CENTRO UNIVERSITÁRIO DE LAVRAS

FRACTAIS: UMA NOVA VISÃO DA MATEMÁTICA

JAQUELINE APARECIDA FERNANDES

UNILAVRAS
LAVRAS – MG
2007

JAQUELINE APARECIDA FERNANDES

FRACTAIS: UMA NOVA VISÃO DA MATEMÁTICA

Monografia apresentada ao Centro Universitário de Lavras, como parte das exigências do curso de graduação em Matemática.

ORIENTADOR
Prof. Reginaldo Barbosa Fernandes

CO-ORIENTADORA
Prof ª. Valéria Andrade Villela

UNILAVRAS
LAVRAS – MG
2007

JAQUELINE APARECIDA FERNANDES

FRACTAIS: UMA NOVA VISÃO DA MATEMÁTICA

Monografia apresentada ao Centro Universitário de Lavras, como parte das exigências do curso de graduação em Matemática.

APROVADA EM 17 DE SETEMBRO DE 2007

Prof. Reginaldo Barbosa Fernandes - CEFET - Bambuí

Prof ª. Valéria Andrade Villela - UNILAVRAS

Prof. Sebastião Donizete Rossi - UNILAVRAS

ORIENTADOR
Prof. Reginaldo Barbosa Fernandes

CO-ORIENTADORA
Prof ª. Valéria Andrade Villela

UNILAVRAS
LAVRAS – MG
2007

A Deus e à Nossa Senhora
Aparecida
OFEREÇO
Aos meus familiares
DEDICO

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que me apoiaram e colaboraram para que a realização deste trabalho fosse possível.

Primeiramente agradeço a Deus e à Nossa Senhora Aparecida por permitirem que eu esteja aqui hoje e por me darem toda a força necessária para que este trabalho fosse realizado e meu curso fosse concluído .

Agradeço aos meus pais Sãozinha e Tião Salgado pelo apoio, exemplo e incentivo que sempre deram.

Agradeço também aos meus irmãos Ronaldo, pelas caronas nos dias de atraso e Reginaldo por me ajudar em algumas matérias e pelo empréstimo do computador.

Agradeço ao meu namorado João Levi pelo amor, paciência, incentivo e por me apoiar nos meus dias de mau humor.

Agradeço a todos os meus familiares que acreditaram em mim e no meu sucesso.

Agradeço a todos os meus colegas que estiveram comigo durante esta caminhada.

Agradeço também ao meu orientador e irmão professor Reginaldo, pelo tempo e atenção, a minha co-orientadora e professora de TCC Valéria, pela dedicação e apoio e a professora de física Lílian que despertou o meu interesse pelo tema e me ajudou bastante com o projeto, e finalmente obrigada a todos os professores que tive durante o curso pelos ensinamentos que muito me ajudaram.

"A Geometria dos Fractais não é apenas um capítulo da Matemática, mas também uma forma de ajudar os Homens a verem o mesmo velho Mundo diferentemente".

Bernoit Mandelbrot

(1924)

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

RESUMO

FERNANDES, J. A. **Fractais: Uma nova visão da Matemática.** 2007. 45f. Monografia (Graduação em Matemática)* - Centro Universitário de Lavras - UNILAVRAS, Lavras.

Até algum tempo atrás o mundo era visto de uma maneira Euclidiana, regular, até que os Fractais começaram a ser estudados e passaram a ter valor científico. Assim sendo o presente trabalho teve como objetivo fazer um estudo sobre os fractais, sua Geometria e algumas de suas aplicações, citando a importância de trabalhar com tais nas salas de aula de ensino fundamental e médio. Para a realização deste trabalho foi feito um levantamento bibliográfico sobre o assunto. Desta forma, o fractal como foi citado e demonstrado, mantem sua estrutura quando ampliado, ja a dimensão é fracionária, existindo também fractais que preenchem o plano, como a curva de Peano. Concluiu-se com este, que os fractais e sua geometria são de fato um ramo da Matemática com grande atuação e importância, principalmente na Biologia e Medicina, além de alimentar a imaginação dos artistas que abusam de suas formas e agir como incentivador para o estudo de alguns tópicos de geometria, atraindo assim a curiosidade e interesse dos alunos quando apresentados em sala de aula, promovendo também a interdisciplinaridade entre Matemática e Biologia.

Palavras-chave: Fractal. Geometria. Bernoit Mandelbrot

---

* Comitê Orientador: Prof. Reginaldo Barbosa Fernandes – CEFET - Bambuí (Orientador), Prof ª. Valéria Andrade Villela – UNILAVRAS (Co-orientadora)

ABSTRACT

FERNANDES, J. A. **Fractals: A new Mathematics view.** 2007. 45f. Monography (Graduation in Mathematics)* - University Center of Lavras - UNILAVRAS, Lavras.

Till some time ago the world was seen in Euclides's manner, regular, untill the fractals started to be studied and they became to have a scientific value. And so, the present work had the aim of studying about fractals, their Geometry and some of their uses, citing the importance and applications of working with them in the classrooms of fundamental and medium teaching. To fulfill this work a bibliographier survey was done. That way, the fractals that was cited and demonstrated, they keep their structure when amplified, but their dimension is fractional, there also are some fractals that fill a plane, as the curve of Peano. The conclusion from this work is that fractals, and their Geometry are, in fact, a branch of Mathematics with a big actuation and importance, mainly on Biology and Medicine, beyond feeding the artists imagination that go too far in their forms, and so, act as a stimulater to the study of some topics on geometry, attracting the curiosity and interest of the pupils when shown in classroom, promoting also the interdisciplinarity between Mathematics and Biology.

Key-words: Fractals. Geometry. Bernoit Mandelbrot

---

* Orienting committee: Teacher Reginaldo Barbosa Fernandes – CEFET – Bambuí (Advisor), Teacher Valéria Andrade Villela – UNILAVRAS (Co-advisor)

1 INTRODUÇÃO

Durante séculos, os objetos e conceitos da geometria Euclidiana foram considerados como os que melhor descreviam o mundo em que vivemos. Euclides (325 - 265 a. C.) desenvolveu vários estudos sobre as formas de objetos planos, mas objetos complexos como uma árvore, por exemplo, não tinham definição de forma e dimensão. Na tentativa de descrever alguns objetos complexos como este foi que se desenvolveu o estudo dos Fractais que nada mais são do que objetos e fenômenos da natureza que possuem formas irregulares, mas se observadas a diferentes escalas não perdem sua definição inicial, como por exemplo, as montanhas, as árvores, batimentos do coração e a couve-flor. Os fractais fazem parte da Teoria do Caos que estuda fenômenos complexos que não são possíveis de se prever.

Estes objetos e formas muito presentes na natureza não tinham valor científico até que Bernoit Mandelbrot (1924) com o auxilio de computadores desenvolveu e aperfeiçoou técnicas para o estudo e aplicação destes, que são de suma importância para o estudo de outras disciplinas.

O objetivo deste trabalho foi definir fractais, definir suas propriedades, sua origem e sua estrutura, entender sua geometria, mostrar suas aplicações na biologia, medicina, nas artes e sua interdisciplinaridade nas salas de aula do ensino fundamental e médio.

Deste modo, o estudo sobre os fractais, têm valor para a ciência, pois é muito utilizado pelos pesquisadores nas diversas áreas dentre elas à Matemática além de ser um estimulador e despertar o interesse dos alunos para o estudo de alguns conteúdos de geometria, pois eles em muitos momentos se deparam com uma forma irregular, ou algum fato caótico por isso a importância de conhecer as áreas onde estas formas são estudadas e aplicadas em outras disciplinas.

Este trabalho aborda os fractais, sua origem e algumas propriedades, mostra como são construídos alguns deles, cita alguns exemplos de aplicações, fala um pouco sobre sua geometria e a importância de trabalhá-los em sala de aula.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 Definição de fractal

“Os fractais são formas geométricas que repetem sua estrutura em escalas cada vez menores” (STEWART, 1996, p. 12).

O fractal é um objeto que não perde a sua definição formal a medida que é ampliado inúmeras vezes, mantendo a sua estrutura idêntica a original, como mostra a figura 1.

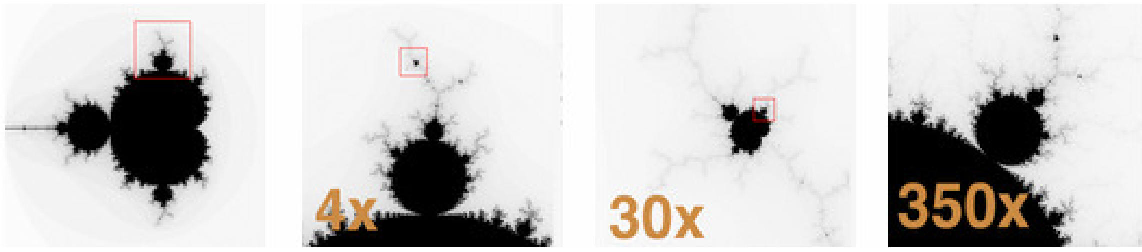


Figura 1: Imagens de um fractal ampliado
(FRACTAL, 2006)

Outra definição agora apresentada pela UFRJ (2007) é que um objeto é dito fractal se além da independencia da escala, a dimensão Hausdorff ou dimensão fractal do mesmo for diferente do que a sua dimensão topológica.

A dimensão Hausdorff deve ser diferente da dimensão topológica ou dimensão do espaço em que o fractal está inserido, isto quer dizer que ela deve ser diferente da dimensão de objetos Euclidianos como o ponto, a reta ou o plano, devem estar entre tais.

2.2 Origem

De acordo com Fractal (2006) a idéia dos fractais teve a sua origem no trabalho de alguns cientistas entre 1857 e 1913. Com este trabalho passou-se a conhecer alguns objetos, considerados como "monstros", que se supunha não terem grande valor científico. Em 1872, Karl Weierstrass (1815 – 1897) encontrou o exemplo de uma função com a propriedade de ser contínua em todo seu domínio, mas em nenhuma parte diferenciável ou seja, em nenhum ponto se podia descrever uma tangente à curva, dizemos então que esta curva não possui segmento de reta, ela é constituída por cantos. O gráfico desta função é chamado atualmente de fractal. Em 1904, Helge von Koch (1870 – 1924), não satisfeito com a definição muito abstrata e analítica de Weierstrass, deu uma definição mais geométrica de uma função similar, atualmente conhecida como koch snowflake (ou floco de neve de Koch), que é o resultado de infinitas adições de triângulos ao perímetro de um triângulo inicial. Cada vez que novos triângulos são adicionados, o perímetro cresce, e fatalmente se aproxima do infinito. Dessa maneira, o fractal abrange uma área finita dentro de um perímetro infinito. Houveram também muitos outros trabalhos relacionados a estas figuras, mas esta ciência só conseguiu se desenvolver plenamente a partir da década de 60, com o auxílio da computação. Um dos pioneiros a usar esta técnica foi Bernoit Mandelbrot (1924), um matemático francês nascido na Polônia que já vinha estudando tais figuras.

Estes objetos foram inventados para mostrar que existiam objetos matemáticos interessantes, além das curvas e superfícies regulares da geometria tradicional.

Conforme a Universidade de Lisboa (2006a) os computadores com seu poder de cálculo e as representações gráficas que conseguem executar, são responsáveis por trazer de novo estes ‘monstros’, chamados fractais à vida, gerando quase instantaneamente os fractais no monitor, com as suas formas estranhas, seus desenhos artísticos ou pormenorizadas paisagens e cenários. Os fractais deram origem a um novo ramo da Matemática, muitas vezes conhecido como a geometria da natureza. As formas estranhas dos fractais descrevem alguns fenômenos naturais, como o desenvolvimento das árvores, a estrutura de sua casca, a linha de uma costa marítima, as nuvens, montanhas e outros. O termo fractal foi utilizado pela primeira vez em 1967 por Bernoit Mandelbrot considerado o pai dos fractais. Quando estava a preparar sua primeira obra importante sobre fractais para publicação em livro, Mandelbrot sentiu necessidade de encontrar um nome para a sua geometria. Começou a consultar um dicionário de latim do seu filho, onde encontrou o adjetivo fractus, do verbo frangere, que significa quebrar. Criou então a palavra fractal.

Desde o ano de l960 muitos tipos diferentes de fractais foram descobertos. Cada um tinha uma equação que gera umas séries de números complexos. Talvez a mais famosa imagem fractal é chamada 'conjunto de Mandelbrot' em honra ao seu descobridor.

2.3 Estrutura e classificação dos fractais

Os fractais podem ser classificados em três categorias principais. Estas categorias podem ser determinadas pelo modo como o fractal é formado ou gerado. São elas:

A colocação abaixo foi apresentada por Fractal (2006).

- **Sistema de funções iteradas:** Os fractais determinísticos, também conhecidos como fractais geométricos, são subconjuntos gerados por transformações geométricas simples do próprio objeto nele mesmo, possuem uma regra fixa de substituição geométrica, aplicadas a cada iteração como por exemplo, a curva de Peano, o floco de neve de Koch e a esponja de Menger, que estudaremos sua estrutura a seguir .

Assim sendo a Universidade de Lisboa (2006a) mostra que a curva de Peano apresentada em 1890 por Giuseppe Peano (1858 – 1932) é um exemplo de fractal geométrico que preenche o plano. Uma curva que preenche o plano passa por todos os pontos de uma área, acabando por ocupá-la na totalidade. O ponto de partida para a construção da curva de Peano é um segmento. Na 1ª etapa, o segmento é substituído por 9 segmentos de comprimento igual a um terço do comprimento do segmento inicial, como indica a primeira imagem da figura 2. Esses novos segmentos constituem a primeira etapa da construção da curva de Peano. Depois a processo aplica-se a cada um dos 9 segmentos, até o infinito.

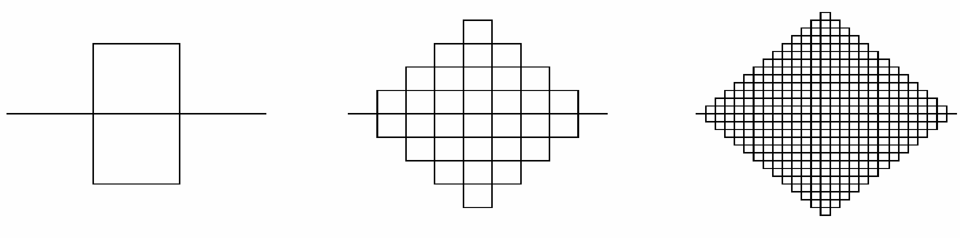


Figura 2: Construção da curva de Peano
(UNIVERSIDADE DE LISBOA, 2006a)

A curva de Peano, levando a construção anterior ao infinito, será uma superfície completamente preenchida, deduz-se que esta superfície será um losango.

Conforme Secco e Rocha (2004) o floco de neve de Koch citado anteriormente é um fractal geométrico clássico, simples de ser entendido. Partindo de um triângulo equilátero divide-se cada lado em três segmentos. Os segmentos intermediários são então substituídos por dois segmentos semelhantes que vêm a formar os lados de um triângulo eqüilátero menor. Isto resulta numa figura na forma de uma estrela com 12 lados (6 pontas). Realizando o mesmo processo em cada um dos 12 lados e assim sucessivamente obtém-se uma figura em evolução constante que lembra um floco de neve. O comprimento total do contorno da figura é a soma de todos os lados que se multiplicam à medida que se realizam novas divisões. Após infinitas divisões, seu comprimento será também infinito. No entanto a sua área será sempre menor do que a área de um círculo em torno do triângulo original.

Com isso, uma linha infinitamente longa rodeia uma área finita.

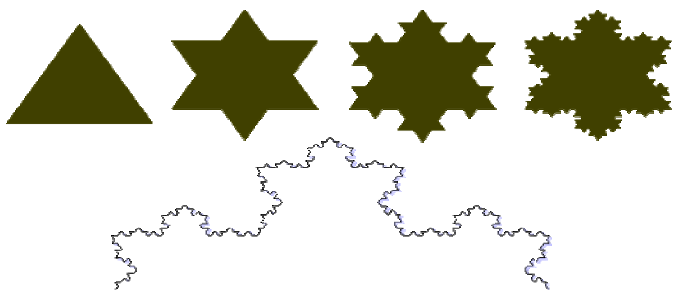


Figura 3: Construção do floco de neve de Koch
(UNIVERSIDADE DE LISBOA, 2006a)

A esponja de Menger, cujo nome faz referência ao matemático que a inventou, o austríaco Karl Menger (1902-1985) é um dos fractais mais curiosos.

De acordo com Machado Neto (2004) podemos obter a esponja de Menger a partir de um cubo, dividindo-o em 27 cubinhos de arestas com $\frac{1}{3}$ do tamanho da aresta original , removendo a peça central e cada um dos seis cubos centrais de cada face, ou seja 7 dos 27 cubinhos são removidos. A partir desse estágio repete-se o processo com os 20 cubinhos restantes e assim por diante infinitas vezes.

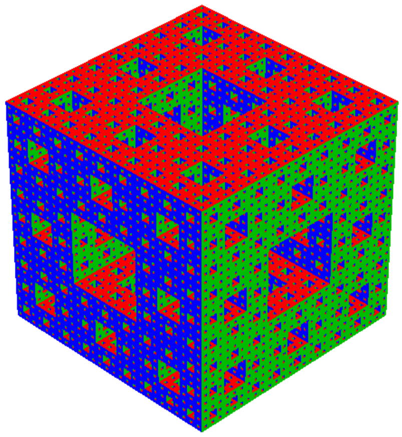


Figura 4:Esponja de Menger, terceiro estágio.
(UFRJ, 2007)

Conforme Machado Neto (2004) o curioso na Esponja de Menger é que a cada estágio perde-se volume com a retirada de cubos e ganha-se área, pois vão aparecendo cada vez mais túneis. Façamos algumas contas para demonstrar, consideramos um cubo inicial de aresta a.

Após o primeiro estágio, a área da esponja é de $72\left(\frac{a}{3}\right)^2 = 8a^2$; sabemos que a área total do cubo inicial é apenas $6a^2$, ou seja, a área aumentou.

O volume da esponja após o primeiro estágio, entretanto, é $20\left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{20}{27}a^3$, menor que o volume inicial do cubo, que é a^3, ou seja o volume diminui.

Desta forma a cada novo estágio a área aumenta enquanto o volume diminui cada vez mais.

Quando o número de estágios tende ao infinito, a área tende ao infinito e o volume tende a zero, ou seja a esponja de Menger é um objeto geométrico que tem volume zero e área infinita

Conforme Fractal (2006) mostraremos agora outra categoria de geração de fractais.

- **Fractais gerados por computadores:** Também são chamados de fractais de fuga, um exemplo desse tipo é o conjunto de Mandelbrot, um dos fractais mais conhecidos, uma figura tão complexa que seria impossível conhecê-la ao longo de uma vida inteira.

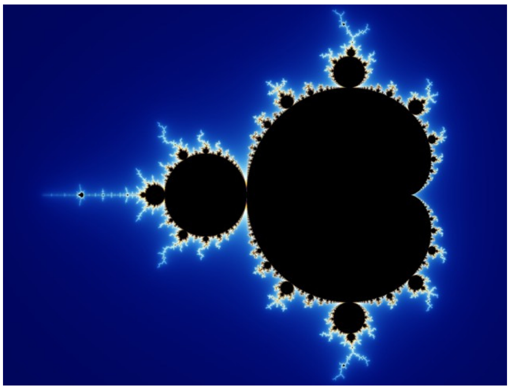


Figura 5: Conjunto de Mandelbrot
(UNIVERSIDADE DE LISBOA, 2006a)

Imagens fractais como a figura acima, são gráficos de funções matemáticas definidoras de conjuntos. Costumam operar com números imaginários e números complexos, mas tal categoria não será muito abordada neste trabalho.

Ainda Fractal (2006) apresenta a terceira categoria de geração de fractais.

• **Fractais aleatórios:** São também chamados de fractais naturais, quando o todo é estatisticamente semelhante a uma ampliação de uma parte dizemos que o fractal é aleatório. Um exemplo desse tipo é o relâmpago.

Figura 6: Relâmpagos.
(UNIVERSIDADE DE LISBOA, 2007a)

Os Fractais podem também ser classificados de acordo com sua auto-similaridade. Existem três tipos de auto-similaridade:

Fractal (2006) apresenta os seguintes tipos de auto-similaridade nos fractais.

•**Auto-similaridade exata:** É a forma em que a auto-similaridade é mais marcante, evidente, o fractal é idêntico em diferentes escalas. Fractais gerados por sistemas de funções iterativas geralmente apresentam auto-similaridade exata.

•**Quase auto-similaridade:** É uma forma mais solta de auto-similaridade. O fractal apresenta ser aproximadamente, mas não exatamente idêntico em escalas diferentes. Fractais gerados por computadores são geralmente quase auto-similares, mas não exatamente auto-similares.

•**Auto-similaridade estatística:** É a forma menos evidente de auto-similaridade. O fractal possui medidas numéricas ou estatísticas que são preservadas em diferentes escalas. As definições de fractais geralmente implicam em alguma forma de auto-similaridade estatística. Fractais aleatórios são exemplos de fractais que possuem auto-similaridade estatística, mas não são exatamente, nem quase auto-similares.

Mas nem todos os objetos auto-similares são fractais. Uma linha Euclidiana, por exemplo, é exatamente auto-similar, mas o argumento de que objetos Euclidianos são fractais é defendido por poucos.

2.4 Propriedades

A Universidade de Lisboa (2006b) mostra que se observarmos as formas geométricas tradicionais podemos perceber que elas perdem sua estrutura quando são ampliadas ou diminuídas. Um círculo numa escala muito maior não é nada mais do que uma reta, pois se ampliarmos e analizarmos uma parte dele não seria possível identificar sua curvatura apesar dela existir. Por outro lado a maior parte dos objetos que lidamos no nosso dia-a-dia não são esferas, nem quadrados, nem cones. Por exemplo um tronco de árvore é rugoso e irregular. Se pegarmos um pedaço desse tronco e observarmos no microscópio, poderemos ver novas irregularidades que não haviam sido observadas são bastante semelhantes a imagem anterior. É esta irregularidade regular que caracteriza um fractal.

As principais propriedades que caracterizam os fractais, de acordo com a Universidade de Lisboa (2006a) são:

- **Auto-semelhança:** É a simetria através das escalas. Consiste em cada pequena parte do fractal poder ser vista como uma réplica de todo o fractal numa escala menor. Essa propriedade pode ser vista, por exemplo, na couve-flor.

Figura 7: Couve-flor.
(BARRETO, 2001)

●**Complexidade infinita:** Existe, pelo fato de o processo gerador dos fractais ser recursivo, tendo um número infinito de iterações, ou seja, repetir uma fórmula inúmeras vezes.

É uma propriedade dos fractais que indica que nunca conseguiremos representá-los completamente, pois a quantidade de detalhes é infinita.

●**Dimensão:** Quanto à dimensão, pode ser considerada a principal propriedade dos fractais, cada fractal tem sua dimensão, característica própria de cada objeto que tem a ver com seu grau de irregularidade, caracterizando a superfície de contato entre o objeto e o meio.

Para entendermos melhor a definição de dimensão, é necessário primeiramente entender o conceito de espaço, definido como:

$$\text{Dim (Esp)} = \text{Dim (Fig)} + 1$$

O ponto, por exemplo, é uma figura geométrica de dimensão 0. A reta, que é constituída por um conjunto de pontos é de dimensão 1, logo:

$$\text{Dim (Esp)} = \text{Dim (Fig)} + 1 = 0 + 1 = 1$$

"Ao contrario do que é observado na geometria Euclidiana, onde o valor da dimensão representa a dimensionalidade do espaço em que dado objeto está inserido, a dimensão fractal (ou dimensão dos fractais) representa o nível de irregularidade de um fractal" (BACKERS; BRUNO, 2005).

A dimensão dos fractais diferente do que acontece com a geometria Euclidiana, não é necessariamente uma quantidade inteira, é uma quantidade fracionária. A dimensão de um fractal representa o grau de ocupação deste no espaço que tem a ver com seu grau de irregularidade, a estrutura e o comportamento, quer se trate de uma figura ou de um fenômeno físico, biológico ou social, em 1919, Felix Hausdorff (1868 - 1942) estendeu esta noção de dimensão de similaridade para que ela se aplicasse a todo tipo de formas, além das formas auto-similares, por isso a dimensão fractal é chamada também de dimensão Hausdorff .

Uma curva irregular tem dimensão entre um e dois, enquanto uma superfície irregular tem dimensões entre dois e três.

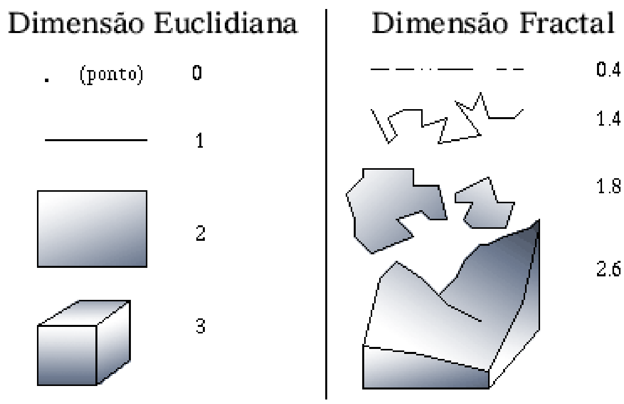


Figura 8: Comparação entre a dimensão Euclidiana e a dimensão fractal.
(SIQUEIRA, 2005)

Conforme Backers e Bruno (2005) a dimensão fractal de objetos geométricos pode ser calculada usando a fórmula $D = \dfrac{\log N}{\log\left(\dfrac{1}{L}\right)}$, onde N é o número de segmentos que substituíram o segmento original, e L é o tamanho do segmento substituído.

Portanto a dimensão da curva de Koch, que é um lado do floco de neve de Koch é igual a $D = \dfrac{\log 4}{\log 3}$ que é 1,26 aproximadamente, pois o segmento original da curva foi substituído por 4 segmentos de tamanho $\frac{1}{3}$ deste, como L=$\frac{1}{3}$, logo $\dfrac{1}{\frac{1}{3}}$ = 3

Figura 9: 1° passo para a construção da curva de Koch

Para calcular a dimensão da curva de Peano, utilizando o método citado anteriormente, tomamos como ponto de partida um segmento inicial, este segmento será substituído por 9 segmentos de tamanho $\frac{1}{3}$ do segmento original, obtendo assim $D = \frac{\log 9}{\log 3}$ que é 2, lembrando que este fractal quando o número de iterações tende ao infinito, tende a preencher o plano totalmente.

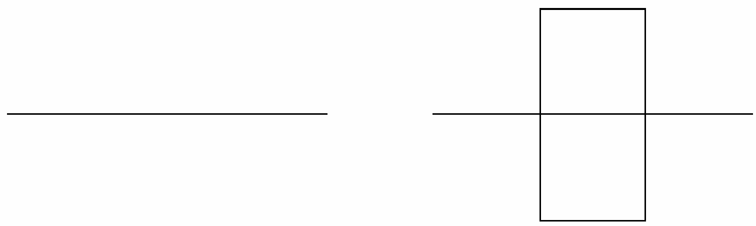


Figura 10: 1° passo para a construção da curva de Peano

Podemos utilizar este mesmo processo para calcular a dimensão da esponja de Menger, no primeiro estágio da construção da esponja 7 dos 27 cubinhos são retirados, portanto restam 20 cubos cujas arestas medem $\frac{1}{3}$ da aresta original, portanto $D = \frac{\log 20}{\log 3}$ que é 2,72 aproximadamente.

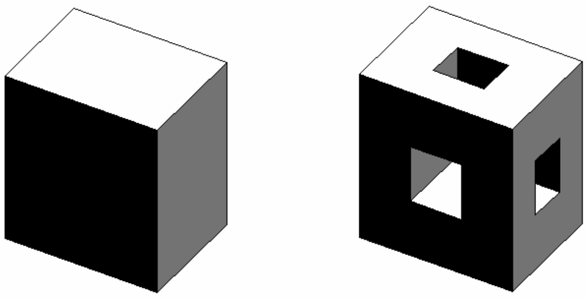


Figura 11: 1° passo para a construção da esponja de Menger

Esta fórmula, utilizada para calcular a dimensão fractal, pode ser facilmente demonstrada através de um método chamado de contagem de caixas, que consiste em cobrir uma figura com caixas cada vez menores como mostraremos a seguir.

A demonstração deste método de contagem de caixas, será apresentada a seguir conforme o proposto Xavier (2007).

Quando uma reta é coberta por caixas cada vez menores é possível estabelecer uma relação entre o número de caixas e o tamanho de cada uma delas.

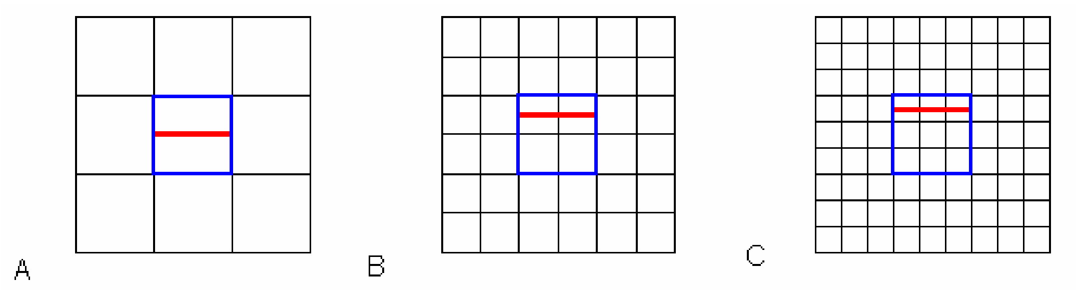


Figura 12: Reta coberta por caixas

A figura 12 A, mostra uma reta coberta por uma caixa de comprimento igual a 1, ja a figura 12 B, mostra a mesma reta coberta por duas caixas de comprimento igual a $\frac{1}{2}$, ou seja metade da caixa inicial, por fim a figura 12 C, mostra a reta coberta por três caixas de comprimento igual a $\frac{1}{3}$ da caixa inicial.

Tabela 1: Relação entre o número de caixas e seu comprimento, utilizadas para cobrir a reta.

Número de caixas:	Comprimento das caixas:
$N = 1$	$L = 1$
$N = 2$	$L = \frac{1}{2}$
$N = 3$	$L = \frac{1}{3}$

Desta forma podemos concluir que $N = L^{-1}$, lembrando que a figura possui dimensão de espaço 1.

Por outro lado, se cobrirmos um quadrado de caixas obteremos outra relação.

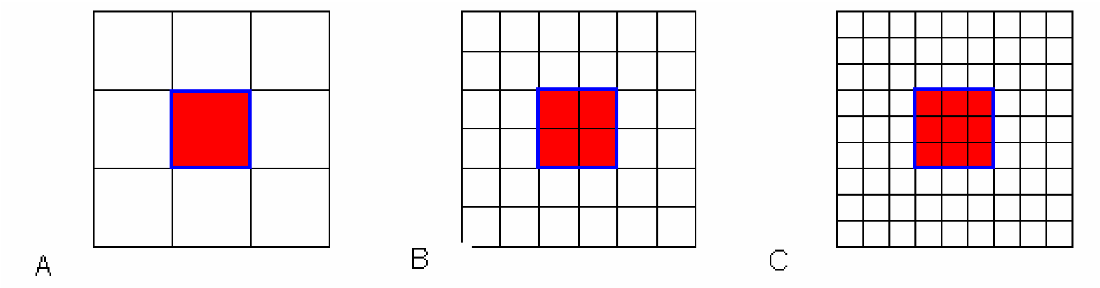


Figura 13: Quadrado coberto por caixas

Na figura 13 A, observamos que uma caixa de comprimento 1 cobre o quadrado, já a figura 13 B quatro caixas de comprimento $\frac{1}{2}$ em relação a caixa inicial passam a cobrir o quadrado, por último a figura 13 C mostra que nove caixas de comprimento $\frac{1}{3}$, passam a cobrir o quadrado.

Tabela 2: Relação entre o número de caixas e seu comprimento, utilizadas para cobrir um quadrado.

Número de caixas:	Comprimento das caixas:
$N = 1$	$L = 1$
$N = 4$	$L = \frac{1}{2}$
$N = 9$	$L = \frac{1}{3}$

Podemos concluir então que $N = L^{-2}$, lembrando também que a dimensão de espaço da figura é 2.

Utilizando este mesmo processo para cobrir um ponto obteremos outra relação.

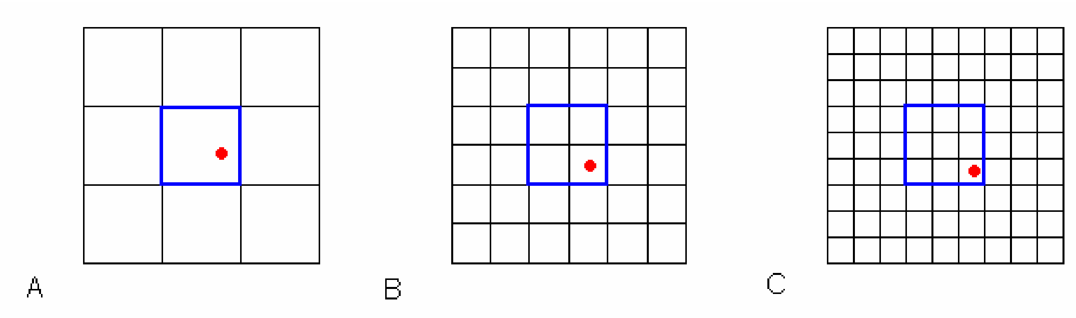


Figura14: Ponto coberto por caixas

Na figura 14 A, foi necessário uma caixa de comprimento 1 para cobrir o ponto, na figura 14 B foi necessário uma caixa de comprimento $\frac{1}{2}$ da caixa inicial, e por último, a figura14 C mostra uma caixa de comprimento igual a $\frac{1}{3}$ da caixa inicial cobrindo o ponto.

Tabela 3: Relação entre o número de caixas e seu comprimento, utilizadas para cobrir o ponto.

Número de caixas:	Comprimento das caixas:
$N = 1$	$L = 1$
$N = 1$	$L = \frac{1}{2}$
$N = 1$	$L = \frac{1}{3}$

Concluindo então que N = L ^{0}, lembrando que a dimensão de espaço da figura é 0.

A partir destes, concluímos finalmente que N = L $^{-D}$, analisando os resultados obtidos e mostrados nas três tabelas anteriores, onde N é o número de caixas, L é o comprimento de cada caixa e D é a dimensão de caixa do objeto coberto.

Para calcular a dimensão da curva de Koch, utilizando este método começamos com um quadrado cobrindo a figura.

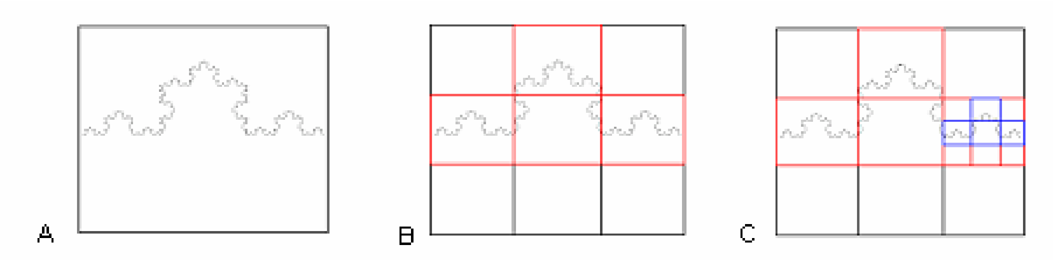


Figura 15: Curva de Koch coberta por caixas

Quando colocamos uma caixa sobre a curva, como mostra a figura 15 A, o comprimento desta caixa é igual a 1, quando colocamos quatro caixas sobre a curva, como mostra a figura 15 B, o comprimento destas caixas é $\frac{1}{3}$ da caixa inicial, e finalmente, quando colocamos dezesseis caixas cobrindo a curva, como mostra a figura 15 C, o comprimento destas caixas é $\frac{1}{9}$ da caixa inicial.

Tabela 4: Relação entre o número de caixas e seu comprimento, utilizadas para cobrir a curva de Koch.

Número de caixas:	Comprimento das caixas:
N = 1	L = 1
N = 4	$L = \frac{1}{3}$
N = 16	$L = \frac{1}{9}$

Como N = L^{-D}, então, aplicando-se logaritmo D = $\frac{\log N}{\log L^{-1}}$ ou

$$D = \frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{L}\right)}$$, como queríamos demonstrar.

Utilizando este método chegamos na fórmula geral para se calcular a dimensão de fractais geométricos, mostrada anteriormente, mas a partir deste é possível calcular a dimensão de qualquer categoria de fractal.

2.5 Fractais na natureza

Conforme Stewart (1996) as formas encontradas nos animais e plantas chamam a atenção dos matemáticos, por exemplo, muitas conchas formam espirais, as estrelas do mar possuem um conjunto simétrico de braços, alguns vírus adotam formas geométricas regulares. Mas além dos padrões de forma, existem os padrões de movimento, como o andar humano, os pés tocam o solo num ritmo regular, esquerda-direita, ou a sidewinder, uma cobra do deserto que se move como uma espiral de uma mola elicoidal, jogando seu corpo para frente em forma de curvas tentando minimizar seu contato com a areia quente.

Mas a simetria da natureza é também muitas vezes imperfeita, existindo outra categoria de padrões naturais, padrões que existem onde pensávamos que tudo era aleatório e sem forma, estes padrões são chamados de fractais.

“Os fractais podem ser encontrados em todo o universo natural e em toda a ciência, desde o aspecto das nuvens, montanhas, árvores e relâmpagos, até à distribuição das galáxias, assim como na arte e na matemática” (SANTOS; OLIVEIRA, 2004).

Os fractais naturais estão à nossa volta, basta observarmos as nuvens, as montanhas, os rios e seus afluentes, os sistemas de vasos sanguíneos, etc. Estes objetos foram realmente estudados a fundo no século XX.

Segundo a Universidade de Lisboa (2006a) considera-se que alguns objetos da natureza, como montanhas, árvores e plantas, tem propriedades fractais. Na figura a seguir podemos observar em diferentes ampliações, a complexidade desta planta. Esta planta apresenta a propriedade de auto-semelhança, característica dos fractais. Estas propriedades sugerem uma ligação entre os fractais e a natureza.

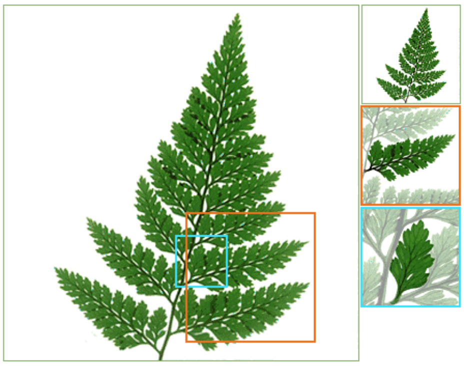


Figura 16: Imagem de uma planta com propriedades fractais (UNIVERSIDADE DE LISBOA, 2006a)

Conforme Fractal (2006) árvores, montanhas e samambaias são fractais naturais que podem ser modelados em computadores que usam algorítmos recursivos. Esta propriedade de repetitividade está clara nestes exemplos, pois num ramo de uma árvore ou na folhagem de uma samambaia pode ser observada uma réplica em miniatura do todo. Não idêntico, porém semelhante na estrutura.

Outros exemplos de objetos da natureza com propriedades fractais são, os brócolis e as costas marítimas.

Contudo, objetos da natureza não são verdadeiramente fractais, pois não são infinitamente complexos. Os objetos naturais podem exibir uma estrutura semelhante ao fractal, porém com uma estrutura de tamanho limitado.

2.6 Geometria fractal

Conforme Fractal (2006) a geometria fractal é o ramo da Matemática que estuda as propriedades e comportamento dos fractais. Descreve muitas situações que não podem ser explicadas facilmente pela geometria clássica, e foram aplicadas em ciência, tecnologia e arte gerada por computador. Os conceitos dos fractais surgiram através de tentativas de medir o tamanho de objetos para os quais as definições tradicionais baseadas na geometria euclidiana falham.

Para Geloneze Neto (2001) assim como para Siqueira (2005) a geometria fractal é uma nova linguagem. Ela ajuda a descrever a forma de um rio, a fronteira de um país, os órgãos do corpo humano, a distribuição de galáxias no Universo e outros objetos, tão precisamente como um arquiteto descreve uma casa.

Utilizando certos programas é possível encontrar a dimensão fractal de uma costa marítma ou a fronteira de algum país. Podemos observar que algumas medidas de fronteiras e de comprimento de costas marítmas podem variar de acordo com a bibliografia consultada, isto acontece porque são fractais e portanto estas medidas variam de acordo com a escala utilizada para medição, quanto menor a escala mais a medida do contorno aumenta, provando que estes são realmente fractais pois quando nos aproximamos vão aparecendo cada vez mais detalhes.

“A geometria fractal está intimamente ligada à Teoria do Caos. São as estruturas quebradas, complexas, estranhas e belas desta geometria, que conferem uma certa ordem ao caos, e esta é muitas vezes caracterizada como sendo a linguagem do caos” (SANTOS; OLIVEIRA, 2004).

Conforme Rezende e Versignassi (2006) por ela explicar coisas infinitamente complexas, passou a fazer parte desta nova ciência, a Teoria do Caos.

Desta forma, a Teoria do Caos pode ser considerada como a teoria que deu origem ao estudo de objetos e formas complexas, até então não estudadas e que eram consideradas desorganizadas, mas que na verdade possuíam seqüências de detalhes em comum. Estas formas e objetos são atualmente chamadas de fractais.

Conforme Secco e Rocha (2004) a Teoria do Caos pode ser vista como um universo com sistemas, ou um conjunto de objetos que inter-relacionam, extremamente sensíveis às condições iniciais, uma simples alteração poderá levar a uma mudança no resultado. Sistemas caóticos são indeterminísticos, ou seja, seus resultados não são possíveis de serem previstos e seu comportamento não é periódico.

De acordo com Teoria do Caos (2007), esta foi, formalmente, descoberta pelo meteorologista Edward Norton Lorenz (1917) em 1960. Lorenz, querendo rever uma de suas seqüências, usara 3 casas decimais de precisão ao invés de 6 casas decimais. A evolução da série foi completamente diferente da original. Este efeito é conhecido também como efeito borboleta e normalmente este efeito é ilustrado com a noção de que o bater das asas de uma borboleta num extremo do globo terrestre, pode provocar uma tormenta no outro extremo no espaço de tempo de semanas.

2.7 Aplicações dos fractais e sua geometria

Para Oliveira (1994) essa nova área das ciências matemáticas vem tendo uma enorme aplicação. Para os biólogos, ajuda a compreender o crescimento das plantas. Para os físicos, possibilita o estudo de superfícies irregulares. Para os médicos, dá uma nova visão da anatomia interna do corpo. Enfim, não faltam exemplos. Um dos mais belos é o uso dos fractais na arte. Quando os computadores são alimentados com equações, criam magníficos desenhos abstratos.

Figura 17: Fractais artísticos gerados por computador
(UNIVERSIDADE DE LISBOA, 2006b)

As imagens fractais geradas por computadores, são resultado de iterações, feitas de forma recursiva que possibilitam a quem os observa imagens de grande beleza.

De acordo com a Universidade de Lisboa (2007b) na década passada, alguns estudos revelaram que um coração saudável bate a um ritmo fractal e, que um batimento cardíaco quase periódico, é um sintoma de insuficiência cardíaca.

Também na Medicina, outra aplicação importante, conforme Diniz (2006) é a utilização da dimensão fractal para ajudar no diagnóstico, ou seja, identificação de alguns tipos de câncer de boca, a geometria fractal ajuda a medir a tortuosidade da borda que o tumor se encontra. Utilizando o método de contagem de caixas, é possível descobrir o grau de infiltração da doença, quanto mais agressivo, mais infiltrativo será seu crescimento. Logo a linha de fronteira entre os tecidos ocupa um espaço mais denso, pois quanto mais rugoso maior a dimensão, essa avaliação indica as chances de a doença evoluir para um estágio mais grave.

Este estudo é muito importante, já que um prognóstico, ou seja, antecipação desenvolvimento da doença, aumentaria consideravelmente as chances de recuperação do paciente, lembrando que o câncer bucal é um dos que apresenta maior dificuldade de diagnóstico.

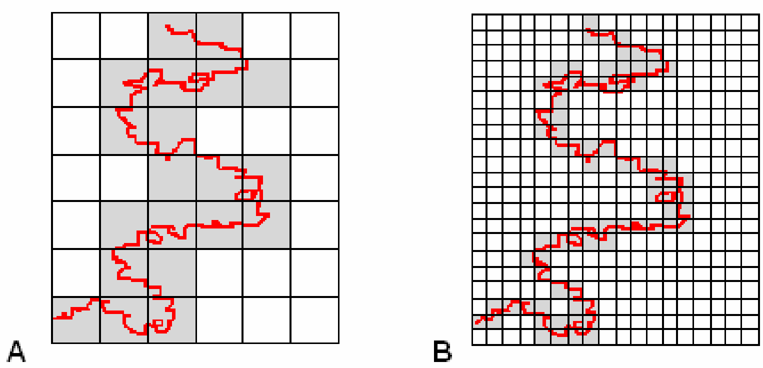


Figura 18: Contagem de caixas utilizado no prognóstico do câncer de boca

Em uma amostra de tecido bucal, considerada normal, ao dividirmos cada caixa em nove caixas, ou seja, $\frac{1}{3}$ da aresta original, a quantidade de caixas ocupadas quase triplica, aproximando sua dimensão de 1. Já a amostra de tecido bucal canceroso, como mostra a figura 18 A, ao se dividir cada caixa em nove caixas de aresta $\frac{1}{3}$ da aresta original, como mostra a figura 18 B, a quantidade de caixas ocupadas pela fronteira do tecido canceroso aumenta em número superior a três vezes ao número de caixas inicial, figura 18 A. Portanto sua dimensão fractal será maior que 1 o que pode ser considerado um tumor malígno, pois a fronteira é mais tortuosa e ocupa um número grande de caixas.

Conforme Barreto (2001), outra aplicação importante dos fractais, agora na Biologia seria o estudo feito pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, que mistura Biologia e geometria tentando medir o contorno de habitats, para a partir disto, saber como a irregularidade influencia determinadas espécies na escolha do local para viver, oferecendo abrigo e proteção contra predadores e variações climáticas. A geometria fractal se propõe a medir superfícies complexas e irregulares como a copa de uma árvore. Cada vez que aumentamos a precisão das medições vão aparecendo mais detalhes e curvas que têm uma importância muito grande para os animais. No entanto, cada uma delas pode ser considerada como um refúgio para os animais que vivem nela e precisam se proteger do vento e dos predadores. Acontece que nem todos os refúgios servem para todos os animais e, sim, são compatíveis com o tamanho de cada um deles.

Figura 19: Árvore que pode ser abrigo para diferentes animais
(BARRETO, 2001)

Quanto mais irregular e recortado forem os galhos menores os animais que vivem e tendem a aparecer em maior quantidade. Mas para os animais maiores que se utilizam dos galhos maiores a árvore parece ser lisa, portanto, tudo depende da escala que se observa. Por isso a geometria fractal é chamada de geometria de diferentes escalas. Por exemplo: aos olhos de uma formiga, uma fresta é o local ideal para se proteger. Nesta mesma árvore existem várias frestas como aquela, que não são observadas por um gavião que pousa no mesmo galho que se encontra a formiga.

O impacto dos fractais e da geometria fractal é bastante evidente já que cada vez mais estudos revelam novas aplicações dos seus conceitos.

2.8 Fractais na sala de aula

Estudar fractais em sala de aula é um assunto cativante, pois as figuras apresentam formas interessantes e ricos padrões de cores. Os jovens se interessam por essa multiplicidade de formas e cores presentes nas diversas formas fractais e também é um motivador pelo fato de estarem ligados à informática, possibilitando sua construção quase que instantaneamente.

Utilizando fractais, tópicos como áreas e perímetros de polígonos e volumes de poliedros tornam-se fáceis de serem estudados e ilustrados.

Para haver uma maior proximidade entre os fractais e os alunos do ensino fundamental, possibilitando assim um melhor entendimento, algumas práticas podem ser realizadas com os alunos para que eles possam visualizar os Fractais sem o uso de computadores.

Uma sugestão interessante seria a construção de um caleidoscópio, que proporcionaria aos alunos a visualização de inúmeras figuras geométricas que se repetem várias vezes, mas que não são independentes de escalas. Portanto não são verdadeiramente fractais, mas dão uma noção de repetição.

O professor pode confeccionar e levar o instrumento para os alunos ou sugerir que eles mesmos o construam.

De acordo com Marangon (2003) este instrumento pode ser construído utilizando materiais simples, 3 espelhos de 20 cm de comprimento por 3 de largura com as extremidades lixadas, fita-crepe e adesiva, tesoura, papel filme ou plástico transparente, miçangas coloridas e contas de plástico, 1 triângulo eqüilátero de cartolina de 7,5 cm de lado com um orifício central de 1 cm papel ou plástico auto-adesivo.

Para montar, faça um triângulo com os três espelhos de maneira que a parte refletora fique para dentro, fixando-os com a fita-crepe. Depois vede uma das extremidades da peça com o papel filme ou plástico transparente. Coloque as miçangas e as contas dentro e tampe a outra extremidade da mesma maneira. Cubra um dos lados com o triângulo de cartolina com um furo no meio. Para ver as imagens, aponte o brinquedo para uma fonte de luz, gire lentamente e olhe através do orifício. Depois decore a parte externa com papel adesivo.

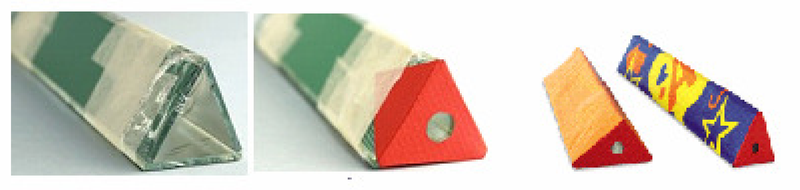


Figura 20: Construção do caleidoscópio
(MARANGON, 2003, p. 43)

Outra prática interessante, já que os fractais estão muito ligados a natureza, seria que o professor levasse os alunos para observar um jardim, ou uma paisagem natural para que eles mesmos identifiquem as formas fractais naturais que eles convivem no dia-a-dia sem se dar conta. Esta prática seria interessante para que haja uma interdisciplinaridade entre a Matemática e Biologia e para que os alunos passem a observar mais a natureza, e valorizá-la ao invés de degradá-la e também para que a Matemática não seja vista como números e contas sem aplicações.

3 METODOLOGIA

Esta pesquisa bibliográfica sobre Fractais e Geometria Fractal foi realizada a partir de consultas em revistas, jornais, livros e outros, disponíveis na Biblioteca Waldir Azevedo do Centro Universitário de Lavras – UNILAVRAS situada na cidade de Lavras, no estado de Minas Gerais, em acervos particulares, em outras bibliotecas e websites.

Esta revisão foi realizada entre fevereiro de 2006 a junho de 2007; os textos encontrados foram lidos, analisados de forma criteriosa e discutidos.

4 CONSIDERAÇÕES GERAIS

No presente estudo sobre fractais, UFRJ (2007) tem uma definição de fractal mais completa do que a apresentada por Stewart (1996) devido a se fazer uma comparação entre a Hausdorff e a sua dimensão topológica, colocando que uma deve ser diferente da outra.

O fractal, como foi citado e demonstrado anteriormente mantém sua estrutura quando ampliado. Porém a dimensão é fracionária. Mas também existem fractais que preenchem o plano, como a curva de Peano.

Em relação à origem, Fractal (2006) afirma que a idéia dos fractais surgiu com o trabalho de alguns cientistas entre 1857 e 1913. Com isto alguns objetos, considerados como "monstros", que se supunham não serem importantes cientificamente passaram a ser estudados.

Mas este estudo só se tornou realmente possível com o avanço da informática, pois os cálculos para geração de fractais são praticamente impossíveis de serem feitos à mão. Este novo estudo mostrou que existem objetos e fenômenos importantes à serem estudados além daqueles que a geometria Euclidiana mostra.

Ja no que diz respeito a classificação, conforme Fractal (2006) os fractais podem ser classificados em três categorias, os fractais geométricos, criados pelo homem, os fractais de fuga, criados por programas de computador e os fractais aleatórios criados pela natureza.

Os fractais da natureza podem facilmente ser encontrados, mas devemos lembrar que não são verdadeiros fractais pois seu tamanho é limitado.

Podem também serem classificados de acordo com a auto-similaridade. Fractal (2006) mostra que a auto-similaridade exata existe quando o fractal é idêntico em diferentes escalas, fractais geométricos geralmente são auto-similares. Existe também a quase auto-similaridade, sendo uma forma mais solta de auto-similaridade. O fractal apresenta ser aproximadamente idêntico em diferentes escalas. Fractais de fuga são fractais que geralmente são quase auto-similares. Por último existe a auto-similaridade estatística, em que o fractal possui medidas numéricas ou estatísticas que são preservadas em diferentes escalas. Fractais aleatórios são fractais que possuem auto-similaridade estatística.

As principais propriedades que caracterizam os fractais são, a auto-similaridade, complexidade infinita e por último a dimensão, considerada mais importante propriedade.

Sobre a auto-similaridade, a reta Euclidiana é auto-similar, mas não é fractal, portanto nem todos os objetos auto-similares são considerados fractais.

Quanto a complexidade infinita, ela pode ser vista nos fractais geométricos como a curva de Koch. Por serem construídos a partir de infinitas iterações seus detalhes são infinitos e impossíveis de serem representados.

A dimensão dos fractais é característica própria de cada objeto. Tem a ver com seu grau de irregularidade, sendo fracionária ao invés de inteira como acontece na geometria Euclidiana.

Backers e Bruno (2005), Xavier (2007) propõem uma fórmula para se calcular a dimensão fractal, mas Xavier propõe um método mais completo, que pode ser utilizado para calcular dimensão de qualquer fractal.

A demonstração deste método de contagem de caixas, como é chamado, pode ser aplicada a qualquer fractal, já o proposto por Backers e Bruno, apenas para fractais geométricos.

Conforme Fractal (2006) a geometria fractal é o ramo da Matemática que estuda as propriedades e comportamento dos fractais, resolvendo problemas que os conceitos da geometria Euclidiana não podem resolver.

A geometria Euclidiana se propõe a estudar formas regulares que quase sempre são feitas pelo homem, já a geometria fractal estuda padrões regulares e organizados dentro de uma aparente irregularidade, muito encontradas na natureza.

Com isto, podemos dizer que o estudo dos fractais está ligado à Teoria do Caos, que busca padrões organizados de comportamento dentro de um sistema aparentemente aleatório.

Para Geloneze Neto (2001) assim como para Siqueira (2005) a geometria fractal é uma nova linguagem. Ela ajuda a descrever a forma de um rio, a fronteira de um país, os órgãos do corpo humano e outros objetos. Tão precisamente como um arquiteto descreve uma casa, esta geometria aplicada à arte, Biologia, Medicina e em outras áreas têm diversas aplicações.

Dentre estas aplicações, algumas se destacam como sua utilização na arte, gerando por meio de computadores, belos desenhos, geralmente abstratos.

Outras aplicações, como na Medicina de acordo com a Universidade de Lisboa (2007b) e Diniz (2006) são as que alguns estudos revelaram sobre as propriedades fractais. Um coração saudável bate a um ritmo fractal. Um batimento cardíaco quase periódico, é um sintoma de insuficiência cardíaca. Também a dimensão é utilizada para diagnósticos de alguns tipos de câncer, como o de boca.

Ao iniciarmos os estudos dos fractais e suas propriedades, talvez imaginamos que estes são apenas formas que se repetem inúmeras vezes, mas que não passam de objetos abstratos e que de nada serviriam para o estudo e entendimento de outras ciências. Após analisadas algumas aplicações nos damos conta da importancia de estudar e conhecer as propriedades de tais formas e fenômenos naturais.

Além de suas aplicações nas ciências os fractais podem e devem ser aplicados em sala de aula, tornando mais interessante estudar alguns conteúdos de geometria, como perímetros e áreas de figuras, promovendo também a interdisciplinaridade entre Matemática e Biologia, pois as formas fractais são facilmente encontradas na natureza.

5 CONCLUSÃO

Sendo o fractal, um ramo da Matemática considerado como uma nova maneira de ver o mundo, ainda é desconhecido por muitas pessoas.

Concluiu-se a partir deste estudo, que os fractais e sua geometria vêm cada vez mais sendo explorados pelos pesquisadores, devido a variedade de aplicações, observando que a maior parte destas está concentrada na Biologia, Medicina e arte, onde os Fractais são de suma importância para desenvolvimento e entendimento.

Concluiu-se tambem que os fractais podem agir como incentivador para o estudo de alguns tópicos de geometria, atraindo assim a curiosidade e interesse dos alunos quando apresentados em sala de aula, promovendo também a interdisciplinaridade entre Matemática e Biologia, por estarem ligados a natureza.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BACKERS, A. R. ; BRUNO, O. M. Trabalho apresentado ao departamento de Computação e Estatística da Universidade de São Paulo.
Disponível em: <http://www.dcc.ufla.br/infocomp/artigos/v4.3/art07.pdf >
Acesso em 27 mar 2007

BARRETO, C. C. Departamento de ecologia da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Disponível em:
<http://www.expoente.com.br/professores/kalinke/paraqueserve/fractais.htm>
Acesso em 12 mar 2006

CENTRO UNIVERSITÁRIO DE LAVRAS. **Normas para elaboração de trabalhos científicos**. Lavras: UNILAVRAS, 2004. 92 p.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto e aplicações, 2. ed. São Paulo: Ed. Ática, 2004. 3 v, 352p.

DINIZ, G. A matemática do câncer.
CIÊNCIA HOJE. Rio de Janeiro: Ed. Instituto Ciência Hoje, ano 39, n. 232, nov. 2006. 80p.

FRACTAL. Wikipédia Enciclopédia Livre
Disponível em: <http//:pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_dos_fractais >
Acesso em 11 mar 2006

GELONEZE NETO, A. A geometria dos fractais.
GALILEU. Vivendo e aprendendo. Rio de Janeiro: Ed. Globo, ano 10, n. 114, jan. 2001. 90p.

MARANGON, C. Um caleidoscópio para estudar Ciências.
NOVA ESCOLA. São Paulo: Ed. Abril, ano 18, n. 166, out. 2003. 66p.

OLIVEIRA, L. H. A Matemática do Delírio.
SUPERINTERESSANTE. São Paulo: Ed. Abril, ano 8, n. 10, out. 1994. 92 p.

RESENDE, R; VERSIGNASSI, A. Da Lama ao Caos.
SUPERINTERESSANTE. São Paulo: Ed. Abril, ano 20, n. 224, mar. 2006. 98 p.

SANTOS, C; OLIVEIRA, A. A. Universidade Federal de São Carlos.
Disponível em: <http://www2.dm.ufscar.br/~caetano/iae2004/G9/historico.html>
Acesso em 18 jun 2006

SECCO, F. R. ; ROCHA, T. T. Trabalho apresentado ao curso de Ciência da Computação da Universidade Federal de Santa Catarina.
Disponível em: <http://www.inf.ufsc.br/~l3c/artigos/fractais.pdf>
Acesso em 12 mar 2006

SIQUEIRA, R. Desenvolvido por um grupo de pesquisadores, Fractarte.
Disponível em:< http://www.insite.com.br/fractarte/artigos.php>
Acesso em 26 mar 2006

STEWART, I. **Os Números da Natureza**: a realidade irreal da imaginação matemática. Rio de Janeiro: Ed. Rocco, 1996. 122p.

TEORIA DO CAOS. Wikipedia Enciclopédia Livre.
Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Efeito_borboleta >
Acesso em 6 jun 2007

UFRJ. Desenvolvido pelo Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro.
Disponível em: <http://omnis.if.ufrj.br/~tclp/DimFractal.ppt>
Acesso em 27 mar 2007

UNIVERSIDADE DE LISBOA 2006a. Desenvolvido pelo departamento de educação da Faculdade de Ciências.
Disponível em: <http//:www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/fractais.htm >
Acesso em 11 mar 2006

UNIVERSIDADE DE LISBOA 2007a. Desenvolvido pelo Centro de Física Teórica e Computacional. Disponível em:
<http://cftc.cii.fc.ul.pt/coccix/capitulos/capitulo2/modulo4/topico6.php>
Acesso em 11 abr 2007.

UNIVERSIDADE DE LISBOA 2006b. Desenvolvido pelo departamento de educação da Faculdade de Ciências.
Disponível em: <http//:www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm24/principal.htm>
Acesso em 11 mar 2006

UNIVERSIDADE DE LISBOA 2007b. Desenvolvido pelo departamento de educação da Faculdade de Ciências.
Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/index.htm>
Acesso em 28 mar 2007

XAVIER, B. Trabalho desenvolvido no Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro.
Disponível em: <http://omnis.if.ufrj.br/~carlos/inic/bernardo/fractal.pdf>
Acesso em 10 ago 2007

ANEXOS

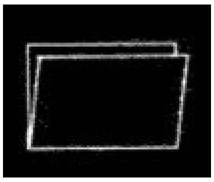
Construção de um Fractal numa Folha de Papel

Material:

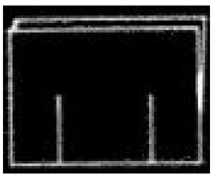
- Folha de papel A4
- Tesoura

Instruções:

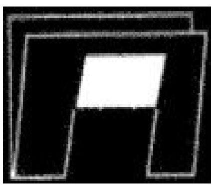
1. Meça o comprimento da folha (= *a*)
2. Meça a largura da folha (= *b*)



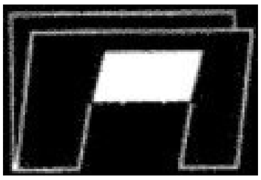
3. Dobre a folha de papel ao meio
4. Faça 2 cortes de comprimento *a/4* afastados de cada lado do papel *b/4*



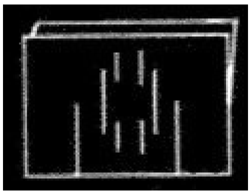
5. Dobre o segmento criado pelos dois cortes



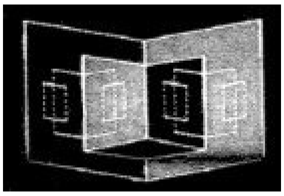
6. Repita os passos 1 - 5, mas agora para a parte da folha que acabou de dobrar.



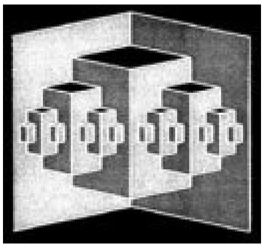
7. Continue o processo o máximo de vezes possíveis



8. Dobre a folha A4 formando um ângulo reto



9. Dobre a parte da folha obtida no passo 5, de modo a formar um ângulo reto com a dobra do passo 8
10. Repita o passo 9 para as outras partes da folha



Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/index.htm>