UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS

<u>SEMANA DA MATEMÁTICA 2013</u>

ROMAN HECTOR ABRIL

SITUAÇÕES-PROBLEMA COMO INTRODUÇÃO DE CONTEÚDOS DE ENSINO MÉDIO

CURITIBA

2013

RESUMO

Estudos pedagógicos indicam a importância de introduzir novos conteúdos aos alunos por meio de **situações-problema**, seguindo modelos construtivistas e não formalistas. A proposta do projeto é, após uma abrangente digressão teórica, de elencar, para os campos temáticos das progressões aritméticas e geométricas e das funções exponenciais e logarítmicas, um conjunto de problemas próprios para servir de introdução ao tema e despertar o interesse do aluno no assunto. Desta forma, o professor poderá escolher qual problema se adapta melhor às suas necessidades e da sua turma. Dessa maneira, pretende-se construir um esboço de um guia de problemas matemáticos associados a cada assunto, que pode ser aplicado por qualquer professor de Matemática. Esse compêndio tem aplicação prática direta, independente do conteúdo curricular, uma vez que o professor poderá buscar os exercícios relacionados a um determinado tema. Pretende-se, assim, demonstrar que é possível criar um guia de problemas matemáticos amplo, de utilidade prática e simples por qualquer professor.

Palavras-chave: Educação Matemática. Metodologia. Situações-problema. Progressões. Funções Exponenciais. Logaritmos.

ABSTRACT

Pedagogical studies show the importance of introducing new mathematical topics to the students by means of **problem situations**, according to constructivist and non-formalist models. The proposal of the project is, after a comprehensive theoretical digression, to catalogue a set of specific problems of arithmetic and geometric progressions, exponential and logarithmic functions that can be used as an introduction to these topics and to awaken the interest of the students. Thus, the teacher will be able to choose which problem is better adapted to his needs and to those of his classroom. In this way, we intend to construct an outline of a mathematical problem guide for each topic, which could be applied by every math teacher. This compendium has direct application, independently of the learning program, for it will be possible for every teacher to pick an appropriate exercise related to a specific topic. We intend to prove that it is possible to build a wide guide of math problems that can be easily used by every teacher.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Comecei a lecionar Matemática há muitos anos e, como vários professores no Brasil, sem nunca ter feito um curso de Licenciatura.

Sempre preparei minhas aulas com muito cuidado e preocupação, ordenando os conteúdos e exercícios para passá-los, de maneira expositiva e clara, em sala de aula.

Quando finalmente comecei a cursar a graduação em Licenciatura em Matemática, deparei-me com um campo para mim desconhecido: a Educação Matemática.

Descobri que a metodologia expositiva e conteudista, empregada por muitos professores em sala de aula, tem sido muito criticada por vários estudiosos da área, tais como Figueiredo Chagas, D'Ambrosio ou Paiva, entre outros.

Foi assim que eu me dei conta que essa maneira de dar aula, tão questionada, era justamente àquela que eu mesmo seguia em sala de aula. Essa metodologia parecia a mais natural para mim, pois confrontava os alunos diretamente com o conteúdo e, em sequência, colocava esse conteúdo em prática com exercícios de aplicação. Além disso, esse método de trabalho se afigurava como o mais fácil e imediato para otimizar o tempo de preparação da aula pelo professor.

Mas isso vai de encontro à opinião desses estudiosos da Educação Matemática. Segundo eles existem metodologias mais eficazes para o aprendizado do aluno. Uma das alternativas para melhorar o ensino de Matemática e a aprendizagem dos alunos é a abordagem de conteúdos por meio de **situações-problema**.

Por ocasião do meu estágio supervisionado, realizado na UTFPR (Universidade Tecnológica Federal do Paraná), decidi aproveitar a oportunidade e pôr em prática a metodologia de resolução de problemas. Nesse estágio tive a oportunidade de assumir a responsabilidade de uma turma de Ensino Médio por um semestre completo e, sempre que possível, apliquei essa forma de trabalho.

Uma das dificuldades relatadas por professores em mudar seu método de trabalho é o maior tempo de preparo das aulas que requer esse novo método.

De fato, a maioria dos professores de Matemática, incluindo os recém-egressos dos cursos de Licenciatura, tem optado por dar as costas às novas metodologias de ensino, preferindo as aulas tradicionais expositivas e formais.

A razão é que esse caminho é muito mais fácil para o professor, que dispõe de pouco tempo para preparar as aulas. Além disso, é mais fácil seguir um roteiro pré-determinado, muitas vezes amparado pelo livro didático.

É verdade que os livros textos brasileiros têm evoluído notavelmente nos últimos anos, em função das novas exigências para o livro didático. Muitos deles trazem com frequência uma situação-problema em muitos tópicos. Mas nem sempre esses problemas se ajustam às necessidades da turma.

Tendo em vista esses aparentes obstáculos da metodologia resolução de problemas, passei a estudar uma forma de minimizá-los. Surgiu assim a ideia de criar um banco de situações-problema indicados para introduzir um determinado assunto temático em sala de aula.

Em princípio, a pré-existência desse banco de problemas atenuaria o trabalho de preparação das aulas, pois o mesmo poderia servir de guia de referência para professores interessados em aplicar essa metodologia.

Durante o desenvolvimento deste trabalho foram enfrentadas as seguintes etapas:

- Criação, previamente ao início das aulas, desse banco de problemas para os conteúdos da turma sob minha responsabilidade (na UTFPR);
- Preparação as aulas fazendo uso desse banco;
- Constatação do esforço adicional necessário para preparação dessas aulas;
- Aplicação das aulas seguindo a metodologia proposta;
- Verificação qualitativa do benefício na aprendizagem do aluno.

Portanto, o que se propõe aqui é a validação da criação de um banco de problemas matemáticos, de forma a permitir que qualquer professor a ele se referencie ao introduzir um determinado assunto temático em sala de aula, segundo tal metodologia.

Esta validade deve ser observada tanto do ponto de vista do professor (na preparação da aula), como do aluno (na aprendizagem).

Este trabalho está organizado da seguinte forma: A primeira parte discorre sobre a metodologia aqui proposta, qual seja, a introdução de novos conteúdos por meio de situações-problema. Primeiramente faz-se um apanhado da situação predominante do ensino no país, no que diz respeito à metodologia utilizada em sala de aula. Em seguida, descreve-se a nova metodologia sugerida. Por último, faz-se um apanhado, no campo teórico, sobre a relação da metodologia de situações-problema com algumas teorias didáticas.

A segunda parte elenca um banco de problemas específico elaborado para uma turma do segundo ano do ensino médio da UTFPR. Descreve-se a experiência de prática de ensino utilizando a metodologia proposta e conclui sobre a validade de sua aplicação.

1. ANÁLISE TEÓRICA

1.1 SITUAÇÃO DO ENSINO DE MATEMÁTICA HOJE

Pela experiência que adquiri ao longo da minha atuação como professor de Matemática e durante os estágios nas disciplinas didáticas do curso de Licenciatura, pude perceber que a Matemática ensinada em muitas salas de aula no Brasil é baseada numa metodologia expositiva, formalista e conteudista, distante da realidade dos alunos. Tive a impressão que predominam os professores que ensinam conteúdos desvinculados da vida cotidiana. Em geral trata-se de uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro aquilo que ele julga importante. O aluno, por sua vez, copia da lousa para o seu caderno e em seguida pratica exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor. Dessa forma, reduz-se a prática pedagógica a uma mera passagem de conteúdos, baseada na repetição e memorização, deixando de lado a experimentação, o questionamento, a inquietação e a criatividade.

Habitualmente o dia a dia numa aula de Matemática se resume, segundo minha experiência, a uma tentativa de transmissão de conhecimentos vinculada ao conteúdo curricular, mas sem nenhuma preocupação em despertar o interesse do aluno. Via de regra, a aula constitui uma dupla frustração: de um lado para o professor, que percebe o desinteresse do aluno e a falta de utilidade de seu esforço; de outro lado o aluno, que não consegue se interessar pelos conteúdos desconectados de sua realidade. Dessa forma, o ensino se caracteriza por uma rotina de transmissão de conteúdos quase mecânica, o conhecimento se apresenta como pronto e acabado.

Essa metodologia formalista clássica está baseada na teoria empirista, segundo a qual o sujeito (aluno) nasce vazio de conhecimento e cabe ao professor preencher suas capacidades cognitivas com informações. Dessa forma, segundo essa teoria, o aluno é passivo no processo de aprendizagem.

Segundo BECKER, 1994:

> Na epistemologia empirista, a única fonte de conhecimento humano é a experiência adquirida em função do meio físico mediada pelos sentidos. O sujeito encontra-se, por sua própria natureza, vazio, como uma "tábua rasa", uma folha de papel em branco. Não há nada no nosso intelecto que não tenha entrado lá através dos nossos sentidos.

O aluno-sujeito não representa o centro do processo, que é ocupado pelo professor e seus conhecimentos. Essa visão metodológica considera a Matemática como uma ciência dura, de conteúdo definido, sem espaço para pesquisa nem criatividade. No campo da Matemática, essa teoria foi estudada e defendida no início do século XX pelo psicólogo e educador estadunidense Edward Thorndike.

Conforme FIGUEIREDO CHAGAS (2001):

> Nas escolas onde professores de Matemática trabalham com o ensino tradicional, podemos observar que o processo ensino-aprendizagem dos alunos torna-se mera transmissão da matéria, ou seja, o professor “transmite” e os alunos “recebem”.
>
> Esta atividade de transmissão e recepção vem acompanhada da realização repetitiva e puramente mecanizada de exercícios, acarretando, por parte do aluno, futuras memorizações de como estes exercícios foram inicialmente desenvolvidos.
>
> Neste tipo de contexto, a ênfase na disciplina de Matemática é dada ao “é assim que se faz” ao invés de “pense um pouco sobre isso” ou “que relação poderá existir entre este problema e os conhecimentos que você possui, que já foram anteriormente adquiridos por você”?

> Diante destes fatos, podemos concluir que muitas vezes a atividade mental de nossos alunos é subestimada, privando-os de desenvolverem suas potencialidades cognitivas, suas capacidades e habilidades. Devemos estar cientes de que o ensino da Matemática deve ser algo mais do que mera transmissão da matéria, deve ser algo mais do que mera cópia dos exercícios resolvidos pelo professor no quadro-negro, deve ser algo mais do que mera memorização.
>
> As pesquisas têm comprovado que a aprendizagem não se dá pelo treino mecânico descontextualizado, ou pela exposição exaustiva do professor. Pelo contrário, a aprendizagem dos conceitos ocorre pela interação dos alunos com o conhecimento.

Esta metodologia contrapõe o aluno aprendiz, vazio de conhecimento, à sabedoria incontestável do professor.

Numa aula de Matemática, raramente é exigida criatividade do aluno, quase nunca ele é motivado a fazer uso de sua criatividade, despertar sua curiosidade para solucionar um problema. Faltam situações de descoberta, de exploração.

Outra das grandes preocupações dos professores é com relação à quantidade de conteúdo trabalhado. O professor se sente pressionado a cumprir a totalidade do currículo, muitas vezes em detrimento da qualidade da aprendizagem.

Segundo D'AMBROSIO:

> Para os professores o conteúdo trabalhado é a prioridade de sua ação pedagógica, ao invés da aprendizagem do aluno. É difícil o professor que consegue se convencer de que seu objetivo principal do processo educacional é que os alunos tenham o maior aproveitamento possível, e que esse objetivo fica longe de ser atingido quando a meta do professor passa a ser cobrir a maior quantidade possível de matéria em aula.

1.1.1 Conceito clássico

D'Ambrosio conceitua de maneira precisa e descritiva a forma clássica de ensinar Matemática. Esta metodologia é predominante nas salas de aula no Brasil. Segundo D'AMBROSIO:

> Os professores em geral mostram a Matemática como um corpo de conhecimentos acabado e polido. Ao aluno não é dado em nenhum momento a oportunidade ou gerada a necessidade de criar nada, nem mesmo uma solução mais interessante. O aluno passa a acreditar que na aula de Matemática o seu papel é passivo e desinteressante.
>
> Essa prática revela a concepção de que é possível aprender Matemática através de um processo de transmissão de conhecimento. Mais ainda, de que a resolução de problemas reduz-se a procedimentos determinados pelo professor.
>
> Primeiro, alunos passam a acreditar que a aprendizagem de Matemática se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos. Aliás, nossos alunos hoje acreditam que fazer Matemática é seguir e aplicar regras. Regras essas que foram transmitidas pelo professor.
>
> Segundo, os alunos acham que a Matemática é um corpo de conceitos verdadeiros e estáticos, do qual não se duvida ou questiona, nem mesmo nos preocupamos em compreender porque funciona.
>
> Em geral, acreditam também, que esses conceitos foram descobertos ou criados por gênios.
>
> O aluno, acreditando e supervalorizando o poder da Matemática formal, perde qualquer autoconfiança em sua intuição Matemática, perdendo, dia a dia, seu "bom-senso" matemático. Além de acreditarem que a solução de um problema encontrada matematicamente não estará, necessariamente, relacionada com a solução do mesmo problema numa situação real.

É comum que o aluno abandone ou nem busque a solução de um problema, afirmando "ainda não ter aprendido esse conteúdo". O aluno é desestimulado a pensar criticamente, fora da "cartilha" do professor.

Outro aspecto é a tendência no nosso ensino à supervalorização do pensamento algorítmico, deixando de lado o pensamento lógico-matemático.

1.1.2 Desmotivação

A típica falta de motivação dos alunos nas aulas de Matemática está fundamentada tanto na metodologia de ensino inadequada como na deficiência do professor em demonstrar a utilidade prática dos conceitos ensinados. A própria desmotivação do professor também é um fator que se transfere ao aluno.

Cabe ao professor encontrar o caminho para reverter o processo e despertar no aluno o interesse pelo aprendizado.

Segundo ZÁBOLI (1999):

> Motivação é algo que leva os alunos a agirem por vontade própria. Ela inflama a imaginação, excita e põe em evidência as fontes de energia intelectual, inspira o aluno a ter vontade de agir, de progredir. Em suma, motivar é despertar o interesse e o esforço do aluno. É fazer o estudante desejar aprender aquilo que ele precisa aprender.

Quando perguntados sobre a utilidade da Matemática, os professores costumam dizer que “a Matemática serve para atividades que envolvem aspectos quantitativos da realidade” e “a Matemática desenvolve o raciocínio lógico”. Embora verdadeiras, essas afirmações não são eficazes para mobilizar os adolescentes para o estudo da Matemática.

Segundo ÁVILA (1996):

> O ensino da Matemática é justificado pela riqueza dos diferentes processos de criatividade que ele exibe, proporcionando ao aluno oportunidades de exercitar e desenvolver suas faculdades intelectuais. A Matemática deve ser ensinada nas escolas porque é parte substancial do patrimônio cognitivo da Humanidade. O ensino da Matemática se justifica ainda pelos elementos enriquecedores do pensamento matemático na formação intelectual do aluno, seja pela exatidão do pensamento lógico-demonstrativo que ela exibe, seja pelo exercício criativo da intuição, da imaginação e dos raciocínios por indução e analogia. O ensino da Matemática é também importante para dotar o aluno do instrumental necessário no estudo das outras ciências e capacitá-lo no trato das atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade.

Porém, para motivar o aluno em sala de aula, é necessário que o professor justifique a cada novo conceito a sua relevância em situações práticas, reais ou motivadoras.

1.2 EM QUE CONSISTE A METODOLOGIA

1.2.1 O que é problema?

Segundo Carvalho (1991) “um problema é uma situação onde ocorre um desequilíbrio, ou seja, que exige uma solução não imediata, mas para a qual dispomos de meios intelectuais de resolução.”

Um problema é uma situação em que os conhecimentos prévios do aluno não lhe trazem uma resposta imediata. Será exigido do resolvedor buscar novos procedimentos mediante pensamento criativo para vencer o desafio e, assim, construir um novo saber.

É importante salientar que adotar a resolução de problemas como meio de ensino de novos conceitos não deve ser confundido com ensinar a resolver problemas nem <u>aplicar</u> os conhecimentos adquiridos para resolver um problema.

1.2.2 Por que problematizar?

Segundo COELHO:

> A Resolução de Problemas como ponto de partida para o ensino da Matemática representa uma ruptura em relação às práticas tradicionais que são centradas no professor e se baseiam no pressuposto de que a aprendizagem se realiza por transmissão do conhecimento, do professor ao aluno. Trata-se de uma prática que se fundamenta na construção do conhecimento que é produzido pelo aluno nas interações sociais, e conta com o papel mediador do professor. O problema gera a necessidade de conhecer as estruturas Matemáticas, os conceitos, e de estabelecer relações entre eles. Leva o aluno a organizar estratégias para a resolução e instiga a

> produção de significações, de argumentação e de troca de idéias. A resolução, de problemas é uma metodologia de ensino em que o professor propõe ao aluno situações problemas caracterizadas por investigação e exploração de novos conceitos.

Em muitos campos da Matemática é possível fazer com que o aluno construa conceitos novos por meio de problemas matemáticos. O aluno é estimulado a interpretar o problema, buscar explicá-lo, criar conjecturas, investigar, encontrar caminhos de acordo com sua concepção Matemática, seus conhecimentos e vivências com outros problemas de natureza diversa, Em outras palavras, o aluno é motivado a “fazer Matemática”. O processo formal advém desta nova linguagem a ser criada.

A situação apresentada visa a disparar um processo novo no aluno, resultando na aquisição de um novo conhecimento. Conforme Onuchic (1999): “O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de conhecimento. Sob esse enfoque, problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação dos conceitos antes mesmo de sua apresentação em linguagem Matemática formal. O foco está na ação por parte do aluno.”

Um dos objetivos dessa metodologia é que os alunos possam ser autores do seu conhecimento e aprendizado, argumentando e se apropriando das situações-problema apresentadas.

Segundo MARINHO DO REGO:

> Os problemas a serem trabalhados devem representar desafios para o aluno, mobilizar conhecimentos e provocar reflexões. Além disso, o aluno não deve possuir, de imediato, fórmulas ou estratégias prontas para sua resolução. Nessa perspectiva, a resolução de problemas é o meio, a mola-mestre de todo o ensino da Matemática e não apenas uma das atividades desenvolvidas pelo professor esporadicamente. Portanto, em vez de apresentar o conteúdo pronto para depois aplicá-lo em situações-problema, no ensino via resolução de problemas, são estas situações que farão surgir a necessidade do desenvolvimento de novos conteúdos ou conceitos.

Segundo POLYA:

> Resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado. Se o fim por si só não sugere de imediato os meios, se por isso temos de procurá-los refletindo conscientemente sobre como alcançar o fim, temos de resolver um problema. (POLYA, p. 1. 1997)

Adotar a resolução de problemas como uma metodologia de ensino da Matemática, é entendê-la como um ponto de partida para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos.

GAZIRE (1988) afirma:

> "Se todo conteúdo a ser aprendido for iniciado, numa situação de aprendizagem, através de um problema desafio, ocorrerá uma construção interiorizada do conhecimento a ser adquirido".

A Resolução de Problemas é uma metodologia de ensino de Matemática muito eficaz, pois propicia uma mobilização de saberes no sentido de buscar a solução. Nessa busca, o aluno aprende a montar estratégias, raciocinar logicamente e verificar se sua estratégia foi válida, o que colabora para um amadurecimento das estruturas cognitivas.

> A solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento. O ensino baseado na solução de problemas pressupõe promover nos alunos o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para dar resposta a situações variáveis e diferentes. Ao se ensinar a resolver problemas, não é suficiente dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes, mas faz-se necessário criar neles o hábito e a atitude de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta. (ECHEVERRÍA, 1998).

> Sendo assim, quando se ensina através da resolução de problemas, ajuda-se os alunos a desenvolver sua capacidade de aprender a aprender, habituando-os a determinar, por si próprios, respostas às questões que os inquietam, sejam elas questões escolares ou da vida cotidiana, ao invés de esperar uma resposta já pronta dada pelo professor ou pelo livro-texto. Um bom problema pode tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras, pois

> proporcionam um maior envolvimento no processo e resolução aguçando a criatividade e colaborando com o desenvolvimento de estratégias que possam ser aplicadas em diferentes situações. (CARNEIRO SOARES)

Como se percebe, a metodologia alia a eficiência da aprendizagem e a motivação do aluno. A motivação se dá pelo desafio, pela interação do aluno com a situação, com os colegas, pela aproximação da Matemática com seu dia a dia e pelo entendimento da utilidade da Matemática.

Segundo PAIVA e CARVALHO:

> A metodologia traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalhando para desenvolver estratégias de resolução.
>
> A resposta correta tem seu valor diminuído e a ênfase deve ser dada no processo de resolução, permitindo o aparecimento de soluções diferentes, comparando-as entre si e pedindo que alguns dos resolvedores verbalizem como chegaram à solução. O caminho a seguir passa pela discussão e reflexão de seus pontos de vista e pelas formas e soluções que cada um apresenta na resolução de problemas. Para a aquisição dos conhecimentos matemáticos, os alunos necessitam relatar as suas experiências, delinear e modelar suas representações mentais, ou seja, precisam transformar essas vivências em linguagem Matemática.
>
> Assim, sua utilização contribui para o ensino de conceitos matemáticos tornando a aprendizagem do aluno prazerosa e, ao mesmo tempo, calcada na conscientização de seus processos de pensamento e na relação que ele pode estabelecer entre a formalização Matemática e a resolução de problemas do cotidiano. Portanto a Matemática escolar não pode se limitar a ensinar os conceitos que estão nos programas dessa disciplina, mas deve possibilitar o desenvolvimento do pensamento que se coloca em funcionamento, como abstração, demonstração, raciocínio através de hipóteses, resolução e elaboração de problemas. (Paiva e Carvalho)

Além disso, um dos grandes questionamentos dos alunos se baseia na falta de utilidade visível de diversos conteúdos matemáticos. Segundo VIANNA:

> Apresentar idéias Matemáticas com significado é, acredito, a melhor maneira de responder a fatídica pergunta: “para que serve isso?”. Na verdade, com as novas idéias sendo apresentadas “em ação”, dificilmente ocorrerá aos alunos essa pergunta; ou seja, os problemas já são uma situação de “aplicação” do

> conteúdo matemático e mostram, de forma a não deixar dúvidas, “para que ele serve”. Esse é um fator de auto-avaliação para o professor: se ele soube escolher bem os problemas, ou se implantou em sala de aula uma dinâmica onde os próprios alunos se deparem e se proponham os problemas que deverão resolver, então essa pergunta não deverá aparecer.

Tornando-se hábil em resolver problemas, o aluno construirá uma atitude positiva perante a Matemática como Ciência. Segundo os PCNs:

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (PCNs)

> Um dos aspectos fundamentais que rege o trabalho com Educação Matemática é que esta esteja voltada para a perspectiva de desenvolver nos alunos a capacidade de aprender a aprender e, principalmente, aprender a mobilizar seus conhecimentos a fim de agir diante das situações Matemáticas cotidianas para, então, conseguirem ler e compreender o mundo que para eles se apresenta. Assim, o desafio do processo educativo é construir condições do aprender a aprender e do saber pensar (DEMO, 1996, p.30).

É importante enfatizar, portanto, que a resolução de problemas está presente no nosso dia a dia. Se o aluno aprende estratégias na sala de aula, estará também capacitado a enfrentar esses desafios ao longo de sua vida em outras áreas de conhecimento.

Segundo os PCNs:

> A facilidade de acessar, selecionar e processar informações está permitindo descobrir novas fronteiras do conhecimento, nas quais este se revela cada vez mais integrado. Integradas são também as competências e habilidades requeridas por uma organização da produção na qual criatividade, autonomia e capacidade de solucionar problemas serão cada vez mais importantes, comparadas à repetição de tarefas rotineiras.

Segundo CARVALHO:

> A Matemática tem um papel importante na construção da cidadania. Pois é, através desta ciência, que muitas situações cotidianas são entendidas e resolvidas de forma crítica. E, é papel da escola, enriquecer as estruturas de pensamento, de modo que, dispondo de um rol maior de possibilidades, o aluno possa optar, no futuro, por soluções mais eficazes (CARVALHO, 1994, p.52).

Segundo SADOVSKY (2007, p.15):

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos, traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.

Segundo os PCNs:

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Esta competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido.

1.2.3 Sintetizando

Em resumo, as vantagens dessa metodologia podem ser assim enumeradas:

- Motivação dos alunos e do professor
- Processo de aprendizagem mais eficiente. Esta se realiza por processos mentais criados pelo próprio aluno e não via professor.
- Desenvolvimento do raciocínio lógico e dedutivo.
- Compreensão da utilidade da Matemática
- Preparação para futuras profissões e para enfrentar situações na vida adulta
- Compreensão mais apurada do seu entorno e do mundo em que vivemos. Desenvolvimento do aluno como cidadão crítico e transformador de sua realidade.

1.2.4 Os Parâmetros Curriculares Nacionais

Os PCNs para o ensino médio espelham essa preocupação no que diz respeito a uma metodologia de ensino mais eficiente, baseada, entre outros, em resolução de problemas. Eis um extrato da lei que regulamenta os PCNs:

> Art. 5º. Para cumprir as finalidades do ensino médio previstas pela lei, as escolas organizarão seus currículos de modo a:
>
> I - ter presente que os conteúdos curriculares não são fins em si mesmos, mas meios básicos para constituir competências cognitivas ou sociais, priorizando-as sobre as informações;

> II - adotar metodologias de ensino diversificadas, que estimulem a reconstrução do conhecimento e mobilizem o raciocínio, a experimentação, a solução de problemas e outras competências cognitivas superiores; (lei que regulamenta os PCNs)

Segundo os PCNs:

> Para alcançar os objetivos estabelecidos de promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática, a proposta dos PCNEM privilegia o tratamento de situações problema, preferencialmente tomadas em contexto real. A resolução de problemas é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado. (PCNs Ciências da Natureza)

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (PCNs Ciências da Natureza)

> Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (PCNs Ciências da Natureza)

1.2.5 Contextualização e interdisciplinaridade

Contextualização e interdisciplinaridade são temas intrínsecos à metodologia da problematização em Matemática. Isso porque os problemas, para atenderem aos requisitos anteriormente citados, devem abranger conceitos de outros campos da ciência (daí a interdisciplinaridade) e ser próximos ao quotidiano do aluno (daí a contextualização).

Segundo os PCNs:

> Quando se recomenda a contextualização como princípio de organização curricular, o que se pretende é facilitar a aplicação da experiência escolar para a compreensão da experiência pessoal em níveis mais sistemáticos e abstratos e o aproveitamento da experiência pessoal para facilitar o processo de concreção dos conhecimentos abstratos que a escola trabalha. Isso significa que a ponte entre teoria e prática, recomendada pela LDB e comentada por Castro, deve ser de mão dupla. Em ambas as direções estão em jogo competências cognitivas básicas: raciocínio abstrato, capacidade de compreensão de situações novas, que é a base da solução de problemas, para mencionar apenas duas. Não se entenda, portanto, a contextualização como banalização do conteúdo das disciplinas, numa perspectiva espontaneísta. Mas como recurso pedagógico para tornar a constituição de conhecimentos um processo permanente de formação de capacidades intelectuais superiores. Capacidades que permitam transitar inteligentemente do mundo da experiência imediata e espontânea para o plano das abstrações e, deste, para a reorganização da experiência imediata, de forma a aprender que situações particulares e concretas podem ter uma estrutura geral. (PCNs Bases Legais, 2000)

Segundo BIAGGI (2000),

> Não é possível preparar alunos capazes de solucionar problemas ensinando conceitos matemáticos desvinculados da realidade, ou que se mostrem sem significado para eles, esperando que saibam como utilizá-los no futuro.

Segundo KLINE:

> Talvez pareça estranho que a grande significação da Matemática resida fora da Matemática, mas deve-se contar com esse fato. Para a maioria das pessoas, inclusive os grandes matemáticos, a riqueza e os valores que se ligam à Matemática derivam de seu uso no estudar o mundo real. A Matemática é um meio que conduz a um fim. Empregam-se conceitos e raciocínios para atingir resultados no tocante a coisas reais. (KLINE, 1976, p. 182)

Segundo WALDHELM:

> Através da estratégia de trabalho com situações-problema interdisciplinares pode-se colaborar na formação integral do cidadão na escola, evitando os equívocos e limitações de uma visão compartimentada do conhecimento. Propõe-se que a organização e o tratamento dos conteúdos do ensino e as situações de aprendizagem sejam feitos de modo a destacar as múltiplas interações entre as várias disciplinas do currículo, superando, sempre que possível, a fragmentação entre elas.
>
> [...] ao planejar uma aula, o professor precisa buscar relações, formas de integrações e articulação interdisciplinar entre os diversos conteúdos estudados, para possibilitar ao aluno uma visão mais abrangente, mais global sobre o que esta sendo objeto de estudo, evitando assim, o estudo de disciplinas estanques descontextualizados, isolados... respeitando o nível do conhecimento e compreensão dos alunos frente ao que tiver sendo enfocado.

1.3 ESCOLHA DOS PROBLEMAS

O nosso interesse é o de eleger bons problemas tendo como objetivo o processo ensino-aprendizagem de Matemática. Neste sentido, segundo PEREIRA (2002), é importante que o problema:

- tenha enunciado acessível e de fácil compreensão;
- exercite o pensar matemático do aluno;
- exija criatividade na resolução;
- possa servir de trampolim para a introdução ou consolidação de conceitos matemáticos;
- não seja muito fácil ou muito difícil e sim natural e interessante.

Segundo DANTE, um bom problema deve:

- ser desafiador para o aluno;
- ser real;
- ser interessante;
- ser o elemento de um problema realmente desconhecido;
- não consistir na aplicação direta de uma ou mais operações aritméticas;
- ter um nível adequado de dificuldade.

1.4 AÇÃO DO PROFESSOR

Ao colocar situações-problema em sala de aula, o professor deve atuar como um mediador, facilitador das ideias construídas pelos alunos, fazendo com que os alunos pensem e gerem seu próprio saber. É necessário que seja dado ao aluno tempo suficiente para essa construção, assim como a possibilidade de errar.

Conforme WALLE (1999, p.221): "ensinar Matemática através da Resolução de Problemas não significa, simplesmente, apresentar um problema, sentar-se e esperar que uma mágica aconteça".

Para tanto, é necessário apresentar problemas contextualizados que contenham um conteúdo que se quer ensinar, que levem o aluno a pensar e a construir, a partir do conhecimento prévio já estabelecido, caminhos para a solução do problema e, com isso, a assimilação do conceito matemático desejado.

Esta assimilação é realizada em duas etapas. Primeiramente, a particularidade da solução do problema específico traz agregada a construção pelo aluno de um conceito matemático. Após isso, é necessário conceituar, generalizar. É aqui que o saber matemático é institucionalizado, generalizado, para ser utilizado em outros contextos.

Segundo BICUDO e BORBA (2005, p.222):

> A compreensão da resolução de um problema só se efetiva se o aluno, ao final, é capaz de comprovar os resultados, avaliar hipóteses e compreender diferentes algoritmos. O processo de escolha das estratégias de resolução é mais importante do que o produto final, pois, fornece valiosas informações sobre o acúmulo de conhecimento do aluno.

O caminho a percorrer, portanto, não é curto. O papel do professor é de não só construir os problemas adequados para esse fim, como também facilitar, intervir na busca, evidenciar os processos de pensamento, mas sem impor o caminho da solução inicial (concreta) e o da generalização (abstrata).

Resumindo, são duas as etapas, conforme MANDARINO:

- explorar um conceito matemático com uma abordagem concreta e aplicada
- levantar as características e conceitos generalizáveis, dissociadas de um contexto.

Essa metodologia apresenta aparentes desvantagens com relação ao formato de aula clássico conteudista. Em primeiro lugar, o processo de ensino-aprendizagem demanda mais tempo. Isso, porém, configura um ganho posterior, uma vez que os alunos fixam, assimilam os conceitos de maneira muito mais efetiva. O segundo ponto é que o método dá mais trabalho ao professor, o que é questionável, considerando que o objetivo primário da aula é que os alunos aprendam. Outro aspecto é que o planejamento deve ser mais flexível, assim como o próprio professor, uma vez que poderão ocorrer situações menos previsíveis no transcorrer da construção do conhecimento por parte dos alunos.

O importante é que o professor dê margem à autonomia dos alunos, e que evite saltar etapas no processo.

Segundo NUÑEZ (2004 p.148), “como características da situação-problema, consideramos a necessidade de representar algo novo na atividade intelectual do estudante e a possibilidade de motivar a atividade deste na tarefa de busca e construção do conhecimento”.

Segundo VALDÉS e RAMÍREZ (2000):

> O professor obterá seus objetivos quando proporcionar ao aluno no momento da resolução:
>
> - situações-problema que sejam familiares a sua realidade;
> - a ajuda necessária para compreender os enunciados, para que possa exercitar sua capacidade mental e refletir sobre o seu próprio processo de pensamento, a fim de melhorá-lo conscientemente;
> - o estímulo necessário para que o aluno confie em si mesmo e use a sua criatividade, no intuito de que ele explore e descubra novas estratégias de resolução;
> - preparação para resolver outras situações-problema da Matemática ou de cunho científico, que não sejam apenas na escola, mas sim no seu cotidiano;
> - dar o tempo necessário para que o estudante elabore seu pensamento para a busca de soluções frente à situação-problema apresentada;
> - deixar que o aluno pense e crie suas próprias estratégias de resolução.

O professor deve se preocupar no uso de uma linguagem adequada ao entendimento do seu público, não só pelo nível de maturidade, mas também pela familiaridade (ou falta desta) conceitual e simbólica.

Nunca deve o professor se esquecer que é o aluno o centro do processo de ensino-aprendizagem. Deve-se transformar o aluno em um <u>sujeito</u> <u>ativo</u> na construção de seu próprio saber. É o que os educadores matemáticos denominam “fazer Matemática”.

Conforme PATERLINI:

> “Fazer Matemática” significa desenvolver processos característicos da atividade Matemática: a construção e o estudo de objetos abstratos relacionados com os aspectos quantidade e forma de natureza concreta ou subjetiva, assim como análise das relações entre esses objetos. Além disso,

> a Matemática tem a proposta, construída historicamente, de ser uma ciência exata, de modo que seus objetos são definidos em estruturas lógico-dedutivas e as relações entre esses objetos são descritas por afirmações que devem ser inseridas nessas estruturas. Como se costuma dizer, as afirmações devem ser demonstradas.

Segundo POLYA:

> Para aprender eficazmente, o aluno deve descobrir, por si só, uma parte tão grande da matéria ensinada quanto possível. A Matemática não é um esporte para espectadores: não pode ser apreciada e aprendida sem participação ativa.

Desta forma, a Matemática passa a ser vista pelos alunos como uma ciência menos formal ou abstrata, mais dinâmica e de mais fácil compreensão. As aulas se tornam menos monótonas e a Matemática passa a ter, para o aluno, um papel significativo na sua vida.

Em síntese, os problemas podem representar um ponto de partida na construção do conhecimento e não um fim, mero recurso de aplicação de técnicas.

É preciso dar-se conta que ensinar não é transmitir conhecimento, mas desenvolver competência. Competência para a sala de aula e também para a vida adulta e a compreensão da sociedade em que vivem. O ideal é que cada aluno possa nela participar ativamente. Os educadores matemáticos denominam de “alfabetização Matemática” ou “numeramento” ao conhecimento matemático que é parte essencial para a compreensão e a integração na sociedade moderna.

1.5 BASE TEÓRICA

1.5.1 Piaget e a aprendizagem significativa

Na teoria construtivista idealizada por Jean Piaget, o conhecimento é construído num processo de mão dupla entre o sujeito (aluno) e o objeto (conteúdos matemáticos).

Segundo Jean Piaget, é o desequilíbrio que gera a aprendizagem. A construção do conhecimento ocorre quando acontecem ações mentais que, provocando o desequilíbrio, resultam em acomodação e assimilação dessas ações e, assim, em construção de novos esquemas ou conhecimento. Em outras palavras, o aluno busca assimilar o estímulo: tenta fazer uma assimilação e, depois, uma acomodação. O novo equilíbrio é, então, alcançado. A assimilação é o processo pelo qual o aluno cognitivamente capta a informação e a organiza possibilitando, assim, a ampliação de seus esquemas. Uma mera transmissão de informações ou conteúdos por parte do professor não garante o ciclo mental da assimilação do conhecimento.

Afirma o próprio PIAGET:

> Muitas operações lógico-Matemáticas já estão presentes na criança antes da idade escolar sob formas elementares ou triviais, mas não menos significativas. Uma coisa é aplicar praticamente certas operações, outra é tomar consciência das mesmas para delas extrair um conhecimento reflexivo e teórico. Todo ser humano tem o direito de ser colocado, durante sua formação, em um meio escolar de tal ordem que lhe seja possível chegar ao ponto de elaborar, até a conclusão, os instrumentos indispensáveis de adaptação que são as operações da lógica.

Segundo a teoria construtivista, o ser humano interage constantemente com seu meio; os desequilíbrios resultantes levam a novos equilíbrios sucessivamente.

Um problema matemático pode gerar esse desequilíbrio necessário e fomentar a construção do conhecimento no aluno.

Da teoria construtivista surge o conceito de aprendizagem significativa, que, no campo da Matemática, pode ser impulsionada pela resolução de problemas. De acordo com MADRUGA (1996):

> A aprendizagem significativa distingue-se das demais por duas características, a primeira é que seu conteúdo pode ser relacionado com o conhecimento prévio do aluno e a segunda é que este deve adotar uma atitude favorável para tal tarefa, dotando de significado próprio os conteúdos que assimila. A partir desta perspectiva, a tarefa do professor consiste em programar, organizar e sequenciar os conteúdos, de forma que o aluno possa realizar tal aprendizagem, incorporando os novos conhecimentos em sua estrutura cognitiva prévia.
>
> O que caracteriza uma aprendizagem como sendo significativa é o fato dela envolver o indivíduo como um todo. Esta deve ir ao encontro de suas necessidades, gerando assim um desequilíbrio para o mesmo, o que resulta em uma energia impulsora para que vá à busca daquilo que necessita aprender.
>
> A aprendizagem vista sob essa ótica, vai ao encontro da teoria piagetiana, pois de acordo com ela, há uma situação de desequilíbrio entre o sujeito e o objeto a ser estudado. Desta forma, o sujeito sente-se atraído a agir sobre o objeto, de maneira que possa superar este desnível entre eles.
>
> Então, é de extrema importância que haja vínculos desafiadores entre o aluno e a matéria de ensino, para que assim o mesmo perceba o desnível entre si e o conteúdo a ser estudado. Se isso não ocorrer, o educando não será impulsionado a estudar aquilo a que está sendo submetido. Não havendo motivação, o aluno não se porta de maneira ativa diante da matéria e sem iniciativa e curiosidade em descobrir, não ocorre o processo de conhecimento.

1.5.2 Onuchic e a resolução de problemas

Foi a partir dos anos 70 que a resolução de problemas ganhou mais espaço no mundo, afiançando-se como uma metodologia primordial no ensino da Matemática. No Brasil, a principal pesquisadora nesse campo foi LOURDES ONUCHIC (a partir dos anos 90), que afirma:

> A Resolução de Problemas passa, a ser pensada como uma metodologia de ensino, ponto de partida e meio de se ensinar Matemática. Sob esse enfoque, problemas são propostos de modo a contribuir para a construção de novos conceitos e novos conteúdos, antes mesmo de sua apresentação em linguagem Matemática formal.
>
> A metodologia não deve ser confundida com a mera introdução de problemas de aplicação, geralmente encontrados nos finais dos capítulos dos livros-textos de Matemática. Ela consiste em apresentar aos alunos, já no início do tratamento de um dado conteúdo, uma ou mais situações-problemas que possam levá-los a raciocinar sobre a necessidade de construir novos conceitos e processos, bem como a de associar outros periféricos, que venham a se conectar numa rede de significados e, também, para que possam trazer à tona as concepções prévias que eventualmente eles tenham sobre os campos conceituais envolvidos na resolução. Assim, este processo requer um amplo repertório de conhecimento, não se restringindo às particularidades técnicas e aos conceitos, mas estendendo-se às relações entre eles e aos princípios fundamentais que os unificam. O problema não deve ser tratado como um caso isolado, mas como um passo para alcançar a natureza interna da Matemática, assim como seus usos e aplicações. (ONUCHIC)

Somente após o envolvimento com as situações problema e síntese dos resultados dos alunos é que o professor sistematiza os novos conceitos matemáticos. Estes podem ser retomados posteriormente com outros problemas matemáticos.

Pela concepção de ONUCHIC (1999),

> Problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver, isto é, qualquer situação que estimule o aluno a pensar, que

> possa interessá-lo, que lhe seja desafiadora e não trivial. Também é desejável que ela tenha reflexo na realidade dos alunos a que se destina. Compreender os dados de um problema, tomar decisões para resolvê-lo, estabelecer relações, saber comunicar resultados e ser capaz de usar técnicas conhecidas são aspectos que devem ser estimulados em um processo de aprendizagem através da resolução de problemas. No decorrer desse processo, a formalização, o simbolismo e as técnicas precisas são introduzidos depois da resolução trabalhada, dando-se liberdade aos alunos, evitando-se direcioná-los para "o que pensar" ou "o que fazer", conduzindo-os somente em casos de maiores dificuldades, ou seja, quando eles não sabem como agir.

Nesse modelo, os alunos são, portanto, sujeitos ativos do processo de ensino-aprendizagem e os problemas são instrumentos planejados para introduzir um conceito matemático.

1.5.3 Perrenoud

Philippe Perrenoud é um educador suíço que pesquisou sobre a necessidade de profissionalização de professores e relacionou uma série de competências necessárias para ensinar, com ênfase em situações-problema:

- Conceber e administrar situações-problema ajustadas ao nível e às possibilidades dos alunos.
- Estabelecer laços com as teorias subjacentes às atividades de aprendizagem.
- Envolver os alunos em suas aprendizagens e em seu trabalho
- Suscitar o desejo de aprender, explicitar a relação com o saber, o sentido do trabalho escolar e desenvolver no aluno a capacidade de autoavaliação.
- Relacionar os conteúdos com os objetivos e as situações de aprendizagem.

- Trabalhar a partir das representações dos alunos (uma boa pedagogia não ignora o que os alunos pensam e sabem)
- Trabalhar a partir das concepções dos alunos, dialogar com eles, fazer com que estas sejam avaliadas para aproximá-las dos conhecimentos científicos a serem ensinados.
- Trabalhar a partir dos erros e dos obstáculos à aprendizagem: a didática das disciplinas interessa-se cada vez mais pelos erros e tenta compreendê-los, antes de combatê-los.
- Considerar o erro como uma ferramenta para ensinar, um revelador dos mecanismos de pensamento do aluno.
- Construir e planejar dispositivos e sequências didáticas: a competência consiste na busca de um amplo repertório de dispositivos e de sequências de aprendizagem e na identificação do que eles mobilizam e ensinam.
- Envolver os alunos: uma sequência didática só se desenvolve se os alunos a aceitarem e tiverem realmente vontade de saber.
- A competência passa pela arte de comunicar, seduzir, encorajar, mobilizar, envolvendo-se como pessoa.
- Administrar a heterogeneidade no âmbito de uma turma; mesmo a turmas organizadas em torno de alunos da mesma idade não são verdadeiramente homogêneas devido às disparidades nos seus diferentes níveis de desenvolvimento.
- Suscitar o desejo de aprender, explicitar a relação com o saber, o sentido do trabalho escolar e desenvolver na criança a capacidade de autoavaliação.
- Conceber e administrar situações-problema ajustadas ao nível e às possibilidades dos alunos.

Características que deve apresentar uma situação-problema, conforme Perrenoud:

(i) ela deve constituir um obstáculo para a turma.

(ii) deve representar o estudo de uma situação concreta, hipóteses.

(iii) deve mostrar-se como um verdadeiro enigma para ser resolvido.

(iv) deve oferecer resistência suficiente.

(v) deve promover um debate científico dentro da classe.

(vi) a validação da solução é feita conjuntamente (não pelo professor).

(vii) deve requerer o reexame coletivo do caminho percorrido à consolidação dos procedimentos.

2. PRÁTICA DE ENSINO

2.1 MOTIVAÇÃO

Pelas minhas experiências anteriores em sala de aula, em confronto com as aprendizagens que adquiri no meu Curso de Licenciatura, deparei-me com o seguinte dilema:

- continuar o caminho da prática expositiva conteudista, contrariando as premissas didáticas modernas, o que poderia reduzir o potencial de aprendizagem dos meus alunos
- ou buscar novas metodologias que tornem a relação ensino-aprendizagem mais produtiva, exigindo, no entanto, um trabalho de preparação mais árduo da minha parte?

Os obstáculos deste segundo caminho, para grande parte dos docentes, são muitos. Um deles passa pelo convencimento do professor que o método tradicional traz menos benefícios ao aluno, o que pode ser aprimorado com programas de reciclagens metodológicas. Outro obstáculo é a própria falta de motivação do professor.

Outro problema, foco deste estudo, é a escassez ou dispersão de informações, dados e ferramentas concretas que possam ser utilizados em sala de aula ao se utilizar essas novas metodologias.

Muitos autores afirmam não ser conveniente apresentar “receitas prontas” para aplicar em sala de aula, pois as aulas devem ser moldadas segundo seu público (os alunos), e somente o professor é capaz de, presencialmente, escolher os melhores instrumentos a serem aplicados em sala.

Essa afirmação, embora trace um caminho desejável – reforçando a importância do papel do professor – traz uma consequência negativa: hoje em dia, muito se estuda sobre novas metodologias, sobre suas vantagens, seus resultados práticos satisfatórios. Porém, as ferramentas para pô-las em prática se encontram dispersas, truncadas, desconjuntas, difíceis de ser alcançadas pelo professor comum, muitas vezes ausente.

A ideia de que o professor tenha de conhecer seu grupo para, a partir daí, procurar a melhor metodologia e fazer uma busca das ferramentas que melhor se amoldam para cada uma das turmas e conteúdos parece estar completamente fora da realidade do corpo docente brasileiro.

O conceito do presente trabalho é suprir ferramentas e validá-las para uma dessas metodologias: o ensino por meio de situações-problema. Uma vantagem dessa metodologia é que ela pode ser usada mesmo na ausência de qualquer recurso material extraclasse, tais como kit de jogos, laboratório, material de informática, etc. Necessita apenas, na maioria das vezes, das ferramentas padrão da aula tradicional: giz e quadro.

Para pôr em prática a metodologia em estudo, foi construído um banco de problemas matemáticos. Alguns problemas desse banco foram utilizados na prática de ensino na sala de aula de uma turma do ensino médio, no primeiro semestre de 2012.

2.2 A CONSTRUÇÃO DO BANCO DE PROBLEMAS

O trabalho prático consistiu em montar um banco de problemas para um determinado semestre do Curso de Ensino Médio Profissionalizante da UTFPR e aplicar alguns desses problemas em sala de aula.

O semestre designado foi o segundo, correspondente à disciplina Matemática II.

O conteúdo programático era:

1. Função Exponencial.
2. Logaritmo.
3. Função Logarítmica.
4. Sequências.
5. Progressões Aritméticas.
6. Progressões Geométricas.

O detalhamento contido no programa da UTFPR apresenta os seguintes conteúdos:

Função Exponencial

- Definição de Função Exponencial.
- Equações Exponenciais.
- Gráfico de uma Função Exponencial.
- Inequação exponencial.

Função Logarítmica

- Definição de Logaritmo.
- Propriedades dos Logaritmos.
- Mudança de Base.
- Equações Logarítmicas.
- Gráfico de uma Função Logarítmica
- Inequação logarítmica.

Sequências

- Definição de Sequências.
- Exemplos de Sequências.

Progressões Aritméticas

- Definição de Progressões Aritméticas.
- Fórmula do Termo Geral da Progressão Aritmética.
- Fórmula da Soma dos Termos da Progressão Aritmética.

Progressões Geométricas.

- Definição de Progressões Geométricas.
- Fórmula do Termo Geral Progressão Geométrica.
- Fórmula da Soma dos Termos da Progressão Geométrica.
- Propriedades de uma progressão geométrica.

Essa sequência é tradicional nas escolas brasileiras, mas a introdução do conceito de progressões pareceria ser mais adequada de ser dada antes das funções exponenciais.

Estranhamente, os conteúdos são geralmente dissociados. Perde-se a oportunidade de apresentar ao aluno o estrito vínculo que existe, por exemplo, entre progressões geométricas e funções exponenciais. A ideia é, justamente, apresentar situações-problema que façam esse vínculo, que façam com que o aluno perceba, por si só, que a função exponencial é uma extensão descomplicada do termo geral de uma progressão geométrica, com expoente fracionário, por exemplo.

Como exemplo, poderia ser apresentada a seguinte situação problema, extraída do banco de problemas:

- A população de ratos em Curitiba está dobrando a cada década. Se hoje essa população é de 100.000 indivíduos, qual será a população daqui a cinco décadas? E daqui a cinco décadas e meia?

Para o aluno que já assimilou o conceito de progressões geométricas, a primeira pergunta seria uma aplicação direta dos seus conhecimentos. Já a segunda pergunta poderia servir como introdução ao conceito de funções exponenciais. A assimilação por parte do aluno seria bastante natural, não apresentaria a dificuldade de um “conteúdo novo”.

Surpreendentemente, esse tipo de problema está quase ausente nos livros didáticos brasileiros, que têm por hábito apresentar cada conteúdo de maneira independente, fato que não facilita a aprendizagem dos alunos.

Situação semelhante se observa com a Matemática Financeira, com o agravante de ser conteúdo geralmente ensinado com um intervalo de tempo de um ano ou mais com relação às progressões.

A ementa de Matemática 4, ou seja, um ano depois do semestre em questão, apresenta, entre outros, conteúdos de Matemática financeira:

Matemática Financeira.

- Taxa de Porcentagem.
- Lucro e Prejuízo.
- Acréscimos e Descontos Sucessivos.
- Juro Simples.
- Juro Composto e Montante.

Curiosamente, a tendência dos currículos das escolas brasileiras é de apresentar os conteúdos de Matemática Financeira dissociados dos das progressões e das funções exponenciais, ignorando o vínculo temático evidente entre elas.

Numa melhor prática, dever-se-ia fazer o aluno perceber que a fórmula do montante em Matemática financeira coincide com a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica, que ele mesmo deduziu. O professor deve conduzir o aluno a perceber que:

- o Montante corresponde ao temo geral da PG;
- o Capital inicial corresponde ao termo inicial da PG;
- o juro unificado (1+i) corresponde à razão da PG.

Para aprimorar a sequência didática, foi feita, com autorização da coordenação do Departamento de Matemática da UTFPR, uma alteração na ordem dos conteúdos, além da inclusão da Matemática financeira.

A sequência ficou assim definida:

1. Progressões aritméticas
2. Progressões geométricas e Matemática Financeira
3. Funções exponenciais
4. Logaritmos

2.3 APLICAÇÃO

Conforme salientado na primeira parte deste trabalho, a escolha adequada da situação-problema é fundamental para o êxito da metodologia. O enunciado deve ser de fácil compreensão, e a situação a ser resolvida tem de ser exatamente a do conteúdo que se quer ensinar. A ideia é de uma aprendizagem gradual e evolutiva.

Exemplo: para introduzir as progressões geométricas, tendo o aluno conhecimento de progressões aritméticas, ele se depara com um problema que, claramente, se distingue dos anteriores pela forma de construção da relação entre seus termos. O aluno é induzido a refletir para construir uma formulação diferente que o leve à nova solução.

Outro exemplo de aprendizagem gradual e evolutiva é o problema da população de ratos já mencionada, onde o aluno é levado a utilizar um expoente fracionário, o que pode servir para introduzir o conceito de função exponencial, a partir do conhecimento prévio de progressão geométrica.

Mais um exemplo poderia ser da evolução do Montante de uma aplicação financeira, em que o aluno naturalmente tenderá a associá-la com o termo geral de uma PG, fazendo posterior correlação com a fórmula do montante, percebendo ser o mesmo conceito. Outra possibilidade seria a de apresentar um exemplo de juros compostos como introdução do conceito de progressão geométrica.

Um problema apresentando aprendizagem evolutiva para o conceito de logaritmo pode ser um exercício de progressão geométrica já conhecido, mas incluindo uma questão adicional em que a incógnita passa a ser o expoente, necessitando da função inversa da exponencial. Vários desses exemplos são apresentados no banco de problemas, no item “Logaritmos”.

É muitas vezes interessante retomar uma situação-problema já estudada, incluindo uma pergunta adicional que traga um novo conceito. Os conteúdos de progressões geométricas, funções exponenciais e logaritmos são muito propícios a esse tipo de situação problema.

2.4 EM SALA DE AULA

Conforme já descrito na primeira parte deste trabalho, é importante salientar que, tanto a busca da solução do problema específico como sua generalização, devem ser realizados <u>pelos próprios alunos</u>, atuando o professor apenas como mediador e condutor. Os alunos devem gerar por si sós o novo saber, com o professor como facilitador, e não como centro do processo.

É essencial também que o professor respeite e planeje em sua aula as <u>duas etapas</u> do processo, conforme salientado na parte teórica deste trabalho: a solução do problema específico e a sua generalização, institucionalização.

Em outro momento, podem ser propostos novos problemas similares em outro contexto, para fixar o conceito adquirido.

É interessante sugerir aos alunos, no caso de problemas de progressões, a construção de uma tabela, para que o aluno possa perceber a construção do novo termo em função do anterior. A partir daí, ele pode, com apoio do professor, descobrir a regra de construção de cada termo da progressão.

É importante que o professor não se prenda a uma metodologia em prejuízo do conteúdo. Conceitos, propriedades e operações desvinculados de problemas podem estar presentes. A fase de institucionalização deve ser reforçada, para que o aluno possa aplicar os padrões aprendidos em qualquer situação.

A sequência de conteúdos não é única. Por exemplo, o conceito de decaimento radiativo pode ser passado dentro do conteúdo de progressões geométricas ou de funções exponenciais. Mas é importante que o aluno perceba o vínculo existente entre esses conceitos.

Também é importante que o aluno perceba a conexão entre taxa de crescimento (ou de decaimento), a taxa de juros (ou de devaluação) e a razão de uma progressão geométrica.

Assim, os conteúdos estando intimamente relacionados, o aluno aprende com mais facilidade e passa a ver a Matemática de uma maneira mais natural e acessível.

2.5 BANCO DE PROBLEMAS

2.5.1 Progressões Aritméticas

2.5.1.1 Situação problema

Como dispor (de forma equidistante) vinte telefones de emergência entre os quilômetros 131 e 320 de uma rodovia? Em qual quilômetro está situado o quinto telefone? E o décimo? E o sétimo? E o i-ésimo?

Extraído de http://www.scribd.com/doc/74397926/AULA-1-PROGRESSAO-ARITMETICA-I acessado em 20/03/2012

Comentário: Excelente problema para introduzir o conceito de progressão aritmética. É um exemplo real e prático, conduz o aluno a descobrir por si só o termo geral de uma PA.

2.5.1.2 Situação problema

(UFPel-RS) Uma harpa triangular deverá ser construída tendo 13 cordas equidistantes. Os comprimentos da maior e da menor são respectivamente 2m e 0,5m. Quais os comprimentos das demais cordas?

Comentário: Excelente problema prático.

2.5.1.3 Situação problema

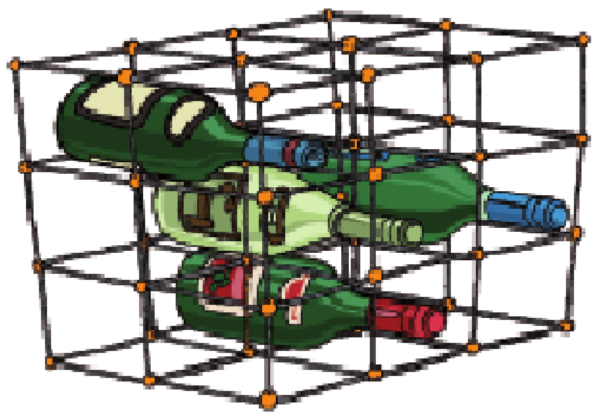
Queremos construir um suporte para garrafas como o da figura, em que cada garraga ocupa duas celas. Observe que neste cabem nove garrafas.

Quantas bolinhas e quantas varetas são necessárias para construir um suporte que comporte doze garrafas?

Tradução nossa

Extraído de http://www.edistribucion.es/anayaeducacion/pro, acessado em 28/03/2012

> Queremos construir un botellero como el de la figura, en el que cada botella ocupa dos celdillas. Observa que en este caben nueve botellas.
>
> ¿Cuántas bolas y cuántos palos son necesarios para hacer uno en el que quepan doce botellas?



Comentário: Problema prático de progressões aritméticas.

2.5.1.4 Situação problema

Para embelezar uma calçada reta, coloca-se, ao longo de sua linha central, uma fileira de vasos hexagonais, cercados por lajotas do mesmo formato. Deseja-se saber:

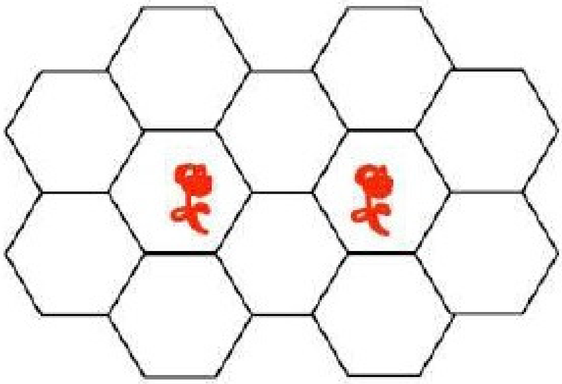
- o número de lajotas necessárias para colocar uma fileira de 20 vasos.
- Quantas lajotas são necessárias para *n* vasos?

Tradução nossa.

Extraído de http://www.juntadeandalucia.es/averroes/~29700989/departamentos/departamentos/departamento_de_matemat, acessado em 27/03/2012

Para embellecer un paseo recto, se coloca, a lo largo de su línea central, una fila de jardineras hexagonales, rodeadas de baldosas de la misma forma. Se desea saber:

- el número de baldosas necesarias para colocar una hilera de 20 jardineras.
- ¿Cuántas baldosas se necesitan para *n* jardineras?



Comentário: Problema prático de progressões aritméticas.

2.5.1.5 *Situação problema*

Você decide economizar dinheiro da seguinte forma: no primeiro mês, guarda R$20,00. Nos meses seguintes, guarda sempre R$20,00 a mais que no mês anterior. Quanto você guarda no i-ésimo mês?

Extraído de http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/Produto_Wilton , acessado em 28/03/2012

Comentário: Ótimo problema para introduzir o conteúdo.

2.5.1.6 *Situação problema*

A corrida de São Silvestre é disputada tradicionalmente no dia 31 de dezembro na cidade de São Paulo. E se você decidisse participar da São Silvestre?

Para chegar a correr 15 quilômetros, seria prudente fazer um programa de treinamento: começar correndo uma distância pequena e depois ir aos poucos aumentando o percurso até completar os 15 km.

Poderíamos pensar no seguinte programa:

1ª semana: correr 600 metros por dia.

2ª semana: correr 1000 metros por dia

3ª semana: correr 1400 metros por dia e assim por diante.

a) Quantos quilômetros você estaria correndo na 12ª semana?

b) Quantos quilômetros você estaria correndo na i-ésima semana?

c) Em que semana você atingiria os 15 000 metros do percurso?

Extraído de http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/Produto_Wilton , acessado em 28/03/2012

Comentário: Ótimo problema para introduzir o conceito de progressão aritmética e fazer o aluno descobrir a fórmula do termo geral.

2.5.1.7 *Situação problema*

Qual o milésimo número ímpar positivo?

Extraído de http://www.algosobre.com.br/matematica/progressao-aritmetica-pa.html , acessado em 15/03/2012

Comentário: Problema não recomendado como introdução ao conteúdo, por ser um problema matemático fechado, cuja conexão com o mundo real é indireta. Pode ser aplicado como reforço ao conteúdo já adquirido.

2.5.1.8 *Situação problema*

(Unicamp 2005) A ANATEL determina que as emissoras de rádio FM utilizem as freqüências de 87,9 a 107,9 MHz, e que haja uma diferença de 0,2 MHz entre emissoras com freqüências vizinhas. A cada emissora, identificada por sua freqüência, é associado um canal, que é um número natural que começa em 200. Desta forma, à emissora cuja freqüência é de 87,9 MHz corresponde o canal 200; à seguinte, cuja freqüência é de 88,1 MHz, corresponde o canal 201, e assim por diante. Pergunta-se:

a) Quantas emissoras FM podem funcionar [na mesma região], respeitando-se o intervalo de freqüências permitido pela ANATEL? Qual o número do canal com maior freqüência?

b) Os canais 200 e 285 são reservados para uso exclusivo das rádios comunitárias. Qual a freqüência do canal 285, supondo que todas as freqüências possíveis são utilizadas?

Comentário: Problema prático de progressões aritméticas.

2.5.1.9 *Situação problema*

Hector se aprimora no video-game cada vez que ele joga. Ele obtém 20 pontos no primeiro jogo, 25 pontos no segundo, 30 no terceiro e assim por diante. Quantos pontos ele obterá no décimo-quinto jogo?

Tradução nossa

Extraído de http://www.sandi.net/cms/lib/CA01001235/Centricity/Domain/8002 , acessado em 10/03/2012

> Hector gets better and better at a video game every time he plays. He scores 20 points in the first game, 25 points in the second, 30 in the third and so on. How many points will he score in his 15th game?

Comentário: Problema prático, adequado para conceituar as progressões aritméticas e seu termo geral.

2.5.1.10 *Situação problema*

Caixas são empilhadas em um expositor de uma loja que tem formato triangular. O número de caixas em cada fileira cresce em razão constante. Existem 41 caixas na Terceira fileira (de baixo para cima). Existem 23 caixas na decimal-segunda fileira. Qual é o número máximo de fileiras com caixas?

Tradução nossa.

Extraído de http://myclass.peelschools.org/default.aspx , acessado em 28/03/2012

> Boxes are stacked in a store display in the shape of a triangle. The numbers of boxes in the rows increase by a constant amount. There are 41 boxes in the 3rd row from the bottom. There are 23 boxes in the 12th row from the bottom. What is the maximum possible number of rows of boxes?

Comentário: Problema prático de progressões aritméticas.

2.5.1.11 *Situação problema*

Franco é gerente de um plano de saúde. Recebe salário de 25000,00 por ano, mais 200,00 para cada novo cliente. Quanto ele ganhará em um ano se ele conseguir 71 novos clientes?

Tradução nossa.

Extraído de http://myclass.peelschools.org/default.aspx , acessado em 28/03/2012

> Franco is the manager of a health club. He earns a salary of $25 000 a year, plus $200 for every membership he sells. What will he earn in a year if he sells 71 memberships?

Comentário: Excelente problema prático, ideal para introduzir o conceito de progressões aritméticas.

2.5.2 Progressões Geométricas

2.5.2.1 Situação problema

(PUC/MG) Uma população de bactérias duplica de hora em hora. A população inicial é de 8 bactérias. Quantas bactérias haverá após 24h?

Comentário: Excelente problema para introduzir o conceito de progressões geométricas. De enunciado simples e claro, o resultado evidencia o rápido crescimento de uma progressão geométrica.

2.5.2.2 Situação problema

No ano de 2011 a população de certa cidade era de 2.000.000 de habitantes. Há uma previsão de que esse número aumente a uma taxa de 10% ao ano. Construa uma tabela abaixo com o número de habitantes que, de acordo com a previsão, a cidade terá em cada ano até 2020.

Extraído de http://goalbrazil.com/ecp2011/wp-content/uploads/2011/01/matem%C3%A1tica-eron.pdf, acessado em 25/03/2012

Comentário: Excelente problema para introduzir o conceito de progressões geométricas. De enunciado simples e claro, o resultado evidencia as diferenças entre as progressões aritméticas e geométricas.

2.5.2.3 Situação problema

Certa epidemia causada por um vírus atingiu uma cidade. No primeiro dia foram registrados 60 casos; no segundo dia, 180 novos casos; no terceiro 540, e nos dias subsequentes o número de novos casos se manteve na mesma progressão. Em que dia a estimativa atingiria 14 580 novos casos?

Extraído de http://matematicacmi.blogspot.com.br/2011_04_01_archive.html, acessado em 05/04/2012

Comentário: excelente problema sobre progressões geométricas.

2.5.2.4 *Situação problema*

(FGV) Uma pintura de grande importância histórica foi comprada em 1912 por 100 dólares, e, a partir de então, seu valor tem dobrado a cada 10 anos. Calcule o valor dessa pintura, em 2012.

Comentário: Bom problema que evidencia o rápido crescimento de uma PG.

2.5.2.5 *Situação problema*

Contaram um segredo à Isabel e ao Santiago às 9h da manhã, advertindo-os que não contassem para ninguém. Cada um deles, após 15min, contou somente a 3 amigos de absoluta confiança. Quinze minutos depois, cada um desses contou a outros 3 amigos apenas. Assim sucessivamente a cada 15min. Quantas pessoas conheciam o segredo às 2h da tarde?

Tradução nossa.

Extraído de http://iespadresuarez.no-ip.org/web/archivos/materiales/matematicas, acessado em 28/03/2012

> A Isabel y a Santiago, a las nueve de la mañana, les han contado un secreto con la advertencia de que no se lo cuenten a nadie. Cada uno de ellos, al cuarto de hora se lo han contado solamente a 3 amigos, por supuesto de toda confianza. Un cuarto de hora después, cada uno se lo ha contado a otros tres amigos. Y así sucesivamente cada cuarto de hora. ¿Cuánta gente conocía el secreto a las dos de la tarde?

Comentário: Problema que evidencia o rápido crescimento de uma progressão geométrica.

2.5.2.6 Situação problema

Cada vez que você dobra uma folha de papel ela duplica a sua espessura. Quando você já realizou seis ou sete dobras, você já nao consegue mais dobrá-la, mas imaginemos que isso fosse possível. Comprove que, com dez dobras, a espessura superará à do livro mais grosso da biblioteca. Supondo que uma folha de papel tenha 0,14mm de espessura:

a) Com 22 dobras a espessura superaria a altura da torre Eiffel? (321m)

b) Quantas dobras seriam necessárias para ultrapassar a altura do Monte Everest? (8848m)

c) E se você pusesse fazer 50 dobras? Ache a espessura e compare com a distância da Terra ao Sol (1,5x108km).

Tradução nossa.

Extraído de http://ispasmatematica.netne.net/matapl, acessado em 28/03/2012

> Cada vez que pliegas una hoja de papel se duplica su grosor. Cuando has hecho seis o siete dobleces ya no puedes doblarla más, pero imagina que sí pudieras. Comprueba que con diez dobleces superas el grosor del libro más gordo de la biblioteca. Si suponemos que la hoja de papel tiene 0,14 mm de grosor:
>
> a) ¿Superarías con 22 dobleces la altura 4de la torre Eiffel? (321 m)
>
> b) ¿Cuántos dobleces necesitas para que su grosor sea mayor que la altura del Everest? (8848 m)
>
> c) ¿Y si pudieras doblarlo 50 veces? Halla el grosor y compáralo con la distancia de la Tierra al Sol. (1,5 x 108km)

Comentário: Problema que evidencia o rápido crescimento de uma progressão geométrica.

2.5.2.7 *Situação problema*

Um homem possui inicialmente 100 denários e gasta cada dia 1/10 daquilo que possui. Com quanto ele ficará após 12 dias?

Tradução nossa.

Extraído de http://utenti.quipo.it/base5/numeri/progrgeom.htm, acessado em 20/02/2012

> Un uomo possiede inizialmente 100 denari e spende ogni giorno 1/10 di ciò che ha. Con quanto rimane dopo 12 giorni?

Comentário: Excelente problema para introduzir as progressões geométricas decrescentes.

2.5.2.8 *Situação problema*

(PUC SP-06) Considere que em julho de 1986 foi constatado que era despejada certa quantidade de litros de poluentes em um rio e que, a partir de então, essa quantidade dobrou a cada ano. Se hoje a quantidade de poluentes despejados nesse rio é de 2 milhões de litros, há quantos anos ela era de 250 mil litros?

Comentário: Excelente problema que requer calcular termos anteriores de uma progressão.

2.5.2.9 *Situação problema*

Muitas fotocopiadoras podem reduzir a imagem de um original. Geralmente a máxima capacidade de redução é de 64% da dimensão original. Quantas reduções, nesta configuração máxima, seriam necessárias para reduzir a imagem a menos de 10% da dimensão original?

Tradução nossa.

Extraído de http://members.shaw.ca/ekwasniewski/files/Geometric_Growth.pdf , acessado em 20/04/2012

> Many photocopiers can reduce the dimensions of the image of an original. Usually the maximum reduction capability is to 64% of the original dimensions. How many reductions, at the maximum setting, would it take to reduce an image to less than 10% of its original dimensions?

Comentário: Excelente problema do mundo real.

2.5.2.10 Situação problema

Se uma célula se divide em 2 células a cada 30 minutos, quantas células haverá após 10 horas?

Tradução nossa.

Extraído de http://mathforum.org/library/drmath/view/64555.html, acessado em 20/03/2012

> If a cell divides into 2 cells every 30 minutes, how many cells will there be at the end of 10 hours?

Comentário: Problema simples, bom para introduzir o conceito.

2.5.2.11 Situação problema

Uma população de bactérias dobra a cada oito minutos. Se a população inicia com uma célula, quanto demorará para chegar a 512 células?

Tradução nossa.

Extraído de http://edhelper.com , acessado em 28/03/2012

> A bacteria population doubles every eight minutes. If the population begins with one cell, how long will it take to grow to 512 cells?

Comentário: Bom problema, onde a incógnita é o tempo. Por ser um expoente exato, dispensa o conhecimento de logaritmo.

2.5.2.12 Situação problema

Suponha que você está observando o comportamento da duplicação de células em um laboratório. Em uma experiência você começou com uma célula e elas dobram a cada minuto. Escreva uma equação com base 2 para determinar o número (população) de células após uma hora.

Tradução nossa.

Extraído de http://www.sosmath.com/algebra/logs/log5/log53/log53.html , acessado em 02/04/2012

> Suppose that you are observing the behavior of cell duplication in a lab. In one experiment, you started with one cell and the cells doubled every minute. Write an equation with base 2 to determine the number (population) of cells after one hour.

Comentário: Bom problema para introduzir o conceito.

2.5.2.13 Situação problema

Suponha que a população de Washington em janeiro de 2006 era de 580.000 pessoas, e que 2% deles se mudavam cada 6 meses. Quantas pessoas restarão em janeiro de 2009?

Tradução nossa.

Extraído de http://www.webmail.tulyn.com/pre-calculus/exponential-functions, acessado em 15/04/2012

> Suppose the Population of D.C. in January of 2006 was 580,000 and 2 percent of them moved every 6 months. How many people would be left on January 2009?

Comentário: Problema sobre progressões descrescentes.

2.5.2.14 Situação problema

A população mundial em 1950 era estimada em 2,5 bilhões. A população cresceu exponencialmente, de modo que em 2010 havia uma estimativa de 6,8 bilhões de pessoas. Determine a taxa anual de crescimento.

Tradução nossa.

Extraído de http://www.webmail.tulyn.com/pre-calculus/exponential-functions, acessado em 05/03/2012

> The world population in 1950 was estimated to be 2.5 billion. The population has grown exponentially so that in 2010 there were an estimated 6.8 billion. Determine the yearly growth factor.

Comentário: Neste problema, a razão da progressão é a incógnita.

2.5.2.15 Situação problema

Consideremos uma colônia de bactérias se reproduzindo normalmente. Se num certo instante havia 200 bactérias na colônia, passadas 12 horas havia 600 bactérias. Quantas bactérias haverá na colônia após 36 horas da última contagem?

Extraído de http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/expolog/exponenc.htm, acessado em 05/03/2012

Comentário: Bom problema simples para introduzir o conceito de PG.

2.5.2.16 Situação problema

Uma população é inicialmente de 1800 e cresce 11% ao ano. Qual será a população após 5 anos? E após *t* anos?

Tradução nossa.

Extraído de http://lhs.jondreyer.com, acessado em 20/02/2012

A Population is initially 1800 and grows by 11% per year. What will it be after 5 years? What will it be after *t* years?

Comentário: Problema sobre progressões, onde se calcula um termo particular e depois a fórmula do termo geral.

2.5.2.17 Situação problema

A população dos Estados Unidos é de aproximadamente 300 milhões e tem crescido em aproximadamente 1% ao ano.

a. Se assim continuar, qual sera a população dentro de 20 anos?

b. Qual era a população 15 anos atrás?

Tradução nossa.

Extraído de http://lhs.jondreyer.com , acessado em 20/02/2012

The population of the US is about 300 million and has been increasing by about 1% per year.

a. If this continues, what will the population in 20 years be?

b. What was the population 15 years ago?

Comentário: Excelente problema, faz o aluno perceber que ele pode encontrar tanto termos posteriores como anteriores de um dado termo de uma progressão.

2.5.2.18 Situação problema

A população do Afeganistão é de cerca de 30 milhões atualmente. Ela vem crescendo 4,8% ao ano.

a. Se assim continuar, qual sera a população no ano de 2020?

b. Qual era a população 20 anos atrás?

c. A população dos Estados Unidos é de aproximadamente 300 milhões e tem crescido em aproximadamente 1% ao ano. Caso o fato improvável de as taxas de crescimento nos Estados Unidos e no Afeganistão se mantiverem em 1% e 4,8% respectivamente, qual país terá a maior população no ano de 2100?

Tradução nossa.

Extraído de http://lhs.jondreyer.com , acessado em 20/02/2012

> The population of Afghanistan is currently about 30 million. It has been increasing at 4.8% per year.
>
> a. If this continues, what will its population be in the year 2020?
>
> b. What was the population 20 years ago?
>
> c. The population of the US is about 300 million and has been increasing by about 1% per year. In the extremely unlikely event that US and Afghan annual population growth rates remain at 1% and 4.8% forever, which country will have a larger population in the year 2100?

Comentário: Este problema permite ter a percepção do comportamento de progressões com diferentes razões.

2.5.2.19 Situação problema

Seu corpo metaboliza a cafeína que você toma. A cada hora aproximadamente 16% da cafeína é metabolizada. Se você beber um *duplo-latte* contendo 100mg de cafeína ao meio-dia, quanta cafeína restará no seu corpo 3h mais tarde? E 8h depois? E *n* horas depois?

Tradução nossa.

Extraído de http://lhs.jondreyer.com , acessado em 20/02/2012

> Your body metabolizes the caffeine you drink. Each hour about 16% of the caffeine gets metabolized. If you drink a double-latte that has 100 milligrams of caffeine at noon, then how much caffeine will be in your body 3 hours later? 8 hours later? n hours later?

Comentário: Problema sobre progressões, onde se calcula um termo particular e depois a fórmula do termo geral.

2.5.2.20 Situação problema

Quando éramos crianças, nosso vizinho Victor, gênio da matemática, ofereceu à minha mãe o seguinte acordo: ele lavaria nossos pratos da janta todo dia durante 3 semanas. O primeiro dia pagaríamos a ele 1 centavo. Este pagamento diário dobraria todo dia. Se aceitássemos, quanto seria o pagamento no 7º dia? No 14º dia? No último dia?

Tradução nossa.

Extraído de http://lhs.jondreyer.com , acessado em 25/02/2012

> When we were kids, our math-genius neighbor named Victor offered my mom the following deal. He would wash our dinner dishes each day for 3 full weeks. The first day we would pay him one cent. His daily pay would double each day. If we accepted, how much would his pay have been on the 7th day? The 14th day? The last day?

Comentário: Problema que mostra o rápido crescimento de uma PG.

2.5.2.21 Situação problema

Um papel de um cadeno tem espessura de 0,005 polegadas. Cada vez que é dobrado em dois, sua espessura dobra.

a. Qual a espessura após uma, duas e três dobras?

b. Escreva uma expressão mostrando a espessura após x dobras.

c. Qual a espessura após 20 dobras?

d. Quantas milhas de espessura após 30 dobras? (1 milha = 5280 pés; 1 pé = 12 polegadas)

e. A Lua dista de 384.000 milhas da Terra. Use a calculadora para estimar quantas dobras seriam necesárias para chegar à Lua.

Tradução nossa.

Extraído de http://lhs.jondreyer.com , acessado em 25/02/2012

A regular piece of notebook paper is about 0.005 inches thick. Every time you fold it in half, its thickness doubles.

a. How thick is it after 1, 2, and 3 folds?

b. Write an expression showing its thickness after x folds.

c. How thick is it after 20 folds?

d. How many miles thick is it after 30 folds? [One mile is 5280 feet].

e. The moon is about 384,000 miles away. Use your calculator to estimate how many folds would be theoretically required for it to reach the moon.

Comentário: Interessante problema que evidencia a rapidez do crescimento de uma PG.

2.5.2.22 Situação problema

Se uma população de bactérias em uma cultura subiu de 50 a 150 em 22 horas, qual foi a taxa de crescimento por hora?

Tradução nossa.

Extraído de http://lhs.jondreyer.com , acessado em 25/02/2012

If the population of bacteria in a given culture rose from 50 to 150 in 22 hours then what was the hourly growth rate?

Comentário: Problema onde a incógnita é a razão.

2.5.2.23 Situação problema

Certo material decai a uma taxa de 0,92% ao ano. Quanto restará de 260 gramas desse material daqui a 11 anos?

Tradução nossa.

Extraído de http://edhelper.com , acessado em 27/02/2012

> A certain material decays at a rate of 0.92% per year. How much of 260 grams of the material will be left in 11 years?

Comentário: Problema de decaimento radiativo. Não é obrigatório o conhecimento de função exponencial: a critério do professor pode ser passado o conceito como progressão geométrica.

2.5.2.24 Situação problema

Uma vitória régia encontra-se em um tanque de água de área A. Sabendo que ela dobra de área a cada dia e que no final do vigésimo dia ocupa toda a superfície do tanque, em qual dia ela ocupará a metade da superfície do tanque? Qual o tamanho original da vitória régia no momento em que ela foi introduzida no tanque de água?

Extraído de http://www.da-educa.com/2010/11/plantao-de-duvidas-on-line-orientacoes_3178.html, acessado em 27/02/2012

Comentário: Este problema pode servir para introduzir o conceito de progressões geométricas. É interessante que o professor solicite aos alunos a construção de uma tabela representando a área da vitória régia a cada dia. Em seguida, um gráfico com as mesmas informações. A partir daí, pode-se explorar a relação entre cada dado subseqüente. O próprio aluno descobrirá por si só as propriedades de uma progressão geométrica.

A partir daí, introduzir e sistematizar o conceito de progressão geométrica e suas propriedades.

A solução apresentada na fonte:

Extraído de http://www.da-educa.com/2010/11/plantao-de-duvidas-on-line-orientacoes_3178.html, acessado em 27/02/2012

> O primeiro passo é pensar intuitivamente para ver como é fácil entender a Matemática. Analisa-se de trás para frente. Uma vitória régia ocupa a superfície do

tanque em 20 dias, mas se ela duplica de tamanho a cada dia, então, no 19º dia ela terá preenchido metade do tanque e quando passar mais um dia ela se duplicará e preencherá o tanque todo. Viu como é fácil.

Ela ocupará metade da superfície do lago no 19º dia.

O segundo passo é entender o problema da forma Matemática desenvolvida por Carl Friedrich Gauss (1.777 - 1855) que desenvolveu a formulação da progressão aritmética e da progressão geométrica. O conceito por trás desse problema é a Progressão Geométrica P.G. Uma sequência numérica que para se encontrar um termo sucessor multiplica-se o termo anterior por uma razão q. Denomina-se a superfície do tanque por x, sendo assim, calcula-se o tamanho da vitória régia, no início, quando foi posta no tanque. Lembre-se a planta duplica de tamanho a cada dia, então, a razão da P.G. é q = 2.

Quando a vitória régia foi posta no tanque ela tinha o tamanho do tanque dividido por 524.288 que representa a potência de base 2 e expoente 19. Percebe-se que ela era minúscula, 524.288 vezes menor que a superfície do tanque.

$$\text{Progressão Geométrica } P.G.$$

$$\text{Termo Geral}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

$$\text{onde:}$$

$$a_n \rightarrow \text{último termo da } P.G. \text{(tamanho do tanque)} \rightarrow a_n = x$$

$$a_1 \rightarrow 1^{\text{º}} \text{ termo da } P.G. \text{(tamanho da planta no início)} \rightarrow a_1 = ?$$

$$q \rightarrow \text{razão da } P.G. \rightarrow q = 2$$

$$n \rightarrow \text{posição do termo } (n^{\text{º}} \text{ de dias}) \rightarrow n = 20$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow x = a_1 \cdot 2^{(20-1)}$$

$$x = a_1 \cdot 2^{19} \rightarrow \frac{x}{2^{19}} = a_1$$

$$\boxed{a_1 = \frac{x}{2^{19}}}$$

O terceiro passo é determinar quantos dias leva para a vitória régia ocupar metade do lago. Utiliza-se para isso o termo geral da P.G., novamente. Vê-se:

$$a_n \to \text{metade do tanque} \to a_n = \frac{x}{2}$$

$$a_1 \to \text{(tamanho da planta no início)} \to a_1 = \frac{x}{2^{19}}$$

$$q \to \text{razão da } P.G. \to q = 2$$

$$n \to \text{posição do termo } (n^{\text{o}} \text{ de dias}) \to n = ?$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \to \frac{x}{2} = \frac{x}{2^{19}} \cdot 2^{(n-1)}$$

$$\frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2^{19}}} = 2^{(n-1)} \to \frac{\cancel{x}}{2} \cdot \frac{2^{19}}{\cancel{x}} = 2^{(n-1)}$$

$$\frac{2^{\cancel{19}\,18}}{\cancel{2}} = 2^{(n-1)} \to 2^{18} = 2^{(n-1)}$$

para satisfazer a igualdade: bases iguais expoentes iguais

$$18 = n - 1 \to 18 + 1 = n$$

$$\boxed{n = 19\ dias}$$

A vitória régia ocupa metade do tanque em 19 dias.

2.5.3 Matemática Financeira como PG

2.5.3.1 Comentário inicial

Comumente no currículo de ensino médio, os conceitos de Matemática Financeira são passados após as funções exponenciais e as progressões (muitas vezes de forma independente).

Os exercícios abaixo podem ser usados para introduzir o conceito de progressões geométricas e, ao mesmo tempo, conceitos básicos de juros compostos. Não há por que ensinar os conceitos separadamente. Também pode a Matemática Financeira, a critério do professor, ser apresentada após o conceito de progressões geométricas já adquirido, desde que se reforce a semelhança de conceitos.

Os problemas a seguir podem também, caso se deseje, ser utilizados durante a aprendizagem de funções exponenciais. O ideal é que o aluno tenha a percepção da relação entre os três conceitos: progressões geométricas, juros compostos e funções exponenciais.

2.5.3.2 Situação problema

Um barco foi comprado novo por R$ 100.000,00. A cada ano este barco sofre uma desvalorização de 13%, em função do seu uso. Calcule o valor do barco, em reais, após 6 anos.

Extraído de http://www.gui.pro.br/dombosco/PG%20-%20lista%20-%202o%20ano%20-%202007-modificado.pdf, acessado em 10/02/2012

Comentário: Problema sobre Matemática financeira, bom para introduzir o conceito de progressões geométricas decrescentes.

2.5.3.3 Situação problema

Para liquidar uma dívida, um pai de família efetuou um empréstimo de R$1000,00 em uma financeira e se comprometeu a pagá-la após 6 meses, com uma taxa de juros de 8% ao mês. Quanto ele pagou?

Extraído de http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1458-6.pdf, acessado em 10/02/2012

Comentário: Problema sobre Matemática financeira, aplicável como conceito de progressões geométricas.

2.5.3.4 Situação problema

A quantia de R$ 1200,00 foi aplicada em uma instituição bancária a uma taxa de 1,5% ao mês. Qual será o saldo no final de 12 meses?

Extraído de http://www.brasilescola.com/matematica/aplicacoes-uma-funcao-exponencial.htm, acessado em 15/02/2012

Comentário: Problema sobre Matemática financeira, aplicável como conceito de progressões geométricas.

2.5.3.5 Situação problema

Você deposita R$ 1500 numa conta que paga 5% de juros ao ano. Quanto dinheiro você terá após 6 anos?

Tradução nossa.

Extraído de http://mathcentral.uregina.ca/QandQ/topics/interest, acessado em 15/02/2012

> You deposit $1500 in an account that pays 5% interest yearly. How much money do you have after 6 years?

Comentário: Problema sobre Matemática financeira, aplicável como conceito de progressões geométricas.

2.5.3.6 *Situação problema*

Uma propaganda de um fundo mútuo afirma que clientes que investiram em seu fundo 5 anos atrás duplicaram seu dinheiro. Se o desempenho do fundo no futuro continuar como no passado, quanto valeriam R$ 2000,00 daqui a 40 anos?

Tradução nossa.

Extraído de http://en.allexperts.com/q/Algebra-2061/2010/7/algebra-2-31.htm, acessado em 15/02/2012

> An advertisement for a mutual fund claims that people who invested in their fund 5 years ago have doubled their money. If the fund's future performance is similar to its past performance, how much would a $2,000 be worth in 40 years?

Comentário: Problema sobre Matemática financeira, perfeitamente aplicável como conceito de progressões geométricas.

2.5.3.7 *Situação problema*

Amy comprou um anel de diamante por R$ 6000,00. Se o valor do anel cresce a uma taxa constante de 3,83% ao ano, quanto valerá o anel daqui a vinte e dois anos?

Tradução nossa.

Extraído de http://edhelper.com acessado em 15/02/2012

> Amy bought a diamond ring for $6,000. If the value of the ring increases at a constant rate of 3.83% per year, how much will the ring be worth in twenty-one years?

Comentário: Ótimo problema que requer a relação da taxa com a razão da progressão geométrica.

2.5.3.8 Situação problema

Em certo país, a taxa de inflação é igual todos os meses, mas no final de um ano verificou-se que os preços dobraram. Qual é a taxa mensal de inflação nesse país?

Extraído de http://www.passei.com.br/tc2000/matematica2/mat2g61.pdf, acessado em 25/02/2012

Comentário: Problema sobre Matemática financeira, em que a incógnita é a taxa de juros (calculada a partir da razão da progressão).

2.5.3.9 Situação problema

O valor de um objeto era de R$ 1500,00 há dez anos, e foi diminuindo a uma taxa de 17% ao ano. Qual o seu valor hoje? Qual será seu valor daqui a 5 anos?

Tradução nossa.

Extraído de http://lhs.jondreyer.com acessado em 25/02/2012

> The value of an object was $1500 ten years ago and fell by 17% per year. What is value now? What will its value by in another 5 years?

Comentário: Problema sobre Matemática financeira, bom para introduzir o conceito de progressões geométricas decrescentes.

2.5.3.10 Situação problema

Os bancos oferecem diferentes taxas de juros nos depósitos. O Banco A oferece 20% ao ano e o Banco B oferece 10% a cada 6 meses.

a. Se você depositar R$ 5000,00 no Banco A, quanto terá após 10 anos?

b. Se você depositar R$ 5000,00 no Banco B, quanto terá após 10 anos? (pense na quantidade de períodos)

c. Qual taxa anual deverá pagar o Banco C para transformar R$ 5000,00 em R$ 20000,00 em 10 anos?

Tradução nossa.

Extraído de http://lhs.jondreyer.com acessado em 05/03/2012

> Two banks offer different interest rates on deposits. Bank A offers 20% per year, and Bank B offers 10% every six months.
>
> a. If you put $5000 in Bank A, how much would you have after 10 years?
>
> b. If you put $5000 in Bank B, how much would you have after 10 years? [Think number of periods]
>
> c. What would Bank C need to pay to turn $5000 into $20,000 in ten years (annual interest)?

Comentário: Problema sobre Matemática financeira. Por ser mais complexo, é mais apropriado para fixar conceitos, mas não para introduzi-los.

2.5.3.11 Situação problema

Um investimento perdeu a metade de seu valor em 8 anos.

a. Se o valor inicial é de R$ 1000,00, qual era a taxa anual de decréscimo?

b. Se o valor inicial é de R$ 5000,00, qual era a taxa anual de decréscimo?

Tradução nossa.

Extraído de http://lhs.jondreyer.com acessado em 05/03/2012

> An investment lost a total of half of its value in 8 years.
>
> a. If the initial value is $1000, then what annual rate of decrease did it have?
>
> b. If the initial value is $5000, then what annual rate of decrease did it have?

Comentário: Problema sobre Matemática financeira, bom para introduzir o conceito de progressões geométricas decrescentes.

2.5.3.12 *Situação problema*

O valor de um investimento triplica em 15 anos. Qual é a taxa anual de acréscimo?

Tradução nossa.

Extraído de http://lhs.jondreyer.com acessado em 10/03/2012

> The value of an investment triples in 15 years. What is the annual rate of increase in value?

Comentário: Problema sobre Matemática financeira, onde a incógnita é a taxa de juros.

2.5.3.13 *Situação problema*

Um investimento perdeu a metade de seu valor em 8 anos.

a. Se o valor inicial é de R$ 1000,00, qual era a taxa anual de decréscimo?

b. Se o valor inicial é de R$ 5000,00, qual era a taxa anual de decréscimo?

Tradução nossa.

Extraído de http://lhs.jondreyer.com acessado em 10/03/2012

> In Germany in the early 1920's there was a period of hyperinflation where prices were increasing by about 2.3% per day.
>
> a. If something cost 50 Marks one day, how much would it be expected to cost 2 months later?
>
> b. How much would that 50-Mark item cost one week earlier?

Comentário: Problema sobre Matemática financeira, pode introduzir o conceito de progressões geométricas. A segunda questão pede o cálculo de um termo anterior.

2.5.3.14 *Situação problema*

A hiperinflação da Alemanha em 1923 atingiu uma taxa de crescimento dos preços em cerca de 100% ao mês.

a. Se um objeto custava 15 marcos em um determinado tempo, quanto ele custaria 8 meses depois?

b. Se o preço de um objeto crescia a esta taxa, quantos meses levaria para seu preço passar de 10 a 320 marcos?

Tradução nossa.

Extraído de http://lhs.jondreyer.com acessado em 10/03/2012

> Germany's hyperinflation in 1923 amounted to about a 100% rise in prices per month.
>
> a. If something cost 15 marks at one time, how much would it cost 8 months later?
>
> b. If the price of some object grew at this rate, how many months would it take to increase in price from 10 to 320?

Comentário: Problema sobre Matemática financeira, aplicável como conceito de progressões geométricas. A segunda questão pode ser estudada sem o conceito de logaritmo, por ser a conta exata.

2.5.3.15 *Situação problema*

Sally conseguiu um emprego na IBM em 1990 e recebia salário anual de R$ 45000,00. Seu salário cresceu a uma taxa de 5% ao ano.

a. Qual é seu salário atual (em 2007)?

b. Ann começou a trabalhar em 1995 e conseguiu aumentos de 4% ao ano. Se seu salário atual (2007) é de R$ 95000,00 por ano, qual foi seu salário inicial?

c. Joanne começou a trabalhar em 1997 com salário de R$ 60000,00 por ano e agora (2007) ela recebe R$ 110000,00 por ano. Qual foi a taxa de aumento que ela recebeu por ano ao longo desse periodo?

Tradução nossa.

Extraído de http://lhs.jondreyer.com acessado em 10/03/2012

> Sally took a job at IBM in 1990 and got an initial annual salary of $45,000. Her salary grew at a rate of 5% per year.
>
> a. What is her current salary (2007)?
>
> b. Ann started in 1995 and has earned raises of 4% per year. If her current salary is $95,000 per year then what was her starting salary?
>
> c. Joanne started in 1997 with a salary of $60,000 per year and now makes $110,000 per year. What annual percentage raise did she get over this period?

<u>Comentário</u>: Problema sobre Matemática financeira, pede termo posterior, anterior e também a razão.

2.5.3.16 Situação problema

Uma mesa de antiguidade vale hoje R$ 5000,00. Se seu valor cresceu numa taxa anual de 9% nos últimos 10 anos, qual era o valor da mesa 10 anos atrás?

Quanto valerá a mesa daqui a sete anos? (assumindo que a taxa permaneça em 9% de acréscimo)

Tradução nossa.

Extraído de http://lhs.jondreyer.com acessado em 27/03/2012

> An antique table is now worth $5000. If its value increased by a 9% annual rate of growth over the past 10 years, then what was its value 10 years ago?
>
> How much will that table be worth seven years from now (assuming the rate of growth remains 9%)?

<u>Comentário</u>: Problema sobre Matemática financeira, onde a incógnita é um termo anterior (primeira pergunta) e posterior (segunda).

2.5.4 Funções exponenciais

2.5.4.1 Situação problema

(Do autor)

A população de ratos em Curitiba está dobrando a cada década. Se hoje essa população é de 100.000 indivíduos, qual será a população daqui a cinco décadas? E daqui a cinco décadas e meia?

Comentário: Problema interessante para introduzir expoentes fracionários. Pode ser utilizado como introdução ao conceito de funções exponenciais.

2.5.4.2 Situação problema

Numa cidade, a população humana é de 10 milhões e a população de ratos é de 2 milhões. Sabendo que a população humana dobra a cada 20 anos e a de ratos dobra a cada ano, quais serão essas populações dentro de 10 anos?

Extraído de http://www.paulomarques.com.br/arq10-87.htm, acessado em 04/04/2012

Comentário: Problema interessante para introduzir expoentes fracionários e para evidenciar as diferenças de variação entre progressões geométricas, ergo entre funções exponenciais com bases diferentes.

2.5.4.3 Situação problema

Uma colônia de bactérias cresce a um ritmo de 0,5% por hora. Se certa contagem deu 2000 bactérias, quantas haverá dois dias depois? Indique uma função que sirva de modelo a este crescimento.

Extraído de http://profs.ccems.pt/RosaFerreira/2011_2012/funcoes/plano01/aula4.pdf, acessado em 04/04/2012

Comentário: Problema simples, pode servir para introduzir o conceito de função exponencial.

2.5.4.4 Situação problema - igual ao problema 2.5.2.23

Certo material decai a uma taxa de 0,92% ao ano. Quato restará de 260 gramas desse material daqui a 11 anos?

Tradução nossa.

Extraído de http://edhelper.com, acessado em 27/02/2012

> A certain material decays at a rate of 0.92% per year. How much of 260 grams of the material will be left in 11 years?

Comentário: Problema de decaimento radiativo, também presente no banco de problemas de progressões geométricas: a critério do professor, pode ser passado o conceito como progressão geométrica ou como uma função exponencial.

2.5.4.5 Situação problema

Um especialista em indústria de computadores anunciou que havia cerca de 600 milhões de computadores em uso no mundo no ano de 2001 e que este número estava crescendo a uma taxa anual de cerca de 10%.

a. Escreva uma função que modela o número de computadores no mundo ao longo do tempo.

b. Utilize essa função para calcular o número de computadores no mundo no ano de 2013.

Tradução nossa.

Extraído de
http://www.pkwy.k12.mo.us/homepage/dveatch/file/6.3%20Day%203%20HW%20ANSWERS.pdf,
acessado em 28/03/2012

> One computer industry expert reported that there were about 600 million computers in use worldwide in 2001 and that the number was increasing at an annual rate of about 10%.
>
> A. Write a function that models the number of computers in use over time.
>
> B. Use the function to predict the number of computers that will be in use worldwide in 2013.

Comentário: Problema interessante de modelagem por função exponencial.

2.5.4.6 Situação problema

Hoje a população de azulões num parque é de 275 e espera-se que ela cresça a uma taxa de 4% ao ano. A população de gralhas no mesmo parque totaliza hoje 80 indivíduos e seu crescimento esperado é de 12% ao ano.

a. Determine um modelo de crescimento para ambas as espécies, mostrando a sua população em função do tempo.

b. Tabele as duas funções com ajuda de uma calculadora. Determine quando a populaçao de gralhas ultrapassará à de azulões.

Tradução nossa.

Extraído de http://lhs.jondreyer.com, acessado em 15/03/2012

> The population of bluebirds in one particular park is now 275 and is expected to grow at 4% per year. The population of crows in the same park is now 80 and is expected to grow at 12% per year.
>
> a. Write a growth model for each, showing population as a function of time.
>
> b. Graph both of these on your calculator. Determine when the population of crows will first exceed the population of bluebirds. Use a table.

Comentário: Ótimo problema para conceituar funções exponenciais.

2.5.4.7 *Situação problema*

(FM Jundiaí-07) Em condições favoráveis, uma população inicial de m_0 bactérias reproduz-se aumentando seu número em 20% a cada dia.

- Calcule o número de bactérias existentes ao se completar o 2º dia, em função de m_0.
- E após 12h?
- Calcule em quantos dias o número de bactérias será o triplo do inicial.

Comentário: Problema interessante de modelagem por função exponencial. A segunda pergunta introduz expoente fracionário. A terceira pergunta deve ser deixada para uma próxima etapa (introdução do conceito de logaritmo).

2.5.4.8 *Situação problema*

(VUNESP-03) Um determinado lago foi tomado por uma vegetação. Em 2000, a área coberta pela planta era de $160m^2$, e a partir de então o aumento anual da área coberta pela vegetação foi de 60%. Determine:

- A área, em m^2, coberta pela vegetação n anos mais tarde.
- Pode n ser igual a 3/2? O que isso significa? Qual a área da vegetação nesse instante?
- Quantos anos se passaram até que uma área de 2560 m^2 fosse coberta.

Comentário: Problema interessante de modelagem por função exponencial. A segunda pergunta introduz expoente fracionário. A terceira pergunta deve ser deixada para uma próxima etapa (introdução do conceito de logaritmo).

2.5.4.9 *Situação problema*

(Unicamp SP-06) A concentração de CO_2 na atmosfera vem sendo medida, desde 1958, pelo Observatório de Mauna Loa, no Havaí. Os dados coletados mostram que, nos últimos anos, essa concentração aumentou, em média, 0,5% por ano. É razoável supor que essa taxa anual decrescimento da concentração de CO2 irá se manter constante nos próximos anos.

a) Escreva uma função C(t) que represente a concentração de CO_2 na atmosfera em relação ao tempo t, dado em anos. Considere como instante inicial — ou seja, aquele em que t = 0 — o ano de 2004, no qual foi observada uma concentração de 377,4 ppm de CO_2 na atmosfera.

b) Determine aproximadamente em que ano a concentração de CO_2 na atmosfera será 50% superior àquela observada em 2004.

Comentário: Problema interessante de modelagem por função exponencial. A segunda pergunta deve ser deixada para uma próxima etapa (introdução do conceito de logaritmo).

2.5.4.10 *Situação problema*

Observações por longo tempo mostram que, após períodos de mesma duração, a população da Terra fica multiplicada pelo mesmo fator. Sabendo que essa população era de 2,68 bilhões em 1956 e 3,78 bilhões em 1972, pede-se:

- A população estimada para o ano de 2012;
- Em que ano a população da Terra era de 1 bilhão.
- O tempo necessário para que a população da Terra dobre de valor.

Extraído de www.mat.ufpr.br/ensinomedio/solucao/MEM1_solucoes_cap8.pdf, acessado em 15/03/2012

Comentário: Problema interessante de modelagem por função exponencial. A terceira pergunta deve ser deixada para uma próxima etapa (introdução do conceito de logaritmo).

2.5.4.11 Situação problema

Suponha que você está observando o comportamento de uma duplicação de células em um laboratório. Em um experimento, você iniciou com uma célula e as células duplicavam a cada minuto.

- Escreva uma equação com base 2 para determinar a quantidade (população) de células após uma hora.
- Determine quanto demoraria para esta população (quantidade de células) atingir 100000 células.

Tradução nossa.

Extraído de http://www.sosmath.com/algebra/logs/log5/log53/log53.html , acessado em 15/03/2012

> Suppose that you are observing the behavior of cell duplication in a lab. In one experiment, you started with one cell and the cells doubled every minute.
>
> - Write an equation with base 2 to determine the number (population) of cells after one hour.
> - Determine how long it would take the population (number of cells) to reach 100,000 cells

Comentário: Problema interessante de modelagem por função exponencial. A segunda pergunta deve ser deixada para uma próxima etapa (introdução do conceito de logaritmo).

2.5.4.12 Situação problema

A população dos Estados Unidos é de aproximadamente 300 milhões e tem crescido em aproximadamente 1% ao ano.

a. Se assim continuar, qual sera a população dentro de 20 anos?

b. Qual era a população 15 anos atrás?

c. Qual deve ser a taxa de crescimento para que a população atinja 450 milhões em 25 anos?

Tradução nossa.

Extraído de http://lhs.jondreyer.com, acessado em 28/03/2012

> The population of the US is about 300 million and has been increasing by about 1% per year.
>
> a. If this continues, what will the population in 20 years be?
>
> b. What was the population 15 years ago?
>
> c. What annual rate of increase is required for the population to reach 450 million in 25 years?

Comentário: Problema interessante de modelagem por função exponencial. Na terceira pergunta a incógnita passa a ser a taxa.

2.5.4.13 Situação problema

Em 1985 os norte-americanos comiam uma média de 250 maçãs por ano. Este número vem diminuindo a uma taxa de decaimento de 1% ao ano.

- Quantas maçãs por pessoa comiam os norte-americanos em 2002?
- Em 1980?
- Baseado no problema acima, em que ano o consumo anual por pessoa é de 225 maçãs?

Extraído de http://lhs.jondreyer.com acessado em 05/04/2012

> In 1985 Americans ate an average of 250 apples per year each. This number falls at a rate of decay of 1% per year.
>
> - How many apples per person did Americans eat in 2002?
> - In 1980?

- Based on problem above, in what year was the annual per-person consumption equal to 225?

Comentário: Problema interessante de modelagem por função exponencial. A terceira pergunta deve ser deixada para uma próxima etapa (introdução do conceito de logaritmo).

2.5.4.14 Situação problema

Determinar a taxa de juros anual para que, no regime de juros compostos, um capital de 1600 euros produza um valor de juros de 80 euros em seis meses.

Tradução nossa.

Extraído de http://venus.unive.it/funari/eserciziMatFin.pdf, acessado em 28/03/2012

> Determinare il tasso di interesse annuo affinch´e, in regime di interesse composto, un capitale di 1 600 euro produca un interesse di 80 euro in sei mesi.

Comentário: Problema interessante para introduzir expoentes fracionários.

2.5.4.15 Situação problema

(Unicamp SP-99) Suponha que o preço de um automóvel tenha uma desvalorização média de 10% ao ano sobre o preço do ano anterior. Se F representa o preço inicial (preço de fábrica) e p(t), o preço após t anos, pede-se:

- A expressão para p(t).
- O tempo necessário, em números inteiros de anos, após a saída da fábrica, para que um automóvel venha a valer menos que 5% do valor inicial.

Comentário: Problema interessante para introduzir funções exponenciais.

2.5.4.16 Situação problema

Em 1950 o livro de Algebra II tinha 412 páginas em média. O livro atual de Algebra II tem 850 páginas.

a. Qual foi o crescimento percentual anual do número de páginas?

b. Escreva uma equação descrevendo o número médio de páginas *P(t)* em função da quantidade de anos a partir de 1950 *(t).* Assuma que a taxa anual de crescimento foi constante.

c. Tabele com a ajuda de uma calculadora e determine o ano em que a média era de 600 páginas.

Extraído de: http://lhs.jondreyer.com acessado em 28/03/2012

The value of a new sports car decreased from $40,000 to $20,000 in 7 years.

a. What was the annual rate of decline in the car's value?

b. Write an exponential function showing its value when it is t years old. (Assume the annual rate of decline stays constant).

c. What will its value be when it is 10 years old?

d. Graph the function in your calculator. Choose your window settings carefully (you may decide to have your function be the price in thousands of dollars). Use calc-intersect to determine when its value is exactly $8000.

Comentário: problema muito interessante de funções exponenciais. Por ter múltiplas questões, é mais apropriado como fixação de conceitos.

2.5.4.17 Situação problema

A meia-vida do Plutônio-234 é de 9 horas. Se existem agora 60 miligramas, quanto existirá dentro de dois dias?

Extraído de http://pchs.pcschools.us/woad-local/users/dhall/exam_4__practice_2010-2011.pdf, acessado em 20/03/2012

> The half-life of plutonium-234 is 9 hours. If 60 milligrams is present now, how much will be present in 2 days?

Comentário: Problema que requer conhecimento do conceito de meia-vida. Pode ser utilizado para introduzir esse conceito. Não requer conceito de logaritmos.

2.5.4.18 Situação problema

O valor de um carro é melhor modelado por uma função exponencial, pois ele decai aproximadamente pelo mesmo percentual todo ano. Um carro novo vale R$ 25000,00. Sete anos depois, ele vale R$ 8800,00.

a. Em qual taxa percentual o carro desvalorizou a cada ano?

b. Que idade terá o carro quando ele valer R$ 2000,00?

Extraído de http://lhs.jondreyer.com, acessado em 20/03/2012

> Value of a car is best modeled by an exponential function because it falls by approximately the same percentage amount each year. A new car is worth $25,000. Seven years later it is worth $8,800.
>
> a. By what percentage did the car's value fall each year?
>
> b. How old is the car when its value is $2000?

Comentário: A segunda questão requer conhecimento do conceito de logaritmos.

2.5.5 Logaritmos

2.5.5.1 Situação problema

Pela evaporação, um reservatório perde, em um mês, 10% da água que contém. Se não chover, em quanto tempo a água se reduzirá a um terço do que era no início?

Extraído de http://www.passei.com.br/tc2000/matematica2/mat2g61.pdf, acessado em 10/04/2012

Comentário: Excelente problema prático. Ideal para introduzir o conceito da função inversa da exponencial (função logarítmica).

2.5.5.2 Situação problema

(FM Jundiaí-07) Em condições favoráveis, uma população inicial de m_0 bactérias reproduz-se aumentando seu número em 20% a cada dia.

- Calcule o número de bactérias existentes ao se completar o 2.ºdia, em função de m_0.
- E após 12h?
- Calcule em quantos dias, o número de bactérias será o triplo do inicial.

Comentário: Problema retomado do capítulo de Funções Exponenciais. A terceira pergunta pode ser utilizada para introduzir o conceito de logaritmo.

2.5.5.3 Situação problema

(VUNESP-03) Um determinado lago foi tomado por uma vegetação. Em 2000, a área coberta pela planta era de $160m^2$, e a partir de então o aumento anual da área coberta pela vegetação foi de 60%. Determine:

- A área, em m², coberta pela vegetação n anos mais tarde.
- Pode n ser igual a 3/2? O que isso significa? Qual a área da vegetação nesse instante?
- Quantos anos se passaram até que uma área de 2560 m² fosse coberta.

Comentário: Problema retomado do capítulo de Funções Exponenciais. A terceira pergunta pode ser utilizada para introduzir o conceito de logaritmo.

2.5.5.4 Situação problema

(Unicamp SP-06) A concentração de CO2 na atmosfera vem sendo medida, desde 1958, pelo Observatório de Mauna Loa, no Havaí. Os dados coletados mostram que, nos últimos anos, essa concentração aumentou, em média, 0,5% por ano. É razoável supor que essa taxa anual decrescimento da concentração de CO2 irá se manter constante nos próximos anos.

a) Escreva uma função C(t) que represente a concentração de CO_2 na atmosfera em relação ao tempo t, dado em anos. Considere como instante inicial — ou seja, aquele em que t = 0 — o ano de 2004, no qual foi observada uma concentração de 377,4 ppm de CO_2 na atmosfera.

b) Determine aproximadamente em que ano a concentração de CO_2 na atmosfera será 50% superior àquela observada em 2004

Comentário: Problema retomado do capítulo de Funções Exponenciais. A segunda pergunta pode ser utilizada para introduzir o conceito de logaritmo.

2.5.5.5 Situação problema

Observações por longo tempo mostram que, após períodos de mesma duração, a população da Terra fica multiplicada pelo mesmo fator. Sabendo que essa população era de 2,68 bilhões em 1956 e 3,78 bilhões em 1972, pede-se:

- A população estimada para o ano de 2012.
- Em que ano a população da Terra era de 1 bilhão.
- O tempo necessário para que a população da Terra dobre de valor.

Extraído de www.mat.ufpr.br/ensinomedio/solucao/MEM1_solucoes_cap8.pdf, acessado em 15/03/2012

Comentário: Problema retomado do capítulo de Funções Exponenciais. A terceira pergunta pode ser utilizada para introduzir o conceito de logaritmo.

2.5.5.6 Situação problema

Uma colônia composta inicialmente por 1000 bactérias cresce exponencialmente e dobra seu tamanho a cada hora. Quando ela conterá 7000 bactérias?

Tradução nossa.

Extraído de http://precorso.dicom.uninsubria.it/lezioni/logaritmo.htm, acessado em 20/04/2012

> Una colonia composta inizialmente da 1000 batteri cresce esponenzialmente e raddoppia la sua grandezza ogni ora. Quando conterrà 7000 batteri?

Comentário: Ótimo problema, pode ser utilizado para introduzir o conceito de logaritmo.

2.5.5.7 Situação problema

O número inicial de bactérias presentes em uma cultura é de 10000. Esse número dobra a cada 30 minutos.

- Escreva uma função que expresse o número de bactérias com relação ao tempo.
- Quanto tempo demorará até o número de bactérias atingir 100000?

Trdaução nossa.

Extraído de http://www.algebra.com, acessado em 20/04/2012

> An initial number of bacteria presented in a culture is 10000. This number doubles every 30 minutes.
>
> 1) Write a function expressed the number of bacteria in time.
>
> 2) How long it will take to get the bacteria number 100000?

Comentário: Problema interessante, pode servir para introduzir o conceito.

2.5.5.8 Situação problema

Um papel plastico translúcido reduz a intensidade de luz que o atravessa em 8%. Amy deseja combinar um certo número destes papéis para permitir que, no máximo, 40% da luz os atravesse. De quantos papéis translúcidos ela precisará?

Tradução nossa.

Extraído de http://edhelper.com, acessado em 15/03/2012

> A translucent plastic paper reduces the intensity of light that passes through it by eight percent. Amy wants to combine a number of these papers to only allow at the most forty percent of light to pass through. How many translucent plastic papers should Amy use?

Comentário: Problema prático muito interessante.

2.5.5.9 Situação problema

A prefeitura projeta que a cidade crescerá a uma taxa constante de 19% ao ano. A essa taxa, quantos anos serão necessários para que a população da cidade quadruplique?

Tradução nossa.

Extraído de http://edhelper.com, acessado em 15/03/2012

> The local government projects that the town will grow at a constant rate of nineteen percent per year. At this rate, how many years will it take the town's population to be four times its current size?

Comentário: Bom problema de uso de logaritmo.

2.5.5.10 Situação problema

Um material decai auma taxa de 0,099% ao ano. Quanto tempo demorará para que sobre apenas 30% do material original?

Tradução nossa.

Extraído de http://edhelper.com, acessado em 10/04/2012

> A material decays at the rate of 0.099% per year. How long will the material take so that only 30% of the original material is left?

Comentário: Problema de decaimento radiativo, interessante para fazer o aluno perceber a utilidade da função inversa da exponencial (função logarítmica).

2.5.5.11 Situação problema

A meia-vida de uma substância radioativa é de cento e cinquenta e três dias. Quantos dias vai levar para que 60% da substância decaia?

Tradução nossa.

Extraído de http://edhelper.com, acessado em 20/04/2012

> The half-life of a radioactive substance is one hundred fifty-three days. How many days will it take for seventy percent of the substance to decay?

Comentário: Requer conhecimento do conceito de meia-vida.

2.5.5.12 Situação problema

Cinco gramas de certo isótopo radioativo decaem a três gramas em 100 anos. Quantos anos a mais serão necessários para que sobre apenas um grama?

Tradução nossa.

Extraído de http://www.education.com, acessado em 28/03/2012

> Five grams of a certain radioactive isotope decay to three grams in 100 years. After how many more years will there be just one gram?

Comentário: Problema de decaimento radiativo, interessante para fazer o aluno perceber a utilidade da função inversa da exponencial (função logarítmica).

2.5.5.13 Situação problema

Suponha que você está observando o comportamento de uma duplicação de células em um laboratório. Em um experimento, você iniciou com uma célula e as células duplicavam a cada minuto.

- Escreva uma equação com base 2 para determinar a quantidade (população) de células após uma hora.
- Determine quanto demoraria para esta população (quantidade de células) atingir 100000 células.

Tradução nossa.

Extraído de: http://www.sosmath.com/algebra/logs/log5/log53/log53.html acessado em 28/03/2012

> Suppose that you are observing the behavior of cell duplication in a lab. In one experiment, you started with one cell and the cells doubled every minute.
>
> - Write an equation with base 2 to determine the number (population) of cells after one hour.
> - Determine how long it would take the population (number of cells) to reach 100,000 cells

Comentário: Problema retomado do capítulo de Funções Exponenciais. A segunda pergunta pode ser utilizada para introduzir o conceito de logaritmo.

2.5.5.14 Situação problema

Se você iniciar um experimento de biologia com 5000000 células e 45% delas morrem a cada minuto, quanto tempo demorará até sobrarem menos de 1000 células?

Tradução nossa.

Extraído de http://www.sosmath.com, acessado em 28/03/2012

> If you start a biology experiment with 5,000,000 cells and 45% of the cells are dying every minute, how long will it take to have less than 1,000 cells?

Comentário: Requer uso de logaritmos, pode servir para introdução do conceito.

2.5.5.15 Situação problema

Comprei uma lata de verniz armazenado a uma temperatura de 40 graus. Mudo-o de lugar a um ambiente com temperatura de 74 graus. Após 2 horas a temperatura do verniz era de 58 graus. Se a temperatura deve atingir 68 graus para melhores resultados, quanto mais tempo preciso esperar para poder utilizar o verniz?

Tradução nossa.

Extraído de http://tulyn.com/pre-calculus, acessado em 05/04/2012

> I bought a can of varnish and store at temperature of 40 degree. I change to another place where the temperature was 74 degree. After 2 hours the temperature of the varnish was 58 degree .If the temperature of varnish must be 68 degree for best results, how much longer must I wait before I can use the varnish?

Comentário: Problema de maior complexidade, não é ideal para introduzir conceitos novos.

2.5.5.16 Situação problema

Uma população de coelhos quadruplica a cada dois anos. Se o número inicial de coelhos era de 25, quanto tempo levará até a população atingir 700 coelhos?

Tradução nossa.

Extraído de http://www.enotes.com/math/q-and-a, acessado em 10/03/2012

> A population of rabbits quadruples every 2 years. If the initial number of rabbits was 25, how long will it take for the population to reach 700?

Comentário: Bom problema simples, requer uso de logaritmos.

2.5.5.17 Situação problema

Se existem 45 ratazanas numa mercearia de Nova Iorque e o número de ratazanas dobrar a cada 7 dias, quanto tempo demorará até a mercearia ter 100000 ratazanas?

Tradução nossa.

Extraído de http://tulyn.com/pre-calculus acessado em 28/04/2012

> If there are 45 rats in a New York deli and the number of rats doubles every 7 days. How long will it take for the deli to have 100,000 rats?

Comentário: Ótimo problema requerendo conceito de logaritmos.

2.5.5.18 Situação problema

A população de Jacksonville na Flórida era de 736000 no ano 2000 e cresceu a uma taxa de 1,9% ao ano. A essa taxa, quando é que a população sera de um milhão?

Tradução nossa.

Extraído de http://tulyn.com/pre-calculus, acessado em 20/03/2012

> The 2000 population of Jacksonville, Florida was 736,000 and was increasing at the rate of 1.49% each year. At that rate, when will population be 1 million?

Comentário: Bom problema que exige conceito de logaritmo.

2.5.5.19 Situação problema

O país A tem uma taxa de crescimento populacional de 4,7% ao ano. A população atual é de 5.681.000 e a área do território do país A é de 33.000.000.000 metros quadrados. Assumindo que a taxa de crescimento permanece e é exponencial, após quanto tempo haverá uma pessoa a cada metro quadrado?

Tradução nossa.

Extraído de http://tulyn.com/pre-calculus, acessado em 20/03/2012

> Country A has a growth rate of 4.7% per year. The population is currently 5,681,000 and the land area of country A is 33,000,000,000 square yards. Assuming this growth rate continues and is exponential, after how long will there be one person for every square yard of land?

Comentário: Problema que requer uso de logaritmos. Pela complexidade, não é adequado para introduzir o conceito.

2.5.5.20 Situação problema

Brad montou uma planilha que mostra que a população de uma cidade crescerá dos atuais 11211 habitantes a 96627 habitantes. A taxa de crescimento anual é de 4,18%. Brad esqueceu de incluir a quantidade de anos que durará este crescimento.

- Qual é essa quantidade de anos?

Tradução nossa.

Extraído de http://lhs.jondreyer.com, acessado em 28/03/2012

> Brad created a chart that shows the population of a town will increase to 96,627 people from a current population of 11,211 people. The rate of increase is an annual increase of 4.18%. Brad forgot to include the number of years this increase will take.
>
> How many years was it?

Comentário: Problema típico com uso de logaritmos.

2.5.5.21 Situação problema

A população de uma cidade é de 12500. Ela vem crescendo a 4% ao ano e espera-se que continue crescendo a essa taxa.

a. Qual era sua população 6 anos atrás?

b. Qual sera a população esperada daqui a 15 anos?

c. Quando a população atingirá 19000?

d. Quando é que a população foi de 7500?

e. Quantos anos demorará a população em triplicar?

f. Se, de agora em diante, a população crescer mais rápido do que 4% ao ano, e a população alcançar 17000 em seis anos: qual seria essa nova taxa de crescimento?

Tradução nossa.

Extraído de http://lhs.jondreyer.com, acessado em 28/03/2012

> The population of some town is 12,500. It has been growing at 4% per year and expected to continue to grow at this rate.
>
> a. What was its population 6 years ago?
>
> b. What do you expect its population to be in 15 years?
>
> c. When will its population reach 19,000?
>
> d. When was its population 7,500?
>
> e. How many years will it take its population to triple?
>
> f. Instead of growing at 4% per year going forward, it grew faster. Its population reached 17,000 in 6 years. What was its annual growth rate?

Comentário: O problema explora conhecimentos de exponenciais e logaritmos e as incógnitas variam de acordo com as perguntas.

2.5.5.22 Situação problema

Em 1985 os norte-americanos comiam uma media de 250 maçãs por ano. Este número vem diminuindo a uma taxa de decaimento de 1% ao ano.

- Quantas maçãs por pessa comiam os norte-americanos em 2002?
- Em 1980?
- Baseado no problema acima, em que ano o consumo anual por pessoa é de 225 maçãs?

Tradução nossa.

Extraído de http://lhs.jondreyer.com acessado em 05/04/2012

> In 1985 Americans ate an average of 250 apples per year each. This number falls at a rate of decay of 1% per year.
>
> - How many apples per person did Americans eat in 2002?

- In 1980?
- Based on problem above, in what year was the annual per-person consumption equal to 225?

Comentário: Problema retomado do capítulo de Funções Exponenciais. A terceira pergunta pode ser utilizada para introduzir o conceito de logaritmo.

2.5.6 Logaritmos e meia-vida

2.5.6.1 Situação problema

Alguns medicamentos, após entrarem no corpo humano, vão sendo eliminados naturalmente de tal modo que a quantidade ativa M do fármaco no organismo segue uma lei exponencial de declínio da forma $M = M_0\ e^{-kt}$ -- em que k é uma constante positiva e t a variável tempo.

- Qual é o significado de M_0?
- Se a quantidade ativa de um remédio se reduz a metade ao fim de uma hora, a quanto se reduzem 500 mg ao fim de 8 horas?
- Qual é o valor de k para o remédio citado em b) ?
- Outro remédio elimina-se segundo a lei $M = M0e^{-0,25t}$. Qual é a «semivida» deste remédio? (tempo que leva a reduzir-se a metade)
- Prove que a «semivida» T se relaciona com k pela formula T = ln 2 / k.

Extraído de http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm103/problemaseexercicios.htm, acessado em 10/04/2012

Comentário: Bom problema para introduzir o conceito de meia-vida.

2.5.6.2 *Situação problema*

Quanto tempo levam 12g de carbono-14 para reduzirem-se a 10g, se sua meia-vida é de 5750 anos?

Comentário: Bom problema com uso de logaritmo e conceito de meia-vida.

2.5.6.3 *Situação problema*

Se uma substância radioativa tem uma meia-vida de 300 anos, quanto tempo demorará para que essa substância decaia a 10% da quantidade original?

Tradução nossa.

Extraído de http://www.sosmath.com, acessado em 20/03/2012

> If a radioactive substance has a half-life of 300 years, how long will it take for the substance to decay to 10% of its initial amount?

Comentário: Requer conhecimento do conceito de meia-vida.

2.5.6.4 *Situação problema*

O Polônio Po-210 possui meia-vida de 138 dias.

- Determine uma função de decaimento da quantidade de Polônio Po-210 que permanence na amostra após t dias.
- Estime o tempo para que o Polônio Po-210 chegue a 0,1 da quantidade original da amostra.

Tradução nossa.

Extraído de http://www.algebra.com, acessado em 15/04/2012

> Polonium Po-210 has a half-life of 138 days.
>
> 1) Write the decay function for the amount of Polonium Po-210 that remains in a sample after t days.
>
> 2) Estimate time for Polonium Po-210 to get 0.1 of its initial amount in the sample.

Comentário: Bom problema, requer conhecimento do conceito de meia-vida.

2.5.6.5 Situação problema

Um certo isótopo tem meia-vida de 4,2 dias. Quanto tempo demorará para que uma amostra de 150 miligramas decaia até que apenas sobrem 10 miligramas?

Tradução nossa.

Extraído de http://infinity.cos.edu/algebra, acessado em 20/03/2012

> If certain isotope has a half-life of 4.2 days, how long will it take for a 150 milligram sample to decay so that only 10 milligrams are left?

Comentário: Bom problema, requer conhecimento do conceito de meia-vida.

2.5.6.6 Situação problema

A meia-vida do Carbono-14 é de 5730 anos. Se verificarmos que um osso contém 85% de seu Carbono-14 original, qual a idade desse osso?

Tradução nossa.

Extraído de http://infinity.cos.edu/algebra, acessado em 20/03/2012

> The half-life of carbon-14 is 5730 years. If it is determined that an old bone contains 85% of its original carbon-14 how old is the bone?

Comentário: Bom problema, requer conhecimento do conceito de meia-vida.

2.5.6.7 *Situação problema*

Um osso que originalmente continha 150 mg de Carbono-14 agora contém 85 mg desse isótopo. Determine a idade desse osso, com aproximação de 100 anos, sabendo-se que a meia-vida do Carbono-14 é de 5730 anos.

Tradução nossa.

Extraído de http://tulyn.com/wordproblems, acessado em 20/03/2012

> A bone that originally contained 150 mg of Carbon-14 now contains 85 mg of that isotope. Determine the age of the bone, to the nearest 100 years, if the half-life of Carbon-14 is 5570 years.

Comentário: Bom problema, requer conhecimento do conceito de meia-vida.

2.5.6.8 *Situação problema*

A concentração de uma substância radioativa decai após 5 anos a 1/3 do seu valor inicial. Determine a sua meia-vida, isto é, o tempo para que a concentração caia pela metade.

Tradução nossa.

Extraído de http://precorso.dicom.uninsubria.it/lezioni/logaritmo.htm, acessado em 20/03/2012

> L'intensità di una sostanza radioattiva dopo 5 anni scende a 1/3 del valore iniziale. Si determini il tempo di dimezzamento, cioè il tempo necessario affinché l'intensità sia dimezzata.

Comentário: Bom problema para introduzir o conceito de meia-vida.

2.5.7 Matemática Financeira com Logaritmos

2.5.7.1 Comentário inicial

Assim como nas progressões geométricas, o conteúdo de logaritmos é também possível de ser introduzido por meio de conceitos de Matemática Financeira.

Os problemas abaixo são exemplos de possibilidades de aliar os dois conteúdos.

2.5.7.2 Situação problema

Marcelo financiou R$ 10000,00 em uma financeira pagando um montante de R$ 13536,00 a uma taxa de 11% ao ano. Quanto tempo durou o financiamento?

Extraído de http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1458-6.pdf, acessado em 20/03/2012.

Comentário: Bom problema para introduzir o conceito de logaritmos.

2.5.7.3 Situação problema

Marcela aplicou R$ 400,00 num investimento que rende 2% ao mês. Qual é o tempo necessário para que ela obtenha um montante de R$ 600,00?

Extraído de www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/RenatoKleberAzevedo.pdf, acessado em 20/03/2012

Comentário: Bom problema para introduzir o conceito de logaritmos.

2.5.7.4 *Situação problema*

O Brad comprou $5.141,00 em equipamentos para escritório. O governo permite que os equipamentos para escritóio sejam depreciadosa uma taxa anual de 5,5%. Quanto tmpo será necessário para que o Brad deprecie os equipamentos em cinquenta e quatro porcento?

Tradução nossa.

Extraído de http://www.edhelper.com/logarithms.htm, acessado em 20/03/2012

> Brad bought $5,141 worth of office equipment. The government allows for office equipment to be depreciated at an annual rate of 5.5% per year. How long will it take for Brad to depreciate the equipment fifty-four percent?

Comentário: Bom problema para introduzir o conceito de logaritmos.

2.5.7.5 *Situação problema*

Suponha que R$ 10.000 são investidos a uma taxa de 6% anuais. Quanto tempo será necessário para acumular R$ 20.000 na conta?

Tradução nossa.

Extraído de http://www.algebra.com, acessado em 28/04/2012

> Suppose that $10,000 is invested at 6% interest compounded annually. How long will it take to accumulate $20,000 in the account?

Comentário: Bom problema para introduzir o conceito de logaritmos.

2.5.7.6 *Situação problema*

Jonas comprou um carro novo por R$ 15000,00. Cada ano o valor do carro deprecia em 30% com relação ao ano anterior. Em quantos anos o carro valerá R$ 500,00?

Tradução nossa.

Extraído de http://tulyn.com/advanced-algebra/logarithms/, acessado em 15/03/2012

> Jonas purchased a new car for $15,000. Each year the value of the car depreciates by 30% of its value the previous year. In how many years will the car be worth $500?

Comentário: Bom problema para introduzir o conceito de logaritmos.

2.5.7.7 Situação problema

Se você aplicar 25 centavos em um banco e seu dinheiro dobrar todo ano, em quanto tempo o montante atingirá um bilhão de reais?

Tradução nossa.

Extraído de http://tulyn.com/advanced-algebra/logarithms/, acessado em 15/03/2012

> If you put 25 cents in a bank and your money doubles each year, how long will it take to have a billion dollars?

Comentário: Bom problema para introduzir o conceito de logaritmos.

2.5.7.8 Situação problema

Um juiz determinou o pagamento de uma indenização até certa data. Determinou também que, caso o pagamento não fosse feito, seria cobrada uma multa de R$ 2,00 que dobraria a cada dia de atraso. Em quantos dias de atraso essa multa seria superior a um milhão de reais?

Extraído de http://www.videoaulaestudante.com/ensino-medio-matematica/156-61-resolvendo-problemas-com-logaritmos.html, acessado em 15/03/2012

Comentário: Bom problema para introduzir o conceito de logaritmos.

2.5.7.9 Situação problema

(Unicamp SP-99) Suponha que o preço de um automóvel tenha uma desvalorização média de 10% ao ano sobre o preço do ano anterior. Se F representa o preço inicial (preço de fábrica) e p(t), o preço após t anos, pede-se:

- A expressão para p(t).
- O tempo necessário, em números inteiros de anos, após a saída da fábrica, para que um automóvel venha a valer menos que 5% do valor inicial.

Comentário: Bom problema para introduzir o conceito de logaritmos.

2.5.7.10 Situação problema

Quanto tempo demora para um investimento dobrar seu valor se ele aumenta em 15% ao ano?

Tradução nossa.

Extraído de http://lhs.jondreyer.com, acessado em 25/03/2012

> How long will it take an investment to double in value if it increases by 15% per year?

Comentário: Bom problema para introduzir o conceito de logaritmos.

2.5.7.11 Situação problema

O valor de um carro é melhor modelado por uma função exponencial, pois ele decai aproximadamente pelo mesmo percentual todo ano. Um carro novo vale R$ 25000,00. Sete anos depois, ele vale R$ 8800,00.

- Em qual taxa percentual o carro desvalorizou a cada ano?
- Que idade terá o carro quando ele valer R$ 2000,00?

Tradução nossa.

Extraído de http://lhs.jondreyer.com, acessado em 20/03/2012

> Value of a car is best modeled by an exponential function because it falls by approximately the same percentage amount each year. A new car is worth $25,000. Seven years later it is worth $8,800.
>
> a. By what percentage did the car's value fall each year?
>
> b. How old is the car when its value is $2000?

Comentário: Problema retomado do capítulo de Funções Exponenciais. A segunda pergunta pode ser utilizada para introduzir o conceito de logaritmo.

2.5.8 Soma de PA

2.5.8.1 Situação problema

(UFRJ 2003) Seu Juca resolveu dar a seu filho Riquinho uma mesada de R$ 300,00 por mês. Riquinho, que é muito esperto, disse a seu pai que, em vez da mesada de R$ 300,00, gostaria de receber um pouquinho a cada dia: R$ 1,00 no primeiro dia de cada mês e, a cada dia, R$1,00 a mais que no dia anterior. Seu Juca concordou, mas, ao final do primeiro mês, logo percebeu que havia saído no prejuízo.

- Calcule quanto, em um mês com 30 dias, Riquinho receberá a mais do que receberia com a mesada de R$ 300,00. Justifique.

Comentário: Bom problema para introduzir o conceito de soma de progressão aritmética.

2.5.8.2 Situação problema

Na compra de um terreno, foi combinado que o pagamento da primeira parcela seria efetuado um mês após a compra e teria o valor de R$ 300,00. A partir da segunda parcela o comprador pagaria R$ 35,00 a mais que a parcela anterior. Qual o total pago por um cliente que comprou o imóvel em 25 parcelas?

Extraído de http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/Produto_Wilton.pdf, acessado em 20/03/2012.

Comentário: Problema típico de soma de progressão aritmética

2.5.8.3 Situação problema

(UFSC) Uma cliente levará quantos meses para saldar uma dívida (sem cobrança de juros) de R$ 6400,00 com uma loja de móveis, pagando R$ 500,00 no primeiro mês, R$ 550,00 no segundo mês, R$ 600,00 no terceiro mês e assim por diante?

Comentário: Problema de soma de PA em que a incógnita é a quantidade de termos.

2.5.8.4 Situação problema

Um auditório possui 20 assentos na primeira fileira, 24 assentos na segunda fileira, 28 na terceira fileira e assim sucessivamente. O auditório tem 30 fileiras de assentos. Quantos assentos há no total?

Tradução nossa.

Extraído de http://www.algebralab.org/lessons/, acessado em 15/04/2012

> An auditorium has 20 seats on the first row, 24 seats on the second row, 28 seats on the third row, and so on and has 30 rows of seats. How many seats are in the theatre?

Comentário: Bom problema para introduzir o conceito de soma de PA

2.5.8.5 *Situação problema*

Toras são empilhadas em uma pilha com 10 fileiras, contendo 24 toras na fileira de baixo e 15 na fileira de cima. Cada fileira possui uma tora a mais que a de cima. Quantas toras há no total?

Tradução nossa.

Extraído de http://www.algebralab.org/lessons/, acessado em 15/04/2012

> Logs are stacked in a pile with 24 logs on the bottom row and 15 on the top row. There are 10 rows in all with each row having one more log than the one above it. How many logs are in the stack?

Comentário: Bom problema para introduzir o conceito de soma de Progressão Aritmética.

2.5.8.6 *Situação problema*

Toda hora, o relógio do vovô toca o número de vezes que corresponde à hora do dia. Por exemplo, às 3h ele soará 3 vezes. Quantas vezes o relógio soará em um dia?

Tradução nossa.

Extraído de http://www.algebralab.org/lessons/, acessado em 15/04/2012

> Each hour, a grandfather clock chimes the number of times that corresponds to the time of day. For example, at 3:00, it will chime 3 times. How many times does the clock chime in a day?

Comentário: Excelente problema prático, pode ser usado para fazer o aluno descobrir a fórmula da soma de uma PA.

2.5.8.7 *Situação problema*

(PUC-MG 2004) De segunda a sexta-feira, uma pessoa caminha na pista de 670 metros que contorna certa praça. A cada dia, ela percorre sempre uma volta a mais do que no dia anterior. Se, após andar cinco dias, ela tiver percorrido um total de 23,45 km, pode-se afirmar que, no terceiro dia, essa pessoa deu x voltas em torno da praça. O valor de x é?

<u>Comentário</u>: Este problema não requer apenas o cálculo da soma, não é adequado para introduzir o conceito. Mas pode ser utilizado como um exercício de aplicação, após o conceito assimilado.

2.5.8.8 *Situação problema*

(UERJ 2003) Dois corredores vão se preparar para participar de uma maratona. Um deles começará correndo 8 km no primeiro dia e aumentará, a cada dia, essa distância em 2 km; o outro correrá 17 km no primeiro dia e aumentará, a cada dia, essa distância em 1 km. A preparação será encerrada no dia em que eles percorrerem, em quilômetros, a mesma distância.

- Calcule a soma, em quilômetros, das distâncias que serão percorridas pelos dois corredores durante todos os dias do período de preparação.

<u>Comentário</u>: Problema muito interessante, porém, não é adequado para introduzir o conceito, por ser de maior complexidade. Pode ser utilizado como um exercício de aplicação, após o conceito assimilado.

2.5.8.9 *Situação problema*

(Fatec 2003) Dois viajantes partem juntos, a pé, de uma cidade A para uma cidade B, por uma mesma estrada. O primeiro anda 12 quilômetros por dia. O segundo anda 10 quilômetros no primeiro dia, e daí acelera o passo em meio quilômetro a cada dia que segue. Nessas condições, é verdade que o segundo:

a) alcançará o primeiro no 9º dia.

b) alcançará o primeiro no 5º dia.

c) nunca alcançará o primeiro.

d) alcançará o primeiro antes de 8 dias.

e) alcançará o primeiro no 11º dia.

Comentário: Problema de maior complexidade, pode ser utilizado como um exercício de aplicação, após o conceito assimilado.

2.5.8.10 Situação problema

Um objeto é jogado de um avião. Passado um segundo, o objeto cai 4,9m. No segundo posterior, cai mais 14,7m. No terceiro, cai 24,5m. No quarto segundo, ele cai mais 34,3m. Se o padrão continuar, quanto cairá o objeto no décimo segundo transcorrido? Ache a distância total que o objeto percorreu em 10 segundos.

Tradução nossa.

Extraído de http://www.physicsforums.com, acessado em 28/04/2012

> An object is dropped from an airplane. During the first second, the object falls 4.9 m. During the 2nd second, it falls 14.7 m. During the third second, it falls 24.5 m. During the fourth second, it falls 34.3 meters. If this pattern continues, how far will the object fall during the tenth second? Find the total distance the object will fall after 10 seconds.

Comentário: excelente problema prático, pode ser usado para fazer o aluno descobrir a fórmula da soma de uma Progressão Aritmética.

2.5.8.11 Situação problema

Numa pilha de toras, cada camada contém uma tora a mais que na camada de cima. A camada superior possui apenas uma tora. Se existem 105 toras no total, quantas camadas existem?

Tradução nossa.

Extraído de http://www.algebra.com/algebra/homework/Sequences-and-series/Sequences-and-series.faq.question.571989.html, acessado em 28/04/2012

> In a pile of logs, each layer contains one more log than the layer above and the top contains just one log. If there are 105 logs in the pile, how many layers are there?

Comentário: Problema prático, pode ser usado para fazer o aluno descobrir a fórmula da soma de uma Progressão Aritmética.

2.5.8.12 Situação problema

Uma banda de música tem 8 músicos na primeira fileira, 10 na segunda fileira, 12 na terceira, e assim por diante. Se existirem 12 fileiras, quantos músicos compõem a banda?

Tradução nossa.

Extraído de http://myclass.peelschools.org/default.aspx, acessado em 28/03/2012

> A marching band has 8 musicians in the first row, 10 musicians in the second row, 12 musicians in the third row, and so on. If there are 12 rows, how many musicians are in the band?

Comentário: Problema prático, pode ser usado para fazer o aluno descobrir a fórmula da soma de uma Progressão Aritmética.

2.5.8.13 *Situação problema*

Uma empresa que está construindo uma biblioteca teve que pagar uma multa de R$ 1000 para o primeiro dia de atraso da entrega da obra, mais R$ 1500 para o segundo dia, mais R$ 2000 para o terceiro, e assim sucessivamente. Se a empresa pagou uma multa de R$ 115.000, quantos dias atrasou a construção da biblioteca?

Tradução nossa.

Extraído de: http://www.cbsenext.com/cfw/how-do-i-find-the-sum-of-this-arithmetic-series acessado em 28/03/2012

> A company building a new library was required to pay a penalty of $1000 for the first day the completion was late, $1500 for the second day, $2000 for the third day, and so on. If the company paid a penalty of $115 000, how many days late was the completion of the library?

Comentário: Problema prático interessante sobre soma de Progressão Aritmética.

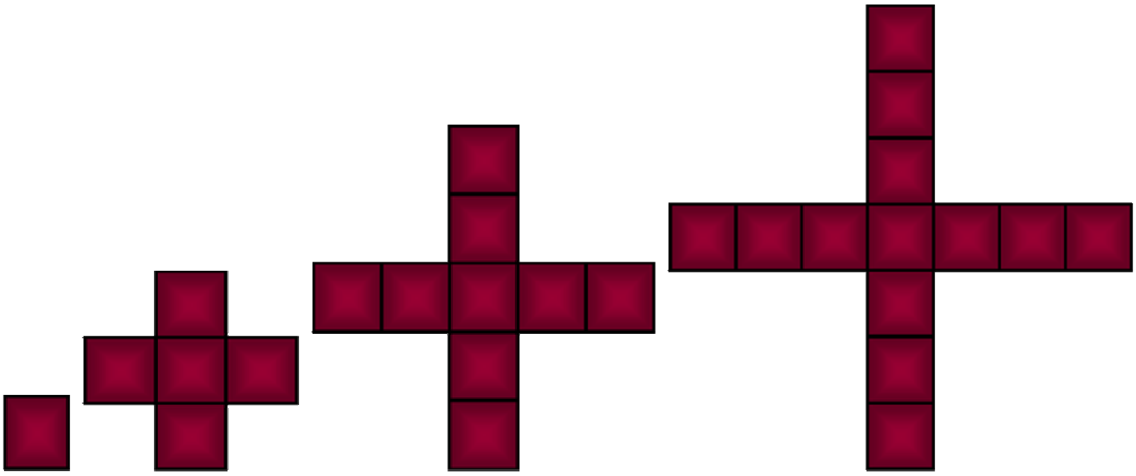
2.5.8.14 *Situação problema*

A imagem mostra os quatro primeiros diagramas de um padrão. Se o padrão continuar, qual será o número total de quadrados nos cinquenta primeiros diagramas?

Tradução nossa.

Extraído de: http://myclass.peelschools.org/default.aspx acessado em 28/03/2012

> The first four diagrams in a pattern are shown. If the pattern continues, what is the total number of squares in the first 50 diagrams?



Comentário: Bom problema; por ser visual, facilita a compreensão.

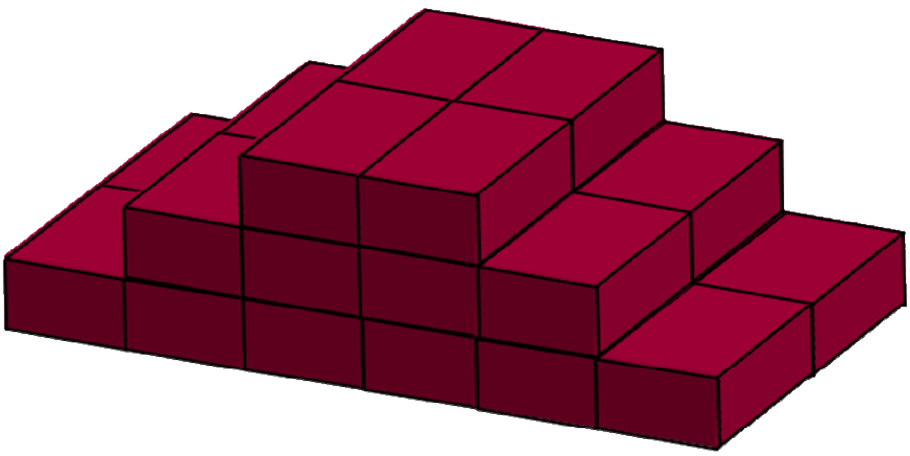
2.5.8.15 Situação problema

A imagem mostra os quatro primeiros diagramas de um padrão. Se o padrão continuar, qual será o número total de quadrados nos cinquenta primeiros diagramas?

Tradução nossa.

Extraído de: http://myclass.peelschools.org/default.aspx acessado em 28/03/2012

> The first four diagrams in a pattern are shown. If the pattern continues, what is the total number of squares in the first 50 diagrams?



Comentário: Bom problema. Por ser visual, facilita a compreensão.

2.5.9 Soma de PG

2.5.9.1 *Situação problema*

Estimativas recentes, baseadas em dados de observações de satélites, dão conta que restam 775 milhões de hectares de floresta úmida no planeta. A taxa de deflorestamento anual no mundo é de 0,77%. Quantos milhões de hectares de floresta úmida serão destruídos na próxima década?

Tradução nossa.

Extraído de http://puremath30.pbworks.com, acessado em 20/03/2012

> Recent estimates, based on data from satellite observations, report 775 million hectares of rain forest remaining. The average annual rate of deforestation in the world is 0.77%. How many million hectares of rain forest will be lost in the next decade?

Comentário: Excelente problema do mundo real. Pode ser um meio de introduzir o cálculo da soma de uma PG.

2.5.9.2 *Situação problema*

No dia primeiro de Dezembro, um menino propôs ao pai que lhe desse R$ 1, e fosse, a cada dia, dobrando o valor da quantia diária até o dia 24 de Dezembro. O filho usaria o dinheiro para comprar um presente de Natal para o pai. De quanto vai dispor o filho para comprar o presente?

Extraído de http://hermes.ucs.br/ccet/deme/calculo/restrito/calculo_3_2006_4/forumc2/arquivos/m418Trabalho_PG.pdf, acessado em 20/03/2012

Comentário: Exemplo de soma de PG crescente.

2.5.9.3 *Situação problema*

Uma bolinha é deixada cair de uma altura de um metro, e ela repica em série atingindo sequencialmente alturas de 2/3 da altura do repique anterior. Calcule a distância total percorrida pela bolinha após cinco repiques.

Tradução nossa.

Extraído de http://www.matematicamente.it/staticfiles/teoria/aritmetica, acessado em 20/03/2012

> Una pallina viene lasciata cadere da un'altezza di un metro ed esegue una serie di rimbalzi fino a 2/3 dell'altezza precedente. Calcolare lo spazio complessivo percorso dalla pallina dopo cinque rimbalzi.

Comentário: Problema prático sobre soma de PG decrescente.

2.5.9.4 *Situação problema*

Inicia-se com um casal: Adão e Eva. Suponhamos que a população humana dobre a cada 20 anos. A Bíblia diz que Adão viveu 900 anos. Quantos netos, bisnetos, etc conheceu Adão com a idade de 500 anos, cerca de metade da sua vida?

Tradução nossa.

Extraído de http://utenti.quipo.it/base5/numeri/progrgeom.htm, acessado em 28/03/2012

> Si parte con una coppia: Adamo ed Eva. Supponiamo che la popolazione umana raddoppi ogni 20 anni. La bibbia ci dice che Adamo visse 900 anni. Quanti nipoti, pronipoti, etc. poté vedere Adamo circa alla metà della sua vita, cioè quando aveva 500 anni?

Comentário: Bom problema sobre soma de PG.

2.5.9.5 Situação problema

Uma dívida será paga mensalmente, da seguinte maneira: a cada mês, paga-se 20% do saldo da dívida. Quando se pagará a metade da dívida? E a totalidade?

Extraído de “Matemática” (Walter Spinelli)

<u>Comentário</u>: Problema interessante para evidenciar as progressões convergentes e para introduzir as séries infinitas convergentes.

2.5.9.6 Situação problema

(PUC-MG) Depois de percorrer um comprimento de arco de 8 m, uma criança deixa de empurrar o balanço em que está brincando. Se o atrito diminui a velocidade do balanço de modo que o comprimento de arco percorrido seja sempre igual a 60% do anterior, a distância total percorrida pela criança, em metros, até que o balanço pare completamente, é dada pela expressão:

$D = 8 + 0{,}60 \times 8 + 0{,}60 \times 0{,}60 \times 8 + \ldots$.

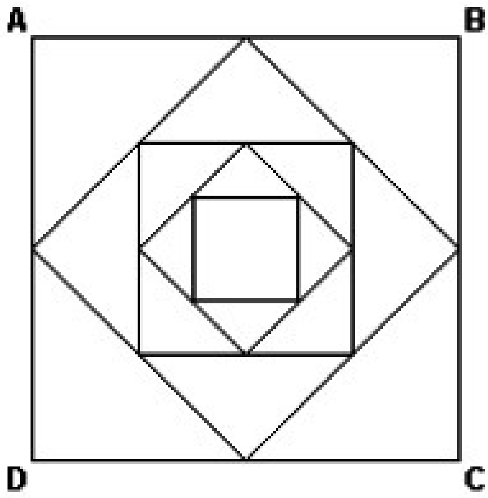
Observando-se que o segundo membro dessa igualdade é a soma dos termos de uma progressão geométrica, estime o valor de D.

<u>Comentário</u>: Bom exemplo prático de série infinita.

2.5.9.7 Situação problema

(UFSM) No piso do hall de entrada de um shopping, foi desenhado um quadrado Q□ de 10 m de lado, no qual está inscrito um segundo quadrado Q2, obtido da união dos pontos médios dos lados do quadrado anterior e, assim, sucessivamente, Q3, Q4,

..., formando uma seqüência infinita de quadrados, segundo a figura. Dessa forma, qual a soma das áreas dos quadrados?



Comentário: Ótimo problema de série infinita.

2.5.9.8 *Situação problema*

Uma bola é lançada de uma altura de 16 pés. A cada vez que ela cai, ela repica com uma altura de 80% da altura na qual caiu. Determine a distância total percorrida após 15 repiques.

Tradução nossa.

Extraído de http://www.algebralab.org/lessons/, acessado em 03/03/2012

> A ball is dropped from a height of 16 feet. Each time it drops, it rebounds 80% of the height from which it is falling. Find the total distance traveled in 15 bounces.

Comentário: Problema prático que aborda o conceito de soma de uma progressão geométrica decrescente.

2.5.9.9 Situação problema

Um cavalo percorreu 700 milhas em 7 dias, diminuindo pela metade a sua velocidade a cada dia. Quanto ele percorreu cada dia?

Tradução nossa.

Extraído de http://www.itisgiorgi.it/giochi_matematici, acessado em 03/03/2012

> Un cavallo ha percorso 700 miglia in 7 giorni, dimezzando la sua velocità ogni giorno. Quanto ha percorso ogni giorno?

Comentário: Exemplo prático de soma de PG decrescente.

2.5.9.10 Situação problema

O comprimento do primeiro salto múltiplo é de 20 polegadas. O do segundo é de 9/10 do comprimento do primeiro salto, e assim sucessivamente. Se o número de saltos for infinito, o comprimento total será finito? Se for, determine esse comprimento.

Tradução nossa.

Extraído de http://www.physicsforums.com, acessado em 03/03/2012

> The length of the first loop of a spring is 20 inches. The length of the second loop is 9/10 of the length of the first loop. The length of the third loop is 9/10 of the length of the second loop, and so on. If the spring could have infinitely many loops, would it length be finite? If so, find the length.

Comentário: Bom exercício para introduzir o conceito de séries infinitas.

2.5.9.11 *Situação problema*

Frank tinha um plano para se tornar um bilionário. Ele guardaria 1 centavo no primeiro dia, 2 centavos no segundo dia, 4 no terceiro dia, e assim por diante, dobrando o número de centavos a cada dia que passa. Quantos dias demoraria o Frank para se tornar um bilionário?

Tradução nossa.

Extraído de http://recursos.crfptic.es:9080/jspui/bitstream/recursos/284/8/Maths_Sequences.pdf , acessado em 05/03/2012

> Frank had a plan to become a billionaire. He would put aside 1 cent on the first day, 2 cents on the second day, 4 cents on the third day, and so on, doubling the number of cents each day. How many days would it take Frank to become a billionaire?

Comentário: Bom exercício para conceituar soma de progressão geométrica.

2.5.9.12 *Situação problema*

Algumas empresas utilizam uma corrente telefônica para notificar seus funcionários que estarão fechados devido ao mau tempo. Suponha que na primeira rodada de chamadas, a primeira pessoa da corrente avisa a quatro pessoas. Cada pessoa avisada faz então quatro chamadas, e assim sucessivamente. Qual o total de pessoas avisadas nas primeiras seis rodadas de chamadas?

Tradução nossa.

Extraído de http://mrskrummel.com/documents/geometryalgebra2/A2CH11B_AnswerKeyt68u.pdf , acessado em 05/03/2012

> Some companies use a telephone chain to notify employees when it is closing because of bad weather. Suppose that in the first round of calls, the first person in the chain calls four people. Each person called then makes four calls, and so on. What is the total number of people called in the first six rounds of calls?

Comentário: Bom exercício para conceituar soma de progressão geométrica.

2.5.9.13 Situação problema

O ar do interior de um balão de ar quente esfria a medida que o balão sobe. Se este ar não for continuamente esquentado o balão subirá mais lentamente a cada minuto. Suponha que um balão de ar quente suba 50m no primeiro minuto e que a cada minuto sucessivo, o balão suba apenas 70% da distância subida no minuto anterior. Qual distância sobe o balão em 7 minutos? (com aproximação de 1 metro).

Tradução nossa.

Extraído de http://www.freemathhelp.com/forum/threads/64640-Arithmetic-Grade-11-Math-Help, acessado em 05/03/2012

> The air in a hot-air balloon cools as the balloon rises. If the air is not reheated, the balloon rises more slowly every minute. Suppose that a hot-air balloon rises 50m in the first minute. In each succeeding minute, the balloon rises 70% as far as it did in the previous minute. How far does the balloon rise in 7 minutes, to the nearest meter?

Comentário: Bom exercício prático, ideal para conceituar soma de progressão geométrica.

3. Conclusão

A aplicação em sala de aula demonstrou ser esta metodologia muito apropriada para a prática de ensino. Os alunos demonstraram boa assimilação dos conceitos e uma participação mais ativa em sala, minimizando a dispersão. Vale ressaltar que os alunos, durante as atividades de resolução dos problemas, eram o elemento central do processo.

Com esta metodologia, a Matemática passa a ser vista pelos alunos como uma ciência menos formal ou abstrata, mais dinâmica e de mais fácil compreensão. As aulas se tornam menos monótonas e o aluno tem a percepção de ser a Matemática uma ciência de valor significativo para sua vida.

A participação do professor foi importante tanto na atuação como facilitador da resolução dos problemas como na institucionalização dos conceitos adquiridos.

Não foi possível mensurar a eficiência da metodologia comparativamente com outras, em função da falta de dados estatísticos. A avaliação favorável é baseada em apreciação qualitativa dos resultados e em *feedback* positivo dos próprios alunos.

Quanto o banco de problemas, este se mostrou extremamente útil para planejamento das aulas. A ordenação dos problemas por assunto e a facilidade de localização tornaram a escolha fácil e quase imediata.

Comparativamente com experiências anteriores utilizando a mesma metodologia de situações-problema, pode-se afirmar que o banco de problemas trouxe um ganho substancial no tempo de preparação da aula. Tendo em vista que o principal empecilho apontado pelos próprios professores para adotar novas metodologias é justamente o tempo de pesquisa e preparação das aulas, pode-se concluir que o banco de problemas vem sanar essa dificuldade, eliminando a possível resistência para adotar a metodologia.

Já em comparação com a metodologia clássica de aulas expositivas, o tempo de preparação de aula se demonstrou similar quando da existência do banco de problemas, ao contrário do que a maioria dos professores costuma sugerir (e com a vantagem do ganho no aprendizado do aluno).

Em síntese, esta metodologia demonstrou ser mais eficiente que a das aulas expositivas e, além disso, requer tempo de preparação de aulas equivalente quando existe previamente um banco de problemas organizado por conteúdos.

Como foi descrito na introdução deste trabalho, hoje os professores preferem aplicar a metodologia clássica pela comodidade de seguir um roteiro de aula pré-estabelecido, sem a necessidade de despender muito tempo em sua preparação.

O que se pode extrair deste estudo é que é possível planejar aulas de novos conteúdos com o auxílio de um banco de situações-problema. Este banco traz um ganho no tempo do plano de aula quando se utiliza esta metodologia.

Uma segunda etapa do estudo poderia ser o detalhamento das sequências didáticas contendo as situações-problema, o que traria um ganho ainda maior no tempo e na qualidade do planejamento da aula.

REFERÊNCIAS

- AQUINO, Júlio R. G.. **Relação professor-aluno: uma breve revisão crítica**. Didática. São Paulo: Universidade Estadual Paulista, v. 30, p. 97. 1995.

- ÁVILA, Geraldo. **Objetivos do Ensino da Matemática**. Revista do Professor de Matemática 27. 1995.

- BECKER, Fernando, MARQUES, Tania B. Iwaszko. **Aprendizagem Humana: Processo de construção**. Patio, Porto Alegre, ano 4, n.15, nov. 2000/jan 2001.

- BIAGGI, Geraldo V. **Uma nova forma de ensinar Matemática para futuros administradores: uma experiência que vem dando certo**. Revista de Ciências da Educação. XL, p. 103-113. 2000.

- CARNEIRO SOARES, Maria Teresa. **Metodologia da Resolução de Problemas.** Disponível em <*http://www.ufrrj.br/emanped/ paginas/conteudo_producoes/docs_24/metodologia.pdf*>. Consultado em 29 de abril de 2012.

- CARVALHO, Dione Lucchesi de. **A Resolução De Problemas: Uma Prática Pedagógica Inovadora?** In: XXXI Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação. Campinas: Unicamp, 2008, p. 2.

- CARVALHO, Dione Lucchesi de. **Metodologia do Ensino da Matemática**. 2.ed. São Paulo: Cortez, 1994, p.52.

- COELHO, Maria A . **A Resolução de Problemas: Uma Prática Pedagógica Inovadora?** Disponível em <*http://www.anped.org.br/ reunioes/31ra/1trabalho/GT19-3978--Int.pdf*>. Consultado em 12 de Maio de 2012.

- CUNHA, Marcus.V**. Psicologia da Educação**. Rio de Janeiro: DP&A, 2000.

- D'AMBROSIO, Ubiratan. (1986). **Da realidade à Ação: Reflexões sobre Educação (e) Matemática**. Campinas . SP: Summus/UNICAMP.

- DEMO, Pedro. **Educação e Qualidade**. Campinas: Papirus, 1996, p.30.

- DEMO, Pedro. **Sociologia da Educação**. Brasília: Plano Editora, 2004.

- ECHEVERRIA, M. DEL P.P.; POZO, J.I. **Aprender a resolver a problemas e resolver problemas para aprender.** In: POZO, J.I. (Org.). A Solução de Problemas. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 13-41.

- FIGUEIREDO CHAGAS, Elza. **Educação Matemática na sala de aula: Problemáticas e possíveis soluções.** 2001. Disponível em <*http://www.partes.com.br/ed15/educacao.asp*>. Consultado em 02 de Maio de 2012.

- GAZIRE, Eliane Scheid. **Resolução de Problemas: Perspectivas em Educação Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educ. Matemática), Rio Claro: Unesp, 1988, p.124.

- GROENWALD, Claudia Lisete de Oliveira. **A Importância do Lúdico e da Resolução de Problemas**. 2011. Disponível em <*www.unjuegodeniños.com.ar/aportes_teoricos/ importancia-ludico-resolucion-problema*s> Consultado em 03 de Maio de 2012.

- KLINE, Morris. **O fracasso da Matemática moderna**. Tradução Leônidas Gontijo de Carvalho. São Paulo: IBRASA, 1976.

- MADRUGA, J. A. G. **Aprendizagem pela Descoberta Frente à Aprendizagem pela Recepção: A Teoria da Aprendizagem Significativa**. In: COLL, C.; Palacios, J.; MARCHESI, A. (orgs). Desenvolvimento psicológico e educação: psicologia da educação. vol. 2. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

- MOREIRA, Marco. A. (2004). **A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Investigação nesta Área**. IF-UFRGS: Porto Alegre.

- MÜLLER, Iraci. **Tendências Atuais de Educação Matemática**. Ciências Humanas e Educação, Londrina, 2000, p. 133.

- ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. **Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: Unesp, 1999. p.199.

- PATERLINI, Roberto. **Aplicação da Metodologia Resolução de Problemas Abertos no Ensino Superior.** Disponível em <*http://www2.dm.ufscar.br/~ptlini/paterlini_metodol_invest.pdf*>. Consultado em 29 de abril de 2012.

- PIAGET, Jean. **O estudo de psicologia**. Rio de Janeiro: Forense, 1969.

- PÓLYA, George. **O Ensino por meio de Problemas**. Revista do Professor de Matemática, no. 7, 1985, p. 11.

- REGO, Rômulo Marinho do. **A Resolução De Problemas Como Metodologia De Ensino Da Matemática – Introdução Do Conceito Da Medida De Área**. In: VI Encontro Paraibano de Educação Matemática. João Pessoa: Universidade Estadual da Paraíba, 2010, p.1.

- SADOVSKY, Patrícia. **Falta Fundamentação Teórica no Ensino da Matemática**. Revista Nova Escola. São Paulo: 2007, p.15-17.

- SPINELLI, Walter. **Matemática. Ensino Médio**. 1ª Edição. Nova Geração. São Paulo. 2005.

- VALDÉS, Juan E. Nápoles. RAMÍREZ, Miguel Cruz. **La resolución de problemas en la escuela. Algunas reflexiones**. Educação Matemática em Revista-RS, nº 2, 2000. p. 51.

- VAN DE WALLE, J. A. **A Matemática da Escola Elementar e Média**. New York: Longman, 1999. p.221.

- VIANNA, Carlos Roberto. **Temas em Educação I, o livro das Jornadas de 2002**. pp. 401-410 – Organizado por Futuro Congressos e Eventos

- WALDHELM, Monica. **Resolução de Situações-Problema Interdisciplinares: um Caminho na Formação e Prática do Professor dos Anos Iniciais da Educação Básica**. Disponível em *<http://www.ime.uerj.br/cadernos_mat/cadmat_arquivos/V23/v23_carvalho.pdf>*. Consultado em 21 de abril de 2012.

- ZÁBOLI, G. **Práticas de Ensino e Subsídios para a Prática Docente**. 10.ed. São Paulo: Editora Ática. 1999.