciais de representação, da imitação e do símbolo lúdico ao esquema verbal e às estruturas pré-conceptuais elementares.

Vygotsky não se referiu especificamente à representação. Uma possível explicação, segundo Pino (2001, p.45), é que para esse autor ela se confundiria "com o próprio regime de signos."

Ainda Vygotsky (1991, p. 105-108) defendia que a linguagem, mesmo em seus estágios mais rudimentares, exerce uma função fundamental na organização e reorganização da percepção, modificando-se à medida que a criança se desenvolve. Se o significado da palavra se modifica, o mesmo ocorre com a relação entre pensamento e linguagem.

A linguagem matemática está sujeita a uma organização com regras e signos. A aquisição de conceitos matemáticos ou não matemáticos, pelos estudantes, é um dos objetivos do processo de ensino escolar, pois segundo Davidov (1982, p.31), "... dominar um conceito supõe dominar a totalidade de conhecimentos sobre os objetos a que se refere o conceito dado".

Para Vygotsky (1991, p. 98-99) os conceitos científicos são hierárquicos, pressupondo que conceitos novos transformam os conceitos inferiores. Exemplificando matematicamente, afirma que o aluno que domina os conceitos algébricos "vê os conceitos aritméticos sob uma perspectiva mais ampla." VYGOTSKY (1991, p.99)

A diferença entre significado e sentido para os signos matemáticos aparece no exemplo abaixo:

> Se a criança opera com o sistema decimal sem estar consciente dele enquanto tal, não se pode afirmar que ela o domina: pelo contrário, está subordinada a ele. Quando ela consegue ver o sistema decimal como um exemplo especifico do conceito mais amplo de uma escala de notação, pode operar deliberadamente com esse ou qualquer outro sistema numérico. (VYGOTSKY 1991, p.99)

Não se pode fundamentar a aprendizagem matemática somente no simbolismo ou a partir das situações que se apresentam ao sujeito, declara Vergnaud (1996, p.238-240). Para ele o conhecimento se constrói a partir de problemas a resolver e o importante é considerar a ação do sujeito em situação e a organização de seu comportamento. Daí a importância atribuída, pelo autor, ao conceito de esquema, emprestado de Piaget.

Diz Vergnaud (1996, p.190-191) que os esquemas organizam o comportamento do sujeito para uma classe de situações dadas, mas também organizam simultaneamente as ações do sujeito e a representação simbólica, sobretudo lingüística, que acompanha essa ação. A linguagem tem primeiramente a função de comunicação apoiada em outra função, a de representação.

Com base em Vygotsky, Vergnaud (1987, p.7) afirma que a linguagem pode favorecer: a identificação de invariantes; a parte inferencial do funcionamento do esquema; o planejamento e o regulamento e controle da ação.

A linguagem e os símbolos têm um papel relevante na elaboração de um conceito e na ação. Sem os esquemas e as situações, permaneceriam sem sentido. O lugar da linguagem e dos símbolos é uma importante questão na educação matemática. (VERGNAUD, 1988, p.8).

Os símbolos são necessários para identificar objetos matemáticos, tornar claro suas propriedades e suas relações com outros objetos. A língua natural e os símbolos matemáticos, como tabelas, diagramas, gráficos, escrita algébrica e outros, são partes importantes no processo de conceitualização e também no controle e regulamentação de esquemas e algoritmos, na resolução de novos problemas e no raciocínio sobre eles, isto é, na combinação e transformação de relações, planejamento, escolha de dados e operações. (VERGNAUD, 1988, p.15)

Para Vergnaud (1988, p.15) a álgebra é o caso mais óbvio, na matemática escolar, do auxilio dos símbolos ao pensamento. Este auxílio, segundo o autor, começa nos níveis elementares de escolaridade, no início da contagem com palavras e também no uso de tabelas e diagramas.

O uso de gráficos e diagramas ajuda muito o pensamento. Os gráficos são ferramentas importantes na álgebra para representar variáveis, funções e soluções de sistemas durante a fase introdutória da álgebra. Porém, os gráficos também apresentam dificuldades de leitura e compreensão e não é tão óbvio que números possam ser representados por pontos sobre uma reta. Requer a compreensão do conceito de origem e a identificação de sucessão de pontos e inclusive a sucessão de segmentos separando esses pontos da origem. (VERGNAUD, 1988, p.16)

Diz Vergnaud (1988) que os símbolos lingüísticos e não lingüísticos ajudam os estudantes a identificar os objetos matemáticos e suas relações, mas também levantam problemas de leitura e compreensão.

Ao considerar algumas das perspectivas teóricas sobre representações, cabe ressaltar que:

> No campo da teoria do conhecimento, esse termo (representação) pode ser entendido tanto como uma *função* quanto como um *objeto mental*. Como função, é a propriedade substituir umas coisas por outras que servem para evocá-las.... Como objeto mental, é o desdobramento do real no seu equivalente simbólico, o que implica a função semiótica. Se é fácil entender a representação como função, não é igualmente fácil entender a representação como objeto mental nem a maneira como esse objeto se constitui. (PINO 2001,p.45, itálicos do autor)

4.2 AS FUNÇÕES E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS: A CONTRIBUIÇÃO DE RAYMOND DUVAL.

O interesse da pesquisadora pela teoria de Duval[6] surge em decorrência de sua historia profissional, já relatada, sobre o processo ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos.

As dificuldades dos alunos, como por exemplo, ao construir fórmulas, em disponibilizarem pontos de uma tabela no gráfico ou decidirem sobre que escala usar no traçado de curvas ocorria tanto no Ensino Médio como na Universidade, no ensino de Cálculo, estendendo-se até os estudantes do último ano da licenciatura em Matemática, que encontravam essas mesmas dificuldades ao preparar as aulas para estágio. O ponto comum se encontrava nas representações matemáticas como gráficos e equações, que nada pareciam representar para eles.

Certa vez a pesquisadora perguntou a cinco turmas de 1º ano do Ensino Médio, qual a resposta para uma expressão escrita como $x + 3 = 5$. Nenhum aluno

---

[6] A tradução de textos originais em francês, inglês e espanhol é de responsabilidade da pesquisadora.

dessas turmas apresentou resposta para essa equação. Ao perguntar qual número "somado" com três daria cinco, a resposta imediata e coletiva era: - Dois.

Por que não reconheceram a mesma situação na linguagem matemática, uma vez que já haviam tomado contato com tal conteúdo desde a 6ª série na época?

Para melhor compreensão destas e de outras situações no ensino da matemática, procurou-se estudar a perspectiva e o significado dos termos utilizados pelo autor, com o objetivo de delimitar melhor o problema.

Para Duval (1995, p.2), diferentemente de outras áreas do conhecimento, a matemática...

> requer a utilização de outros sistemas de expressão e representação além da linguagem natural e das imagens, como por exemplo, vários sistemas de escritas para os números, notações simbólicas para os objetos, escritas algébricas e lógicas que assumem o estatuto de língua paralela à língua natural para exprimir as relações e operações, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes,diagramas, esquemas, etc."

O autor parte do princípio de não haver compreensão da matemática, no momento em que não se distingue o objeto de sua representação.

Os próprios objetos matemáticos "... não representam diretamente a realidade dada. Eles são frutos da abstração." (RÍBINIKOV, 1987)

Em sala de aula, onde se realiza o processo de ensino-aprendizagem significativo, as representações devem permitir não só a comunicação entre os sujeitos, bem como favorecer as atividades cognitivas. Um estudo sobre frações, por exemplo, requer auxílio de formas diferenciadas de representação como escrita numérica em língua natural, escrita na forma fracionária, decimal, desenhos, etc.

No campo das representações, Duval (1993, 1995, 1996b) refere-se a três tipos necessários à construção do conhecimento.

As representações *mentais* permitem focar o objeto na ausência dos significantes perceptíveis. Geralmente são identificáveis a imagens mentais, porém, recobrem um domínio maior do que o domínio das imagens por relacionar

> não somente os conceitos as noções, as idéias mas também as crenças e as fantasias, isto é, todas as projeções mais difusas e mais globais que refletem os conhecimentos e os valores que o sujeito compartilha com o seu meio, ou com um grupo particular ou com aqueles que refletem seus próprios desejos. (DUVAL, 1995, p.28).

Duval (1995,p.15-16) apoiou-se em estudos de Piaget (1926), que definiu a representação primeiramente como as *crenças* e *explicações* das crianças sobre fenômenos naturais e físicos e posteriormente Piaget (1987), como evocação dos objetos ausentes. Estas representações são internas e conscientes ao sujeito.

As representações consideradas *internas* ou *computacionais* se originaram de teorias que privilegiam o tratamento que um sistema faz, e das informações recebidas para que produzir uma resposta adaptada. Desse modo, a noção de representação privilegia a *forma* pela qual uma informação pode ser descrita e levada em conta num sistema de tratamento.

Diferencia-se da concepção de representação anterior uma vez que não se trata de "crença" nem com "evocação dos objetos ausentes" que remetam a consciência de um sujeito. Ao contrário, trata-se de uma *codificação da informação.*

As investigações em psicolingüística e memória semântica influenciaram as modelagens efetuadas em inteligência artificial privilegiando o *tratamento* da informação, assumindo que, embora a noção de representação interna seja fundamental, sua *forma* pode mudar segundo o nível de tratamento considerado, isto é, essas representações convertem informações externas a um sistema em formas que permitam recuperá-las e combiná-las no interior do sistema. (DUVAL, 1998a, p.30-32)

Nas representações *semióticas*, Duval (1995, p. 20) se apóia em autores que estudaram a modelização da linguagem como Chomsky (1978), Pierce (1977), Granger (1979) e Benveniste (1989, 1995). Este último amplia a noção de Pierce (1977, p.51) que afirmava ser a língua natural uma "organização semiótica por excelência" mostrando a importância da relação entre dois sistemas semióticos diferentes. Duval (1995, p. 20) sublinha que "no domínio do raciocínio as línguas naturais revelam ser um registro necessário e insubstituível."

As representações semióticas dizem respeito

> a um sistema particular de signos, a língua, a escrita algébrica ou os gráficos cartesianos os quais podem ser convertidos em representações "equivalentes" em outro sistema semiótico, mas podendo ter **significados** diferentes para os sujeitos que os utilizam. A noção de representação semiótica pressupõe que se leve em conta sistemas semióticos diferentes e uma operação cognitiva de conversão de representações de um sistema semiótico a outro. Esta operação foi primeiramente descrita como " mudança de forma". (DUVAL,1995, p.17, negrito do autor)

A noção de representação semiótica, portanto, considera sistemas semióticos diferentes e uma operação cognitiva de conversão de um sistema semiótico a outro, ambos referindo-se a um mesmo objeto de conhecimento. Em suma, é uma mudança na forma de representação desse conhecimento, preservando-se o conteúdo.

É importante, então, ressaltar que as representações, referidas por Duval (1995, p.15-18), desempenham funções diferentes.

A partir de 1985, segundo Duval (1995, p. 17-18), alguns trabalhos de psicologia e de didática destacam a importância das representações semióticas na aquisição dos conhecimentos matemáticos, bem como problemas suscitados em sua aprendizagem. Estas pesquisas evidenciaram outros pontos, a saber:

- no caso dos símbolos em matemática, a importância da forma em relação ao conteúdo apresentado;
- a diversidade de formas de representação para um mesmo conteúdo representado;
- a importância de uma mudança de forma de representação por razões de economia de tratamento.

O papel das representações semióticas na atividade cognitiva se manifesta de duas maneiras para Duval (1995, p.14): a primeira é a função de comunicação, sem esquecer a importância de funções tão primordiais como o de tratamento das informações e de objetivação ou tomada de consciência; a outra é a de que não existe *noesis*, considerado como os atos cognitivos tais como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência, sem *semiósis,* entendida como a apreensão ou a produção de uma representação semiótica.

Com base nessas premissas, Duval (1995, 2003) utiliza a aprendizagem da matemática como um campo de estudo privilegiado para análise de quatro atividades cognitivas fundamentais: a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas e a compreensão de textos.

Para estudar as atividades cognitivas (a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas e a compreensão de textos) o autor utiliza os registros[7] de representação como base de apoio.

> Estes registros constituem o grau de liberdade que um sujeito pode dispor para objetivar a si mesmo uma idéia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente comunicá-las a um interlocutor. (DUVAL, 1995, p.21)

É necessário entender as razões pelas quais, para Duval (1995), a aprendizagem conceitual implica na coordenação de vários registros de representação, seu pressuposto fundamental.

Para o autor, quanto maior for a facilidade do sujeito em mobilizar diferentes registros de um mesmo objeto matemático, maiores serão suas possibilidades de apreensão deste objeto. Para tanto, é necessário que o sistema semiótico seja um registro de representação onde:

> 1. Ocorra formação de uma representação identificável como uma representação de um registro dado: enunciado de uma frase (compreensível em uma determinada língua natural), composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, escrita de uma fórmula...Essa formulação implica uma seleção de características e de dados no conteúdo a ser representado. Essa seleção se faz em função de unidades e regras de formação que são próprias do registro semiótico no qual a representação é produzida. Nesse sentido a formação de uma representação poderia ser comparada à realização de uma tarefa de descrição. Essa formação deve respeitar regras (gramaticais para língua natural, regras de formação de um sistema formal, restrições de construções para as figuras...). A função das regras é assegurar, em primeiro lugar, as condições de identificação e de reconhecimento da representação e, em segundo lugar, a possibilidade de sua utilização para tratamento. São regras de conformidade, não são regras de produção efetiva por um sujeito. Isto quer dizer **que o conhecimento das regras de conformidade não implica na competência para formar representações, mas somente competência para reconhecê-las**. (DUVAL, 1993, p.41, negritos da pesquisadora)

As regras de conformidade já estão estabelecidas pelo grupo social ao qual o sujeito está subordinado. Não lhe cabe criar uma nova representação, como a língua natural, mas, sim, usá-la. Um exemplo típico no ensino de matemática é o sistema de numeração decimal cuja apropriação requer muito mais do que ler números ou

---

[7] Para Duval (1999), o termo registro foi emprestado de Descartes que utilizou o termo em sua obra *GÉOMÉTRIE* (1637), onde ele distingue a escrita algébrica das curvas de suas representações figurais.

fazer contas. Requer o domínio algumas regras de conformidade já estabelecidas como, por exemplo, ser um sistema agrupado de dez em dez, ser posicional, ser aditivo, ser multiplicativo e ter um algarismo não significativo, o zero, como um ""porta lugar" ou um cardinal" dependendo de que se considere numeração ou sistema de números." (GUNDLACH, 1992, p.14)

Cada registro de representação requer tratamentos específicos sendo que:

> 2. O tratamento de uma representação é a transformação dessa representação no próprio registro onde foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro. A paráfrase e a inferência são as formas de tratamento em língua natural. O cálculo é uma forma de tratamento próprio às estruturas simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional...) (...) Há naturalmente, regras de tratamento próprias de cada registro. Sua natureza e número variam consideravelmente de um registro a outro. (DUVAL, 1993, p.41)

Dependendo do registro de representação adotado para o objeto matemático a ser apreendido, diferente será o custo cognitivo para o sujeito. Como exemplo, o tratamento dispensado a operação 3,2 + 0,25 é diferente do tratamento dispensado à operação equivalente 16/5 + 1/4. Para o sujeito que os utiliza o grau de dificuldade (custo cognitivo) depende do domínio do registro pertinente em um outro sistema de representação A aquisição da compreensão do valor posicional de base dez no que diz respeito aos algoritmos, é questão atribuída ao tratamento.

O domínio de uma forma de tratamento é insuficiente para o sujeito se apropriar do objeto. Um exemplo simples surge quando os alunos trabalham com a localização de números fracionários em uma reta. É muito mais simples para eles marcar 0,6 do que 3/5. Para que isso seja possível, o aluno tem que dominar também a passagem de um sistema a outro, o que Duval (1995) chama de conversão.

> 3. A conversão é a transformação da representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada de um registro em uma representação deste mesmo objeto, desta mesma situação e desta mesma informação num outro registro. As operações que designamos habitualmente pelos termos " tradução", "ilustração", " transposição", "código" etc. são operações que a uma representação de um registro dado faz corresponder uma outra representação de um outro registro. (DUVAL, 1995, p. 40-41)

O quadro seguinte apresenta a classificação dos diferentes registros mobilizáveis numa atividade matemática. (DUVAL, 2003, p.14)

QUADRO 1 - CLASSIFICAÇÃO DOS DIFERENTES REGISTROS MOBILIZÁVEIS NO FUNCIONAMENTO MATEMÁTICO (FAZER MATEMÁTICO, ATIVIDADE MATEMÁTICA)

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	**REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA**
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua Natural Associações verbais (conceituais) Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças... • dedução válida a partir de definição ou de teoremas	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1,2 ou 3) • apreensão operatória e não somente perceptiva • construção com instrumentos
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionaria...) • algébricas • simbólicas (línguas formais) Cálculo	Gráficos cartesianos • mudanças de sistema de coordenadas • Interpolação, extrapolação

Ao analisar o conhecimento matemático pela perspectiva do sistema de produção, o autor justifica que ocorre por duas razões: pelo fato de a atividade matemática mobilizar, simultaneamente, ou alternadamente, muitos sistemas semióticos, seja a língua natural, ou sistemas criados pela necessidade de desenvolvimento da atividade matemática e a passagem de um sistema a outro; para representar um objeto matemático que levanta problemas específicos que não são conceituais.

Ao ensinar matemática, o professor raramente considera a diversidade de registros que fazem parte daquele ato e, freqüentemente, atribui especificamente a um registro a dificuldade dos alunos. ZUFFI (2001)

Para analisar o foco das dificuldades na aprendizagem matemática Duval (1988, 1995, 1998c, 2003) propõe considerar as *transformações* entre os registros de representação, prioritariamente a *conversão*, mudança de um registro a outro e em seguida, o *tratamento*, as mudanças sofridas no próprio registro.

Como o interesse deste estudo enfoca o processo de negociação dos registros de representação semiótica entre a professora e seus alunos, na análise do desenvolvimento dos conhecimentos e da aprendizagem, que dizem respeito aos registros de representação semiótica, três fenômenos parecem estreitamente relacionados e que serão atentamente observados.

O primeiro é o da diversidade de registros possuindo cada um, questões específicas de aprendizagem. O segundo é o da diferenciação entre representante e representado, ou entre forma e conteúdo. O terceiro é o da coordenação entre os diferentes tipos de registros disponíveis, para os quais o sujeito necessita, não só ter conhecimento das regras de correspondência entre eles, mas também dos fenômenos de congruência e não congruência. (DUVAL, 1995, p.21-22)

Tomando como exemplo, as expressões 1 + 1; 4 / 2; 3 – 1; 2 x 1; 10 : 5, $(\sqrt{2})^2$ se referem a um mesmo número, ao mesmo objeto matemático, embora possuam significados operatórios distintos. Um aluno pode reconhecê-lo como 1 + 1 e 3 – 1 e não reconhecê-lo nas formas 10 : 5 ou $(\sqrt{2})^2$.

O reconhecimento da quantidade dois, nessas diversas expressões, permite ao sujeito trocar uma pela outra, sem alterar o seu conteúdo. Dependendo da situação matemática vivenciada, torna-se operatória para o sujeito a partir do momento que ele dispõe e mobiliza esta diversidade de registros de representação, em um curto espaço de tempo.

Ao indagar sobre a existência dos vários registros de representação e no interesse de sua coordenação para o funcionamento do pensamento humano, Duval (1995, 2003) apresenta três possibilidades: a economia de tratamento, a complementaridade de registros e a conceitualização, frutos da coordenação de diferentes registros de representação.

No primeiro caso, a pluralidade de registros permite ao usuário escolher, dentre os diversos registros, os mais econômicos.

Na complementaridade de registros, as formas do registro apresentadas permitem um acesso mais imediato às informações sobre o objeto como, por exemplo, a representação algébrica da parábola $y = x^2 - 5x + 6$, que, também, pode ser representada como $y = (x-3)(x-2)$. Esta forma de representação possibilita conhecer os zeros ou raízes desta parábola mais rapidamente que na representação anterior.

Para Duval (1988, 1995, 2003) dois grandes equívocos ocorrem no ensino da matemática. Um deles é o tratamento, a transformação mais utilizada nos processos de ensino que provoca um enclausuramento (cloisonnement) de registros, fazendo com que o registro utilizado pelo aprendiz seja confundido com o objeto matemático representado.

O outro, faz com que o professor considere os sentidos de uma conversão entre registros como equivalentes, por exemplo, passar de uma equação para um gráfico equivale a passar de um gráfico para uma equação. O quadro seguinte apresenta as representações semióticas, segundo sua teoria. (DUVAL, 2003, p.31).

QUADRO 2 - AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NÃO SÃO INTERNAS NEM EXTERNAS.

MODO FENOMENOLÓGICO DE PRODUÇÃO

<table>
<tr><td rowspan="5">S
I
S
T
E
M
A

D
E

P
R
O
D
U
Ç
Ã
O</td><td></td><td>MENTAL (interna)</td><td colspan="2">MATERIAL (externa)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>ORAL</td><td>VISUAL
(suporte de papel ou tela de computador)</td></tr>
<tr><td></td><td>Produção
para si próprio</td><td>Produção
para os outros</td><td>Produção
para si próprio ou para os outros</td></tr>
<tr><td>SEMIÓTICO
(produção intencional)</td><td>discurso interior
OBJETIVAÇÃO
e funções de tratamento</td><td>Interações verbais
funções de
COMUNICAÇÃO</td><td>Escrita, desenho
funções de
TRATAMENTO
de comunicação e
de objetivação</td></tr>
<tr><td>NATURAL
(produção automática)</td><td>Memória visual ou icônica
função de
objetivação</td><td></td><td></td></tr>
</table>

As representações mentais úteis ou pertinentes em matemática são as representações semióticas interiorizadas em interação com um tratamento de produção externa de representação semiótica, uma vez que, na produção externa, é possível tratar e controlar um número mais elevado de informações que na produção interna. (DUVAL, 2003, p.15)

A partir do pressuposto de que a compreensão de um conceito matemático pelo sujeito necessita da coordenação de, pelo menos, dois registros de representação desse conceito, cabe verificar como se estabelece a congruência e não congruência entre dois registros.

4.2.1 Os Registros de Representação e a Congruência e Não Congruência Semântica

A diferença entre sentido e referência atribuída a Frege (1978) permitiu separar com clareza a *significação*, que depende do registro de descrição escolhido, da *referência*, que, por sua vez, depende dos objetos expressos ou representados.

Duval (1998b, p.7) exemplifica essa distinção em matemática, apresentando as representações 4/2, (1+1), $\sqrt{4}$, cujas formas escritas

> designam um mesmo número, expressões que fazem referência a um mesmo objeto e que não possuem a mesma significação uma vez que não são reveladoras do mesmo domínio de descrição ou do mesmo ponto de vista: a primeira exprime o número em função de propriedades de divisibilidade e razão, a segunda em função da recorrência à unidade.

A distinção introduzida por Frege (1978), que privilegiou o sentido referencial em detrimento do que Duval (1998b, p.7) chamou de "sentido associativo interno (a um domínio, a um registro, a uma teoria ou a um contexto)" e também a contribuição de outros lingüistas,[8] permitiu levantar uma questão de ordem cognitiva: a substituição de uma expressão por outra referencialmente equivalente.

Considerando a apropriação subjetiva do saber matemático, a substituição remete, em primeiro lugar, ao sentido associativo interno, tudo dependendo então do que se denomina de *congruência* ou *não congruência semântica* de expressões a substituir.

---

[8] DRUCOT, O. Dire et ne pas dire. Paris: HERMAN,1972. QUINE,W.V.O. Le mot et la chose. Paris:Flammarion) trad. Dopp, Gochet),1977.

> Duas expressões podem ser sinônimas ou referencialmente equivalentes (elas podem “dizer a mesma coisa”, elas podem ser verdadeiras ou falsas juntas) e não serem semanticamente congruentes: neste caso, há um custo cognitivo importante para a compreensão. (DUVAL, 1988b, p.8)

Para Duval (1995), o custo cognitivo de uma operação depende dos registros utilizados, como por exemplo, ao adicionar 4/2 + ½, pode-se utilizar a forma fracionária 4/2 +1/2 = 5/2 ou a decimal 2,0 + 0,5 = 2,5. No primeiro caso, manteve-se o mesmo registro de representação, a fracionária, no segundo, houve troca do registro anterior para decimal.

Para certos tipos de conversão, os custos cognitivos podem ser maiores ou menores, dependendo da existência ou não da congruência DUVAL (1995).

A passagem de um sistema de representação a outro ocorre espontaneamente, quando eles são congruentes, isto é quando as três condições seguintes são satisfeitas:

- correspondência semântica entre unidades significantes que as constituem;
- mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações;
- converter uma unidade significante da representação de partida em uma só unidade significante na representação de chegada (DUVAL,1995, p.6-7).

Ao tomar como exemplo, a conversão entre uma representação em língua natural falada como “cinco mais três é igual a oito”, as unidades semânticas seriam “cinco”, “mais”, “três”, “igual”, “oito”. A essa ordem corresponderia a representação na escrita matemática respectivamente a “5”, “+”, “3”, “=”, “8” melhor exemplificada no esquema a seguir:

“cinco mais três é igual a oito”

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

5 + 3 = 8

Se uma das condições não for verificada, diz-se que não há congruência entre as representações, e o fato de duas representações mostrarem-se congruentes num sentido de conversão, não implica que o sejam no sentido inverso, como presente na conversão, por exemplo, entre um gráfico e sua representação algébrica.

Portanto, é a presença ou ausência de congruência que torna uma conversão entre representações mais "fácil" ou mais "difícil" de ser apreendida.

Ao passar de um enunciado em língua natural a uma expressão escrita envolvendo variáveis, símbolos de relação ou operações o professor tenta encontrar caminhos mais simples para que essa passagem possibilite a aprendizagem dos alunos. Para assinalar a dificuldade dessa passagem denominada de *não-congruência,* Duval (1988b, 1995) apresenta o seguinte problema:

> Um homem tem 23 anos a mais do que seu filho, 31 a menos que seu pai. A soma da idade das três pessoas é 119 anos. Calcule as idades.
> Designando por x a idade do pai e por y a idade do filho, podemos escrever a primeira equação de dois modos diferentes:
> $x - 23 = y$ a idade do pai menos 23 é igual a idade do filho.
> $x = y +23$ a idade do pai é igual a idade do filho mais 23.
> Observamos logo que a paráfrase das duas equações não é congruente à frase do enunciado: " um pai tem 23 anos a mais do que seu filho". Em compensação, há uma equação que é semanticamente congruente a esta frase, mas não é referencialmente congruente: $x + 23 = y$. Em razão desta congruência, esta equação corre o risco de se impor como a descrição algébrica evidente da frase. (DUVAL, 1988b, p.19)

Situação inversa encontra-se em trabalho de Soares (2002). Pediu-se a crianças de 4ª série que a partir do registro 33:4, colocado no quadro, que inventassem e escrevessem no caderno uma situação a ser resolvida com essa divisão. Um dos alunos criou uma história em que João ia dar a Maria um presente e o problema se resumia no seguinte. "O jogo de panelas custa 33 reais e ele vai pagar em 4 vezes. Quanto João vai pagar em cada prestação?" (SOARES, 2002, p.472) Ao discutirem o problema com a autora, muitos alunos afirmavam que o problema era de "veiz", porque estava escrito no enunciado e defendiam essa posição.

Na perspectiva de Duval, a unidade semântica predominante para a maioria da sala foi a palavra *vezes* que corresponde ao símbolo matemático "x" e se impôs como elemento operacional na resolução dessa situação. A contradição foi discutida pelos alunos com interferência da autora e da professora da sala.

Um problema enfrentado pela substituição é que em matemática nem sempre os elementos a serem substituídos pertencem à mesma rede do sentido associativo interno, como por exemplo, a reta e o ângulo plano, ao provar que os ângulos internos de um triângulo somam 180º. Ao traçar, por um dos vértices, a reta paralela ao lado oposto, esse ato pressupõe que se veja uma reta como um ângulo de 180º, ou seja, "que se possa substituir indiferentemente uma representação pela outra que são semanticamente diferentes." (DUVAL, 1998b, p.15)

O autor propôs uma atividade de substituição a alunos para resolver o seguinte problema: "um ciclista percorre certa distância com a velocidade de 18,4 km por hora. Qual é esta distância, sabendo-se que ele ganhou um quarto de hora rodando a uma velocidade de 20 km por hora?" (DUVAL, 1998b, p.16).

Alguns escreveram $t_1 - t_2 = 1/4$, porém se recusavam a substituir t_1 e t_2 por d/18,4 e por d/20 mesmo com a fórmula à vista. Para eles os dois membros não eram congruentes possivelmente porque de um lado tem-se um símbolo único e de outro uma relação. A igualdade escrita "d/v" não podia ser substituída pelo símbolo "t" pois para eles, d/v não significava tempo. (DUVAL 1998b, p.15)

> ...no registro da escrita simbólica, escrita que permite por excelência o jogo da substituição de expressões ou de símbolos de um para outro, as dificuldades ligadas à não - congruência podem ser importantes. Mas os problemas de congruência ligados à substituição inter-registro apresentam um interesse particular para o ensino geral de matemática....aprender a articular vários registros de representação da informação e aprender a diferenciar diversos tipos de funcionamentos cognitivos poderão ser uma finalidade para o ensino... (DUVAL, 1988b, p.24)

Segundo Guzman-Retamal (1989) a aprendizagem do conceito de função não parece desencadear uma melhor utilização ou interpretação de representações gráficas pela maior parte dos alunos.

Duval (1996) afirma que a aprendizagem das representações gráficas não está na diferenciação entre forma e conteúdo apresentado, mas nas unidades significantes constituintes da forma. É necessária a diferenciação dos valores visuais pertinentes e não pertinentes da figura-forma.

O mesmo autor (1988a, 1995, 1996) propõe um esquema para ilustrar o funcionamento semiótico destas representações.

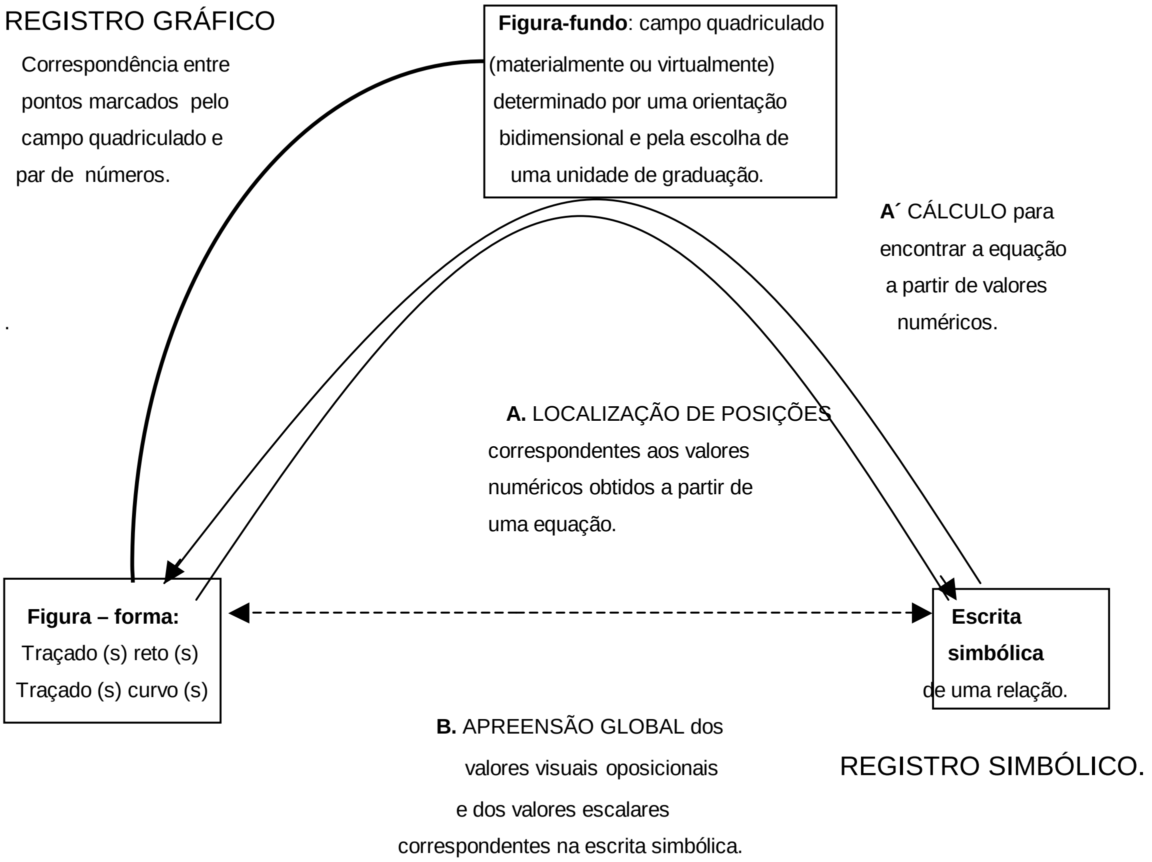
Este funcionamento leva em conta a relação entre figura-fundo, que é o sistema cartesiano e a figura-forma, o traçado da curva, relação esta que é definida por uma regra de codificação.

O registro das representações gráficas permite três tipos de tratamento:

1. Uma **localização de posições por seleção** dos pontos onde a figura – forma coincide com os pontos de intersecção do campo quadriculado. Isto permite uma leitura de pares de números.
2. Uma **apreensão global dos valores visuais da figura – forma** (traço reto,traço curvo, inflexão,...).É esta apreensão perceptiva global que dá à representação gráfica seu poder intuitivo ou heurístico. Este tipo de tratamento é essencialmente qualitativo.
3. Uma **modificação da figura-forma** que transforma a apreensão global dos valores visuais, "jogando" sobre o grau de liberdade que dá a figura-fundo. Podemos modificar a figura – forma não tomando, por exemplo, a mesma unidade de graduação sobre os dois eixos. Podemos igualmente modificar a figura – forma, efetuando um "zoom" sobre uma das partes: isto leva a dividir localmente a unidade de graduação e a tornar o quadriculado mais fino. (DUVAL, 1996, p.6, negritos do autor)

O esquema a seguir expõe uma ampliação da organização anterior, da organização semiótica e do funcionamento das representações gráficas. Esta organização permite três tipos de tratamento (operações internas aos gráficos) e dois tipos de conversão com o registro simbólico. (DUVAL, 2003, p.18)

FIGURA 1 - ESQUEMA DA ORGANIZAÇÃO SEMIÓTICA E DO FUNCIONAMENTO DAS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS.



Observa-se que o primeiro e o terceiro tipo de tratamento dependem de uma regra de codificação, sendo que para o segundo tipo não há tal necessidade. Para este tipo, necessita-se somente unir os pontos localizados para formar a figura-forma.

Estes três tipos de tratamento não devem ser confundidos com conversões, uma vez que estas consistem na passagem, por exemplo, de uma equação ou inequação, a uma figura-forma ou efetuar a passagem inversa como observado nas flechas A, A' e B, sobre o esquema da figura 1.

Dessa forma, para o estudo do esboço de curvas, Duval (1988, 1996) classifica essa atividade de três maneiras diferentes quanto aos procedimentos: 1) por pontos; 2) de extensão de um traçado efetuado; 3) e o de interpretação global das propriedades figurais.

O procedimento 1, esclarece o autor, é o mais encontrado nos livros didáticos. Os pontos são obtidos pela expressão algébrica da função ou de uma tabela colocados no eixo cartesiano para que a curva possa ser traçada seguindo esses pontos. Embora possa haver uma congruência entre um par ordenado e o ponto que caracteriza sua representação cartesiana, o mesmo não se pode dizer da volta, ou seja, da congruência entre os pontos presentes no eixo cartesiano e uma regra matemática equivalente a eles.

Na visualização de um gráfico, o traçado da curva relacionada com os eixos forma a imagem de um objeto descrito pela expressão algébrica que permite a identificação de modificações possíveis em ambas, no gráfico e na expressão algébrica correspondente. Este é o procedimento 3, descrito por DUVAL (1998).

Para o estudo das funções do 1º grau, elaborou a seguinte tabela:

TABELA 1 - COMPARAÇÃO DE ALTERAÇÕES NAS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS E GRÁFICAS.

Variáveis visuais ou qualitativas	Valores	Unidades simbólicas correspondentes
Sentido da inclinação tendo como referência o eixo horizontal	Ascendente Descendente	a>0 ausência do símbolo – a < 0 presença do símbolo –
Partição angular do quadrante tendo como referência o eixo horizontal.	Partição simétrica Ângulo menor (45º) Ângulo maior(45º)	A = 1 não tem coef. escrito a <1 a >1
Posição sobre o eixo vertical	Corta acima Corta abaixo Corta na origem	Acrescenta-se uma constante sinal + Subtrai-se uma constante sinal - Não tem correção aditiva.

A tabela anterior, adaptada de Duval (1999, p.23) e Moretti (2003, p.152), exibe a relação entre as modificações sofridas nas expressões algébricas das funções, concomitantemente às modificações no gráfico.

O coeficiente linear b determina a posição da reta no eixo das ordenadas, conforme a 4ª linha da tabela, enquanto o coeficiente angular ***a*** é responsável pela inclinação que a reta forma com o eixo horizontal, conforme a segunda e terceira linha.

Nas funções polinomiais de grau dois, a correspondência entre os coeficientes não é tão evidente assim, a não ser o termo independente. Uma questão a ser considerada no ensino é como manter a relação da variável visual de representação com a unidade significativa da escrita algébrica para outros tipos de função.

No caso da função quadrática, no ensino fundamental, a parábola é estudada como representação gráfica de uma função polinomial do segundo grau com coeficientes reais da forma $y = ax^2 + bx + c$, sendo **a** diferente de zero.

Moretti (2003, p. 152) sugere uma noção bastante usada em geometria, a translação, tornando o esboço da curva "...bastante próximo do procedimento que permite estabelecer correspondência entre gráfico e expressão algébrica."

Essa transformação favorece a percepção das mudanças nas unidades significativas seja na curva, seja na expressão algébrica correspondente. O autor declara que é muito difícil encontrar nos livros didáticos uma apresentação dos conteúdos que privilegie elementos constitutivos da parábola como, por exemplo, foco e diretriz. O conhecimento desses elementos permite estabelecer uma congruência muito útil para o ensino.

A posição de qualquer parábola em relação aos eixos cartesianos pode ser obtida por movimentos de translação. Pode-se partir de qualquer posição nos eixos cartesianos. Tomem-se então as parábolas com vértices localizados na origem, cuja equação geral reduz-se a $y = ax^2$. Qualquer parábola pode ser vista como um deslocamento desta, cuja equação, após modificações por completamento de quadrados, escrita na forma $y + m = a(x+n)^2$, onde m e n são os deslocamentos nas direções y e x, respectivamente, obedecendo aos sentidos para cima ou para baixo na direção y, se m for positivo ou negativo e para a direita ou esquerda na direção x, se n for positivo ou negativo.

Moretti (2003) fala das vantagens da apresentação do registro algébrico da parábola na forma acima, que minimiza os problemas com a congruência, uma vez que sendo m igual a $– b/2a$ e n igual a $– (b^2 - 4ac)/2 a$, as coordenadas do vértice são facilmente identificadas.

A outra vantagem é que a translação possibilita uma boa explicação para a existência ou não de raízes reais. O discriminante, $-\Delta = -(b^2 - 4ac)$ facilita essa explicação e essa possibilidade é fornecida pelo tratamento dispensado à expressão geral de uma parábola, pois "são as diferentes formas de representação do mesmo objeto matemático que permitem essa possibilidade." MORETTI (2003, p.158)

Duval (1995, 2003) apresenta duas perspectivas do método investigativo. Uma do ponto de vista didático que consiste em preparar uma série de tarefas que priorize os dois sentidos de uma conversão e também uma complementar que contenham casos de congruência e "casos mais ou menos complexos de não-congruência." DUVAL (2003, p.27)

O autor diz que se o objetivo é salientar a compreensão (função cognitiva) de uma determinada noção matemática, pode ser importante que as tarefas sejam constituídas por dois ou três pares de registros sendo que, pelo menos um dos pares, contemple um registro multifuncional (aquele em que os tratamentos não são algoritimizáveis, por ex., a língua natural, figuras geométricas planas ou em perspectiva) e um registro monofuncional (aquele em que os tratamentos são algoritimizáveis, por ex., sistemas de escritas numéricas, algébricas, simbólicas, cálculo e gráficos) e outro com dois registros monofuncionais.

A análise dos tratamentos e das conversões, segundo Duval (1999, 2003), situa-se em domínios cognitivamente diferentes, pois os registros de representação não possuem a mesma natureza. As dificuldades de aprendizagem dependem da natureza do registro apresentado ao aluno. Para o autor, as dificuldades mais sérias de tratamento ocorrem nos registros multifuncionais como é o caso da geometria com as demonstrações feitas em língua natural recorrendo à utilização heurística das figuras. No caso da conversão as maiores dificuldades referem-se à passagem entre registros monofuncional e registro multifuncional.

4.3 PARA ALÉM DA CONTRIBUIÇÃO DE DUVAL

A maneira prática de entender o significado das representações se encontra na base da teoria dos "objetos pessoais e institucionais" proposta por Godino e Batanero (1994) e ampliada por FONT (2000). Estes autores consideram três níveis de significados para os objetos matemáticos: 1) significado pessoal, sistema de práticas pessoais para resolver problemas; 2) significado institucional, sistema de práticas associadas ao campo de problemas da qual emergiu o conteúdo institucional; 3) significado a priori, para um sujeito do ponto de vista da instituição escolar.

Font (2001) destaca que toda a experiência está carregada de teoria e que os conceitos que a formam se apresentam em um contexto intersubjetivo de forma intensiva e exemplifica dizendo:

> Não podemos falar, por exemplo, da derivada sem utilizar representações ostensivas e nem podemos interpretar o ostensivo f ’ (a) sem o conceito de derivada em um ponto. Dito de outra maneira, todo o ato de conhecimento intersubjetivo, mobiliza um conjunto de ostensivos e não ostensivos. Isto não implica que não possamos distinguir o caso particular do caso geral se nos situarmos num jogo de linguagem em que quando se diz que o ostensivo f ’ (a) é muito pequeno se entende que nos interessa o aspecto individual, prescindindo do geral, todavia quando se fala da derivada em um ponto usando f ‘ (a) prescindimos do aspecto particular e nos centramos no aspecto geral. (FONT, 2001, p.28)

Sublinha o autor (2001, p.29-30) que para entender o processo representação em matemática deve-se considerar três classificações básicas: 1) ostensivo (domínio público) X não ostensivo (domínio privado). Esta diferença pode ser tomada no sentido intersubjetivo: se pode mostrar a outro versus não se pode mostrar a outro diretamente, só por meios ostensivos. As palavras pensadas e as lembranças (símbolos mentais) se apresentam diretamente à consciência, mas não são ostensivos. Isto leva à diferença entre 2) propriamente X impropriamente. Esta diferença deve ser tomada como: se apresenta diretamente à consciência (propriamente) versus se apresenta indiretamente à consciência (impropriamente). A outra diferença básica é: 3) extensivo X intensivo (exemplar/ tipo).

Estas três classificações atuam quando, por exemplo, em um livro vê-se f (x). Por um lado é ostensivo e se apresenta diretamente à consciência. Por outro lado, dependendo o jogo de linguagem utilizada, se pode considerar como um exemplo de função (extensivo) ou a classe de funções (intensivo) ou como um signo que está no lugar de “algo” (a classe de funções ou a função particular) que está presente impropriamente.

O objeto matemático apresenta-se mediante diferentes representações que ajudam a produzir diferentes sentidos, entendidas por Font (2005) como significado parcial, isto é, um subconjunto (sentido), um sistema de práticas na qual o objeto é determinante (significado).

Para construir o significado, o autor reflete sobre o papel desempenhado pelo contexto e contextualização.

Para o termo contexto, Font (2005, p.2) diz haver dois usos: um deles considera o contexto como um exemplo particular de um objeto matemático; o outro, consiste em dar mais detalhes sobre um caso particular. Sublinha que dos dois usos, o primeiro é o mais importante, pois a relação entre exemplar e tipo, entre concreto e abstrato ou entre extensivo e intensivo, é fundamental para o ensino-aprendizagem de matemática.

O termo *problemas contextualizados* é definido como problemas que "simulam situações do mundo real". (FONT 2005, p.2)

Das investigações que se tem preocupado pela introdução de problemas contextualizados no currículo, pode-se citar a contribuição do projeto " Realistic Mathematics Education" desenvolvido no Instituto Freudenthal, onde o enfoque de ensino-aprendizagem de matemática concebe que saber matemática é fazer matemática, o qual comporta entre outros aspectos, a resolução de problemas da vida cotidiana.

Conforme Font (2005, p.4), os problemas que mais interessam a investigação didática têm sido os problemas de *contexto evocado*, que são situações ou problemas matemáticos propostos pelo professor em sala de aula e que permitem imaginar um marco ou situação onde se dá esse fato.

Estes problemas contextualizados, segundo o autor, podem ser classificados em dois pólos segundo os processos necessários às suas resoluções: os que são propostos para ativar processos complexos de modelização e os que teriam como objetivo a aplicação de conceitos matemáticos previamente estudados. A maioria dos problemas contextualizados no âmbito escolar estariam entre esses dois pólos e, dependendo do momento a ser proposto aos alunos, estaria mais perto de um ou outro pólo.

Ao propor problemas contextualizados no início de um tema ou unidade didática, com o objetivo de construir o objeto matemático a ser estudado, também deve-se apresentar "situações do mundo real que o aluno pode resolver com seus conhecimentos prévios, matemáticos ou não." (FONT, 2005, p.4)

A esta categoria de problema o autor denomina de *problemas de contexto evocado introdutórios* (idem, p.4), que podem ser mais ou menos complexos, dependendo da modelização que se pretende gerar.

Quando se pensa em contexto e contextualização outra questão importante é levantada: a construção do significado.

Do ponto de vista pragmático se considera que o elemento chave para a sua construção é o uso. Daí advir a definição do significado como um conjunto de práticas.

O fato de um objeto matemático emergir de um sistema de práticas que favorecem a resolução de determinados problemas permite, a cada nova situação, resolver tipos diferentes de problemas, utilizar novas representações, etc, gerando com o passar do tempo novos conjuntos de práticas (sentidos) que ampliam o significado do objeto (FONT, 2005, p.6)

Do ponto de vista ontosemiótico (Godino, 2000), entende-se que o aluno compreendeu determinado objeto matemático quando o usa de maneira competente em diversas práticas, portanto, essa visão pragmática do significado requer que se focalize o interesse em práticas públicas e deixar em segundo plano o interesse pelos processos mentais dos alunos.

> O significado entendido dessa maneira se pode parcelar em diferentes aulas de práticas mais especificas que são utilizadas em determinado contexto e com um determinado tipo de notação produzindo um determinado sentido. (FONT, 2005,p.6)

Uma mudança de notação pode desencadear um sentido diferente, ou seja, um subconjunto de práticas que pode facilitar ou dificultar a resolução da atividade. Na produção de um novo sentido os processos analógicos e metafóricos desempenham um papel importante. (FONT,2005,p.6)

Enfim, na perspectiva adotada pelo autor, os objetos matemáticos são representados por diferentes notações que ajudam a produzir significados distintos e portanto, para compreender um objeto matemático e usá-lo de forma competente, é necessário que se utilize notações diferentes e se converta uma representação em outra.

Assumir a trajetória didática de um objeto matemático, nessa perspectiva, é ter como critério que o conjunto de práticas implementadas seja o mais representativo possível do sistema de práticas, que são o significado do objeto.

Portanto, o professor ao adotar esse ponto de vista deve apresentar aos alunos "uma amostra de contextos que permita construir uma amostra representativa dos diferentes sentidos do objeto." (FONT, 2005, p.6)

5. O MÉTODO

A pesquisa centrou-se em uma observação natural do ambiente escolar em que foram selecionadas aulas sobre o ensino de funções. O objetivo era discutir e analisar, de forma qualitativa, os tratamentos e conversões de diferentes registros de representações de funções realizadas pela professora e seus alunos.

O local escolhido para a realização da pesquisa foi uma escola pública da periferia de Curitiba. O estabelecimento possui, além da diretora, duas supervisoras e duas coordenadoras, que trabalham aos pares nos períodos da manhã e tarde.

Os níveis atendidos vão desde a educação infantil até a 8ª série, com aproximadamente 1060 alunos do ensino fundamental, distribuídos em 15 turmas pela manhã: 4 turmas de 5ª série, 4 de 6ª série, 4 de 7ª série e 3 de 8ª série, e mais uma sala de pré-escola.

À tarde são 14 turmas: 4 turmas de ciclo I - 1ª etapa, 4 de ciclo I - 2ª etapa, 3 de ciclo II - 1ª etapa, 3 de ciclo II - 2ª etapa e 1 de pré-escola.

Ainda no mesmo período funcionam: uma classe especial para alunos, do ciclo I e II das duas etapas, com dificuldades de aprendizagem; uma sala de recursos, com uma turma pela manhã e outra à tarde, para alunos do ensino fundamental com deficiência de aprendizagem matriculados ou não na escola; um laboratório de ciências e um de informática com 18 micros. O laboratório de informática é acessível a todos os alunos ou a pessoas da comunidade, desde que participem de projetos da escola.

Por ser uma abordagem qualitativa, a pesquisadora adotou a observação não participante em sala de aula, para tentar compreender melhor os atores e seus comportamentos (BRUYNE, HERMAN e SCHOUTHEETE, 1991). Focou a análise dos diálogos entre a professora e seus alunos e os registros utilizados por eles, considerando os tratamentos e conversões (DUVAL, 1995).

Para iniciar o estudo, a pesquisadora adotou os seguintes procedimentos:

- Escolha da professora

A professora escolhida tinha como características:

- experiência no magistério – mais de 20 anos em sala de aula;
- reconhecimento profissional pela qualidade do trabalho desenvolvido. Sua prática pedagógica é reconhecida como excelente por seus pares, pedagogos e diretores de escolas;
- atualização e responsabilidade por sua profissionalização. Participou como docente de vários projetos de formação continuada de professores de matemática no âmbito estadual e municipal;
- envolvimento profissional em outros projetos além das atividades de sala de aula. É uma das autoras do livro didático de matemática adotado pela escola, e por ela utilizado.

➢ Escolha da turma

A turma escolhida era composta de 20 meninas e 19 meninos. Os alunos tinham como características:

- faixa etária entre 14 anos e 3 meses e 16 anos e 1 mês.
- renda familiar de 3 a 5 salários mínimos.
- Cursarem a 8ª série pela primeira vez.

➢ Escolha das aulas

Após escolher a turma, a pesquisadora verificou o horário das aulas de matemática. Eram cinco aulas semanais: uma na segunda-feira, uma na terça-feira, uma na quarta-feira e duas na sexta-feira. A aula de quarta-feira, de geometria, não foi assistida, pois a pesquisadora pretendia observar as aulas sobre funções.

Portanto, na aproximação houve a caracterização da escola, a escolha da professora e da turma e a definição das aulas a serem observadas. A aproximação constou de um contato telefônico e duas idas à escola:

- primeiro, para uma conversa informal da pesquisadora com a professora para conhecer o calendário escolar e horário das aulas e para apresentar à diretora da escola uma carta solicitando permissão para realizar o estudo pretendido pela pesquisadora;
- segundo, para traçar o perfil profissional da professora e ser apresentada aos seus alunos.

Para identificar como a professora mobilizava as representações do conteúdo matemático funções, realizaram-se os seguintes procedimentos:

a) Análise do conteúdo funções no livro didático adotado e nos de apoio;
b) Acompanhamento das aulas sobre funções.

A pesquisadora assistiu às aulas sobre funções (47) ministradas em 2004. Em todas as aulas a professora seguiu à risca o livro didático usado. Os outros livros usados serviram como referência para organizar as provas aplicadas aos alunos.

A maioria dos alunos portava calculadora, e foi utilizada em três aulas observadas.

5.1 PROCEDIMENTOS DE COLETA, REGISTRO E TRATAMENTO DE DADOS

Os dados obtidos foram coletados, registrados e tratados da seguinte maneira em cada momento.

5.1.1 Aproximação

A pesquisadora entrou em contato telefônico com a professora indicada para saber se ela se disporia a participar desse trabalho de investigação.

Ao conhecer as razões da escolha, os objetivos da pesquisa e o conteúdo enfocado, a professora se colocou à disposição e convidou a pesquisadora para ir à escola.

Na visita à escola, a pesquisadora conheceu a professora que, em conversas informais, sugeriu o acompanhamento de uma turma de suas três oitavas séries, com alunos mais participativos além de haverem sido, em sua maioria, seus alunos na 7ª série.

Ao final do encontro, a pesquisadora combinou seu retorno à escola para uma entrevista.

Portanto, na fase de aproximação foram utilizadas as seguintes técnicas:

a) conversa informal, necessária para conhecer a professora, colocá-la a par dos objetivos da pesquisa e pedir permissão para acompanhá-la durante o desenvolvimento do conteúdo selecionado;

b) entrevista, que constou de perguntas abertas sobre formação, tempo de serviço, experiência profissional, conteúdo de matemática que mais gostava de trabalhar e como ensinava o conteúdo escolhido pela pesquisadora.

A entrevista foi gravada e, posteriormente, transcrita integralmente. Usou-se reticências para pausas e observações entre parênteses para caracterizar os momentos que não apareciam na gravação.

5.1.2 Acompanhamento

Esta fase constou de duas etapas concomitantes: análise do livro didático adotado, os de apoio e observação de aulas.

Durante o período de observação, a pesquisadora também analisou o conteúdo funções nos livros usados pela professora.

Para a análise deste material apoiou-se a referência teórica de Duval (1995, 2003) para organizar e categorizar os dados. Utilizou-se dos seguintes instrumentos:

a) livros didáticos: o adotado e os de apoio.

O livro adotado é dividido em cinco unidades, respectivamente: números, contagem e registros; construindo fórmulas; semelhança e proporcionalidade; potências e raízes; medindo comprimentos e áreas.

A pesquisadora analisou a unidade “Construindo fórmulas”, subdividida em: “Buscando escritas genéricas”; “Conceituando funções”; “Função do 1º grau e funções constantes”; e “Função do 2º grau”.

Nos dois livros usados como apoio e no adotado a pesquisadora analisou como os autores trataram e organizaram os temas relativos ao conteúdo matemático: funções.

Os dados foram organizados em forma de tabelas, e tratados a partir da identificação das múltiplas representações apresentadas nesses materiais.

b) relatórios de observações das aulas sobre funções.

Após a entrevista, a pesquisadora iniciou as observações em sala de aula e a elaboração dos respectivos relatórios. Presenciou o trabalho com funções desde a primeira aula, cujo tema foi: buscando escritas genéricas.

A pesquisadora colocou-se ao fundo da sala, numa cadeira previamente colocada pelos próprios alunos, para não interferir no desenvolvimento do trabalho.

No início do acompanhamento, a pesquisadora anotou a fala dos alunos e da professora e copiou os registros do quadro negro.

Na primeira semana e parte da segunda, procurou anotar o que ocorria durante as aulas, como: a fala da professora, a argumentação dos alunos e as escritas feitas no quadro-negro pela professora e alunos. Tudo era transcrito no mesmo dia.

As transcrições eram mostradas e estavam à disposição da professora para que ela opinasse se desejasse, conforme o combinado no contato inicial.

A pesquisadora percebeu que só as anotações da observação das aulas, seriam insuficientes para captar as formas de intervenção da professora ao auxiliar seus alunos. Optou, então, a partir da 7ª aula, por gravar as aulas.

Ao final da 7ª aula a pesquisadora pediu à professora e aos alunos para usar o gravador na aula seguinte. A professora embora não houvesse tido solicitação semelhante anteriormente, não apresentou objeções. Em seguida perguntou aos alunos se eles se importariam, lembrando que tudo ficaria gravado, e eles disseram não haver problemas.

A pesquisadora manteve, além disso, a prática de anotar durante a aula, os registros feitos pela professora e alunos no quadro negro, com identificação dos autores.

Outra dificuldade percebida nas primeiras anotações e transcrições foi identificar quem falava. A pesquisadora não conhecia os alunos e perguntava, a um aluno próximo, o nome do colega que falava ou resolvia alguma situação proposta no quadro.

Portanto, as informações relativas às atividades de transformação dos registros de representação, coletadas no diálogo da professora com seus alunos, foram registradas do seguinte modo:

- anotações em aula e relatório do diálogo da professora com os alunos;

- anotações do que foi escrito no quadro negro pela professora e alunos durante as aulas.

As falas e os registros escritos dos protagonistas foram identificados da seguinte forma: professora (P), alunos que respondem simultaneamente (As), aluno identificado (por três letras de seus nomes) e aluno não identificado (A1, A2,...).

Das quarenta e sete aulas acompanhadas, a pesquisadora transcreveu 20 e optou por quatro delas com os seguintes critérios:

- as duas primeiras aulas sobre “ buscando escritas genéricas” - por apresentarem uma variedade maior de tratamentos e conversões;
- uma sobre função de primeiro grau, a 25ª aula observada - por contemplar um sentido de conversão que Duval (1995, 2003) diz ser menos utilizado em situações de ensino: a passagem de um gráfico para sua representação algébrica;
- uma sobre função de segundo grau, a 37ª aula observada – por utilizar-se a calculadora e contemplar a conversão escrita algébrica em gráfico.

A conversão nos dois sentidos, por exemplo, passagem de tabela para escrita algébrica e vice-versa, não foi observada numa mesma aula. Então, a pesquisadora selecionou fragmentos de outras aulas que contemplassem o sentido contrário de conversões encontradas nas aulas escolhidas:

- para as duas primeiras aulas (conversão de figura para escrita algébrica), utilizou-se de fragmentos da 4ª e 5ª observação – devido ocorrer a conversão de fórmula para seqüência numérica e desta para uma representação com desenhos.
- para a aula de função de 1º grau (conversão de gráfico em tabela), utilizou-se de fragmentos da 18ª aula - devido ocorrer a conversão de tabela para gráfico.
- para a aula de função do 2º grau somente uma aula foi utilizada pois em outras aulas não ocorreu conversão de gráfico para escrita algébrica em funções do 2º grau.

5.2 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DOS DADOS

5.2.1 Aproximação

Para proceder à análise dos dados a pesquisadora considerou as seguintes informações obtidas na entrevista com a professora:

- perfil profissional;
- escolha de recursos didáticos e organização do conteúdo;
- relação entre o conteúdo que mais aprecia e o ensino de funções;
- pontos e passagens mais difíceis no estudo de funções.

5.2.2 Acompanhamento

Neste momento a pesquisadora analisou o modo como o conteúdo das funções era apresentado nos livros didáticos e nas aulas selecionadas. Apresenta-se essa análise em:

a) o que apresentam os livros didáticos.

Apoiada na perspectiva de Duval (1995, 2003), a pesquisadora destacou o modo como o conteúdo funções é apresentado nos livros didáticos identificando e quantificando as formas com que os autores realizam os tratamentos e conversões. Para quantificar os tratamentos e conversões em cada exercício dos livros selecionados procedeu da seguinte forma:

- em exercícios com solicitações diretas (por exemplo: achar o gráfico de uma função a partir do registro algébrico com sub-itens a, b, c, d) eram contabilizadas quatro conversões de escrita algébrica em gráfico. O mesmo procedimento foi adotado para os tratamentos;
- em exercícios em que era apresentada uma situação seguida de solicitações a,b,c,d etc: em cada um deles era identificada e quantificada a conversão ou tratamento (por exemplo, construir uma tabela e a seguir construir uma fórmula a partir da tabela anterior considerou-se conversão de tabela em escrita algébrica).

b) O diálogo professora-alunos sobre representações de funções nas aulas selecionadas.

Na análise das aulas escolhidas, a pesquisadora usou o termo representações intermediárias[9] para as representações não formais utilizadas pela professora. Os outros termos empregados são os mesmos que Duval (1995, 2003) usa em sua teoria.

Para analisar o diálogo entre a professora e alunos nas aulas selecionadas, a pesquisadora destacou momentos em que a professora:

- utilizou representações intermediárias e representações formais na condução dos tratamentos e/ou conversões dos registros;
- realizou conversão entre registros nos dois sentidos;

[9] Duval chama a atenção para a complementaridade de registros necessários à passagem de um registro a outro que Damm (1999, p.149) denomina de representação intermediária.

6 RESULTADOS

Esta parte da investigação apresenta os resultados da pesquisa. Os dados obtidos na aproximação e acompanhamento são descritos e analisados a seguir.

6.1 - APROXIMAÇÃO

Após o contato inicial com a professora, a pesquisadora realizou a entrevista, na data marcada, em uma sala cedida pela supervisão da escola. Foi uma entrevista semi-estruturada, com o intuito de delinear o perfil profissional da professora e se inteirar de suas formas de organização e disponibilização do conteúdo matemático aos alunos.

6.1.1. Perfil Profissional

O início de sua formação acadêmica diferencia a professora da maioria dos futuros professores uma vez que sua mãe já atuava como professora e pode tê-la incentivado a seguir a profissão após a graduação.

> ... terminei o meu curso de matemática em ...setenta... e oito e de lá para cá eu venho...no início trabalhando com minha mãe que fazia parte do grupo do NEDEM[10]. Ela produzia materiais didáticos e trabalhava com cursos e já me colocava junto pra fazer esse trabalho apesar de eu ter tido muito pouca experiência com sala de aula, mas ela me levava junto pra fazer as atividades com as professoras e tudo, sabe? Pra coordenar os trabalhos porque a gente sabia um pouco mais de matemática do que elas, mas não a metodologia pra sala de aula...

A professora ressalta que sua qualificação profissional é menor frente às necessidades do mercado de trabalho, embora os profissionais da área de educação matemática reconheçam o seu valor mesmo sem haver feito pós-graduação. Porém, ela assume que o filtro do mercado de trabalho atual exige maior qualificação.

---

[10] O Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino de Matemática -NEDEM- do Estado do Paraná foi formado em 1962, após o IV Congresso Brasileiro de Ensino de Matemática, realizado em julho do mesmo ano. Para maiores informações, consultar “Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino de Matemática –NEDEM” “Não é difícil ensinar matemática” “Historia Oral e Temática” dissertação de Mestrado em Educação de Helenice Fernandes Seara ,UFPR,Curitiba, 2005.

> ... não fiz especialização, não fiz pós-graduação. Procurei muitas vezes a universidade para poder fazer cursos e tudo, mas ela está recheada de amigos meus lá, sabe, então eles me convidam, até mesmo para dar curso. Aqui em Curitiba a gente não tinha mestrado em educação matemática, agora tem e tem bastante gente, e boa e tal, então... melhorou bastante toda essa questão e se eu não correr atrás agora disso, eu não tenho mercado de trabalho mesmo.

O exercício de sua profissão sempre esteve situado em um mesmo grau de ensino[11]. Trabalhou em escola pública e privada em diferentes séries; lecionou, além das disciplinas de matemática, a de desenho geométrico por vários anos.

O fato de trabalhar, simultaneamente, em escola privada e pública permitiu destacar as vantagens e as desvantagens nos ambientes de trabalho.

Atualmente leciona somente em escola pública e assume, de forma explícita, a preferência pela oitava série. Da escola privada[12], ressalta que:

> ...turmas bem pequenas de vinte alunos no máximo dava para a gente ter um diálogo, uma troca bem grande com eles..

Do trabalho em instituições públicas municipais destaca:

> ... na prefeitura os cursos eram bastante interessantes (...) pra que a gente pudesse se atualizar e aí eu fui aprendendo outras coisas e modificando a minha prática.

Reconhece que as experiências adquiridas nos grupos de trabalho foram importantes para sua formação e desabafa sobre a atual falta de grupos de discussão e suas conseqüências, que já se manifestam para o processo escolar.

> ... nós tínhamos ótimos grupos de discussão, nós fizemos grupo de estudo, fizemos com os professores da prefeitura, junto com o grupo de currículo, então eram ótimos os orientadores da gente e... a gente vem perdendo isso, cada ano está pior, o ensino está piorando, a gente percebe na escola da gente, né, a dificuldade dessas crianças em acompanhar...

Participou também de projetos educacionais em Educação de Jovens e Adultos (EJA).

---

[11] Com 1ª a 4ª séries por um período de 6 anos, de 5ª a 8ª séries por aproximadamente um período de 10 anos e até a atualidade com 7ª e 8ª séries, conforme relato na entrevista.

[12] Essa escola realizava um trabalho pedagógico diferenciado e por isso comportava um número menor de alunos por turma.

> ...fomos trabalhar com o EJA. Fizemos um trabalho bem bom, (...) porque trabalhamos com os funcionários, e os funcionários tinham uma hora de trabalho (...) uma hora de folga do trabalho para poder dar continuidade aos estudos e mais uma hora complementar todos os dias. Aí eu me apaixonei pelo EJA. Ali eu fui fazer mais tarde um projeto na universidade... com a professora...que me escapou o nome também e...lá eu trabalhei três anos com o EJA...currículo...

A autoria de livros didáticos foi conseqüência de sua história profissional permeada por convites de participação em grupos de estudo e equipes pedagógicas.

> ...depois desse tempo (trabalho com o EJA) a gente trabalhou bastante (...) nós fizemos também paralelamente um material para-didático e as produções foram crescendo. Depois eu fiz..., além de fazer parte desses dois currículos, eu ainda fui escrever livro de primeira a quarta na editora Módulo e em noventa e cinco nós trabalhávamos com as prefeituras e material alternativo, que naquela época o governo ainda não comprava, se não me engano, livro didático para todo o mundo. Eles tinham essa alternativa de pegar o dinheiro e comprar um material pra eles mesmos... próprio pra eles.Então era um veio que os editores conseguiram lidar e ganhar dinheiro naquela época e a gente aproveitou pra colocar tudo o que a gente sabia.Eles escolheram a gente a dedo e...puseram para trabalhar com esses materiais .A gente ia até as cidades trabalhar de dois em dois meses com os professores. E eles foram contribuindo para que o material fosse ficando melhor e a gente transformou isso em livro didático.

Revela ainda o motivo do prêmio de seu trabalho e o de colegas, o qual foi laureado.

> Em noventa e seis a gente ganhou o prêmio de melhor livro de matemática e ganhamos o projeto nordeste. Foi o livro que vendeu em todo o nordeste. (...) era um livro que estava pretendendo um trabalho com geometria, números e medidas... bem entrosado.

6.1.2 Escolha de Recursos Didáticos e Organização do Conteúdo

Na fase do acompanhamento, a pesquisadora presenciou a preocupação da professora pela escolha do livro didático para o ano seguinte. O livro de sua autoria fora preterido pelos colegas, segundo ela, por ser “difícil de trabalhar”.

A entrevista foi anterior à discussão da escolha dos livros didáticos para o ano seguinte. A professora antecipou a tendência de seus colegas escolherem outro livro, justificando que alguns usavam inadequadamente aquele que ela havia produzido, e escolhiam livros para facilitar seus trabalhos sem se preocupar com o encaminhamento do conteúdo.

A pesquisadora não investigou com a supervisão as possíveis causas da troca do livro didático pelos professores de matemática.

Intrinsecamente ligada à escolha do livro didático, está a preocupação com a qualidade do conteúdo a ensinar conforme desabafo da professora:

> ... a dificuldade dos professores de usar um livro didático. As escolhas têm sido indicativo de que a coisa está pior porque eles querem voltar atrás... nos livros que fazem um trabalho bem tradicional, bem mecânico, vamos dizer assim. Nem é um tradicional bom. É um tradicional ruim, de repetição, de memorização pra que eles (professores) tenham algum resultado. (com a aprendizagem dos alunos)

A professora explicou a organização do conteúdo do livro de sua autoria e o desconhecimento dos colegas:

> ...e agora essa versão pra esse ano (de seu livro didático) que os professores estão escolhendo, ela se modificou um pouco, não muito. A gente se dedicou mais ao trabalho do professor, com as recomendações, com as sugestões, com outros exercícios como sugestão... e modificação de alguma seqüência que a gente viu que não estava muito bem [...] mas aumentar o número de exercícios que era o que os professores pediram, a gente não fez porque a gente não acredita que ...a quantidade vai dar conta. [...] eles não percebem. [...] uma professora da minha escola mesmo ela não percebeu que aquela construção de fórmula junto com a geometria já era um trabalho com polinômios e que lá adiante, lá no terceiro, quarto bimestre é que ela ia fechar aquilo com um pouco mais de formalização.

Além do livro, ela considera o *software* outro recurso didático importante à compreensão das representações de funções:

> Então, eu acho que o computador vai permitir essa rapidez pra que a gente possa observar outras coisas e não somente uma construção única de gráfico. Não, você faz vários e daí você percebe até um movimento, das retas ou então posição das parábolas... ele que vai permitir essa ... agilidade...que se você mudar, por exemplo, a posição da reta, se puxar como um Cabri...é...põe a mãozinha lá e ela vai puxando, arrastando a reta e aquilo vai mostrando a modificação das funções. (na representação algébrica) Isso eu não vi nesse programa, mas seria muito interessante se tivesse um. Deve ter, com certeza, mas eu não tive contato com esse. Seria excelente se o aluno visse isso tudo.

Ela não descarta a utilização de um *software* ideal, que permita ao aluno perceber as modificações em duas representações diferentes simultaneamente, e descreve o encaminhamento metodológico necessário para que isso aconteça sem o *software*:

> Mas eu acho que nesse primeiro momento é importante que ele faça uma por uma e aí tire a conclusão a respeito disso, e aí se tiver esse outro programa que funcione com essa movimentação, ele ia enxergar mesmo aquilo se modificando e ia ficar muito interessante.

Durante as aulas acompanhadas pela pesquisadora, não foi utilizado o laboratório de informática da escola.

6.1.3 Relação entre o Conteúdo que mais Aprecia e o Ensino de Funções

A professora é direta ao expor sua preferência:

> ...a matéria que eu mais gosto mesmo é geometria.

Esta preferência influencia na forma de organizar o conhecimento como, por exemplo, a relação entre geometria e o conteúdo funções:

> ...as questões algébricas... eu prefiro... traduzi-las geometricamente para poder raciocinar,

A marca geométrica é forte no livro e ela explica o porquê:

> ... a gente procurou caminhar junto com geometria, fez uma escolha pra que a gente pudesse trabalhar bastante matemática e usar essa questão da álgebra na matemática , [...] tentando fazer com que o aluno...vá... lidando com essa generalização que é muito difícil pra eles [...] se não for em cima de uma situação eles têm muitas dificuldades.

A sua paixão pela geometria percorre a organização do conteúdo sobre a escrita de fórmulas:

> [...] e para escrever fórmulas, eu uso mesmo a representação geométrica e... a parte gráfica também ... ela é visual, eu sou muito visual.

6.1.4 Pontos e passagens mais difíceis no estudo de funções

A experiência da professora permite que a mesma detecte a dificuldade dos alunos com o novo conteúdo, e ao mesmo tempo, revela as possibilidades de explorar as situações interessantes:

> ...eu acho que a parte mais difícil é a de organizar as fórmulas. Quando você repete um mesmo raciocínio e aquilo se transforma num... numa escrita de um ... uma maneira geral de se pensar, né, numa fórmula ,numa equação geral. Então essa parte é a que mais me atrai porque as escritas são... muito diferentes uma das outras. É uma parte bem criativa...

Os anos de magistério lhe possibilitam atestar que a maior facilidade de aprendizagem no conteúdo funções está na construção gráfica. Justifica:

> ...eles têm compreendido bem quando chega nesse ponto porque já fizemos uma passagem bem lenta de montagem de tabelas, construção de fórmulas e aí a representação no plano cartesiano fica mais claro um pouco...esse é um momento na representação dos gráficos que eles têm tido bastante facilidade.

Em sua opinião, gostaria de contar com um software para que os alunos possam compreender melhor a relação gráfico x escrita algébrica de funções:

> quando eu ensinava geometria... desenho geométrico e já usei o Cabri. Ele trabalhava com a questão do movimento. Isso era muito importante, dá um dinamismo bem grande ao conteúdo, você vê aquilo ali já traçado, representado e aí quando eu vi esse trabalho de gráficos é... representação de funções em gráficos, num curso, eu fiquei bem entusiasmada porque os professores também se encantaram com a representação porque é dinâmica, é rápida. Depois que você aprendeu isso, ela é uma ferramenta pra você visualizar. Então vai muito mais rápido e você pode tirar conclusões muito rapidamente, porque ele te apresenta... as várias ... soluções ali que você tem e você visualiza todos aqueles gráficos e tira conclusões deles. Então, eu acho que o computador vai permitir essa rapidez pra que a gente possa observar outras coisas e não somente uma construção única de gráfico.

6.2 – ACOMPANHAMENTO

Esta parte apresenta os resultados da análise do conteúdo funções nos livros didáticos usados pela professora e o diálogo professor/alunos/funções nas aulas selecionadas. Os dados obtidos são descritos e analisados a seguir:

6.2.1 O que apresentam os Livros Didáticos

Nos livros analisados a pesquisadora observa as formas como os autores apresentam os tratamentos e conversões da função de 1º e de 2º grau.

Para este autor, os tratamentos dos registros têm mais espaço nos livros didáticos que as conversões e, quando estas existem, são priorizadas em apenas um sentido. Por exemplo, enfatiza-se mais a conversão de escrita algébrica em gráfico do que a conversão de gráfico em escrita algébrica.

Além do livro de autoria da professora e colegas, utilizado como livro didático pelos alunos, a pesquisadora fez a análise de mais dois livros didáticos Imenes e Lellis (1998) e Bigode (2000) usados pela professora como fontes de consulta na preparação de instrumentos de avaliação.

No livro de sua autoria, o conteúdo “funções” encontra-se na unidade 2 denominada: “Construindo fórmulas”. O primeiro assunto apresentado da página 50 a 55, chama-se “Buscando escritas genéricas”.

No livro do professor as autoras justificam: “Tendo em vista aprofundar o conceito de generalização, voltamos a realizar o trabalho com escritas genéricas, já iniciado na 7ª série.” (ISOLANI et al, 2002, p.50)

Elas exploram seqüências numéricas:

> Estaremos abordando seqüências em que um elemento é obtido a partir do anterior, com o acréscimo de algum detalhe e que, por apresentarem regularidades, podem ser traduzidas para linguagem matemática, através de uma fórmula. (ISOLANI et al, 2002, p.50)

As autoras sugerem que:

> Nas atividades propostas, oriente seus alunos a analisarem o que varia e o que permanece em cada um dos elementos da seqüência. É conveniente, sempre que possível, utilizar material manipulativo, desenhos e tabelas; estas formas de registro possibilitam identificar com mais facilidade o que há de comum entre os elementos e, assim, perceber regularidades. (ISOLANI et al, 2002, p.50)

Destacam que as passagens nem sempre são fáceis e advertem o professor:

> Escrever a sentença matemática, a fórmula que mostra de forma genérica a seqüência, nem sempre é fácil. Exige que o aluno investigue relações entre a posição e a forma de cada elemento, perceba regularidades, sistematize suas observações e redija utilizando símbolos da linguagem matemática. Esteja atenta a esses fatos e, na medida do necessário, interfira, incentivando discussões. (ISOLANI et al, 2002, p.50)

Entre, “Buscando escritas genéricas” e “Funções e Equações”, apresentado da página 66 a 125, situa-se outro assunto denominado, “Pitágoras e um triângulo muito especial”, não analisado por não ser específico a esta investigação.

A unidade “Funções e Equações” subdivide-se em: “Conceituando funções”; “Função do 1º grau e Funções constantes”; “Função do 2º grau”; “Equações do 2º grau”; “Resolvendo mais equações”; e “Sistemas de Equações”.

Neste trabalho foram analisados os três primeiros temas, apresentados da página 66 a 100, por serem utilizados pela professora nas aulas assistidas.

No início das orientações as autoras esclarecem os professores ou leitores:

> O conceito de função é utilizado pelos alunos e alunas desde o início de sua vida escolar, muitas vezes, de forma intuitiva. Consideramos que é um conceito de grande utilidade em Matemática e nas demais ciências e, por isso, é necessário sistematizar algumas idéias referentes ao assunto, mesmo que ele não conste em alguns currículos. (ISOLANI et al, 2002, p.66)

Ressaltam ainda:

> Neste capítulo, vamos enfocá-lo enquanto relação de dependência entre grandezas, sem a preocupação do uso de uma linguagem formal de conjuntos, mas como uma continuidade do que já foi visto nas séries anteriores. O significado da palavra função, com sentido de dependência, já pode ser do conhecimento da classe. (ISOLANI et al, 2002, p.66)

Orientam:

> Explore os exemplos que eles podem dar. Procure retomar o conceito de grandezas direta e inversamente proporcionais, sugerindo que os alunos criem e discutam alguns exemplos. Reforce a importância do registro dos dados em tabelas, pois observando esses cálculos, é possível analisar o que permanece e o que muda auxiliando a escrita de uma fórmula. Assim retoma-se também a noção de *variável*. É importante também, procurar discutir situações em que não há dependência – como o peso de uma pessoa em relação a sua idade - para que fique claro que nem sempre uma grandeza varia em função de outra. (ISOLANI et al, 2002, p.66)

E finalizam, destacando:

> Como nesse momento, estamos trabalhando o conceito, vamos apresentar funções de diferentes tipos sem a preocupação formal de classificação, a qual será feita gradativamente na seqüência dos conteúdos. (ISOLANI et al, 2002, p.66)

Em todo o livro, além das orientações para o trabalho, como as acima detalhadas, há também resoluções comentadas. Orientações para o trabalho relativas à: possibilidade de discutir a existência da continuidade ou não de funções, porém sem necessidade de aprofundar o assunto, que será estudado no Ensino Médio; apoio em situações sócio-culturais e distinção entre variável dependente e independente, entre outras, são algumas das preocupações que as autoras expressam.

Em “Funções do 1º grau e Funções constantes”, as autoras explicam que os alunos devem optar pelo estudo em conjunto, para que possam confrontar as semelhanças e diferenças do conceito em foco:

> Tanto uma função do 1º grau como uma função constante tem como gráfico uma reta e, por isso, podem ser definidas apenas por dois pontos. Procure discutir com os alunos se esta condição é suficiente, se ela dá segurança da correção dos cálculos. Se marcarem mais de dois pontos poderão verificar se estão mesmo alinhados, se estiverem, pertencem à mesma reta. Oriente também que é possível detectar erros no cálculo dos valores de y, se o ponto ficar fora do gráfico da função. (ISOLANI et al, 2002, p.77)

A seguir, esclarecem o objetivo:

> ...verificar se os alunos entendem a relação que há entre os coeficientes da fórmula da função e a inclinação da reta: fazendo x = 0 tem-se a coordenada do ponto em que a reta cruza o eixo y e este valor é sempre o correspondente ao coeficiente b da equação. Evite dar a resposta pronta; se necessário, analise outras funções até que os alunos tenham entendido a questão. (ISOLANI et al, 2002, p.77)

Em “Funções do 2º grau”, as autoras partem de situações em que os alunos percebem que nem todos os gráficos de funções são retas e a relação existente entre este fato e o expoente da variável da equação. Afirmam, entretanto, que “Não é preciso que eles concluam nada a esse respeito. Isto deverá acontecer na medida em que resolvam as próximas atividades.” (ISOLANI et al, 2002, p.87).

Defendem:

> Ao traçar um esboço da curva – parábola, é necessário, muitas vezes, o cálculo e localização de 5 pontos ou mais. Os procedimentos a traçar gráficos do 2º grau são apresentados no exercício 34. (exercícios desse tema eram iniciados no número 32)

> Consideramos que até lá os alunos tenham observado vários detalhes importantes e necessários para o traçado como: simetria da parábola, relação entre o coeficiente ***a*** e a concavidade da parábola e a existência de um ponto de máximo ou de mínimo, explorados nos exercícios. (ISOLANI et al, 2002, p.87).

No livro de Imenes e Lellis (1998, p.55), o assunto Funções é apresentado da página 220 a 242, subdividido em: “Funções, suas tabelas e suas fórmulas”, “Funções e seus gráficos” e “Usando funções”. Todos os assuntos com exercícios e exercícios para casa.

Três recursos, “Conversando sobre o texto”, “Ação” e “Procure no Dicionário”, são mencionados, após o índice.

Em “Funções, suas tabelas e suas fórmulas”, na seção “Conversando sobre o texto”, as primeiras idéias de funções são exploradas a partir de três exemplos iniciais.

Iniciam “Funções e seus gráficos” com a seção “Ação”, utilizando um jogo (Batalha naval de alvo móvel) como recurso para apresentar as coordenadas cartesianas necessárias à construção do gráfico de uma função.

Em “Conversando sobre o texto” exploram a relação entre a fórmula e o gráfico de uma função para introduzir funções do 2º grau. Resumem em um esquema os passos para a construção do gráfico de uma função, na ordem: fórmula, tabela, marcar os pontos, unir os pontos.

Em “Usando funções”, exploram em “Conversando sobre o texto” a utilidade das funções a partir de dois exemplos de situações do contexto social.

No livro do professor, no anexo denominado Manual Pedagógico, “Uma abordagem incomum e muito significativa”, os autores consideram que embora nem todos os professores do Ensino Fundamental trabalhem funções

> “... valeria a pena apresentar algumas noções do assunto porque:
>
> - tem grande importância na Matemática e nas ciências em geral;
> - contribui, com a idéia de variação, para a maturidade cognitiva dos alunos;
> - pudemos tratá-lo com base em idéias já exploradas nesta obra, tais como fórmulas, gráficos e proporcionalidade.” (IMENES e LELLIS, 1998, p.56).

Os autores esclarecem que enfatizam a idéia essencial: a de variação ou de grandezas que variam, uma dependendo da outra. Destacam em “Conversando sobre o texto” a importância do professor pedir as opiniões dos alunos, que “embora vagas e imprecisas, são fundamentais para construir idéias sobre o assunto" (IMENES e LELLIS, 1998, p.56).

Os autores utilizam a tabela e a fórmula de uma função como ferramentas e introduzem o gráfico como um novo recurso para se conhecer a variação de uma função. Não apresentam a fórmula do vértice da parábola preferindo que o aluno encontre suas coordenadas, calculando o valor de *y* correspondente à média das raízes devido à simetria axial da parábola. Preferem explorar a conexão entre fórmulas, gráfico e simetria na busca dos valores extremos. Não usam termos como abscissa, ordenada, raiz da função, etc., deixando essa nomenclatura e as fórmulas para o Ensino Médio.

Bigode (2000), autor do outro livro de apoio, apresenta o assunto Funções das páginas 230 a 263 subdividido em: "Fórmulas, tabelas e gráficos"; "Os gráficos no cotidiano"; "Estudo matemático dos gráficos"; "Uma idéia intuitiva que funciona"; "O sistema cartesiano"; "Caracterização de uma função"; "Construção do gráfico da função y = ax + b";" Construção do gráfico da função quadrática";" Analisando gráficos" e "Relações entre gráficos e perímetros". A proposta se resume em problematização. O autor anuncia: explorar a matemática e as conexões da matemática com a realidade a partir de problemas; tratar a matemática de maneira intrigante, viva, prazerosa e agradável, por meio de abordagens históricas levar o aluno a perceber que a matemática é uma ciência dinâmica.

Em cada subdivisão, textos introdutórios são seguidos de atividades e ao final do assunto Funções há uma seção "Retomando".

Além de explorar as relações entre grandezas nos dois tipos de esquema indicados: fórmula → tabela → gráfico ou tabela→ fórmula → gráfico o autor em "Uma idéia intuitiva que funciona" destaca a linguagem dos matemáticos e a definição de função: "Chama-se função de um conjunto A em um conjunto B conhecidos, qualquer relação entre esses conjuntos que faça corresponder a cada elemento de A um único elemento de B". (BIGODE, 2000, p.243)

No livro do professor, o autor afirma ser inquestionável a importância do estudo de funções e indaga o conhecimento do aluno ao final do ensino fundamental. Adverte que no livro 6 de sua coleção "os estudantes entram em contato com o conceito de função mediante a construção e interpretação de tabelas e gráficos", (Bigode, 2000, p.43) e aponta que "um ensino sobre funções, para ser significativo não precisa necessariamente estar restrito a uma linguagem formal do tipo ‘Seja f de A em B’” (IDEM, p.43). Sob o título “Objetivos de um estudo significativo de funções” o autor sugere que:

- No fim do ensino fundamental, os alunos deveriam estar preparados para:
- reconhecer os gráficos cartesianos, saber descrever e representar transformações de relações entre grandezas;
- descrever e representar relações através de tabelas, gráficos, fórmulas e regras expressas na forma verbal;
- observar características globais dos gráficos como: continuidade, crescimento, decrescimento, pontos de máximo e pontos de mínimo, etc.;
- analisar fenômenos que envolvem grandezas interdependentes;
- analisar relações lineares em termos proporcionais, relações de crescimento e decrescimento etc.;
- expressar algebricamente relações entre grandezas;
- explorar padrões e regularidades;
- utilizar funções e regularidades para representar e resolver problemas.

Afirma também que, diante de representações de funções em gráficos, tabelas e fórmulas, os alunos devem ser capazes de analisar, predizer e simular fenômenos observáveis do “mundo real”. (BIGODE, 2000, p.43) Explora as relações entre grandezas em dois tipos de esquemas: partindo da palavra relação, um deles conduz da fórmula, para a tabela e desta para o gráfico; o outro conduz da tabela para a fórmula e desta para o gráfico.

Chama a atenção para situações (apresenta 9 relações simples) em que uma grandeza varia em função de outra e que muitas vezes correm o risco de não ser reconhecidas como atividades que envolvem idéias sobre funções matemáticas.

Adverte que, de modo geral, na tradição do ensino de funções as tabelas são pouco exploradas e que do ponto de vista histórico nelas que se encontram os primeiros indícios da idéia de funções. Apresenta as raízes etimológicas da palavra “tabela” e afirma que “Tabelas são ‘ferramentas’ simples, comuns e eficazes que permitem representar relações...” (BIGODE, 2000, p.44)

Após verificar as recomendações dos autores para utilização do conteúdo, a pesquisadora tabulou as conversões e tratamentos no desenvolvimento do conteúdo e exercícios propostos aos alunos nos três livros didáticos.

As obras analisadas apresentaram situações com funções não necessariamente do 1º e 2º grau em seu conteúdo, como gráfico maior inteiro e funções; situações de não funções (Isolani et al, 2002); ou leitura de gráficos com curvas que não representam nenhuma das duas funções, em IMENES e LELLIS (1998) e BIGODE (2000).

Para preencher as tabelas, a pesquisadora considerou, dentre os três livros, apenas os exercícios ou atividades com funções do 1º e 2º grau para contagem e preenchimento das tabelas de conversões e tratamentos. Adotou as siglas F1 e F2, respectivamente, para os conteúdos função do 1º e 2º grau e as demais foram identificadas pelas legendas abaixo.

A tabela 2 apresenta o número de conversões identificadas em exercícios e atividades propostas nos livros didáticos analisados, por exemplo, conversão F1 (E,G) = 2 , significa duas conversões do registro escrita algébrica para o registro gráfico de função de 1º grau.

TABELA 2 - CONVERSÕES

Transfor-Mação		Conversão																
Livro	Cont.	E,G	E,L	E,T	F,E	F,T	G,E	G,T	L,E	L,N	L,T	LM,G	N,E	N,T	P,E	P,T	T,E	T,G
1	F1	2	1	3	5	5	5	3	11	5	6	-	2	4	6	6	22	15
	F2	8	-	5	4	6	1	5	2	-	-	-	1	3	1	2	7	8
2	F1	3	-	1	2	-	1	4	-	-	1	-	1	-	5	-	2	2
	F2	7	-	-	1	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	1	5
3	F1	41	-	41	-	1	5	-	10	-	1	5	-	-	1	2	-	45
	F2	15	-	2	2	-	-	-	4	-	-	-	-	-	-	-	-	16

E – escrita algébrica; F – figura geométrica; G - gráfico; L - linguagem escrita; LM - linguagem matemática; N - seqüência numérica; n – sistema numérico; P – figura pictórica; T – tabela;

Todos os livros apresentam um grande número de conversões de T→ G[13], enquanto que em sua inversa G → T o número cai drasticamente; em Bigode (2000) essa última conversão inexiste. Duval (1995) refere-se ao fato da conversão G→ T

[13] O sinal → significa "para".

ser a menos usada nas escolas. A conversão de menor número e que apareceu somente no livro de Isolani et al (2002) é a conversão de uma escrita algébrica para língua natural escrita.

As conversões de língua natural escrita em escrita algébrica são os exercícios cujo enunciado pedem diretamente a escrita algébrica de funções. Isolani et al (2002) dispensam maior atenção para as passagens de T→E e T→G respectivamente.

Imenes e Lellis (1998) demonstram um interesse quantitativamente menor pelas conversões: de tabela para gráfico; de tabela para escrita algébrica e de gráfico para tabela.

Bigode (2000) destaca três tipos de conversão: tabela para gráfico, de escrita algébrica para gráfico; de escrita algébrica para tabela respectivamente.

Isolani *et al* (2002) e Bigode (2000) enfatizam a conversão de tabela para gráfico para funções de 2º grau. O livro de Imenes & Lellis (1998) dá mais atenção, embora numa quantidade menor, à passagem de escrita algébrica para gráfico.

A tabela 3 apresenta o número de tratamentos identificados em exercícios e atividades propostos nos livros didáticos analisados, por exemplo, tratamento F2 (G) = 12 , significa doze tratamentos do registro gráfico de função de 2º grau.

TABELA 3 - TRATAMENTOS

Transformação		Tratamento					
livro	Cont.	E	G	P	L	n	T
1	F1	2	17	7	35	62	17
	F2	12	14	2	25	15	6
2	F1	3	12	1	13	7	8
	F2	-	3	-	7	10	2
3	F1	3	7	1	10	4	8
	F2	2	3	-	4	10	2

E – escrita algébrica; F – figura geométrica; G – gráfico; L - linguagem escrita; n – sistema numérico; P – figura pictórica; T – tabela;

Todas as obras pesquisadas deram maior atenção aos tratamentos numéricos, seguidos pelos tratamentos em língua natural escrita, isto é, questões que pedem aos alunos destacados em Isolani et al (2002) e Imenes e Llelis (1998), respostas pessoais, sejam escritas ou faladas

Além dos tratamentos e conversões a pesquisadora deparou-se com exercícios de identificação, que em sua opinião são conversões, preferindo, no entanto, contá-los à parte.

Quanto aos exercícios, o livro de Isolani et al (2002) pede para identificar: a escrita algébrica ser função do 1º grau (2), os gráficos serem funções do 1º grau (7), os gráficos serem funções do 2º grau (5), a situação apresentada em língua natural escrita ser função do 1º grau (1), a tabela ser uma função do 1º grau (1) os coeficientes das variáveis de uma função do 1º grau (3),os coeficientes das variáveis de uma função do 2º grau (11). O livro de Bigode (2000) pede para identificar, calcular e o sinal dos coeficientes de uma função do 1º grau (7) e (1) para o cálculo do coeficiente da variável x numa função do 2º grau. Imenes e Lellis (1998) não apresentam nenhuma questão desse tipo.

Do ponto de vista pedagógico, os três livros evidenciaram maneiras diferentes de abordar o conteúdo funções embora tenham utilizado situações do contexto sócio-cultural (salários vinculados a um ganho fixo e mais comissão, leitura de gráfico representando pesquisa na área de saúde que não representava funções, entre outros) para proporcionar aos alunos situações mais familiares para matematizar.

Em relação aos tratamentos numéricos, as conversões apresentaram-se em menor número, principalmente a conversão de gráfico em escrita algébrica para funções do 1º grau, como afirmou DUVAL (1995, 2003). A pesquisadora é de opinião que esta conversão deve ser explorada em anos posteriores de escolaridade, uma vez que parece ser mais uma preocupação de ordem matemática do que pedagógica. Os exemplos explorados pela professora e colegas não proporcionaram um enunciado capaz de representar essa conversão, apresentando o gráfico (registro de representação de partida) e pedindo diretamente a conversão para escrita algébrica (registro de representação de chegada).

A maior diversidade de exercícios e atividades que solicitavam tratamentos e conversões foi observado no livro do qual a professora era co-autora, conforme tabela 2.

6.2.2 O diálogo professora-alunos sobre representações de funções nas aulas selecionadas.

Nessa parte da investigação, a pesquisadora ateve-se à analisar os momentos de conversão e tratamento presentes nas aulas selecionadas.

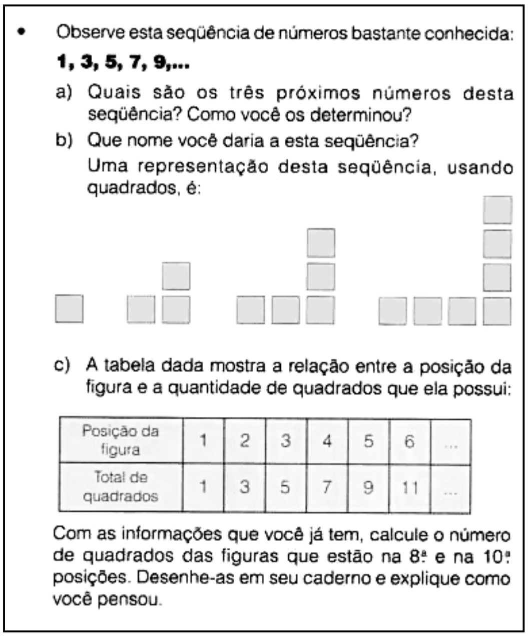
6.2.2.1.O uso de representações intermediárias e representações formais para a condução dos tratamentos ou conversões dos registros

Foram analisadas quatro das quarenta e sete aulas observadas: duas aulas sobre a busca de escritas genéricas (1ª e 2ª), uma de função de 1º grau (25ª) e uma de função do 2º grau (37ª).

1ª aula - Buscando escritas genéricas.

Nesta primeira aula, a professora trabalhou com uma seqüência de números ímpares, inicialmente representados na forma numérica e com *representações intermediárias* pictóricas para, posteriormente, chegar a *representações formais*: fórmulas matemáticas.

Começou a aula pedindo aos alunos para resolverem a atividade (proposta a seguir). Atendia aos alunos individualmente, sempre que solicitada. Circulou pela sala, durante toda a aula, verificando se os alunos estavam atentos, com o caderno e o livro abertos. Permitia que sentassem juntos quando um deles estivesse sem o livro ou na resolução de tarefas conjuntas. Na aula observada, a tarefa a seguir tomou boa parte da aula.



- Observe esta seqüência de números bastante conhecida:
  1, 3, 5, 7, 9,...
  a) Quais são os três próximos números desta seqüência? Como você os determinou?
  b) Que nome você daria a esta seqüência?
  Uma representação desta seqüência, usando quadrados, é:

  c) A tabela dada mostra a relação entre a posição da figura e a quantidade de quadrados que ela possui:

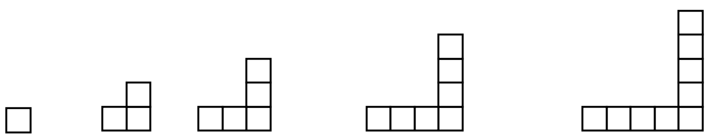
Posição da figura	1	2	3	4	5	6	...
Total de quadrados	1	3	5	7	9	11	...

Com as informações que você já tem, calcule o número de quadrados das figuras que estão na 8ª e na 10ª posições. Desenhe-as em seu caderno e explique como você pensou.

A professora iniciou a aula pedindo aos alunos que completassem com números a seqüência dada, realizando com as respostas dos alunos o primeiro *tratamento* numérico. Todos fizeram rapidamente. Em seguida perguntou se eles reconheciam a seqüência. Os alunos responderam que eram números impares. A professora corrigiu:

P: -Seqüência de números ímpares.

No item b a parte que consistia em um *tratamento* figural que solicitava a continuidade dos desenhos apresentados no livro foram copiados pela professora no quadro.

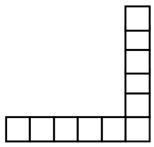


1ª 2ª 3ª 4ª 5ª

A seguir, professora perguntou:

P: - Tem outro jeito de encontrar o próximo desenho?Qual seria?

Lui: - Cinco em baixo e quatro para cima.
P: - Alguém pensou outra maneira de fazer?
Die: - Um no canto, cinco pra cima e cinco para o lado.



A professora desenhou o "L" acima e pediu para outro aluno explicar como Die faria o próximo desenho. Ele falou e gesticulou a posição horizontal e vertical:

*Jon: - Um no canto (*vértice*) seis pra cá (*horizontal*) e seis pra lá (*vertical*).*
P: - Se eu continuasse a seqüência como eu desenharia a décima figura?

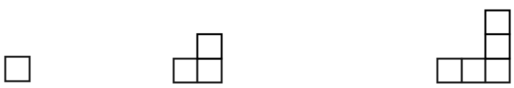
A aula foi interrompida para um aviso. Em seguida a professora retomou.

P: - Observem os desenhos. Qual seria o número de quadrados para a décima figura?
A2: - Vinte e um.
P: - E a vigésima quinta figura, quantos quadrados têm?

Vários alunos responderam juntos com valores diferentes e um deles afirmou:

A3: - Quarenta e nove.
P:- Como você pensou: do jeito do Jon (que era igual a do Die) ou do Lui?

Lui afirmara que enxergava as figuras (a partir da 2ª figura), da seguinte maneira: duas em baixo e uma em cima, a terceira com três em baixo e duas em cima e assim sucessivamente conforme ilustrado abaixo.



1+ 0 *2 + 1* *3+2*

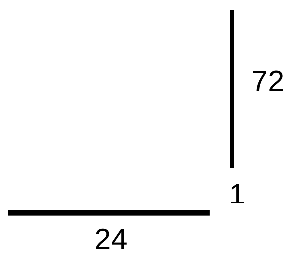
1ª *2ª* *3ª*

Um dos alunos respondeu que pelo método do Die, ou seja, “um no canto, cinco pra cima e cinco para o lado”. Essa *representação intermediária* pareceu facilitar o caminho para a *representação formal*.

A seguir, a professora ampliou o exercício propondo tarefas, além das solicitadas no livro e que serão apresentadas a seguir. Ela iniciou perguntando:

P: - Quantos quadradinhos teriam na vigésima quinta figura pelo método do Die?

A professora pareceu reconhecer que este método auxiliava os alunos a visualizar uma forma de organizar os quadradinhos e identificar a regularidade da seqüência proposta. À medida que solicitou essa figura com número maior de quadradinhos, em que desenhar os quadradinhos era incômodo e inconveniente, ela usou outra *representação intermediária*, desenhando apenas um segmento horizontal e outro vertical em substituição a linha e a coluna de quadradinhos, como apresentado abaixo, (denominado diagrama pela pesquisadora). Nos segmentos horizontal e vertical do diagrama do quadro, foram colocados, os números correspondentes à quantidade de quadradinhos na linha e na coluna e incluído o número 1, na intersecção.



Em seguida, oralmente, a professora se refere à figura de número 83, registrando o diagrama no quadro e os alunos respondem imediatamente:

As: - Oitenta e dois em cima, oitenta e dois em baixo e um no canto.

Nesse instante um aluno se adianta e diz:

A3: – Para achar o número de quadrados é só fazer duas vezes o número de baixo e somar com um.

A professora confirmou e perguntou sobre que número ímpar representaria a 36ª figura. Os alunos responderam 71. Ela desenhou o diagrama e colocou o primeiro valor (35) na linha horizontal. Perguntou se haveria uma fórmula para esse jeito de contar. Os alunos responderam:

As: - *Acho que sim...- Acho que dá...*

Em seguida, ela apresentou uma forma de representar genericamente a regularidade até então observada:

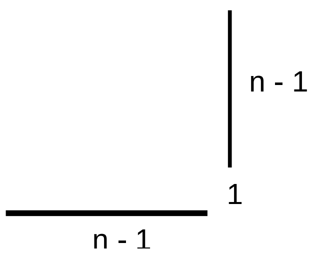
P: - Então vamos usar a letra “n” que é o número da figura da seqüência.

.

A professora se referia ao número total de quadradinhos de cada figura da seqüência apresentada. Usou o mesmo *representação intermediária*, o diagrama, pedindo aos alunos para completarem cada segmento do mesmo, horizontal e vertical com a letra “n” anteriormente combinada. A professora registrou no quadro apenas os segmentos do diagrama:

P: - Então, nessa forma de contar tem quantos quadrados? Ditem pra mim.
As: “N” menos um mais “n” menos um e mais um.

Ela anotou no quadro:



A seguir recomendou:

P:- Então vamos simplificar "essa coisa aqui" (batendo com o giz sobre a expressão n –1 + n –1 + 1 que escreveu após finalizar a escrita dos valores n -1 e 1 nos segmentos e no canto do diagrama).

Em seguida cortou o –1 e o +1 e perguntou*:*

P: - *Como é que fica?*

Os alunos completaram falando:

As: - Dois "n" menos um.

No uso de *representações intermediárias* e *representações formais* cabe destacar na primeira tarefa: a *conversão* entre a seqüência figural e sua representação numérica e a *conversão* entre a posição de cada elemento da seqüência e o número de quadradinhos correspondente à posição.

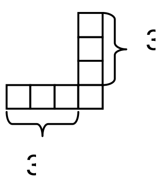
A professora perguntou:

P:- *Vamos experimentar se essa fórmula dá certo.*

Utilizou os exemplos numéricos presentes no quadro e conferiu com os alunos o total de quadrados relacionados com o número da figura para três figuras: a terceira, a quinta e a vigésima quinta. Continuou:

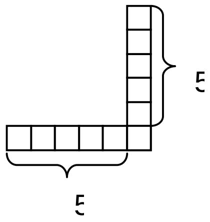
P: - Apareceu outro modo de fazer a fórmula.Vamos tentar de maneira diferente? Vejam...

Desenhou a figura abaixo escrevendo e marcando com uma chave três quadrados na horizontal e três na vertical e representando numericamente abaixo da figura.



4 – 1 + 4 – 1 + 1

Repetiu o procedimento para a sexta figura.



6 – 1 + 6 – 1 + 1

Uma aluna disse não ter entendido:

P: - Orl não está entendendo?

A menina moveu negativamente a cabeça.

P: - Aprendeu o ano passado?

Novamente a negativa.

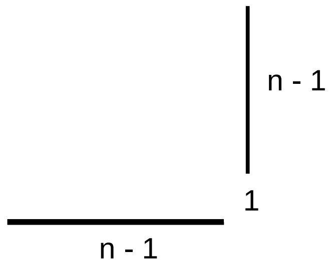
P:- Vamos devagar para que você possa entender. O Jon está olhando no livro. Tem duas formas de entender que estão no livro. Vejam...

E pede para olharem na página cinquenta e um, onde havia exemplos das duas formas explicadas por ela. Perguntou:

P:- O que aprendemos no ano passado?
As:- Que tem várias maneiras de fazer...
P:- Isso, tem diferentes maneiras de olhar para essas figuras e diferentes maneiras de contar. Até que a matemática é democrática vocês não acham?

Possivelmente a dúvida da aluna surgiu porque a professora considerou 3 quadradinhos e, ao escrever no quadro, fez o *tratamento* 4 -1 para representar o 3. A professora destacou o número 4 possivelmente porque na escrita da fórmula geral, o quatro estava associado a 4ª figura que, por sua vez, determinará o número ímpar correspondente.

O mesmo *representação intermediária,* foi utilizado pela professora ao desenhar um diagrama semelhante ao anterior e escrever em cada segmento n -1 e na intersecção o número 1.



P: - Então nessa forma de contar tem quantos quadrados? Ditem pra mim

Enquanto ela escrevia a fórmula, os alunos falavam:

As: - "N" menos um "n" menos um e mais um.

A professora escreveu a fórmula abaixo, riscou +1 e -1 e em seguida falou:

$$Q = n -1 +n - \cancel{1} + \cancel{1}$$

P:- Risquei os dois últimos um (1), por que?
A1:- Porque um é mais e o outro é menos. Cancela.

A aluna explicou o *tratamento* realizado pela professora na *representação formal* acima. Em seguida, a professora retomou :

P:- Como está pensando o aluno que...

Escreveu no quadro:

N	*1ª fig.*	*2ª fig.*	*3ª fig*	*4ª fig. ...*
Q	*1*	*3*	*5*	*7*
Pensando	*2 + 1*	*3 + 2*	*4 + 3 …*	

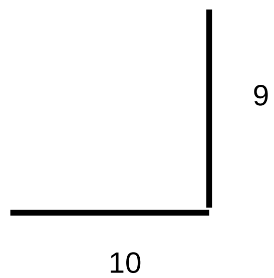
A partir desse novo *representação intermediária*, um aluno complementou:

A2:- Está vendo o de baixo (quadrados na horizontal) e o de cima (quadrados na vertical).

O aluno se apoiou no desenho, em formato de “L” composto de quadradinhos. A professora prosseguiu:

P: - A décima figura tem quantos quadrados, hein Fer? Vejam... (mostrando os *representaçoes intermediárias* anteriores, diagramas, ainda expostos no quadro negro).
Fer: - Dez mais nove (10 + 9).

A professora voltou-se para o quadro, anotou o número de quadradinhos sobre os segmentos do diagrama e perguntou:



P: - 10 aqui (e aponta o segmento horizontal) *e 9 aqui* (e coloca no segmento vertical)*?*
Fer: - Sim.

A seguir, a professora perguntou e anotou o número quadrados de cada segmento do diagrama para a 15ª figura para a aluna Mar e a 29ª figura para o aluno A3. Indagou também, sobre o total de quadrados nesses dois casos. Os alunos responderam de imediato:

As: - Vinte e nove ... Cinqüenta e sete.

Voltando ao quadro ela ainda perguntou:

P: - Como estou pensando?

E escreveu:

10 + 9   15 + 14   29 + 28.

Voltou-se aos alunos e perguntou a um deles:

P: - Como é o jeito de falar? Explique com palavras.

Esta questão provocou a *conversão* entre um registro de representação numérica e um registro de representação em língua natural:

A4:- Em baixo é o dez e em cima é o nove... em baixo é o quinze e em cima é quatorze...em baixo é vinte e nove e em cima vinte e oito.

O aluno explicou a forma de *tratamento* utilizando as *representações intermediárias* ainda presentes no quadro. Após a explicação, a professora continuou o exemplo anterior.

P: - Como falamos a centésima figura?

Nesse instante, a professora chamou a atenção de duas alunas que conversavam e pediu para que elas compartilhassem a conversa com todos.

*A5- Eu estava explicando para ela que se contasse tudo em baixo (*horizontal*) e tudo em cima(*vertical*), contava o um duas vezes e por isso tinha que escrever menos um para não ficar sobrando.*

A professora então escreveu 100 e 99 na linha horizontal e vertical respectivamente de um diagrama e perguntou:

P: - E se fosse a milésima quinquagésima vigésima segunda (1522ª) figura?
As:- Mil quinhentos e vinte e dois (enquanto a professora apontava a linha horizontal e anotava em seguida) *e mil quinhentos e vinte e um* (enquanto a professora apontava a vertical e anotava também).

E dirigiu-se a uma aluna:

P :- Diga como você faz essa forma de contar.
A6: - Em baixo eu repito (o número da figura) *e em cima é um a menos.*

Em seguida pediu que uma aluna lhe mostrasse a *representação formal* resultante do processo anterior.

P:- Diga pra mim como fica a fórmula.
A6: - "N" mais "n" menos um (n + n –1.)

Outro aluno complementou, finalizando com um *tratamento* algébrico.

A7: - Dois "n" menos um (2 n – 1), *professora.*

A professora perguntou*:*

P:- Esse jeito de contar ficou mais fácil que o anterior?
A6:- Não.

Enquanto o aluno fazia um *tratamento* reduzindo n+ n + 1 para 2n +1, quase de imediato, a aluna pareceu, mesmo respondendo todas as interpelações da professora, não encontrar sentido para as escritas algébricas. A professora prosseguiu:

P:- Que bom que dá pra fazer de forma diferente.Cada um pensa de um jeito e a gente chega no mesmo lugar. Vamos fazer o exercício um da página cinquenta e três (apresentado abaixo)*. Não é para desenhar a seqüência.*

1. Em cada uma das seqüências explique a forma de variação e escreva os próximos dois números.

   a) 12; 7; 2;...

   b) –15; – 8; –1;...

   c) 2,5; 6; 9,5;...

   d) 1/4; 1;7/4;...

Para completar a seqüência de números ímpares os alunos não apresentaram dificuldades, porém o mesmo não aconteceu nesse exercício, quando a professora completou sozinha a seqüência 12, 7, 2,... cujos números seguintes eram negativos. Ela foi completando no quadro com os valores:

–3, -8, -13 , –18

Alguns alunos não entenderam o –3 , –8 e assim por diante e a professora argumentou:

P:- Tem gente que esqueceu os números negativos...:Essa seqüência está diminuindo de quanto em quanto?
As:- De cinco em cinco.

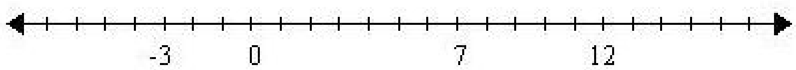
A professora usou uma nova *representação intermediária* para representar a seqüência e a diferença entre os termos, registrando no quadro:

-5 -5
12, 7, 2,...

A partir desse *representação intermediária* uma aluna disse:

A8:- Começa a somar mais cinco.
P: - Somar mais cinco?
A8:- Eu entendi assim: o dois é mais e daí vai somando cinco só que dá soma negativa.

A professora tentou entender o que a aluna dissera e lançou mão de uma *representação formal*, a reta numérica, representando os valores sobre a reta para ajudar a aluna a organizar e clarificar a seqüência decrescente.



A8: - Agora eu entendi! Vai indo pra trás.

A professora compartilhou com a sala, a forma de pensar da aluna.

P: - Ela disse que está somando para baixo, não?

A aluna não respondeu e a professora procurou ajudar.

P: - Ela disse assim: Estou vindo de lá para cá (mostra no quadro o sentido da direita para a esquerda). Para eu vir do mais dois para a esquerda retirando cinco eu vou cair no...
As:- Menos três.
P: - E retirando cinco ainda...
As: - No menos oito.

A aluna A8 continuou com dúvida:

A8:- *Mas eu não estou somando?*

A professora usou o argumento da aluna e a *representação formal*, a reta, para explicar:

P: - Você está somando para a esquerda, indo para a parte negativa.

A utilização dos argumentos da própria aluna não ajudou a convencê-la. Ela permaneceu por alguns segundos em silêncio antes de manifestar

A8:- *Ah! É.*

O sinal anunciou o fim da aula e a professora deixou tarefa para casa os itens b, c e d do exercício começado em sala.

2ª aula - Buscando escritas genéricas.

A professora começou a aula fazendo a chamada e dando avisos gerais. Em seguida, perguntou aos alunos se haviam feito a tarefa (exercícios b, c e d apresentados anteriormente) e passou nas carteiras conferindo os cadernos de cada aluno. Só três fizeram a tarefa, mas deixaram a última seqüência sem fazer. Ela comentou que os erros eram meio comuns e começou a corrigir. Escreveu a seqüência –15, -8, -1, ..., ...no quadro e voltou-se para a turma:

P: - Na letra a estava diminuindo e agora está aumentando.
A1: - Não está diminuindo professora?
P: - Em primeiro lugar precisamos saber se está aumentando ou diminuindo. Na seqüência de números ímpares o intervalo era...
A1: - Dois .
A2: - Agora está aumentando de 7.
A3:- Não entendi porque está aumentando.

A professora andou na direção do aluno e comentou:

P: - Veja, tente enxergar como se fossem temperaturas. Se você passa de menos quinze para menos oito a temperatura aumenta ou diminui?
A3: - (levou alguns segundos para responder) Aumenta.
P: - Ficou mais fácil de entender?
A3: - Sim, mas eu não lembrei da temperatura.

Os argumentos utilizados pela professora, recorrendo a uma representação socialmente utilizada, revelam que o aluno, mesmo conhecendo a escala de temperatura, não a associou à seqüência apresentada. Ele pareceu cativo de uma forma de reconhecer o que estava acontecendo com a seqüência 15, 8 e 1 que ele impõe à outra seqüência, –15, -8 e –1.

A professora retornou ao quadro para registrar a forma de calcular os outros elementos dessa seqüência iniciada por números negativos. Ao completar com 6, 13 e 20 apresentou para os alunos um *tratamento* numérico.

Na seqüência seguinte 2,5 ; 6 e 9,5 perguntou aos alunos:

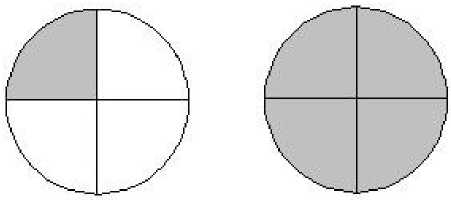
P: - Esta seqüência está aumentando ou diminuindo?
As: - Aumentando.
P: - De quanto?
As: - De três e meio em três e meio.
P: - Alguma dificuldade?
As: - Nãããão.

Escreveu no quadro o seguinte *tratamento* numérico:

P: - Completando a seqüência ... (enquanto os alunos ditam) 13;16, 5; 20.

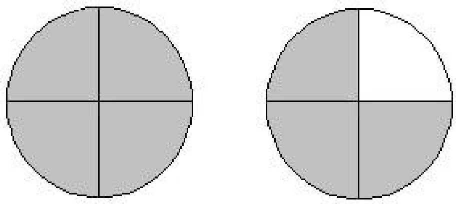
Para completar a seqüência seguinte, de números racionais, 1/4, 1, 7/4,...,..., a professora apelou para uma representação ***intermediária,*** um desenho para ajudar os alunos a preencher a seqüência com os termos que faltavam.

As: - Ihhh professora esse é dificil...Esse a gente não fez...
P: - Então vamos desenhar.



pintou 1/4 pintou 4/4

P: - Como vou desenhar 7/4?
A4: - Pinta aquele inteiro e mais um de ¾.



pintou 4/4 pintou 3/4

O uso do desenho suscitou uma questão exposta por uma aluna.

Cam:- Não fica sete oitavos se juntar?
A2: - Sete oitavos é em oito partes.
P: - Isto é sete oitavos (e desenha um círculo no quadro, divide em 8 partes, pinta 7 e pergunta se seria a mesma quantidade) e a aluna insiste.
Cam: - Mas se junta não dá?

Para tornar a explicação mais clara para a aluna, a professora apelou a outra representação *intermediária* e explicou:

P:- Pense numa pizza. Se eu juntar (e bate com o giz sobre as partes de quartos dos dois círculos) *vou comer a mesma coisa ou mais?*
Cam:- Mais.
P: - Qual a diferença?
Cam: - O número de partes.

Ela retornou à *representação intermediária* anterior, dividiu um dos círculos de quatro partes, em oito partes e perguntou:

P:- A pizza é dividida em 8 partes, as partes são maiores ou menores do que se eu dividir em 4?
Cam: - Menores... dá pra juntar mais pra fazer quantidade (*referindo-se a soma das partes*).

A professora percebeu que a dificuldade estava no *tratamento* do algarismo 1 em sua representação racional, para o caso de 4/4 e perguntou*:*

P: - O que complicou foi o um (*referindo-se ao termo da seqüência*)*, não foi?*
Cam: - Foi...

A professora revelou sensibilidade ao identificar o cerne da dificuldade. O desenho mostrou uma incompatibilidade entre as partes representadas e sua quantificação numérica. A representação em forma de desenho remeteu à memória da aluna provavelmente "... de tantas partes... pintei tantas... tenho..." possivelmente reminiscências da aprendizagem de frações de séries anteriores. Ela não enxergava que o todo referência se dividia em quartos e não em oitavos. A professora mudou o sistema de representação.

P:- Poderíamos ter trocado o um por outra representação?
Lui: - Por quatro quartos.

Lui respondeu prontamente revelando uma compreensão imediata deste *tratamento*. A professora prosseguiu:

P: - Se estivesse assim (e escreve 4/4 no lugar do 1 na seqüência) *perde a graça pois vocês saberiam que o próximo termo da seqüência é dez quartos. Sta, você lembra do número misto quando põe um número inteiro e mais uma fração, por exemplo,* (e escreve no quadro) *1 ½ de açúcar, 2 ¾ copos de leite? Então como posso escrever dez quartos?*

A professora propôs outro *tratamento* para Sta e ela respondeu:

Sta: - Sei lá...
Lui: - Dois inteiros e dois quartos.

A professora pareceu desanimar e dirigindo-se a turma falou:

P: - A quinta e a sexta série não estão tão longe assim e falamos nisso o ano passado não? O próximo número é ...
Lui: - Dezesseis quartos.

A professora completou a seqüência no quadro.

P: - Podemos trocar dezesseis quartos por...
Cam: Quatro inteiros.
P: - Por que falamos pizza?
And: - Porque é mais fácil de pensar.

Esse exercício, em que se solicitou o *tratamento numérico* para números racionais, mostra como é difícil para alguns alunos operar e representar equivalências no conjunto dos racionais, apesar do trabalho escolar anterior e do uso pela professora de uma *representação intermediária*, a pizza, que fazia sentido aos alunos. Cam, que não havia entendido a *conversão* entre a figura e a quantificação numérica, fez o tratamento entre 16/4 e 4.

A professora continuou:

P: - Vamos preencher o exercício dois da página cinqüenta e três.

2. Complete os valores que faltam em cada seqüência:

a) −5; −1; ; ; 11
b) 5/2; 1; −1/2; ; ;
c) +20; ; ; − 2,5; + 1,25.

A professora passou entre as carteiras para verificar se os alunos faziam os exercícios, atendendo-os individualmente. Um aluno sugeriu trocar o termo 1 da seqüência, no exercício b, por uma fração. A professora retornou ao quadro, e disse:

P:- Pessoal, completem (sic) aqui para mim, façam o favor... (e aponta para a primeira seqüência. Os alunos ditam e ela escreve no quadro 3, 7 e 11). *Na b) combinamos trocar o um por dois sobre dois ou duas metades. Fez Sta?*

Após escrever o tratamento numérico sugerido pelos alunos, a professora relembrou o *tratamento* combinado para o elemento 1 da seqüência, que deveria ser trocado por 2/2 ou duas metades. Enquanto realizava *tratamento* operatório em 1/2 + 1/2 ou 2x 1/2 a aluna respondeu:

Sta: - O Man explicou pra mim que é só diminuir o 2 (de baixo) *do 5* (de cima) *que dá pra eu saber qual vai ser o próximo...*

Para Sta rever a inconsistência do *tratamento* empregado e achar o próximo elemento da seqüência, a professora interferiu:

P: - Mas se você pegar os outros elementos da seqüência dá o mesmo valor?
Sta: - É que eu fiz o primeiro e só fui diminuindo 3.

A professora escreveu no quadro uma seqüência inventada: -1/2 , -4/2 , -7/2 (para a aluna compreender o procedimento incorreto adotado), e advertiu:

P:- Notem (mostrando o 1º elemento da seqüência) *que é deste elemento* (numerador) *para este* (numerador do elemento seguinte) *que dá –3 de diferença e não pela diferença entre o numerador e o denominador do primeiro.*

Tas levantou a mão e a professora atendeu.

Tas:- Eu diminuí só o primeiro (numerador menos denominador) *e depois fui tirando dos outros.* (Tas e Sta sentavam e trabalhavam lado a lado).

A professora comentou o fato de o valor encontrado ser o mesmo era coincidência e falou:

P:- O Max está nervoso com o último. Quem explica?
Lui: - Os dois últimos um é o dobro do outro.

A professora questionou:

P: - Mas se um é o dobro do outro como vamos fazer funcionar o sinal?
Max: -... Dá cinco.
P:- É menos dois, diz o Tai.
Tai: - Faz de trás pra frente professora.

A professora escreveu a seqüência no quadro:

X -2 X -2 X -2

+ 20, -10, .5.., -2,5 , 1,25.

Ela aproveitou a sugestão de Tai para, com o uso da representação *intermediária* acima, destacar:

> *P: - O Tai diz que dá pra ir de lá pra cá* (esquerda para direita*) que é só dividir por menos dois.*
> *As: - É messsmo!!!.*

Em seguida a professora propôs aos alunos que resolvessem o exercício três, mas o sinal tocou e ela encerrou a aula pedindo para fazerem os exercícios três e quatro em casa.

Nas duas primeiras aulas se observou constantemente a tentativa de a professora produzir situações que conduzissem os alunos a uma melhor compreensão da representação a ser construída.

O fato de a professora levar os alunos a observarem o que variava e o que era constante nas situações apresentadas, foram condições necessárias para que pudessem escrever uma generalização. A professora usou essa estratégia por meio de *representações intermediárias* como diagramas e desenhos possibilitando aos alunos diferentes maneiras de representar a mesma situação. Os diagramas constituíram um auxílio representacional visual importante que permitiu à professora estabelecer relações que favorecessem a escrita da fórmula.

Por outro lado a representação *intermediária* do desenho sobre frações possibilitou identificar, na fala de uma aluna, uma incompreensão da relação todo/parte que a professora ajudou retomando o conteúdo visto em séries anteriores.

A dificuldade em lidar com o conjunto dos racionais, principalmente com suas operações foi marcante na segunda aula.

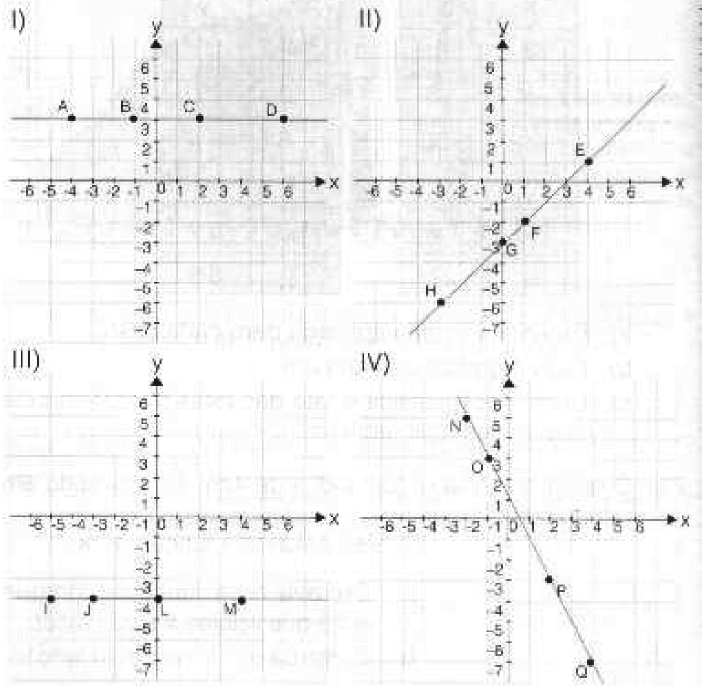
Uma característica da professora observada nas aulas e ao longo do desenrolar das demais, era que ela procurava, sempre que possível, um contra-exemplo para que os alunos se inteirassem de seu equívoco. Em seguida sempre apelava a *representações intermediárias* ou mesmo *representações formais* conhecidas para levá-los a pensar novamente sobre o assunto.

3ª aula - Função de 1º grau.

Nesse dia havia um aluno novo. A professora fez perguntas sobre sua procedência e o conteúdo de matemática trabalhado na escola anterior. Colocou-o a par do conteúdo de matemática que trabalhava e, após a chamada, andou pela sala conferindo a lição de casa no caderno dos alunos. Eles deviam realizar as tarefas propostas no exercício abaixo. Poucos tentaram e os que fizeram revelaram dificuldades, mas a professora convocou a todos para pensar sobre o assunto.

Esta 25ª aula observada começou com a correção do item IV, (os outros haviam sido feitos e corrigidos em aula anterior)

27. Para cada um dos gráficos.



a) Elabore uma tabela e registre as coordenadas dos pontos assinalados.
b) Descubra a fórmula da função que está sendo representada.
c) A função é constante ou do 1º grau?

A professora dirigiu-se ao quadro-negro e desenhou uma tabela, realizando uma *conversão*. Colocou as colunas x e y e voltou-se para a turma dizendo:

P: - Dita para mim os números, aqui, faça o favor...(apontando a coluna do x)
Cam: - Dois e cinco... menos dois...

A professora repetiu e anotou :

P: - Dois e cinco...
Cam: - Menos dois..
P: - Menos dois e cinco...
Cam: - Menos três...
P: - Menos um e três.
Cam: - Menos dois e menos três.

A professora corrigiu:

P:- Dois e menos três
Cam:- Três, dois, três...
P: - Três...

A professora voltou-se para a aluna esperando o próximo valor.

Cam: - Dois, três.

Os colegas interferiram:

Jea: - Quatro...
Die: - Quatro...
Cam : - Dois, três.
Max: - Quatro e menos três.
P: - É quatro ou é três?
As: - Quatro.

A professora completou a tabela:

x	y
- 2	5
- 1	3
2	- 3
4	- 7

Perguntou aos alunos quem sabia a fórmula. Andou por entre as carteiras e uma aluna disse ter feito o exercício, porém não sabia explicar. A professora continuou andando e perguntando quem conseguira a fórmula. Foi ao quadro e dirigiu-se ao aluno novo:

P: - Só um pouquinho... ôô .... Jeh.. Isto aqui, escrevendo a fórmula y = ax + b, é a expressão geral que a gente viu e está se referindo à função de primeiro grau, certo?
Jeh:- Certo.
*P: - Isso quer dizer: pra gente encontrar o valor de ipsilon... vai variar bastante o xis aqui (*mostrando na tabela, a coluna do x *), a gente pôs vários valores e os ipsilons vão depender deste xis,* (mostrando na fórmula geral*)... vai variar o ipsilon em função deste xis aqui,... né? Você... colocando aqui (* mostra o x na fórmula geral*)... valores diferentes, tem valores diferentes pra ipsilon... e este* **a** *e este be seriam os números, as letras das, ... os números da função. Estes (*x e y*) é que são as variáveis. Então, aqui na tabela. Só que a gente não consegue escrever a fórmula, o número, isso aqui... porque a gente olhou pra essa tabela aqui e não conseguiu. A maioria... da turma não conseguiu fazer a fórmula ou não tentou. Gostaria de saber quem é que se debruçou, olhou um pouco pra aquilo e...*

Lui levantou a mão e a professora falou:

P: - Anh? Você?
Lui:- Fiz, mas não consegui professora.
P: - E quando... Não conseguiu?
Lui: - Por enquanto... já diminuí.... é ... eu fazia uma coisa que dava certo com um, mas com o outro não dava.

O aluno, que tentou resolver, sabia que a fórmula tinha que funcionar, isto é, para cada valor de *x* tinha que dar um valor de *y* na tabela. Somente o aluno Tai fizera. A professora aproveitou sua resolução para incentivar os colegas a pensarem. Tai auxiliou a professora a construir uma *conversão* à medida que esta tecia a passagem da tabela para a fórmula.

P: - É? E aí, eu queria que vocês olhassem mais um pouquinho, antes da gente pedir a explicação dele... Então, assim: uma das coisas que... que a gente pode observar, olhando essa tabela.

A professora foi ao quadro negro e iniciou a explicação a partir da tabela.

x	y
- 2	5
- 1	3
2	- 3
4	- 7

P: - Que o ipsilon...
A5: - É maior que xis.
P: - É maior que xis. ...
Max: - Ooooh!

A professora atendeu ao aluno A5.

P: - Então, pra ficar maior, deve ter somado alguma coisa? ... Multiplicado?
A5: - Não, falei bobeira...
P: - Ah, sei... aqui esse (y) é menor do que esse(x)... né? (referindo-se ao par (2,-3) da tabela)Que mais?
Tai: - Quando um é positivo, outro é negativo...
P: - Isso! Enquanto aqui é positivo (x)*,esse ficou negativo* (y)*, enquanto esse é* (x) *negativo, esse ficou positivo* (y)*... Pra fazer essa modificação, o que a gente podia... ir buscar?*
Tai: - Menos xis.

A professora olhou o caderno de Tai, dirigiu-se ao quadro e escreveu a conversão feita por ele:

P: - A fórmula que oTai escreveu foi bem assim...

$$y = 2.(-x)$$

P: - (a professora continua):- *Mais?*

Tai:- *Um.*

P: - Um. (e completa a fórmula).

No quadro o seguinte registro apareceu:

y = 2.(-x) + 1

No diálogo com Tai, a professora justificou o *tratamento* para a troca de 2. (-x) por –2x.

P:- *É... quando você tem o menos na frente do xis, significa... que você... tá querendo o oposto dele... né? Se você tivesse... é... que me dizer qual é o valor do número que multiplica xis,... multiplica xis, ... o xis, sem sinal, qual é o número que vai lá ... nesta tua fórmula aí?*
Tai: - Menos dois.
P: - Menos dois? Por que esse daqui, a gente podia dizer que é assim, ó... Menos um vezes xis,((-1).x) *dá o oposto de xis* (-x)*, ... né? Você mantém o mesmo número aqui* (2), *só que com o sinal trocado.*

A professora reforçou a posição do **a** e sua relação com x três vezes:

P:-...*o valor do número que multiplica xis,... multiplica xis, ... o xis.*

A professora recorreu sempre a fórmula da função de primeiro grau, mantida no quadro, procurando fazer com que os alunos estabelecessem a relação entre os elementos encontrados, -2 e +1 do exercício resolvido, com os respectivos valores a e b dessa fórmula. Como pode ser observado quando se dirigiu a Tai:

*P: - Certo? Então, este daqui (*apontando o **a** da fórmula geral*), a gente pode dizer que é menos dois. Este **a** que está aqui é um número só.... que vai multiplicar o xis .... então... aqui parecia que estavam dois, separados, ... né? E eu quero só um número,... que multiplique o xis e que some ... que some lá com o outro ou que subtraia, né? Então, quem é o **a**? O **a** é menos dois. Quem é o be? O be... é um,... certo?*

Tai assentiu e a professora finalizou a *conversão* com o seguinte *tratamento*: escreveu abaixo da fórmula anterior y = - 2x + 1. A seguir falou:

P: - Então, esta é a fórmula. Como a maior parte dos alunos não conseguiu fazer, porque é difícil, porque de olhar lá, não tava fácil mesmo, ele aqui (Lui) *tentou várias coisas, multiplicou, somou, disse que dava certo para uma linha, pra outra já não dava. Porque o que dá certo aqui, ó?*

Após comentar a tentativa dos alunos de transformarem a tabela em fórmula, ela conduziu a validação da fórmula para que eles constatassem ser aquela fórmula - que dava certo -, do seguinte modo:

P: - Se substitui o xis aqui, ó... e soma um,... quanto é que vai dar isso?
Tai: - Mais quatro.
P: - Mais quatro?
Tai (se adianta)*: - Mais um...*
P: - Com mais um? Cinco. Agora no lugar do xis, coloque menos um...
Tai: - Dois...
P: - Dois? Mais um?
Die: - Espera aí. ...
*P: - (*ainda dialogando com Tai*): - E agora? ... Aqui é menos quatro... com mais um?...*
Tai: - Menos três.

Em seguida, associou - estou devendo - a um número negativo retomando uma representação *intermediária* (em língua natural), utilizado em aulas anteriores:

P: - Tô devendo... Quatro, menos dois,... vezes quatro, e soma um...
Cam: - Menos sete...
P:- Menos sete! Por que? Menos com mais, dá menos... dois vezes dois, quatro, oito, oito negativo, tô devendo oito...
Die: - Paguei um...
P: - Paguei um, fico devendo sete... acabou ... Então,... essa é a fórmula (e contorna com um retângulo a fórmula y = - 2x + 1).

Ela usou *tratamentos* diferenciados de operações com números inteiros e analogias como – paguei - e - fico devendo - para caracterizar os números positivos e negativos respectivamente. Na multiplicação, porém, usou a regra - menos com mais, dá menos -.

Os alunos reclamaram que era difícil achar a fórmula da função a partir do gráfico, passando pela tabela. Ela propôs:

P: - Bom, então é assim: quando for difícil, existe um outro caminho matemático pra gente descobrir isso, que é o seguinte: vamos à álgebra...

Tai falou que era mais difícil pelo caminho algébrico. No livro didático havia um exemplo que fornecia as coordenadas de dois pontos para serem substituídas na fórmula geral de uma função para criar um sistema de equações. A professora tendo como referência esse exemplo, disse a Tai:

P: - Você olhou lá no livro e já está explicado, mas a nossa explicação aqui, a gente vai lembrar do que a gente já fez e vai ficar super fácil, quer ver?

Ela propôs a resolução pelo sistema de equações e recorreu à memória fazendo-os lembrarem deste conteúdo trabalhado no início do ano. Usou a tabela já construída e realizando a *conversão* para a fórmula, solicitando a atenção dos alunos para o fato de haver escolhido exatamente aqueles dois pontos da tabela anteriormente apresentada e não outros, para chegar à fórmula:

P: -:... nós vamos escolher aqui (apontando a coluna do x na tabela)*... o que a gente conhece. Que é que nós conhecemos? Nós conhecemos valores de xis e de ipsilon, porque a gente já tinha o gráfico, a gente tirou esses pontos lá do gráfico... aí a gente pega dois, e eu escolhi de propósito e vocês já vão descobrir porque que eu escolhi este* (contorna com um retângulo a linha da tabela onde xis tinha valor menos dois) *e este* (contorna com um retângulo a linha da tabela onde xis tinha valor mais dois)*, fácil não lembrar ...quando a gente estiver resolvendo sistema de equação, porque que é que eu escolhi estes dois. Podia escolher este e este* (aponta a primeira e a segunda linha da tabela)*, este e este* (aponta a segunda e a quarta linha da tabela)*, tanto faz... Qualquer um. Mas, eu escolhi, de propósito, estes dois. E vocês já vão descobrir por quê. Depois, quando vocês forem fazer, também, vê se procura o mais fácil, né?*

Expôs os procedimentos de *conversão* da tabela para a escrita algébrica (fórmula).

P: - Aí, assim: onde tem xis, que eu conheço e onde tem ipsilon... eu substituo aqui, nesse, ... dessa forma, porque eu quero resolver, quero escrever, a fórmula, neste formato (y = ax +b)*, ... certo? Então, como eu não conheço a e não conheço be* (b)*, que no caso, é menos dois e um, que o nosso amigo aqui* (Tai) *já tinha descoberto, nós vamos chegar lá pelo caminho inverso: nós conhecemos o xis e o ipsilon, vamos descobrir o* ***a*** *e o be* (b)*, ok? Então, dita lá pra mim: quanto é que vale o ipsilon, na primeira?*
Die: - Cinnnncooo...

A professora escreveu e falou*:*

P:- Cinco...
Die:- É igual a a vezes...

Continuou escrevendo e falando:

P:- a vezes?
Tai: - Menos dois.
P: - Menos dois.
Die: - Mais be(b).

Escreveu, então, no quadro a seguinte equação, construída com a ajuda dos alunos:

$$5 = a. (-2) + b$$

Na equação -3 = a.(2) + b lembrou aos alunos que alguns podiam não reconhecer a equação nessa forma de apresentação. Realizou, portanto, um *tratamento* para passar as duas equações para a forma ax + b = c preparando a resolução do sistema, como a seguir:

P: - Pra quem lembra é uma coisa, prá quem não lembra... Pra quem lembra... olha lá e diz: "Nossa, mas a professora não escrevia ***a*** *e be, escrevia xis e ipsilon. A professora não punha esse número aqui, punha ele do lado de cá... Que confusão que ela está fazendo!" Vou escrever do jeito que a gente escrevia antes, tá?* (ela estava se referindo a inversão dos dois lados da igualdade) *A mesma coisa que está aqui, só...*

Após colocar as equações de modo a parecer com os sistemas vistos no início do ano, justificou o *tratamento* da resolução de um sistema de equações e disse porque escolheu os valores 2 e –2 da tabela, para comporem as equações, como valores de x .

P: - Por que será que eu escolhi o menos dois e o mais dois?
And: - Pra cortar.
P: - Pra cortar, pra eliminar o ***a****, aqui, de vez...*
As: - Ahhhhh....!! Aíííí!!
And: - Corta!!!
P: - Corta!!!! Sobra "zero" ***a****, aqui. Então? Não tem* ***a****. Aí, vai ficar uma equação do 1º Grau... né?... Com uma incógnita... fácil de resolver... Quantos bês?*
As: - Dois!
P: - Dois be(b) igual a....?
As: - Dois...dois... dois...

E a professora completou a expressão abaixo no quadro*:*

$$\begin{array}{r} -2a + b = 5 \\ \underline{2a + b = -3} \\ 2b = 2 \end{array}$$

Um aluno disse não entender e um colega procurou auxiliá-lo. A professora o tranqüilizou.

P:- Não entendeu?
Jeh:- Não.

Neste momento, Max utilizou as representações *intermediárias*, sugeridos anteriormente pela professora, para ajudar o colega.

Max: - Dois, 'tô devendo três,... paguei com cinco reais...

A professora chamou atenção dos alunos:

P: - Vamos prestar atenção, que daqui a pouco "cai a ficha".

Outro aluno comentou:

Jea: - Ai, professora, eu não aprendi.

Ela lembrou que fariam mais exercícios e ele entenderia.

P: - Eu sei, meu filho, mas é assim... porque...nós vamos fazer mais vezes, nós vamos fazer mais uns três... daí, daqui há pouco, assim, você vai fazendo e colando do que já foi feito... pra isso eu estou esperando que você pegue a sua caneta e escreva: prestando atenção e escrevendo, pra poder fixar se não, não vai: ... quanto é que deu o be(b)?

Continuou a explicação auxiliada por Tai.

Tai: - Be (b) igual a um.
P: - Be(b) igual a um. Pergunta a turma: - Por que?

Um aluno disse:

A3 - Ah, sei lá.

A professora explicou*:*

P:- Dois vezes be (b)*? Dois vezes um número, dá dois. Que número é esse?*
Cam: - Um

Na explicação da professora a pesquisadora identificou uma *congruência* ao realizar a *conversão* da escrita algébrica (equação 2b = 2) para língua natural (dois vezes um número dá dois).

O diálogo mostra os *tratamentos* sugeridos pela professora:

P:- Um. Como é que resolve isso aqui?
Tai: - Passa o dois daqui pra lá, dividindo.
P: - Passa o dois pra cá, dividindo,... ou ...divide esse (2x) *e esse* (2) *por dois, faz...Ahn?*
Die: - Devia cortar a metade ali. (apontando os dois membros da equação)
P: - Isso.
Tai: - Não precisa, faz direto.
P: - Tem um povo que corta aqui, passa pra lá, não sei o que... aquelas coisas... do jeito que aprendeu, faz... contanto que faça certo.

A participação dos alunos foi intensa e a professora procurou descontrair a turma sem perder o foco da aula.

And: - É um.
P: - Descobriu o bingo! É um! (e escreve abaixo de 2b=2 a expressão b=1)
Die: - Isso! Agora substitui pra descobrir o um.
P: - Olha só! Era um, mesmo... Nooossa! Agora falta descobrir o quê?
As: - Ooohhh!
P: - Não é o "ooohhh", não! É o "aaaa"! Agora falta descobrir o "aaaa"... aqui, que é menos dois.
As: (risos)
P: - Como é que a gente vai fazer isso?

A participação dos alunos continuou e a professora prosseguiu com o *tratamento* resolvendo um sistema de equações.

P: - Certo? Quanto é que é o be(b) mesmo?
As: - Um.

A professora separou a equação 2a + 1 = - 3.

*P: - Então conte isso aqui... dois **a**, com o um, dá menos três... Pronto, ficou com uma equação, onde só tem o **a**, aqui, e você consegue descobrir o valor dele, ou não sabem resolver equação de primeiro grau?*
Max:- Professora, é menos quatro.
P: - Aonde?

Os alunos falaram quase conjuntamente.

Max: - Dá menos quatro e menos dois.
Lui: - Menos dois ... é menos dois.
A8: - Menos um é igual a menos dois.
Cam: - É menos dois.
P: - O que que há?
Tai: - Passa o um pra cá, com sinal negativo.

Max chamou a professora e mostrou o caderno.

P: - Ah! Pôxa, guri, tá certo! Não precisamos brigar por causa disso, é isso mesmo... Claro!Como é que ele descobriu isso?
Tai: - Passou o um pra lá. (apontando o lado direito da igualdade)

A professora retornou ao quadro negro e escreveu a equação utilizando uma representação *intermediária*, a seta, para enfatizar o *tratamento* sugerido por Tai e explicou*:*

$$2a + 1 = -3$$

P: - Passou o um pra lá!...(reescreveu a equação acima aplicando a propriedade da adição) *Tira um daqui, tira um daqui, fica com... né ... os quatro... exatamente.*

$$2a + 1 - 1 = -3 - 1$$

Ao reduzir a equação para 2 a = - 4 a professora aplicou um *tratamento* e em seguida utilizou uma *congruência* na *conversão* assim expressa:

P: *- Que mais? Dois multiplicado por um número, vai dar menos quatro, que número é esse? E aponta para o **a.***
Jea: - Quatro.
Tai: - Menos dois.
A5: - Menos quatro.

A professora corrigiu o *tratamento* sugerido pelo aluno e orientou os outros *tratamentos* sugeridos por Tai e Cam.

P: - Dois vezes dois, dá quatro, não dá menos quatro.
Tai: - Dois vezes menos dois.
P: - Ah!... Tá!
Cam: - É menos dois.
P: - Não é a mesma coisa, sinal é sinal... Então, aqui, "ó"...

A atenção da professora se voltou às explicações dos alunos.

P: - Tá multiplicando... Tá dividindo... Menos quatro dividido por dois?
Max: - É menos quatro ali.
Tai - Menos dois...!,
P: - Menos dois...! Não é que o Tai acertou, meu Deus do céu, olha que lindo! Que o a é menos dois. [...]O be é um

A pesquisadora identificou *tratamentos*. A professora prosseguiu sua interação com a turma quando Jea percebeu a relação entre o *a* e o *b* da função com os valores achados pelo sistema de equações. Jea falou do exercício resolvido pela professora.

Jea:-Já tá pronto pra sair ali.
P: - Sim, aquilo que você não conseguiu, e só ele (Tai) *conseguiu... tinha que ensinar um jeito pra você conseguir de qualquer jeito...*

A professora assumiu a responsabilidade da aprendizagem do aluno, com a preocupação em justificar a ele não haver um caminho mais fácil, menos trabalhoso, para fazer a *conversão* entre a tabela e a representação algébrica da função.

Cam: - Eu não sei.
P:- Certo? Você ia ficar em cima ali, e não ia adivinhar? Pois, não é pra adivinhar, então! Tem que ter um jeito, um método, um caminho pra você poder resolver isso. E o caminho é o...? Como é que é o nome desse "troço", aqui?
Cam: *- Nossa, aquela contarada lá.*

A professora perguntou:

P:- Qual é o nome da "parada"?
Anr: - Sistema de Equações...

A professora sugeriu deixar o sistema resolvido no quadro como referência para auxiliar a resolução dos próximos.

P: - Isso, Anr ! Sistema de Equação ! de Equações..., né? São duas... Muito lindo... Pena que eu me espalhei tanto, aqui,(escrita no quadro negro) *né, pra variar ... eu vou deixar essa parte, daqui para cá, pra quem for fazer o próximo... dar uma "colada".* (A "colada" era seguir o modelo dos procedimentos de resolução)

A professora explicou*:*

P:- Não tem um jeito bem mais simples de fazer... Ah! Ou senão, você fica lá, mais uma meia hora, olhando pra tabela e descobre isso aqui... né, Tai? É fácil fazer assim.
Tai: - É.

Os alunos ainda não estavam convencidos ser esse o melhor caminho. A professora solicitou a um dos alunos que não entendera para que fizesse no quadro o exercício.

Jea: - Professora eu não entendi ali.

Van reclamou que o caminho era difícil. A professora continuou a explicação anterior:

P: - Depende da tabela, eu acho... Porque se fosse dividir... subtrair... mais não sei o que, aí ia ficar difícil... Então, tem que ter um caminho? É esse daqui! (mostra o sistema de equações no quadro) *E esse aqui não é o mais difícil...*

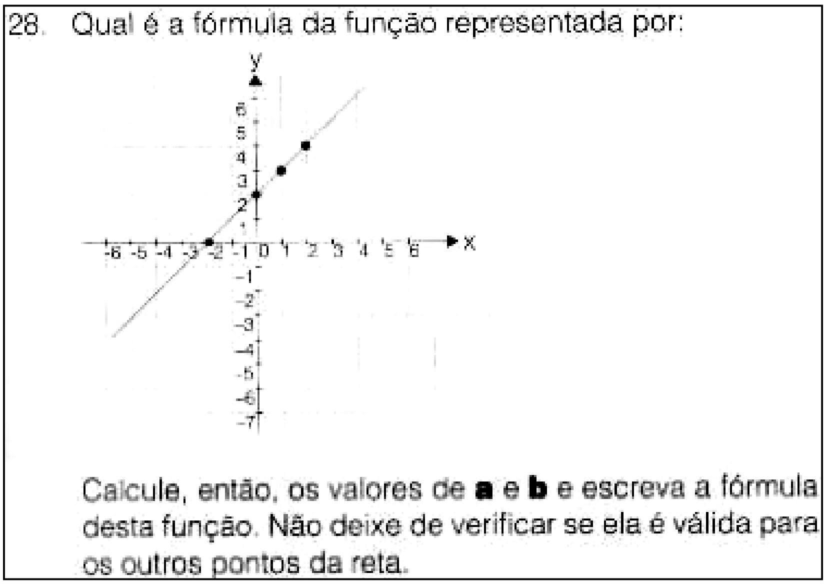
A professora voltou-se para Jea que conversou boa parte da aula com colegas e disse:

P:- Não sei do que é que você está reclamando... Você acompanhou o raciocínio?... Agora, você vai fazer um outro aqui, do lado, olhando pra esse, e vai chegar no resultado e vai ver que, se você fizer uns cinco, você se lembra do que nós estamos falando.

Mesmo Tai que conseguira achar a fórmula ao realizar a lição de casa, reclamou do trabalho dispensado para resolver o sistema.

Tai:- *Deu certo ! Três é igual ... uma vezes xis, mais dois... xis é igual a quanto?*
Tai (falando baixinho com o colega)*: - Graças a Deus acertei. Pô, que "bagulho" chato! O melhor era pegar uma maquininha assim*...

A aula foi rica em situações de *conversão.* A professora desenhou o gráfico a seguir no quadro e comentou:


28. Qual é a fórmula da função representada por:

Calcule, então, os valores de **a** e **b** e escreva a fórmula desta função. Não deixe de verificar se ela é válida para os outros pontos da reta.

P: - Bom, o que é que o exercício vinte e oito fornece? Muito bem! Um gráfico... e pede pra que você, através ... a partir deste gráfico, (bate com o giz duas vezes sobre o gráfico) *escreva a fórmula. Como é que nós vamos fazer isso, hein, Jon?*

Jon não trouxera o livro. A professora pareceu desapontada.

P: - Ah, logo você.

Die perguntou para a professora*:*

Die - Faz a tabela?

A professora voltou ao quadro negro, desenhou a tabela e disse:

P: - Bom, o primeiro ponto está marcado aonde?
Tai: - No menos dois.

P: - Parece que aqui no dois...
Tai: - É… no menos dois.

Ela interferiu sugerindo o caminho seguinte nas *conversões* gráfico → tabela, tabela → fórmula e também como achar a fórmula. Dirigindo-se aTai falou:

P: - Ah! Então, meu amiguinho... vamos marcar aqui, "ó"... : uma tabela (e desenha uma tabela)... *sai do gráfico pra tabela, da tabela pra fórmula. Se não souber a fórmula aqui, vai pro sistema... de equações, depois chega na fórmula... Captou a mensagem?*

Em seguida realizou, com ajuda dos alunos, a *conversão* dos pontos do gráfico para valores da tabela apresentada após os diálogos.

P: - Olha aqui! Isso é o primeiro ponto... essa é a linha do xis... aqui vale menos dois.... Nem subiu, nem desceu pra... encontrar o ipsilon aqui, né? O ipsilon é quanto?
Jon: - Zeeeero.
P: - É?
A7:- É!
Jon: - Zeeero...zeeero.
P: - (no quadro explicando e mostrando no gráfico) *Tá na direção do ipsilon igual a ?*
Cam: - Zero.
P: - Zero. Menos dois e zero (e anota na tabela os valores respectivos). *Onde é que está o outro ponto?*

Tai e Die falaram quase ao mesmo tempo, que era no dois.

P: - Aqui. (apontando o ponto no gráfico)
Tai: - Xis vezes um mais dois... xis mais dois.
P: - Quanto é que vale o xis, aqui?(apontando no gráfico) *Esse ponto está em que direção do xis?*
Jon: - Zero.
P: - Do... Zero. Zero para xis... (anota na tabela)
Jon:- Dois.
P: - Dois... para ipsilon...(anota na tabela)
Tai: - Essa é fácil.
P: - Qual é... aonde é que está o outro ponto?
Fer: -Três e menos...
P: - Aqui! (aponta no gráfico) *Quando xis vale... um... tenho que subir até o....*
Cam e And: - Três.
P: - Três... Então, um e... ?
Cam: - Três!
P: - Três! (anota na tabela) *Onde é que está o outro ponto?*
Cam: - Quatro.
P: - Dois para xis ...
Cam: - Quatro.

P: - Quatro para ipsilon… Dois e quatro... certo? Saímos do gráfico, identificamos o xis e o ipsilon...
Max: - Ipsilon é igual a quatro?

x	Y
-2	0
0	2
1	3
2	4

A professora não escutou a pergunta por que atendia outro aluno.

P: - Ipsilon é igual a dois...? Aonde?
Tai: - Não é função, professora.

Após o comentário de Tai, outro aluno fez uma pergunta não captada pelo gravador e, ao respondê-lo, a professora auxiliou Tai.

P: - Ah, entendi, agora... Você me pega no meio do caminho... (volta ao quadro negro)
P: - Aqui, "ó": quando aqui tudo é dois (apontando a coluna do y)*, aquela reta ficava assim, "ó"* (e desenha uma reta paralela ao eixo x passando por 2)*... daí era uma função constante, você podia dizer: "ipsilon igual a dois". Essa daqui, não! Essa é assim, ó,*(e mostra a reta no gráfico) *é uma reta, ela está inclinada, e aí, isso daqui, então, é uma... ?*
Tai (falando baixo)*:- Função... de primeiro grau.*

A professora apresentou, nessa aula, diferentes registros da função constante por meio de: tabela (... quando aqui tudo é dois (apontando a coluna do y)); gráfico (aquela reta ficava assim, "ó" (e desenha uma reta paralela ao eixo x passando por 2) e língua natural (você podia dizer: ipsilon igual a dois.). Usou o gráfico para distinguir a função constante da função de 1º grau (Essa é assim, ó, (e mostra a reta no gráfico) é uma reta, ela está inclinada, e aí, isso daqui, então, é uma... ?)

Reforçou a explicação do tipo de gráfico no quadro.

P: - É deste tipo aqui sabia? (desenhando o gráfico da reta inclinada em relação ao eixo x),
Jea: - Ah!

A professora respondeu a Tai, algum tempo depois*:*

P:- Ah-hã! É mesmo! Primeiro... Grau!

Cam conseguiu, possivelmente pelas representações expostas no quadro, anunciar a fórmula correspondente ao gráfico do exercício 28.

Cam: - Xis menos dois.

A professora não escutou a aluna. A aula continuou com diálogos paralelos entre alunos e entre a professora e alunos. Tai replicou ser função de primeiro grau e a professora repetiu:

P:- Função de primeiro grau... 'Tá!... Sabem fazer aqui, já, a fórmula?
Tai (rápido*): - Xis mais dois, professora.*
P: - É fácil essa fórmula, aqui, né?
Die (em tom de brincadeira*): - Não, é difícil.*
P: - É? Não, eu acho que é bem fácil! Olhe bem pra ela...

Em meio a resolução a professora ajudou uma aluna que queria usar sistema de equações.

P: - Então! É assim: você pega os números daqui... um por um... pega esse, faz uma conta![...] Pega esse, faz a mesma conta e aí, tem esse resultado (a primeira equação). *Pega esse, faz a mesma conta, dá esse resultado*. (a segunda equação)

Depois a professora ouviu alguns alunos falarem que não era a função correspondente e ela fez a validação da fórmula via tabela.

P: - Claro que é, gente! Essa não combina,aqui? (mostrando na tabela) *"Ó": mais dois, dá quatro; mais dois, dá três; mais dois, dá dois;... mais dois, dá zero*!

Cam falou novamente que a fórmula era xis mais dois e a professora contente diz*:*

P:- Isssso!
Cam: - Até eu acertei, gente!

P: - Então, a fórmula é essa aqui, mesmo!(a professora escreve no quadro y = x +2*)*

Cam sorriu orgulhosa. A professora retomou a escrita da fórmula para finalizar a atividade.

P: - Como é que é a fórmula?
Tai: - Um xis, mais dois... a vale oito.
Max: - Xis mais um mais um.
P: - Xis... mais...
Cam: - Dois.
P: - Dois!... Pego o xis... somo dois, e vai cair do lado de cá.
Tai: - Professora, não tem que descobrir o ***a****?*
P: - Quanto é que vale o ***a****, aqui? Quanto é que é o* ***a****?(*nesse momento soa o sinal avisando o final da aula, mas a professora prossegue*) Olha pra essas duas...O* ***a*** *é?*
Die: - O ***a*** *éééé... ?*
P: - E o be (b) é... ?
As:- Éé...? ééé...?
*Tai (*fala baixinho*): - O* ***a*** *é um e o be (b)é dois.*
*P(*não escuta e prossegue*): - Quanto é que é o* ***a****, ali?*

Os alunos falavam os valores de a e b como sendo 1 e 2, respectivamente.

Embora as *conversões* aparecessem em um número considerável de momentos, a intensa negociação dos *tratamentos* consumiu boa parte da aula.

4ª aula - Funções do 2º grau.

Esta aula, a 37ª observada, iniciou com a identificação dos coeficientes de uma função de 2º grau que a professora trabalhara na aula anterior e deixara como lição de casa. Ela começou corrigindo o exercício **c** abaixo, embora os alunos ainda conversassem muito.

32. Sem fazer os gráficos, responda para cada uma das funções abaixo:
- A concavidade da parábola é voltada para baixo ou para cima?
- A parábola tem ponto de máximo ou de mínimo?
- Quais as coordenadas do vértice da parábola?

a) $y = -x^2 + 3x$
b) $y = 3x^2 + 18x - 5$
c) $y = -5x^2 + 7$
d) $y = 36x^2 + 9x + 2$

Partiu da identificação dos coeficientes da função do 2º grau.

P: - Tem alguém que não saiba do que eu estou tratando aqui? Que eu já explico de novo! Todo mundo sabe do que eu estou falando? Quanto é que vale o ***a****?*
As: - Menos cinco!
P: - O ***b****?*
As: - Zero.
P: - E o ***c****?*
As: - Sete

A professora anotou no quadro os valores que os alunos falaram e prosseguiu:

P: *- Tá! É... essa parábola... é... a concavidade dela é apontada pra cima ou pra baixo?*
As: - Pra baixo!
P: - Por quê?
As: - Porque é negativa.
A professora corrige: - Porque é negativo o ***a****... é... ela tem ponto de máximo ou de mínimo?*
As: - Máximo !

Ela distribuíra, na aula anterior, um item do exercício para cada fila como lição de casa. A professora andou até a fila que ficara responsável pela resolução do item **c**, olhou rapidamente o caderno dos alunos e comentou:

P: - Vamos... montar o gráfico... turma, aqui, que fez a letra ***c****: Escolheu que ponto pra montar o gráfico? Qual seria o mais fácil... pra começar? (*propondo uma *conversão)*

Conferiu os cadernos dos alunos e disse:

P: - Não fez, não fez, não fez?.... Não fez?... Também não fez?
A1: - O problema era o gráfico.
A2 (falando *baixinho para o coleg*a): *- Qual que você fez?*

A professora dirigiu-se ao quadro, voltou-se aos alunos e perguntou*:*

P:- Ein, Cri, saberia me dizer qual é o ponto mais fácil pra calcular, aqui?
Cri: - Zero.
Sta: - Sete.

P (dirigindo-se a Cri)*: - Zero para... ?*
Cri: - Zero.

Ela já sugerira, na montagem de outros gráficos, mesmo os de função de primeiro grau, que os alunos sempre considerassem o zero como um dos valores de x, porque ficaria mais fácil de calcular. Era mais simples para realizar a *conversão* da tabela para o gráfico e também o *tratamento* dos pontos para montar a tabela. A professora corrigiu e dirigiu-se ao quadro.

P: - Xis! Certo? Zero para xis. (batendo com o giz sobre a função $y = -5x^2 + 7$ para chamar a atenção dos alunos) *Daria pra vocês me dizerem quanto é que vai dar o ipsilon?*
As: - Sete.
P: - Sete! É o que sobra, né, danado?

Andou em direção a um aluno que falou (não alcançado pelo gravador) e respondeu:

P - Sei! Zerou aqui, sobrou o sete. O sete é um termo independente, não dá... não tem o xis aqui; não depende dele, vai ficar só o sete, ali. Agora, o seguinte: Já expliquei como é que é a fórmula do vértice da parábola?
A2: - Já!
P: - Como é que ele é? Xis, do vértice...

A professora escreveu a fórmula no quadro auxiliada por Lui e Die.

*Lui: -Menos **b**.*
*P: - Menos **b**.*

Lui e Die quase simultaneamente falam:

*Lui e Die: - Sobre dois **a**.*
P: - Sobre dois **a**!

Ela escreveu no quadro:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Iniciou o *tratamento* numérico na fórmula da abscissa do vértice com ajuda dos alunos.

P : - Quanto é que vale o ***b****?*
Lui: - Zero.
Die: - Zero.
P: - Zero! Quanto é que vale o...
Die: - O ***a****?*
P: - O ***a****.*
Die: - Menos cinco.

Nesse *tratamento* um aluno completou**:**

P: - Menos cinco! Então, dá menos 10, aqui embaixo. (Escreveu x= 0/-10, apontando o –10 no denominador). *Que aconteceu? Xis igual a... ?*
A3: - Zero!

Ela evocou outro *tratamento* numérico.

P: - Zero! Por quê? Zero dividido por qualquer número – dez, vinte, trinta, um milhão – dá sempre... ?
As: - Zero!
P: - Zero! E esse já está aqui. Então, este daqui, quando xis é zero, põe o zero na tabela (e desenha a tabela para essa função escrevendo o zero em seguida)*, e vê lá... substitui na fórmula, sobra o ipsilon. Então, este daqui é o...?*
Jea (*falando baixinho*): *- Vértice.*
P: - Vértice... tá entendido? A gente pôs o mais fácil e, coincidentemente, ele é o vértice! Se é o zero aqui no xis..., se é <u>esse</u> (batendo com o giz sobre x =0) *o ponto, onde vai estar dirigido o vértice... ela tá virada pra baixo,... não sei se ela tá aqui, se ela tá aqui,... aqui, aqui,... não sei aonde que está!* (à medida que falava, apontava com o giz em diversos lugares sobre o eixo y) *Eu só sei dizer... o vértice tá aqui no zero, sete... tá?*

A professora escreveu no quadro V(0,7) enquanto falava*:*

P: - Zero... sete..., ok? Queria saber o seguinte: é... Vamos escolher valores pra xis. Quais seriam os melhores? O sete, o dez, o vinte, o trinta, lá adiante? Não! O que está em volta do...?

Os alunos completaram a frase da professora.

A4: - Zero.
P: - Zero! Um, dois, três; menos um, menos dois, menos três... tá?

A professora construiu uma tabela e colocou na coluna do x os valores que foi falando abaixo, ordenadamente:

P: - Menos um,... menos três..., menos cinco... será que é muito? (a professora apaga o –5 da tabela e coloca –2)*... Três, dois, um.*

Voltou-se para a turma e perguntou a uma aluna que conversava com a colega:

P: - Sabe substituir, dona Cam?... Vamos lá! Menos cinco...?

Pediu que ela ajudasse no tratamento a seguir. A aluna falava baixinho. (sua voz não foi captada pelo gravador).

P:- Menos um... ao quadrado...?
Cam:...
P: - Mais sete. Ótimo! Menos um, ao quadrado...?
Cam:...
P:- Um! Um vezes menos cinco...? Menos cinco, com mais sete...?
Cam:...

Para tentar impedir conversas paralelas, perguntava a quem estava conversando.

P: - Dois! É... (Bru estava conversando com Van) *Bru, menos cinco, vezes menos dois, ao quadrado, com mais zero! Quanto é menos dois, ao quadrado?*
Bru:- Quatro!
P: - Quatro. Quatro vezes menos cinco?

Mesmo em *tratamentos* bastante explorados ao longo da escolaridade anterior a aluna hesitou e a professora ajudou.

P: - Quatro vezes cinco...?
Bru:- Vinte!
P: - Vinte! Mais com menos...?
Bru: - Menos!
P: - Menos! Menos vinte... com mais sete ...

Bru falou muito baixo e a professora respondeu apelando para o *tratamento* com números inteiros, solicitando a ajuda dos colegas para esclarecer.

P: - Menos? Devo vinte...? Tenho sete, pago as contas e sobra...? Dívida!... Ou sobra dinheiro? Tem gente que hoje me perguntou assim: "Eu não sei quando é dívida... é mais ou é menos?" Alguém sabe me explicar, aqui?

Os alunos não responderam e a professora usou a seguinte representação intermediária*:*

P: - Quando a dívida é...? ... O sinal, ali, é...?
Die: - Negativo!
Bru: - Menos treze!
P: - Negativo né? Então, menos vinte, moça, com mais sete...? Dirigindo-se a Bru.
Bru: - Menos treze.
P: - Menos treze! (Anotou no quadro) *Não havia escutado. Três! Quem é o próximo? É o...?*
Fer:- Eu!
P:- É a...? (riu e complementou) *É "**a**".*
*Bru: - É "**a**".*

Na aula anterior ela chamara a atenção dos alunos para a simetria da parábola e como podia ser identificada no gráfico e na da tabela. Retomou nesta aula a identificação da simetria com base na tabela abaixo.

x	y
0	7
-1	2
-2	-13
-3	-38
3	-38
2	-13
1	2

P: - Dois! Notou alguma coisa, aqui, hein, Jon? (mostrando a coluna do y)
Jon: - Simetria.
P: - Simetria! Ótimo! "Pa-ra-rá, pi-ri-ri", pronto acabou. Zero, pra lá pra cá, são opostos, simétricos...

A construção do gráfico foi discutida com os alunos, especificamente a colocação do eixo x a partir do eixo y e a escala a ser adotada. Ela se valeu uma *conversão*, usando a propriedade da simetria, para fazê-los aperfeiçoar o gráfico.

P:- Ai, ai, ai, (fala a professora cansada). *Vamos fazer o gráfico. Pergunto para o... Rob! ... Rob me diga uma coisa – dá uma olhada na tabela, aqui:... o que eu devo... privilegiar...? A parte dos negativos ou dos positivos, no eixo ipsolon...? ... É que é assim: eu tenho que colocar o eixo xis,... tá? Ponho mais pra cima, pra poder caber aqui no quadro? Ponho mais pra baixo...? Onde que eu vou por? Ele é flutuante: põe aqui, põe aqui, põe aqui,... onde é que eu boto?*

O aluno apontou o local no eixo y onde seria colocado o eixo x. A professora repetiu:

*P: - Mais ou menos no meio, aqui...? (*no meio da reta vertical desenhada pela professora*)*

O aluno balançou afirmativamente a cabeça.

P:- E agora...? É isso pessoal, todo mundo concorda?

Os alunos não se manifestaram e a professora provocou:

P: - É...? Não, não é!

Os alunos permaneceram em silêncio e um aluno perguntou em voz baixa:

A5: *- Por que não, professora?*

A professora não escutou e respondeu antecipando a resposta da sala:

P: - Claro, que não, porque tem mais negativo do que outra coisa..., ora! Vou deixar, mais espaço aqui pra baixo... pros negativos.

Para levá-los a pensar, justificou apelando para a otimização do material escolar. Os alunos sussurraram algo e a professora falou:

P: - Não concordam, paciência! Depois, não cabe nada no caderno! Aquele monte de positivo, espaço sobrando lá no caderno e a mãe vêm reclamar que estou gastando muito caderno de vocês! Azar! Eu digo pra ela, daí, assim: "Todo dia, eu digo pra eles otimizarem o espaço: 'Vamos discutir onde é que vai o eixo xis'. Não querem aprender, fica difícil!".

A professora começou, então, a discutir com os alunos a escala a ser utilizada no gráfico.

P: - Olha só: menos treze e menos trinta e oito. Eu tenho que marcar aqui treze e trinta e oito. Será que marco de um em um?
Jon: - Não!
P: - De quanto em quanto?
As: - Cinco em cinco.
P: - Cinco em cinco? Tá ótimo! Cinco, dez, quinze... vou marcar o quinze (escreve sobre a parte negativa do eixo y)*, aqui...* (vai contando as marcas no eixo y) *vinte, vinte e cinco, trinta,* (escreve o valor no eixo y) *trinta e cinco, quarenta* (escreve o valor), *quarenta e cinco... então... Anotei alguns, ali, pra não ter que estar contando tudo de novo... Cinco, dez, quinze!... Bom, agora vem aqui (*ao quadro-negro*)... o ... Ric, o outro Rim* (são homônimos) *e marca aqui, esses pontos, de uma vez, pra nós! Um, dois, três, quatro, cinco negativo... Um, dois,... três,... quatro, cinco... Eu não escrevi todos os números pra não ficar poluindo, aqui, o meu... gráfico. Anda Rim! Chispe! Ah, já no quadro, rapaz! Tô esperando! Marca lá o primeiro ponto: o vértice da parábola.*

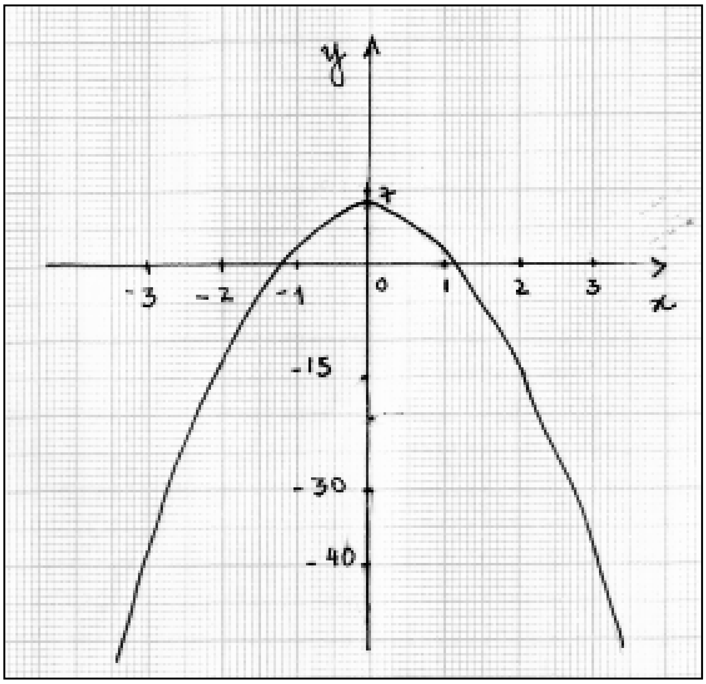
A professora atendeu outros alunos enquanto Rim, no quadro, demonstrou dificuldade em realizar a passagem dos pontos da tabela para a colocação dos pontos no gráfico. Os colegas tentaram ajudar. A professora recorreu à simetria para auxiliá-lo, foi até o quadro e Rim voltou ao seu lugar:

P: - Tá errado, né?... (olhando o que o aluno havia feito) *Tinha que ser lá no... Olha, só! Aqui tinha que ter um ponto*. (apontando determinado lugar na reta y) *Aqui tinha que ter...*
Die: - Que ponto que é esse? Três?
P (ainda atenta ao que Rim havia feito): *- Não, aqui no dois.*
Um aluno fala: - Aqui, professora!
P (ainda olhando o gráfico): *- Aqui, no três... gente do céu! ... "Ô", Rim!... Vem aqui.* (Rim dirige-se ao quadro novamente)*.*
Jon: - Conserte!
P (explicando a Rim): *- Junto com o outro* (elemento do par)... *e, assim: um tá marcando aqui, outro tinha que estar marcando aqui; um aqui, outro aqui; um aqui, outro aqui;...*
Rim: - Por que ?
P:- Por quê? Porque o nosso amigo aqui,(apontando para Jon), *falou: São... si...métricos! Um aqui, outro cá!*

Ela reforçou a fala batendo alternadamente com o giz, uma vez em cada lado do eixo y:

P: - Um aqui, outro aqui; um aqui, outro aqui... Como que o senhor me marca lá pra cima, pro outro lado?

O aluno trocara os valores do eixo x com os do eixo y. Os alunos conversavam entre si e a professora não prestou atenção por atender Rim que remarcou os pontos no gráfico com o auxílio da professora e traçou a parábola.



P: - É pra aprender, gente! (volta-se para Rim, perguntando se tinha aprendido. Ele move afirmativamente a cabeça.)

Os alunos não tiveram dificuldades em identificar os coeficientes a, b e c da função $y = 36x^2 + 9x + 2$. No entanto para calcular o vértice dessa função usaram um tempo considerável na resolução do algoritmo (*tratamento*) da divisão. Pat foi chamada para ir ao quadro.

P: - Olha lá! Olha lá! Olha a função, lá! Quanto é que é o ***a****?*
Pat: - Nossa! Tá na ordem isso? Referindo-se à função.
Jon: - Nossa! Trinta e seis.
P: - (*auxiliando Pat*)*: - Quanto é que é o* ***b****?... Quanto é que é o* ***c****?* (A aluna aponta os valores.) *Viu?... Ai, "que difícil"!*

A aluna escreveu os valores de a, b e c e a professora continuou:

P: - Agora, você substitui aqui na cola (apontando a fórmula da abscissa do vértice x = -b/2a que se encontrava escrita no quadro) qual que...

A professora percebeu, pela hesitação da aluna, que ela tinha dúvidas, e procurou ajudá-la com a *conversão* e em seguida com o *tratamento***.** Os colegas também participaram.

P: - Qual é o ***b****... Olha... você sabe o que meu amiguinho, ali, referindo-se a Jeh, fazia lá na aula de recuperação?*
Pat: - Não.
P: - Ele ia lá e "ó":... apagava o ***b****... que tá no quadro, né? Escrevia ...?*
Jon: - E colocava... nove!
P: - Nove! Apagava o ***a****... e escrevia...?*
Pat: - Apagava o ***a****... e ficava... trinta e seis!*
P: Isso! ... E agora aqui?
Jon: - Dá nove.
P: - Dois vezes trinta e seis ?
Jon: - Nossa... seis, doze... sei lá quanto é que vai dar isso! Cento e...
Pat (balbuciando algo ininteligível) : -.....
P: - (acrescentou): *- Setenta e dois está na tabuada do nove?... Lá na outra sala tem gente que disse o absurdo de que essa divisão (9 : 72) dá oito!*
As: - Noooossa! Meu Deus!
P: - Viu? Nossa? ...Hein? Hein? Se fosse essa sala, ninguém diria isso, né?
Lui: - Não, imagina!

A professora dispensou Pat, que voltou ao seu lugar e chamou Van ao quadro para realizar um *tratamento* operatório bastante conhecido. A abscissa do vértice resultou numa divisão de 9 por 72.

P: - Com exceção da Van... Então, Van, quanto é que dá essa divisão, aqui?(E escreve no quadro o algoritmo)*:*

$$9 \;\big|\!\underline{\;72\;}$$

Van: - Gente!!!

P:- Dite lá! (com o giz sobre o lugar do quociente)
Van: - Vai dar zero.

A professora solicitou, então, a calculadora.

P: - E eu quero o resultado desta conta, aqui... com a calculadora.

Os colegas pressionaram e Van voltando-se a eles disse*:*

Van: - Eu não sei!!!

A professora conversou com Van para acalmá-la e conduziu o *tratamento*.

P *: - Aqui é pra calcular a.... ali, do jeito que está: Nove... dividido... por setenta e dois... igual!... Pronto! Dá o resultado! Aqui! Quem não tem a calculadora, faz o quê?*
Van: - Zero... (apontando a casa à direita do algarismo 9 no algoritmo 9 : 72 escrito no quadro como abaixo)

90 | 72
0

P: - Zero...? Zero...? (a professora mostra o quociente da divisão 9 : 72)

Van (retifica)*: - Um..*. (anota no quadro)

90 | 72
18 | 0,1

P: - Um... Pra chegar em noventa...?
As: - Doze... doze...
Jon:- Dezoito!
Van (baixinho)*: - Ai, que susto!*
P: - É... continuando... Zero aqui! (escrevendo ao lado do 18 do resto)

90 | 72
180 | 0,12
36

*Jon: - Dois (*referindo-se ao quociente*).*
P: - Dois...?
Lui: - Cento e quarenta e quatro. (sob o 180)
P: - Cento e quarenta e quatro...?
Lui: - Trinta e seis.(resto)
P: - Trinta e seis...?
Lui: - Zero (acrescido a direita do 36*)... Três...* (no quociente)

90 | 72
180 | 0,125
360
<u>360</u>
000

Os colegas corrigem*:*
As - CINCO!

A professora apresentou uma alternativa de *tratamento* para a divisão acima, mas os alunos pareceram não perceber de que era a mesma operação.

P: - Isso! Quem sabe... daria pra fazer... simplificando, a fração 9/72, não é, meu querido?... Simplifica lá pra mim...dirigindo-se a Fer.
Fer: - Que história é essa, agora?
Tai: - Dividir por dois... menos seis...?
P: - Dividindo por...?
Fer (hesitando) *e Tai* (falando baixinho): *- Dois... dois...* <u>*dooois.*</u>

A professora escutou Tai e comentou:

P: - Por dois? O nove? Exatamente nove dividido por dois, dá quatro e meio, não tá certo!
As: - Por três...
P: - Por três? Quem sabe, dividir por nove?
A8: - Faça Lui.
P(olhando para Lui)*:- É?... Anh!... Dá quanto...?*
Lui : -Um.
P (apontando para o denominador)*: -... Aqui embaixo...? E embaixo...?*
Lui:- Dá oito.
P: - Dá oito!... Quanto é que é a conta "um dividido por oito"? (escrevendo o algoritmo 1:8 no quadro)*... Começa com quanto?* (apontando o quociente).
Lui: - Zero.
P: - Zero.
Die: - Vírgula...
Lui: - Zero...(referindo-se ao zero ao lado direito do algarismo um).
Die: - Zero lá...(apontando o um).
P: - Tá aqui...

A professora solicitou o uso da calculadora (pela demora do trabalho de cálculo das coordenadas do vértice da função):

Lui (olhando para a calculadora que estava em sua mão): *- Zero, um, oito, dois, zero, dois, dezesseis, quatro, zero, cinco, quaren...ta...*
P:- Aproximadamente, quanto que dá esse número, aqui... como é que lê esse número, aqui (0,125)... *pra marcar lá no gráfico...?*
Jon: - Zero vírgula um...

A professora disse:

P: - Zero vírgula um. Um décimo. Isso mesmo! Então... é... se você colocasse... pra xis – agora eu vou precisar que vocês saibam usar a calculadora mesmo ... menos zero vírgula cento e vinte e cinco para xis...? Quanto é que vai dar isso?

Bom, tem que substituir lá em cima: trinta e seis vezes... menos zero vírgula cento e vinte e cinco, ao quadrado; mais nove vezes zero...

A professora escreveu no quadro:

$$36\ (-\ 0{,}125)^2 + 9\ (0{,}125)$$

Van: - Meu Deus!
Jon: - Nooossa...
P: - Ao quadrado, nã...
Jon: - Não,... mais dois...
P: - Vezes...?
Jon: - Mais dois.
P: - Mais dois.

Completou no quadro a expressão*:*

$$36\ (-\ 0{,}125)^2 + 9.\ (0{,}125)\ \ +2$$

A seguir procedeu ao seguinte *tratamento* numérico com ajuda dos alunos.

P: - Quadrado desse? Apontando o 0,125.
Brd: - Zero vírgula zero...
And: - Zero vírgula...
Lui: - Dá zero vírgula zero, um, cinco, meia, dois, cinco. (0,015625)
P: - Vezes trinta e seis...
Lui: - Zero vírgula cinqüenta e seis, vinte e cinco. (0,5625)
P: - Agora... esse (9) *vezes esse.* (- 0, 125)
Lui: - Calma... Nove vezes... Nove... vezes... É um vírgula cento e vinte e cinco.
P: - Um vírgula cento e vinte e cinco.
Lui: - Dá três ponto "vírgula" vinte e cinco... mais dois, tre...
P: - Então, assim:... esse é negativo.(mostrando o – 0,125)
Lui: - É,... o final ali...
P: - Esse é positivo... (0,5625) *e esse é positivo* (2), *também... Vamos juntar este... e esse (* os dois positivos*), diminui esse...(* o negativo*)*

Lui auxiliou a professora utilizando a calculadora.

Lui: - Calma... menos um, ponto, cento e vinte e cinco, mais dois... então, dá... zero vírgula oitocentos e setenta e cinco.
P: - Esse aqui?
Lui:- Ah-hã!
P: -Tá.
Jon (falando com Lui)*: - Você tem que somar o dois...*
*P: - (*dirigindo-se a Lui*): - E aqui? Com mais zero... some com esse*. (com 0,5625)
Jon (conversando com o colega ao lado)*: - É negativo, "ó"...*

P: - Tá ótimo, tá ótimo, assim, vamos... continua.
Lui:- Zero, ponto,... cinqüenta e seis...

A professora explicou o *tratamento* realizado (algoritmo) aos colegas de Lui:

P: - Ele fez essa conta aqui primeiro... do dois ele tirou o que já tinha no... na calculadora.
Lui (interrompe): *- Um, ponto, quarenta e três, setenta e cinco...*
P: - Um, ponto, quarenta e três...?
Lui: - Setenta e cinco.
P: - Setenta e cinco. Então, aqui, vou arredondar, né?
Lui:- Um vírgula quatro.
P:- Um vírgula quatro, ótimo! Esse daqui (bate com o giz sobre o par ordenado encontrado)... *é o...vértice da parábola. Fizeram o gráfico, essa fila, aí?... Sim?... Como é que ficou?... Gente, é muita conta pra fazer aqui no quadro, não dá tempo. Tem alguém que tenha feito essas contas, aí, no seu caderno?*

A professora reclamou que essas contas grandes eram para ser trazidas prontas para a aula, pois era lição de casa. Voltou-se para a sala e perguntou:

*P: - Qual é o outro ponto que vocês escolheram? É em volta desse daqui! Destaca o vértice notado como V(- 0,125; 1,4). Esse aqui é o vértice da parábola. (*a professora desenhou a tabela para ser completada).

Relembrou que a construção do gráfico ficaria mais fácil se partissem do vértice da parábola como referência para a colocação dos valores de x utilizando a simetria. Voltou a discutir a escala das ordenadas.

P: - Tá difícil esse, por quê? Porque esses daqui não tinham sido programados para serem feitos... é... o gráfico, certo? Pedi pra fazer em casa por que... dá muito trabalho, aqui. Pedi pra pegar a calculadora, pra fazer... "Ô", And...? Você fez algum?

A professora dirigiu-se à carteira de And e ao ver seu caderno disse:

P: - Você fez? ...Fez? Rápido!?... Usou o quê?... Você calculou tudo isso, aí? ... Mas, e...? É eu acho que deu, sim, mas... Mas, é isso aqui...?... Menos três... (...) Tá certa, essa conta, aqui...? Ahn? Duzentos...?
Jon: - Duzentos e noventa e nove... Agora vai dar...

No quadro, conferiu os resultados da tabela com os alunos.

P: - Menos dois. Quanto que deu?
Jon:- Cento e vinte e oito... Cento e vinte e oito... O um, deu vinte e nove; dois...
P: - Vamos testar.
A9: - O meu deu menos.
P: - Trinta e oito.
Jon: - Um pouco antes...
Die: - Não, deve tá errado... Não, tava errado.
Jon: - Está certo, professora?... ai, tô cansado... dois...daí, um...

Max estava preocupado com a escala a ser utilizada no gráfico.

Max: - Professora, tem que fazer... de trinta em trinta, daí, hein
Jon: - Um, dois... eu fiz de dez em dez...!

Enquanto isso a professora pediu aos alunos para ajudarem a completar a tabela.

P: - Quanto que deu o um?
Jon: - Um: deu... quarenta e sete.
P: - O dois...?
Jon: - Cento e sessenta e quatro.
P: E o três?
Jon: - Trezentos e cinqüenta e três.

Ainda no quadro, a professora completou a tabela a seguir.

X	Y
-0,125	1,4
-3	299
-2	128
-1	29
0	2
1	47
2	164
3	353

Os valores encontrados na tabela levaram alguns alunos a comentar sobre o possível gráfico, antecipando a *conversão* da tabela para o gráfico.

Ped: - Vai ser enorme esse gráfico.
P: - Vai ser enorme esse gráfico, né, Ped?

Max: - Olha a grossura dele aqui, ó!

A professora, antes de começar a construção gráfica e realizar um *tratamento* numérico para representar a função em uma escala, perguntou aos alunos que escala usariam para o eixo y.

Die: - De cinqüenta em cinqüenta, professora!
Jon: - Eu fiz de dez em dez!
P: - Tá louco!
Die: - Tem que fazer de cinqüenta em cinqüenta!
As: - Nooosssa!
P: - A maior parte do gráfico... ou tudo, aqui do ipsilon está no positivo. Está virada pra cima. (a parábola)
Jon: - Fiz de dez em dez...
P: - E...
Jon (conversando com Die)*: - Fica bem grande...!*

Para acabar com a polêmica a professora disse:

P: - É de cinqüenta em cinqüenta... Pronto!
Jon: - Eu fiz de dez em dez, dava trezentos e sessenta!
P: - Depende do espaço.
Jon (falando com a professora)*: - Vai precisar de... bastante,* (referindo-se aos quadradinhos do quadriculado).
Jon: - Eu fiz de dez em dez, dava trezentos e sessenta, professora!

A professora marcou os pontos do eixo y com uma escala de trinta em trinta, sugerida pelos alunos, em vez da escala de cinqüenta em cinqüenta anteriormente proposta.

P:- Trinta.
Jon: - Noventa.
*P(*continuando a marcar os pontos*): - Noventa... cento e cinqüenta.*
Die: - Duzentos e oitenta.
P: - Duzentos e dez... duzentos e... "Ô", Meu Deus! Duzentos e dez, duzentos e quarenta...
Bru: - Oitenta, professora!
Lui: - Oitenta! Oitenta!
P: - Anh?
Lui: - Duzentos e oitenta.
P: - (marcando*): - Duzentos e oitenta.*
A9: - Professora, a diferença das fórmulas...
P: - Trezentos e...trezentos e... ?
Bru: - Trinta.
P: - Trinta... chega? ... Não, tem que ter mais um...
Jon: - Tem que ter mais um: trezentos e sessenta.
P: - Trezentos e sessenta... pronto!

A professora andou na direção dos alunos e perguntou:

P:- Quem que marca as contas, lá? (ela se referia ao *tratamento* dos pontos a ser realizado no gráfico do quadro)
Jon: - Eu!... Ah, deixa eu marcar.
P: - Deixo! ... Outra...? Ele (aponta Fer) marca de um lado, você marca do outro... Eu quero saber como é que nós vamos marcar o vér-ti-ce: aí é que está o "bicho"!...

A fala da professora antecipou a dificuldade dos alunos para realizar o tratamento dos pontos ao localizar e marcar o vértice de coordenadas (- 0,125; 1,4) com a escala adotada.

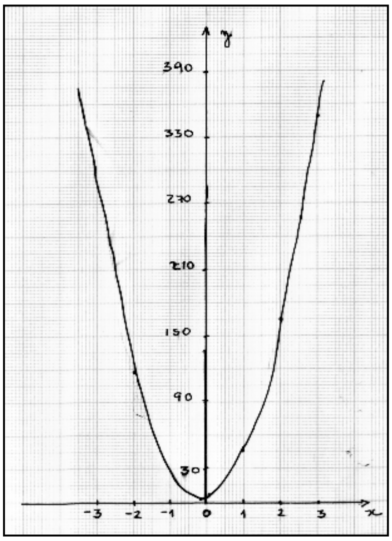
Jon indicou a Fer o lugar do valor de x no gráfico do quadro.

Jon:-Aqui, ó, zero, um...
Fer: - Tem que marcar.

A professora conferiu o *tratamento* dos pontos dados pelos alunos quando os colocaram no gráfico.

P: - Bom, então, vamos lá: ... menos três, vai lá no duzentos e noventa e nove; menos dois... no cento e vinte e oito...; menos um, lá no vinte e nove, pertinho do trinta;... e o zero... dois... aí... e o vértice, está onde? Isso, aí mesmo! Tá ótimo! Um pouquinho abaixo do dois... e do lado de cá. Ela não vai passar bem no zero ali, lá... na, na... no ipsilon, não tem... o vértice dela não tá ali, tá um pouquiiinho pra cá e bem lá embaixo... Olha só, que maravilha! Que espetáculo, nego, de serviço!

A professora uniu os pontos, traçando o gráfico desenhado, realizando um *tratamento* (localização de posições por seleção dos pontos e modificação da figura-forma**)** e chamou a atenção dos alunos para a posição do vértice.



Max: - Parábola!
P: - Que parábola! Aqui, "ó"! (mostrando o contorno da parábola) *Não tá encostado, se você chegar bem pertinho, você vai ver! Nem risca, tchê!*
Max: - Por que?
P: - Por que? Ahn?... Aponta o valor de y.
Max (em seguida): *- É verdade!*

Ao chamar a atenção para o lugar do vértice, a professora aproveitou o momento para recordar a *conversão* de c, coeficiente da equação de 2º grau, pelo seu lugar no gráfico.

P: - É verdade, né? Não tá encostando!... Porque aqui, "ó": "ó" o vértice onde é que tá: ... ali "ó", aqui "ó", ele tá! No dois ela está cortando o eixo. O nosso amigo, ali, o Max, ele aprendeu direitinho o que a... dona Cam, outro dia disse, que a parábola corta o eixo do ipsilon num lugar especial,... que é aqui "ó": nesta linha, o xis é...? Zero. Se você puser zero aqui, (no lugar de x) deu dois. Então, zero e dois é onde... a parábola vai cortar o eixo... ipsilon. Então, aqui ela corta o eixo (destacando o ponto 2 em y)... ipsilon. Muito bem! Ótimo! Para casa!

Nesta aula cabe destacar o uso da calculadora como ferramenta para facilitar o tratamento numérico. Embora fosse usada para ganhar tempo com o *tratamento* numérico necessário à solução da equação, ela não pareceu minimizar a dificuldade dos alunos em lidar com os números decimais. Foi necessário empenho da professora não só em conferir os valores encontrados pelos alunos, após o uso da calculadora, ao realizar as operações, como também, ao buscarem aproximações para os valores numéricos encontrados.

6.2.2.2 A realização de conversão entre registros nos dois sentidos

Foram analisados fragmentos da quarta e quinta aulas observadas para contemplar o sentido contrário das conversões encontradas nas duas primeiras aulas, fragmentos da décima oitava aula para contemplar o sentido contrário da conversão encontrada na aula de função de 1º grau.

1ª conversão contrária identificada – Escrita algébrica (Fórmula) → Figura (Desenho)

Para caracterizar o sentido contrário de conversão encontrado na primeira e na segunda aula que prioritariamente contemplaram desenho → fórmula, a pesquisadora escolheu o sentido fórmula → desenho presentes na quarta e quinta observação.

A professora iniciou a aula pedindo para And ler o exercício seis do livro.

And:-"Para cada fórmula dada abaixo, escreva a seqüência correspondente e procure fazer uma representação com desenhos.Use xis maior ou igual a zero ($x \geq 0$)".

Este exercício era composto de dois itens: a) $x^2 + 1$ e b) $3.x + 2$. Esses dois itens seriam os registros de partida para a *conversão* fórmula → desenho. A professora colocou no quadro a seqüência (0,1,2,3,4) e disse aos alunos:

P: - É para usar xis nessa seqüência aqui. O que significa isso aqui? e aponta o exercício $x^2 + 1$.
As: - Vou substituir o zero, um, dois, três, quatro (0,1,2,3,4)...no xis.
P: - Mas é só xis?
As: - Nããão, é xis ao quadrado.
P: - É o dobro?
As: - Não é ao quadrado.

Procurou reforçar o entendimento de que é x^2 que está em jogo e não x, fato importante na montagem das figuras que iriam representar posteriormente. A professora completou:

P: - É o quadrado mais um. Vamos usar esses valores de xis para formar a seqüência. Começamos com zero. Dá para substituir o xis na fórmula?
As: - Dá...
P: - Como faz? Lembram antes quando tínhamos, por exemplo, dois "n" mais um (2n+1) *qual era o total de bolinhas quando tínhamos a quinta figura?*

Os alunos responderam que não lembravam e a professora prosseguiu:

P:- Agora vamos trocar o xis pelos valores. Vamos montar uma tabela.

A professora montou a tabela tomando o cuidado de destacar o valor de x na forma x^2 estabelecendo uma correspondência que favorecia a *conversão* pedida pelo exercício. Completou a tabela abaixo dialogando com os alunos.

x	$x^2 + 1$
0	$0^2 + 1 = 1$
1	$1^2 + 1 = 2$
2	$2^2 + 1 = 5$
3	$3^2 + 1 = 10$
4	$4^2 + 1 = 17$
5	$5^2 + 1 = 26$
6	$6^2 + 1 = 37$

P:-Ainda não fizemos a parte de representar com desenhos. Vocês têm idéia como faz?
As: - Não.
P: -Tem letra be ainda...Antes tem o desenho e depois fazemos o be.
A8: -Tem que ser de bolinha? (semelhante ao exercício 3 corrigido na aula anterior)
P: - Pode ser bolinha ou quadradinho. Completem a tabela até o seis.Gostaria que vocês pensassem sobre o desenho...você, o Die, a Tas.

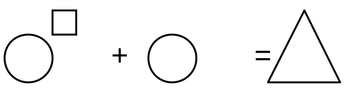
Neste momento ela estabeleceu dois registros para fazer a *conversão* e lembrou que existia um o padrão a ser mantido tanto na seqüência como no desenho.

P:- Existe uma seqüência de números e vai existir uma de desenho. Vai ter um padrão sempre. Vai ter um padrão no desenho. Lembram? Nos palitos, na bolinha, eu quero uma figura, não importa qual. Essa figura tem que ter um padrão. A forma não pode modificar. Pensem...

A professora deu sugestões para o desenho da seqüência, mas os alunos apresentaram representações diferentes.

*Cam: - Como eu desenho um quadrado (*da potência*)?*

Cam mostrou o desenho feito no caderno para a professora. Esta olhou e desenhou no quadro a representação da aluna, perguntando aos colegas:

P: - Este formato  *tem a ver com esse dois* (da potência)*?*

As: - Não entendi... não sei

Ao verificar que a aluna substituiria a potência denominada quadrado, vinculada à escrita algébrica com a forma quadrada das figuras geométricas, a professora auxiliou.

P: - Como você, poderia fazer a representação desse quadrado mais um? Como é dois ao quadrado?
Cam: - É um quadrado de quatro.
P: - E o três ao quadrado, o quatro ao quadrado o cinco ao quadrado?

Fez-se silêncio e a professora continuou:

P: - A Cam está com um problema. Ela pôs uma bolinha com um quadrado em cima. O problema é que esse quadrado (mostra na figura) *não está representando o quadrado* (da expressão algébrica).

A professora esclareceu o significado da palavra quadrado para este contexto.

P: - Essa palavra quadrado, a figura de um quadrado tem a ver com esses números aqui? Por que é que eu leio um ao quadrado, dois ao quadrado... Tem a ver com quadrado?
As: - Tem.
P: - Como eu desenho um quadrado, dois ao quadrado, por exemplo?
Lui: - Faz um quadrado com dois de lado.

A professora desenhou o quadrado, repartiu em quatro partes e perguntou:

P:- Tem quanto de área?
Lui: - Quatro.

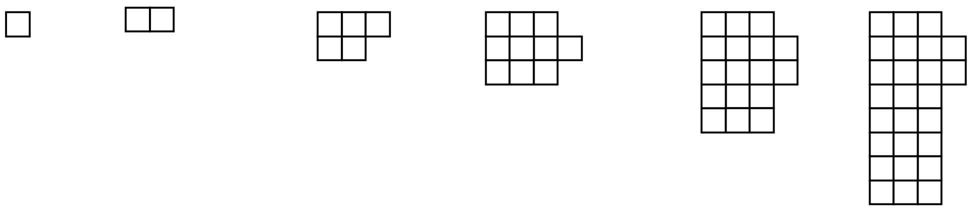
A professora aproveitou o auxílio de Lui e disse a Cam:

P: - Pensando desse jeito Cam, como fica o três ao quadrado?
Cam:- Fica nove.

A professora desenhou um quadrado composto por 9 quadradinhos.

P: - A leitura dessa frase xis ao quadrado mais um ($x^2 + 1$), com a figura que vocês sugeriram resolve o problema da nossa seqüência?

ecorreu à *conversão* entre a língua natural e o desenho para questionar os alunos. A professora mandou dois alunos ao quadro. Um deles completou a tabela até o x = 6 enquanto o outro fazia o desenho (Lui) da seqüência. Algumas alunas chamaram a professora.



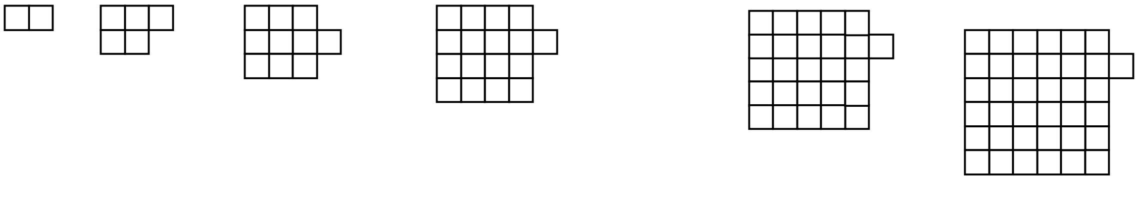
A professora dirigiu-se a Lui:

P: - Quero que você explique a seqüência.

Gre disse que a partir da quarta figura ele não fez mais um quadrado. A professora questionou Lui:

P: - Você está seguindo o resultado da tabela?
Lui: Sim.
P: - Mas cadê o padrão? Sumiu o quadrado de repente e apareceram dois retângulos?

O aluno corrigiu os desenhos e discutiu com os colegas sentados em frente ao quadro. Eles afirmavam que ele fizera retângulos e não quadrados. Um deles levantou-se e auxiliou Lui. Este refez os que não apresentavam mais quadrados redesenhando-os.



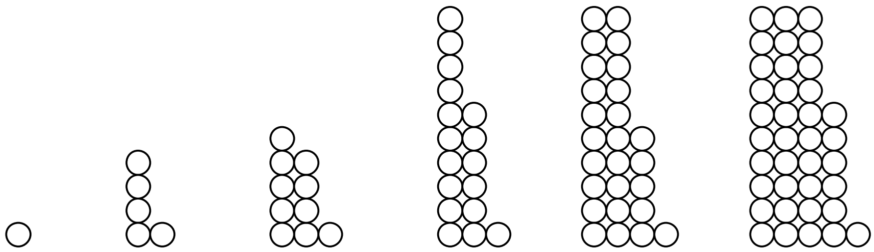
A5: - Na terceira figura (de 5 unidades) o um (□) *tem que ficar embaixo* (2ª linha).
P:- Alguém fez de outro jeito?

Jea: - Eu.
P: - De que jeito?
Jea:- Com bolinhas.

Professora dirigiu-se a sua carteira e perguntou:

P: - Como você arrumou as bolinhas?

O aluno mostrou.



P:- Onde está o padrão?

O aluno não respondeu. A professora voltou ao quadro. Lui arrumava o quadradinho a mais na 1ª linha das figuras seguindo a sugestão do colega. A professora perguntou por que. Os colegas disseram que se ele fizesse o primeiro quadradinho na primeira linha, os outros para ficarem iguais, lembrando do padrão sugerido pela professora no início da aula, teriam que ter o mesmo quadradinho na primeira linha.

Lui arrumou todas as figuras onde o quadradinho não se encontrava na primeira linha e destacou os quadrados de lados 2,3,4,5,6 pintando cada um, para que os colegas pudessem enxergar o 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2 representados por quadradinhos e o + 1 da fórmula como um quadradinho a mais em cada figura. A aula terminou em seguida

Na aula seguinte, a professora retomou a tabela construída na aula anterior para que os alunos pudessem sanar suas dúvidas.

P: - Vamos continuar as tabelas que fizemos a aula passada para fecharmos o trabalho de hoje. A questão é que alguns alunos estavam confusos pela seqüência começar com zero. Se estamos fazendo o desenho a partir da primeira posição, o xis não podia ser zero. Vamos ver como é que fica...

Escreveu no quadro $x^2 + 1 = Q$ e explicou que (Q) representava a quantidade de bolinhas.

P: - Ontem fizemos uma tabela e o xis variou de zero a seis e eu escrevi xis maior ou igual a zero ($x \geq 0$) *e disse que eram só números naturais, não falei?*
As: - Nããão.
P:- Ah! Então foi em outra turma. O xis pode ter inúmeros valores, mas só vamos trabalhar com os naturais. O que aconteceu na turma ontem foi o seguinte: (repetiu a tabela da aula anterior no quadro) *e conclui: Para não complicar o desenho usamos os números naturais. O que nós não fizemos foi olhar a seqüência.* (1,2,5,10,17,26,37 escrita no quadro)*Vejam...fica um ímpar e um par* (e vai apontando os números entre parênteses) *sempre na seqüência.Vamos ver como fica* (e desenha as figuras com bolinhas obedecendo aos critérios estabelecidos na aula anterior, de destacar os quadrados). *Vocês cercaram os quadrados?*

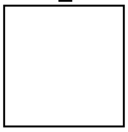
A professora procurou fazer com que lembrassem o padrão a ser mantido na figura para corresponder aos valores escritos na tabela. Um aluno disse que colocou a bolinha representando o um, que no desenho anterior era um quadradinho em cima, em vez de, em baixo conforme o desenho da professora. A professora perguntou:

P: - Pode ser em baixo ou em cima?
As:- Pode.
P: - O problema é que quem foi ao quadro é que começou a partir da figura ○○ *. E a figura da primeira*, (representada por ○ no quadro) *fica certa com a fórmula?*
As:- Não.

A professora continuou:

P: - Zero vezes xis igual a zero está com um problema, não dá para o desenho acompanhar a fórmula. Temos que abandonar o xis igual à zero para acharmos o padrão. Fica mais fácil. Vejam... abram o livro na página oitenta e quatro. (nessa página encontram-se tabelas com valores de x e y) *Mais tarde vocês vão transformar esses números das tabelas nesses gráficos da página oitenta e nove. Vamos então tirar o zero da tabela para que possamos utilizar a fórmula da qual vocês partiram. Vamos ver como fica o padrão se contássemos com o zero. Na sexta figura*...(desenha a figura e colocando valores em baixo e ao lado da figura).

1



5 5.5 + 1

5

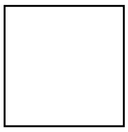
A professora continuou perguntando:

P:- E a décima segunda?

À medida que desenhava o quadrado, colocava os valores numéricos ditados pelos alunos com a respectiva configuração abaixo.

As: - Onze, onze e um.

1

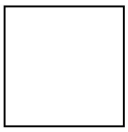


11 11.11 +1

11

P:- E a vigésima quinta?
As:- Vinte e quatro,vinte e quatro e um.

1



24 24.24 +1

24

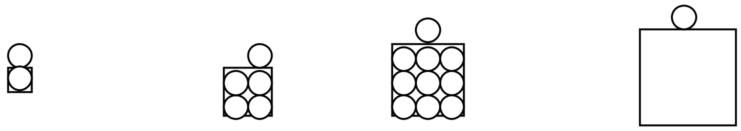
P: - E se agora eu quisesse saber a enésima figura?

A professora conduziu os alunos a estabelecerem uma *conversão* de figura em escrita numérica e realizarem a *conversão* escrita numérica em escrita algébrica.

*As: - "N" vezes "n" mais um. (*n.(n+ 1))
P: - Prestem atenção vejam aqui... (e aponta as outras figuras)
As: - "N" menos um vezes "n" menos um e mais um ((n –1) x (n –1) + 1)

Usou o *tratamento* necessário para finalizar a fórmula.

P:- Muito bem. Então fica: escrevendo a fórmula (e escreve no quadro (n-1) (n -1) + 1) *que fica*...(escreve abaixo da expressão anterior n^2 -2n + 1 +1) *que dá*...(finalizando na forma reduzida escrevendo n^2 -2n + 2)*. Para dar aquela fórmula do desenho* (e aponta para a expressão x^2 +1 escrita no quadro) *teríamos que abandonar a primeira* (figura).
Max: - É só tirar o igual (da desigualdade $x \geq 0$, condição inicial do exercício).
A1: - Mas pode mudar a fórmula professora?
P: - É que para dar certo a fórmula com a figura temos que abandonar o xis igual a zero e portanto abandonando esse igual (apontando para o igual do $x \geq 0$ *) como o Max disse.* (e desenha as figuras a partir da segunda figura anterior).*Vejam:*(e cerca por uma moldura quadrada os quadrados de "lados" um,dois,três e o geral n)



$1^2 +1$ $2^2 +1$ $3^2 +1$ $n^2 +1$

1ª 2ª 3ª nª

A pesquisadora notou que a professora aproveitou a tentativa de representação com bolinhas, que um aluno fez ao final da aula anterior, mas as figuras desenhadas não apresentavam uma forma capaz de justificar a fórmula. A professora continuou a explicação:

P: - Também veremos que não vai dar certo para a próxima letra (b do exercício)*. Vejam aqui* (escrevendo a expressão 3x –2 = y no quadro) *se xis muda, o ipsilon muda também, não?*
A2:- Acho que sim...
A3:- Talvez...

A professora continuou a explicar voltando-se para o quadro.

P: - Vamos ver. Mantendo o xis maior ou igual a zero (e escreve a tabela com x na coluna da esquerda e 3x-2 na coluna da direita, completando parcialmente a tabela com os valores de xis)*. Fizeram a tabela em casa?*
As:- Não...
P: - Era tarefa de casa. Então Cam, se o xis vale dois, quanto vai dar ipsilon?
Cam: - Quatro.

A professora anotou na tabela e continuou a perguntar aos alunos e, com as respostas, completou a tabela.

x	3x - 2
1	3.1-2= 1
2	3.2-2= 4
3	3.3-2= 7
4	3.4-2=10
5	3.5-2=13

P:- Como está funcionando até aqui?
As:- Aumenta de três em três, que nem nos palitos.
P:- Será que esses daqui (apontando para os resultados obtidos na tabela) *dava pra gente representar que nem nos palitos? Dá?*

Alguns alunos balançaram os ombros e outros resmungaram:

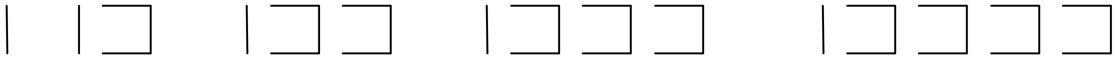
As:- Sei lá
P: - Qual seria a primeira figura? Desenhem a primeira figura.

Os alunos trocaram idéias entre si e a professora retomou.

P:- Como é que a gente vai representar o menos dois?

Os alunos não responderam e ela então realizou o *tratamento* figural.

P:- Vamos começar pela segunda posição? (desenha quadrados com os lados separados para que os alunos conseguissem enxergar a repetição do 3)
Tas: - A segunda (*figura*) *fecha um quadrado.*
P:- (voltando-se para a turma)*: -Vou deixar a Tas pensando nos palitinhos. Vamos ver: a primeira* (figura) *tem um* (palito)*, a segunda aumenta três assim* (desenha no quadro a 2ª, 3ª, 4ª e a 5ª figuras)

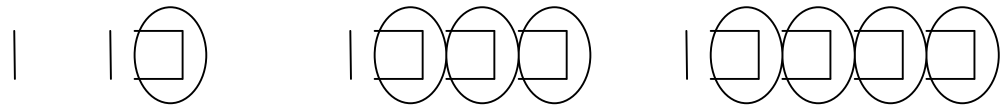


1ª 2ª 3ª 4ª 5ª

P:- Tem gente copiando?

Alguns alunos confirmaram e a professora disse:

*P: - Ainda não. Estamos testando. Vamos ver se esse desenho "casa" com essa fórmula. Estamos na quinta figura e ela está assim...(*mostra no quadro circulando os lados dos quadrados da 5ª figura de 3 em 3*) Quantas vezes o três aparece?*
As: - Cinco.
P: - Estamos contando assim... (e circula de três em três os lados das outras figuras e escreve abaixo da 3ª e 4ª figuras respectivamente 3.3 +1 e 3.4 +1).



3.3 + 1   3.4 +1

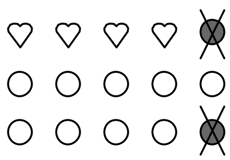
1ª   2ª   3ª   4ª

Olhou com atenção para o que estava escrito no quadro e virou-se para a turma:

P: - Parece que não deu certo essa fórmula (que acabaram de deduzir) *com esta* (do exercício 3x -2)*. Temos que ter grupos de três em três e tirar dois. Imaginem a quinta figura. Vamos fazer daqui pra cá* (da 5ª para a 1ª figura)*.Como fica a quinta figura?* (volta na tabela e escreve 3.5 – 2 = 13 à medida que alguns alunos ditam).

Uma aluna chamou a professora e pediu para ela ver o que fizera. A professora foi até a carteira e voltou ao quadro falando:

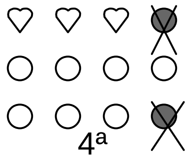
P:- Olha aqui que lindo! (mostrando o caderno da aluna para a turma) *Ela começou com coração e como deu muito trabalho ela fez bolinhas e apagou essas duas* (apontando e fazendo um x sobre as bolinhas)



5ª   (3.5 –2)

A professora aproveitou a representação feita pela aluna para continuar a aula.

P: - Com o raciocínio da Ama como fica o quarto desenho? Bru, agora que você está mais calma (*a aluna estava conversando com a colega*) *como ficaria a quarta figura?*
Bru: - A quarta tem que ter dez. (*sugere um retângulo de bolinhas com 3 linhas e 4 colunas e pede para cortar 2 bolinhas*)*. A professora desenha no quadro.*



4ª (3x4 –2)

O sinal tocou. Os alunos aguardaram a professora terminar as considerações. Ela disse para fazerem o próximo exercício como tarefa de casa.

2ª conversão contrária identificada - Escrita algébrica (Fórmula) → Gráfico

Este foi um trecho da décima oitava aula escolhido para verificar a conversão contrária da aula transcrita integralmente cuja conversão era gráfico → escrita algébrica de função do 1º grau, ou seja escrita algébrica → gráfico.

A professora começou a aula expondo o que iriam estudar.

P:- Acabou, né? Então nós vamos tratar hoje de função do 1º grau. Especificamente função de 1º grau. Então assim... Nós já vimos quando tratamos de função, que existem funções de 1º, 2º grau e outros graus e outros tipos de função, mas a gente vai trabalhar hoje aqui com função do 1º grau e função constante. Então eu queria dizer para vocês que o primeiro exercício é um exercício até que a gente pode fazer uma revisão. Que vocês, garanto, já sabem o que está aí. Em seguida nós vamos tratar de função de 2º grau e estudar bem as parábolas. Elas podem estar viradas pra cima, pra baixo, pro lado, pra esquerda, pra direita... não, mentira...pra cima, pra baixo, acima do eixo dos x, abaixo...então a gente vai tratar exclusivamente da função do 2º grau. Esse é o nosso foco principal e aí...a página da função do 1º grau é na setenta e sete.É ela que nós vamos tratar hoje. Entendido?
A1: - Que página professora?
P:- Setenta e sete. Bom... diz assim...todo mundo prestando atenção pra gente fazer uma vez só. Certo, Tas?

Enquanto a professora falava alguns alunos arrastavam carteiras para sentarem juntos. A professora permitiu, com a condição de que tratassem do assunto da aula. A seguir leu o enunciado do exercício:

P:- “Um estagiário recebe por hora trabalhada dois reais além de uma taxa diária de três reais“. Entendeu? (dirigindo-se a uma aluna que estava conversando). Quanto é que ele ganha por hora? (a aluna tosse) Quanto é que ele ganha de taxa diária?
As:- Três reais.

A professora começou a fazer com que os alunos produzissem *tratamentos* em língua natural.

P:- Se ele trabalhar uma hora, quanto é que ganha?
As:- Cinco.
P:- Se ele trabalhar duas?
As:- Dez.
Die: - Dez não... sete.
P:- Por que sete? Ganha dois reais por hora e mais três de taxa. Quanto é que ganha trabalhando uma hora?
As:- Cinco.
P: -. Quanto é que ganha trabalhando uma hora e meia?
As:- Seis... seis...seis.
P:- Seis?
As:- Sim.
P:- Trabalhar duas horas?
As:- Sete.
P: - E se trabalhar dez horas?
As:- Quatorze... treze...treze...
P:- Quanto?
As:- Treze.
P:- Ai, ai, ai.
A1:- Ué, Quatorze?
A2: - Dez. Horas?
A3:- Vinte e três.
P: - Dez horas de trabalho a dois reais....
As:- Vinte e três reais.
P: - Anh? Só com calculadora seria? Multiplicação por dois, moçada?
Bru: - Quarenta e nove.
P (dirigiu-se a um aluno):- *De cabeça, faz favor, tabuada do dois, depressa.*

O aluno não se manifestou e a professora continuou:

P:- Van, se trabalhar três horas?
Van:- ...(inaudível)
P:- E a taxa diária?

A aluna Van não respondeu e seu colega comentou*:*

A4: - Difícil, eihn?
And: Nove.

A professora insistiu com a aluna*:*

P:- Dois reais por hora...
Van:- Seis.
P:- Três horas dá seis. Mais a taxa de três...
Van:- Nove.
P: - Isso.
Van: - Era só isso?
P:- Era só isso.

Os colegas riram e disseram*:*

As:- Difícil, eihn?

A professora perguntou:

P:- Trabalhando sete horas, oito horas, aliás.
As: Dezenove... dezenove...dezenove.
P:- Como é que faz?

Os alunos conversaram entre si e a professora falou*:*

P:- Pega o número de horas que você quer saber... vezes dois...e soma mais três.Nossa, que difícil, né? Dá pra fazer uma fórmula. Certo?
As:- Certo.

Ela questionou os alunos sobre a *conversão* da situação tratada para uma fórmula e em seguida confirmou uma *conversão* para tabela.

P: - Dá pra fazer uma tabela. Dá pra responder a letra a, por favor? A letra a diz assim: "Quanto ele receberá se trabalhar cinco horas em um único dia"? Como é que calcula?

Os alunos confabulavam entre si e um disse:

A3: - *Treze reais*.

A professora falou e anotou no quadro começando um registro escrito:

P: - a) Treze reais. Letra b.
P: - (olhando o livro sobre a mesa, leu*):- "Se ele receber num dia nove reais, quantas horas ele trabalhou?"*
Max:- Seis.
Die:- Seis.
Jon: -Seis.

A professora foi ao quadro e escreveu enquanto falava:

P:- Três vezes dois, seis mais três nove, muito bom. Por exemplo: como é que você descobriu esse três aqui? (apontando o três (**3**) da fórmula para o Max*).*

$$\mathbf{3} \times 2 + 3 = 9$$

Max:- (o gravador não captou a fala do aluno).
P: - Dividindo?
Jea:- Nove horas, professora?
P (insistindo com Max):- *Como é que descobriu o três?*
Max: - Dividi por três.
P:- Como é que descobriu três horas?
Max:- Ah! Tirando o três dá seis.

A professora falou e anotou no quadro enquanto falava:

$$9 - 3 = 6$$

P:- Tirando o três dá seis. Daí tem como saber, né?
Max: - Tem.
P:- Vezes dois... qual é o número que vezes dois dá seis? (*conversão* de língua natural em situação algébrica)

$$\ldots \times 2 = 6$$

Max: - Só pode saber a tabuada.
P: - Só pode saber a tabuada do dois , tá bom.

Ela olhou o livro didático e leu:

P:- Letra c. "A tabela a seguir se refere a esta situação". Ela indica a coluna do x... o que é?

A professora foi ao quadro e desenhou a tabela colocando nas colunas, o x e o y. Apontou a coluna dos x e os alunos disseram:

As: - Número de horas.

P:- E o ipsilon?

Jea: - Total.

P:- Total. Bom, então aqui tem quatro itens: cinco pra xis, nove pra ipsilon, cinco para ipsilon e sete para xis. Quem é que completa a tabela aqui pra gente, diz por que.

x	y
5	
	9
	5
7	

Ninguém se manifestou e a professora escolheu uma aluna para fazer o *tratamento* algébrico em língua natural:

P:- Ama quer fazer a primeira? Dita aí pra mim.... se o cara...se tiver assim na tabela quanto é que vai dar o ipsolon?
Ama: Treze.
P:- Treze, por que?
Ama:- Porque é... cinco horas, dois reais cada hora e mais três. Mais três que ele já tem.
P.- Próxima! Anr como é que calcula o ipsilon igual a nove aqui? Quer dizer, tendo ipsilon igual a nove como é que calcula o xis?

A aluna demorou uns segundos e fez os cálculos em voz baixa. A professora anotou o procedimento de Anr no quadro enquanto ela falava:

P:- Nove menos três... dá seis.(*conversão* de língua natural em sistema numérico com congruência)

$$9 - 3 = 6$$

Anr continuou calculando em voz muito baixa e a professora auxiliou:

P:- É duas horas... dois reais a hora.

A2:- Certo.

A professora continuou dando atenção a Anr:

P:- Pego o seis e...
Ric: Tira três.

A aluna falou algo que o gravador não captou e a professora completou:

P:- Não, nós já tiramos o três aqui.
Anr:- Então divide por dois.
P:- Isso!Muito bom!

Ela repetiu o que a aluna fez para achar a resposta reforçando o procedimento oralmente e escrevendo.

P:- Então do nove a gente tirou três... (*conversão* de língua natural para sistema numérico com congruência)

$$9 - 3 = 6$$

Anr: - Ah, faz a operação inversa!
P:- Faz, exatamente e divide por... dois, certo? E daí deu... três.

$$6 : 2 = 3$$

P:-Tá claro isso? Dos nove tira três e o resultado divide por dois. Como é que calcula este ipsilon igual a cinco, como é que calcula o xis?

Os alunos falavam conjuntamente e a professora escolheu:

P: - A Jes... Cinco menos três, dividido por dois, quanto que dá isso?

$$5 - 3 : 2$$

Jes:- Um.
P:- Uma hora de trabalho, cinco "pila".:
P (um aluno fala algo muito baixo*):- Eihn? Quanto é que é o ipsilon aqui?* (apontando o valor de y na última linha)
As: Dezessete... Dezessete.

x	y
5	13
3	9
1	5
7	17

A professora completou a tabela e seguiu com *tratamento* em língua natural.

P:- Como é que calcula?Mar? Diga.
Mar:- Sete vezes dois é igual a quatorze.
Lui:- Eu falei antes.

A professora leu o exercício do livro:

P:- Bom diz assim... é ...Considerando os cálculos que você fez, escreva uma fórmula...escreva uma fórmula que associe...certo?Esse... o total diário com o número de horas trabalhadas. Qual é a fórmula?
Jon:- Um vezes dois...
Ama: - Um vezes "dos"...
P:- Isso! Então ...

Esperou os alunos se manifestarem e disse:

P: Como é que calcula o y, o total?
Lui:- É xis vezes dois mais três. (x.2 + 3) (*conversão* de tabela em escrita algébrica)
P: - Pode ser escrito de outro jeito?

Escreveu no quadro a fórmula sugerida por Lui.

$$y = x.2 + 3$$

Cam (falando baixo com alguém): *- A fórmula é **a** xis mais be.*

A professora propôs um *tratamento* algébrico, uma nova forma para escrever a função.

P:- Pode ser dois xis mais três...Posso por o três aqui na frente do dois xis?
Die:- Professora, faz a do xis agora.
P: - (uma aluna fala algo muito baixo e a professora comenta)*:- Ah! Sim, que lindo! Ô, meus queridos...essas são as fórmulas que associam o número...de horas trabalhadas com...o valor que o sujeito tem que receber.* (mostra no quadro x.2 +3 e 2.x + 3) *O Dig está dizendo pra vocês fazerem o seguinte: inverter...como é que se faz a fórmula então pra calcular o xis? Como é que faz pra calcular o xis?*

Os alunos falavam entre si e a professora atendia um deles e escrevendo no quadro o que ele ditou.

P:- Pega o ipsilon...

A professora não escutou e caminhou em direção ao aluno:

P:- Isso. Mais alto.
A5:- Menos três...

A professora conversou com o aluno mas o gravador não captou e ela falou:

P:- É isso? Não tinha me passado pela cabeça de fazer isso. Muito obrigada. É... seguinte...considerando....letra e: como já vimos...muda a página aí pessoal...ela pode ser representada num gráfico...e é pra desenhar o gráfico então. Agora, tem uma coisa: como é que fica o desenho deste gráfico? (mostrando a função escrita no quadro)

$$y = 2.x + 3$$

P: - Como é que vai ser? Vai ser uma parábola?Vai ser uma reta?
Die: Tem como saber, professora, só de olhar?
P:- Tem como saber? Só de olhar?
And: Tem.

O aluno And antecipou a forma do gráfico pela relação com sua escrita algébrica:

P: - Tem And? Como?
And:- Pela função do 1º e 2º grau.
P:- Pela função de 1º e do 2º grau. A função de primeiro grau é como?
And: - Reta.
P:- E a de 2º grau?
And:- Parábola.

A professora apontou a escrita algébrica da função escrita no quadro e disse:

P: - Essa daí vai ser reta ou parábola?
And: - Reta.
P: - Reta?
And: - É.
P:- Vamos ver se vai ser mesmo. Então... é...

Lui antecipou o domínio dessa função ao dizer:

Lui: - Não precisa de negativo.
P:- Não precisa de negativo por que?
And: Porque não tem sentido.

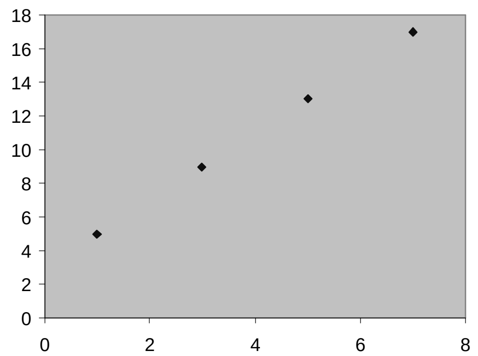
P:- Porque não tem...
Lui:- Não tem como trabalhar menos uma hora.
P:- Não tem como trabalhar menos uma hora. Ótimo. Muito bom seu Lui. Eu já ia escrever menos um.

Os alunos riram e a professora continuou:

P:- Se o cara não trabalhar nada naquele dia?

Ama:- Daí ele ganha só o três pelo dia.

P: Só o três pela boa vontade do sujeito que paga. É... coloco aqui (apontando o sistema de coordenadas) *uma escala de quanto em quanto pessoal? Dois em dois chega?*



Os alunos conversavam entre si e a professora preparou a colocação dos pontos do gráfico. Jea falou sobre os valores de x da tabela serem números ímpares.

P: - É só número ímpar? É?

A professora dirigiu-se ao quadro e disse:

P:- É... Quem é que vem?
As:- Eu... Eu... Eu...

A professora escolheu Igo:

P:- Vai você. Vai lá e marca o primeiro cinco (x).

O aluno postou-se frente ao quadro e disse:

Igo:- Cinco...

Diante da hesitação a professora auxiliou:

P:- Olha, querido. Aqui (mostrando os valores no eixo x) *estão as horas trabalhadas* (escreveu horas trabalhadas ao final do eixo x). *Uma hora, duas horas, três horas, etc. e aqui* (mostrando os valores do eixo y) *o valor em reais é o ipsilon. Você queria que eu marcasse aqui de dois em dois? Aqui? Podia ser de quatro em quatro de três em três tanto faz, ta? Contanto que cada espaço desses valesse o mesmo tanto, certo? Aqui vale dois, cada espaço desse vale dois. Ta bom assim? Então, o primeiro par que você vai marcar é cinco e treze. Próximo, três e nove. Diga outro.*

Uma aluna falou os próximos pares ordenados:

A6:- Um e cinco...
P:- Um e cinco
A6:- Sete e dezessete.

A professora falou para Igo que estava no quadro:

P:- Você marca dois e vem mais um e marca mais dois. Pronto? Tá pronto o gráfico? Deu uma reta mesmo?

O aluno não respondeu e a professora lembrou:

P:- Diz o And que 1º grau é reta. Que 2º grau é parábola. Pior que é que nós já olhamos no livro, já reviramos as páginas já vimos que é.Se tivesse só esses dois pontos já dava pra parábola aqui pessoal? Já dava pra traçar a reta?
Die:- Já.
P:- Já? Só dois pontos é suficiente?
Die: - Dá.
P: - Um só não dá?
Die:- Não.
P: Não, por que? Não entendi. Só dois chega? Mas eu quero saber: dava pra marcar só um?
A7: - Dá.

A professora conferiu os pontos no gráfico.

P:- Muito bom. Um vai lá no cinco, do três vai lá no ... pro nono andar...no cinco é pra subir até o...
As:- Professora.
P:- Treze.

Os alunos avisaram a professora do erro do par (7,15) que deveria ser (7, 17).

P:- Dezessete? Ah, é verdade.:
P: - Igo conserte isso.
As:- Ôôôô Igo.
P: Isso. Ali mostrava que estava fora de linha (o 15) nem sempre dá pra enxergar lá...Olha só aonde que foi parar. Eu vou pontilhar daqui pra frente.
As:- Óóóóh.
P:- Óóóó, aonde que foi parar aqui? Que ponto é esse?
Jea: - Dois e meio.
Max: - Não, três, três.
P:- Que ponto é esse daqui? E aponta o x valendo 3. Quanto tem pra x? (a escala adotada para x no gráfico era de 2 em 2)
As: - Três... Seis...
P: - No xis, na linha do xis... na linha do xis, nós paramos aonde pra ir lá no encontro do ipsilon?

Bru e Sta falaram baixinho “zero” e a professora disse:

P: - Isso, fala, não tenha medo, é zero mesmo. Ela disse zero (Sta) *a outra disse zero* (Bru), *tudo assim*... (a professora imita as alunas falando baixinho).
Die: Eu falei, eu falei zero.
P:- Ahn? Eu não ouvi. O que você falou alto eu não ouvi, você veja que coisa. Bom... zero pra xis e ipsilon?

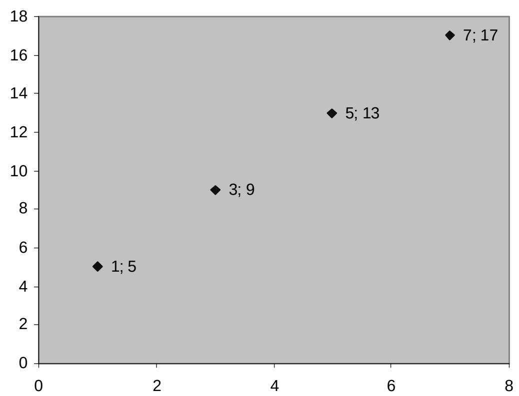
A professora dirigiu-se a Orl e perguntou:

P:- Aqui, meu amor. Eu estou per-gun-tan-do quais são as coordenadas desse ponto? (e aponta o ponto (7,17) no gráfico) *Esse ponto aqui vocês sabem quanto é que deu?*
As: - Sete...
P:- Sete e...
As:- Dezessete.
P:- Ó, é só ver aqui, moça! Dezessete. Esse ponto aqui?
Orl: - Quatorze
P:- Vem quatorze primeiro?
Orl: - Quinze...não, treze e cinco.
P:- É cinco? Treze? Treze... a gente escreve assim o treze aqui (indicando o primeiro elemento do par) *o cinco* aqui (indicando o segundo elemento do par) *ou tem uma ordem?*
Jon: - Não.

A professora ainda estava falando com Orl e disse:

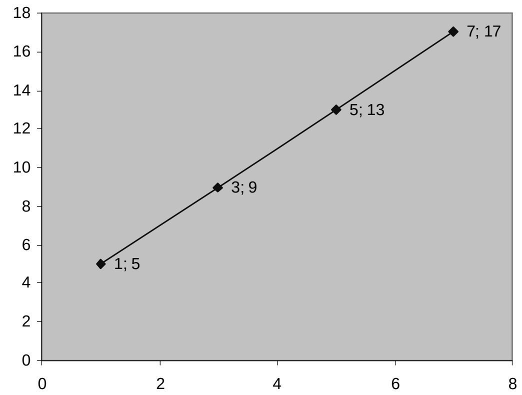
P:- É cinco vírgula treze, é isso?(a aluna não respondeu)
Bru:-São cinco horas e treze reais.
P:- Ah, bom. Então agora... e esse ponto aqui?

Bru:-Três, nove.
P:-Três, nove. (escreve o par (3,9) no quadro) *E esse ponto?*
Bru e Die:- Um, cinco.
P:- Um, cinco. E esse ponto?
Jea: Três vírgula nove. Não, nooossa.
P:- Pra xis é quanto?
As:- Zero.
P:- E pra ipsilon?
As:- Também.
P:- Então... Zero e ...
And: Três.
P:- Três. Então, ta entendido? Primeiro você vem aqui (mostrando a tabela) *e olha em que ponto tá, nessa direção* (apontando o eixo x). *Para aqui, zero pra xis e sobe até o. ipsilon igual a três. Então: zero e três.*
Lui:- Cadê a parábola?
P:- Cadê a parábola?
A8:- Ué, I don't know.
P:- Cadê a parábola?
Lui (e colegas): *Está ali em cima... Alguém apagou... Você viu?*
P: - Eu é que pergunto: Existe uma parábola aí?
As: Sei lá... Sim... Não... Acho que sim.
P:- Ah! Essa barbaridade quem é que disse?



Os alunos falavam todos juntos e a professora afirmou traçando a reta:

P: Mais reto impossível, guri.
Lui: Professora, não tinha que bater bem no zerinho?Ou não?
P:- É? Pergunto: quando o sujeito trabalhar zero horas, pela fórmula do sujeito aqui?
Bru: - Não passa nunca no zero ali.
Die: - Não tem como ele não ganhar nada.
P: - Então ele não tem como não ganhar nada.
Bru: - É uma reta mesmo.



Os alunos discutiam entre si, mas o gravador não conseguiu alcançar e a professora disse:

P: - Ganhou? Podia então passar por aqui (apontou a origem dos eixos)? *Nem tudo passa aqui pelo zero?*
As: - É.
P:- Nem todos... Nem todas essas funções, certo?
A9:- Funções?
P: - Eu acho até que no caderno já tem uma porção de gráficos que a reta não passa pelo zero.

Era hábito da professora começar aula fazendo os alunos pensarem matematicamente sobre a situação. Ela procurava fazer com que eles falassem sobre como pensavam a cada exercício apresentado. Incentivava os cálculos mentais, ou seja, os *tratamentos* matemáticos. Auxiliava os alunos quando necessário para, em seguida, associar a fala matemática à escrita matemática, uma conversão de língua natural em escrita matemática e para, finalmente, chegar à escrita matemática formal ou ao registro pretendido, fosse algébrico, tabular ou gráfico.

Esta aula revelou momentos de construção de tabela fórmula e gráfico conduzido de forma enfática pela professora. Os alunos foram convocados a diversos tipos de *tratamentos* e *conversões* que ocorreram inicialmente em linguagem natural, finalizando com o registro escrito.

7. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste ponto do trabalho convém retomar algumas questões para que possamos compreender como a professora negociou as representações de funções com seus alunos face aos tratamentos e conversões propostos por DUVAL (1995,2003).

A professora e os recursos didáticos

Os dados da entrevista e as observações em sala de aula permitiram à pesquisadora esboçar características de construção pessoal da professora sobre o conceito de função como objeto de ensino/aprendizagem, e a condução e dificuldades no ensino dos diferentes modos de representação. (GARCIA BLANCO, 1988, GARCIA BLANCO E LLINARES, 1999).

A somatória de: formação da professora na licenciatura em matemática; o aprendizado que recebeu de sua mãe; cursos de atualização, inclusive com sua participação docente; integração a vários grupos de estudos pedagógicos nas discussões sobre propostas de reformas curriculares promovidas nas redes públicas de ensino, foram fatores determinantes para seu fazer, para sua versatilidade ao lidar com as dificuldades dos alunos e também para manter um ambiente de trabalho onde o processo de ensino-aprendizagem se tornou possível.

Cabe ainda evidenciar dois pontos nos quais a pesquisadora identificou a relação da professora com o conteúdo funções: um deles foi a preocupação em amenizar a relação aluno e conteúdo matemático e o outro foi a ausência, ao ensinar, de ênfase numa perspectiva da geometria analítica, muito presente no livro de BIGODE (2000).

A pesquisadora achou procedente a não insistência pela professora numa perspectiva de ensino com destaque em elementos da geometria analítica uma vez que, nessa série e por ser o primeiro contato sistematizado com funções, os alunos devem ser incentivados a matematizarem a situação proposta mais do que se fixar em termos e definições matemáticas.

Para a professora, a possibilidade de um ensino pautado na geometria analítica, nesse nível de ensino, requer um software que permita aos alunos visualizar as modificações produzidas no gráfico em concomitância com expressão algébrica, tanto para funções do 1º e 2º graus, identificando as modificações correspondentes nos dois registros visualmente e instantaneamente. Este software contemplaria o que Duval (1988, 1996) classifica como interpretação global das propriedades figurais, mas também minimizar o tempo dispensado à resolução de vários exercícios similares para levar os alunos a concluírem o proposto por ela.

Sua predileção declarada pelo ensino da geometria se detecta nas afirmações de ser a responsável pela elaboração da maior parte das tarefas propostas no livro didático e pelas intervenções em aula nos momentos em que optou por conversões e tratamentos figurais. A declaração de que se valia de recursos visuais, pôde ser amplamente verificada, na medida em que apelou para o uso de desenhos, diagramas e outras formas de representação visual que poderiam auxiliar a compreensão do aluno.

A geometria é tão marcante em seu processo de ensino e aprendizagem, que ela, sempre que possível, apresentou um caminho geométrico, como por exemplo, a simetria, para favorecer a construção do gráfico de uma função de 2º grau. Essa marca tão forte em sua atuação (Llinares, 1999; Cunningham, 2005) pareceu determinar inclusive, o caminho para chegar às fórmulas e gráficos e apareceu em boa parte dos exercícios e atividades propostas.

O conhecimento do conteúdo destacou-se pelo modo da professora trabalhar de forma articulada as representações sobre funções (Einsenberg,1992) e a organização do conteúdo obedeceu à mesma seqüência do conteúdo proposto pelo livro adotado uma vez que a professora, como já anteriormente comentado, seguiu à risca tal livro.

Sua participação na co-autoria de livros didáticos revelou momentos de sistematização de uma história profissional inclusive integrando um grupo com formação multidisciplinar. Uma das quatro autoras, de outra área, parece ter contemplado um aspecto que Garcia Blanco (1998) diz contribuir para tornar o conhecimento profissional mais amplo e flexível.

O livro, de sua autoria e de colegas, é explicito ao enfatizar a relação funcional como processo, portanto, a idéia primordial é a da função como correspondência, como uma relação. Esta idéia era ressaltada a cada aula. Não houve menção ao ensino das funções via teoria dos conjuntos. Para determinar o domínio para certas funções, por exemplo, ela referia-se à situação estudada e pedia para que os alunos justificassem a ausência de valores negativos no domínio (chamado por ela de valores de x), numa situação em que pedia para determinar a função correspondente à área de uma figura geométrica com lados variáveis. Para as funções do 2º grau ela enfatizou propriedades tais como eixo de simetria, concavidade, relações do sinal de a com máximos e mínimos.

Pela ordenação dos conteúdos, o livro de Isolani et al (2002), apresenta uma seqüência diferenciada dos outros dois livros para o ensino de funções.

Ao partir do conteúdo “buscando escritas genéricas”, a professora reforça o processo de generalização, visto na série anterior, ao mesmo tempo em que destaca para os alunos as regularidades necessárias à escrita da fórmula, mas enfatiza também as relações de variabilidade entre, por exemplo, a posição da figura numa seqüência e o número de elementos da figura (p. 70) Esse procedimento foi importante para a introdução de funções como relação de dependência entre grandezas e também discutir que nem toda a relação entre grandezas gera dependência.

A pesquisadora notou que nem nas recomendações do livro da professora e colegas, nem no decorrer das aulas, houve preocupação com a classificação formal das funções. Houve empenho em fazer com que os alunos dominassem os tratamentos e entendessem as passagens de uma representação a outra.

As ações da professora condizem com os objetivos do livro de sua autoria e de colegas, permitindo à pesquisadora aquilatar a importância da linguagem. Além da linguagem escrita, existia uma linguagem situada num ambiente de ensino de matemática. (LAMPERT, 1998)

Na apresentação dos livros didáticos, a pesquisadora observou que os autores dos três livros, o de autoria da professora e os de apoio, ao utilizar situações sócio-culturais para iniciar um tema ou item, tinham como objetivo apoiar à elaboração do objeto matemático a ser estudado.

Os tratamentos levantados nos livros didáticos foram em número maior que as conversões e concentraram-se em tratamentos numéricos, o que confirma a afirmação de DUVAL (1995).

Apenas em um dos livros de apoio (Bigode, 2000), o autor com um grande número de tratamentos concentrou o que denominou atividades, em conversões tabela → gráfico, escrita algébrica → gráfico e escrita algébrica → tabela, inclusive apresentando, no manual do professor, sugestão do caminho a ser percorrido na realização de conversões.

Um aspecto que deve ser ressaltado é o tratamento em língua natural realizado pelos autores, e, principalmente, encontrado nos livros de Isolani et al (2002) e Imenes e Lellis (1998), nos quais à maioria dos exercícios seguiam-se perguntas que exploravam situações previamente apresentadas, com o objetivo de concentrar o foco de atenção no conteúdo matemático a ser estudado.

Em relação às dificuldades dos alunos nesse conteúdo, a professora destaca a organização das fórmulas pela necessidade de sucessivas transformações de uma linguagem em outra até a equação geral, revelando que “essa parte é a que mais me atrai porque as escritas são... muito diferentes uma das outras. É uma parte bem criativa...”, demonstra sua preocupação com a dificuldade dos alunos na compreensão das diferentes representações para que possam dar significado às representações formais.

Tomando como exemplo as funções polinomiais de 1º e 2º grau e função constante, o diálogo da professora com os alunos caracterizou-se pelo uso constante de representações intermediárias, quase sempre com o uso de desenhos, diagramas e setas para dar significado às transformações propostas aos alunos na construção da escrita algébrica, gráficos e tabelas.

Para a professora o estudo do conteúdo funções pode ser facilitado quando é realizado em um longo processo com “passagem bem lenta de montagem de tabelas, construção de fórmulas e aí a representação no plano cartesiano”. Mesmo com os cuidados da professora, a pesquisadora observou que os alunos apresentaram dificuldade na construção de gráficos, (Romberg, Carpenter e

Fennema, 1993; Ponte, 1984) começando pela colocação dos pontos. Se os pontos estavam dispostos em tabelas eram mais facilmente localizados no gráfico, o que não acontecia se esses pontos estavam representados em pares ordenados.

A professora dava aos alunos a oportunidade de tratar oralmente a situação apresentada e criava condições para que relatassem o que pensavam e explicassem suas idéias. Ao mesmo tempo compartilhava e explorava os diferentes modos de pensar.

O diálogo da professora e os alunos

Quanto ao diálogo entre a professora e alunos sobre representações de funções nas aulas selecionadas, desde a primeira aula foi possível identificar as formas variadas de a professora realizar *tratamentos* (recorrendo ao auxílio de figuras pictóricas, diagramas, setas) e conduzir *conversões* entre diferentes registros, utilizados por ela e pelos alunos.

Os *tratamentos* numéricos e figurais que diziam respeito a seqüências de números naturais foram realizados rapidamente, indicando, conforme Duval (1995), que os alunos coordenavam os registros utilizados. Cabe destacar, entretanto, que em todas as aulas, não só nas selecionadas, quando as seqüências não eram de números naturais, os *tratamentos* numéricos, algorítmicos, figurais, algébricos e até mesmo em língua natural consumiam um tempo considerável, uma vez que cada um destes tratamentos possui graus de dificuldades diferentes (custos cognitivos diferentes) para quem aprende (DUVAL, 1995).

O uso em todas as aulas de *representações intermediárias*, (figuras pictóricas, diagramas, setas, círculos divididos em partes iguais, entre outros) com apoio em representações sócio-culturais (temperatura, pizza, dívidas e ganhos, entre outros), mostrou a versatilidade da professora ao tentar amenizar os impasses dos alunos na compreensão dos tratamentos e conversões por ela realizados nas seqüências de números negativos e racionais.

Esses recursos foram poderosas ferramentas na condução de tratamentos e conversões a caminho das representações formais. Por exemplo, na 2ª aula selecionada, a professora usou a escala de temperatura para explicar o *tratamento* realizado na seqüência de números negativos (exemplo apropriado à região de Curitiba). Duval (1995, 1998a) defende que recorrer a esses recursos, por ele denominados de representações analógicas (figuras, esquemas e diagramas), na condução de tratamentos e conversões, é mais simples que recorrer às representações em forma de registros de linguagem como um texto descritivo, listas de fórmulas ou de relações.

O uso de representações intermediárias foi importante para superar de incompreensões e trouxe à tona dificuldades dos alunos em compreender as representações escolares utilizadas pela professora ao realizar alguns *tratamentos* e *conversões.* Em determinados momentos a professora atentava para a expressão oral dos alunos sobre os tratamentos e conversões por eles realizados, captava o significado atribuído por eles e os ajudava a superar as dificuldades apresentadas. Por exemplo, na segunda aula, o tratamento com o uso da representação intermediária, de dois círculos divididos em quatro partes iguais, foi insuficiente para Cam entender a possibilidade de representar o número racional solicitado. A professora buscou nova forma de *conversão* (atributo) associando os círculos ao formato de uma “pizza”, uma representação *intermediária* referenciado no contexto sócio-cultural.

Ao analisar algumas atividades sobre números racionais em livros didáticos, Catto (2000) verificou que os autores priorizavam, nas conversões, um dos sentidos e que algumas representações figurais utilizadas podem constituir dificuldades para a conceituação de números racionais.

Das representações formais a pesquisadora identificou a escrita numérica, a escrita algébrica, a reta numérica, tabela e gráfico. Pode-se destacar também o uso da língua natural, uma expressão de Duval, para expressar a linguagem matemática em diálogo matemático quando a professora solicitou aos alunos, comunicarem uma situação matemática em língua natural.

Das *conversões* presentes a pesquisadora identificou: escrita numérica → figura, figura → escrita numérica, escrita numérica → língua natural, escrita algébrica → língua natural, tabela→gráfico, gráfico → tabela, escrita algébrica → gráfico, gráfico→ escrita algébrica.

A conversão entre registros nos dois sentidos foi destacada pela pesquisadora ao apresentar as situações em que a professora realizou conversões, por exemplo, na seguinte ordem: escrita numérica → figura conversão identificada na primeira e segunda aula observada e selecionada, seguida de conversão contrária, figura → escrita numérica, retirada da 4ª e 5ª aulas observadas, cujos fragmentos foram selecionados. Posteriormente, apresentou uma situação de conversão gráfico→ escrita algébrica, retirada da 3ª aula selecionada, (25ª aula observada), e em seguida uma conversão contrária, escrita algébrica → gráfico, retirada da 18ª aula observada. Ao final, apresenta uma situação de conversão de tabela→gráfico, retirada da 4ª aula selecionada, (37ª aula observada) que não foi contemplada com conversão contrária em nenhuma das aulas.

Ao analisar, nas duas primeiras aulas, o diálogo sobre a *conversão* na passagem do número de quadrados das figuras (relacionado à posição de cada elemento da seqüência de números ímpares), para a escrita algébrica (fala de Lui e Die), uma forma que exigia maior número de tratamentos ao finalizar a conversão foi a preferida pela da maioria dos alunos.

A compreensão de uma *conversão,* diz Duval (1995, 2003), está estreitamente ligada à *congruência* entre elementos correspondentes de duas representações diferentes, porém a congruência ocorre com menor freqüência nas conversões entre representações formais em linguagem matemática. Minimizar as situações de não-congruência ao explorar as formas de pensar dos alunos, apelando para representações intermediárias ou para representações formais, foi o modo encontrado pela professora para favorecer a compreensão das transformações realizadas nos registros.

Ao destacar e discutir como os alunos realizavam os tratamentos e conversões na sequência numérica, a professora evidenciou a existência de duas maneiras diferentes. Die associou à figura de número 6 (unidade significante) da seqüência, à escrita, 5+5+1, estabelecendo uma *conversão não-congruente*. Nesse caso, a unidade significante 6 sofrera um *tratamento* para (6 - 1), desencadeando uma possibilidade de caminho para a generalização em (6 – 1) +(6 – 1) + 1, e que em situações semelhantes com variação dos valores numéricos, propostas pela professora, culminou em (n – 1) + (n – 1) + 1. Essa forma de generalização exigiu maior conhecimento das propriedades algébricas (como adição de termos semelhantes e propriedade do elemento oposto ou simétrico, para chegar ao resultado simplificado 2n -1) pelos alunos.

No caso de Lui, o caminho utilizado foi considerar a quantidade de quadradinhos do segmento vertical do “L” sempre com uma unidade a menos do que a quantidade de quadradinhos do segmento horizontal. Associou o 6 (unidade significante) da ordem da figura na seqüência, a 6 e 5, respectivamente, quadradinhos na horizontal e vertical ele parece observar uma correspondência *congruente* entre a ordem da figura na seqüência (6ª figura) a pelo menos o número de quadradinhos (6) de um dos segmentos (horizontal) que compunham a figura, considerados no caminho para a generalização da fórmula de Lui. A correspondência congruente não se manteve ao outro termo, que é 5. A generalização de Lui, n + (n - 1), acontece algebricamente, de maneira mais simples que a de Die e o custo de tratamento é menor para se chegar a 2n –1. Este fato parece mostrar que nem sempre o tratamento mais econômico é o mais utilizado.

Considerando-se a congruência, nenhum dos modos de pensar (de Die e Lui) é congruente na conversão figura → escrita algébrica, tomando como parâmetros as unidades significantes (DUVAL, 1995). A maneira de Lui pensar a situação, parece estar mais próxima da congruência do que a de Die.

Embora as formas de pensar propostas por Lui e Die sejam não-congruentes, a de Lui estava mais próxima de uma congruência, mantendo, para um dos segmentos do diagrama, a unidade significante 6, o que não ocorreu proposição de por Die, em que a unidade significante 6 transformou-se em (5-1).

Os alunos mostraram preferência e realizaram a passagem para a escrita algébrica mais rapidamente pela resolução de Die, mesmo com custo cognitivo maior (DUVAL,1995,2003). Possivelmente, devido à visualização do elemento (n -1) duas vezes e da unidade 1 no canto, embora do ponto de vista do *tratamento*, essa forma de generalização exija mais conhecimentos algébricos dos alunos para sua simplificação.

Na passagem, da escrita numérica 10+9, para os segmentos do diagrama, sugerida pela professora, a seguinte *congruência* pôde ser identificada no processo de localização dos pontos em um sistema cartesiano: cada parcela da escrita 10 + 9, era associada, da esquerda para a direita, ao segmento horizontal e vertical, respectivamente. Essa escrita numérica não tinha, neste momento, o sentido operatório[14] usual, todavia foi adotada pela turma como uma escrita numérica para ser colocada no diagrama.

Duval (1995) afirmou que para certos tipos de conversão, os custos cognitivos podem ser maiores ou menores, dependendo da existência ou não da congruência e que a passagem de um sistema de representação a outro ocorre espontaneamente, quando eles são congruentes, que pode ser reconhecido quando traduz para os alunos as escritas aritméticas e algébricas em língua natural.

Retirada dos fragmentos selecionados da 4ª e 5ª aulas observadas, a *conversão* contrária à apresentada no exemplo anterior, encontrada na quarta aula, escrita algébrica ($x^2 + 1$) → figura, evidenciou a distância entre o significado pretendido pela professora e os significados atribuídos pelos alunos.

A passagem do registro algébrico para o figural foi bem mais lenta e trabalhosa, por exemplo, quando Cam (p.126-127) interpretou a escrita x^2, lida como - xis ao quadrado - tentando representar o quadrado que lhe fazia sentido.

Neste contexto, a palavra quadrado estava significando - o mesmo número de linhas e colunas - para os desenhos correspondentes a x^2. Os alunos demoraram a perceber que a regularidade estava atrelada à palavra quadrado, cujo significado era determinado pelo mesmo número de linhas e colunas.

A unidade significante para esta situação era a "potência 2", associada à palavra "quadrado" que por sua vez significava "mesmo número de linhas e colunas".

Vendo os desenhos de Jea, no caderno, a pesquisadora atestou o quanto o significado intencionado pela professora estava longe do significado compreendido pelos alunos. Parecia existir um efeito dominó de significados nas diferentes representações e algumas representações endereçavam para outros significados.

No quadro, Lui (p.128-129) desenhara a figura correspondente à escrita algébrica, mantendo o padrão "quadrado" até a quarta figura. Após a observação de uma colega sobre a perda do padrão e com a ajuda dos colegas para retomar o padrão, ele destacou os quadrados de lado 2, 3, 4, 5, e 6 para representar 2^2, 3^2, 4^2, 5^2 e 6^2 pintando cada um deles e deixando sem pintar o quadradinho que ficou fora e

---

[14] Sentido operatório, aquele que considera as idéias básicas envolvidas na operação. (NEHRING, 2001, p.33)

representava + 1. A professora usou duas aulas para levá-los a configurar as funções em registro algébrico conforme pedia o exercício.

Na outra conversão contrária, encontrada na quinta aula, escrita algébrica (3x - 2) → figura, a professora perguntou como representariam o -2 da fórmula. Como os alunos fizeram silêncio, ela representou primeiro pela tabela e sugeriu uma composição com desenho de palitos que combinasse com os valores da tabela (para que ao alunos entendessem).

Ao representar os palitos como quadrados, a professora, que confessara ser visual, demonstrou isso ao – descolar - um dos palitos dos lados do quadrado para destacar a unidade significante 3 em cada uma das figuras, ao mesmo tempo que mostrava a mesma situação na tabela.

Para a mesma situação outra aluna apresentou representação diferente, usada pela professora para mostrar aos demais.

A situação de conversão de gráfico → escrita algébrica, considerada por Duval como a mais difícil e pouco explorada nos textos didáticos, foi observada na terceira aula selecionada, quando a professora aproveitou a conversão algébrica produzida pelo aluno Tai, ao realizar a conversão dos pontos do gráfico para uma tabela e, em seguida, realizar a conversão da tabela para uma escrita algébrica.

Nessa situação, a professora chamou a atenção para a alternância de sinais dos pontos x e y da tabela, (por ela construída, a partir do gráfico exposto no quadro e com apoio das respostas dos alunos), e escreveu no quadro a representação sugerida por Tai (y = 2.(-x) + 1), que realizara a conversão de tabela para escrita algébrica. Além disso, ela aplicou um *tratamento* algébrico (y = -2x + 1). *Tratamento* esse que não pareceu, nem mesmo a Tai, ser necessário. Aos alunos pareceu mais coerente a escrita da função na primeira forma, provavelmente porque os valores de x na tabela começavam por valores negativos. Mesmo Tai, que pareceu concordar com a forma final da equação sugerida pela professora, não demonstrou entusiasmo. Situações similares foram observadas em outras aulas que não as escolhidas para análise.

Como os alunos julgaram difícil o procedimento de encontrar a escrita algébrica da função a partir da observação das relações entre os pontos representados na tabela (*conversão*), a professora lembrou haver um caminho mais fácil e que eles já conheciam: encontrar os coeficientes da função utilizando sistema de equações. A partir da situação anterior, mantendo, portanto, apoio no caminho: gráfico → tabela → escrita algébrica, mesmo sentido da conversão anteriormente realizada (Duval, 1995), embora a professora tenha sugerido que os alunos utilizassem os conhecimentos que tinham para realizar tratamentos algébricos, ela não foi atendida.

Essa sugestão gerou uma ansiedade. A professora não contou com nenhum aluno para iniciar o processo de conversão e sozinha escolheu os valores presentes na tabela, indagando os alunos sobre os valores escolhidos.

Ao substituir esses valores, na fórmula geral da função, muitos alunos pareceram não reconhecer a equação 5 = -2a + b (embora a mesma estivesse próxima do formato y = ax + b). A professora mudou de imediato para -2a + b = 5 (uma forma já vista anteriormente pelos alunos). Mesmo assim, essa forma de representação algébrica, inibiu o significado, pois eles estavam confusos pela troca de x e y por a e b.

Ao montar o sistema a professora retornou à pergunta feita anteriormente para saber se os alunos descobriram porque ela escolheu o mais dois e o menos dois. Um dos alunos lembrou de duas formas de resolução de um sistema de equações: adição e substituição. Ele explicou que sua escolha era por causa da adição. Essa escolha pareceu confundir os alunos.

Cabe destacar, que no tratamento do sistema de equações, ao chegar à forma 2b = 2, os alunos não reduziram de imediato para b=1. Então, a professora os auxiliou *convertendo* a expressão algébrica para "*Dois vezes um número, dá dois. Que número é esse?".* Essa *congruência* entre a expressão algébrica e a expressão matemática, em língua natural, fez com que, de imediato, os alunos falassem o valor de b (um). A professora conseguira minimizar o custo desse tratamento algébrico com uma conversão utilizando a língua natural para exprimir a linguagem matemática. (DUVAL, 1995,2003)

O professor, segundo Bauersfeld (1995), citado em GODINO E LLINARES (2000, p. 90): "Como agente de uma cultura imersa (...) tem que ter um cuidado especial sobre a riqueza da cultura da classe – riqueza em oferecimentos, desafios e alternativas e modelos incluindo a linguagem”.

Ainda nesta aula, ela recorreu ao seguinte *tratamento* algébrico para reduzir a equação 2b+1=-3. Adicionou -1 a ambos os membros da igualdade e obteve 2x = -4. Em seguida utilizou o mesmo procedimento anterior, converteu essa equação (escrita algébrica) em língua natural “*Dois multiplicado por um número, vai dar menos quatro, que número é esse?”.*

Nesse exemplo, a conversão sugerida por Tai gráfico → tabela→escrita algébrica na solução de uma tarefa sobre função do primeiro grau, consumiu um tempo considerável até a professora chegar à representação formal. Durante todo o tempo os alunos reclamaram que era difícil e, pareceu à pesquisadora, sinônimo de trabalhoso, talvez por serem solicitados a realizar tratamentos algébricos, como por exemplo, o necessário para resolver um sistema de equações. A própria professora comentou que eles poderiam ter ficado confusos com as sucessivas mudanças (tratamentos e conversões), por exemplo, quando sugeriu que em vez de calcularem x e y, calculassem a e b. A pesquisadora observou que os alunos ficaram muito confusos sobre como fazer ”a mesma coisa” (tratamentos algébricos) com “coisas diferentes” (x,y trocados por a,b).

A *conversão* entre o gráfico e a escrita algébrica da função foi bastante trabalhosa para a professora e desanimadora para os alunos,

Na conversão contrária, escrita algébrica→ gráfico, retirada de fragmentos da 18ª aula observada, a pesquisadora selecionou um exercício onde existiam as seguintes conversões: de um problema apresentado em língua natural → tabela, de tabela → escrita algébrica e da escrita algébrica → gráfico.

A professora explorou na construção da tabela, *tratamentos* ora com valores de x e ora de y. O que fizera primeiramente em língua natural e, antes de registrar os tratamentos numéricos no quadro, ela pediu aos alunos para falarem como pensavam e anotou no quadro. Esse procedimento de solicitar aos alunos que a acompanhassem no *tratamento* que sempre realizado do conteúdo matemático ao expressá-lo em língua natural, continuava quando escrevia no quadro, na forma como os alunos acompanhavam e respondiam suas indagações, reforçando o que escrevia.

Sempre antes de a professora escrever a fórmula correspondente, os alunos falavam como a mesma deveria ser escrita, por exemplo, “xis vezes dois mais três”, em vez de “dois vezes xis mais três” e a professora escrevia na ordem que falavam, para posteriormente escrever na forma convencional escolar.

A solicitação da professora sobre a conversão da escrita algébrica da função em gráfico, ser reta ou parábola, foi respondida por um único aluno como sendo a reta. Observa-se a dificuldade dos alunos em reconhecer o mesmo objeto matemático, função do 1º grau, em duas representações diferentes.

A opção por apresentar os resultados de uma forma que possibilitasse identificar a realização de conversões entre registros nos dois sentidos, sempre apresentando a conversão contrária à apresentada, não pôde ser atendida na última aula selecionada (37ª observada) devido ao fato de não ter sido identificada nenhuma conversão contrária à encontrada na aula referida.

Mesmo assim, nela foi possível se discutir a conversão escrita algébrica → tabela e a conversão tabela → gráfico de funções do 2º grau, quando a partir da identificação dos coeficientes de duas funções do 2º grau, a professora solicitou a construção dos gráficos dessas funções. Estas conversões foram bastante demoradas, mesmo com o uso da calculadora. A construção do gráfico de uma função do 2º grau foi difícil para alguns alunos, uma vez que eles tentavam manter na construção do gráfico da função do 2º grau, o alinhamento de pontos obtido na construção do gráfico da função de 1º grau, ou seja, procuravam uma reta.

Nos *tratamentos,* realizados pela professora e seus alunos para construir os gráficos das funções do 1º ou 2º grau, cabe destacar que as dificuldades dos alunos não se reduziram à localização de pontos no gráfico, mas apareceram também na escolha de escalas que poderiam ser adotadas para marcar os pontos nos eixos x e y.

No ensino de funções de 2º grau, a professora organizou suas explicações apoiada na localização do vértice da parábola, utilizado como ponto de referência para exploração da simetria da parábola, ao realizar tratamentos tabular e gráfico que utilizou sistematicamente, quando também solicitava que os alunos interpretassem o modo como a simetria se apresentava nas tabelas e gráficos.

O uso da calculadora não minimizou a dificuldade para encontrar o vértice da parábola representada pela função y = 36 x^2 + 9 x +2. Por exemplo, no cálculo da abscissa do vértice, a pesquisadora identificou duas dificuldades dos alunos: uma, ao precisarem aproximar o valor encontrado devido ser o mesmo decimal; e outra, ao precisarem de uma escala adequada para localizar no gráfico a abscissa do vértice. Como apenas um aluno fizera a tabela, a professora aproveitou esses valores para construir o gráfico. Ponte (1984) e Romberg, Carpenter & Fennema (1993), entre outros, também observaram que quando os alunos ao construírem tabelas se deparam com valores numéricos, que não os naturais, sentem dificuldades na escolha da escala a adotada. Além disso, ainda no gráfico, a professora destacou o fato do coeficiente c cortar a parábola no eixo y, o que pareceu ser aceito pelos alunos, como um código (Duval, 1995) a ser utilizado.

Para Duval (1995) não se deve confundir uma conversão com um código, o que pode ocorrer ao se fixar o valor da constante, na escrita algébrica da função de 2º grau, quando a parábola corta o eixo y.

O uso no *tratamento* gráfico das funções do 1º e 2º grau, d*o procedimento por pontos* (Duval, 1988a, 1995, 1996, 2003), quando os pontos são obtidos pela expressão algébrica da função, ou pelos valores de uma tabela colocados no eixo cartesiano para que a curva possa ser traçada, seguindo esses pontos, embora haja uma congruência entre um par ordenado e o ponto que caracterizava sua representação cartesiana, não possibilitou que os alunos acompanharem as mudanças. Apesar das dificuldades, a pesquisadora observou que os alunos, ao auxiliarem a professora a construir gráficos, a partir de uma situação proposta (geralmente sobre função de 1º grau) antecipavam o domínio da função, antes dela solicitar.

A afirmação de que todo o gráfico de reta passava pela origem do sistema de coordenadas impeliu a professora a pedir aos alunos olhassem os gráficos de função de 1º grau já feitos no caderno e pesquisassem sobre as possibilidades dessa afirmativa.

Nas aulas de função de 1º e 2º grau os primeiros indícios de noções da geometria analítica começavam a aparecer embora a professora tivesse durante as explicações mencionado elementos componentes desse conteúdo tais como: os valores da abscissa (que no ensino de funções chama-se variável independente) e da ordenada (que recebe o nome de variável dependente) e sua disposição nos eixos segundo escalas diferentes, o lugar onde as curvas cortam os eixos coordenados, e também a concavidade da parábola.

Das implicações educacionais ressaltam-se os pontos positivos observados a respeito da prática em sala de aula:

- a habilidade da professora em conduzir os alunos na elaboração do conteúdo apresentado por ela, este fato fazia com que a grande parte da turma participasse atentamente da aula;
- a toda pergunta feita por algum aluno ela imediatamente convocava os colegas para ajudá-lo (a), criando um ambiente de ajuda mútua, reforçado pelos trabalhos em grupo, como no dia em que precisou se ausentar;
- aos alunos desatentos ou que estivessem conversando, a professora dirigia perguntas sobre o assunto discutido, para que retomassem a atenção na aula. Como não conseguiam responder, ela retomava o conteúdo com eles do ponto onde haviam parado.

Um ponto negativo a destacar era a freqüência dos alunos. De uma turma de aproximadamente 34 alunos, a média de presenças era de 23 a 25 alunos por aula. A professora retomava muitas vezes o conteúdo já trabalhado causando desinteresse pela aula nos alunos assíduos.

8. CONCLUSÕES

Atirei no que vi, matei o que não vi.

Ditado popular

A finalização de qualquer trabalho é marcada por incertezas de não contemplar todas as possibilidades que outros enxergam, pela angústia de achar que poderia ter esclarecido melhor, explorado outras possibilidades que permitiriam enriquecer mais a pesquisa. Porém, pesquisa não se faz com certezas e existe uma trajetória na qual o destino é parcialmente conhecido, pois muitas vezes não se encontra o que se esperava.

Durante a revisão de literatura, embora tenha olhado a contribuição de outros autores sobre representações, a pesquisadora encontrou na teoria de Duval (registros de representação semiótica), conceitos que considerou pertinentes observar, uma vez que o autor distingue o objeto matemático de suas representações. Em vez de analisar produções dos alunos, a pesquisadora optou em observar a negociação das representações do conteúdo matemático funções durante o diálogo de uma professora com seus alunos em sala de aula.

Como método para a coleta dos dados, optou-se pela observação natural em sala de aula, sem intervenção da pesquisadora e esta delimitou o embasamento teórico de sua investigação à elementos da teoria de Duval com referenciais em pesquisadores como Piaget, Vygotsky, Vergnaud e Font.

A escolha teórica referendou os objetivos do estudo ao identificar e analisar os registros de representação semiótica presentes, tanto nas aulas como nos materiais de apoio utilizados pela professora, assim como na organização e condução de seu trabalho pedagógico.

O fato de a professora ser autora do livro didático adotado pela escola e, portanto, aporte o principal do seu diálogo com os alunos sobre o conhecimento matemático a ser ensinado, no caso, funções, levou a pesquisadora a se apoiar na teoria escolhida para a análise dos tipos de transformação, tratamento e conversão, dos registros de representação presentes tanto nesse material como nos livros usados como apoio. Quantificar, previamente, os tratamentos e conversões encontrados, foi fundamental na identificação dos diferentes modos de a professora utilizar, produzir e elaborar representações intermediárias e representações formais.

Separar o tratamento da conversão dos registros de representação, durante a análise e discussão dos resultados foi inviável. As primeiras tentativas resultaram num texto confuso e repetitivo. A pesquisadora optou, então, pela forma de organização apresentada: descrever conjuntamente os tratamentos e conversões, apresentando as conversões contrárias de imediato.

A análise dos tratamentos e conversões presentes na organização e condução trabalho pedagógico da professora permitiram ressaltar alguns pontos:

- O fato de a professora começar o trabalho com o conteúdo funções, iniciando com a busca de escritas genéricas, partindo de registros diferentes como seqüências numéricas ou pictóricas para convertê-las em escrita algébrica, pareceram favorecer o entendimento destas formas de conversão pelos alunos;
- A professora usou intensamente as tabelas como auxiliar na escrita das fórmulas e também para introduzir a noção de dependência entre variáveis mostrando que nem todas as relações numéricas estabelecem relações de dependência entre seus pares.
- Nas funções do 1º grau e funções constantes as conversões mais utilizadas foram de tabela em escrita algébrica. A conversão entre gráfico e a escrita algébrica, menos explorada pelos livros didáticos, se confirmou na organização do conteúdo pela professora e companheiras. Trata-se de preocupação, talvez mais matemática do que didática, pois nos exercícios onde apareceram essas conversões partia-se do gráfico e solicitava-se a escrita algébrica correspondente, sem nenhuma situação didática proposta que gerasse tal necessidade.
- As conversões de escrita algébrica em gráfico de funções do 2º grau, passando pelas tabelas foram as mais exploradas nesta parte do conteúdo seguidas da conversão de tabela para escrita algébrica. A professora utilizou a propriedade geométrica da simetria da parábola, já conhecida pelos alunos das aulas de geometria, como ferramenta na construção da tabela e conseqüentemente do gráfico.

- Na organização do conteúdo, a professora e suas companheiras preocuparam-se em diversificar os registros e suas conversões.

Na identificação e análise dos registros de representação semiótica utilizados, produzidos e elaborados pela professora e os alunos, os resultados apresentados permitem algumas conclusões:

- a professora empenhou-se, durante as aulas observadas em lidar com diferentes registros de representação para que os alunos reconhecessem o objeto matemático função em cada uma de suas representações;
- os alunos eram incentivados, pela professora, a falar como pensavam, expressando, portanto, os tratamentos e conversões realizados em situações matemáticas, primeiro em linguagem matemática oral;
- os tratamentos algébricos e numéricos (racionais e inteiros), foram muito difíceis para a maioria dos alunos, mesmo quando o conteúdo ensinado já recebera tratamentos em séries anteriores, como no caso das operações com inteiros;
- o tratamento algébrico, de menor custo cognitivo, não pareceu ter a preferência dos alunos. A maioria escolheu a de maior custo cognitivo, possivelmente pela interferência da professora ao destacar o elemento repetido na seqüência;
- embora a professora destacasse, pela sua experiência, que os alunos apresentavam dificuldade ao escrever a escrita genérica de uma situação numérica ou pictórica, os alunos apresentaram dificuldade nos tratamentos gráficos tanto da função do 1º grau quanto da função do 2º grau;
- as conversões que apresentaram maior grau de dificuldade foram: de gráfico de função do 1º grau para escrita algébrica e a de escrita algébrica de funções de 1º e 2º grau para uma representação figural;
- as representações intermediárias (figuras geométricas, esquemas, desenhos, setas), ao mesmo tempo que permitiram acessar outras formas

de representação ou melhorar o desempenho de tratamentos e conversões, trouxeram à tona conceitos vagos e evidenciaram as dificuldades dos alunos em lidar com objetos matemáticos já ensinados em séries anteriores. Formas de representação escolares convencionalmente utilizadas ao se abordar conteúdos, por exemplo, frações, remeteram os alunos a significados diferentes dos pretendidos pela professora;

- muitas vezes para superar uma dificuldade apresentada pelos alunos, a professora usou representações formais da matemática, como a reta numerada ou uma representação sócio-cultural, como temperatura para auxiliá-los na compreensão;
- durante o diálogo os diferentes registros produziram diferentes significados e cada um desses registros pareceu produzir um significado diferente do pretendido pela professora. Os componentes da sala de aula negociaram significados a fim de chegar a um significado compartilhado, isto é, compreendido por todos os participantes. Pareceu que os participantes constituíram significados tomados como compartilhados embora não compartilhassem, necessariamente, o conhecimento intencionado pela professora.

A importância da linguagem deve ser destacada como o elemento catalisador que permeou todos os momentos de ensino e que não se resumiu à linguagem escrita, mas constituiu-se também de uma matemática oral que permitiu à professora estabelecer congruência entre a escrita algébrica e a língua natural quando o tratamento com a escrita algébrica parecia não fazer sentido para os alunos.

Utilizando-se da linguagem matemática, oral e escrita, a professora procurou compartilhar significados próprios desse contexto para que os alunos se aproximassem do saber institucionalizado. O diálogo abaixo fornece uma amostra desse resultado quando a professora ao finalizar a conversão de números racionais perguntou:

P: - Por que falamos pizza?
And: - Porque é mais fácil de pensar.

Embora as propostas curriculares e livros didáticos sejam partidários do antigo refrão de que é preciso partir do que os alunos já sabem a forma da professora utilizar as representações intermediárias apoiando-se no contexto sócio-cultural em que a escola está inserida, foi bastante significativa. Ela trouxe o significado de *pizza* como um alimento apreciado pela maioria das pessoas para o um contexto de ensino onde se aproveita a forma da pizza (redonda) para dividi-la em partes iguais procurando gerar significado no tratamento de frações.

Porém, exemplo como o acima mencionado, mostram a diversidade e a complexidade no uso de representações para acessar objetos matemáticos nos processos de ensino – aprendizagem.

A partir desses resultados vislumbraram-se, ao menos, duas perspectivas de continuidade de pesquisa: uma para analisar no diálogo da professora e alunos a relação entre a produção de significados intencionados pela professora e dos significados atribuídos pelos alunos na construção dos objetos matemáticos, e outra que possa verificar a relação entre os significados atribuídos pelos alunos às representações intermediárias convencionalmente utilizados pela escola e sua (im)possibilidade de aproximação dos objetos matemáticos escolares.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES – MAZZOTI, A. J.O método nas Ciências Sociais. In: **O método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa**. Org. Alves – Mazzoti, A. J. e Gewandsznadjer,F.São Paulo: Pioneira. 2000.

ARTIGUE, M., Functions from an algebraic and graphic point of view: Cognitive difficulties and teaching practices. In: **The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy.** USA:Dubinski e Harel, p.109-132, 1992.

BARDINI, C., PIERCE, R.U., STACEY, K. Teaching linear functions in context with graphics calculators: students' responses and the impact of the approach of their use algebraic symbols. In: **International Journal of Science e Mathematics Education**, vol2, nº 3, p.353-376, sept. 2004.

BAUERSFELD, H. "Language games" in the mathematics classroom: their function and their effects. In: Cobb, P e Bauersfeld, H. **The emergence of meaning: interaction in class-roon cultures.** Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlebaun Associates, p. 271-292,1995.

BENVENISTE, E. **Problemas de lingüística geral II**.Campinas, S.Paulo: Portes,1989.

BENVENISTE, E. **Problemas de lingüística geral I**, 4ª ed. Campinas, S.Paulo: Portes,1995.

BIANCHINI, B.L. e PUGA, L.Z. Revelando concepções de alunos sobre o conceito de função numa plataforma de ensino em EAD. In: **Actas do V CIBEM**. Comunicação oral .Porto, Portugal, p. 98, 17 a 22 de julho de 2005.

BICUDO, M. A. **Formação de professores? Da incerteza à compreensão**. São Paulo: EDUSC, 2003.

BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim – 8ª série.** São Paulo: Editora FTD, 2000.

BONJORNO,J.R. e GIOVANNI, J.R. **Matemática**.São Paulo, SP: FTD, 1982.

BOYER, C., **História da matemática**, trad.Elsa Gomide,São Paulo:Edgar Blunch,1974.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**, Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC, 1998.

BROPHY, J. E., e Good, T. L. Teacher behavior and student achievement. In M. C. Wittrock (Ed), Handbook of research on teaching, 3ª ed. New York: Macmillan, 1986.

BRUYNE, P., HERMAN, J., SCHOUTHEETE, M. de, **Dinâmica da pesquisa em Ciências Sociais**.5ª ed.Rio de Janeiro:Franscisco.Alves.1991

CARAÇA, B. J., **Conceitos fundamentais da matemática**, 3ª ed.,Lisboa:Gradiva,2000.

CARNEIRO,V.C.,FANTINEL,P.da C., DA SILVA,R.H. Funções: significados circulantes na formação de professores. In: **Bolema,** ano 16,nº 19, p.37-57, 2003.

CATTO, G., **Registros de representação e o numero racional: uma abordagem nos livros didáticos**. Dissertação de mestrado em Educação Matemática. PUC-SP, 2000. 150p.

CHEVALLARD,Y. **La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.** Buenos Aires:Aique,1991.

CHOMSKY, N. **Aspectos da teoria da sintaxe**, trad. José Antonio Meirelles. 2ª ed. Coimbra- MG: A. Amado, 1978.

CLARK,C.M. e PETERSON,P.I Learning mathematics from instruction (Special Issue).**Educational Psicologist**,23 (2). 1986.

CLEMENT,L.L. What do students really know about functions? In: **Mathematics Teacher**, vol.94,nº 9, p.745-748, December 2001.

COLLETTE, Jean Paul; **História de Las Matemáticas,** vol. 1, Madrid, Siglo Veintiuno de España Editores, S.A, 1979.

COLLETTE, Jean Paul; **História de Las Matemáticas,** vol. 2, Madrid, Siglo Veintiuno de España Editores, S.A, 1986.

CUNNIGHAM, R. F. Algebra teachers' utilization of problems requiring transfer between algebraic, numeric and graphic representations. In: **School Science and Mathematics**. v.105, p.73-79, Feb.2005.

CURI, E. **Formação de professores polivalentes: uma análise de conhecimentos para ensinar Matemática e crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos.** Tese de Doutorado. PUC – São Paulo. 2004. 197p.

DAMM, R. F. Registros de representação. In: **Educação Matemática: uma introdução.** São Paulo:Educ. p.135-153, 1999.

DAVYDOV, V.V., **Tipos de generalización de la enseñanza**, Habana, Editorial Pueblo y Educación, Segunda reimpresión, 1982.

DOMENICO, L.C. **Matemática**, 2º grau, volume I,1984.

DOWKER, A. Computational estimation strategies of professional mathematicians. In: **Journal for Research in Mathematics Education,** 23 (1), p.45-55, 1992.

DUBINSKY,E., HAREL,G. The nature of the process conception of function. In: **The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy.**USA:Dubinski e Harel, p.85-106, 1992.

DUVAL, R. Graphiques et Equations: l'articulation de deux registres.In : **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**,IREM de Strasburg, n°1, p.235-255,1988a.

DUVAL, R. Ecarts sémantiques et cohérence mathématique: introduction aux problèmes de congruence. In: **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, IREM de Strasburg n°1, p.7-25,1988b.

DUVAL, R. Registre de represéntation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée: In : **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, IREM de Strasburg v.V, p.37-65,1993.

DUVAL,R. **Semiosis et pensée humaine: Regitres sémiotiques et apprentissages intellectuels.** Bern: Peter Lang, 1995.

DUVAL,R. Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage. In **Actes de la 46ème Rencontre Internationale de la CIEAEM**, Université Paul Sabatier, Toulouse:Ed. Antibi , tome 1, p. 3-15,1996.

DUVAL,R. et al. **Conversion et articulation des représentations analogiques.**Séminaire IUFM. Nord Pas-de-Calais:Dred.,1998a**.**

DUVAL R. Signe et objet (I) : trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. In:**Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, IREM de Strasburg, n°6, p. 139-163,1998 b.

DUVAL, R. Signe et objet (II) : questions relatives à l'analyse de la connaissance.In: **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, IREM de Strasburg, n°6, p. 165-196,1998 c.

DUVAL, R. **Analyse du fonctionnement cognitif.** Cours PUC/SP. Février 1999.72p.

DUVAL,R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: **Aprendizagem em Matemática**, org. Sílvia D. A. Machado,Campinas,SP:Papirus, p.11-33, 2003.

EINSENBERG,T. On the development of a sense for functions. In: **The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy.**USA:Dubinski e Harel, p.153-174, 1992.

EVEN,R. Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. In: **Educational Studies in Mathematics**, v. 21, p.521-544. 1990.

EVES,H. **Introdução à historia da matemática**. Campinas,SP:Editora da Unicamp,1995.

FALCÃO, J.T.R. A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. In: **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**,Recife: Ed. Universitária da UFPE, p.85-107,1993.

FERNÁNDEZ, A. Os professores devem buscar a ressignificação de sua aprendizagem. In: **Pátio**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, ano 1, nº 4, p.26 -28, fev/abril 1998.

FONT,V.M. **Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràphiques**.Tesis doctoral. Universitat de Barcelona. 2000.

FONT,V.M. Representation in Mathematics Education . Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. In: **Philosophy of Mathematics Education Journal**, p.1-35, 2001.

FONT,V.M. , RAMOS, A.B. e CONTRERAS, A. Contexto e contextualización en la enseñanza e en la aprendizaje das matemáticas: una perspectiva ontosemiótica. In: **Actas do V CIBEM.Porto.Portugal**, p.110, 2005.

FREGE, G. **Lógica e Filosofia da Linguagem**. São Paulo:Cultrix.Ed.USP. 1978.

FREUDENTHAL,H. **Mathematics as an Educational Task**, Dordrecht, The Netherlands: D.Riedel, 1973.

FREUDENTHAL,H. **Didactical phenomenology of mathematical structures**, Dordrecht, The Netherlands: D.Riedel, 1983.

GARCIA,C.M. A formação de professores: novas perspectivas baseadas na investigação sobre o pensamento do professor.In: **Os professores e sua formação**, org. Antonio Nóvoa.Lisboa:Dom Quixote, p.51-76, 1992.

GARCIA BLANCO, M. M. **Conocimiento profesional del professor de Matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje.** Grupo de Investigación en Educación Matemática, Universidade de Sevilla,1998.

GARCIA BLANCO, M. M e LLINARES, S., Procesos interpretativos y conocimiento profesional del profesor de matemáticas: reflexiones desde la perspectiva de la enseñanza como diseño. **In: Quadrante**, vol. 8, p.61-84, 1999.

GODINO, J.D. Un enfoque ontológico e semiótico de la cognición matemática. In: **Recherches en Didactique des Mathématiques.** Vol 22. nº 2/3, p.237 -284,2000.

GODINO, J.D., BATANERO,C. Significado institucional e personal dos objetos matemáticos. In: **Recherches en Didactique des Mathématiques.**Vol 14. nº 3, p.325 -355,1994.

GODINO, J.D. & BATANERO,C. Significado institucional e personal dos objetos matemáticos. In: **Recherches en Didactique des Mathématiques.**Vol 14. nº 3, p.325 -355, 1994.

GODINO, J.D., LLINARES,S. El interaccionismo simbólico en la Educación Matemática. In: **Revista Educación Matemática.** nº 1, p.70 -92, 2000.

GRAHAM, K.G e FERRINI-MUNDI, J. Functions and their representations. In: **Mathematics Teacher**, v. 3, march, p.209-216, 1990.

GRANGER,G. **Langages et épistemologié**. Paris Klinksieck, 1979.

GRILLO,M. Prática docente: referência para formação do educador. In: **Formação de professores de matemática: uma visão multifacetada**. org. Helena N. Cury. Porto Alegre: EDIPUCRS, p.29-47, 2001.

GUNDLACH, B.H. **Historia dos números e numerais. In:Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**. trad. Hygino H. Domingues. São Paulo:Atual, p.1-20,1992.

GUZMAN-RETAMAL,I.,Registres mis enjeu par la notion de fonction. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.** IREM de Strasbourg,vol2, p.229-259,1989.

HERNÁNDEZ,F. A importância de saber como os docentes aprendem. In: **Pátio**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul. Ano 1, nº 4,fev/abril, p.8-13, 1998.

IEZZI, G. et al., Matemática, 9ª ed. revisada, São Paulo: 1981.

IFRAH,G.**Historia universal dos algarismos**.Tomo I. Trad.Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky.Rio de Janeiro: Nova Fronteira,1997.

IMENES, L.M. e LELLIS, M. **Matemática – 8ª série**. São Paulo: Editora Scipione, 1998.

ISOLANI,C. M. M.; MIRANDA, D. T. L.; ANZOLLIN, V.L. A. e MELÃO, W. S. **Matemática - 8ª série**. Curitiba:Módulo. 2002.

KLINE,M. **O fracasso da matemática moderna**. Trad. Leônidas Gontijo de Carvalho. Sao Paulo, SP: Ibrasa, 1976.

KNUTH, E.J. Student understanding of the Cartesian connection: an exploratory study. In: **Journal for Research in Mathematics** Education. Vol 31, nº 4, p.500-507, 2000.

KRAINER, K. **Teacher education as research – a trend in european mathematics education**. CERMEII, 12/03/2001.

LAMPERT, M. Investigating teaching practice. In: **Talking Mathematics in school: studies of teaching and learning.** Org. Lampert, M. e Blunk, M. L.New York: Cambridge University Press, p.153-162, 1998.

LLINARES, S., Conocimiento y práctica profesional del profesor de matemáticas: características de una agenda de investigación. **In: Zetetiké**, vol.7, nº 12, p.9-36, jul/dez. de 1999.

LOCHHEAD J. e MESTRE, J.P. Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas. **In: As idéias da álgebra**. org. Arthur F.Coxford e Albert P. Shulte.São Paulo: Atual, p.144-154, 1995.

LÜDKE, M. e ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU,1986.

MÄEDER, A. M. **Curso de matemática**, 3º livro, 5ª edição, Rio de Janeiro: Melhoramentos, 1955.

MARKOVITS, Z.,EYLON, B.S. e BRUCKHEIMER,M., Dificuldades dos alunos com o conceito de função. **In: As idéias da álgebra**. Org.Arthur F.Coxford e Albert P. Shulte.São Paulo: Atual, p.49-69, 1995.

MEIRA, L.L. Aprendizagem e ensino de funções. In: **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**, Recife: Ed. Universitária da UFPE, p.62-84,1993.

MONK, S., Student's understanding of a function given by a physical Model. In: **The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy.** USA:Dubinski e Harel, p.175-194, 1992.

MORETTI, M. T., A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais, In: **Aprendizagem em Matemática**, org. Sílvia D. A. Machado,Campinas,SP:Papirus, p.149-160, 2003.

MOSCHKOVICH, J.N. Appropriating mathematical pratices: a case study of learning to use and explore functions trough interaction with a tutor. In: **Educational Studies in Mathematics**. Vol 55, nº 1-3, p.49-80, jan.2004.

MOSCHKOVICH, J.N., SCHOENFELD, A. H. e ARCAVI, A. Aspects of understanding: on multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them. In: **Integrating research on the graphical representation of functions,** Hillsdale,New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, p.69-100, 1993.

NEHRING, C. M. **Compreensão de texto: Enunciados de problemas multiplicativos elementares de combinatória.** Centro de Ciências Naturais. UFSC. Tese de Doutorado em Educação. 2001. 210 p.

NORMAN, A. Teacher´s mathematical knowledge of the concept of function. In: **The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy.**USA:Dubinski e Harel, p. 215-234, 1992.

NÓVOA, A. Formação de professores e profissão docente. In: Nóvoa, A.(coord.) **Os professores e a sua formação**. Lisboa: Dom Quichote. 1995.

PIAGET, J. **A representação do mundo na criança**. Rio de Janeiro: Record, 1926.

PIAGET, J. **A formação do símbolo na criança: imitação, jogo, sonho, imagens e imitação**. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

PIAGET, J. **O nascimento da inteligência na criança**. 4ª ed. Rio de Janeiro: Guanabara, 1987.

PINO,A. O biológico e o cultural nos processos cognitivos. In: **Linguagem, cultura e cognição: reflexões para o ensino e a sala de aula.** Org. Eduardo Mortimer e Ana Luiza B. Smolka. Belo Horizonte:Autêntica, p.21-50, 2001.

PELHO, E. B. B**. Introdução ao conceito de função: a importância da compreensão das variáveis.** Mestrado em Educação Matemática. PUC-SP, 2003. 122 p.

PIERCE, C.S. **Semiótica**, trad. José Teixeira Coelho Neto. São Paulo- SP: Perspectiva, 1977.

PONTE,J. P. **Functional reasoning and interpretation of Cartesian graphs**. Tese de Doutorado. University of Geórgia. USA.1984. 214 p.

RÍBINIKOV, K. **Historia de las Matemáticas**. Moscou:Editora Mir, 1987.

ROMBERG, T.A., CARPENTER, T.P. e FENNEMA, E. Toward a common research perspective. In: **Integrating research on the graphical representation of functions,** Hillsdale,New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, p.1-9, 1993.

SANTOS, E. P. **Função afim y = ax+b: a articulação entre os registros gráfico e algébrico como auxilio em um software educativo**. Mestrado em Educação Matemática. PUC-SP, 2002. 100p.

SCHUBRING, G., O primeiro movimento internacional de reforma curricular em Matemática e o papel da Alemanha: um estudo de caso na Transmissão de Conceitos, **In: Zetetiké**, vol.7, nº 11, p. 29- 65, jan/jul.1999.

SCHWARTZ, J. e YERUSHALMY, M. Getting students to function in and with algebra.In: **The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy.**USA:Dubinski e Harel, p. 261-288,1992.

SELDEN,A. e SELDEN,J.Research perspectives on conceptions of functions: summary and overvew. In: **The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy.** USA: Dubinski e Harel, p.1-16,1992.

SFARD, A. Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: the case of function. In: **The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy.**USA:Dubinski e Harel, p.59-84, 1992.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: **The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy.**USA:Dubinski e Harel, p. 25-58, 1992.

SIERPINSKA, A., **Understanding in Mathematics**. London:The Falmer Press,1994.

SOARES, M.T.C. Diálogos em sala de aula: In: **Contrapontos**.Itajaí: Editora da Univali, ano 2,nº 6, p.471-474, set/dez 2002.

SOUZA, R.N.S.de, **A construção da noção de função linear: transitando em diferentes registros de representação semióticos**. Programa de Mestrado Acadêmico em Educação: Universidade do Vale do Itajaí. Itajaí- S.C. Dissertação de Mestrado. 2003.146p.

SOUZA, R.N.S. e CORDEIRO, M. H. Os registros de representação como ferramenta do pensamento na resolução de problemas matemáticos que envolvem o conceito de função linear: In: **Contrapontos**. Itajaí: Editora da Univali, ano 2, nº 6, p.439-448, set/dez 2002.

STRUIK, D., **História Concisa das Matemáticas**, Lisboa: Gradiva, 1989.

THORPE, J.A. Algebra: What should we teach and how should we teach it? In: S.Wagner e C. Kieran (eds) **Research issues in the learning and teaching of algebra**. Reston, VA, NCTM, p.11-24,1989.

TRINDADE, J. A. de O. **Os obstáculos epistemológicos e a educação matemática.** Centro de Ciências da Educação. UFSC. Dissertação de mestrado, 1996. 164p.

TRINDADE, J. A. de O. e MORETTI, M.T., Uma relação entre a teoria histórico-cultural e a epistemologia histórico crítica no ensino de funções: a mediação. **In: Zetetiké**, vol.8, nº 13/14, jun/jul., p.29-50, 2000.

USISKIN, Z., Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. **In: As idéias da álgebra**. org. Arthur F.Coxford e Albert P. Shulte.São Paulo: Atual, p.9 -22,1995.

VERGNAUD, Gerard. **L'enfant, la mathématique et la realité,** Berne:Peter Lang,1981.

VERGNAUD, G. **La formation des concepts scientifiques. Relire Vygotski et débattre avec lui aujourd' hui**. Colloque Vygotski. Paris. 12-13 dez.1987. 8 p. mimeo.

VERGNAUD, G**.** What is a mathematical behaviour?. In: **Theoretical frameworks and empirical facts in the Psychology Mathematics** Education. Plenary Conference. ICME VI. Budapest. July 27 – august 3. 1988.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels, org: Jean Brun. In: **Didactique des mathématiques**, Lausanne: Delachaux et Niestlé, p.197-240, 1996.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**.3ª ed**.** São Paulo: Martins Fontes, 1991.

VINNER,S., The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. In: **The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy.** USA: Dubinski e Harel, p.195-214, 1992.

ZUFFI,E. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. In: **Educação Matemática em Revista**, ano 8,nº 9/10, p.10-16, abril de 2001.