UNIVERSIDADE PARANAENSE - UNIPAR

LEANDRO CAVALIERI

O ENSINO DAS FRAÇÕES

UMUARAMA – PR
2005

LEANDRO CAVALIERI

O ENSINO DAS FRAÇÕES

Monografia apresentada ao curso de Especialização em Ensino da Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista.

Orientador: Prof. Ms. Décio Antônio Baraviera.

UMUARAMA – PR
2005

DEDICATÓRIA

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a DEUS pela vida e por estar ao meu lado em todos os momentos.

Ao Professor Ms. Décio Antônio Baraviera, meu orientador, pelos conhecimentos transmitidos.

Aos amigos de classe pelos momentos compartilhados.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desse curso.

A todos estes minha eterna gratidão.

“Há homens que lutam um dia e são bons.
Há outros que lutam um ano e são melhores.
Há os que lutam muitos anos e são muito bons.
Porém, há os que lutam toda a vida.
Esses são os imprescindíveis."

(Bertolt Brecht)

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo focalizar as frações através de um estudo bibliográfico, permitindo a compreensão deste conteúdo que normalmente não é facilmente assimilado. Procura-se expor esse tema de forma simples, mas clara, caracterizando as frações, apresentando sua definição e elementos o que fundamenta o principal objetivo deste estudo, que é o de abordar o ensino das frações através de uma proposta metodológica que facilite a compreensão das frações pelos alunos, que por sua vez, podem melhor assimilar esse conteúdo. Através de materiais concretos são sugeridas algumas atividades que podem contribuir, se bem manuseada, para um aprendizado mais eficaz e posteriormente mais duradouro.

Palavras-Chaves: Frações, ensino, matemática.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O homem, sujeito da história, conseguiu com seu trabalho chegar ao atual desenvolvimento tecnológico. Esse desenvolvimento fez com que o homem tomasse consciência de suas potencialidades e com sua inteligência e trabalho participa da evolução do mundo.

No decorrer do tempo, o homem encontra-se com vários tipos de problemas e uma maneira de tentar solucionar seus problemas é através do conhecimento dos quais, o mais importante é o conhecimento científico.

Para se chegar a esse conhecimento científico há necessidade de atingir não só os fenômenos na sua manifestação global, mas em suas causas. E a matemática é um conhecimento importante para o desenvolvimento científico. É necessário ter sempre em mente que todo este desenvolvimento científico precisa ser sentido nas escolas, na seleção e seqüência de conteúdos. A concepção de Matemática está sintonizada com visão de mundo, de sociedade e de homem.

A identificação dos conteúdos, fator fundamental para que os conhecimentos matemáticos sejam vistos em sua totalidade. Daí, a necessidade do desenvolvimento das questões relativas aos números racionais, permitindo uma maior aproximação entre Matemática e realidade.

Para Herder (1971), a experiência no campo das frações é extremamente limitada. A criança defronta-se com a idéia de metade, de um quarto, de um terço ou três quartos, mas não lida com a mesma freqüência com outras frações.

O importante, no estudo de frações, como, aliás, de toda a matemática não é enviar a todo custo a memorização de definições e regras, sem compreensão, é possibilitar um aprendizado mais saudável onde o aluno possa participar de todo o processo de aquisição de conhecimento, consciente do que está aprendendo e compreendendo o conteúdo, não simplesmente decorando e não conseguindo assimilar nada do que está sendo ensinado.

Felizmente, atualmente, já existem materiais concretos e livros que facilitam o ensino de frações, permitindo um aprendizado, mais divertido e menos teórico, metódico, abrindo espaço para maiores discussões e possibilitando resultados mais satisfatórios. Entretanto, cabe ao professor uma maior dedicação a preparação das aulas, introduzindo novas formas de ensinar o conteúdo, que poderá auxiliar muito na transmissão do conhecimento a ser passado.

No intuito de apresentar as frações neste trabalho, aborda-se através de pesquisa bibliográfica, uma passagem desde a história ao ensino das frações, abordando e caracterizando esse conteúdo de forma que seja possível uma compreensão, mesmo que limitada, das frações. Para tanto aborda-se o conteúdo em quatro capítulos.

No primeiro capítulo faz-se uma apresentação rápida do trabalho proposto, considerando os aspectos a serem abordados no decorrer do mesmo e, abordando os objetivos que o caracterizaram. Faz-se aqui um esboço do que se pretende abordar, argumentando e justificando este trabalho enquanto material de estudo e fruto de pesquisas bibliográficas que permitiram a elaboração do mesmo.

No capítulo dois, que segue, conta-se um pouco do caminho histórico percorrido até a aparição e criação das frações, como uma necessidade oriunda da evolução do homem enquanto ser racional. Faz-se um *tour* sobre a história da álgebra, das primeiras formas de contagem, dos números para facilitar a compreensão das frações.

No capítulo três, faz-se uma caracterização das frações, conceituando-as. Nesse capítulo é feita uma descrição das frações o mais completa possível, para que facilite a compreensão do ensino delas no capítulo que segue.

No quarto capítulo, nosso "curinga", aborda-se o ensino das frações e formas de apresentar esse conteúdo ao aluno, ao passo que são sugeridas algumas atividades feitas a partir de materiais manipuláveis e concretos, que visam oportunizar um aprendizado mais divertido e eficaz.

Por fim, no capítulo cinco, faz-se a conclusão do trabalho, fazendo considerações sobre o mesmo, das intenções que se tinha ao elaborar esse estudo. Aborda-se a necessidade de um ensino mais digno dos alunos, onde os mesmos possam progredir mais, possam aprender mais e ter uma participação efetiva nesse aprendizado e conseqüentemente assimilar o conteúdo da escola com a sua vida enquanto cidadão.

2 UM POUCO DA HISTÓRIA DAS FRAÇÕES

2.1 História da Álgebra

Etimologicamente, a palavra álgebra não está muito clara como ocorre, por exemplo, palavra "aritmética" que deriva do *grego arithmós* significando "quantidade" ou número, ou ainda, a palavra "astronomia" que deiriva do grego *Astron ramos* e respectivos significados são Astro e Lei.

Pela primeira vez, o nome álgebra foi usado pelo matemático árabe Mohammed ibn Khwarizmi (Maomé, filho de Moisés, de Khowarizm) que publicou em Bagadad por volta do ano 825, um tratado sobre equações a qual denominou: Kitab al-jebr w'al Muqâbalah, expressão híbrida composta pela palavra árabe al-jebr traduzida por alguns como equação e pela palavra persa muqâbalah de significado desconhecido. Por isso é que se diz que álgebra é uma variante latina da palavra árabe al-jabr, sendo às vezes al-jebr.

Os gregos que foram extraordinários geômetras, mas que não possuíam um razoável sistema de numeração, empregaram geometria para resolver, por processos muito mais complicados, problemas de facílima solução algébrica. No entanto, o genial Diophante de

Alexandria (séc. III d.c.) que introduziu o uso de símbolos e sinais para denotar as quantidades e as operações, constituiu a mais notável contribuição algébrica. Esse matemático ocupou-se, também, dos problemas indeterminados daqueles em que o número de equações é menor que o de incógnitas e procurou longos raciocínios verbais até então usados para calcular com os números e resolver problemas.

A matemática hindu, muito evoluída, registra, principalmente, nos Brahmagupta, Mahãvira e Bháskara grande de problemas resolvidos algébricos.

Apesar da contribuição de Diophante ter marcado o início da álgebra como conhecimento independente dos demais, não há, depois dele, nenhum trabalho de referência do mundo antigo.

O verdadeiro criador da álgebra foi, porém, o matemático francês Françóies Vieta conhecido por Vieta, que introduzindo o emprego das letras para representar quantidades, permitiu que chegasse a fórmulas gerais. Foi ele que, com as numerosas simplificações na resolução das equações, abriu caminho para os matemáticos Descartes, Newton, etc.

Em 1871, outro marco da álgebra abstrata foi a publicação de uma memória feita por Hernabb Schawartz sobre a teoria das séries hipergeométricas. O desenvolvimento das noções nessa obra originou o que hoje denominamos de geometria diferenciada, então a matemática para uma grande síntese, onde os dois ramos, aritmética e geometria aparecem, reunidos em vários pontos. Os importantes Setefan Banach a respeito dos espaços abstratos, e a inclusão de muitas teorias algébricas nesses estudos, possibilitaram a reunião de uma vasta quantidade de estudos que contribuíram poderosamente para a rápida evolução de novos campos da abstrata para topologia.

2.2 História dos Números

Segundo Boyer (1996), os matemáticos do século vinte desempenham uma atividade intelectual altamente sofisticada, que não é fácil de definir, mas boa parte do que hoje se chama matemática deriva de idéias que originalmente estavam centradas nos conceitos de número, grandeza e forma.

Boyer (1996) afirma que:

> "Noções primitivas relacionadas com os conceitos de número, grandeza e forma podem ser encontradas nos primeiros tempos da raça humana, e vislumbres de noções matemáticas se encontram em formas de vida e podem datar de milhões de anos da humanidade. A princípio as noções primitivas de número, grandeza e forma podem estar relacionadas com contrastes mais do que com semelhanças – a diferença entre um lobo e muitos, a desigualdade de tamanho entre uma sardinha e uma baleia, a dessemelhança entre a forma redonda da lua e a retilínea de pinheiro. Gradualmente deve ter surgido, da massa de experiências caóticas, a realização de que há analogias: e dessa percepção de semelhanças em número e forma nasceram a ciência e a matemática. As próprias diferenças parecem indicar semelhanças, pois o contraste entre um lobo e muitos, entre um carneiro e uma árvore tem algo em comum – sua unicidade".

Em uma determinada época pensou-se que a matemática se ocupava do mundo que nossos sentidos percebem e foi somente no século dezenove que a matemática pura se libertou das limitações sugeridas por observações sugeridas por observações da natureza. É claro que a matemática originalmente surgiu como parte da vida diária do homem, e se há validade do princípio biológico da "sobrevivência do mais apto" a persistência da raça humana provavelmente tem relação com o desenvolvimento de conceitos matemáticos. Na natureza pode se observar certos grupos, como pares que podem ser postos em correspondência uma a um. As mãos podem ser relacionadas com os pés, os olhos e as orelhas ou as narinas. Essa percepção de uma prioridade abstrata que certos grupos têm em comum e que nós chamamos número representa um grande passo no caminho para a matemática moderna.

Claramente, nossos mais antigos antepassados, a princípio, contavam só até dois, além desse nível era dado como muitos. Ainda hoje muitos povos primitivos ainda contam objetos dispondo-os em grupos de dois.

2.2.1 Primeiras bases numéricas

Para Boyer (1996),

> “A idéia de números finalmente tornou-se suficientemente ampla e vivida para que se sentisse a necessidade de exprimir a propriedade de algum modo, presumivelmente a princípio comente na linguagem de sinais. Os dedos de uma mão põem facilmente ser usados para indicar um conjunto de dois, três, quatro ou cinco objetos, não sendo o número 1 geralmente reconhecido inicialmente como um verdadeiro número. Usando os dedos das duas mãos podem ser representadas coleções até dez elementos. Combinando dedos das mãos e pés pode-se ir até vinte. Quando os dedos humanos eram inadequados, podiam ser usados montes de pedras para representar uma correspondência com elementos de um outro conjunto. Quando o homem primitivo usava tal método de representação, ele freqüentemente amontoava as pedras em grupos de cinco, pois os quíntuplos lhe eram familiares por observação da mão e pé humanos. Como Aristóteles observou há muito tempo, o uso hoje que difundiu do sistema decimal é apenas o resultado do acidente anatômico de que quase todos nós nascemos com dez dedos nas mãos e nos pés./.../Um estudo de várias centenas de tribos entre os índios americanos, por exemplo, mostrou que quase um terço usava a base decimal e aproximadamente outro terço usava quinário ou quinário-decimal, menos de um terço tinha um esquema binário, e os que usavam um sistema ternário formavam menos de um por cento do grupo. O sistema vigesimal, com base vinte, ocorria em cerca de 10 por cento das tribos ”.

O homem pré-histórico, às vezes, registrava um número fazendo marcas num bastão ou pedaço de osso. Tais descobertas arqueológicas fornecem provas de que a idéia de número é mito mais antiga do que progressos tecnológicos como o uso de metais ou de veículos com rodas.

Precede a civilização e a escrita, no sentido usual da palavra, pois artefatos com significados numéricos, tais como o osso acima descrito, vêm de um período cerca de trinta mil anos atrás.

2.2.2 Linguagem numérica e a origem da contagem

O homem difere de outros animais de modo mais acentuado pela linguagem, palavras que exprimem idéias numéricas aparecem lentamente, sinais para números provavelmente precederam as palavras para números, pois é mais fácil fazer incisões num bastão do que estabelecer uma frase bem modulada para identificar um número. As línguas modernas são construídas quase sem exceção em torno da base dez, de modo que o número treze, por exemplo, não é descrito como três e cinco, mas como três e dez.

Sobre a linguagem numérica Boyer (1996), diz que:

> "Se o problema da linguagem não fosse tão difícil talvez sistemas rivais do decimal tivessem feito maiores progressos. A base cinco, por exemplo, foi uma das que deixaram a mais antiga evidência escrita palpável, mas quando a linguagem se tornou formalizada, o dez já predominava ".

Os milhares de anos que foram necessários para que o homem fizesse a distinção entre os conceitos abstratos e repetidas situações concretas, mostram as dificuldades que devem ter sido experimentadas para se estabelecer uma base ainda mais primitiva para a matemática. Diz-se que a arte de contar surgiu em conexão com rituais religiosos primitivos e que o aspecto ordinal precedeu o conceito quantitativo.

> "O conceito de número inteiro é o mais antigo na matemática e sua origem se perde nas névoas da antiguidade pré-histórica. A noção de fração racional, porém, surgiu relativamente tarde e em geral não estava relacionada de perto como os sistemas para os inteiros. Entre as tribos primitivas parece não ter havido praticamente nenhuma necessidade de usar frações. Para necessidades quantitativas, o homem prático pode escolher unidades suficientemente pequenas

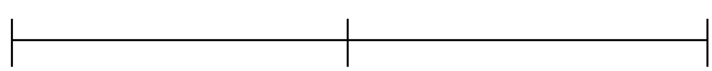
> para eliminar a necessidade de usar frações. Portanto não houve um progresso ordenado de frações binárias para quinárias para decimais, e as frações decimais foram essencialmente um produto da idade moderna da matemática, não do período primitivo ”. (Boyer, 1996)

2.3 História das Frações

Historicamente, a necessidade de criar novos números, além dos naturais foi sentida e sugerida naturalmente por problemas práticos da natureza geométrica.

Houve tempo em que o homem não conhecia as frações. Mas a necessidade de medir terras, colheitas, líquidos, tecidos, com exatidão levou o homem a introduzir a frações e a criar unidades padrão para as medidas.

Ao escolher uma determinada unidade padrão para medir, perceberam muitas vezes que o resultado obtido não era um número inteiro e sentiram a necessidade de fracionar a unidade de medida. Ao dividir um pedaço de corda em duas partes de igual comprimento, cada parte tinha $\frac{1}{2}$ de comprimento da corda inicial.



As frações foram criadas há milhares de anos, no antigo Egito, no tempo dos faraós e pirâmides. Os egípcios, já utilizavam frações, embora possuíssem notações apenas para as frações da unidade e as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$. Frações de unidade são aqueles cujo numerados é 1 como: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, etc.

Os egípcios usavam a notação  para $\frac{1}{5}$, isto é, o número 5 como sinal característico sobre ele. Quando tinham necessidade de usar outras frações, exprimiam-nas em termos de frações da unidade como:

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \qquad \frac{15}{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

Os babilônios usavam geralmente frações com denominadores 60, 60^2 (3600), etc., devido a base de seu sistema de seu sistema de numeração ser 60.

As crianças romanas aprendiam inicialmente as frações dom denominadores doze. Não tinham símbolos para as frações como $\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \ldots$

Como o decorrer dos anos muitas notações foram usadas. A nossa maneira atual de representar uma fração é por meio de uma barra " ——— " data do século XVI.

2.3.1 Elementos históricos sobre frações

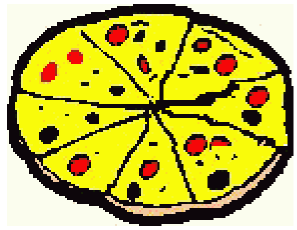
Há 3000 antes de Cristo, os geômetras dos faraós do Egito realizavam marcação das terras que ficavam às margens do rio Nilo, para a sua população. Mas, no período de junho a setembro, o rio inundava essas terras levando parte de suas marcações. Logo os proprietários das terras tinham que marcá-las novamente e para isso, eles utilizavam uma marcação com cordas, que seria uma espécie de medida, denominada *estiradores de cordas*.

As pessoas utilizavam as cordas, esticando-as e assim verificavam quantas vezes aquela unidade de medida estava contida nos lados do terreno, mas raramente a medida dava correta no terreno, isto é, não cabia um número inteiro de vezes nos lados do terreno; sendo assim eles sentiram a necessidade de criar um novo tipo de número - *o número fracionário*, onde eles utilizavam as frações.

3 DEFINIÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DAS FRAÇÕES

3.1 Introdução ao conceito de fração

Às vezes, ao tentar partir algo em pedaços, como por exemplo, uma pizza, nós a cortamos em partes que não são do mesmo tamanho.



Logo isso daria uma grande confusão, pois quem ficaria com a parte maior? Ou quem ficaria com a parte menor? É lógico que alguém sairia no prejuízo.

Pensemos neste exemplo: Dois irmãos foram juntos comprar chocolate. Eles compraram duas barras de chocolate iguais, uma para cada um. Iam começar a comer quando chegou uma de suas melhores amigas e vieram as perguntas: Quem daria um pedaço para a amiga? Qual deveria ser o tamanho do pedaço? Eles discutiram e chegaram à seguinte conclusão:

Para que nenhum dos dois comesse menos, cada um daria metade do chocolate para a amiga.

- Você concorda com esta divisão? Por quê?
- Como você poderia resolver esta situação para que todos comessem partes iguais?
- O que você acha desta frase: *Quem parte e reparte e não fica com a melhor parte, ou é bobo ou não tem arte.*

3.2 Elementos Gerais para a Construção de Frações

Para representar os elementos que não são tomados como partes inteiras de alguma coisa, utilizamos o objeto matemático denominado fração.

O conjunto dos números naturais, algumas vezes inclui o zero e outras vezes não, tendo em vista que zero foi um número criado para dar significado nulo a algo. Nesse momento o conjunto N será representado por:

$$N = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... \}$$

Logo, todos os números naturais representam partes inteiras.

Os números que não representam partes inteiras, mas que são partes de inteiros, constituem os números racionais não-negativos, aqui representados por Q_+, onde esta letra Q significa quociente ou divisão de dois números inteiros naturais.

$$Q_+ = \{ 0,..., 1/4,..., 1/2,..., 1,...,2,... \}$$

Numeral: Relativo a número ou indicativo de número.

Número: Palavra ou símbolo que expressa quantidade.

3.3 Definição de Fração

Os numerais que representam números racionais não-negativos são chamados *frações* e os números inteiros utilizados na fração são chamados numerador e denominador, separados por uma linha horizontal ou *traço de fração*.

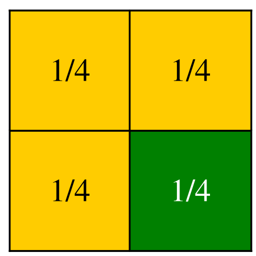
$$\frac{Numerador}{Deno\min ador}$$

onde *Numerador* indica quantas partes são tomadas do inteiro, isto é, o número inteiro que é escrito sobre o traço de fração e *Denominador* indica em quantas partes dividimos o inteiro, sendo que este número inteiro deve necessariamente ser diferente de zero.

Exemplo: Consideremos a fração 1/4, que pode ser escrita como:

$$\frac{1}{4}$$

Em linguagem matemática, as frações podem ser escritas tanto como no exemplo acima ou mesmo como 1/4, considerada mais comum.



A unidade foi dividida em quatro partes iguais. A fração pode ser visualizada através da figura anexada, sendo que foi sombreada uma dessas partes.

3.4 Leitura de Frações

(a) O numerador é 1 e o denominador é um inteiro $1<d<10$

A leitura de uma fração da forma 1/d, onde d é o denominador que é menor do que 10 é feita como:

Fração	**1/2**	**1/3**	**1/4**	**1/5**	**1/6**	**1/7**	**1/8**	**1/9**

Leitura	um meio	um terço	um quarto	um quinto	um sexto	um sétimo	um oitavo	um nono

(b) O numerador é 1 e o denominador é um inteiro d>10

Quando a fração for da forma 1/d, com d maior do que 10, lemos: *1, o denominador e acrescentamos a palavra avos*.

Avos é um substantivo masculino usado na leitura das frações, designa cada uma das partes iguais em que foi dividida a unidade e se cujo denominador é maior do que dez.

Fração	**Leitura**
1/11	um onze avos
1/12	um doze avos
1/13	um treze avos
1/14	um quatorze avos
1/15	um quinze avos
1/16	um dezesseis avos
1/17	um dezessete avos
1/18	um dezoito avos
1/19	um dezenove avos

(c) O numerador é 1 e o denominador é um múltiplo de 10

Se o denominador for múltiplo de 10, lemos:

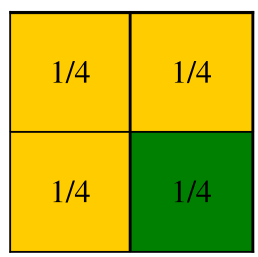
Fração	**Leitura**	**Leitura Comum**
1/10	um dez avos	um décimo
1/20	um vinte avos	um vigésimo
1/30	um trinta avos	um trigésimo
1/40	um quarenta avos	um quadragésimo
1/50	um cinqüenta avos	um qüinquagésimo
1/60	um sessenta avos	um sexagésimo
1/70	um setenta avos	um septuagésimo
1/80	um oitenta avos	um octogésimo
1/90	um noventa avos	um nonagésimo
1/100	um cem avos	um centésimo
1/1000	um mil avos	um milésimo
1/10000	um dez mil avos	um décimo milésimo

1/100000	um cem mil avos	um centésimo milésimo
1/1000000	um milhão avos	um milionésimo

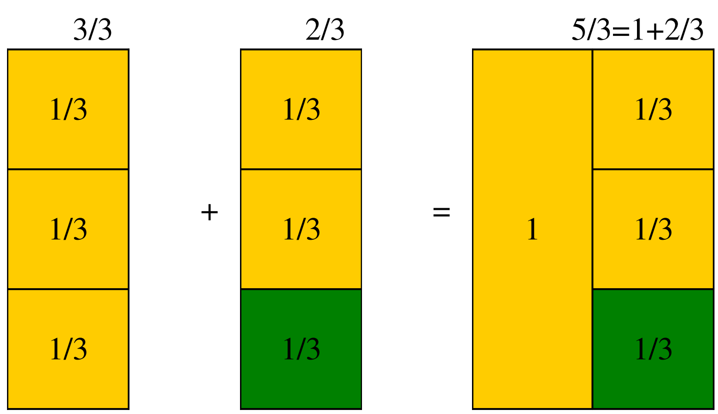
Observação: A fração 1/3597 pode ser lida como: um, três mil quinhentos e noventa e sete avos.

3.5 Tipos de Frações

A representação gráfica mostra a fração 3/4 que é uma fração cujo numerador é um número natural menor do que o denominador.

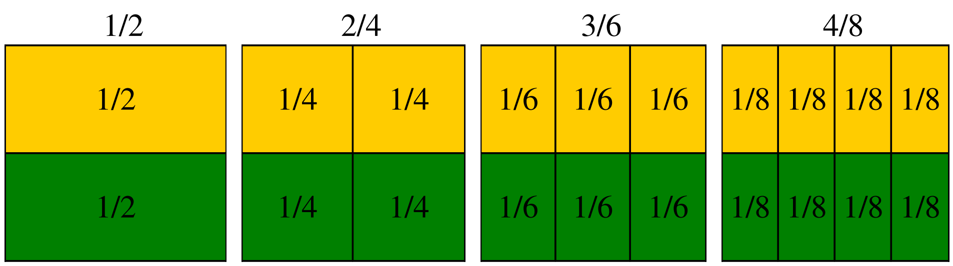


A fração cujo numerador é menor que o denominador, isto é, a parte é tomada dentro do inteiro, é chamada *fração própria*. A fração cujo numerador é maior do que o denominador, isto é, representa mais do que um inteiro dividido em partes iguais é chamada *fração imprópria*.



Fração aparente: é aquela cujo numerador é um múltiplo do denominador e aparenta ser uma fração, mas não é, pois representa um número inteiro. Como um caso particular, o zero é múltiplo de todo número inteiro, assim as frações 0/3, 0/8, 0/15 são aparentes, pois representam o número inteiro zero.

Frações Equivalentes: São as que representam a mesma parte do inteiro. Se multiplicarmos os termos (numerador e denominador) de uma fração sucessivamente pelos números naturais, teremos um conjunto infinito de frações que constitui um conjunto que é conhecido como a classe de equivalência da fração dada.



3.6 Propriedades Fundamentais

(1) Se multiplicarmos os termos (numerador e denominador) de uma fração por um mesmo número natural, obteremos uma fração equivalente à fração dada:

$$\frac{1}{2} = \frac{1x2}{2x2} = \frac{2}{4}$$

(2) Se é possível dividir os termos (numerador e denominador) de uma fração por um mesmo número natural, obteremos uma fração equivalente à fração dada:

$$\frac{12}{16} = \frac{12:2}{16:2} = \frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$$

3.7 A fração como uma classe de equivalência

A classe de equivalência de uma fração é o conjunto de todas as frações equivalentes à fração dada. Ao invés de trabalhar com todos os elementos deste conjunto infinito, simplesmente poderemos tomar a fração mais simples deste conjunto que será a representante desta classe. Esta fração será denominada um **número racional**. Aplicando a propriedade fundamental, podemos escrever o conjunto das frações equivalentes a 1/3, como:

C(1/3) = { 1/3, 2/6, 3/9, 4/12, 5/15, 6/18, ... }

3.8 Número Misto

Quando o numerador de uma fração é maior que o denominador, podemos realizar uma operação de decomposição desta fração em uma parte inteira e uma parte fracionária e o resultado é denominado número misto.

1) Transformação de uma fração imprópria em um número misto

$$\frac{17}{4} = \frac{16+1}{4} = \frac{16}{4} + \frac{1}{4} = 4 + \frac{1}{4} = 4\frac{1}{4}$$

2) Transformação de um número misto em uma fração imprópria

$$4\frac{1}{4} = 4 + \frac{1}{4} = \frac{16}{4} + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

3.9 Simplificação de Frações

Simplificar frações é o mesmo que escrevê-la em uma forma mais simples, para que a mesma se torne mais fácil de ser manipulada.

O objetivo de simplificar uma fração é torná-la uma fração irredutível, isto é, uma fração para a qual o Máximo Divisor Comum entre o Numerador e o Denominador seja 1, ou seja, o Numerador e o Denominador devem ser primos entre si. Essa simplificação pode ser feita através dos processos de divisão sucessiva e pela fatoração.

A divisão sucessiva corresponde a dividir os dois termos da fração por um mesmo número (fator comum) até que ela se torne irredutível.

$$\frac{36}{60}=\frac{36:2}{60:2}=\frac{18}{30}=\frac{18:2}{30:2}=\frac{9}{15}=\frac{9:3}{15:3}=\frac{3}{5}$$

Respectivamente, dividimos os termos das frações por 2, 2 e 3.

Observação: Outra maneira de divisão das frações é obter o Máximo Divisor Comum entre o Numerador e o Denominador e simplificar a fração diretamente por esse valor.

Exemplo: Simplificaremos a fração 54/72, usando o Máximo Divisor Comum. Como MDC(54,72)=18, então 54:18=3 e 72:18=4, logo:

$$\frac{54}{72}=\frac{54:18}{72:18}=\frac{3}{4}$$

3.10 Comparação de duas frações

(1) Por redução ao mesmo denominador

Se duas frações possuem denominadores iguais, a maior fração é a que possui maior numerador. Por exemplo:

$$\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$$

(2) Tanto os numeradores como os denominadores das duas frações são diferentes

Devemos reduzir ambas as frações a um denominador comum e o processo depende do cálculo do Mínimo Múltiplo Comum entre os dois denominadores e este será o denominador comum às duas frações. Na seqüência, divide-se o denominador comum pelo denominador de cada fração e multiplica-se o resultado obtido pelo respectivo numerador.

Exemplo: Vamos comparar as frações 2/3 e 3/5. Como os denominadores são 3 e 5, temos que MMC(3,5)=15. Reduzindo ambas as frações ao mesmo denominador comum 15, aplica-se a regra de dividir o denominador comum pelo denominador de cada fração e na seqüência multiplica-se esse respectivo número pelo numerador.

$$\frac{2}{3} ? \frac{3}{5}$$

Multiplicando os termos da primeira fração por 5 e multiplicando os termos da segunda fração por 3, obteremos:

$$\frac{2}{3} = \frac{2x5}{3x5} ? \frac{3x3}{5x3} = \frac{3}{5}$$

Temos então os mesmos denominadores, logo:

$$\frac{2}{3} = \frac{10}{15} ? \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

e podemos garantir que

$$\frac{2}{3} = \frac{10}{15} > \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

(3) As frações possuem um mesmo numerador

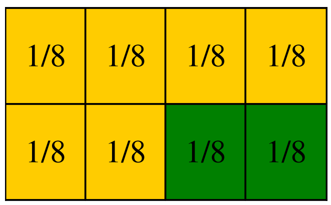
Se os numeradores de duas frações forem iguais, será maior a fração cujo denominador for menor.

Exemplo: Uma representação gráfica para a desigualdade

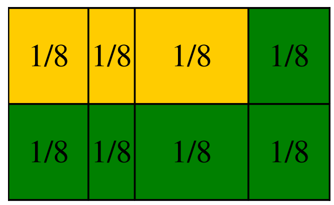
$$\frac{3}{4} > \frac{3}{8}$$

pode ser dada geometricamente por:

3/4=6/8



3/8



3.11 Divisão de Frações

Consideremos inicialmente uma divisão D de duas frações, denotada por:

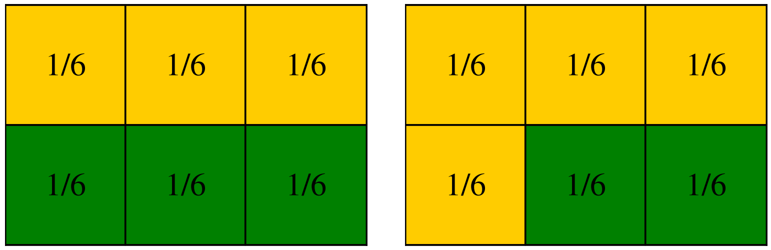
$$D = \frac{1}{2} : \frac{2}{3}$$

Um modo fácil para explicar esta divisão é tomar as duas frações com o mesmo denominador e realizar a divisão do *primeiro numerador* pelo *segundo numerador*, isto é:

$$D = \frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{3}{6} : \frac{4}{6}$$

pois 1/2 é equivalente a 3/6 e 2/3 é equivalente a 4/6. O desenho abaixo mostra as frações 1/2 e 2/3, através de suas respectivas frações equivalentes: 3/6 e 4/6.

3/6 4/6



Realizar a divisão entre dois números fracionários ou não *A* e *B*, é o mesmo que procurar saber quantas partes de *B* estão ocupadas por *A*. Quantas partes da fração 4/6 estão ocupadas pela fração 3/6?

No desenho, os numeradores das frações estão em cor amarela. Como temos 3 partes em amarelo na primeira fração e 4 partes em amarelo na segunda fração, a divisão corresponde à fração *3/4*, ou seja, em cada *4* partes amarelas, *3* estão ocupadas.

Este argumento justifica a divisão de duas frações pela multiplicação da primeira fração pelo inverso da segunda fração e observamos que de fato isto funciona neste caso:

$$D = \frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{3}{6} x \frac{6}{4} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

Na verdade, há um tratamento mais geral que o deste caso particular. A divisão de um número real a/b pelo número real c/d é, por definição, a multiplicação do número a/b pelo inverso de c/d. Acontece que o inverso de c/d é a fração d/c, assim:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} x \frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$$

4 ENSINANDO FRAÇÕES

4.1 As Frações na Escola

Sendo muito pouco usada no dia-a-dia, as frações, são esquecidas. Por esse motivo poucas pessoas sabem calcular com frações, mesmo sendo estudadas nas séries iniciais. O pouco uso das frações no cotidiano é uma das razões pelas quais as crianças têm dificuldades com as frações, diariamente não são oferecidas oportunidades para que as crianças se familiarizem com essa idéia.

Na escola é comum ouvirmos exclamação do tipo "nesse exercício tem frações" quando usada em algumas atividades. Essa é uma constatação que desanima um número grande de alunos de 1º grau e até mesmo do 2º grau.

Como dividir $\frac{1}{2}$ por $\frac{3}{2}$?

Qual é o maior: $\frac{3}{5}$ ou $\frac{5}{6}$?

Entre quais números naturais está $\frac{7}{3}$?

Tantas dúvidas e dificuldades encontradas pelos alunos talvez se devam ao fato de o conceito de número racional não ser de fácil compreensão para a criança. A maneira pela qual é iniciado o trabalho com os números racionais, costuma-se introduzir "idéia de fração" associada a noção de pedaço, depois se depara com uma fração do tipo $\frac{8}{3}$, que contém dois inteiros, que representa algo maior que um pedaço.

Além disso, são apresentadas várias regras para operar com frações. A criança não tem um verdadeiro aprendizado, ela não compreende o que está fazendo e apenas se repete os procedimentos ensinados pelo professor de maneira mecânica.

O resultado disso são conceitos mal formados e esquecimento das regras que lhes foram ensinadas. Assim, é necessário que haja a compreensão de número racional para que os alunos não encontrem maiores dificuldades.

Durante o desenvolvimento de todo o trabalho deve haver grande participação por parte dos alunos, tendo em vista que a metodologia utilizada de forma dinâmica, com situações significativas, despertando o interesse de todos, uma vez que trabalhado com material concreto passa a ser algo real para a aprendizagem.

4.2 Trabalhando o Conceito de Frações

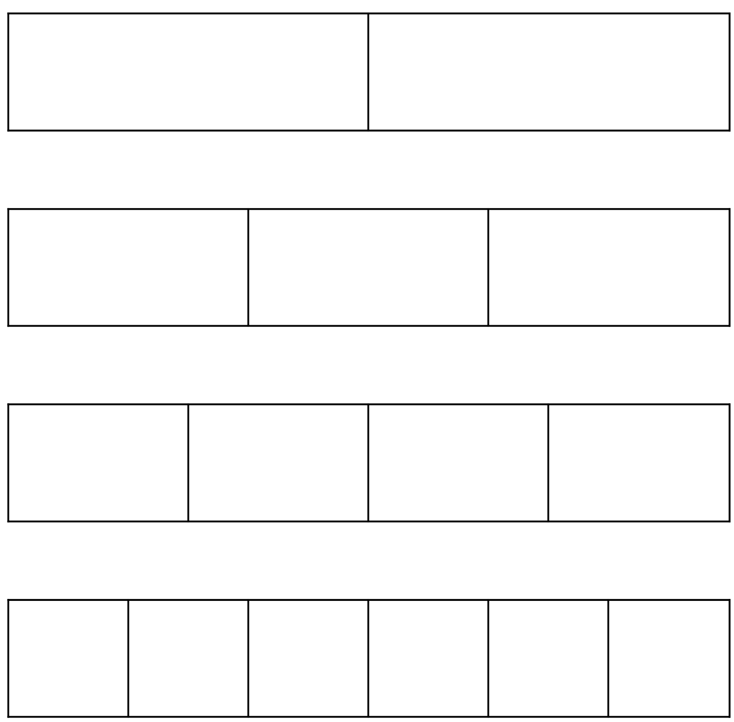
A noção de frações será desenvolvida inicialmente sem o uso da simbologia. As atividades desenvolvidas apenas com palavras (meio, terços, quartos, sextos, dois terços, etc).

O professor deverá aproveitar várias situações para trabalhar o conceito de frações. Assim, no ensino de frações, mais do que conveniente, é necessário começar o trabalho usando unidades concretas, como círculos, retângulos de cartolina, tiras de papel, e suas partes.

Com unidades de cartolina ou tiras de papel trabalhar com os alunos situações como:

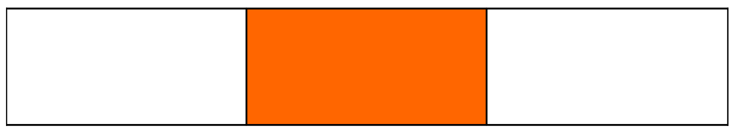
a) Entregar aos alunos unidades de cartolina:

b) Pedir para dividir a unidade em meios, terços, sextos, sextos. Apresentar oralmente o nome das frações (um meio, um terço, um quarto, etc).

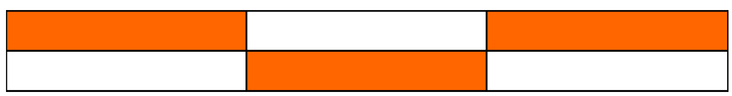


Comentar com os alunos que foram inventados nomes e números para representar as frações (partes de um inteiro). Passar a usar uma parte numérica e outra escrita:

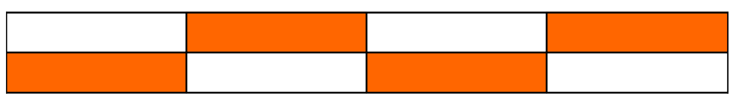
1 meio



1 terço



3 sextos



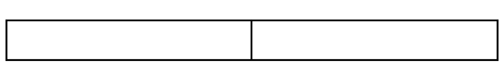
4 oitavos

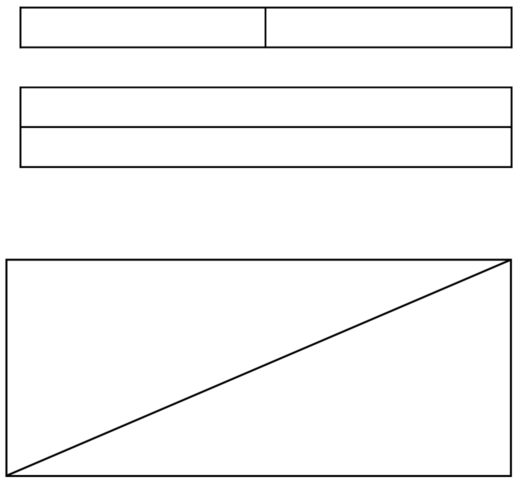
Trabalhar situações problemas a serem vivenciadas e discutidas pelas crianças que envolvam adição, divisão, subtração, comparação, atividades orais, como:

a) Dividir 10 laranjas para 4 colegas

cada colega recebeu: 2 inteiros e um meio.

b) Pegarmos folhas sulfites e dividir um meio em formas diferentes



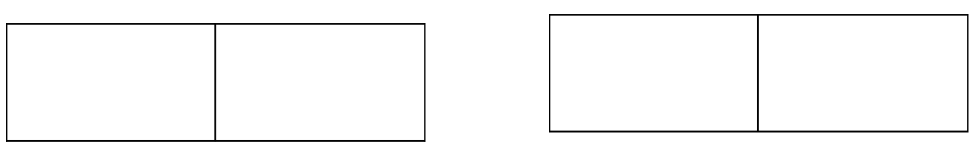


c) Dividir duas folhas de papel entre quatro crianças.

Solução: Cada uma das folhas é dividida ao meio e as quatro metades obtidas são entregues uma a cada criança. Cada criança recebeu que termo da fração?

Representação:

$$2\,4\,4 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



d) você pretende ganhar:

- Um meio ou um quarto de chocolate?
- Um quarto ou três quartos de um bolo?
- Dois quintos ou quatro quintos de uma torta?

e) Se dividirmos uma folha em cinco partes e jogar no lixo 2 quintos, quanto sobra?

f) Tenho duas folhas divididas em quatro partes cada uma

Se eu pegar de uma folha e depois uma parte da outra folha:

- Com quantas partes ficares?
- Como chamo cada parte?
- Como chamo três partes?
- Quanto dá dois quartos mais um quarto?

Os antigos matemáticos quando começaram a expressar os números inteiros, por algarismos, passaram a usar estes símbolos: um meio, um terço, um quarto.

Passaram a escrever 1 meio, 1 terço, 1 quarto. Para eles, somente a quantidade de partes era número por isso chamaram de denominador, enquanto que as palavras meio, terço, quarto, etc. dominavam a natureza das partes por isso, era denominador de fração.

Construindo conceitos, respeitando o desenvolvimento da criança trabalhando com cuidado a compreensão das idéias matemáticas o professor ajuda o aluno a chegar mais longe. Trabalhar com as atividades concretas é, portanto, um tempo bem aproveitado.

É importante que as crianças:

- Tenham liberdade para errar;
- Possam inventar e discutir regras e até mesmo mudar;
- Possam falar o que estão pensando.

Só quando o conceito é atingido através das atividades orais, escritas e concretas, é que convém passar para a fase simbólica, usando sempre os recursos concretos.

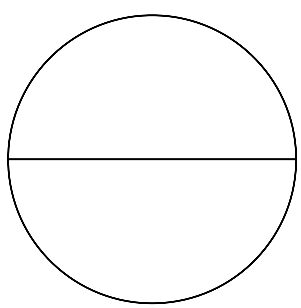
4.3 Apresentação de Simbologia

A simbologia deverá ser apresentada devagar. Primeiro introduz-se o traço da fração com o número de baixo (denominador) como sendo representação simbólica (com números) com a ação de indicar em quantas partes iguais o inteiro foi dividido. Depois de bem exercitada a etapa anterior, completa-se a representação, colocando-se acima do traço o número de partes (numerador) a serem consideradas. Podemos trabalhar atividades como:

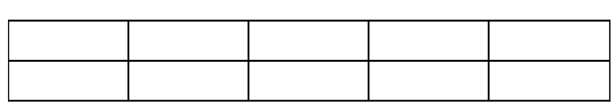
1ª Atividade:

Trabalhar com a introdução da primeira parte da representação simbólica (número de baixo – denominador).

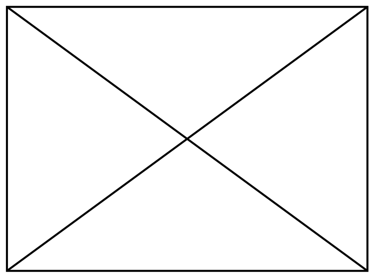
- Dividir os alunos e equipes e entregar a cada equipe carias figuras (círculos, retângulos, quadrados, etc.) de cartolina e juntos fazem as divisões das figuras e suas anotações.



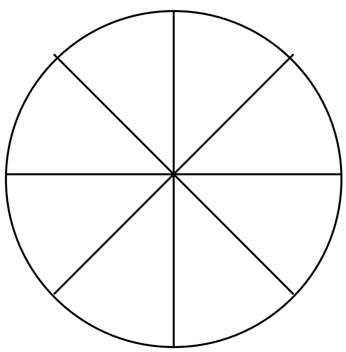
meio = $\frac{\quad}{2}$



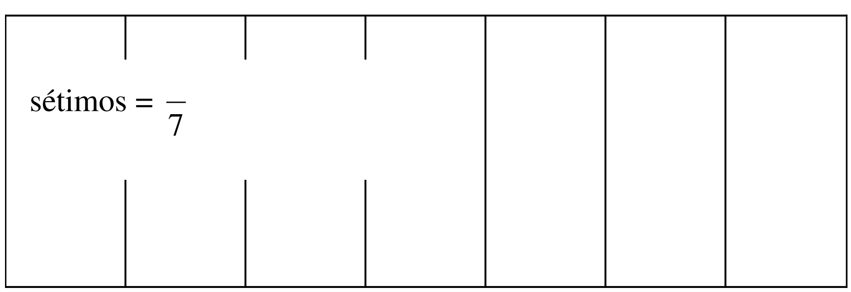
décimos = $\frac{\quad}{10}$



quartos = $\frac{\quad}{4}$



oitavos = $\frac{\quad}{8}$

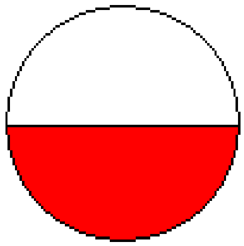


sétimos = $\frac{\quad}{7}$

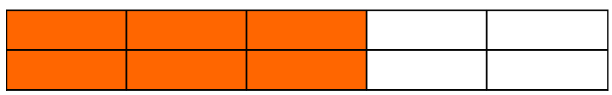
2ª Atividade:

Completar a representação simbólica, introduzindo a segunda parte (numerador).

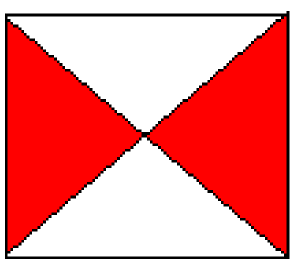
Pode ser trabalhado com o mesmo material e das partes divididas, cada equipe pinta quantas partes quiserem e completa as anotações:



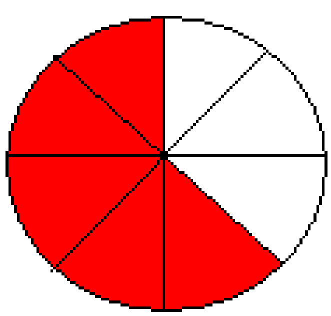
um meio = $\frac{1}{2}$



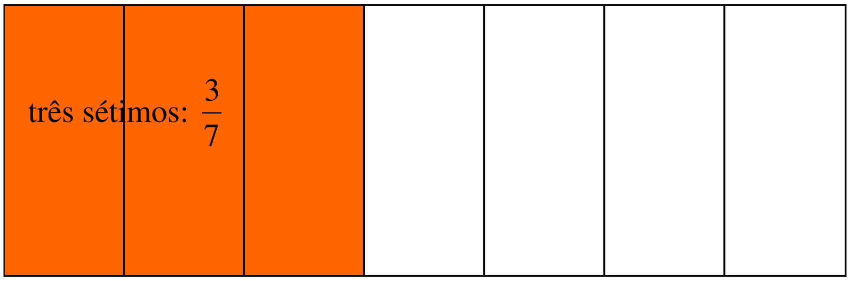
seis décimos: $\frac{6}{10}$



dois quartos: $\frac{2}{4}$



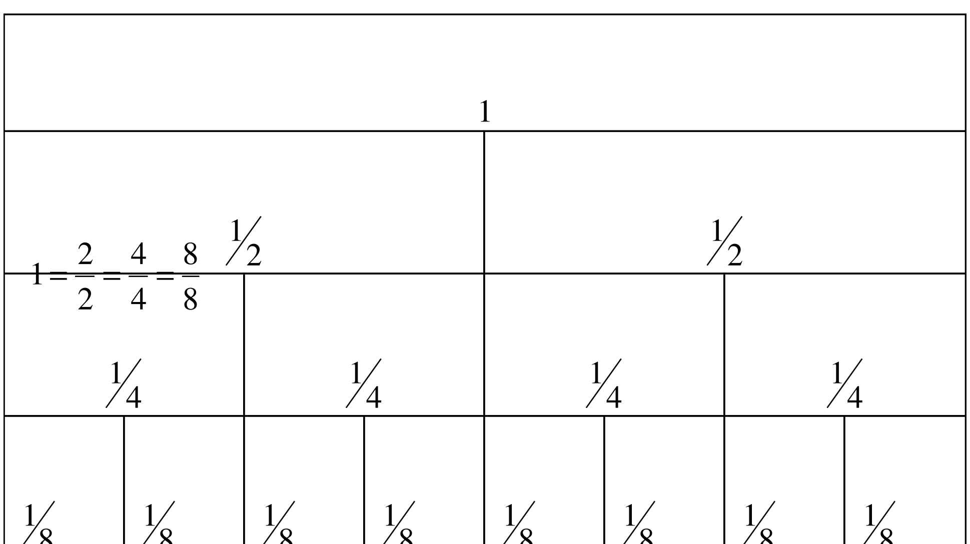
cinco oitavos: $\frac{5}{8}$

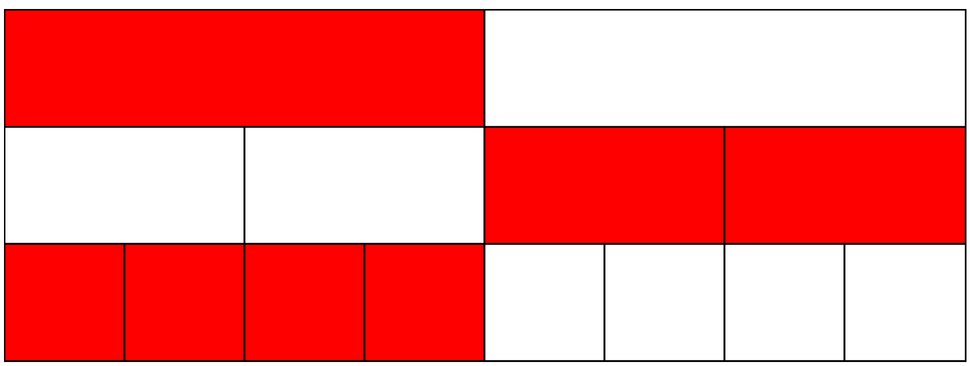


Pode-se ainda pedir aos alunos para observar o uso de frações nas situações comuns do dia-a-dia, usada mesmo sem perceber. Por exemplo, cinco e meia significa 5 horas e trinta minutos, porque no caso “meia” quer dizer “$\frac{1}{2}$” hora. Algumas pessoas utilizam as frações em suas profissões.

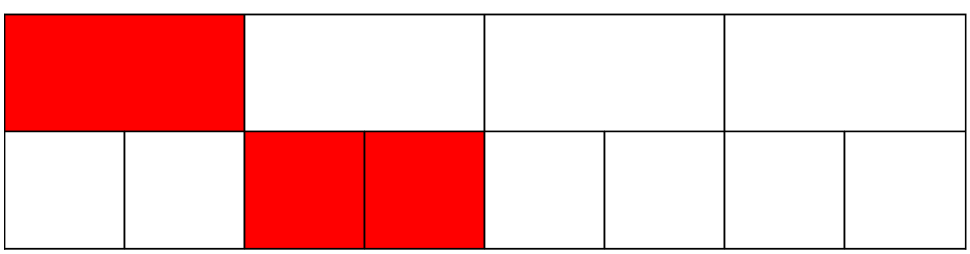
4.4 Trabalhando as Operações com Frações

a) Equivalência: Introdução através de exercícios com utilização de material concreto (jogos com tiras de papel).





$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$$



$$\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$$

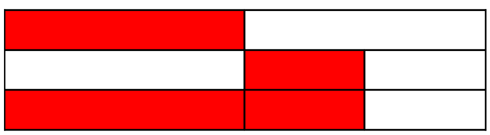
b) Adição de Frações: Iniciar com adição de frações com denominadores iguais e depois com denominadores iguais e depois com denominadores diferentes. Devem ser propostos exercícios que o aluno resolva com material concreto.

Sugestões:

1- Somar $\frac{1}{4}$ mais $\frac{2}{4}$

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{1+2}{4}=\frac{3}{4}$$

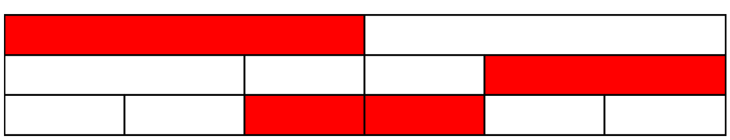
2- Somar $\frac{1}{2}$ mais $\frac{1}{4}$



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Regra: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2+1}{4}=\frac{3}{4}$

3- Somar $\frac{1}{2}$ mais $\frac{1}{3}$



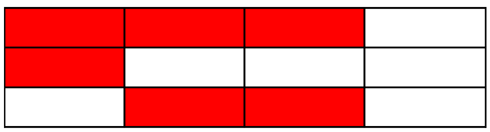
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

Regra: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$

c) Subtração de frações: Trabalhar da mesma maneira que a adição.

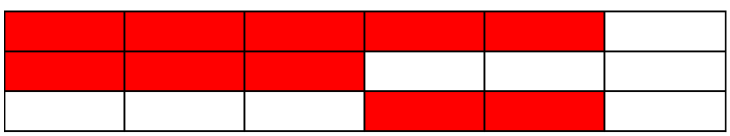
Sugestões:

1- Subtrair $\frac{3}{4}$ menos $\frac{1}{4}$



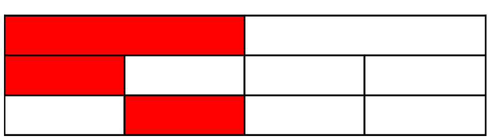
$$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3-1}{4}=\frac{2}{4}$$

2- Subtrair $\frac{5}{6}$ menos $\frac{3}{6}$



$$\frac{5}{6}-\frac{3}{6}=\frac{5-3}{6}=\frac{2}{6}$$

3- Subtrair $\frac{1}{2}$ menos $\frac{1}{4}$



$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

Regra: $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2-1}{4}=\frac{1}{4}$

c) Multiplicação de frações: na multiplicação vamos levar o aluno a associar "de" com vezes (multiplicação) e cálculo de fração de fração.

Sugestões:

1- Determinar $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{5}$

- Destaque $\frac{3}{5}$ numa tira de papel

- Obtenha agora, $\frac{1}{2}$ destes $\frac{3}{5}$

- Verifique a parte de $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$ equivale

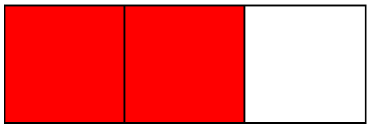
- O inteiro ficou dividido em 10 partes iguais, das quais nós destacamos 3, ou seja, $\frac{3}{10}$

- Isto é, $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{5}$ são $\frac{3}{10}$

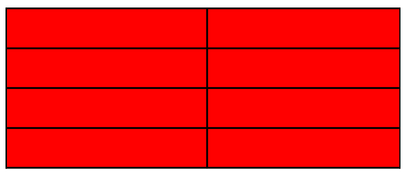
Regra: $\frac{1}{2}.\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

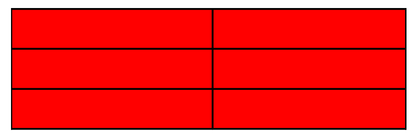
2- Encontrar $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$

- Destaque $\frac{2}{3}$



- A seguir, a porção corresponde a $\frac{2}{3}$, deve ser dividida em quatro partes e tomadas três.





- O inteiro ficou dividido em 12 partes iguais, das quais destacamos 6, ou seja, $\frac{6}{12}$.

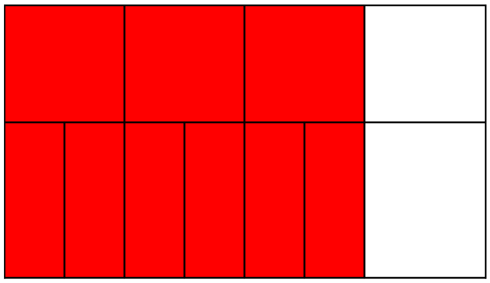
Regra: $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{6}{12}$

d) Divisão de Frações: Idéia repartitiva (quantas vezes o divisor cabe no dividendo).

Sugestões de Atividades:

1- Determinar $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$?

"Quantas vezes $\frac{1}{2}$ cabe, em $\frac{3}{4}$?"

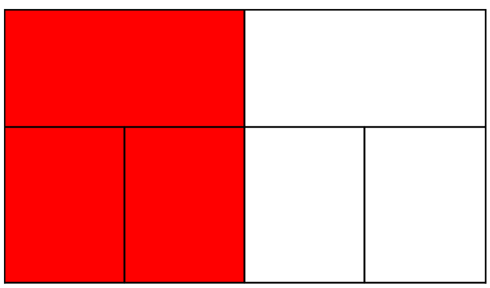


$$\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=\frac{6}{4}$$

Regra: $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=\frac{3}{4}x\frac{2}{1}=\frac{6}{4}$

2- Determinar $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$?

"Quantas vezes $\frac{1}{4}$ cabe, em $\frac{1}{2}$?"



$$\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=2$$

$\frac{1}{4}$ $\left.\frac{1}{4}\right\}$ 2 vezes

Regra: $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.\frac{4}{1}=\frac{4}{2}=2$

f) Problema:

Sugestão: Problema da herança

Um pai deixou 35 camelos para os seus 3 filhos. Para o primeiro a metade, para o segundo a terça parte e ao terceiro a nona parte. Quantos camelos cada filho recebeu?

Metade de 35 é 17,5 não é possível?

A terça parte de 35 é $11\frac{2}{3}$ não é possível?

A nona parte de 35 é $3\frac{8}{9}$ não é possível?

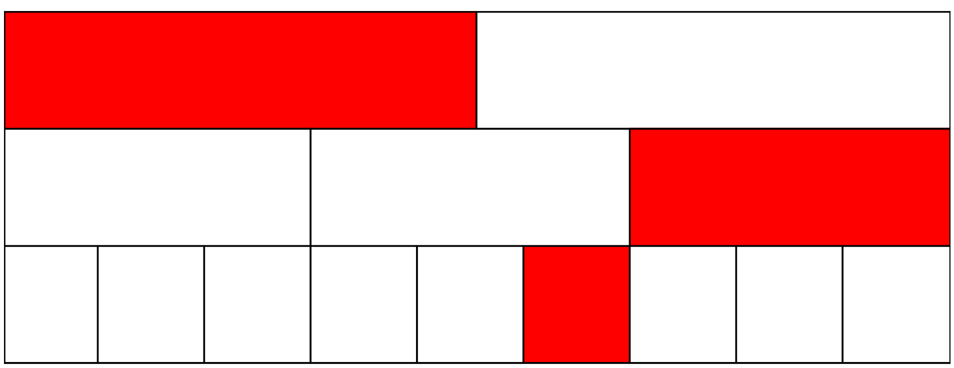
Um matemático deu um camelo para que pudesse fazer a partilha ficando:

- 1º filho com metade de 36 = 18
- 2º filho com terça parte de 36 = 12
- 3º filho com a nona parte de 36 = 4

Total: 34

O matemático recuperou o seu camelo e ainda lucrou um.

Solução:

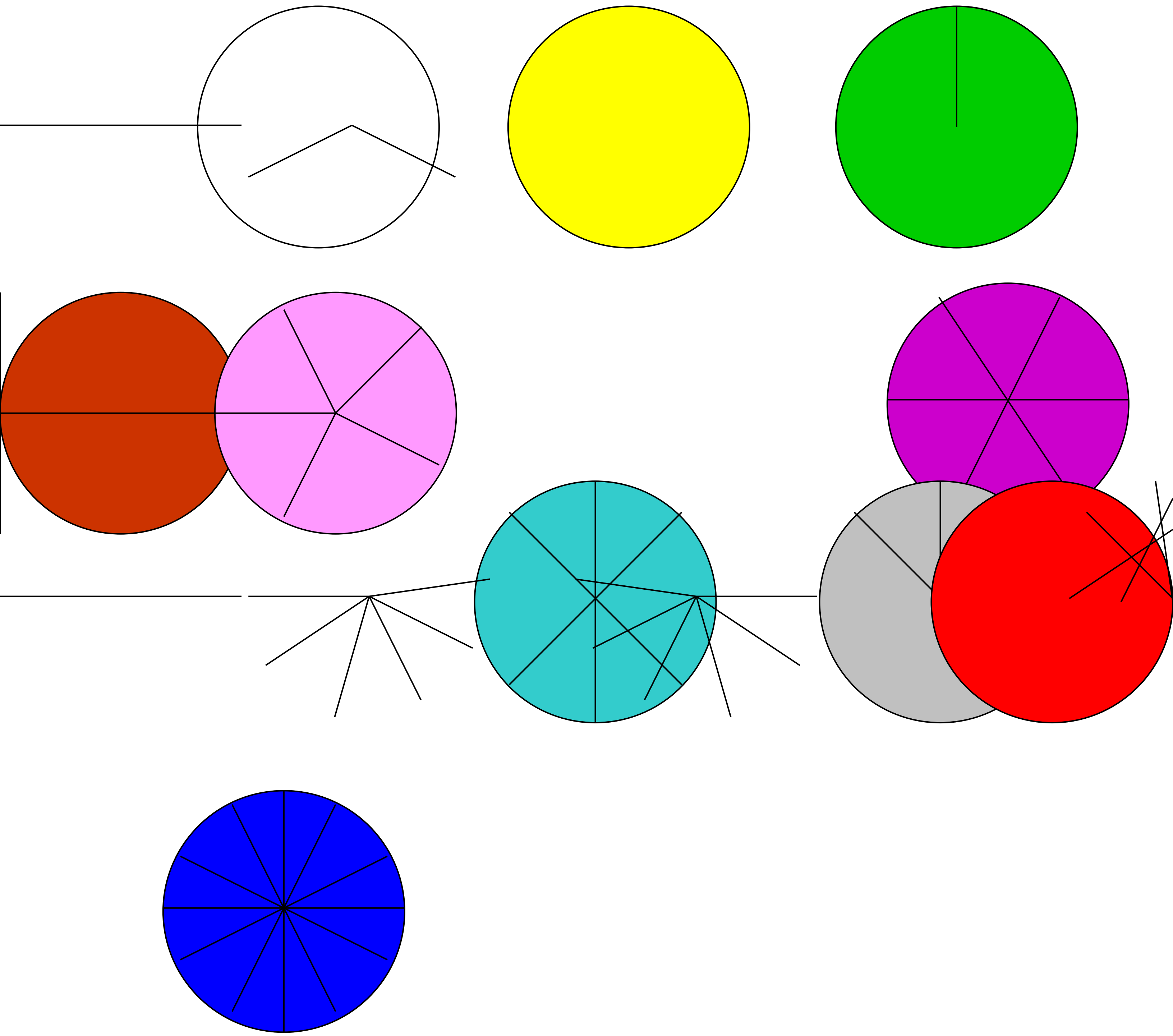


O pai deixou apenas $\frac{17}{18}$ de herança não o total.

4.5 Sugestões de Atividades

As atividades sugeridas abaixo são para melhor trabalhar o "ensino das frações", visando uma compreensão mais ampla onde conseqüentemente os resultados são mais satisfatórios.

1- Jogos de discos de cartolina ou papel cartão, feitos em cores diferentes e divididos em partes iguais, a saber:



a) 1ª Atividade

- Juntar peças da mesma cor, formando um disco.
- Verificar quantas peças compõem cada disco.
- Escrever, em cada disco, que fração do inteiro corresponde.
- Representa o inteiro por meio de diferentes escritas.

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

etc.

b) 2ª Atividade

- Tomar uma das duas peças amarelas.
- Juntando peças de mesma cor, quando é possível recobri-la, registrar os resultados.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8}$$

etc.

Concluir que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$, etc.

c) 3ª Atividade

- Tomar uma das três peças verde-claras. Realizar o mesmo que foi feito na atividade anterior.

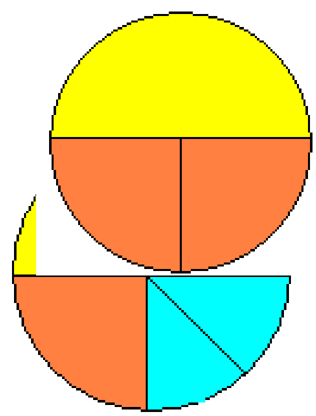
Concluir que $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{12}$, etc.

d) 4ª Atividade

- Mostrar disco usando peças diferentes (repetidas ou não) e realizar algumas soluções possíveis:

$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$



2- Bingo: Confeccionar cartelas diferentes e jogar com os alunos.

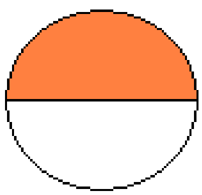
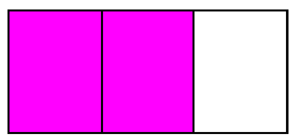
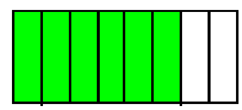
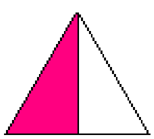
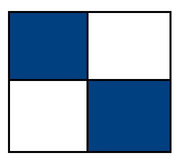
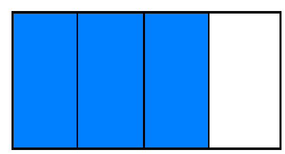
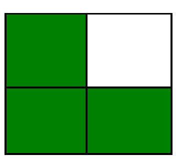
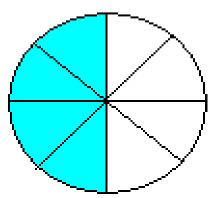
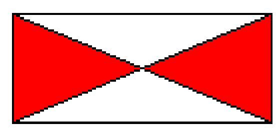
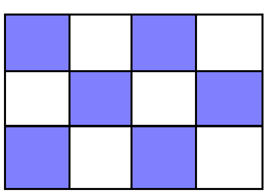
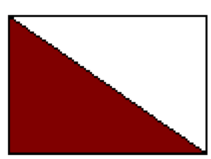
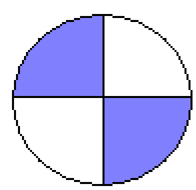
Sugestões de Cartelas:

a)

$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{2}{5}$

$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{4}$
$\frac{5}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{4}$

b)

5 CONCLUSÃO

Devido à necessidade e importância do ensino das frações no ensino fundamental, este trabalho através de um estudo bibliográfico sobre o ensino das frações, buscou abordar uma proposta metodológica de ensino que possibilite um aprendizado mais satisfatório, onde as dificuldades em compreender as frações sejam amenizadas.

O estudo das frações é de grande importância, pois é um dos conteúdos essenciais no processo de aprendizagem do ensino fundamental. Pode-se dizer que isso ocorre devido ao fato das frações estar ligada ao dia-a-dia das pessoas, ao se fazer a mais simples das receitas culinárias, encontra-se medidas em forma de fração, não esquecendo as operações com frações que também são importantes neste simples ato, pois ao dobrar uma receita ou se fazer metade da medida se vê a aplicação desse conteúdo.

Ás vezes pode-se se estranhar como um conteúdo que está intimamente ligado como o cotidiano cause tantas dificuldades em sua aprendizagem. Esse fato foi uma das causas consideradas para a elaboração deste trabalhou, onde buscou-se a exploração desse assunto simples e tão importante que com uma boa didática e boa vontade pode ser explicado de forma que seja possível sua compreensão. Embora seja um conteúdo corriqueiro comum, algumas crianças não conseguem assimilar as fórmulas, regras e muito menos sua importância, o que embora pareça insignificante pode repercutir a longo prazo na vida dessas crianças que poderão sofrer conseqüências nas séries vindouras.

Delineia-se, então, a grande responsabilidade da escola. Afinal ela é a ponte primeira pela qual o aluno, penetra o edifício do sistema educacional. “Alunos e professores devem ter argumentos para respaldar os caminhos da matemática, esse exercício é fundamental para formar cidadãos que saibam questionar fatos, determinações, deveres e que saibam argumentar sobre seus direitos”. (MONTEIRO, 2003, p. 3)

Reconhece-se que este trabalho não está totalmente completo e que existem muitas atividades realizadas que são utilizados os conceitos de frações, entretanto buscou-se abordar esse conteúdo como uma prova de que existem maneiras de ensinar que possibilite e facilite o ensino, oportunizando momentos únicos em que os alunos tenham participação efetiva na construção de seu próprio conteúdo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASIMOV, I. **No mundo dos Números**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1993.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza Gomide. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

DIENES, Z. P. **Frações**. Trad. Maria Charlier e René Charlier. São Paulo: Herder, 1971.

IMENES & LELLIS. **Matemática**. 1ª Ed. São Paulo: Scipione.

IMENES, L.; JAKUBOVIC, J.; CESTARI, M. **Frações e Números Decimais**. 5ª ed. São Paulo: Atual, 1993.

NETTO, S. **Matemática: Conceitos e Histórias**. São Paulo: Scipione, 1991.

RAMOS, L. **Frações sem Mistérios**. 7ª ed. São Paulo: Ática, 1991.

<http://pessoal.sercomtel.com.br>. Acesso em 17/08/2006

<http://www.matematicahoje.com.br>. Acesso em 14/08/2006