UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

SILVANA MATUCHESKI

RELAÇÕES ENTRE O ENSINO DE SISTEMAS LINEARES E A MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

CURITIBA
2008

SILVANA MATUCHESKI

RELAÇÕES ENTRE O ENSINO DE SISTEMAS LINEARES E A MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada como requisito parcial à conclusão do Curso de Especialização para Professores de Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná - UFPR.

Orientadora: **Profª. Dra. Neida Maria Patias Volpi**

CURITIBA
2008

TERMO DE APROVAÇÃO

SILVANA MATUCHESKI

RELAÇÕES ENTRE O ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES
E A MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Monografia aprovada como requisito parcial para obtenção do título de Especialista no Curso de Especialização para Professores de Matemática, Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientadora: Profª. Dra. Neida Maria Patias Volpi
Departamento de Matemática, UFPR

Examinador: Prof. Dr. Volmir Eugênio Wilhelm
Departamento de Matemática, UFPR

Curitiba, outubro de 2008.

“A modelagem matemática
é matemática por excelência.”
Ubiratan D´Ambrosio

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida.

À minha família pelo apoio e incentivo.

À professora Neida pela orientação, disponibilidade e colaboração durante a realização desta monografia.

A todos que colaboraram de alguma maneira para a realização desta pesquisa.

RESUMO

Neste trabalho, a modelagem matemática é apresentada como uma estratégia de ensino-aprendizagem. Assim, uma das preocupações do trabalho é estabelecer as possíveis relações entre Modelagem Matemática e Sistemas Lineares no Ensino Médio. Para se obter dados relativos ao ensino do conteúdo matemático em questão, aplicou-se um questionário de pesquisa para alguns professores de Matemática que atuam no Ensino Médio no Estado do Paraná. E, para se estabelecer as relações entre modelagem e Sistemas Lineares, primeiramente foram destacados alguns conceitos sobre modelos matemáticos e Modelagem Matemática. Em seguida, discute-se a modelagem no ensino de Matemática, bem como as vantagens e desvantagens dessa estratégia de ensino. Posteriormente, o conteúdo matemático “Sistemas Lineares” é apresentado de maneira semelhante àquela encontrada em livros didáticos de Ensino Médio. Na seqüência, os resultados da pesquisa realizada com professores de matemática do Estado do Paraná são ilustrados através de tabelas e gráficos. Logo depois, são tecidos alguns comentários sobre cada questão, além de uma visão geral dos resultados obtidos com a pesquisa. E, finalmente, são apresentados alguns caminhos para a utilização da Modelagem Matemática em sala de aula.

Palavras-chave: Matemática, Modelagem e Sistemas Lineares.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Modelagem Matemática é indicada nas Diretrizes Curriculares de Matemática para as Séries Finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio do Estado do Paraná (DCE) como um encaminhamento metodológico para as aulas de Matemática. Daí o interesse em pesquisar a possível ligação existente entre Modelagem Matemática e o conteúdo Sistemas de Equações Lineares (ou simplesmente "Sistemas Lineares"). Assim, surgiu a seguinte questão: "Como o 'conteúdo Sistemas Lineares' pode ser abordado no Ensino Médio a partir da Modelagem Matemática?". Para responder essa questão, é necessário analisar como o conteúdo em questão vem sendo trabalhado pelos professores de Matemática do Estado do Paraná, bem como analisar a maneira que os livros didáticos costumam apresentar o conteúdo aos alunos e professores. Além disso, é importante avaliar quais são as vantagens e desvantagens que o método pode trazer aos alunos e professores do Ensino Médio.

Na fase inicial do desenvolvimento desta pesquisa surgiram vários questionamentos, entre os quais se destacam os seguintes: Como os professores têm abordado o conteúdo "Sistemas Lineares" no Ensino Médio? A Modelagem Matemática está realmente presente na Educação Básica, especialmente quando se trata do conteúdo "Sistemas Lineares" no Ensino Médio?

Para responder essas questões, foi enviado um questionário para, aproximadamente, quatrocentos professores de Matemática que atuam no Estado do Paraná, sendo que, desses, apenas cento e nove professores responderam o referido questionário. A partir das respostas obtidas, a pesquisa foi esquematizada da seguinte maneira:

- Capítulo 1: introdução ao conteúdo da pesquisa, bem como sua organização no presente trabalho de pesquisa;
- Capítulo 2: apresentação de alguns conceitos de Modelagem Matemática, algumas considerações sobre a Modelagem Matemática no Ensino de Matemática, além das vantagens e desvantagens da referida estratégia de ensino;
- Capítulo 3: exposição do conteúdo matemático "Sistemas Lineares" de forma semelhante à encontrada em livros didáticos do Ensino Médio;
- Capítulo 4: apresentação dos resultados do questionário de pesquisa aplicado a alguns professores de Matemática que trabalham no Estado do Paraná;

- Capítulo 5: exposição de algumas sugestões de trabalho com Modelagem Matemática com o conteúdo “Sistemas Lineares”, além de comentários sobre a relação entre Modelagem Matemática, conteúdo matemático e os dados coletados através do questionário de pesquisa aplicado aos professores de Matemática;
- Capítulo 6: considerações finais, apresentando as conclusões do presente trabalho de pesquisa.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA: ESTRATÉGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM

Há muito tempo, educadores matemáticos e professores de Matemática almejam a melhoria do ensino de Matemática no Brasil, e, por isso, um dos assuntos que preocupa estes profissionais é a metodologia utilizada para abordar os conteúdos matemáticos tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio.

Segundo as Diretrizes Curriculares de Matemática do Estado do Paraná (DCE), aprende-se Matemática para que "o homem amplie seu conhecimento e, por conseguinte, contribua para o desenvolvimento da sociedade" (2008, p. 16).

E, como afirmam, Biembengut e Hein,

> Há um consenso no que diz respeito ao ensino de matemática precisar voltar-se para a promoção do conhecimento matemático e da habilidade em utilizá-lo. O que significa ir além das simples resoluções de questões matemáticas, muitas vezes sem significado para o aluno, e levá-lo a adquirir uma melhor compreensão tanto da teoria matemática quanto da natureza do problema a ser modelado. (2007, p. 18)

Estas afirmações vêm ao encontro do que indicam as DCE:

> É necessário que o processo pedagógico em Matemática contribua para que o estudante tenha condições de constatar regularidades, generalizações e apropriação de linguagem adequada para descrever e interpretar fenômenos matemáticos e de outras áreas do conhecimento. (2008, p. 17)

Ou seja, cabe aos professores buscar outras maneiras de encaminhar os conteúdos matemáticos, oferecendo oportunidades de investigações matemáticas aos alunos. Assim, os estudantes poderão encontrar regularidades e usar ferramentas matemáticas nas diversas situações do cotidiano e não apenas na resolução de exercícios e/ou problemas matemáticos em sala de aula.

Seguindo este mesmo pensamento, Biembengut e Hein ressaltam que

> a modelagem matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece, ao mesmo tempo que aprende a arte de modelar, matematicamente. Isto porque é dado ao aluno a oportunidade de estudar situações-problema por meio de pesquisas, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso crítico. (2007, p. 18)

Biembengut e Hein ainda lembram que “A modelagem matemática não é uma idéia nova. Sua essência sempre esteve presente na criação das teorias científicas, e, em especial, na criação das teorias matemáticas.” (2007, p. 15).

E, como as DCE apontam alguns encaminhamentos metodológicos para o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos, dentre eles a Modelagem Matemática, optou-se em pesquisar a abordagem do conteúdo Sistemas de Equações Lineares através da Modelagem Matemática.

2.1 MODELAGEM

Antes de tratar de Modelagem Matemática, acredita-se ser pertinente falar apenas do termo *modelagem*, pois é comum encontrar textos que falam de modelagem, inclusive modelagem no ensino. Mas, afinal, o que é modelagem?

> A idéia de modelagem suscita a imagem de um escultor trabalhando com argila, produzindo um objeto. Esse objeto é um modelo. O escultor munido de material – argila, técnica, intuição e criatividade – faz seu modelo, que na certa representa alguma coisa, seja real ou imaginária. (Biembengut e Hein, 2007, p. 11)

Então, pode se dizer que a modelagem “é um processo que emerge da própria razão e participa da nossa vida como forma de constituição e de expressão do conhecimento” (Biembengut e Hein, 2007, p. 11).

Ou seja, quando se modela se está representando um objeto, que pode ser real ou abstrato. Muitas vezes, se faz isso na tentativa de explicar ou solucionar situações.

Nesta monografia será tratado apenas do modelo matemático. Desta forma, a fim de minimizar repetições, quando se falar em modelo fica subentendido que está se falando em modelo matemático. Do mesmo modo, quando se falar em modelagem fica subentendido que se trata de Modelagem Matemática.

A seguir, algumas considerações sobre os modelos matemáticos.

2.2 MODELOS MATEMÁTICOS

A palavra modelo é utilizada nas mais diversas situações. Por isso, é necessário esclarecer o que se entende por modelo matemático nesta pesquisa. Para tanto, serão destacados alguns conceitos de modelos matemáticos encontrados na literatura pesquisada.

Para Bassanezi, modelo matemático é “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado” (2004, p. 20).

Da mesma forma, Biembengut e Hein dizem que modelo matemático é “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real” (2007, p. 12). Biembengut e Hein prosseguem dizendo que os modelos matemáticos possibilitam “melhor compreensão, simulação e previsão do fenômeno estudado” (2007, p. 12).

No entanto, vale lembrar que a elaboração de modelos matemáticos tem relação muito forte com o conhecimento matemático que se possui, pois:

> Se o conhecimento matemático restringe-se a uma matemática elementar, como aritmética e/ou medidas, o modelo pode ficar delimitado a esses conceitos. Tanto maior o conhecimento matemático, maiores serão as possibilidades de resolver questões que exijam uma matemática mais sofisticada. Porém o valor do modelo não está restrito à sofisticação matemática” (Biembengut e Hein, 2007, p. 12-13)

Ou seja, quanto maior o conhecimento matemático disponível, mais complexo pode ser o modelo matemático, sendo que desta forma os resultados obtidos poderão ser mais próximos da realidade. No entanto, se o nível do conhecimento ainda não for tão elevado, podem ser elaborados modelos mais simples e a partir deles podem ser obtidas soluções para as questões.

2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática existe há muito tempo. Como dizem Biembengut e Hein, “a modelagem é tão antiga quanto a própria Matemática, surgindo de aplicações na rotina diária dos povos antigos” (2007, p 7).

Na literatura é possível encontrar várias perspectivas a respeito da Modelagem Matemática. Então, algumas dessas perspectivas serão explanadas aqui e, posteriormente, apresentar-se-á como a Modelagem Matemática está sendo entendida nesta pesquisa. Para que isto seja possível, é necessário responder a seguinte questão: “*O que é a Modelagem Matemática*”?

Segundo Bassanezi, “*Modelagem Matemática* é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências.” (2004, p. 24, itálico do autor). Ainda de acordo com Bassanezi, “a *modelagem matemática* consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.” (2004, p. 16, itálico do autor).

Para Biembengut e Hein, “Modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo” (2007, p. 12), sendo que ela é “uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias” (2007, p.13).

Burak defende que a Modelagem Matemática “constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar matematicamente os fenômenos do qual o homem vive seu cotidiano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões” (1987, p. 21).

Enquanto isso, Barbosa entende a Modelagem Matemática como ”um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade” (2001a, p. 6). Sendo que, para ele, “Indagar significa assumir um incômodo com algo, procurar enunciá-lo e buscar uma compreensão ou explicação” (2001b, p. 32). E a investigação “Trata-se da busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas. (...) É como se se procurassem peças para ajudar a formar o cenário daquilo que incomoda” (Barbosa, 2001b, p. 32)

Da mesma forma, Diniz considera a Modelagem Matemática como “um ambiente de aprendizagem dos cenários para investigação” (2007, p. 14). Sendo que *cenário para investigação* é a denominação dada por Skovsmose a “um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação” (2000, p. 69). Isto é, “Um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações” (Skovsmose, 2000, p. 73).

Assim, nesta pesquisa, entende-se a Modelagem Matemática como uma estratégia de ensino-aprendizagem de Matemática que permite que os alunos investiguem e transformem problemas da realidade em problemas matemáticos (por meio de modelos matemáticos), motivando-os a buscar respostas, através da linguagem matemática, e conduzindo-os a interpretar os dados obtidos usando a linguagem usual.

Sendo assim, neste trabalho, acredita-se que a Modelagem Matemática é uma estratégia adequada para abordar o conteúdo 'Sistemas Lineares' no Ensino Médio, pois ao trabalhar este conteúdo, tem-se a oportunidade de elaborar várias questões a partir de uma única situação problema. Ou seja, é possível explorar o problema de várias maneiras.

2.3.1 *Etapas da Modelagem Matemática*

Quando se trabalha com Modelagem Matemática, normalmente, segue-se alguns procedimentos, que Bassanezi chama de "atividades intelectuais da Modelagem Matemática" (2004, p. 26). E, ainda de acordo com Bassanezi (2004, p. 26-32), essas atividades intelectuais estão divididas em:

1. Experimentação – atividade laboratorial onde se processa a obtenção de dados. Os métodos experimentais, quase sempre são ditados pela própria natureza do experimento e objetivo da pesquisa.

2. Abstração – leva à formulação dos modelos matemáticos. Nesta fase, é necessário que aconteça: a *seleção das variáveis* (que devem ser claramente definidas), a *problematização* (formulação de problemas com enunciados claros, compreensíveis e operacionais, indicando exatamente o que se pretende resolver), a *formulação de hipóteses* (através de observação de fatos, comparação com outros estudos, dedução lógica, experiência pessoal, observação de casos singulares da própria teoria, analogia de sistemas, etc.) e a *simplificação* (muitas vezes o modelo dá origem a um problema matemático muito complexo, então é necessário voltar ao problema original e restringir algumas informações a fim de conseguir um problema mais simples, que possa ser resolvido).

3. Resolução – esta etapa acontece quando obtém-se o modelo matemático, substituindo a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática

coerente (equações, fórmulas, gráficos, tabelas, etc). Muitas vezes, o modelo só poderá ser resolvido com a ajuda de métodos computacionais. “A resolução de um modelo é uma atividade própria do matemático, podendo ser completamente desvinculada da realidade modelada” (Bassanezi, 2004, p. 30).

4. Validação: processo de aceitação ou não do modelo proposto. Momento em que as hipóteses e os modelos devem ser testados, comparando suas respostas com os dados reais. “O grau de aproximação desejado destas previsões será o fator preponderante para sua validação” (Bassanezi, 2004, p. 30). A interpretação dos resultados pode ser feita com o auxílio de gráficos para facilitar as avaliações e sugerir aperfeiçoamentos dos modelos.

5. Modificação: os fatores do problema original podem rejeitar ou aceitar os modelos matemáticos. A modificação ocorre quando o modelo não conduz a resultados satisfatórios. Nesse caso, o modelo é modificado.

> O aprofundamento da teoria implica na reformulação dos modelos. *Nenhum modelo deve ser considerado definitivo* (...) e, agora poderíamos dizer que *um bom modelo* é aquele que propicia a formulação de novos modelos. A reformulação de modelos é uma das partes fundamentais do processo de modelagem e isto pode ser evidenciado se considerarmos que:
>
> - Os fatos conduzem constantemente a novas situações;
> - Qualquer teoria é passível de modificações;
> - As observações são acumuladas gradualmente de modo que novos fatos suscitam novos questionamentos;
> - A própria evolução da Matemática fornece novas ferramentas para traduzir a realidade (Teoria do Caos, Teoria Fuzzy etc.).
>
> (Bassanezi, 2004, p. 31, grifos do autor)

Ou seja, em algumas circunstâncias, o modelo terá que ser modificado várias vezes para que possa atender às necessidades dos pesquisadores. Isto significa que um mesmo problema pode ser olhado sob vários aspectos e a partir desses aspectos os modelos são formados e reformulados até que se obtenha o modelo mais adequado para cada situação.

Bassanezi (2004, p. 27) ilustra as etapas da modelagem com o seguinte esquema (Figura 1):

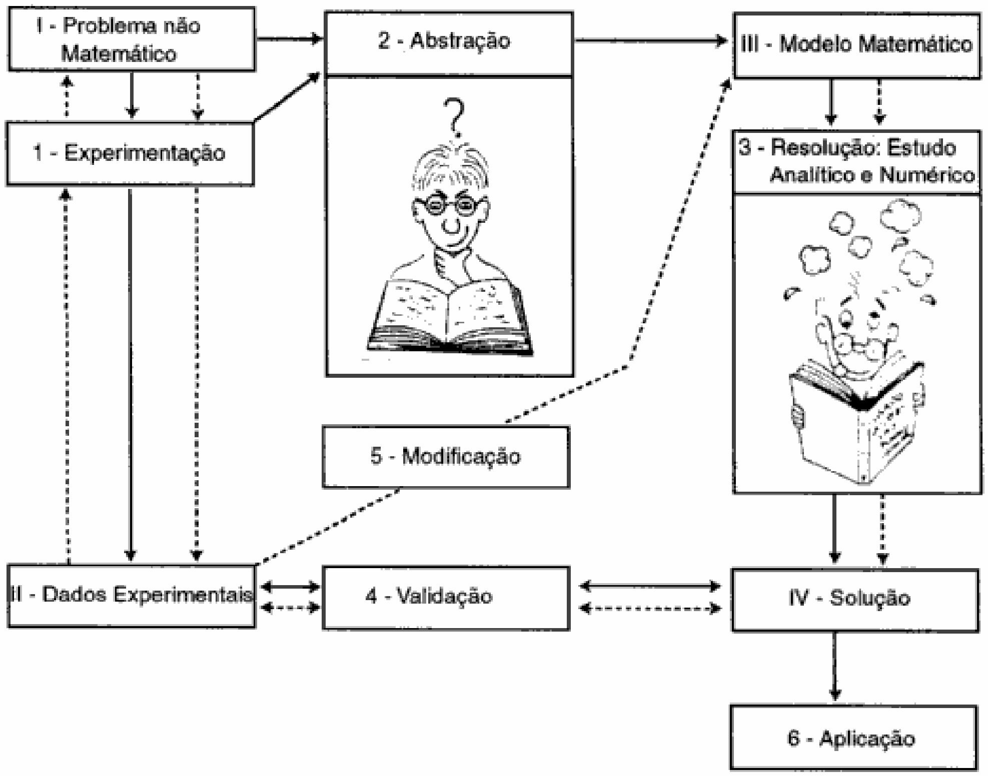

Figura 1: Esquema de uma modelagem

Fonte: Rodney C. Bassanezi, *Ensino-aprendizagem com Modelagem* Matemática, p. 27, Contexto. 2004.

Note que as setas contínuas indicam a primeira aproximação encontrada e as setas pontilhadas indicam a busca pelo modelo matemático que melhor descreva o problema estudado. Ou seja, o processo de modelagem é dinâmico.

Bassanezi ainda pontua que a modelagem "permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender; enfim participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças." (2004, p. 31). Aí reside a importância de se buscar um modelo matemático que satisfaça às reais necessidades do pesquisador, lembrando que

> a aplicabilidade de um modelo depende substancialmente do contexto em que ele é desenvolvido – um modelo pode ser "bom" para o biólogo e não para o matemático e vice-versa. Um modelo parcial pode atender às necessidades imediatas de um pesquisador mesmo que não comporte todas as variáveis que influenciam na dinâmica do fenômeno estudado. (Bassanezi, 2004, p. 31, grifos do autor)

Além disso, no processo de modelagem, Bassanezi considera que

> podemos classificar como atividade do matemático aplicado a construção e análise do modelo matemático – sua aplicabilidade e validação são predominantemente, atividades dos pesquisadores de outras áreas. O intercâmbio do matemático com estes pesquisadores é que proporciona a obtenção de modelos coerentes e úteis. (2004, p. 31).

E, para ilustrar a divisão de atividades intelectuais, Bassanezi (2004, p.32), apresenta o seguinte esquema (Figura 2):

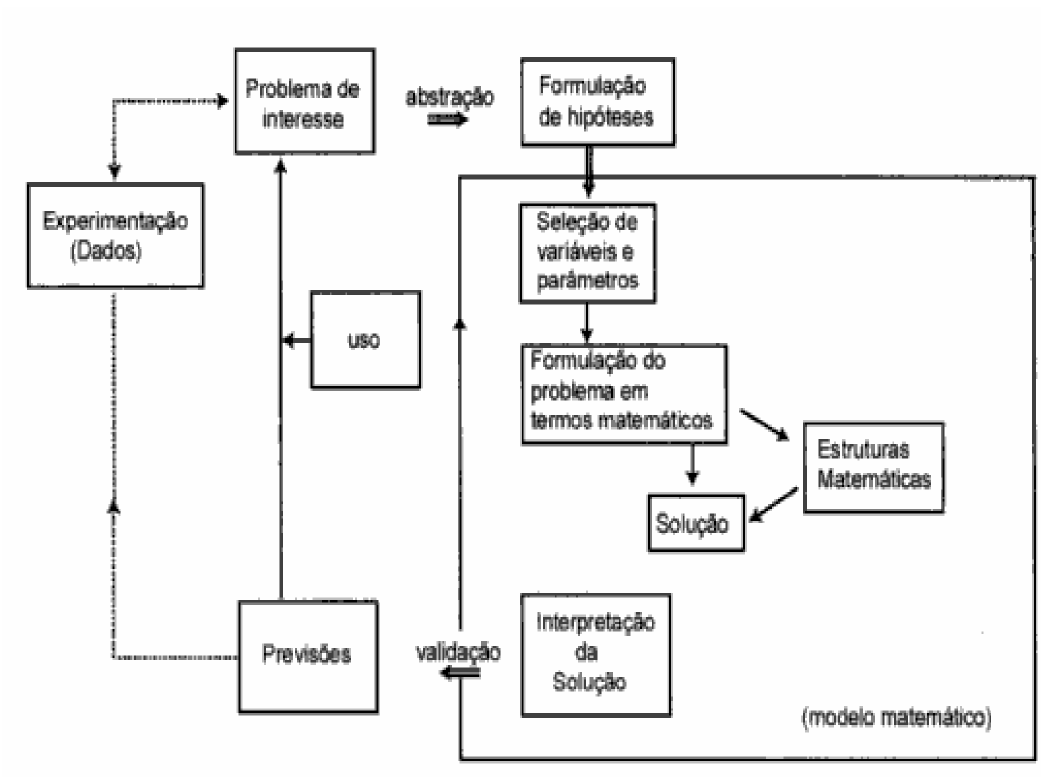

Figura 2: Divisão de atividades intelectuais
Fonte: Rodney C. Bassanezi, *Ensino-aprendizagem com Modelagem* Matemática, p. 32, Contexto, 2004.

Note que, no esquema, o quadro destaca as atividades do matemático. E, assim, percebe-se que a interação com os demais pesquisadores ocorre, essencialmente, nos processos de formulação de hipóteses, seleção de variáveis e validação do modelo.

2.4 MODELAÇÃO MATEMÁTICA

Quando a modelagem matemática é usada como estratégia para o ensino e aprendizagem de Matemática em cursos regulares ou não, ela “recebe o nome de Modelação Matemática (modelagem em Educação)” (Bassanezi, 2004, p. 38)

Segundo Biembengut e Hein, a modelação matemática é o “método que utiliza a essência da modelagem em cursos regulares” (2007, p. 18).

Ou seja, pode se dizer que a modelação matemática é a ação de utilizar a modelagem matemática em sala de aula.

Biembengut e Hein (2007, p. 18-19) listam em seu trabalho os objetivos da modelação matemática. São eles: aproximar uma outra área do conhecimento da Matemática; enfatizar a importância da Matemática para a formação do aluno; despertar o interesse pela Matemática ante a aplicabilidade; melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos; desenvolver a habilidade para resolver problemas; estimular a criatividade.

É importante entender que quando se usa a modelação matemática, a avaliação dos resultados deve ser diferente da análise de resultados de quando se utiliza a modelagem matemática em outras situações. Sobre isso, Bassanezi diz que

> Na modelação a validação de um modelo pode não ser uma etapa prioritária. Mais importante do que os modelos obtidos é o processo utilizado, a análise crítica e sua inserção no contexto sócio-cultural. O fenômeno modelado deve servir de pano de fundo ou motivação para o aprendizado das técnicas e conteúdos da própria matemática. As discussões sobre o tema escolhido favorecem a preparação do estudante como elemento participativo da sociedade em que vive. (2004, p. 38)

Ou seja, na modelação o mais importante é motivar o aluno no ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos propostos.

Nesta monografia considera-se Modelação Matemática como um sinônimo de Modelagem Matemática. Por este motivo, normalmente será usado o termo “Modelagem Matemática” ou apenas “modelagem”.

2.5 MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Quando se fala na utilização de uma estratégia pedagógica é pertinente que se faça um levantamento histórico sobre ela, para que se entenda quando e porque se considerou interessante trabalhar com tal estratégia. Então, será apresentado aqui um breve histórico da Modelagem no Ensino de Matemática e, posteriormente, serão detalhados pontos sobre Modelagem Matemática no Ensino de Matemática.

2.5.1 *Resgate histórico da Modelagem Matemática no Ensino de Matemática*

Como afirmado anteriormente, a Modelagem Matemática é muito antiga, existe desde os tempos mais primitivos. Porém, a Modelagem Matemática no ensino de Matemática é mais recente.

> Nas últimas três décadas, a modelagem vem ganhando “espaço” em diversos países, nas discussões sobre ensino e aprendizagem, com posicionamentos a favor e contra sua utilização como estratégia de ensino de Matemática. No Brasil, um dos primeiros trabalhos de modelagem no ensino foi do professor Aristides Camargos Barreto, da PUC do Rio de Janeiro, na década de 1970. A consolidação e a difusão se efetuaram por vários professores, em particular, pelo professor Rodney Bassanezi, da Unicamp de Campinas – SP e seus orientandos. (Biembengut e Hein, 2007, p. 7)

De acordo com Bassanezi (2004) e Burak (1987), o primeiro curso realizado com Modelagem Matemática no Brasil aconteceu em 1983, no programa de aperfeiçoamento de professores na Faculdade Estadual de Filosofia, Ciências e Letras de Guarapuava – FAFIG, hoje Universidade Estadual do Centro-Oeste, UNICENTRO. Esse curso foi ministrado por professores do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica – IMECC, da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, dentre eles o professor Dr. Rodney Carlos Bassanezi. Os resultados desse curso serviram de base para a realização de cursos em várias outras Instituições de Ensino espalhadas pelo país. No entanto, os primeiros artigos e dissertações que tratam a Modelagem Matemática como uma alternativa para o ensino de Matemática só foram publicadas a partir de 1986.

2.5.2 *Algumas observações sobre a Modelagem Matemática no Ensino Matemática*

Para que a modelagem e/ou modelação matemáticas sejam usadas no ensino de Matemática, é necessário entender como elas podem ser introduzidas em sala de aula e como o professor deve trabalhar com ela no desenvolvimento dos conteúdos matemáticos.

Barbosa (2001b) diz que “A maneira de organizar as atividades depende do contexto escolar, da experiência do professor, dos interesses dos alunos e de outros fatores.” (p. 38). O mesmo autor classifica a abordagem da Modelagem em três níveis ou casos:

- Caso 1: O professor apresenta uma situação-problema, contendo todas as informações necessárias para a resolução. Os alunos preocupam-se somente em investigar e resolver o problema proposto.

- Caso 2: O professor e apresenta um problema aplicado. Os alunos, durante o processo de investigação da situação, devem coletar os dados necessários para a resolução do problema.

- Caso 3: O professor e/ou os alunos escolhem um tema. Os alunos coletam informações sobre o assunto, formulam e solucionam problemas.

Porém, Barbosa diz que “Eles [os níveis] não significam uma prescrição, mas, ao contrário, é uma teorização crítica da prática corrente. Trata-se de zonas de possibilidades sem limites claros que ilustram a materialização da Modelagem na sala de aula.” (2001a, p. 6). E ainda “Os casos 1, 2 e 3 não representam configurações estanques e definitivas, mas regiões de possibilidades. É possível adaptá-los para atender as demandas do contexto escolar, dos professores e dos alunos” (2001b, p. 40).

Dessa forma, percebe-se que os professores podem trabalhar com a Modelagem Matemática em qualquer um desses casos, transitando entre o mais simples e o mais complexo, respeitando o grau de conhecimento dos alunos e sua experiência com trabalhos de Modelagem.

Barbosa (2001b, p. 40) apresenta as tarefas dos alunos e dos professores em cada caso através do seguinte esquema (Figura 3):

	CASO 1	CASO 2	CASO 3
Elaboração da situação-problema	professor	professor	professor/aluno
Simplificação	professor	professor/aluno	professor/aluno
Dados qualitativos e quantitativos	professor	professor/aluno	professor/aluno
Resolução	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

Figura 3: Tarefas dos alunos e professores nos casos de Modelagem

Fonte: Jonei C. Barbosa, *Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores*, p. 40, (Tese) UNESP, 2001.

Depois de analisar os casos de Modelagem e as formas que os professores e alunos podem trabalhar neles, é relevante relembrar outra afirmação de Barbosa: “Modelagem identifica-se com problema ao invés de exercício” (2001b, p. 32). E, para que se possa entender esta afirmação, é necessário analisar as diferenças existentes entre *problema* e *exercício*.

Segundo Dante, exercício “serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo. O aluno lê o exercício e extrai as informações necessárias para praticar uma ou mais habilidades algorítmicas” (2000, p. 43). Para o mesmo autor, problema “é a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta sua solução” (2000, p. 43).

Diante desses fatos, surgem as seguintes perguntas: “Como inserir a modelagem em cursos regulares? Quais seriam os requisitos mínimos para que isso fosse possível?”

> Em cursos regulares, nos quais há um programa a ser cumprido – currículo – e uma estrutura espacial e organizacional nos moldes “tradicionais” (como é a maioria das instituições de ensino), o processo da modelagem precisa sofrer algumas alterações, levando em consideração principalmente o grau de escolaridade dos alunos, o tempo disponível que terão para trabalho extraclasse, o programa a ser cumprido e o estágio em que o professor se encontra, seja em relação ao conhecimento da modelagem, seja no apoio por parte da comunidade escolar para implantar mudanças. (Biembengut e Hein, 2007, p. 18)

Estes autores também mostram como acontece o trabalho com a modelação matemática:

> A modelação matemática norteia-se por desenvolver o conteúdo programático a partir de um *tema* ou modelo matemático e orientar o aluno na realização de seu próprio modelo-modelagem. Pode valer como método de ensino-aprendizagem de Matemática em qualquer nível escolar, das séries iniciais a um curso de pós-graduação. Não há restrição! (Biembengut e Hein, 2007, p. 18, itálico dos autores)

Quanto à utilização da Modelagem Matemática, Malheiros afirma:

> ao se trabalhar com a modelagem em sala de aula, o professor possibilita uma determinada autonomia para os estudantes buscarem compreender temas de seus interesses, e, com isso, faz com que eles consigam, muitas vezes, atribuir significados para determinados conteúdos que, talvez não atribuíssem se os mesmos fossem estudados em outro ambiente. (2004, p. 38)

Para que isto aconteça, como diz Diniz, “Na Modelagem, assim como ocorre em outros ambientes de aprendizagem, o professor tem o papel de fazer o convite para que os alunos participem da atividade” (2007, p. 109). Desta forma, pode-se dizer que a Modelagem Matemática pode proporcionar aos alunos a participação ativa em todo o desenvolvimento do conteúdo matemático, pois, ainda segundo Diniz, no trabalho com a Modelagem Matemática “os alunos podem aceitar o convite feito pelo professor para investigarem uma situação com referência à realidade, levantarem conjecturas, fazerem indagações e procurarem por explicações” (2007, p. 14). No entanto, se os alunos não aceitarem o convite feito pelo professor, pouco mudará em relação ao ensino tradicional.

Também é importante lembrar do alerta de Silveira: “nem sempre a Modelagem Matemática dá conta de resolver os problemas de ensino e aprendizagem detectados pelos professores” (2007, p. 96). Ou seja, a Modelagem Matemática pode contribuir no processo ensino-aprendizagem, facilitando a compreensão do conteúdo por parte dos alunos, porém não estamos afirmando que ela sanará todas as dificuldades dos estudantes. Assim, acredita-se que a modelagem pode ser aliada dos professores, no sentido que ela pode auxiliar na visualização da utilização de conteúdos matemáticos na resolução de problemas reais e/ou de outras áreas de conhecimento, e não somente da própria Matemática.

A seguir, serão explanadas algumas vantagens e desvantagens do uso da Modelagem Matemática no ensino de Matemática.

2.6 VANTAGENS E DESVANTAGENS DA UTILIZAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Como toda estratégia pedagógica, a Modelagem Matemática apresenta vantagens e desvantagens. E, como diz Accordi,

> Apresentando as vantagens e limitações dessa proposta, deixa-se a critério de cada um, discernir o que é mais viável, pois embora haja estudos comprovados, que revelem resultados positivos, ainda assim, há situações que requerem um pouco de cautela. (2006, p. 14).

Partindo desse contexto, serão destacados aqui os prós e os contras da utilização da Modelagem no Ensino de Matemática na Educação Básica.

Em Bassanezi (2004, p. 36-37) e em Barbosa (2001b, p. 37) encontram-se os seguintes argumentos para a inclusão da Modelagem Matemática no ensino da Matemática:

1. Argumento formativo: desenvolve capacidades e atitudes de exploração, criatividade e habilidade na resolução de problemas;

2. Argumento de competência crítica: prepara os alunos para reconhecer e entender exemplos de aplicações de conceitos matemáticos na sociedade;

3. Argumento de utilidade: prepara os estudantes para utilizar a Matemática em diferentes situações e áreas;

4. Argumento intrínseco: fornece aos alunos um arsenal para entender e interpretar a própria Matemática;

5. Argumento de aprendizagem: os processos aplicativos facilitam aos estudantes compreender os argumentos matemáticos, guardar os conceitos e resultados, e valorizar a Matemática;

6. Argumento de alternativa epistemológica: atua como metodologia alternativa adequada às diversas realidades sócio-culturais.

Porém, vale ressaltar que “Apesar de todos estes argumentos favoráveis ao uso da modelagem matemática, muitos colocam obstáculos, principalmente quando aplicada em cursos regulares” (Bassanezi, 2004, p.37).

Segundo Barbosa,

> O ambiente de aprendizagem da Modelagem difere muito, em seus contornos, dos ambientes de aprendizagem que prevalecem nas práticas escolares hegemônicas. Ainda que não existam pesquisas específicas, percebe-se que, de maneira geral, os currículos estão engajados no ensino tradicional de matemática. Qualquer intervenção didática que resulte na alteração dos papéis e das expectativas dos alunos e dos professores pode resultar em reações contrárias. (2001b, p. 41)

Seguindo esse mesmo pensamento, Bassanezi (2004, p. 37) apresenta os seguintes obstáculos no trabalho com modelagem:

1. Obstáculos instrucionais: os cursos regulares possuem um programa que deve ser desenvolvido completamente. Como a modelagem é um processo demorado, pode ser que o professor não tenha tempo para desenvolver todo o programa. Além disso, alguns professores têm dúvida se as aplicações e conexões com outras disciplinas fazem parte do ensino de Matemática;

2. Obstáculos para os estudantes: a Modelagem foge da rotina do ensino tradicional e os alunos não estão acostumados com isso. Na Modelagem, o aluno passa a ser o centro do processo de ensino-aprendizagem, sendo responsável pelos resultados e dinâmica do processo.

3. Obstáculos para os professores: geralmente os professores não se sentem preparados para trabalhar com modelagem. A insegurança e o medo aliados à falta de tempo para preparar as aulas e cumprir o programa do curso são os grandes vilãos para os professores quando da utilização da modelagem.

É importante lembrar também que

> A falta de tempo para "cumprir" um programa, a inércia dos estudantes para desenvolver a modelagem e a inexperiência de professores são dificuldades que podem ser minoradas quando modificamos o processo clássico da modelagem, levando-se em conta o *momento de sistematização do conteúdo* e utilizando uma analogia constante com outras situações problemas. A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido mas, caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado. Com a modelagem o processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno como seu ambiente natural. (Bassanezi, 2004, p. 38).

Assim, depois de várias reflexões, concluí-se que a modelação matemática pode ser utilizada no Ensino Médio na abordagem do conteúdo Sistemas Lineares.

3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

No Ensino Fundamental, a partir do 7º ano[1], os “Sistemas de Equações” (com duas equações e duas incógnitas) são apresentados aos alunos, que começam a resolver os sistemas de equações do 1º grau. Depois, no 8º ano, os sistemas aparecem novamente, na forma de equações com frações algébricas. E, no 9º ano, os sistemas passam a conter equações do 2ª grau (ainda sistemas com duas equações e duas incógnitas – valores desconhecidos).

Já o conteúdo matemático intitulado “Sistemas de Equações Lineares” é trabalhado no 2º ou 3º ano do Ensino Médio, conforme a divisão de conteúdos de cada colégio e / ou do material didático adotado pelos professores.

Basicamente o que muda no tratamento do conteúdo do Ensino Fundamental para o Ensino Médio é o número de equações e de incógnitas do sistema de equações. No Ensino Fundamentam são estudados apenas os sistemas com duas equações e duas incógnitas, sendo que as equações podem ser do 1º ou do 2º grau. Enquanto isso, no Ensino Médio, os estudantes e professores trabalham com sistemas maiores (geralmente com três equações) e que não necessariamente tenham o mesmo número de equações e incógnitas (exemplo: três equações e quatro incógnitas).

Nas próximas seções, o conteúdo “Sistemas Lineares” será apresentado de forma semelhante àquela encontrada nos livros didáticos do Ensino Médio.

3.1 EQUAÇÃO LINEAR

Antes de desenvolver o conteúdo “Sistemas Lineares” é necessário entender o que é uma equação linear.

Para tanto, serão apresentadas aqui algumas definições encontradas em livros didáticos (níveis médio e superior).

---

[1] A Lei nº 11.274, de 6 de fevereiro de 2006, ampliou o Ensino Fundamental para nove anos de duração e estabelece prazo de implantação, pelos sistemas, até o ano de 2010. Assim, nesta monografia será utilizada a nomenclatura indicada na lei acima citada. É importante lembrar que, dessa forma, valem as seguintes equivalências: 6º ano – antiga 5ª série; 7º ano – antiga 6ª série; 8º ano – antiga 7ª série; 9º ano – antiga 8ª série. (A lei acima citada pode ser encontrada em http://portal.mec.gov.br/seb)

Nas palavras de Lay,

> Uma **equação linear**, nas variáveis $x_1, ..., x_n$, é uma equação que pode ser escrita na forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_n\ x_n = b$ onde b e os **coeficientes** $a_1, ..., a_n$ são números reais ou complexos, geralmente já conhecidos. O subíndice n pode ser qualquer inteiro positivo. (1999, p. 2, negrito do autor).

Porém, no Ensino Médio, trabalha-se apenas com coeficientes reais. Ou seja, não se trabalha com coeficientes que sejam números complexos.

Então, a maioria dos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio traz explicações semelhantes a essa:

> Toda equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_n\ x_n = b$ é denominada *equação linear*.
> Na equação acima, temos:
> - $a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais chamados *coeficientes*
> - $x_1, x_2, ..., x_n$ são as *incógnitas*
> - b é o termo *independente*
>
> (Giovanni e Bonjorno, 2000, p.108, itálicos dos autores)

Com isso, deve ficar claro para os alunos que uma equação linear[2] não pode apresentar termos da forma x_1^2 ou $x_1.x_2$, por exemplo.

Além disso, Barreto Filho e Xavier (2000, p. 352) e Giovanni e Bonjorno (2000, p. 108) lembram que quando o termo independente é nulo, a equação linear é chamada de equação linear homogênea.

E, sobre a solução de equações lineares, encontra-se:

> A solução de uma equação linear a n incógnitas é a seqüência de números reais ou *ênupla* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ que, colocados respectivamente no lugar de $x_1, x_2, ..., x_n$, tornam verdadeira a igualdade dada. (Giovanni e Bonjorno, 2000, p. 108, itálicos dos autores)

Na seqüência, os autores normalmente passam a tratar dos sistemas de equações lineares. Assim, esse será o assunto da próxima seção.

3.2 SISTEMA LINEAR

Depois de ter a noção do que é uma equação linear, pode-se falar sobre sistemas de equações lineares.

Segundo Lay, “Um **sistema de equações lineares** (ou um **sistema linear**) é uma coleção de uma ou mais equações lineares envolvendo as mesmas variáveis” (1999, p. 2, negritos do autor).

Barreto Filho e Xavier, dizem que “Chama-se sistema linear a *n* incógnitas um conjunto de duas ou mais equações lineares com *n* incógnitas” (2000, p. 352).

Giovanni e Bonjorno ressaltam que

> Denomina-se sistema linear de m equações nas n incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ a todo sistema da forma:
>
> $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$
>
> em que $a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn}, b_1, b_2, ..., b_m$ são números reais. (2000, p. 110).

Os autores acima citados ainda lembram que quando o conjunto ordenado de números reais $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ satisfaz todas as equações do sistema, ele é denominado de solução do sistema linear.

Além disso, destacam que, quando o termo independente de cada uma das equações do sistema é nulo, o sistema linear é chamado de sistema homogêneo.

Sobre isso, Barreto Filho e Xavier pontuam: “Todo sistema linear homogêneo admite a solução nula (0, 0, ..., 0), chamada de *solução trivial*.” (2000, p. 353). Porém, os mesmos autores lembram que “Um sistema linear homogêneo pode ter outras soluções além da trivial” (Barreto Filho e Xavier, 2000, p. 353).

Antes de tratar da resolução de sistemas de equações, acredita-se ser conveniente fazer algumas relações entre sistemas lineares e matrizes. Este é o assunto da próxima seção.

---

[2] A partir deste momento, neste trabalho, toda vez que for citado o termo “equação linear”, subentende-se que está se falando de uma equação do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_n\ x_n = b$, sendo que os coeficientes e o termo independente são números reais.

3.3 SISTEMAS LINEARES E MATRIZES

No Ensino Médio, normalmente, o conteúdo “Sistemas Lineares” é apresentado logo depois do conteúdo “Matrizes”.

Nesta pesquisa, não há intenção de trabalhar com o conteúdo “Matrizes”. Porém, como há uma forte relação entre os dois assuntos, faz-se necessário relembrar que “A idéia geral da matriz do tipo m x n é a de um quadro retangular com mn elementos, dispostos em m linhas e n colunas” (Lima, et al., 2006, p.130). Ou, de uma maneira mais formal, tem-se que

> uma matriz $m \times n$ é uma lista de números a_{ij}, com índices duplos, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. A matriz M é representada por um quadro numérico com m linhas e n colunas, no qual o elemento a_{ij} situa-se no cruzamento de i-ésima linha com a j-ésima coluna:
>
> $$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
>
> (Lima, 2006, p. 130)

As matrizes são usadas no conteúdo de sistemas lineares para facilitar a representação e a resolução dos sistemas (assunto que será trabalhado nas próximas seções). Para tanto, representam-se os coeficientes das equações lineares que compõem o sistema em questão em uma matriz. Para ilustrar isso, veja o que Giovanni e Bonjorno apresentam em seu livro didático:

> Seja o sistema linear de m equações com n incógnitas:
>
> $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$
>
> A matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$, na qual cada linha é formada, ordenadamente,

pelos coeficientes e termos independentes de cada equação é denominada *matriz completa* do sistema.

A matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, formada pelos coeficientes ordenados de cada equação é denominada *matriz incompleta* do sistema. (2000, p. 116, itálicos dos autores)

Depois desta pequena explanação, relembrando algumas ligações entre matrizes e sistemas lineares, acredita-se ter condições de passar às próximas seções, que tratarão de classificação e resolução de sistemas de equações lineares.

3.4 CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Os sistemas lineares são classificados quanto ao número de soluções. Assim, tem-se:

- Sistema possível e determinado (SPD): quando o sistema de equações admite uma única solução;

- Sistema possível e indeterminado (SPI): quando o sistema de equações admite infinitas soluções;

- Sistema impossível (SI): quando o sistema de equações não admite solução.

3.5 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

3.5.1 *Resolução de Sistemas de Equações no Ensino Fundamental*

Como dito anteriormente, os alunos têm seu primeiro contato com sistemas de equações ainda no Ensino Fundamental, no 7º ano e / ou no 8º ano. Nesta fase, os livros didáticos e professores costumam apresentar três métodos para a resolução de sistemas de equações. São eles: método da adição, método da substituição e método gráfico (ou geométrico).

3.5.1.1 *Método da Adição*

Nesta seção serão apresentados dois exemplos: o primeiro exemplo trabalhará com um sistema mais simples e o segundo exemplo tratará de um sistema que precisa ser *preparado* antes de ser resolvido pelo método da adição.

No primeiro exemplo, é possível anular uma incógnita diretamente, através da adição das equações do sistema. Nesse caso, o método da adição consiste em: somar membro a membro as equações do sistema, anulando um dos valores desconhecidos para encontrar o valor da outra incógnita; e, em seguida, substituir esse valor em uma das equações para descobrir o valor da incógnita restante.

1º Exemplo: Resolver o sistema $\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=4 \end{cases}$.

Resolução:

1º Passo: somar membro a membro as duas equações e encontrar o valor de uma das incógnitas do sistema.

$$+\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=4 \end{cases}$$
$$\overline{2x+0=16}$$

$$2x=16 \Leftrightarrow x=\frac{16}{2} \Leftrightarrow x=8$$

2º Passo: Substituir o valor encontrado em um das equações e descobrir o valor da outra incógnita.

$$x+y=12$$
$$8+y=12 \Leftrightarrow y=12-8 \Leftrightarrow y=4$$

Assim, tem-se que o conjunto solução do sistema é S = {(8, 4)}

No segundo exemplo uma simples adição não eliminará uma das variáveis diretamente. É necessário preparar o sistema para posteriormente aplicar o método da adição.

2º Exemplo: Resolver o sistema $\begin{cases} 2x+5y=11 \\ 3x+4y=13 \end{cases}$.

Resolução:

1º Passo: Preparar o sistema para que seja possível eliminar uma incógnita. Neste sistema, isso é necessário porque todas as incógnitas têm sinal positivo. Então, se as equações forem somadas, as duas incógnitas permanecerão.

Neste exemplo, vamos multiplicar a primeira equação por (+ 3) e a segunda equação por (– 2), a fim de anular a incógnita x da equação. Observe:

$$\begin{cases} 2x+5y=11 \quad .(+3) \\ 3x+4y=13 \quad .(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+15y=\ 33 \\ -6x-8y=-26 \end{cases}$$

É importante notar, que fazendo isso, obtém-se um sistema equivalente. Ou seja, não se altera as características do sistema em questão. Neste nível de ensino (Ensino Fundamental), justifica-se que a solução do sistema se mantém substituindo a solução no sistema original e também no "*novo sistema*" obtido.

2º Passo: Somar as equações (do novo sistema) membro a membro e encontrar o valor de uma das incógnitas do sistema.

$$+\begin{cases} 6x+15y=\ 33 \\ -6x-8y=-26 \end{cases}$$
$$\overline{\quad 0+7y=7 \quad}$$

$$7y=7 \Leftrightarrow y=\frac{7}{7} \Leftrightarrow y=1$$

3º Passo: Substituir o valor encontrado em um das equações e descobrir o valor da outra incógnita.

$$2x+5y=11$$

$$2x+5.1=11 \Leftrightarrow 2x+5\ =11 \Leftrightarrow 2x=11-5 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=\frac{6}{2} \Leftrightarrow x=3$$

Assim, tem-se que o conjunto solução do sistema é S = {(3, 1)}

3.5.1.2 *Método da Substituição*

O método da substituição consiste em: isolar uma incógnita em uma das equações do sistema; substituir a igualdade obtida na outra equação do sistema, a fim de encontrar o valor da incógnita que permaneceu na equação; e, em seguida, substituir esse valor na igualdade que fora obtida anteriormente, para assim encontrar o valor da incógnita restante.

1º Exemplo: Resolver o sistema $\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=4 \end{cases}$.

Resolução:

1º Passo: escolher uma das equações e isolar uma das suas incógnitas.

$x+y=12 \Leftrightarrow x=12-y$

2º Passo: Substituir essa igualdade na outra equação e descobrir o valor da incógnita que sobrar.

$$x-y=4$$
$$(12-y)-y=4$$
$$12-y-y=4 \Leftrightarrow -2y=4-12 \Leftrightarrow -2y=-8 \Leftrightarrow 2y=8 \Leftrightarrow y=\frac{8}{2} \Leftrightarrow y=4$$

3º Passo: Voltar à equação do “1º passo”, substituir o valor encontrado no “2º passo”, para encontrar o valor da outra incógnita.

$x=12-y$

$x=12-4 \Leftrightarrow x=8$

Assim, tem-se que o conjunto solução do sistema é S = {(8, 4)}

2º Exemplo: Resolver o sistema $\begin{cases} 2x+5y=11 \\ 3x+4y=13 \end{cases}$.

Resolução:

1º Passo: escolher uma das equações e isolar uma das suas incógnitas.

$$2x+5y=11 \Leftrightarrow 2x=11-5y \Leftrightarrow x=\frac{11-5y}{2}$$

2º Passo: Substituir essa igualdade na outra equação e descobrir o valor da incógnita que sobrar.

$$3x + 4y = 13$$
$$3\left(\frac{11-5y}{2}\right) + 4y = 13 \Leftrightarrow \frac{33-15y}{2} + 4y = 13 \Leftrightarrow \frac{33-15y+8y}{2} = 13 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 33 - 7y = 26 \Leftrightarrow 33 - 26 = 7y \Leftrightarrow 7 = 7y \Leftrightarrow 7y = 7 \Leftrightarrow y = \frac{7}{7} \Leftrightarrow y = 1$$

3º Passo: Voltar à equação do “1º passo”, substituir o valor encontrado no “2º passo”, para encontrar o valor da outra incógnita.

$$x = \frac{11-5y}{2}$$
$$x = \frac{11-5.1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{11-5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x = 3$$

Assim, tem-se que o conjunto solução do sistema é S = {(3, 1)}

3.5.1.3 *Método gráfico (ou método geométrico)*

Este método consiste em representar graficamente cada equação do sistema em um plano cartesiano. A solução do sistema é dada pelos pares ordenados que satisfazem ambas as equações.

Quando se trabalha com sistemas de equações do 1º grau, a solução dos sistemas é analisada segundo as retas construídas no plano cartesiano. Desse modo, quanto à classificação dos sistemas de equações, tem-se:

- Sistema possível e determinado: quando se obtém retas concorrentes (um ponto em comum, ou seja, um único par ordenado satisfaz as equações);

- Sistema possível e indeterminado: quando se obtém retas coincidentes (todos os pontos em comum, ou seja, infinitos pares ordenados satisfazem as equações do sistema);

- Sistema impossível: quando se obtém retas paralelas (nenhum ponto em comum, ou seja, não há par ordenado que satisfaça as duas equações simultaneamente).

Aqui será apresentado apenas um exemplo, pois a resolução por este método é análoga em qualquer um dos tipos de sistemas de equações.

Exemplo: Resolver o sistema $\begin{cases} x+y=12 \\ x-y=4 \end{cases}$.

Resolução:

1º Passo: Encontrar dois pares ordenados que sejam solução de cada equação do sistema.

i) Na equação x + y = 12:

- Se x = 5, tem-se:
  5 + y = 12 $\Rightarrow$ y = 12 – 5 $\Rightarrow$ y = 7

- Se x = 9, tem-se:
  9 + y = 12 $\Rightarrow$ y = 12 – 9 $\Rightarrow$ y = 3

Logo, (5, 7) e (9, 3) são soluções da equação considerada.

ii) Na equação x – y = 4:

- Se x = 6, tem-se:
  6 – y = 4 $\Rightarrow$ y = 6 – 4 $\Rightarrow$ y = 2

- Se x = 10, tem-se:
  10 – y = 4 $\Rightarrow$ y = 10 – 4 $\Rightarrow$ y = 6

Logo, (6, 2) e (10, 6) são soluções da equação considerada.

2º Passo: Localizar os pares ordenados no plano cartesiano.

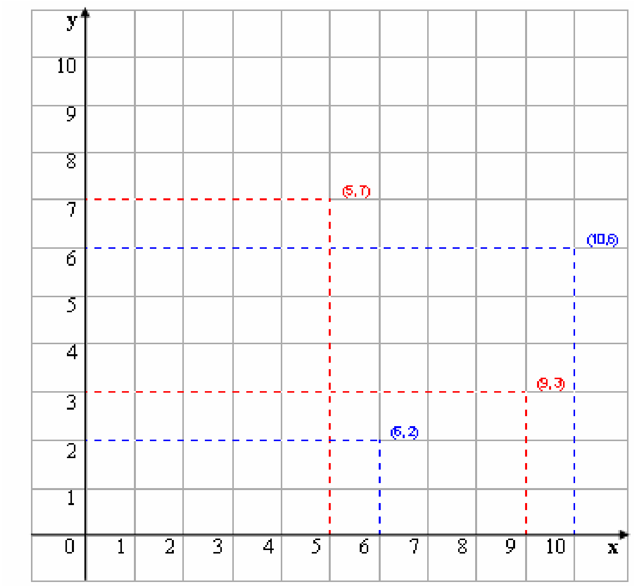

Figura 4: Localização dos pares ordenados no plano cartesiano

3º Passo: traçar as retas que passam pelos pontos marcados no plano cartesiano:

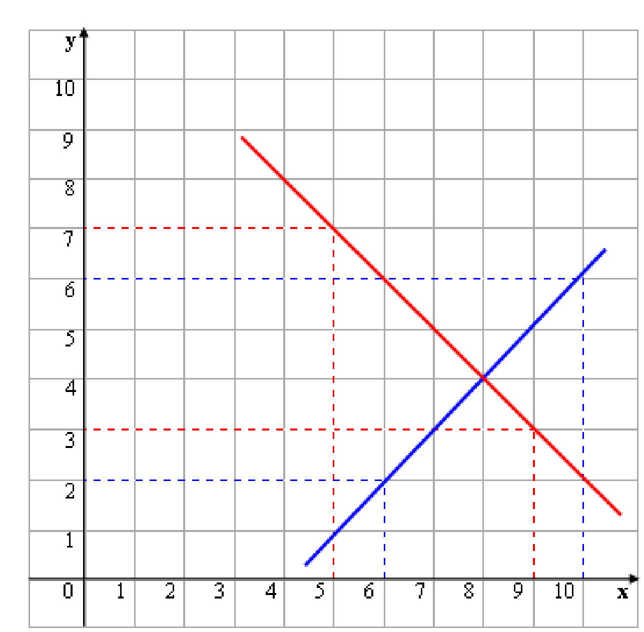

Figura 5: Solução geométrica do sistema de equações proposto

Logo, o sistema proposto é um sistema possível e determinado, cuja solução é o par ordenado (8, 4), ou seja, S = {(8, 4)}.

3.5.2 Resolução de Sistemas de Equações no Ensino Médio

Os dois métodos algébricos apresentados anteriormente (adição e substituição) funcionam bem para a resolução de sistemas de equações que possuem duas equações e duas variáveis. Porém, para sistemas maiores (com três ou mais equações) eles não são indicados, pois tomam muito tempo na resolução.

Por este motivo, no Ensino Médio, os livros didáticos e os professores apresentam aos alunos dois outros métodos práticos para resolver sistemas de equações lineares. São eles: o Escalonamento e a Regra de Cramer.

3.5.2.1 *Escalonamento*

Antes de tratar do método de escalonamento propriamente dito, se faz necessário entender o que é um sistema escalonado.

Segundo Barreto Filho e Xavier, “Um sistema está escalonado quando de equação para equação, no sentido de cima para baixo, houver aumento dos coeficientes nulos situados antes dos coeficientes não-nulos.” (2000, p. 358). Ou seja, um sistema escalonado apresenta a seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0x_1 + 0x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

O método de resolução de sistemas lineares por escalonamento nada mais é que um processo de eliminação de incógnitas. Como dizem Giovanni e Bonjorno, o escalonamento é um método que

> procura transformar o sistema dado em sistemas equivalentes (têm a mesma solução), até chegar a um sistema escalonado, usando as seguintes transformações elementares sobre as equações do sistema dado:
> - Trocar as posições de duas equações.
> - Multiplicar uma das equações por um número real diferente de zero.
> - Multiplicar uma equação por um número real e adicionar o resultado a outra equação. (2000, p. 123)

Além disso, para facilitar o processo de resolução substituímos o sistema de equações lineares pela matriz completa do sistema.

Exemplo: Resolver o sistema de equações $\begin{cases} x+4y+3z=1 \\ x-3y-2z=5 \\ 2x+5y+4z=4 \end{cases}$.

Resolução:

1º) Utilizando a matriz completa do sistema, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

2º) Multiplicação da 1ª linha por (-1) e somando o resultado com a 2ª linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

3º) Multiplicando a 1ª linha por (-2) e somando o resultado com a 3ª linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

4º) Multiplicando a 2ª linha por $\left(-\frac{1}{7}\right)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & -3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad L_2 \leftarrow -\frac{L_2}{7}$$

5º) Multiplicando a 2ª linha por (3) e somando o resultado com a 3ª linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$$

6º) Multiplicando a 3ª linha por 7:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 7L_3$$

7º) Escrevendo novamente o sistema de equações, a partir da matriz completa, tem-se:

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ \quad y + \frac{5}{7}z = -\frac{4}{7} \\ \qquad z = 2 \end{cases}$$

De onde vem:

$$y + \frac{5}{7}z = -\frac{4}{7} \Rightarrow y + \frac{5}{7} \times 2 = -\frac{4}{7} \Rightarrow y + \frac{10}{7} = -\frac{4}{7} \Rightarrow y = -\frac{4}{7} - \frac{10}{7} \Rightarrow y = -\frac{14}{7} \Rightarrow y = -2$$

$$x + 4y + 3z = 1 \Rightarrow x + 4.(-2) + 3.2 = 1 \Rightarrow x - 8 + 6 = 1 \Rightarrow x = 1 + 2 \Rightarrow x = 3$$

Logo, a solução do sistema é S = {(3, –2, 2)}.

3.5.2.2 *Regra de Cramer*

A Regra de Cramer é um método simples para resolução de sistemas de equações lineares que apresentam número de equações igual ao número de incógnitas. No entanto, esse método apresenta algumas limitações, como veremos na próxima seção.

Segundo Giovanni e Bonjorno:

> De um modo geral, um sistema de n equações com incógnitas $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, cujo determinante D_A da matriz incompleta é diferente de zero, é possível e determinado.

O conjunto solução desse sistema é $S=\left\{\left(\frac{D_1}{D_A},\frac{D_2}{D_A},\frac{D_3}{D_A},...,\frac{D_n}{D_A}\right)\right\}$, onde D_i é o determinante que se obtém de D_A substituindo a i-ésima coluna (dos coeficientes de x_i) pela coluna dos termos independentes. (2000, p. 120)

De uma maneira mais formal, tem-se:

REGRA DE CRAMER
Seja A uma matriz $n \times n$ inversível. Para qualquer **b** do R^n, a solução única **x** de A**x** = **b**, tem componentes dadas por

$$x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A}, \qquad i = 1,2,...,n$$

(Lay, 1999, p.182)

No entanto, deve-se ter um grande cuidado quando se deseja aplicar a regra de Cramer. Como bem observa Lima: "A regra de Cramer só se aplica quando a matriz dos coeficientes do sistema tem determinante diferente de zero." (2006, p. 144). Ou seja, só podemos usar a regra quando o sistema é possível e determinado.

Para ilustrar a utilização da regra na resolução de um sistema, observe o exemplo abaixo.

Exemplo: Resolver o sistema de equações $\begin{cases} x+4y+3z=1 \\ x-3y-2z=5 \\ 2x+5y+4z=4 \end{cases}$.

Resolução:

1º) Calcula-se o determinante da matriz incompleta do sistema (lembrando que para isso, é necessário repetir as duas primeiras colunas):

$$D_A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{matrix}$$

$$D_A = (-12-16+15)-(-18-10+16) \quad \Rightarrow \quad D_A = -13+12 \Rightarrow D_A = -1$$

2º) Calcula-se o determinante D_1, substituindo a coluna 1 pela coluna dos termos independentes:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -3 & -2 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \\ 4 & 5 \end{matrix}$$

$$D_1 = (-12 - 32 + 75) - (-36 - 10 + 80) \quad \Rightarrow \quad D_1 = 31 - 34 \Rightarrow D_1 = -3$$

3º) Calcula-se o determinante D_2, substituindo a coluna 2 pela coluna dos termos independentes:

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{matrix}$$

$$D_2 = (20 - 4 + 12) - (30 - 8 + 4) \quad \Rightarrow \quad D_2 = 28 - 26 \Rightarrow D_2 = 2$$

4º) Calcula-se o determinante D_3, substituindo a coluna 3 pela coluna dos termos independentes:

$$D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{matrix}$$

$$D_3 = (-12 + 40 + 5) - (-6 + 25 + 16) \quad \Rightarrow \quad D_3 = 33 - 35 \Rightarrow D_3 = -2$$

5º) Agora é só efetuar as divisões dos resultados obtidos:

$$x = \frac{D_1}{D_A} \Rightarrow x = \frac{-3}{-1} \Rightarrow x = 3$$

$$y = \frac{D_2}{D_A} \Rightarrow y = \frac{2}{-1} \Rightarrow y = -2$$

$$z = \frac{D_3}{D_A} \Rightarrow z = \frac{-2}{-1} \Rightarrow z = 2$$

Logo, a solução do sistema é S = {(3, –2, 2)}.

3.5.2.3 *Algumas considerações sobre a Regra de Cramer*

Agora que já se conhece a regra de Cramer, é importante considerar alguns pontos sobre sua utilização na resolução de sistemas lineares.

Sobre as vantagens e desvantagens da regra de Cramer, Lima afirma:

> A regra de Cramer é um dos métodos mais tradicionais para resolver sistemas de equações lineares. Ela apresenta a vantagem de fornecer explicitamente os valores das incógnitas como quocientes de dois determinantes. Mas, por outro lado, possui dois inconvenientes em comparação com o método do escalonamento. O primeiro é que ela só se aplica quando o determinante da matriz do sistema é diferente de zero, ou seja, quando o sistema possui uma única solução. O segundo inconveniente é o custo operacional: dá bem mais trabalho calcular quatro determinantes do que escalonar uma única matriz. (2006, p. 143)

Além disso, Lay afirma “A regra de Cramer é necessária para uma série de cálculos teóricos. (...) No entanto, a fórmula é ineficiente para cálculos manuais, com exceção do caso de matrizes 2 x 2 ou, talvez, 3 x 3” (1999, p. 181). Lay diz isso porque o cálculo de determinantes dá muito trabalho, então é mais rápido e fácil trabalhar com escalonamento.

4 PESQUISA COM PROFESSORES DE MATEMÁTICA

No início do desenvolvimento do trabalho aqui apresentado surgiu a dúvida: “Seria adequado conversar com professores de Matemática sobre as possíveis relações entre Modelagem Matemática e Sistemas Lineares?”. Esta indagação permaneceu por alguns dias, pois como diz Goldenberg, “Um dos principais problemas das entrevistas e questionários é detectar o grau de veracidade dos depoimentos” (2005, p. 85). No entanto, depois de algumas reflexões, chegou-se a conclusão que seria interessante “ouvir” o que os professores de Matemática tinham a dizer sobre Modelagem e Sistemas Lineares.

Aí surgiu outra questão: “Que instrumento usar: entrevista ou questionário?”. Este questionamento é relevante porque ao entrar em contato com outras pessoas, a fim de conseguir informações sobre seu trabalho, deve-se lembrar que “lidamos com o que o indivíduo deseja revelar, o que deseja ocultar e a imagem que quer projetar de si mesmo e de outros” (Goldenberg, 2005, p. 85). E, além disso, “A personalidade e as atitudes do pesquisador também interferem no tipo de respostas que ele consegue de seus entrevistados” (Goldenberg, 2005, p. 85-86). Ou seja, era necessário conseguir as informações desejadas, sem correr o risco de influenciar nas respostas dos professores.

Então, com base em Goldenberg (2005), optou-se pelo questionário, por ele apresentar as seguintes vantagens: é menos dispendioso, exige menor habilidade para a aplicação, pode ser aplicado a um grande número de pessoas ao mesmo tempo, as frases padronizadas garantem maior uniformidade para a mensuração, e, principalmente, os pesquisados se sentem mais livres para exprimir opiniões que temem ser desaprovadas ou que poderiam colocá-los em dificuldades.

Quando da elaboração do questionário, optou-se por maioria de questões fechadas, para facilitar a mensuração, comparação e análise dos dados obtidos. No entanto, para obter dados mais precisos em algumas questões, foi necessário deixar espaço para que os professores esclarecessem alguns pontos importantes.

Outro ponto importante foi decidir como e a quem aplicar o questionário. Optou-se por aplicar o questionário somente a professores de Matemática do Estado do Paraná. Alguns questionários foram aplicados pessoalmente pela pesquisadora, outros através de colaboração de funcionários de escolas e outros ainda foram enviados por *e-mail*, a partir de contato com algumas escolas de diversos municípios do Estado do Paraná. A decisão de utilização de *e-mail* na aplicação dos questionários deve-se ao fato de que desta maneira consegue-se alcançar mais pessoas e, consequentemente, obter mais respostas.

A principal dificuldade encontrada na aplicação dos questionários foi o baixo índice de respostas. Foram aplicados e/ou enviados cerca de quatrocentos questionários (pessoalmente e por *e-mail*) e só retornaram cento e nove questionários respondidos. Ou seja, obteve-se um retorno de cerca de vinte e sete por cento do total de questionários distribuídos.

Nas próximas seções, serão apresentados o questionário e as respostas obtidas em cada questão. Além disso, serão tecidos alguns comentários sobre as questões e suas respectivas respostas.

4.1 O QUESTIONÁRIO DE PESQUISA

Nesta monografia, o questionário de pesquisa teve como objetivo recolher informações sobre o trabalho do professor de Matemática do Ensino Médio e de suas possíveis ligações com a Modelagem Matemática, especialmente quando se trata do conteúdo “Sistemas Lineares”.

Pode-se dizer que o questionário é composto por três partes: perfil dos professores, relação dos professores com a Modelagem Matemática e trabalho do professor em sala de aula. Como cada uma dessas partes estará detalhada nas próximas seções, não convém entrar em detalhes sobre elas neste momento.

No entanto, é pertinente esclarecer aqui a finalidade de cada uma dessas partes. A primeira parte do questionário busca traçar um breve perfil dos professores que participaram da pesquisa, isto é importante para se ter “retrato” dos respondentes. A segunda parte do questionário procurou investigar as relações que os professores de Matemática têm (ou tiveram) com a Modelagem Matemática. E a terceira parte do questionário buscou informações sobre a abordagem e desenvolvimento do conteúdo “Sistemas Lineares” no Ensino Médio, para que se possa ter noção de como esse conteúdo vem sendo trabalhado nos colégios.

Assim, a partir das preocupações acima expostas, chegou-se ao questionário de pesquisa (Figura 6) que foi utilizado nesta monografia.

Questionário de pesquisa - **"Sistemas Lineares e Modelagem Matemática"**
Silvana Matucheski – Especialização para Professores de Matemática – UFPR – Turma 2007

Este questionário é destinado a professores de Matemática que trabalham ou já trabalharam com o conteúdo Sistemas Lineares no Ensino Médio.

1 – Em que cidade você trabalha? ______________________________

2 – A sua idade está entre:
( ) 20 e 24 anos ( ) 25 e 29 anos ( ) 30 e 34 anos ( ) 35 e 39 anos
( ) 40 e 44 anos ( ) 45 e 49 anos ( ) 50 e 54 anos ( ) 55 e 60 anos

3 – Há quanto tempo você é professor (a) de matemática?
( ) até 10 anos ( ) 10 a 19 anos ( ) 20 a 29 anos ( ) mais de 30 anos

4 – Atualmente, atua em escola:
( ) pública ( ) particular ( ) ambas

5 – Você já teve algum contato com modelagem matemática?
( ) sim ( ) não

6 – A primeira vez que você ouviu o termo "modelagem matemática" foi:
( ) na graduação ( ) na especialização ( ) na escola em que trabalha
( ) em livro didático ( ) em livros e/ou revistas ( ) em cursos de capacitação ou de extensão
( ) outro [qual? ______________________________]

7 – Você já utilizou (utiliza) modelagem matemática em sala de aula com seus alunos?
( ) sim ( ) não

8 – Quando seus alunos resolvem os exercícios e/ou problemas, você pede para que eles o façam:
( ) individualmente ( ) em grupos ( ) ambos

9 – Você já utilizou modelagem matemática para abordar o conteúdo "Sistemas Lineares"?
( ) sim ( )não

10 – Quando você trabalha o conteúdo "Sistemas Lineares" você inicia com:
( ) problemas que podem ser resolvidos com sistemas de equações
( ) exercícios de fixação da técnica para resolver os sistemas de equações

11 – No decorrer do desenvolvimento do conteúdo "Sistemas Lineares" você trabalha:
( ) somente exercícios de fixação da técnica de resolução de sistemas de equações
( ) com exercícios de fixação e com problemas
( ) somente com problemas

12 – Geralmente, quantas aulas você tem disponível para trabalhar o conteúdo "Sistemas Lineares"?
( ) até 5 ( ) 5 a 9 ( ) 10 a 14 ( ) 15 a 19 ( ) mais de 20

13 – A maioria dos seus alunos apresenta dificuldade (s) no conteúdo "Sistemas Lineares"?
( ) não ( ) sim [quais? ______________________________]

14 – Como você costuma avaliar os alunos no conteúdo "Sistemas Lineares"?
( ) somente prova escrita ( ) somente trabalhos ( ) prova escrita e trabalhos

15 – Quais as vantagens e desvantagens de se abordar o conteúdo Sistemas Lineares com a modelagem matemática? (Ex: maior envolvimento do aluno, utilização da Matemática em problemas reais, falta de tempo, excesso de conteúdo, resistência dos alunos a novos métodos, professor não se sente preparado, entre outros)

____

____

Figura 6: Questionário de pesquisa

4. 2 RESULTADOS DO QUESTIONÁRIO DE PESQUISA

4.2.1 *Perfil dos professores que responderam o questionário*

A primeira parte do questionário preocupa-se em traçar um breve perfil dos respondentes. Esta parte é composta por: localização geográfica (capital, região metropolitana ou interior), idade, tempo de serviço e professores e tipo de escola em que atua cada professor respondente.

Abaixo, os dados obtidos na pesquisa serão apresentados através de tabelas e gráficos, a fim de ilustrar os resultados da pesquisa com os professores.

4.2.1.1 *Quanto à região do Estado em que os professores atuam*

Região de trabalho – Estado do PR	**Total**
Capital (Curitiba)	31
Interior do Estado	54
Região Metropolitana, exceto Curitiba	24
Total geral	*109*

Tabela 1: Região de trabalho – Estado do PR

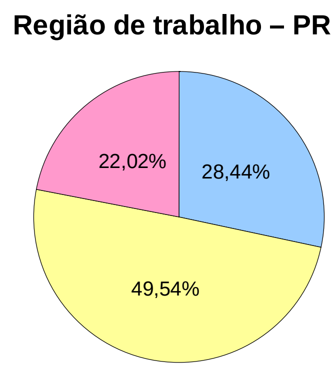

Gráfico 1: Região de trabalho – Estado do PR

Pode-se perceber que houve equilíbrio na distribuição dos questionários, pois se for considerado os respondentes da região metropolitana (inclusive Curitiba) temos aproximadamente 50% do total de professores consultados. Isto é importante, pois os dados não estão restritos a uma única realidade, mas sim contemplam todas as regiões do Estado.

4.2.1.2 *Quanto à idade dos professores*

Idade	Total
20 a 24	15
25 a 29	22
30 a 34	18
35 a 39	20
40 a 44	12
45 a 49	14
50 a 54	5
55 a 60	3
Total geral	*109*

Tabela 2: Idade dos professores

Idade dos professores

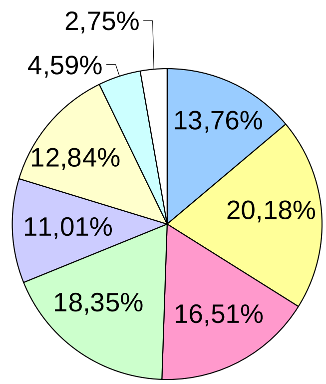

Gráfico 2: Idade dos professores

Observa-se que a maioria dos respondentes tem entre 25 e 39 anos. E, a média de idade dos professores que responderam o questionário é de aproximadamente 35 anos de idade.

4.2.1.3 *Quanto ao tempo de profissão*

Tempo de profissão	Total
Até 10 anos	57
10 a 19 anos	27
20 a 29 anos	25
Total geral	*109*

Tabela 3: Tempo de profissão

Tempo de profissão

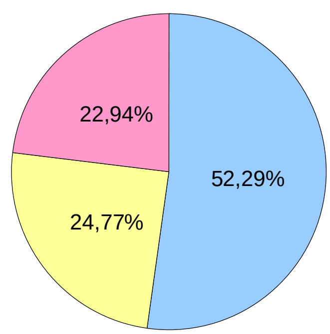

Gráfico 3: Tempo de profissão

Quanto ao tempo de profissão, observa-se que pouco mais da metade dos respondentes tem menos de 10 anos de magistério. Ou seja, cerca de cinqüenta por cento dos professores consultados têm uma boa experiência em sala de aula, como professor de Matemática.

4.2.1.4 *Quanto ao tipo de escola que atuam*

Tipo de escola	Total
Particular e pública	12
Particular	7
Pública	90
Total geral	*109*

Tabela 4: Tipo de escola

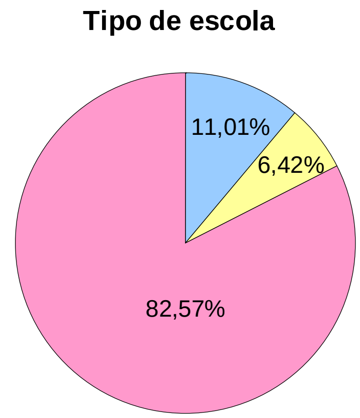

Gráfico 4: Tipo de escola

A partir desses dados, percebe-se que mais de noventa por cento dos professores respondentes trabalham em escola pública. É interessante observar também que aproximadamente onze por cento dos professores, que responderam o questionário, trabalham tanto em escolas públicas quanto em escolas particulares.

4.2.2 *<u>Relação dos professores respondentes com a Modelagem Matemática (dentro e fora de sala de aula)</u>*

Esta parte do questionário preocupa-se em verificar as relações dos professores de Matemática com a Modelagem Matemática.

As questões referem-se ao contato que os professores têm ou tiveram com a modelagem, dentro e fora de sala de aula. Nesta fase, investiga-se onde ocorreu o primeiro contato dos professores com a Modelagem Matemática. Esta questão é relevante para que se possa analisar se o professor teve contato com a Modelagem ainda na sua formação acadêmica ou se conheceu a Modelagem posteriormente a fase de formação inicial. Além disso, também há a preocupação em saber se os professores utilizam ou se já utilizaram a Modelagem Matemática em sala de aula com seus alunos.

Abaixo, estão as tabelas e os gráficos que ilustram os dados obtidos através do questionário aplicado.

4.2.2.1 *Quanto ao contato com a Modelagem Matemática*

Você já teve algum contato com Modelagem Matemática?	Total
Não	11
Sim	98
Total geral	*109*

Tabela 5: Contato com Modelagem Matemática

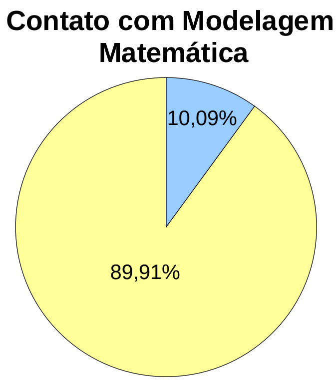

Gráfico 5: Contato com Modelagem Matemática

Aqui fica claro que a grande maioria (quase noventa por cento) dos professores respondentes já teve algum contato com a Modelagem Matemática.

4.2.2.2 *Quanto ao primeiro contato com a Modelagem Matemática*

Primeiro contato com a Modelagem Matemática	Total
Cursos	25
Escola em que trabalha	1
Especialização	19
Graduação	56
Livros didáticos	2
Livros e revistas	2
Outros	4
Total geral	*109*

Tabela 6: Primeiro contato com Modelagem Matemática

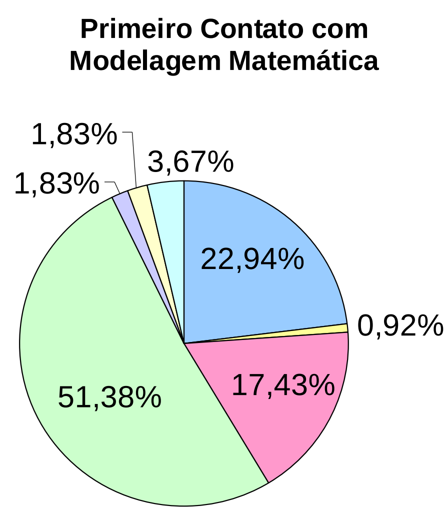

Gráfico 6: Primeiro contato com Modelagem Matemática

Aqui aconteceu um fato interessante. Na pergunta anterior, aproximadamente dez por cento dos professores afirmaram que não tiveram contato algum com Modelagem Matemática. No entanto, nesta questão, todos os respondentes assinalaram uma das respostas. Logo, os respondentes afirmam que já tiveram contato com Modelagem Matemática de alguma forma. Sendo assim, temos uma contradição nas respostas obtidas nestas duas últimas questões.

Voltando a análise desta questão, observando os dados coletados, nota-se que o primeiro contato com a Modelagem Matemática ocorreu, na maioria das vezes, durante a formação do professor, seja na graduação, na especialização ou em outros cursos.

Outro fato relevante nessa questão, é que quatro pessoas responderam “outros”. Uma afirmou que o primeiro contato com a Modelagem ocorreu através de trabalhos de amigos. Outra pessoa respondeu que o contato deu-se durante a realização do seu mestrado. E, as outras duas pessoas afirmaram que o primeiro contato com a Modelagem aconteceu em razão do Concurso Público para Professores do Estado do Paraná, que ocorreu no mês de novembro de 2007.

4.2.2.3 *Quanto à utilização da Modelagem Matemática em sala de aula*

Utiliza ou já utilizou Modelagem Matemática em sala de aula?	**Total**
Não	34
Sim	75
Total geral	*109*

Tabela 7: Utilização da Modelagem Matemática em sala de aula

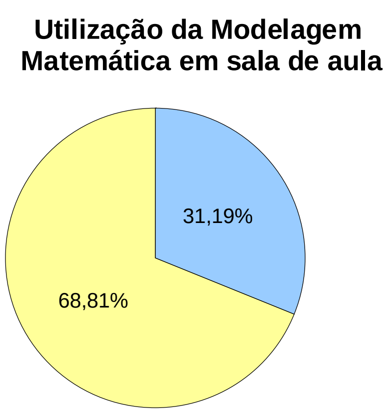

Gráfico 7: Utilização da Modelagem Matemática em sala de aula

Aqui nota-se que, apesar dos professores conhecerem a Modelagem Matemática, conforme afirmaram anteriormente, muitos deles ainda não a utilizaram em sala de aula com seus alunos.

4.2.3 *O trabalho do professor em sala de aula*

Esta parte do questionário tem a preocupação de analisar como os professores de Matemática trabalham o conteúdo “Sistemas Lineares” em sala de aula com seus alunos.

A primeira questão é sobre a resolução de exercícios em sala de aula, se o professor prefere que seus alunos trabalhem individualmente ou em grupo. O conteúdo matemático não foi especificado nesta questão a fim de analisar o trabalho do professor como um todo e não somente no conteúdo “Sistemas Lineares”, apesar de esse conteúdo ser o foco da pesquisa aqui apresentada.

As demais questões desta parte do questionário tratam especificamente do conteúdo “Sistemas Lineares”. As indagações se referem à abordagem, desenvolvimento e avaliação do conteúdo. Também preocupou-se com as dificuldades enfrentadas pelos aluno e investiga o tempo disponível para se trabalhar o conteúdo em sala de aula. E, para finalizar o questionário, há uma pergunta sobre as vantagens e desvantagens da Modelagem. Esta última questão é uma questão aberta, para que os professores pudessem expressar seus pensamentos, expor suas angústias e tecer comentários que julgassem relevantes.

A seguir, as respostas dessas questões serão apresentadas através de tabelas e gráficos.

4.2.3.1 *Quanto à resolução de exercícios e problemas em sala de aula*

Geralmente, de que forma os alunos resolvem os exercícios em sala de aula?	**Total**
Em grupos	13
Individual	10
Individual e em grupos	86
Total geral	*109*

Tabela 8: Resolução de exercícios

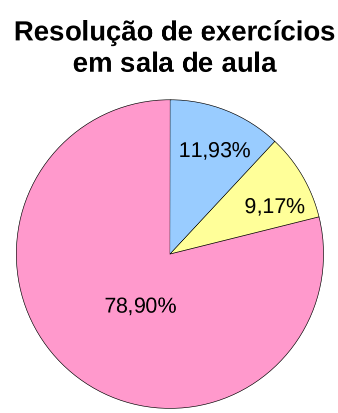

Gráfico 8: Resolução de exercícios

Isto mostra que aproximadamente setenta e nove por cento dos professores consultados afirmam que seus alunos resolvem os exercícios e problemas tanto individualmente quanto em grupos, dependendo das atividades propostas.

4.2.3.2 *Quanto à utilização da Modelagem Matemática na abordagem do conteúdo "Sistemas Lineares"*

Já utilizou Modelagem para abordar o conteúdo "Sistemas Lineares"?	**Total**
Não	74
Sim	35
Total geral	*109*

Tabela 9: Modelagem e Sistemas

Já utilizou Modelagem para abordar "Sistemas Lineares"?

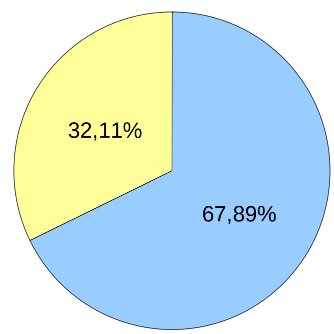

Gráfico 9: Modelagem e Sistemas

Observa-se que pouco mais de trinta por cento dos professores consultados já fizeram a experiência de usar a Modelagem na abordagem do conteúdo matemática "Sistemas Lineares" no Ensino Médio.

4.2.3.3 *Quanto às atividades utilizadas pelos professores na introdução do conteúdo "Sistemas Lineares"*

Inicia o conteúdo "Sistemas Lineares" com:	**Total**
Exercícios	27
Problemas	82
Total geral	*109*

Tabela 10: Iniciar com exercícios ou com problemas?

Inicia o conteúdo "Sistemas Lineares" com:

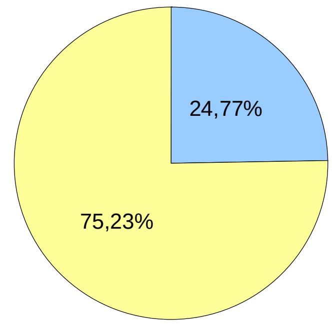

Gráfico 10: Iniciar com exercícios ou com problemas?

Cerca de setenta e cinco por cento dos professores responderam que costumam iniciar o conteúdo com problemas. E, aproximadamente, vinte e cinco por cento afirmam que preferem começar o conteúdo a partir de exercícios de fixação.

Na próxima questão, investiga-se se essa característica permanece no desenvolvimento do conteúdo em sala de aula.

4.2.3.4 *Quanto às atividades utilizadas pelos professores no desenvolvimento do conteúdo "Sistemas Lineares"*

Desenvolve o conteúdo "Sistemas Lineares" com:	**Total**
Exercícios e problemas	99
Somente exercícios	7
Somente problemas	3
Total geral	*109*

Tabela 11: Desenvolvimento do conteúdo – Exercícios ou problemas?

Desenvolve o conteúdo "Sistemas Lineares" com:

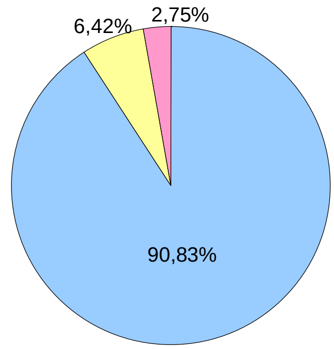

Gráfico 11: Desenvolvimento do conteúdo – Exercícios ou problemas?

Aqui, observa-se que pouco menos de três por cento dos professores consultados optam por trabalhar apenas com problemas. E, menos de sete por cento dos professores afirmaram que utilizam apenas exercícios quando desenvolvem o conteúdo "Sistemas Lineares". Sendo assim, mais de noventa por cento dos professores respondentes dizem trabalhar tanto com exercícios quanto com problemas em suas aulas.

Dessa maneira, verifica-se que os professores parecem estar atentos ao alerta de Dante: "deve haver um equilíbrio entre o número de exercícios e o de problemas que são dados a uma classe" (2000, p.44). Isto se deve ao fato de que os exercícios de fixação também são importantes, pois através deles os alunos praticam as técnicas de resolução de sistemas, o que facilitará a resolução dos problemas propostos.

4.2.3.5 *Quanto ao número de aulas disponíveis para desenvolver o conteúdo "Sistemas Lineares" no Ensino Médio*

Número de aulas para o conteúdo "Sistemas Lineares"	Total
Até 5 aulas	14
5 a 9 aulas	49
10 a 14 aulas	37
15 a 19 aulas	4
Mais de 20 aulas	5
Total geral	*109*

Tabela 12: Número de aulas

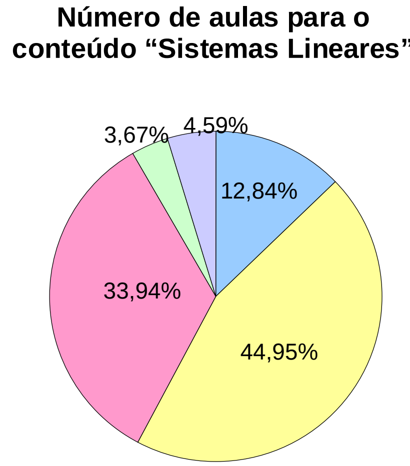

Gráfico 12: Número de aulas

Dessa maneira, pode-se afirmar que a maioria (cerca de setenta e nove por cento) dos professores consultados afirma que tem em média dez aulas para trabalhar o conteúdo em questão.

4.2.3.6 *Quanto às dificuldades dos alunos no conteúdo "Sistemas Lineares"*

Os alunos apresentam dificuldades no conteúdo "Sistemas Lineares"?	Total
Não	32
Sim	77
Total geral	*109*

Tabela 13: Dificuldades

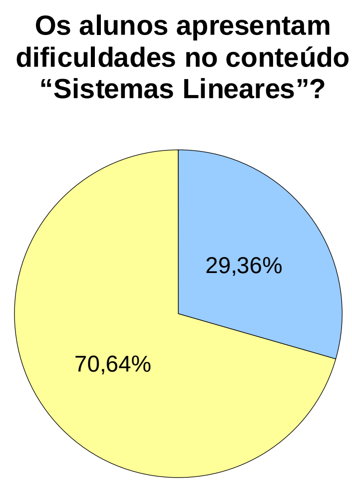

Gráfico 13: Dificuldades

Aqui fica claro que mais de setenta por cento dos alunos apresentam dificuldades quando trabalham com Sistemas Lineares em sala de aula.

A fim de ter mais clareza nesta questão, os professores, que respondessem que os alunos têm dificuldades no conteúdo, deveriam citar as principais dificuldades. No entanto, das setenta e sete pessoas que responderam "sim", doze optaram por não citá-las. Então, a partir das respostas das outras sessenta e cinco pessoas que responderam, montou-se uma tabela e um gráfico para apresentar esses dados. Além das dificuldades apontadas, a tabela traz a quantidade de vezes que cada uma delas foi citada pelos professores.

Dificuldades dos alunos no conteúdo Sistemas Lineares	**Total**
Abstração	1
Cálculo mental	1
Discussão de sistemas	2
Equacionar o problema	13
Implementação numérica	1
Interpretação dos problemas	24
Noções de Matemática Básica	15
Resolução do sistema de equações	26

Tabela 14: Dificuldades citadas

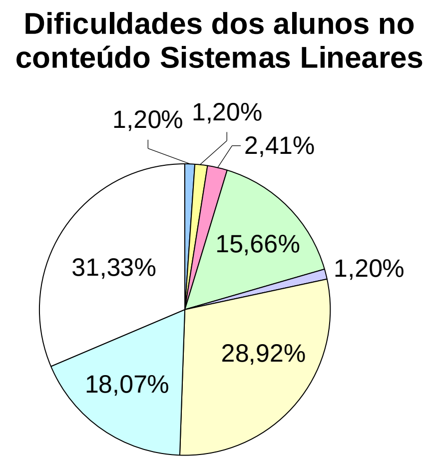

Gráfico 14: Dificuldades citadas

Vale ressaltar que alguns professores citaram mais de uma dificuldade, por este motivo o número de dificuldades citadas ultrapassou o número de sessenta e cinco professores respondentes nesta parte da questão.

Assim, de acordo com as respostas obtidas, as principais dificuldades apresentadas pelos alunos estão fortemente relacionadas, pois para que o aluno consiga resolver as atividades propostas ele precisa ter capacidade de equacionar e interpretar a questão. Além disso, para realizar os cálculos é necessário que os alunos tenham noções de Matemática Básica. Ou seja, normalmente os alunos não apresentam uma única dificuldade, pois cada dificuldade traz série de conseqüências para o desenvolvimento matemático do indivíduo.

4.2.3.7 *Quanto à avaliação dos alunos no conteúdo "Sistemas Lineares"*

Como você avalia os alunos no conteúdo "Sistemas Lineares"?	Total
Prova e trabalho	95
Somente prova escrita	12
Somente trabalho	2
Total geral	*109*

Tabela 15: Avaliação

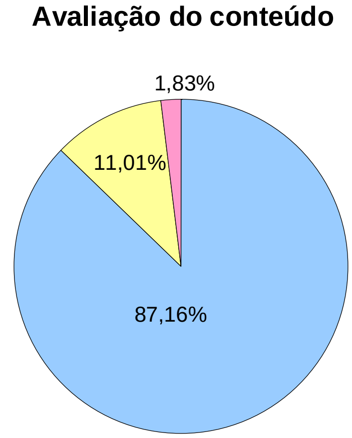

Gráfico 15: Avaliacão

Conforme os dados obtidos, a grande maioria (aproximadamente oitenta e sete por cento) dos professores respondentes opta por avaliar os alunos através de provas e trabalhos. Enquanto isso, cerca de onze por cento preferem avaliar somente através de provas escritas e menos de dois por cento dos professores consultados dizem que preferem avaliar somente através de trabalhos.

4.2.3.8 *Quanto às vantagens e desvantagens da utilização da Modelagem Matemática na abordagem do conteúdo "Sistemas Lineares" no Ensino Médio*

Como a última pergunta do questionário era aberta, ocorreram alguns imprevistos: algumas pessoas não a responderam e outros responderam parcialmente a questão. Este fato está ilustrado abaixo, através da tabela e do gráfico:

Tipos de Resposta – Questão 15	Total
Citou vantagens e desvantagens	37
Não citou desvantagens	32
Não citou vantagens	21
Não respondeu	19
Total de participantes	109

Tabela 16: Respostas da Questão 15

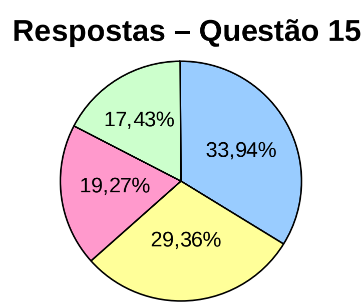

Gráfico 16: Respostas da Questão 15

Na seqüência, serão apresentadas as respostas das noventa pessoas que responderam a questão (totalmente ou parcialmente). Além das vantagens e desvantagens apontadas, as tabelas trazem a quantidade de vezes que cada uma delas foi citada pelos professores. Observe que a Tabela 17 trata das vantagens e a Tabela 18 fala das desvantagens da utilização da Modelagem Matemática em sala de aula, especialmente no conteúdo “Sistemas Lineares”.

Vantagens da utilização da Modelagem Matemática	**Total**
Aprendizagem significativa	7
Assimilação / Compreensão do conteúdo	17
Concentração	1
Contextualização	4
Desenvolve a pesquisa	1
Desenvolvimento do raciocínio	1
Envolvimento dos alunos / Participação	27
Facilita a explicação do conteúdo	2
Motivação dos alunos / Curiosidade	3
O aluno se sente mais responsável pelo aprendizado	1
Trabalhos em equipe com discussão dos resultados	2
Utilização da Matemática em problemas reais	22

Tabela 17: Vantagens da Modelagem Matemática em sala de aula

Desvantagens da utilização da Modelagem Matemática	**Total**
Abstração	1
Despreparo do professor	18
Excesso de conteúdos	10
Exige mais tempo para preparar aulas	6
Exposição do professor	1
Falta de interesse dos alunos	3
Falta de material de apoio	4
Medo do novo, do diferente (por parte do professor)	2
Número de alunos por turma	3
Resistência dos alunos a novos métodos	9
Resistência por parte dos professores	2
Tempo para desenvolver o conteúdo	28

Tabela 18: Desvantagens da Modelagem Matemática em sala de aula

A partir desses dados conclui-se que tanto as vantagens quanto as desvantagens apontadas estão de alguma forma relacionadas àquelas que foram apontadas nesta pesquisa na seção 2.6.

4.3 ANÁLISE GERAL DOS RESULTADOS

Analisando os resultados obtidos através do questionário de pesquisa, percebe-se que o questionário atingiu todas as regiões do Estado do Paraná, além de ter contemplado professores de diferentes faixas etárias e que atuam tanto em escolas públicas quanto em escolas particulares.

Observa-se que a grande maioria dos professores consultados teve seu primeiro contato com a Modelagem Matemática em sua formação inicial, ou seja, na graduação. Porém, são poucos os professores que dizem utilizar a Modelagem Matemática em sala de aula para abordar o conteúdo “Sistemas Lineares”. Isto parece ocorrer por diversos fatores, sendo que os principais são: número de aulas insuficiente para se trabalhar com modelagem, despreparo do professor e falta de material de apoio.

No entanto, apesar da existência de vários obstáculos, os professores consultados indicaram várias vantagens em se trabalhar com modelagem em sala de aula. Sendo assim, acredita-se que é possível trabalhar o conteúdo “Sistemas Lineares” através da Modelagem Matemática.

5 SISTEMAS LINEARES, MODELAGEM MATEMÁTICA E SALA DE AULA – ANÁLISES E SUGESTÕES

Depois de pesquisar alguns conceitos de Modelagem Matemática, observar o conteúdo matemático “Sistemas Lineares” e analisar os dados coletados através do questionário de pesquisa aplicado a professores de Matemática, chegou o momento de fazer algumas considerações sobre as relações desses assuntos e sugerir algumas atividades para serem trabalhadas em sala de aula.

5.1 SISTEMAS LINEARES, MODELAGEM MATEMÁTICA E AS AULAS DE MATEMÁTICA x REALIDADE ESCOLAR

A Modelagem Matemática, como citado anteriormente, é indicada como uma estratégia, um encaminhamento metodológico a ser utilizado nas aulas de Matemática. Porém, apesar disso, pouco mais de trinta por cento dos professores que responderam o questionário aplicado, afirmam que nunca utilizaram Modelagem em suas aulas. Além disso, quando questionados sobre Modelagem e Sistemas Lineares, aproximadamente sessenta e oito por cento dos participantes da pesquisa afirmaram que nunca abordaram o referido conteúdo através da Modelagem.

Então pergunta-se: por que isso ocorre? Uma possível resposta encontra-se no número de aulas disponíveis que os professores têm para desenvolver o conteúdo “Sistemas Lineares” em sala de aula com seus alunos. Segundo os dados coletados através do questionário de pesquisa, aproximadamente quarenta e cinco por cento dos professores dizem que dispõem de, no máximo, nove aulas para desenvolver todo o conteúdo “Sistemas Lineares”, incluindo aí os momentos destinados à avaliação da aprendizagem.

Sendo assim, como utilizar a Modelagem Matemática em sala de aula?

Acredita-se que uma alternativa seria planejar atividades, com os alunos, no início do bimestre ou semestre, para que eles pudessem indicar assuntos de outras áreas do conhecimento que gostariam de trabalhar nas aulas de Matemática. A partir daí o professor de Matemática poderia estipular prazos para que os alunos pesquisassem o tema escolhido, e, ao mesmo tempo, o professor poderia planejar situações problemas relacionadas aos temas indicadas por seus alunos.

Dessa forma, com trabalho extra-classe, tanto dos alunos quanto dos professores, a Modelagem poderia ser introduzida nas aulas de Matemática sem utilizar um grande número de aulas.

Os professores poderiam começar trabalhando com o “Caso 1” de Modelagem, e, depois, gradativamente, passariam ao “Caso 2” e “Caso 3” de Modelagem (vide seção 2.5.2). No entanto, é importante lembrar que os exercícios de fixação não devem ser abolidos, pois através deles os alunos apropriam-se das técnicas de resolução dos sistemas de equações (no caso específico do conteúdo Sistemas Lineares) e aí sim têm condições de resolver os problemas propostos.

Ainda segundo o assunto “exercícios ou problemas”, vale lembrar que quase noventa e um por cento dos professores que participaram da pesquisa, dizem trabalhar com os dois métodos em sala de aula. Sendo assim, pode-se dizer que o trabalho com Modelagem, apesar de ter uma metodologia própria, não é tão distante da prática docente dos professores de Matemática. Isso facilita a introdução da Modelagem Matemática em sala de aula.

Em se tratando de avaliação da aprendizagem, a grande maioria dos professores consultados, mais de oitenta e sete por cento, dizem utilizar provas escritas e trabalhos para avaliar seus alunos. Desse modo, pode-se imaginar que a Modelagem Matemática poderia substituir alguma outra forma de trabalho que o professor vem propondo em sala de aula, mesmo que isso aconteça uma única vez durante o semestre, por exemplo.

5.2 SUGESTÕES DE ATIVIDADES ENVOLVENDO MODELAGEM MATEMÁTICA E SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

A primeira intenção desta parte do trabalho era apresentar sugestões de atividades tais e quais elas poderiam ser aplicadas em sala de aula. No entanto, depois de algumas reflexões, chegou-se a conclusão que não seria interessante deixar “receitas” de como trabalhar Modelagem em sala de aula. Afinal, a Modelagem depende do contexto, das intenções de cada indivíduo que participa do processo. Sendo assim, não seria pertinente deixar registrado aqui alguns “modelos” de atividades a serem seguidas nas aulas de Matemática.

Mas, então, surgem algumas dúvidas: qual a utilidade dessa seção para os professores de Matemática? A seção não poderia ser simplesmente retirada do presente trabalho de pesquisa?

Acredita-se que a utilidade da seção seja a de apontar caminhos para a utilização da Modelagem Matemática em sala de aula, de modo especial no conteúdo “Sistemas Lineares”. Acredita-se também que esta seção complementa o trabalho de pesquisa realizado. Então, retirar a seção significaria deixar o trabalho incompleto, sem sentido.

5.2.1 *Alimentação e nutrientes*

Esse tema pode ser trabalhado da seguinte maneira: os alunos podem pesquisar sobre o assunto, buscando informações dos nutrientes encontrados em determinados alimentos, a importância desses nutrientes para a saúde dos seres humanos, além da quantidade diária necessária a cada pessoa.

A partir desses dados, os alunos e professores podem discutir o assunto e elaborar questões sobre como combinar os alimentos para se ingerir a quantidade diária necessária de tais nutrientes. Para tanto, uma das opções é usar sistemas de equações lineares.

Exemplos desses problemas são facilmente encontrados em livros didáticos e vestibulares. No entanto, a diferença de trabalhar com a Modelagem está na busca das informações e na elaboração das questões pelos próprios alunos. Se o professor quiser, ele próprio pode elaborar as questões. Desse modo, os alunos apenas buscariam as informações necessárias.

Outra alternativa nesse trabalho é a resolução dos problemas em grupos. Se o professor optar por esta forma de trabalho, poderá pedir para que os grupos troquem suas questões, de modo que cada grupo responde as questões de outra equipe de alunos. Deve-se lembrar que a discussão das soluções encontradas pode ser discutida entre os pequenos grupos ou mesmo com a turma toda.

Este assunto poderia ser trabalho juntamente com o professor de Biologia.

5.2.2 *Compras: produtos e valores*

Pode-se pedir para que os alunos pesquisem preços de determinados produtos ou até mesmo o professor pode trazer as informações para a sala de aula. Depois, estipula-se um valor que os alunos (ou grupos de alunos) teriam para gastar na compra dos determinados produtos. A partir daí os alunos equacionam o problema e procuram soluções.

Se houver necessidade, o professor pode procurar exemplos deste tipo de questões em livros didáticos.

5.2.3 *Ligas metálicas*

Os alunos podem pesquisar o que são ligas metálicas e como elas são formadas. A partir daí, podem fazer vários cálculos envolvendo sistemas de equações. Por exemplo, podem calcular a quantidade de cada material para uma determinada liga metálica. Ou ainda, podem analisar os custos de produção de alguns tipos de liga.

Exemplos desse tipo de questão também são facilmente encontrados em livros didáticos e em vestibulares.

Este assunto pode ser trabalho juntamente com o professor de Química

5.2.4 *Misturas em geral*

Da mesma forma que as sugestões anteriores, basta decidir com os alunos que tipo de misturas eles querem pesquisar. Pode ser misturas dos mais diversos alimentos.

Também pode ser feita uma pesquisa sobre os tipos de rações que podem ser misturadas para tratar um determinado animal. Nesse caso, os estudantes poderiam pesquisar sobre a alimentação do referido animal em várias fases. E, depois, bastaria elaborar o problema que lhes fosse interessante.

Como nos casos anteriores, exemplos de questões podem ser retirados de livros didáticos do Ensino Médio.

5.2.5 *Produção de artigos em empresa*

Sobre este assunto os alunos podem fazer breves pesquisas sobre um determinado produto e analisar quais seriam as matérias-primas necessárias à produção de tais produtos. A partir daí, poderiam explorar os custos de produção a partir dos valores dos fornecedores de matérias-primas. Além disso, poderiam comparar os valores e buscar alternativas para obter um custo menor na produção dos produtos pesquisados.

Neste caso, é preciso deixar claro que os alunos estarão trabalhando com aproximações, pois não será possível trabalhar com todas as variáveis que envolvem a produção das empresas.

Exemplos desse tipo de questão são mais difíceis de ser encontrados em livros didáticos a nível de Ensino Médio, talvez pela quantidade de variáveis envolvidas no processo de produção.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa aqui apresentada tem como maior preocupação a forma com que os professores de Matemática vêm trabalhando o conteúdo “Sistemas Lineares” nas salas de aula de Ensino Médio, especialmente no Estado do Paraná.

Esta pesquisa apoiou-se nas idéias da Modelagem Matemática, que foi aqui considerada como uma estratégia de ensino-aprendizagem que permite aos alunos a investigação e transformação de problemas da realidade em problemas matemáticos (por meio de modelos matemáticos), motivando-os a buscar respostas, através da linguagem matemática, e conduzindo-os a interpretar os dados obtidos usando a linguagem usual.

Além disso, os itens abordados neste texto tiveram como ponto de partida o questionário de pesquisa aplicado a professores de Matemática do Estado do Paraná, tanto da rede pública como da rede privada. A partir desses dados optou-se pelos caminhos que seriam percorridos durante a pesquisa.

Ao concluir o trabalho, não afirma-se que a Modelagem Matemática é a melhor estratégia de ensino de Matemática. Ela apenas foi indicada como um dos possíveis caminhos para um trabalho diferenciado em sala de aula, nas aulas de Matemática. E, assim aconteceu pelo fato de que a Modelagem estimula a investigação, instiga o aluno a pesquisar e discutir as soluções encontradas em cada problema proposto.

Ao escrever o texto, houve preocupação de se considerar todos os problemas enfrentados em sala de aula, tais como: problemas de aprendizagem, dificuldades com noções de Matemática Básica, excesso de conteúdos matemáticos, poucas horas-aula para o desenvolvimento dos conteúdos, turmas com muitos alunos, entre outros. Porém, apesar de todos os problemas que são encontrados nas escolas (dentro e fora da sala de aula), acredita-se que é possível fazer um bom trabalho e formar cidadãos que estejam matematicamente alfabetizados e preparados para resolver os problemas (matemáticos ou não) que a vida possa lhes apresentar.

E, como dito anteriormente, esta pesquisa não deixa receitas de como se trabalhar em sala de aula. Ela apenas aponta alguns caminhos.

REFERÊNCIAS

ACCORDI, D. C. **A Modelagem Matemática no Ensino de Exponenciais e Logaritmos**. Curitiba, 2006. 65 f. Monografia (Especialização para Professores de Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática e os professores: a questão da formação**. BOLEMA, ano 14, nº 15, p. 5 – 23, 2001a.

_______. **Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores**. Rio Claro, 2001. 253 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001b.

BARRETO FILHO, B.; XAVIER, C. **Matemática aula por aula**, volume único. São Paulo: FTD, 2000.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. 2. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2004

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 4. ed. 1. reimp. São Paulo: Editora Contexto, 2007.

BONJORNO, J. R.; BONJORNO, R. A.; OLIVARES, A. **Matemática: fazendo a diferença**. 6ª série (7º ano). Coleção Fazendo a diferença. São Paulo: FTD, 2006.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: Uma Metodologia Alternativa para o Ensino de Matemática na 5ª Série**. Rio Claro, 1987. 186 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1987.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 12. ed. São Paulo: Ática, 2000.

DINIZ, L. N. **O Papel das Tecnologias da Informação e Comunicação nos Projetos de Modelagem Matemática**. Rio Claro, 2007. 118 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

Diretrizes Curriculares de Matemática para as Séries Finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio. Disponível em <http://matematica.seed.pr.gov.br>. Acesso em: 14/07/2008.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática: uma nova abordagem**, vol. 2: versão progressões. Coleção Matemática uma nova abordagem. São Paulo: FTD, 2000.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: Como fazer pesquisas qualitativas em Ciências Sociais**. 9. ed. Rio de Janeiro: Record, 2005.

LAY, D. C. **Álgebra linear e suas aplicações**. (Tradução CAMELIER, R. e IÓRIO, V. M.). 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

LEI nº 11274. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb>. Acesso em: 22/09/2208.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol 3. Coleção do Professor de Matemática. 6. ed. SBM, Rio de Janeiro, 2006.

MALHEIROS, A. P. S. **A produção matemática dos alunos em ambiente de Modelagem**. Rio Claro, 2004. 180 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

SKOVSMOSE, O. **Cenários para investigação**. Bolema – Boletim de Educação Matemática. Rio Claro, n. 14, p. 66 – 91, 2000.

SILVEIRA, E. **Modelagem Matemática em Educação no Brasil: entendendo o universo de teses e dissertações**. Curitiba, 2007, 197 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.